

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М. В. КЕЛДЫША РАН

На правах рукописи

УСТЮГОВ Сергей Дмитриевич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖИМАЕМОЙ  
ТУРБУЛЕНТНОСТИ  
В ПРОБЛЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ ЗВЁЗД

(05.13.18, математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ)

Диссертация на соискание учёной степени доктора  
физико-математических наук

Москва — 2012

# Содержание

Введение .....	4
Глава 1. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне PRML .....	34
1.1. PRML для скалярных уравнений .....	35
1.1.1. Метод PRM .....	35
1.1.2. Метод PRML .....	38
1.1.3. Тестирование методов .....	39
1.1.4. Результаты расчетов методом PRM .....	42
1.1.5. Результаты расчетов методом PRML .....	47
1.1.6. Невязкое уравнение Бюргерса .....	52
1.2. PRML для газодинамики .....	59
1.2.1. Численная схема .....	59
1.2.2. Вычисление граничных значений кусочных парабол ..	62
1.2.3. Вычисление потоков на границах разностных ячеек ..	66
1.2.4. Тестирование .....	70
1.3. PRML для идеальной МГД .....	81
1.3.1. Уравнения идеальной МГД .....	81
1.3.2. Численная схема .....	87
1.3.3. Вычисление состояний на границах разностных ячеек	88
1.3.4. Выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ .....	91
1.3.5. Монотонизация решения .....	95
1.3.6. Тестирование .....	98
1.3.7. Моделирование сжимаемой турбулентности .....	113
1.4. Выводы по главе 1 .....	117

Глава 2. Моделирование сверхзвуковой турбулентности в молекулярных облаках .....	118
2.1. Тестирование RRM1 при моделировании сверхзвуковой изотермической турбулентности .....	119
2.2. Моделирование сверхзвуковой изотермической турбулентности .....	127
2.2.1. Закон 1/3 для сверхзвуковой гидродинамической турбулентности .....	127
2.2.2. Новые законы скейлинга для сверхзвуковой МГД турбулентности .....	130
2.2.3. Моделирование сжимаемой турбулентности при высоком разрешении .....	136
2.3. Моделирование образования молекулярных облаков .....	145
2.4. Выводы по главе 2 .....	157
Глава 3. Моделирование локальной солнечной супергрануляции .....	158
3.1. Численная модель солнечной конвекции .....	159
3.2. Гидродинамическое моделирование солнечной конвекции .....	166
3.3. МГД моделирование солнечной супергрануляции .....	173
3.4. Гелиосейсмическая инверсия трехмерных полей .....	184
3.5. Выводы по главе 3 .....	192
Заключение .....	193
Список литературы .....	195

# Введение

Исследование сжимаемой турбулентности в проблеме образования и эволюции звезд относится к числу наиболее фундаментальных и актуальных задач современной астрофизики. В настоящее время считается, что сжимаемая турбулентность является необходимым фактором регулирующим темп образования звёзд в межзвёздных молекулярных облаках. Сверхзвуковая турбулентность создает сильные флуктуации плотности в молекулярном газе, которые сжимаются под действием самогравитации. Этот процесс ведёт в конечном счете к образованию звёзд. Турбулентность играет двоякую роль в процессе звездообразования. С одной стороны, на больших масштабах, турбулентность дает динамическую поддержку молекулярному облаку, с другой стороны она облегчает локальное сжатие вещества. Таким образом, рождение звезд, в конечном счёте, определяется динамическим поведением вещества внутри родительского облака, которое определяет время и место рождения протозвёзд, как они сжимаются и растут в результате аккреции вещества из падающей внешней оболочки. Турбулентность в межзвёздной среде является сверхзвуковой, сжимаемой, замагниченной и поэтому отличается от несжимаемой турбулентности, проявляющейся на Земле, например, в атмосфере и океанах. В случае несжимаемой турбулентности диссипация энергии происходит на динамических масштабах  $\ell$  меньших масштаба  $\eta_K$ , на котором действует вязкость. Каскад энергии идет от крупных масштабов, через взаимодействие рожденных вихрей, ко все более мелким масштабам, до тех пор, пока не достигает масштаба диссипации  $\eta_K$ . В устойчивом состоянии равное количество энергии переносится от одного



масштаба к другому в инерциальном диапазоне. При этом дифференциальный спектр кинетической энергии имеет вид  $E(k)dk \propto k^{-5/3}dk$ . Турбулентное движение в межзвездной среде отличается от этой картины в следующем. Во-первых, турбулентность является сильно сжимаемой со значением числа Маха  $\mathcal{M}$  в диапазоне от единицы, в теплой диффузной среде, вплоть до значения 50 в холодных и плотных молекулярных облаках. Во-вторых, уравнение состояния газа очень мягкое, благодаря действию радиационного охлаждения, с индексом политропы, в выражении для давления  $P \propto \rho^\gamma$ , лежащим в интервале  $0.4 < \gamma < 1.2$ , в зависимости от значений давления и температуры [1]. В третьих, турбулентность направляется из множества источников, действующих на различных масштабах. Ранние попытки понять развитие турбулентности в межзвездной среде опирались на теорию несжимаемой турбулентности [2]. В работах [3, 4] был получен аналитически спектр плотности и критерий гравитационного коллапса. В последующем, несколько авторов продолжили эту работу, кульминацией которой стала работа Sasao (1973) о флуктуациях плотности в самогравитирующей среде. В статье [5], на качественном уровне, использовалась основная идея о флуктуациях плотности, создаваемых сверхзвуковой турбулентностью, в проблеме звездообразования. Техника ренормгруппы была разработана в работе [6] для исследования влияния наклона турбулентного спектра скорости на течение гравитационного коллапса. Далее этот метод применялся в численных моделях для получения эффективного индекса адиабаты для дозвуковой сжимаемой турбулентности [7]. При сверхзвуковой турбулентности ударные волны дают дополнительный источник диссипации кинетической энергии. Ударные волны могут переносит энергию между широко разделенными масштабами, удаляя тем самым локальную природу турбулентного каскада энергии характерного для несжимаемой турбулентности. Результирующий спектр кинетической энергии, в этом случае, приобретает вид  $E(k)dk \propto k^{-2}dk$ . Численные моделирования,

также как и наблюдения межзвездной среды показывают, что наклон спектра лежит в диапазоне между Колмогоровским значением  $-5/3$  и значением  $-2$  (Бюргерс турбулентность) [8]. Физическая природа турбулентности в межзвездной среде еще ясно не определена. В некоторых моделях предполагалось, что источником турбулентности на малых масштабах могут быть звездные ветры и истечения [9], процессы связанные со взрывом сверхновых [10] или расширением HII областей [11]. Другой привлекательной идеей является возникновение турбулентных течений в местах столкновения крупномасштабных сходящихся течений [12]. Численные моделирования столкновения струй теплого нейтрального газа показали, что этот процесс является достаточным, чтобы поддержать высокую степень турбулентности при образовании облаков [13]. В общем, картина звездообразования при наличии сжимаемой турбулентности выглядит следующим образом. На больших масштабах, в молекулярных облаках, турбулентность является сильно сверхзвуковой. Это означает возможность образования больших контрастов плотности, которые реально наблюдаются в молекулярных облаках, имеющих среднюю плотность около 100 частиц на один кубический сантиметр и содержащих ядра с плотностью  $10^4 \text{ cm}^{-3}$  и более. В областях образования скоплений звезд некоторые флуктуации плотности могут превышать критическую массу для начала гравитационного коллапса. Действие турбулентности приводит в начале к образованию большого количества таких флуктуаций плотности и затем под действием гравитации, из некоторой их части, образуются звезды [10]. В этом случае формируется более широкий спектр масс звезд, чем в случае образования одиночных звезд при отсутствии турбулентности. В случае ядер малой массы, турбулентность является дозвуковой и поле скорости становится более когерентным [14]. Такие структуры не подвергаются фрагментации и производят одиночные звезды или двойные системы.

Очень трудно моделировать в лаборатории физические условия про-

текания сверхзвуковой турбулентности типичные для условий молекулярных облаков и необходимая для этого информация из наблюдений также ограничена. Таким образом, численное моделирование в настоящее время представляет собой единственный способ исследовать статистику сверхзвуковой турбулентности, которая является ключевой информацией любой успешной статистической теории звездообразования [96, 98]. Долгое время природа *сильно сжимаемой* и *замагниченной* межзвездной турбулентности оставалась слабо разработанной. Численное моделирование дает возможность оценить перенос энергии между масштабами и найти ключевые пространственные корреляции между основными характеристиками турбулентных течений. Это стимулирует развитие аккуратных численных методов, удобных для моделирования сжимаемой турбулентности в молекулярных облаках, обладающих низкой численной диссипацией и широким инерционным интервалом в спектре мощности основных физических характеристик. Многие численные методы, которые успешно проходят стандартные МГД тесты, становятся неустойчивыми при решении задачи развития сверхзвуковой МГД турбулентности [93]. Добавление небольшой вязкости в численную схему, необходимой для обеспечения ее устойчивости, приводит в конечном счете к деградации турбулентных статистик [80]. Поэтому проблема численной устойчивости становится решающей для моделирования как сверхзвуковой турбулентности, так и самого процесса звездообразования.

Из наблюдений найдено, что поле скоростей в солнечной фотосфере образовано турбулентными конвективными движениями. Эти движения в свою очередь указывают на существование двух основных масштабов развития конвекции - грануляции и супергрануляции. Наличие промежуточного масштаба мезогрануляции до сих пор вызывает многочисленные споры [15]. Ячейки грануляции размером 1.5 Мм отчетливо наблюдаются в виде яркого клеточного узора, который является отображением вертикального движения газа, определенного из сдвига спек-

тральных линий. Структуры супергрануляции покрывают поверхность покоящегося Солнца с типичным горизонтальным масштабом 30 Мм и средним временем жизни около 1.8 дней. Ячейки супергрануляции легко детектируемы по картам доплеровских скоростей в виде флуктуаций горизонтальной компоненты поля скоростей, среднеквадратичное значение которых равно 360 м/сек. Также супергрануляция видна по эмиссии хромосферы в спектральных линиях Ca II и K при анализе распределения магнитного поля в покоящемся Солнце. Супергрануляция была открыта более чем 50 лет назад, однако объяснение ее физической природы остается одной из главных проблем современной солнечной физики. Много работы было проделано в ходе исследования супергрануляции, но наблюдательные ограничения, концептуальные трудности и численные проблемы стали помехой в детальном понимании феномена супергрануляции на сегодняшний день. С получением, в последнее время, мощных вычислительных возможностей и беспрецедентных наземных и космических наблюдений Солнца с высоким разрешением стало возможным осуществить большой прогресс в исследовании супергрануляции. Создание универсальной стратегии, объединяющей вычислительные мощности суперкомпьютеров и наблюдательные возможности наземных телескопов и космических аппаратов, стало особенно актуальным для решения проблемы супергрануляции.

В ходе исследования супергрануляции было предложено несколько теорий ее происхождения. В работе [16] предполагалось, что локальный минимум вертикального адиабатического градиента температуры в глубоких слоях Солнца, вызванный ионизацией He I и He II, должен способствовать образованию конвективных ячеек с горизонтальным размером сравнимым с глубиной зон ионизации. С другой точки зрения, супергрануляция может представлять собой пространственное упорядочивание большого числа маленьких конвективных ячеек. Так, например, в работе [17] показано, что ячейки мезогрануляции могут быть получены

в двумерном моделировании даже если глубина вычислительной области не достигает зон ионизации. В работах [15, 18] предполагалось, что масштаб супергрануляции возникает из-за нелинейного, коллективного взаимодействия гранул. Используя численную модель агрегации многих тел, в статье [19] показано, что перенос магнитных элементов в результате движения гранул, может производить узор супергрануляции. Уменьшение размера ячеек супергрануляции, связанное с ослаблением магнитной активности, уже недавно обсуждалось в работе [20]. Применение различных методов локальной гелиосейсмологии и долгие серии наблюдений привели к открытию волновых свойств супергрануляции [21], означающее, что супергрануляция представляет собой пример волновой конвекции.

Понимание процесса развития турбулентной конвекции в солнечной фотосфере было заметно улучшено с развитием вычислительных ресурсов. Все семейство численных моделей солнечной конвекции может быть отнесено к двум классам. В первой группе, моделирование основывалось на простой политропной модели стратифицированной атмосферы и стандартные уравнения несжимаемой и сжимаемой гидродинамики, включая вязкость, теплопроводность, магнитной диффузии решались в ограниченной области, с искусственными граничными условиями. В этом случае часто использовались спектральные методы, которые очень удобны для численного моделирования несжимаемой однородной турбулентности [22], но при этом имеют большие проблемы с моделированием сжимаемых стратифицированных течений, в частности с расчетом ударных волн и разложением величин по спектральному базису в направлении стратификации. Для решения этих проблем, вычисления в вертикальном направлении проводились с использованием конечно-разностных схем высокого порядка или компактных схем, обладающих спектральной точностью [32]. Во второй группе, моделирование проводилось с одновременным учетом динамики жидкости и таких важных физических факторов,

как перенос излучения, распределений основных физических величин из стандартной солнечной модели, реалистичного уравнения состояния, включая ионизацию гелия и водорода, реалистичных граничных условий. В этом случае, результаты численного моделирования могут быть сравнены прямо с наблюдениями. В отличие от идеализированных моделей, вычисления в большинстве случаев игнорируют физическую вязкость и основываются только на численной вязкости, применяемой для обеспечения устойчивости вычислений. Поэтому, такое моделирование не принимает в расчет все многообразие временных и пространственных масштабов диссипативных процессов. Однако недавние прямые моделирования показали, что зависимость статистических свойств различных турбулентных МГД течений от диссипативных процессов может иметь особое важное значение, например, в проблеме флуктуаций в динамомеханизме [23] генерации магнитных полей [24, 42], и для проблемы переноса углового момента магниторотационной неустойчивостью в аккреционных дисках [25, 26].

При численном моделировании солнечной супергрануляции применяются два различных геометрических приближения: локальное моделирование с использованием декартовой системы координат, выбирая в этом случае небольшой объем солнечной поверхности, и глобальное моделирование в сферической оболочке. В локальном приближении размер вычислительной области, в лучших на сегодняшний день численных моделированиях, берется равным размеру масштаба супергрануляции. Кроме того шаг численной сетки не должен быть меньше величины, необходимой для расчета конвекции на масштабе грануляции. Отметим также, что динамика на масштабе супергрануляции сильно ограничена периодическими граничными условиями в горизонтальном направлении. В глобальном, сферическом приближении наименьший масштаб сравним с размером супергрануляции, подразумевая, что эволюция масштабов супергрануляции сильно диссипативна. Динамика конвекции на масштабе

грануляции в этом приближении полностью исключена из рассмотрения. В общем, определенные ограничения каждого типа моделирования еще не позволяют исследовать нелинейную динамику и перенос энергии на масштабе супергрануляции полностью самосогласованно. Тем не менее, численное моделирование даёт полезную информацию о крупномасштабной динамике конвекции и магнитных полей в покоящемся Солнце.

Рассматривая моделирование в локальном приближении, в работе [30] осуществлена попытка исследовать динамику конвекции на масштабе мезогрануляции. В этой работе проведено трехмерное численное моделирование конвекции в приближении Буссинеска, с отношением горизонтального масштаба к вертикальному равному 20, при числе Рэлея  $5 \times 10^5$  (грубо в 1000 раз больше критического). Результаты моделирования не показали наличия масштабов супергрануляции, но было обнаружено существование медленно эволюционирующего поля скоростей на масштабе в пять раз больше размера ячеек грануляции. Типичное время корреляции и перенос энергии на масштабе мезогрануляции намного больше, чем подобные величины для турбулентной конвекции на масштабе грануляции. Авторы предположили, что развитие конвекции на масштабе мезогрануляции есть результат коллективного взаимодействия большого числа ячеек грануляции. Также они указали, что физические процессы, ответственные за образование мезогрануляции, не требуют учета стратификации плотности в солнечной фотосфере. Образование структур мезогрануляции, при большом аспектном отношении, в моделировании турбулентной конвекции в приближении Буссинекса было подтверждено в дальнейшем несколькими группами исследователей [27, 28, 29].

В работе [31] было проведено трехмерное гидродинамическое моделирование конвекции в области с аспектным отношением равным 10. Авторы наблюдали рост размера конвективных структур, но не нашли каких-либо признаков образования динамических масштабов больших,

чем у грануляции на поверхности фотосферы. Отсутствие признаков супергрануляции в этом моделировании объяснялось слабостью развития турбулентности. Кроме того численная область была не так широка и глубока, чтобы способствовать развитию крупномасштабной динамики. К тому же, в отличие от работы [30], в этих расчетах применялись открытые граничные условия для нижней границы вычислительной области и рассматривалась сильная стратификация атмосферы. Дальнейшим развитием стала работа [32], в которой авторы провели трехмерное, локальное гидродинамическое моделирование конвекции в вычислительной области с очень большим аспектным отношением  $\sim 42$ , используя политропное распределение плотности при умеренной стратификации, беря числа Рэлея, как в работе [30] и применяя отражающие граничными условиями на верхней и нижней границе вычислительной области. Результаты моделирования не показали признаков супергрануляции в спектре мощности скорости, но подтвердили существование долгоживущих и очень мощных течений на горизонтальном масштабе, превышающим в 5 раз размер грануляции. Кроме того, этот горизонтальный масштаб конвекции увеличивался медленно в течении периода времени сравнимого или превышающего временной интервал диффузии тепла в вертикальном направлении.

В работе [33] было проведено реалистичное трехмерное моделирование конвекции в области шириной 96 Мм и глубиной 20 Мм. Найдено монотонное гладкое увеличение размера конвективных ячеек с глубиной и очень малое изменение спектра мощности скорости, соответствующее супергрануляции. В работе [45] проведен подобный трехмерный численный эксперимент в вычислительной области шириной 60 Мм и глубиной 20 Мм, использующий подсеточную модель вязкости на малых масштабах конвективного движения. В итоге получен подобный результат постепенного увеличения конвективного масштаба с глубиной.



Несколько локальных моделирований развития конвекции проведено с учетом магнитного поля. Их можно разделить на два класса, по способу введения магнитного поля в начальные условия моделирования. В первом случае, исследователи вводили среднее магнитное поле заданной величины и конфигурации в начальные условия, во втором магнитное поле генерировалось в ходе моделирования, стартуя с небольшого начального возмущения магнитного поля. Эти два подхода могут производить качественно различные результаты, поскольку динамический отклик и члены в уравнении индукции ведут себя по разному в этих ситуациях.

Первая попытка моделировать локальную, солнечную МГД конвекцию была предпринята в работе [34]. Рассматривалась сильно стратифицированная магнитоконвекция, в сильном магнитном поле, при различных значениях аспектного отношения, вплоть до 8. Результаты моделирования показали, что магнитное поле стремилось отделиться от конвективного движения. Аналогичное моделирование со слабым магнитным полем [35] обнаружило, что магнитное поле концентрировалось в ячеистую структуру на масштабах мезогрануляции, также как в спокойном Солнце.

Крупномасштабные моделирования МГД конвекции в приближении Буссинеска, в турбулентном режиме были проведены в работах [36, 37, 38]. В отсутствии начального среднего магнитного поля результаты показали, что мелкомасштабное, хаотическое магнитное поле, созданное динамо механизмом, организуется в крупномасштабные магнитные структуры на масштабе супергрануляции. В противоположном пределе сильного среднего магнитного поля, было обнаружено, что основной масштаб турбулентной конвекции сильно уменьшается магнитным натяжением. Также необходимо отметить работы [39], [40] и [130], в которых исследовался процесс образования магнитных слоев и точечных концентраций магнитного потока на масштабах мезогрануляции. В первом случае при-

менялось идеальное приближение к моделированию трехмерной сжимаемой магнитоконвекции со слабым магнитным полем, во втором случае использовалось реалистичное приближение с начальным однородным, горизонтальным магнитным полем. Также заслуживает внимания работа [42], в которой было проведено исследование генерации магнитных полей динамо-механизмом в реалистичном численном моделировании при умеренном аспектном отношении вычислительной области.

Трехмерное моделирование локальной МГД конвекции с реалистичной физикой на масштабе супергрануляции было впервые проведено в работах [43, 44, 46]. Вычисления проводились в расчетной области шириной 60 Мм и глубиной 20 Мм. В начальный момент времени в области задавалось однородное вертикальное магнитное поле величиной 50 Гс. Результаты моделирования показали образование крупномасштабной структуры супергрануляции, концентрацию магнитного поля в расширенных областях размером около 5 Мм и в слоях, расположенных по краям ячеек супергрануляции. После этого в работе [47] было проведено МГД моделирование конвекции в области 48 Мм шириной и 20 Мм глубиной с магнитным полем, начально введенным на нижней границе расчетной области в форме однородного горизонтального потока. Хотя время моделирования только соответствовало времени жизни супергрануляции, результаты работы показали, что выметание магнитных элементов к границам ячеек супергрануляции приводит к образованию ячеистой структуры магнитного поля, во многом схожей с той, что была первоначально получена в работе [46].

Таким образом численное моделирование супергрануляции становится очень активной областью исследований. Большинство недавних крупномасштабных моделей успешно воспроизводят наблюдения фотосферной солнечной магнитоконвекции в масштабе от грануляции до супергрануляции. Одним из главных достижений исследования супергрануляции

является очень хорошее совпадение результатов численного моделирования с данными реальных наблюдений, обработанных методами гелиосейсмологии [48, 49].

### **Цели диссертации :**

1. Разработка численного метода высокого порядка с низкой численной диссипацией с хорошими спектральными характеристиками для моделирования сжимаемой МГД турбулентности для задачи звездообразования.

2. Исследование сверхзвуковой МГД турбулентности в задаче образования звёзд. Получение универсальных спектральных характеристик форсированной турбулентности для изотермического и мультифазного случая.

3. Исследование локальной солнечной супергрануляции с реалистичной физикой с учетом магнитного поля. Определение характерных масштабов развития солнечной конвекции.

### **Научная новизна :**

1. Для гиперболических законов сохранения предложена разностная схема повышенного порядка точности с низкой численной диссипацией. Схема позволяет с высоким разрешением моделировать турбулентные сверхзвуковые МГД течения без возникновения нефизических осцилляций на основных МГД разрывах и искажения спектральных характеристик турбулентности.

2. Построена новая физико-математическая модель сжимаемой МГД турбулентности действующей при образовании иерархических крупномасштабных структур в диффузной межзвездной среде и в областях звездообразования в плотных молекулярных облаках. В основе модели лежит представление о турбулентности как механизме преобразования кинетической энергии поступающей от внешних источников на больших масштабах при одновременном действии случайной вынуждающей силы. В рамках этой модели впервые в мировой практике показано, что закон

4/3 для несжимаемой МГД турбулентности может быть расширен для сверхзвуковых турбулентных течений.

3. Разработана не имеющая мировых аналогов трехмерная численная модель эволюции конвекции на масштабе супергрануляции, учитывающая подсеточные модели турбулентности, реалистичное уравнение состояния звездного вещества, начальное распределение физических величин согласно стандартной солнечной модели, действие гравитации, магнитного поля, переноса радиационного излучения.

4. Впервые в мировой практике проведено трехмерное численное МГД моделирование локальной солнечной супергрануляции. Получено, что характерные масштабы развития конвекции увеличиваются с глубиной солнечной фотосферы, магнитное поле концентрируется в расширенных областях, характеризующихся подавлением конвекции и в слоях, расположенных по краям ячеек супергрануляции.

5. Проведена разработка и реализация параллельного комплекса программ. В процессе проведения расчетов получено подтверждение высокой работоспособности и параллельной эффективности.

### **Научная и практическая ценность :**

Полученные в диссертации результаты важны для понимания физики образования иерархических структур в диффузной межзвездной среде и в областях звездообразования в плотных молекулярных облаках. Научная ценность диссертационной работы состоит в разработке новых подходов к изучению сжимаемой МГД турбулентности в проблеме звездообразования, в нахождении новых универсальных спектральных характеристиках сверхзвуковой турбулентности. Практическая значимость работы связана с проведением численного моделирования турбулентности, получение результатов моделирования, которые можно использовать для выяснения физической природы турбулентности и для сравнения с результатами наземных и космических наблюдений. Основные результаты опубликованы в авторитетных научных изданиях и используются как у

нас в стране, так и за рубежом.

### **Апробация работы :**

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Института прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН, Университета Стэнфорда(США), Университета Аризона(США), Университета Принстона(США), Университета Риверсайда(США), Университета Нортриджа(США), Университета СанДиего(США), а также на следующих конференциях и симпозиумах: Международная конференция SOHO 14 / GONG 2004 "Helio- and Asteroseismology: Towards a Golden Future" (США, 2004); Международная конференция "Large-scale Structures and their Role in Solar Activity"(США, 2004); Международная конференция "Solar MHD Theory and Observations: A High Spatial Resolution Perspective" (США, 2005); Международная конференция "Numerical Modeling of Space Plasma Flows: Astronom-2006"(США, 2006); Международная конференция "FIFTY YEARS OF ROMANIAN ASTROPHYSICS"(Румыния, 2006); Международная конференция "Subsurface and Atmospheric Influences on Solar Activity"(США, 2007); Международная конференция "EXPLORING THE SOLAR SYSTEM AND THE UNIVERSE"(Румыния, 2007); Международная конференция "Solar-Stellar Dynamos as Revealed by Helio- and Asteroseismology"(США, 2008); Международная конференция "Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems, Theory, Numerics, Applications"(Франция, 2006); Международная конференция "13th International Conference on Hyperbolic Problems, Theory, Numerics, Applications"(Китай, 2010); Международная конференция "HELAS II International Conference - Helioseismology, Asteroseismology and MHD Connections"(Германия, 2007); Международное совещание "Solar polarization 5"(Швейцария, 2007); Международная конференция "Turbulent Mixing and Beyond"(Италия, 2009); Международная конференция "Тихонов и прикладная математика"(Россия, 2006); Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные

пространства. Теория приближений"(Россия, 2008). Международный симпозиум IAU 270 "Computational Star Formation"(Испания, 2010);

### **Достоверность представленных результатов :**

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов исследования сжимаемой турбулентности обеспечивается применением хорошо обоснованных численных методов, устойчивостью и сходимостью использованных разностных схем, сравнением с имеющимися данными из наземных наблюдений и космических спутников, наличием публикаций и докладов, обсуждением полученных результатов на различных конференциях и семинарах.

### **Личный вклад автора :**

В совместных работах по моделированию сжимаемой МГД турбулентности вклад автора в постановку решенных задач и в интерпретацию полученных результатов был равным вкладом других соавторов, а само решение задач и соответствующие вычисления были выполнены диссертантом. Вклад автора в разработку численного метода PRML и в моделирование солнечной конвекции на масштабе супергрануляции был основным.

### **Основные результаты :**

1. Разработан новый численный метод PRML (кусочно-параболический метод на локальном шаблоне) для решения уравнений гиперболического типа в виде законов сохранения. Проведена практическая проверка метода PRML на многочисленных задачах-тестах, показавшая высокий порядок точности и низкую численную диссипацию метода. Метод PRML позволяет моделировать сверхзвуковые турбулентные МГД течения без появления нефизических осцилляций на МГД разрывах и искажения спектральных характеристик турбулентности.

2. Проведено трехмерное численное моделирование изотермической сверхзвуковой МГД турбулентности для оценки и сравнения метода PRML с популярными в астрофизике МГД программами, применяемые для ис-

следования проблемы звездообразования. Найдено, что метод PRML в совокупности лучше других методов отражает спектральные характеристики сверхзвуковой турбулентности.

3. Создан комплекс программ для моделирования сверхзвуковой МГД турбулентности на современных суперкомпьютерах в проблеме образования звезд и формирования иерархической структуры молекулярных облаков. Проведено трехмерное численное моделирование сжимаемой, форсированной МГД турбулентности при различных значениях магнитного поля. Показано, что образование ядер протозвезд происходит в сверхальвеновском режиме, скорость переноса энергии постоянна в инерционном интервале, закон  $4/3$  для несжимаемой МГД может быть перенесен на сверхзвуковые турбулентные течения.

4. Построена численная модель сжимаемой МГД турбулентности для решения проблемы формирования иерархической структуры молекулярных облаков и образования ядер протозвезд в темных облаках. В основе модели лежит представление о турбулентности как механизме преобразования кинетической энергии, поступающей от внешних источников на больших масштабах, в присутствии случайной вынуждающей силы.

5. Проведено трехмерное численное МГД моделирование локальной солнечной конвекции на масштабе супергрануляции с реалистичной физикой. В расчетах получено, что характерные масштабы конвекции растут при движении вглубь от поверхности солнечной фотосферы, магнитное поле концентрируется по краям ячеек супергрануляции и в расширенных областях, где наблюдается подавление конвекции. Средний радиус крупномасштабных конвективных ячеек, обнаруженный в моделировании, соответствует наблюдаемым размерам ячеек супергрануляции.

### **Объем и структура диссертации :**

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Общий объём диссертации 205 страниц, включая 74 рисунка, 11 таблиц и список

литературы из 152 наименований.

**Публикации по теме диссертации :**

1. М. В. Попов, С. Д. Устюгов, Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 47:12 (2007), 2055–2075
2. М. В. Попов, С. Д. Устюгов, Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для идеальной магнитной газодинамики, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 48:3 (2008), 505–528
3. Ustyugov S.D., Popov M.V., Kritsuk A.G., Norman M.L., Piecewise parabolic method on a local stencil for magnetized supersonic turbulence simulation, *J. Comput. Phys.*, 228:20 (2009), 7614–7633
4. Kritsuk, Alexei G.; Nordlund, Ake; Collins, David; Padoan, Paolo; Norman, Michael L.; Abel, Tom; Banerjee, Robi; Federrath, Christoph; Flock, Mario; Lee, Dongwook; Li, Pak Shing; Muller, Wolf-Christian; Teyssier, Romain; Ustyugov, Sergey D.; Vogel, Christian; Xu, Hao, Comparing Numerical Methods for Isothermal Magnetized Supersonic Turbulence, 2011, *Astroph. J.*, 737, 13.
5. Svanda, M.; Gizon, L.; Hanasoge, S. M.; Ustyugov, S. D., Validated helioseismic inversions for 3D vector flows, 2011, *Astron. Astroph.*, 530, A148.
6. Ustyugov, S. D., Realistic magnetohydrodynamical simulation of solar local supergranulation, 2010, *Physica Scripta*, 142, 014031.
7. Попов М.В., Устюгов С.Д., Чечеткин В.М, Граничные условия при численном моделировании тепловой вспышки сверхновой типа 1a, *Астрономический журнал*, 2005, т.82, № 6, 505.
8. Попов М.В., Устюгов С.Д., Чечеткин В.М, Развитие геометрической структуры дефлаграционного фронта термоядерного горения в сверхновых типа 1a, *Астрономический журнал*, 2004, т.81, № 11, 1011.
9. С. Д. Устюгов, Д. О. Устюгов, Моделирование эволюции лазерной плазмы во внешнем магнитном поле различной конфигурации, *Матем. моделирование*, 23:3 (2011), 49–59



10. Д. О. Устюгов, С. Д. Устюгов, Моделирование радиационного разлета лазерной плазмы во внешнем магнитном поле, Матем. моделирование, 21:11 (2009), 33–46
11. Д. О. Устюгов, С. Д. Устюгов, Эволюция лазерной плазмы во внешнем магнитном поле, Матем. моделирование, 20:8 (2008), 74–86
12. А. Я. Калинов, С. А. Климов, М. А. Посыпкин, Г. И. Савин, С. Д. Устюгов, В. М. Чечёткин, Б. М. Шабанов, Математическое моделирование на параллельном компьютере задачи о взрыве сверхновой, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 44:5 (2004), 953–960
13. Устюгов С.Д., Попов М.В., Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса, Препринт ИПМ № 65, Москва, 2006, с.21.
14. Устюгов С.Д., Попов М.В., Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. II. Уравнения газодинамики, Препринт ИПМ № 71, Москва, 2006, с.22.
15. Устюгов С.Д., Попов М.В., Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. III. Одномерная идеальная МГД, Препринт ИПМ № 78, Москва, 2006, с.27.
16. Устюгов С.Д., Попов М.В., Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. IV. Многомерная идеальная МГД, Препринт ИПМ № 11, Москва, 2007, с.30.
17. Устюгов С.Д., Попов М.В., Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. V. Трёхмерная изотермическая турбулентность, Препринт ИПМ № 81, Москва, 2007, с.24.
18. Mikhail Popov, Sergey Ustyugov, Piecewise parabolic method on a local stencil for hyperbolic conservation laws, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, Amer. Math. Society, 2010, v.67, pt. 2, p. 869-878.
19. S. D. Ustyugov, Three-Dimensional Numerical MHD Simulations of Solar Convection, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, IV, Springer, 2008, p. 1061-1068.

20. Sergei D. Ustyugov, Alexander N. Andrianov. Three dimensional numerical modelling of convective instability by supernova explosion with nested grids scheme on multiprocessors systems, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Springer, 2003, pp. 899-903.
21. Padoan, Paolo; Lunttila, Tuomas; Juvela, Mika; Nordlund, Ake; Collins, David; Kritsuk, Alexei; Norman, Michael; Ustyugov, Sergey, *Magnetic Fields in Molecular Clouds, Astrophysical Dynamics: From Stars to Galaxies*, in proc. of the International Astronomical Union, IAU Symposium, 2011, Volume 271, p. 187-196
22. Kritsuk, Alexei G.; Ustyugov, Sergey D.; Norman, Michael L., *Interstellar Turbulence and Star Formation, Computational Star Formation, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, 2011, Volume 270*, p. 179-186
23. Kritsuk, A. G.; Ustyugov, S. D.; Norman, M. L.; Padoan, P., *Self-organization in Turbulent Molecular Clouds: Compressional Versus Solenoidal Modes, Numerical Modeling of Space Plasma Flows, Astronom-2009, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2010*, p.15
24. Padoan, P.; Kritsuk, A. G.; Lunttila, T.; Juvela, M.; Nordlund, A.; Norman, M. L.; Ustyugov, S. D., *MHD Turbulence In Star-Forming Clouds, PLASMAS IN THE LABORATORY AND THE UNIVERSE: Interactions, Patterns, and Turbulence. AIP Conference Proceedings, Volume 1242*, pp. 219-230 (2010).
25. Ustyugov, S. D., *Realistic Magnetohydrodynamical Simulations of Local Solar Supergranulation, Solar-Stellar Dynamos as Revealed by Helio- and Asteroseismology: GONG 2008/SOHO 21 ASP Conference Series, Vol. 416, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2009*, p.427.
26. Kritsuk, Alexei G.; Ustyugov, Sergey D.; Norman, Michael L.; Padoan, Paolo, *Simulating supersonic turbulence in magnetized molecular clouds, Journal of Physics: Conference Series, Volume 180, Issue 1*, pp. 012020 (2009).
27. Kritsuk, A. G.; Ustyugov, S. D.; Norman, M. L.; Padoan, P., *Simulations*

- of Supersonic Turbulence in Molecular Clouds: Evidence for a New  
Universality, Numerical Modeling of Space Plasma Flows: ASTRONUM-2008  
ASP Conference Series, Vol. 406, San Francisco: Astronomical Society of the  
Pacific, 2009, p.15.
28. Kritsuk, Alexei; Ustyugov, S. D.; Norman, M. L.; Padoan, P., Simulations  
of Supersonic Turbulence in Magnetized Molecular Clouds, AAS Meeting  
N213, N485.10; Bulletin of the American Astronomical Society, 2009, Vol.  
41, p.457.
29. Ustyugov, Sergey D., Realistic Simulation of Local Solar Supergranulation,  
EXPLORING THE SOLAR SYSTEM AND THE UNIVERSE. AIP  
Conference Proceedings, Volume 1043, pp. 234-237 (2008).
30. Ustyugov, S. D., Large Eddy Simulation of Solar Photosphere Convection  
with Realistic Physics, Subsurface and Atmospheric Influences on Solar  
Activity ASP Conference Series, Vol. 383, San Francisco: Astronomical Society  
of the Pacific, 2008, p.43.
31. Ustyugov, Sergey D., Numerical Simulation of Solar Magnetoconvection  
with Realistic Physics, FIFTY YEARS OF ROMANIAN ASTROPHYSICS.  
AIP Conference Proceedings, Volume 895, pp. 109-114 (2007).
32. Ustyugov, S. D., Magnetohydrodynamic Simulation of Solar  
Supergranulation, Numerical Modeling of Space Plasma Flows: Astronum-  
2006 ASP Conference Series, Volume 359, San Francisco: Astronomical Society  
of the Pacific., 2006, p.226.
33. Ustyugov, S. D., Three Dimensional Numerical Simulation of MHD Solar  
Convection on Multiprocessor Supercomputer Systems, Solar MHD Theory  
and Observations: A High Spatial Resolution Perspective ASP Conference  
Series, Vol. 354, San Francisco: Astron. Society of the Pacific, 2006, p.115.
34. Ustyugov, S. D., Three Dimensional Numerical Simulation of Solar  
Convection on Multiprocessors Supercomputer Systems, Large-scale  
Structures and their Role in Solar Activity ASP Conference Series, Vol. 346,  
2005, p.357.

## Содержание работы :

Во **Введении** обосновывается актуальность и формулируются основные цели проведенных в диссертации исследований. Изложено краткое содержание диссертационной работы.

В **главе 1** "Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне РРМЛ" представлен новый численный метод РРМЛ для решения уравнений гиперболического типа в виде законов сохранения, имеющий высокий порядок точности и низкую численную диссипацию. Построение метода и его основные свойства подробно рассмотрены на примере уравнений скалярного типа и системы уравнений газодинамики. Для проверки вычислительных качеств метода проведено большое число тестовых расчетов и решение модельной задачи об эволюции сжимаемой МГД турбулентности.

В *параграфе 1.1* "РРМЛ для скалярных уравнений" дано описание нового метода РРМЛ для решения скалярных уравнений гиперболического типа. Основная идея метода РРМЛ состоит в использовании информации о решении с предыдущего временного слоя, перенесенной вдоль характеристик гиперболической системы уравнений, с целью получения состояний на границе численной ячейки. Эти состояния в дальнейшем используются для нахождения граничных значений физических переменных, необходимых для построения кусочной параболы. Проведено сравнение ошибок в решении уравнения переноса методом РРМЛ и популярным методом РРМ в различных вычислительных нормах. Найдено, что метод РРМЛ уменьшает ошибки во всех рассмотренных нормах и обладает меньшей диссипацией, чем схема РРМ. Проведено исследование свойств метода РРМЛ в задаче образования, движения и столкновения ударных волн и формирования областей разрежения при решении уравнения Бюргерса. Метод РРМЛ позволяет улучшить решение в областях разрежения без потери точности в остальном пространстве. Проведенные исследования говорят о повышении точности численного решения

при использовании метода РРМЛ.

В параграфе 1.2 "РРМЛ для газодинамики" метод РРМЛ расширен для решения системы уравнений газодинамики. Используется свойство сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений для построения состояний на границах ячеек. Чтобы воспользоваться этим свойством, необходимо линеаризовать систему уравнений газодинамики, зафиксировав базис правых и левых собственных векторов в каждой разностной ячейке. Граничные состояния в областях немонотонного решения переопределяются согласно стандартному методу РРМ и процедуры монотонизации, сохраняющей порядок схемы. При вычислении граничных значений кусочных парабол в методе РРМЛ в многомерном случае учитываются изменения амплитуд волн в поперечных направлениях для преодоления нефизичных осцилляций в решениях. Поток на границе между ячейками определяется из решения задачи Римана о распаде разрыва при помощи численного метода Роу, который относительно прост в реализации и обладает низкой схемной вязкостью. Для получения второго порядка аппроксимации потоков по времени применяется процедура усреднения амплитуды волн по области ее влияния, аналогично методике РРМ. Решение одно- и двухмерных тестовых задач показывает, что метод РРМЛ с высокой точностью передает все газодинамические разрывы и обладает низкой диссипацией.

В параграфе 1.3 "РРМЛ для идеальной МГД" представлена численная схема для решения задач многомерной идеальной МГД, основанная на методе РРМЛ. Исходная система МГД линеаризуется для каждой разностной ячейки при фиксировании базиса собственных векторов. После этого используется свойство сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений для определения состояний на границах разностных ячеек. В этом случае для каждой ячейки получают свои граничные состояния, их значения на общем интерфейсе для левой и правой ячейки не совпадают.

Для "сшивки" состояний необходимо решить задачу Римана о распаде разрыва между ними, перейдя при этом от простых переменных к консервативным. Граничные состояния в областях немонотонного решения переопределяются согласно одномерной процедуры монотонизации, сохраняющей порядок схемы и многомерного алгоритма монотонизации, удаляющего локальные выбросы в решении. Вычисление потоков на границе между ячейками проводится по методике разработанной для случая газодинамике. Для обеспечения выполнения условия бездивергентности магнитного поля применяется подход, основанный на теореме Стокса и определения значений электрического поля из соответствующих компонент векторов потоков системы уравнений МГД. Решение одно- и двухмерных тестовых задач МГД показывает, что метод PRML дает отличное представление как гладких, так и разрывных решений.

В *параграфе 1.4* "Моделирование сжимаемой турбулентности" метод PRML применяется для решения трудной проблемы расчета форсированной суперальвеновской турбулентности. Многие численные методы, которые успешно проходят стандартные МГД тесты, становятся неустойчивыми при решении этой задачи [93]. Добавление небольшой вязкости в численную схему для обеспечения ее устойчивости, приводит в конечном счете к деградации турбулентных статистик [80]. Поэтому проблема численной устойчивости становится решающей для моделирования, как сверхзвуковой турбулентности, так и самого процесса звездообразования. Моделирование сжимаемой турбулентности при различных значениях уровня магнетизации вещества показывают, что метод PRML является идеально устойчивым методом, обладает широким спектральным диапазоном и не искажает спектральных характеристик турбулентности. Все это делает его идеальным численным методом для крупномасштабного моделирования сжимаемой сверхзвуковой турбулентности.

В *параграфе 1.5* сформулированы основные выводы по главе 1.

В **главе 2** "Моделирование сверхзвуковой турбулентности в моле-

кулярных облаках" проводится сравнение численного метода с другими популярными программами при моделировании сверхзвуковой МГД распадающейся турбулентности. Представлены результаты численного моделирования сверхзвуковой МГД турбулентности для изотермического случая в проблеме звездообразования и для мультифазного случая при исследовании образования молекулярных облаков. Рассмотрены основные спектральные характеристики турбулентности и получен новый универсальный закон подобия для сжимаемой МГД турбулентности.

В *параграфе 2.1* "Тестирование RPML при моделировании сверхзвуковой изотермической турбулентности" проводится сравнение RPML с известными численными кодами в решении проблемы эволюции сверхальеновской изотермической турбулентности при отсутствии внешней случайной силы, стартуя с одинаковых начальных условий. Анализ спектра мощности скорости и магнитной энергии в моменты времени  $t = 0.02$ ,  $0.06$ , и  $0.2$  показывает, что RPML обладает в совокупности наименьшей численной диссипацией среди представленных программ. На основе оценок ширины спектральной полосы и чисел Рейнольдса для скорости и магнитного поля сделан вывод, что метод RPML обладает наилучшими диссипативными свойствами среди всех численных методов, представленных в моделировании разрушенной турбулентности.

В *параграфе 2.2* "Моделирование сверхзвуковой изотермической турбулентности" даны результаты численного моделирования сверхзвуковой МГД турбулентности для изотермического случая в проблеме звездообразования. Проведен анализ основных спектральных характеристик и законов подобия для сжимаемой изотермической МГД турбулентности. Спектр мощности логарифма проекционной плотности газа масштабируется как  $k^{-1.79}$ ,  $k^{-1.64}$ , и  $k^{-1.52}$  при значениях плазменного параметра  $\beta_0 = 20$ ,  $2$ , и  $0.2$ , соответственно. Получено, что при увеличении магнитного поля и числа Маха спектр плотности становится более плоским. Величина наклона спектра скорости в степенном законе уменьшается как

-1.94, -1.62, -1.51 для  $\beta_0 = 20, 2$ , и  $0.2$ , соответственно, спектр скорости с увеличением магнитного поля становится более плоским. Это означает, что величина наклона  $-1.8$  для спектра скорости, полученная из наблюдений молекулярных облаков, согласуется со свехальвеновской природой турбулентности. В свехальвеновском случае при  $\beta = 20$  результаты подобны для незамагниченных течений, в которых величина наклона спектра скорости  $-1.94$  близка к  $-2$  для закона Бюргера и величина наклона в спектре  $P(\rho^{1/3}\mathbf{u}, k) \sim k^{-1.7}$  близка к значению в спектре Колмогорова. Показано, что образование ядер звёзд происходит в свехальвеновском режиме, скорость переноса энергии постоянна в инерционном интервале, закон  $4/3$  для несжимаемой МГД может быть перенесен на сверхзвуковые турбулентные течения. Проведено сравнение уровней насыщения для нескольких интегральных характеристик турбулентности для моделей с тремя различными разрешениями  $256^3$ ,  $512^3$ , и  $1024^3$  при плазменном параметре  $\beta_0 = 2$ . Кинетическая энергия показывает сходимость уже на сетке  $256^3$ , тогда как уровень насыщения магнитной энергии зависит от разрешения сетки, обусловленный численной диффузией, подавляющей сжатия мелких масштабов, и действием мелкомасштабного динамо. Из результатов МГД моделирования при  $\beta_0 = 2$  найдено, что плотность вероятности распределения плотности имеет логнормальную форму с идеальной совпадением порядка  $\sim 10^8$  по вероятности при больших плотностях. По сравнению с немагнитным случаем при  $M_s = 6$ , логнормальное распределение в МГД случае при  $M_s = 10$  является более широким при больших числах Маха.

В параграфе 2.3 "Моделирование образования молекулярных облаков" предложена новая теоретическая модель межзвездной среды, подвергающейся нелинейным взаимодействиям и самоорганизации в галактических дисках. Межзвездная среда рассматривается как система с турбулентностью, в которой кинетическая энергия, введенная на больших масштабах, например в результате взрыва сверхновых, переносится от



крупных масштабов к мелким в результате каскадного процесса. Межзвездная среда подвергается действию различных потоков энергии, и саморганализация возникает в результате процесса релаксации посредством нелинейных взаимодействий различных физических составляющих системы при условии выполнения законов сохранения для МГД случая. В этой картине, молекулярные облака с их внутренней иерархической структурой образуются как диссипативные структуры - активные области сильно перемежающегося турбулентного каскада, который преобразует кинетическую энергию при действии случайной вынуждающей силы. Проведено численное моделирование несколько простых моделей в периодической коробке, в которых учитывается искусственная крупномасштабная соленоидальная сила для имитации переноса кинетической энергии от различных галактических источников. Результаты моделирования показали, что среднеквадратичное магнитное поле усиливается под действием случайной силы и насыщается при переходе системы к устойчивому стационарному состоянию. Уровень насыщения зависит от величины магнитного поля  $B_0$  и от скорости подачи кинетической энергии крупномасштабной силой, которая в свою очередь определена  $u_{\text{rms}}$  и  $n_0$ . Анализ фазовой диаграммы показывает, что турбулентность дает вклад в широкий диапазон теплового давления и также, что  $p_{\text{th}}$  в молекулярном газе с концентрацией ( $n > 100 \text{ см}^{-3}$ ) есть выше, чем для диффузной межзвездной среды, даже несмотря на то, что самогравитация игнорирована в модели. Эффект магнитного поля на плотность вероятности распределения (PDF) плотности очевидно очень слаб в среднем, и часть PDF, соответствующая высокой плотности, может быть хорошо аппроксимирована логнормальной формой, как и в изотермическом случае. Взвешенное по массе распределение давления полученное в нашей модели сравнивается с распределением реконструированным из наблюдений с высоким разрешением УФ спектра горячих звёзд [127]. Модели с  $u_{\text{rms}} = 16 \text{ км/сек}$  воспроизводят как форму, так и ширину наблюдаемых

распределений вполне отчетливо. Численные эксперименты позволяют определить уровень силы магнитного поля в молекулярных облаках. Существует ясно положительная корреляция  $M_A \sim n^{0.4}$  и большая часть плотного вещества ( $n > 100 \text{ cm}^{-3}$ ) попадает в сверхальвеновскую часть распределения. Ключ к пониманию происхождения этого сверхальвеновского режима в холодном и плотном молекулярном газе лежит в процессе самоорганизации в замагниченной межзвездной турбулентности. Если молекулярные облака образуются в турбулентной межзвездной среде через крупномасштабное сжатие диффузного HI, тогда турбулентность в таких молекулярных облаках может быть только сверхальвеновской [128].

В *параграфе 2.4* сформулированы основные выводы по главе 2.

В **главе 3** "Моделирование локальной солнечной супергрануляции" проведено трехмерное численное моделирование методом крупных вихрей фотосферной, локальной солнечной конвекции, используя реалистичную физическую модель. Исследована тепловая структура конвективных движений в верхней радиационной зоне фотосферы, диапазон возникающих размеров конвективных ячеек и глубина проникновения конвекции вглубь от поверхности Солнца. Рассмотрена временная эволюция и рост крупных конвективных мод на масштабе мезогрануляции и супергрануляции. Исследовано влияние магнитного поля на развитие локальной конвекции на масштабе супергрануляции. Рассмотрено применение методов пространственно-временной гелиосейсмологии для получения информации о внутренних движениях вещества в солнечной фотосфере.

В *параграфе 3.1* "Численная модель солнечной конвекции" описана трехмерная численная модель эволюции конвекции на масштабе супергрануляции, учитывающая подсеточные модели турбулентности, реалистичное уравнение состояния звездного вещества, начальное распределение физических величин согласно стандартной солнечной модели, дей-

ствие гравитации, переноса радиационного излучения. Эволюция всех консервативных переменных во времени рассчитывалась с помощью явной TVD консервативной разностной схемы [135], основанная на локально-характеристическом методе вычисления потоков вдоль каждого пространственного направления и сохраняющая локальный баланс градиента давления и силы гравитации.

В параграфе 3.2 "Гидродинамическое моделирование солнечной конвекции" представлены результаты гидродинамического моделирования локальной солнечной конвекции на масштабе супергрануляции с реалистичной физикой. Результаты моделирования показали, что с увеличением глубины размер конвективных ячеек растёт и их число соответственно уменьшается. На глубине 2-5 Мм средний размер ячеек составляет 10-15 Мм, в то время как он равен 15-20 Мм на глубинах больше чем 10 Мм. Вертикальное движение на краях конвективных ячеек имеет максимальную скорость и становится сверхзвуковым в углах ячеек на глубинах 3-4 Мм. На больших глубинах течение вещества замедляется и становится всё более ламинарным. Использование пассивных частиц в вычислительной области дало возможность обнаружить крупномасштабные расходящиеся течения со средней скоростью 1-1.5 км/сек из центров ячеек супергрануляции. Средний размер крупномасштабных конвективных ячеек, найденный в моделировании, равен 20-30 Мм в диаметре и соответствует наблюдаемым размерам ячеек супергрануляции.

В параграфе 3.2 "МГД моделирование солнечной конвекции" проведено моделирование развития солнечной конвекции на масштабе супергрануляции в трехмерной вычислительной области с наложением однородного слабого магнитного поля, значение которого взято из наблюдений. Магнитное поле может менять пространственные масштабы и темп развития конвекции, ограничивать рост конвективных мод на различных масштабах от грануляции до супергрануляции. В областях сильной концентрации магнитного поля, как например в солнечных пятнах, конвекция мо-

жет быть полностью подавлена. Начальные условия, основные элементы физико-математической модели и численная схема следует гидродинамическому моделированию. Представлены изменения в общей схеме исследования, связанные с включением магнитного поля. Найдено что магнитное поле концентрируется в расширенных областях, подобно солнечным пятнам, с диаметром около 5 Мм и в тонких вертикальных слоях на границе ячеек супергрануляции. В протяженных областях найдено увеличение силы магнитного поля до значений 700-800 Гаусс, внутри ячейки супергрануляции значение вертикальной компоненты магнитного поля очень мало около 1 Гаусса и меньше. Средний размер ячеек супергрануляции составляет 20-30 Мм. Вещество двигается из центра супергранулы со скоростью около 1-1.5 км/сек. Исследование картины конвекции в вертикальном направлении показывает, что холодные куски вещества двигаются вниз в виде струй с максимальной скоростью около 4 км/сек и числом Маха  $M=0.6$ . В областях на солнечной поверхности, где наблюдается движение вещества двигается с разных сторон в одну точку, обнаружено мощное вихревое движение вещества. Благодаря сильной сжимаемости вещества здесь происходит быстрый отток внутренней энергии и образуются струи с максимальным значением скорости. На глубинах больше 10 Мм имеются области локализации огромной магнитной энергии соответствующие значениям магнитного поля в диапазоне от 800 до 1000 Гаусс. Расстояния между областями с сильной концентрацией магнитных полей сравнимы с масштабом локальных супергранул.

В параграфе 3.3 "Гелиосейсмическая инверсия трехмерных полей" рассмотрено применение методов пространственно-временной гелиосейсмологии для исследования пространственной структуры приповерхностных течений в солнечной фотосфере. Показано, что мощным средством для получения информация о внутренних слоях Солнца является исследование статистик акустических и гравитационных волн на поверхности. Представлена методика построения карт величины времени распростра-

нения сигнала с использованием результатов гидродинамического моделирования солнечной конвекции. Карты времени распространения сигнала затем инвертированы при помощи многоканальной SOLA инверсии и сравнены с реальными течениями. Исследованы различные типы ошибок в результатах применения инверсии и разработана робастная процедура минимизации ошибок. Показано, что использование значений скорости, полученных из реалистичных численных моделирований конвекции как входных данных, позволяет установить допустимый уровень случайного шума инвертированных значений скорости потока. Исходя из эксперимента, показано, что при использовании карт времени распространения сигнала, усредненных по интервалу времени 4 дня возможно измерить трехмерные скорости величиной не менее 10 м/сек на поверхности Солнца и горизонтальные скорости имеющие амплитуду 20 м/сек на глубине 5 Мм.

В *параграфе 3.4* сформулированы основные выводы по главе 3.

В **Заключении** перечисляются положения, выносимые на защиту, обсуждается новизна и практическая значимость полученных результатов, приводится список опубликованных по теме диссертации работ и направления дальнейшей работы.

# Глава 1

## Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне PPM.

Кусочно-параболический метод численного решения гиперболических систем (PPM) впервые был предложен в работе [50] и хорошо зарекомендовал себя в задачах вычислительной астрофизики. Метод имеет третий порядок аппроксимации по пространственным переменным и второй порядок по времени. Одним из его недостатков является использование процедуры интерполяции величин по четырехточечному шаблону для вычисления их значений на границах смежных ячеек разностной сетки при построении кусочных парабол. Такая процедура приводит к диссипации величин и сглаживанию фронта ударной волны и контактного разрыва для задачи Римана о распаде разрыва. В новом подходе предложен способ устранить процедуру интерполяции за счет использования информации с предыдущего шага по времени. Впервые подобная идея была использована при построении разностной схемы с линейной аппроксимацией величин внутри ячеек задолго до изобретения метода PPM [51]. См. также [52], где обсуждается метод Годунова на малых шаблонах. Предлагаемый модифицированный метод имеет сокращенную аббревиатуру - PPML (Piecewise Parabolic Method on Local stencil).

## 1.1 РРМЛ для скалярных уравнений.

Проведено сравнение методов РРМ и РРМЛ на примере численного решения задачи Коши для линейного уравнения переноса и нелинейного невязкого уравнения Бюргера с финитными начальными условиями. Анализ схем проведен в соответствии с методикой, примененной в работах [53, 54, 55] при аналогичном исследовании различных разностных схем.

### 1.1.1 Метод РРМ

Рассмотрим однородную одномерную разностную сетку с шагом  $h$  с определенной на ней искомой функцией  $q(x)$ . Значения  $q_i$  будем соотносить с центрами ячеек, значения на их границах будем обозначать  $q_{i+1/2}$ . В методе РРМ предполагается, что внутри каждой разностной ячейки функцию  $q(x)$  можно аппроксимировать с помощью параболы (рис. 1.1):

$$q(x) = q_i^L + \xi \left( \Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi) \right), \quad (1.1)$$

где

$$\xi = (x - x_{i-1/2}) h^{-1}, \quad \Delta q_i = q_i^R - q_i^L, \\ q_i^{(6)} = 6 \left( q_i - 1/2 (q_i^L + q_i^R) \right).$$

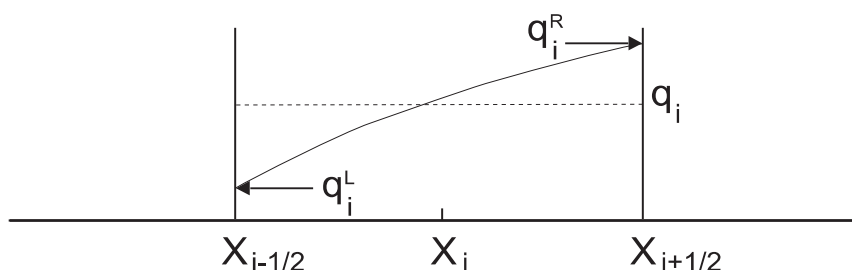


Рис. 1.1. Аппроксимация функции  $q(x)$  внутри разностной ячейки.

Формула (1.1) удовлетворяет соотношению:

$$q_i = h^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

В областях гладкой функции  $q(x)$  в отсутствии экстремумов, т.е. если

$$q_{i+1/2} \in [q_i \dots q_{i+1}], \quad (1.2)$$

справедливы выражения  $q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2}$  и  $q_i^L = q_{i-1}^R = q_{i-1/2}$ . Для вычисления  $q_{i+1/2}$  используется интерполяционная процедура четвертого порядка:

$$q_{i+1/2} = 1/2 (q_i + q_{i+1}) - 1/6 (\delta q_{i+1} - \delta q_i), \quad (1.3)$$

где

$$\delta q_i = 1/2 (q_{i+1} - q_{i-1}).$$

Чтобы выполнить условие отсутствия экстремума (1.2) значения  $\delta q_i$  в (1.3) необходимо заменить на

$$\delta_m q_i = \begin{cases} \min (|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|) \operatorname{sign} (\delta q_i), \\ \quad \text{при } (q_{i+1} - q_i) (q_i - q_{i-1}) > 0 \\ 0, \quad \text{при } (q_{i+1} - q_i) (q_i - q_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения  $q(x)$  следует переопределять значения  $q_i^L$  и  $q_i^R$ . Если  $q_i$  является локальным максимумом или минимумом, то интерполяционная функция (1.13) должна быть константой, т.е.  $q_i^L = q_i^R = q_i$ . Если  $q_i$  лежит слишком близко к  $q_i^L$  или  $q_i^R$ , то парабола (1.13) может иметь экстремум внутри разностной ячейки (при этом  $|\Delta q_i| < |q_i^{(6)}|$ ). В этом случае  $q_i^L$  и  $q_i^R$  должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть экстремум ее границам. Эти условия можно записать в виде:

$$q_i^L = q_i, \quad q_i^R = q_i, \quad \text{если } (q_i^R - q_i) (q_i - q_i^R) \leq 0 \quad (1.4)$$

и

$$\begin{aligned} q_i^L &= 3q_i - 2q_i^R, & \text{если } \Delta q_i \cdot q_i^{(6)} > (\Delta q_i)^2, \\ q_i^R &= 3q_i - 2q_i^L, & \text{если } \Delta q_i \cdot q_i^{(6)} < -(\Delta q_i)^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$



После того, как функция  $q(x)$  определена, можно вычислить ее среднее значение на отрезке  $[x_{i+1/2} - y \dots x_{i+1/2}]$  (при  $y > 0$ ):

$$\bar{q}_{i+1/2}^L(y) = y^{-1} \int_{x_{i+1/2}-y}^{x_{i+1/2}} q(x) dx = q_i^R - 1/2 y h^{-1} \left( \Delta q_i - (1 - 2/3 y h^{-1}) q_i^{(6)} \right). \quad (1.6)$$

Рассмотрим линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

При распаде разрыва на границе двух смежных ячеек в точке  $x_{i+1/2}$  возникает некоторое среднее состояние  $q^*(x_{i+1/2}, t)$ . Т.к. уравнение переноса имеет одну характеристику, которая определяется из условия  $dx/dt = a$ , то при  $a > 0$  решение в момент времени  $t = t_0 + \tau$  будет определяться усреднением по пространственному интервалу  $[x_{i+1/2} - a\tau \dots x_{i+1/2}]$ , т.е.  $q^*(x_{i+1/2}, t_0 + \tau) = q_{i+1/2}^L = \bar{q}_{i+1/2}^L(a\tau)$ . При  $a < 0$  определяющим интервалом (зоной влияния) будет  $[x_{i+1/2} \dots x_{i+1/2} + a\tau]$ . В этом случае  $q^*(x_{i+1/2}, t_0 + \tau) = q_{i+1/2}^R = \bar{q}_{i+1/2}^R(-a\tau)$ , где

$$\bar{q}_{i+1/2}^R(y) = y^{-1} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}+y} q(x) dx = q_{i+1}^L + 1/2 y h^{-1} \left( \Delta q_{i+1} + (1 - 2/3 y h^{-1}) q_{i+1}^{(6)} \right). \quad (1.8)$$

Здесь также  $y > 0$ . Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется как

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(q^*(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Для удобства можно ввести функции  $a^+ = \max(a, 0) = (a + |a|)/2$  и  $a^- = \min(a, 0) = (a - |a|)/2$ , тогда

$$F_{i+1/2} = a^+ q_{i+1/2}^L + a^- q_{i+1/2}^R. \quad (1.9)$$

Величины  $q_{i+1/2}^L$  при  $a < 0$  и  $q_{i+1/2}^R$  при  $a > 0$  можно взять любыми.

### 1.1.2 Метод PPM

Недостатком метода PPM является использование интерполяционной процедуры (1.3) по четырехточечному шаблону. Ее применение приводит к сглаживанию разрывных решений  $q(x)$ , например, на фронте ударной волны или на контактном разрыве. Вместо интерполяционной процедуры предлагается определять значение  $q_{i+1/2}$  на правой границе ячейки с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики  $dx/dt = a$ . Или, другими словами, чтобы вычислить  $q_{i+1/2}$  в момент времени  $t = t_0 + \tau$  предлагается двигаться от точки  $x_{i+1/2}$  на правой границе ячейки со значением  $q_{i+1/2}$  вдоль характеристики до момента  $t = t_0$  (рис. 1.2).

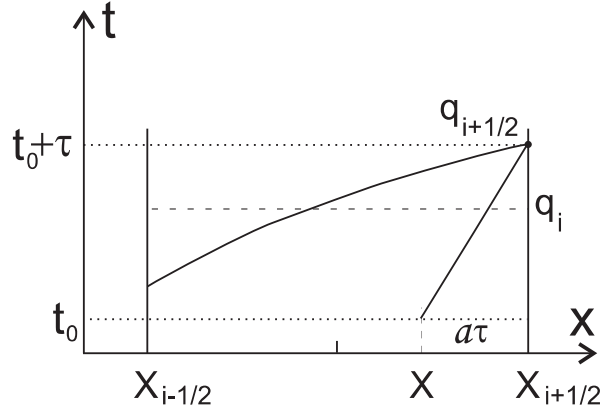


Рис. 1.2. Характеристика внутри разностной ячейки для  $a > 0$ .

Следовательно, для  $a > 0$

$$q_{i+1/2}(t_0 + \tau) = q_i^R(t_0 + \tau) = q_i^L + \xi \left( \Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi) \right), \quad (1.10)$$

где  $\xi = (x - x_{i-1/2}) h^{-1} = (h - a\tau) h^{-1} = 1 - a\tau h^{-1}$ . Все величины в правой части (1.10) берутся с предыдущего шага по времени  $t = t_0$ . При  $a < 0$  значение  $q_{i+1/2}$  определяется по параболе в ячейке с номером  $i + 1$ :

$$q_{i+1/2}(t_0 + \tau) = q_{i+1}^L(t_0 + \tau) = q_{i+1}^L + \xi \left( \Delta q_{i+1} + q_{i+1}^{(6)}(1 - \xi) \right),$$

где  $\xi = -a\tau h^{-1}$ .

Таким образом аппроксимирующая парабола строится в каждой ячейке. Далее, после проверки условий (1.4)-(1.5), переходим к формулам

(1.6) и (1.8) для вычисления  $\bar{q}_{i+1/2}^L(a\tau)$  при  $a > 0$  или  $\bar{q}_{i+1/2}^R(-a\tau)$  при  $a < 0$  и вычисляем потоки (1.9).

Предложенная модификация позволяет реализовать вычислительный алгоритм на локальном шаблоне, т.к. для определения граничных точек кусочной параболы при переходе к последующему шагу по времени не используется информация о решении в соседних ячейках.

### 1.1.3 Тестирование методов

Тестирование представленных методов было проведено в соответствии с методикой, изложенной в работе [54]. Рассматривалась задача Коши для линейного уравнения переноса (1.7) с финитным начальным условием  $q(x, 0)$ :  $q(x, 0) = 0$  при  $x \in (-\infty, l_1) \cup (l_2, +\infty)$  и  $q(x, 0) = q_0(x)$  при  $x \in [l_1, l_2]$ . В качестве  $q_0(x)$  использовались различные профили:

$$\begin{aligned}
 q_0(x) &= \frac{1}{l_2 - l_1} (x - l_1) \quad - \text{”левый треугольник”}, \\
 q_0(x) &= 1 \quad - \text{”прямоугольник”}, \\
 q_0(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{l_2 - l_1} (x - l_1) \right) \quad - \text{”косинус”}, \\
 q_0(x) &= \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{11} - l_1)} (x - l_1) + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2}{3(l_2 - l_{22})} (x - l_2) + 1, & x \in (l_{22}, l_2]; \end{cases} \quad - \text{”зуб”}, \\
 q_0(x) &= \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{12} - l_1)} (x - l_1) + 1, & x \in [l_1, l_{12}), \\ \frac{2}{3(l_2 - l_{12})} (x - l_2) + 1, & x \in [l_{12}, l_2]; \end{cases} \quad - \text{”М”}, \\
 q_0(x) &= \frac{1}{l_2 - l_1} (l_2 - x) \quad - \text{”правый треугольник”}.
 \end{aligned}$$

Численное решение уравнения (1.7) сравнивалось с точным, которое имеет вид:

$$q_0(x) = \begin{cases} 0, & x - at < l_1, \\ u_0(x - at), & l_1 \leq x - at \leq l_2, \\ 0, & x - at > l_2. \end{cases}$$

Для этого вычислялись нормы в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $W_2^1$  на  $\Omega = (-\infty, +\infty) * [0, T]$  (интегрально по времени):

$$\|f\|_C = \max_{\Omega} |f|, \quad \|f\|_{L_1} = \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx dt, \quad \|f\|_{L_2} = \left( \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx dt \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1} = \left( \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_x')^2 dx dt \right)^{1/2};$$

и на  $R = (-\infty, +\infty)$  при  $t = T$  (локально по времени):

$$\|f\|_C = \max_R |f|, \quad \|f\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx, \quad \|f\|_{L_2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (f_x')^2 dx \right)^{1/2}.$$

В расчетах использовались следующие параметры:  $l = 520$ ,  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 30$ ,  $l_{11} = 16\frac{2}{3}$ ,  $l_{22} = 23\frac{1}{3}$ ,  $l_{12} = 20$ ,  $T = 400$ ,  $h = 1$ ,  $a = 1$ . При таких значениях параметров  $h$  и  $a$  число Куранта  $\sigma$  совпадает с шагом по времени  $\tau$ . За время  $T = 400$  профиль успеваеет пробежать 20 своих длин, что достаточно для выявления свойств используемой численной схемы. Вычисления проводились при  $\sigma = 0.1, 0.25, 0.5$ , и  $0.8$ .

В работе [54] проводился анализ конечно-разностных схем. В таких схемах значения величин между узлами разностной сетки не определены, и для вычисления норм необходимо использовать их конечно-разностные аналоги, заменяющие интегралы суммами по узлам сетки и шагам по времени. В кусочно-параболическом методе решение внутри разностных

ячеек аппроксимируется параболой, поэтому пространственные интегралы в формулах для норм в пространствах  $L_1$  и  $L_2$  можно вычислять точно.

Для вычисления нормы в пространстве  $C$  каждая разностная ячейка с номером  $i$  дробилась на  $M = 200$  узлов (с номерами  $j$ ), в которых определялись значения  $q_{i,j}^k$  в момент времени  $k$ :

$$\|q\|_C = \max_{0 \leq i \leq N; 0 \leq j \leq M; 0 \leq k \leq K} |q_{i,j}^k| \quad - \text{интегрально по времени};$$

$$\|q\|_C = \max_{0 \leq i \leq N; 0 \leq j \leq M} |q_{i,j}| \quad - \text{локально при } t = T.$$

Здесь  $N$ -число разностных ячеек,  $K$ -число шагов по времени ( $k = K$  соответствует  $t = T$ ).

При вычислении нормы в пространстве  $W_2^1$  следует иметь в виду, что во всех начальных профилях  $q_0(x)$  кроме "косинуса" имеются точки разрыва, в которых  $q_x' = \infty$ , поэтому вычисление точных интегралов теряет смысл. Вместо этого, также как было сделано в работе [54], использовался конечноразностный аналог  $W_2^1$ , определенный как:

$$\|q\|_{W_2^1} = \left( \tau h^{-1} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^K (q_{i-1}^k - q_i^k)^2 \right)^{1/2} \quad - \text{интегрально по времени};$$

$$\|q\|_{W_2^1} = \left( h^{-1} \sum_{i=0}^N (q_{i-1} - q_i)^2 \right)^{1/2} \quad - \text{локально при } t = T.$$

В этом случае значения нормы в пространстве  $W_2^1$ , очевидно, зависят от того, насколько подробна разностная сетка и стремятся к  $\infty$  при  $h \rightarrow 0$  для профилей, имеющих точки разрыва.

Для перевода абсолютных ошибок численного решения в относительные можно использовать нормы точного решения, приведенные в таблицах:

Нормы точного решения интегрально по времени

	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	1	1	1	1	1	1
$L_1$	4000	8000	4000	4444.4400	5333.3300	4000
$L_2$	51.6398	89.4427	54.7723	53.5182	62.0633	51.6398
$W_2^1$	19.9875	28.2843	9.8953	27.7529	27.9205	19.9875

Нормы точного решения локально при  $t = T$

	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	1	1	1	1	1	1
$L_1$	10	20	10	11.1111	13.3333	10
$L_2$	2.5820	4.4721	2.7386	2.6759	3.1032	2.5820
$W_2^1$	0.99938	1.4142	0.49477	1.3876	1.3960	0.99938

Заметим, что значения нормы в пространстве  $W_2^1$  отличаются от представленных в [54]. Это связано с тем, что в [54] значения  $q_i$  задавались в узлах  $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , тогда как в кусочно-параболическом методе они соотносятся с центрами ячеек, в которых  $x = 1/2, 3/2, \dots, N - 1/2$ . В этом случае точке  $x = 0$  соответствует левая граница первой ячейки.

Ниже представлены результаты численного решения уравнения (1.7).

#### 1.1.4 Результаты расчетов методом РРМ

Решение показано в виде рисунков для каждой из шести форм начального профиля  $q_0(x)$  для двух значений числа Куранта:  $\sigma = 0.1$  и  $0.8$  на моменты времени от  $t = 0$  до  $T$  (рис. 1.3, 1.4). Также представлены таблицы ошибок, содержащие нормы разности между точным и численным решением. В левом верхнем углу указано  $\sigma$ . Заметим, что при сдвиге точного решения вдоль направления  $x$  на величину не кратную расстоянию между узлами  $h$ , ее проекция на узлы разностной сетки будет изменяться, что будет приводить к скачкообразному изменению нормы разности точного и численного решения в пространстве  $W_2^1$ , т.к. в этом пространстве используется конечноразностный аналог нормы.

Таблицы ошибок интегрально по времени (метод РРМ).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.78013	0.77971	0.11541	0.84664	0.82433	0.80646
$L_1$	709.2900	965.2680	230.2030	1507.9800	1396.6500	641.1570
$L_2$	13.1505	17.2448	3.4284	20.6813	19.4520	12.9661
$W_2^1$	16.8997	23.7344	2.5295	24.8912	24.1902	16.8612

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.60859	0.60442	0.10868	0.62256	0.61652	0.59983
$L_1$	638.8410	924.2660	181.6920	1415.8400	1312.0400	609.1250
$L_2$	12.8076	16.8743	2.9151	19.9931	18.8210	12.6943
$W_2^1$	16.8274	23.5396	2.1456	24.7273	24.0374	16.7484

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.51436	0.49944	0.093620	0.53011	0.50996	0.51977
$L_1$	563.4810	855.1270	134.9150	1272.4500	1185.9500	562.9400
$L_2$	12.1841	16.2155	2.3444	18.8859	17.7784	12.1730
$W_2^1$	16.5596	23.1943	1.8363	24.3658	23.7236	16.5607

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.66672</u>	<u>0.64466</u>	0.065666	<u>0.68878</u>	<u>0.67407</u>	<u>0.66621</u>
$L_1$	448.1290	714.6680	101.9580	1001.1000	998.2290	473.5950
$L_2$	10.8551	14.7612	1.7026	16.5501	15.8830	10.9834
$W_2^1$	15.5816	22.0077	1.5848	22.8209	22.4006	15.6465

Таблицы ошибок локально при  $t = T$  (метод РРМ).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.50427	0.51160	0.11541	0.54759	0.51292	0.51450
$L_1$	2.1445	2.8814	0.82444	4.7370	4.4819	1.9858
$L_2$	0.72962	0.94465	0.22876	1.1707	1.1176	0.72155
$W_2^1$	0.87754	1.2316	0.15235	1.2984	1.2623	0.87738

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.49955	0.50587	0.10868	0.54101	0.50711	0.50712
$L_1$	1.9471	2.7699	0.68338	4.4572	4.1481	1.8808
$L_2$	0.71131	0.92588	0.20014	1.1312	1.0729	0.70619
$W_2^1$	0.87191	1.2230	0.13096	1.2858	1.2497	0.87159

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.50605</u>	0.49943	0.093620	0.53011	0.50235	0.50345
$L_1$	1.7375	2.5691	0.50444	4.0302	3.6287	1.7374
$L_2$	0.67729	0.89138	0.16139	1.0717	1.0018	0.67702
$W_2^1$	0.85915	1.2066	0.11172	1.2662	1.2284	0.85909

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.51770</u>	<u>0.50687</u>	0.065666	0.51217	<u>0.51087</u>	0.50339
$L_1$	1.3883	2.1313	0.37939	3.1478	2.9691	1.4699
$L_2$	0.60253	0.80883	0.11711	0.93662	0.88103	0.60926
$W_2^1$	0.82093	1.1576	0.10047	1.2063	1.1765	0.82317



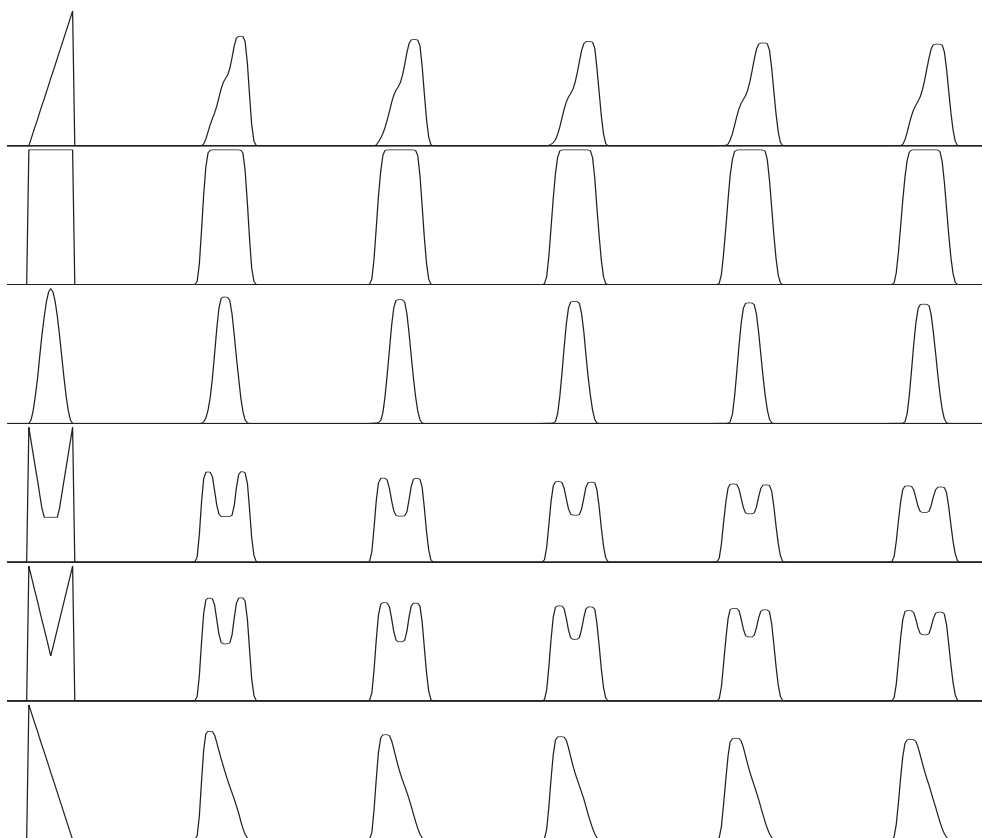


Рис. 1.3. Профили для  $\sigma = 0.1$  (метод РРМ).

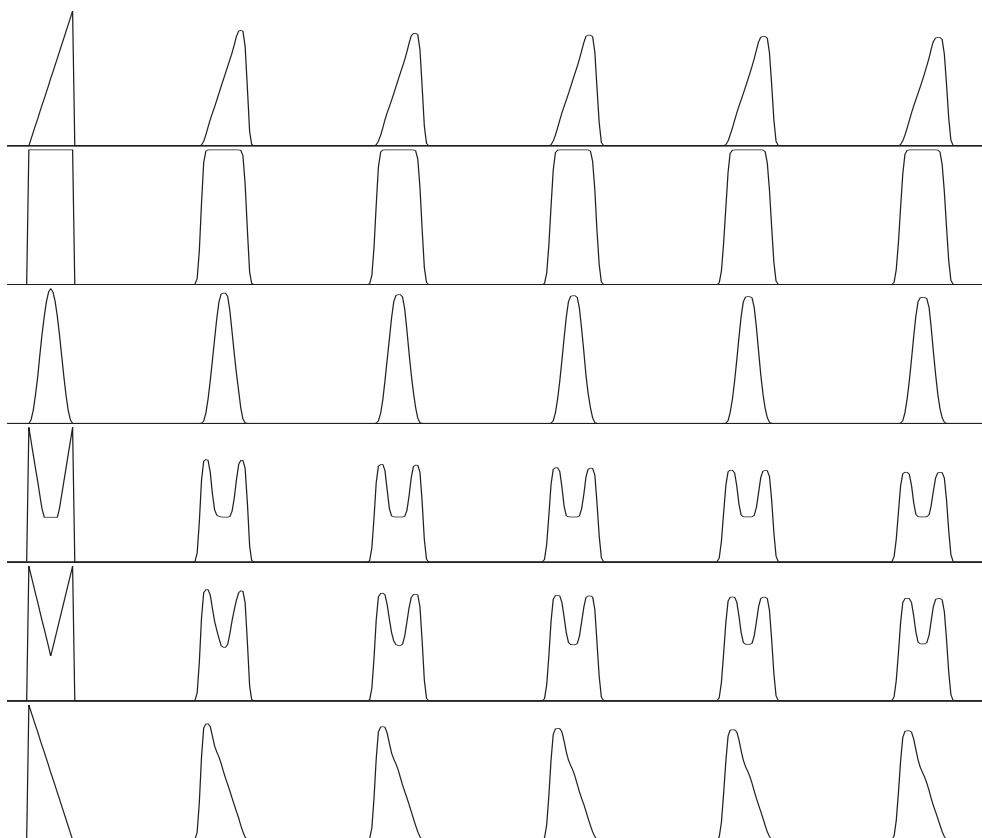


Рис. 1.4. Профили для  $\sigma = 0.8$  (метод PPM).

Видно, что с увеличением числа Куранта ошибки уменьшаются, что связано с уменьшением численной вязкости схемы. Исключение составляют некоторые значения нормы в пространстве  $C$ . В таблицах они подчеркнуты. Особенности поведения нормы в пространстве  $C$  будут обсуждаться ниже (см. стр. 47).

### 1.1.5 Результаты расчетов методом РРМЛ

Ниже представлены аналогичные таблицы ошибок для расчетов кусочно-параболическим методом на локальном шаблоне (РРМЛ), а также рисунки профилей для  $\sigma = 0.1$  и  $0.8$  на моменты времени от  $t = 0$  до  $T$  (рис. 1.5,1.6). Из таблиц видно, что в подавляющем большинстве тестов метод РРМЛ показал лучшие результаты, чем РРМ. Исключение составляют значения норм, выделенные жирным шрифтом, однако все они наблюдаются в пространстве  $C$ . Норма в пространстве  $C$  - это максимальная разность между точным и численным решением. Для профилей, имеющих разрыв (всех кроме "косинуса"), максимальная разность достигается вблизи этого разрыва, что показано на рис. 1.7. Значение нормы определяется одной из двух ближайших к линии разрыва точного решения (показана пунктирной линией) точек, в которой вычисляется  $q_{i,j}$ . На рисунке такая точка показана жирным кружком.

Таблицы ошибок интегрально по времени (метод RPML).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.75613	0.75565	0.076122	0.75662	0.75630	0.69570
$L_1$	552.6660	909.2250	97.4871	1201.1200	1153.4300	550.6460
$L_2$	12.3978	16.7240	1.6815	18.4410	17.7605	12.2170
$W_2^1$	16.5899	23.3516	1.1843	23.9530	23.6335	16.5944

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.57784	0.57531	0.075961	0.58037	0.57868	0.55589
$L_1$	520.2340	849.5530	92.3369	1142.4200	1094.3400	519.8320
$L_2$	11.9612	16.1403	1.6455	17.9244	17.1779	11.8165
$W_2^1$	16.3502	23.0022	<u>1.2794</u>	23.7965	23.3863	16.4069

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.51441</b>	0.49938	0.069115	0.52707	<b>0.51855</b>	<b>0.52555</b>
$L_1$	462.6780	753.0510	79.8622	1019.6700	997.7140	463.3970
$L_2$	11.1813	15.1655	1.4864	16.8236	16.1842	11.1730
$W_2^1$	15.9607	22.4175	<u>1.2891</u>	23.2474	22.8324	15.9688

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.61997</u>	<u>0.61360</u>	0.040749	<u>0.62633</u>	<u>0.62209</u>	<u>0.63704</u>
$L_1$	363.3940	625.4640	39.4735	783.3780	790.9780	365.4070
$L_2$	9.9448	13.7838	0.79444	14.7433	14.4267	10.0368
$W_2^1$	14.9228	21.0576	0.81280	21.6119	21.3418	14.9330

Таблицы ошибок при  $t = T$  (метод RPML).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.50852</b>	0.50534	0.076053	<b>0.57420</b>	<b>0.54242</b>	<b>0.53360</b>
$L_1$	1.7560	2.8222	0.43658	3.8961	3.6532	1.7501
$L_2$	0.69774	0.93340	0.12711	1.0551	1.0056	0.68697
$W_2^1$	0.87030	1.2243	0.076025	1.2606	1.2368	0.87004

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.50922</b>	0.50419	0.075922	<b>0.55337</b>	<b>0.52905</b>	<b>0.52262</b>
$L_1$	1.6560	2.6303	0.39054	3.6944	3.4035	1.6508
$L_2$	0.67365	0.90029	0.12015	1.0239	0.97120	0.66536
$W_2^1$	0.85944	1.2088	<u>0.080633</u>	1.2467	1.2220	0.85853

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.50042	0.49936	0.069115	0.52085	<b>0.50263</b>	0.50152
$L_1$	1.4706	2.3290	0.32561	3.2774	3.07234	1.4706
$L_2$	0.62868	0.84589	0.10624	0.95869	0.91218	0.62828
$W_2^1$	0.83726	1.1793	<u>0.08189</u>	1.2171	1.1946	0.83688

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.51875</b>	<b>0.50808</b>	0.040749	<b>0.53798</b>	<b>0.52421</b>	<b>0.51644</b>
$L_1$	1.1517	1.9318	0.15675	2.4779	2.5142	1.1558
$L_2$	0.55809	0.76870	0.057823	0.83490	0.81268	0.56446
$W_2^1$	0.79661	1.1248	0.054857	1.1529	1.1390	0.79703

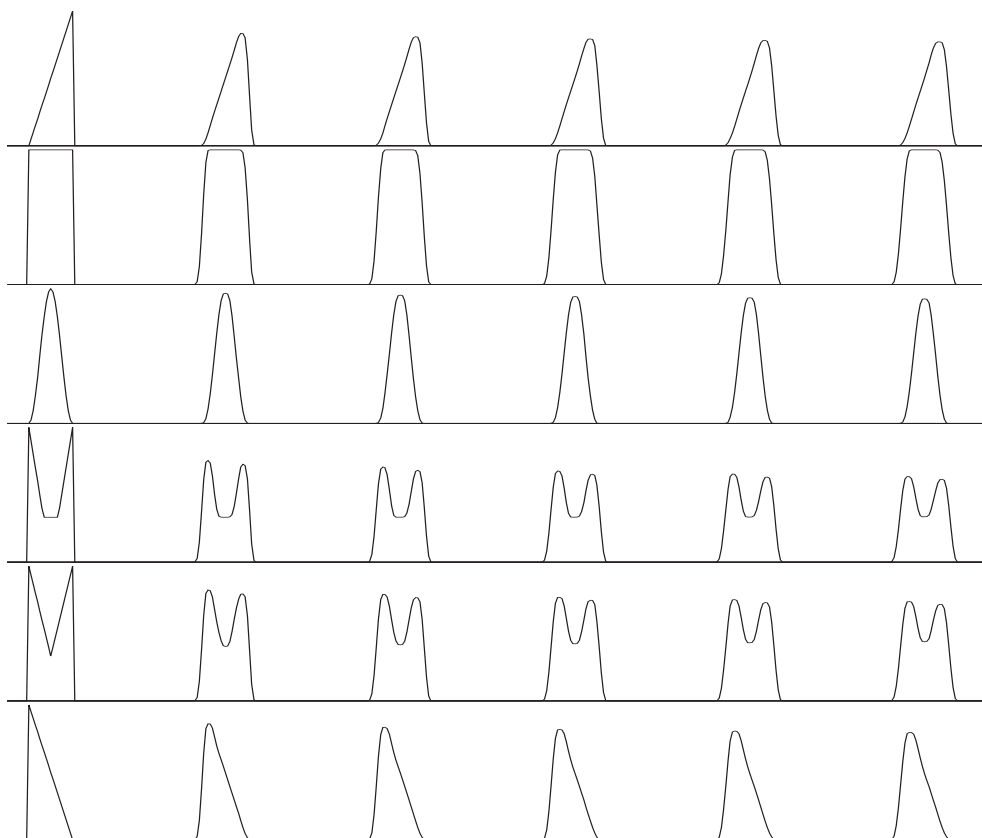


Рис. 1.5. Профили для  $\sigma = 0.1$  (метод PRML).

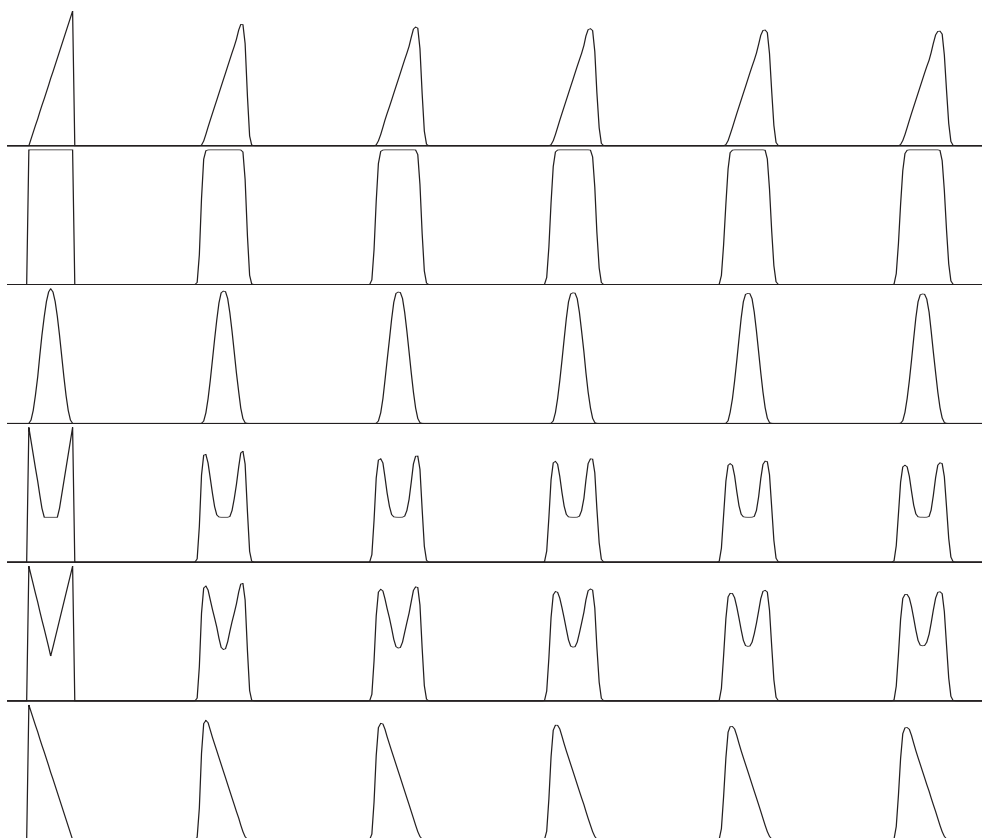


Рис. 1.6. Профили для  $\sigma = 0.8$  (метод PRML).

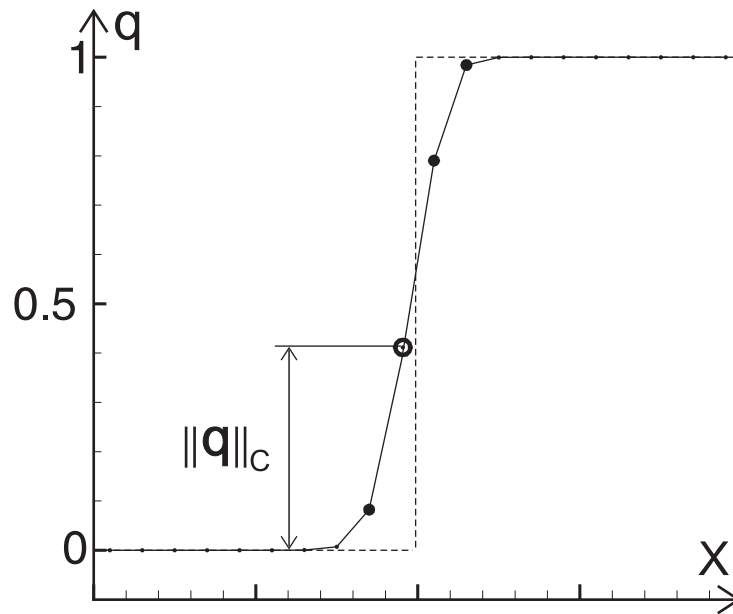


Рис. 1.7. Определение значения нормы в пространстве  $C$  вблизи точки разрыва.

Очевидно, что значение нормы в пространстве  $C$  будет колебаться вблизи 0.5, и отклонение от этого значения в ту или иную сторону несущественно для сравнения численных схем. Для всех профилей кроме "косинуса" значение нормы интегрально по времени в пространстве  $C$  определялось, как правило, в первый шаг по времени. Для профиля "косинус" значение этой нормы характеризует степень "проседания" решения при переносе. Метод РРМЛ дал существенно лучшие результаты для такого профиля. Например, при  $\sigma = 0.8$  на конечный момент времени  $t = T$ , его "проседание как видно из таблиц, меньше на 38%, а ошибка в остальных нормах меньше, примерно, в 2 раза. Проведенное исследование показало, что степень "проседания" всех профилей (кроме "прямоугольника который не проседает) в процессе переноса при расчете методом РРМЛ уменьшается.

### 1.1.6 Невязкое уравнение Бюргерса

Численные схемы РРМ и РРМЛ были также применены при решении задачи Коши для невязкого уравнения Бюргерса, которое описывает возникновение и распространение ударных волн. Возникающие ударные



волны аналогичны волнам в задачах газовой динамики. Уравнение Бюргера имеет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$q_t + qq_x = 0. \quad (1.11)$$

Очевидно, характеристическая кривая уравнения (1.11) определяется из условия  $dx/dt = q$ . Т.к. характеристическая скорость  $q \neq const$ , то уравнение (1.11) является нелинейным. Скорость распространения в каждой точке описываемой уравнением волны может быть разной, и в результате возможно формирование разрывных решений и ударных волн. В некоторых случаях можно записать аналитическое решение (1.11) в виде:

$$q(x, t) = q_0(x - qt), \quad (1.12)$$

где  $q(x, 0) = q_0(x)$  - начальный профиль. Решение (1.12) справедливо в случае гладкого начального профиля вплоть до момента появления ударных волн. После их появления решение записывается в виде кусочной функции.

Т.к. поток в уравнении Бюргера есть  $F = q^2/2$ , то вместо (1.9) будем иметь:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \bar{q}_{i+1/2}^L(a_{i+1/2} \tau) \right)^2, & a_{i+1/2} \geq 0; \\ \frac{1}{2} \left( \bar{q}_{i+1/2}^R(-a_{i+1/2} \tau) \right)^2, & a_{i+1/2} < 0, \end{cases}$$

где  $\bar{q}_{i+1/2}^L(y)$  и  $\bar{q}_{i+1/2}^R(y)$  вычисляются по формулам (1.6) и (1.8) соответственно,  $a_{i+1/2}$  - скорость на границе смежных ячеек. Она вычисляется путем усреднения правого и левого граничного состояния:

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2} (q_i^R + q_{i+1}^L).$$

Тестовые задачи, использованные в работе [55], были взяты для сравнения численных схем высокого порядка (включая РРМ) при решении уравнения Бюргера. Первый тест - эволюция параболического профиля,

он демонстрирует процесс формирования и распространения ударных волн. Второй тест - эволюция разрывного профиля, предполагающего столкновение ударных волн и расширение областей разрежения.

Начальный параболический профиль задается в виде:

$$y = x - 2.5;$$

$$q_0(y) = \max [0, y(1 - y)], \quad y \geq 0;$$

$$q_0(y) = -q_0(y), \quad y < 0,$$

где  $x \in [0 \dots 5]$ . На рис. 1.8 представлено аналитическое решение (1.11) для данного начального профиля на моменты времени от  $t = 0$  до 12. Видно, что примерно при  $t = 1$  начинают появляться две ударные волны,

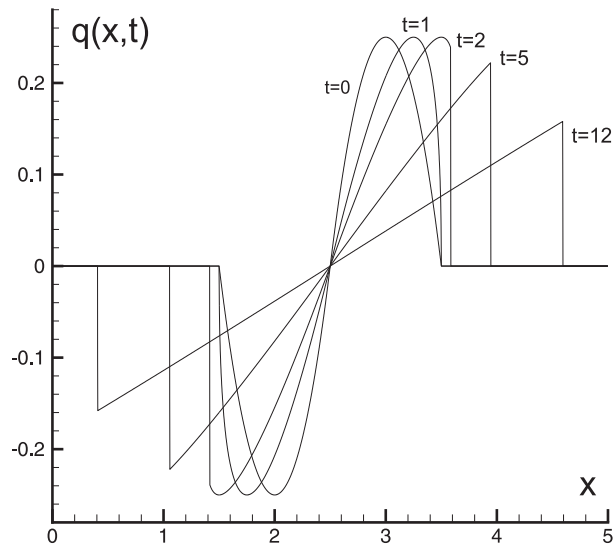


Рис. 1.8. Аналитическое решение для параболического профиля.

движущиеся в противоположные стороны. Скорость их распространения  $q_s = 1/2 (q_l + q_r)$ , где  $q_l$  и  $q_r$  скорости слева и справа от фронта.

Расчетная область разбивалась на  $N = 50$  ячеек и проводились вычисления при  $\sigma = 0.4$ . Шаг по времени определялся из условия Куранта:

$$\tau = \sigma \min_i (h/|q_i|).$$

На рис. 1.9 представлены результаты расчетов методом РРМЛ на моменты времени  $t = 2$  и  $12$ . Точками показано численное решение, сплошной линией - точное. Оказалось, что на данном тесте преимущества мето-

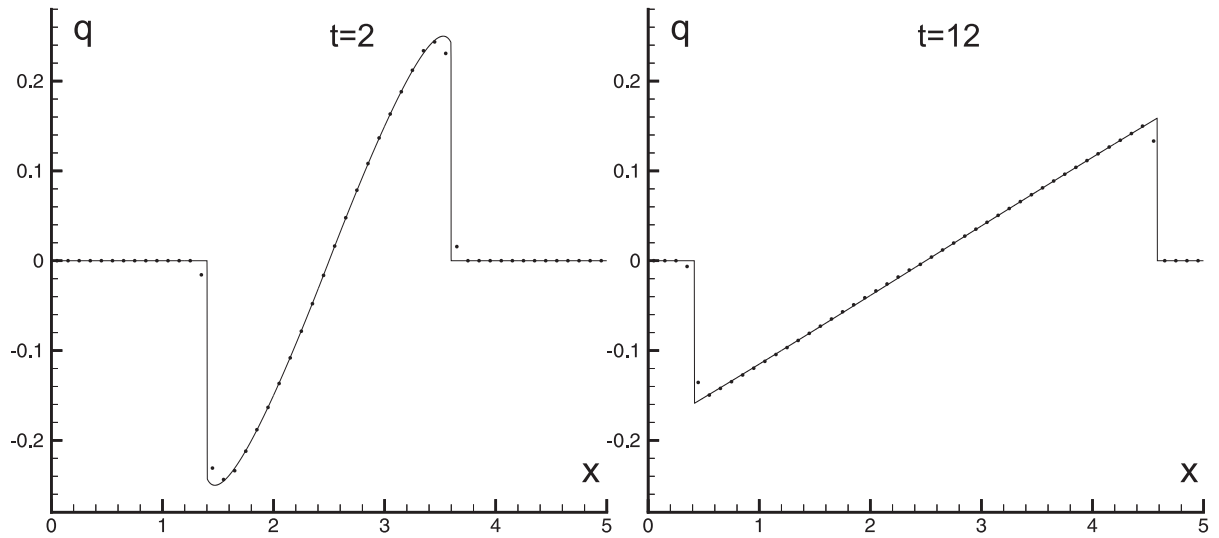


Рис. 1.9. Тест 1: метод РРМЛ.

да РРМЛ никак не проявляются. Результаты, полученные стандартным методом РРМ визуально почти неотличимы, поэтому они здесь не приводятся.

Начальный профиль для второго теста имеет вид:

$$q_0(x) = \begin{cases} 1.0, & 0.2 < x < 2.0, \\ -0.5, & 2.0 < x < 3.0, \\ -1.0, & 3.0 < x < 4.8, \\ 0, & x < 0.2 \text{ и } x > 4.8. \end{cases}$$

На рис. 1.10 представлено аналитическое решение (1.11) для данного начального профиля на моменты времени  $t = 0, 0.6$  и  $2.0$ . В начальный момент времени в точках  $x = 2$  и  $x = 3$  имеются две ударные волны, движущиеся навстречу друг другу, в точке  $x = 0.2$  имеется разрыв, расширяющийся направо, в точке  $x = 4.8$  – разрыв, расширяющийся налево. Видно, что с течением времени в точках  $x = 0.2$  и  $4.8$  появляются два расширяющихся веера. При  $t = 1$  ударные волны сталкиваются и сливаются в одну, движущуюся налево.

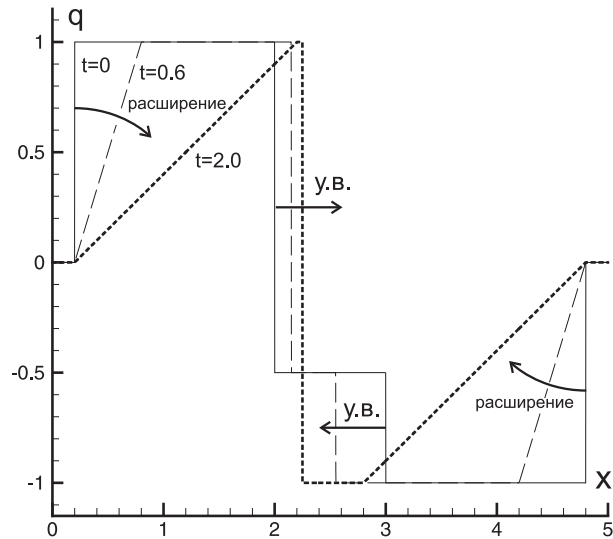


Рис. 1.10. Аналитическое решение для разрывного профиля.

На рис. 1.11 представлены результаты расчетов методом РРМ на моменты времени  $t = 0.6$  и  $2.0$ . Так же как и на рис. 1.9 точками показано численное решение, сплошной линией - точное. На рис. 1.12 представлены результаты расчетов методом РРМЛ на те же моменты времени. Стрелками показаны области, в которых видно отличие между тестируемыми методами. В этих областях решение, полученное методом РРМЛ (рис. 1.12), ближе к точному, чем полученное методом РРМ (рис. 1.11). Области расширения, наблюдаемые в данном тестовом расчете аналогичны волнам разрежения в задачах газовой динамики. Это означает, что предложенный метод РРМЛ позволяет получать более точные решения в местах возникновения волн разрежения.

Для теста 2 приведены таблицы ошибок в пространстве  $L_1$  при различном  $N$  для  $t = 0.6$  и  $2.0$ , из которых видно, что метод РРМЛ дает существенно лучшие результаты.

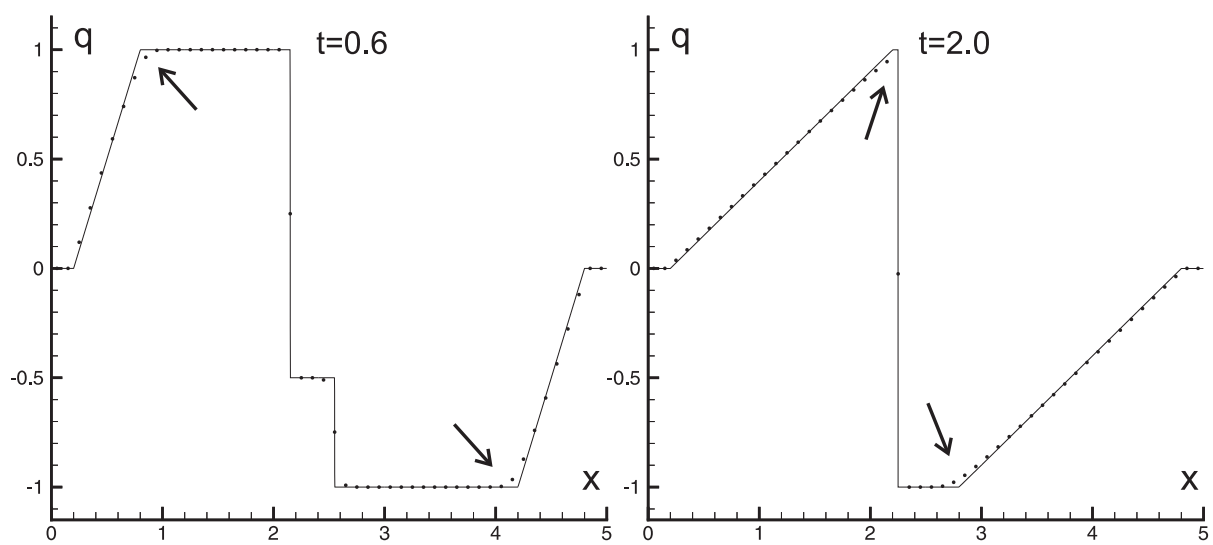


Рис. 1.11. Тест 2: метод PPM.

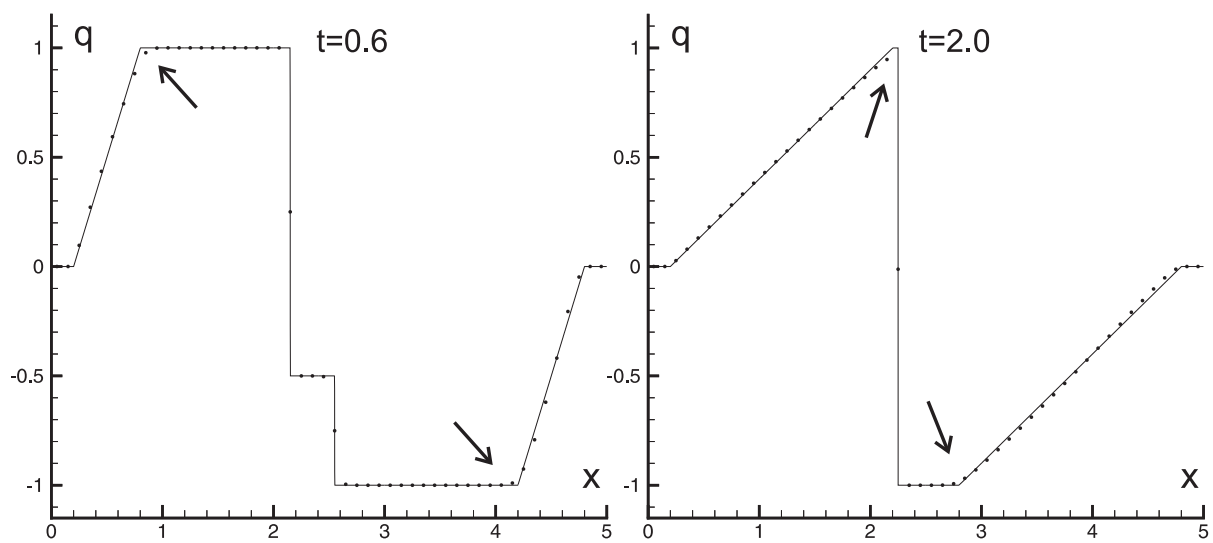


Рис. 1.12. Тест 2: метод PPML.

Тест 2: ошибки в пространстве  $L_1$  для  $t = 0.6$ .

N	PPM	PPML
64	$8.60 \times 10^{-2}$	$4.27 \times 10^{-2}$
128	$7.49 \times 10^{-2}$	$5.86 \times 10^{-2}$
256	$4.75 \times 10^{-2}$	$2.33 \times 10^{-2}$
512	$3.18 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$
1024	$1.55 \times 10^{-2}$	$5.81 \times 10^{-3}$

Тест 2: ошибки в пространстве  $L_1$  для  $t = 2.0$ .

N	PPM	PPML
64	$1.40 \times 10^{-1}$	$7.41 \times 10^{-2}$
128	$9.00 \times 10^{-2}$	$4.95 \times 10^{-2}$
256	$5.84 \times 10^{-2}$	$2.02 \times 10^{-2}$
512	$3.37 \times 10^{-2}$	$8.99 \times 10^{-3}$
1024	$1.89 \times 10^{-2}$	$7.12 \times 10^{-3}$

Сравнение ошибок, полученных в расчетах методами PPM и PPML, позволяет сделать вывод об улучшении схемы. Новая схема уменьшает ошибки в нормах всех пространств за исключением пространства  $C$ , которое не вполне применимо при расчете переноса разрывных профилей. Хорошо заметно снижение диссипации схемы. Решение задачи Коши для уравнения Бюргера позволило исследовать новую схему при описании процессов образования, движения и столкновения ударных волн, а также при исследовании областей разрежения. Метод PPML позволяет улучшить решение в областях разрежения без потери точности в остальном пространстве. Проведенные исследования говорят о повышении точности численного решения при использовании метода PPML.

## 1.2 РРМЛ для газодинамики

В этом разделе кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (РРМЛ) расширен для решения системы уравнений газодинамики. Теперь, в общем случае, имеются три характеристики, вдоль которых сохраняются инварианты Римана, имеющие смысл амплитуд волн. Система уравнений газодинамики является нелинейной, и для применения характеристического анализа при решении задачи определяется локально, в каждой разностной ячейке, базис собственных векторов. В этом случае нелинейную задачу определения потоков величин на границах ячеек удастся линеаризовать в окрестности каждой границы ячейки, что позволяет использовать кусочно-параболическое распределение физических переменных. Тестирование метода РРМЛ проведено на одномерных и двухмерных задачах газодинамики.

### 1.2.1 Численная схема

Для численного решения используется консервативная форма уравнений газодинамики, которая в двухмерном случае имеет вид:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (E + p) u \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E + p) v \end{pmatrix}.$$

Систему (1.13) необходимо дополнить уравнением состояния и уравнением для полной энергии. Для идеального газа они имеют вид:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (1.14)$$

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2}, \quad (1.15)$$

где  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия.

Для решения применяется консервативная разностная схема следующего вида:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) - \frac{\tau}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (1.16)$$

Полуцелые пространственные индексы у потоков показывают, к каким границам разностной ячейки они относятся. Полуцелый номер шага по времени  $n + 1/2$  означает, что берутся усредненные значения потоков по временному шагу  $\tau$ , что дает второй порядок аппроксимации по времени.

Для вычисления потоков на границах ячеек применяется метод PRML, который предполагает, что решение внутри каждой разностной ячейки аппроксимируется параболой вдоль каждой координатной оси, причем граничные точки каждой кусочной параболы определяются из свойства сохранения значений инвариантов Римана вдоль характеристик исходной линеаризованной системы. Далее обобщенная Риманова проблема о распаде разрыва, в которой распределение искомой функции внутри ячейки произвольно, преобразуется в эквивалентную Риманову проблему, где это распределение задается кусочно-постоянной функцией.

В исходном методе PRM кусочная парабола внутри каждой ячейки строится с использованием физических переменных  $\mathbf{V} = (\rho, u, v, p)^T$ , поэтому для определения потоков приходится дополнительно использовать систему уравнений газодинамики в неконсервативной форме:

$$\partial_t \mathbf{V} + A \partial_x \mathbf{V} + B \partial_y \mathbf{V} = 0, \quad (1.17)$$

Матрицы  $A$  и  $B$  можно вычислить через Якобианы консервативной системы и матрицу перехода

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}. \quad (1.18)$$



Например, для матрицы  $A$  имеем:

$$A = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  имеют полный набор правых и левых собственных векторов, отвечающих действительным собственным значениям (система уравнений газодинамики - гиперболическая). Следовательно,  $A$  и  $B$  можно разложить по своим собственным векторам. Например, для матрицы  $A$ , отвечающей за направление  $x$ , имеем:

$$A = R_x \Lambda_x L_x, \quad (1.19)$$

где  $R_x$  - матрица, столбцы которой есть правые собственные векторы  $\mathbf{r}_x^p$  ( $p = 1, \dots, 4$ ),  $L_x$  - обратная ей матрица, строки которой есть левые собственные векторы  $\mathbf{l}_x^p$ :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{c}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{c}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2c} & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & -\frac{\rho}{2c} & 0 & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix}.$$

$\Lambda_x$  - диагональная матрица собственных значений:  $(\Lambda_x)_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ ,  $(\Lambda_x)_{ij} = \lambda^p$  для  $i = j = p$ , где  $\lambda^p$  - решения характеристического уравнения

$$\det|\lambda E - A| = 0. \quad (1.20)$$

Решением (1.20) являются следующие собственные значения:  $\lambda^1 = u + c$ ,  $\lambda^2 = \lambda^3 = u$ ,  $\lambda^4 = u - c$ , где  $c$  - скорость звука:  $c^2 = (p_\rho)_s = (p_\rho)_\varepsilon + (p_\varepsilon)_\rho p / \rho^2$ .

Для построения кусочных парабол на следующем шаге по времени необходимо определить значения величин (состояния) на границах разностных ячеек и значения величин в их центрах.

## 1.2.2 Вычисление граничных значений кусочных парабол

Для простоты вместо (1.17) будем рассматривать одномерную систему уравнений. Далее на стр. 65 будет рассмотрен двухмерный случай.

$$\partial_t \mathbf{V}(x, t) + A \partial_x \mathbf{V}(x, t) = 0. \quad (1.21)$$

Подставим (1.19) в (1.21) и домножим на матрицу  $L$  слева, тогда

$$L \partial_t \mathbf{V} + \Lambda L \partial_x \mathbf{V} = 0. \quad (1.22)$$

Разложим вектор  $\mathbf{V}(x, t)$  по локальному базису правых собственных векторов  $\mathbf{r}^p$ , фиксированному для данной ячейки:

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_p \alpha^p(x, t) \mathbf{r}^p \quad (1.23)$$

и подставим в (1.22), тогда

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = 0, \quad p = 1, \dots, 4. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.24) означают, что коэффициенты  $\alpha^p(x, t)$  в разложении (1.23) (величины, соответствующие амплитудам волн) сохраняются вдоль каждой характеристики  $x^p(t)$ , определяемой из условия

$$\frac{dx^p}{dt} = \lambda^p,$$

т.е. являются инвариантами Римана. Значение инварианта Римана на границе ячейки при  $x = x_{i+1/2}$  в момент времени  $t + \tau$  можно вычислить через его значение в момент времени  $t$ :

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t). \quad (1.25)$$

В качестве примера на рис. 1.13 показаны две смежные ячейки с номерами  $i$  и  $i + 1$ . Набор характеристик в ячейке  $i$  обозначен индексом  $p_1$ , в ячейке  $i + 1$  - индексом  $p_2$ . В ячейке  $i$  показана одна из характеристик  $x^{p_1}(t)$  с собственным значением  $\lambda^{p_1} > 0$ . В ячейке  $i + 1$  показана

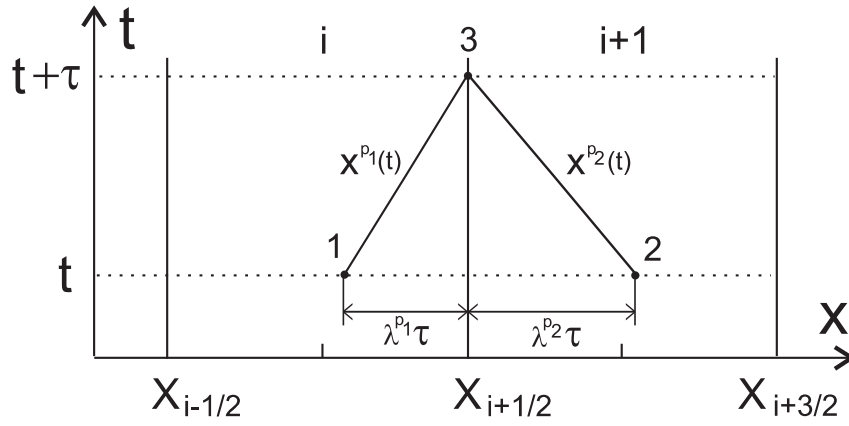


Рис. 1.13. Характеристики в смежных ячейках для  $\lambda^{p_1} > 0$  и  $\lambda^{p_2} < 0$ .

характеристика  $x^{p_2}(t)$ , отвечающая  $\lambda^{p_2} < 0$ . Согласно (1.25) амплитуда волны в точке 3, распространяющейся в ячейке  $i$  вдоль характеристики  $x^{p_1}(t)$ , отвечающей собственному значению  $\lambda^{p_1}$ , определяется по значению амплитуды в точке 1. Аналогично, амплитуда волны в точке 3, распространяющейся в ячейке  $i + 1$  вдоль характеристики  $x^{p_2}(t)$  с собственным значением  $\lambda^{p_2}$ , определяется по ее значению в точке 2.

Состояние в точке 3, вычисленное по формуле (1.23) путем суммирования по собственным векторам, фиксированным в ячейке  $i$ , отвечающим положительным собственным значениям (т.е. по индексу  $p_1$  для всех  $\lambda^{p_1} > 0$ ) будет являться левым относительно границы. Обозначим его как  $\mathbf{V}^L$ . Аналогично, состояние в точке 3, вычисленное путем суммирования по собственным векторам ячейки  $i + 1$ , т.е. по индексу  $p_2$  для всех  $\lambda^{p_2} < 0$  будет являться правым относительно границы и обозначаться как  $\mathbf{V}^R$ .

На рис. 1.14 показана возможная аппроксимация одной из компонент  $V(x)$  вектор-функции  $\mathbf{V}(x, t)$  в некоторый момент времени внутри разностных ячеек с помощью кусочных парабол. Стрелками показаны значения слева и справа от границы, причем  $V^L \neq V^R$ . Пунктиром показаны

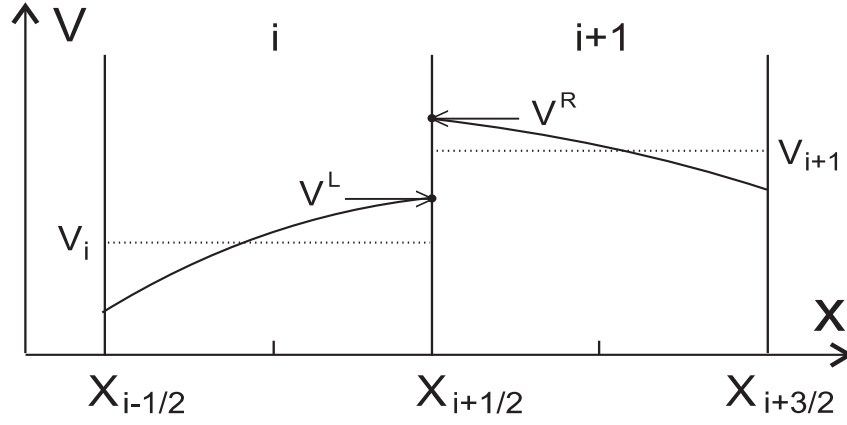


Рис. 1.14. Аппроксимация  $\mathbf{V}(x)$  в смежных ячейках.

средние значения для каждой ячейки, например, для ячейки с номером  $i$ :

$$V_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} V(x) dx.$$

Состояния  $\mathbf{V}^L$  и  $\mathbf{V}^R$  требуются для построения кусочных парабол на следующем шаге по времени, однако в стандартном РРМ они ”сшиваются”, т.е. выполняется

$$\mathbf{V}^L = \mathbf{V}^R = \mathbf{V}_{i+1/2}. \quad (1.26)$$

В методе РРМ условие (1.26) выполняется по построению, т.к. значение  $\mathbf{V}_{i+1/2}$  вычисляется с помощью интерполяционной процедуры четвертого порядка по четырехточечному шаблону [50]. В нашем случае для ”сшивки” парабол необходимо решить задачу о распаде разрыва между состояниями  $\mathbf{V}^L$  и  $\mathbf{V}^R$ . Для этого можно воспользоваться, например, методом Роу [67]:

$$\mathbf{U}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{U}^L + \mathbf{U}^R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda^* p > 0} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda^* p < 0} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*). \quad (1.27)$$

В (1.27) значения  $\mathbf{U}^L$  и  $\mathbf{U}^R$  вычисляются в соответствии с выбранным базисом собственных векторов в ячейках  $i$  и  $i+1$ . Как выбирается состояние, по которому фиксируется базис собственных векторов в каждой ячейке будет показано ниже (см. стр. 68). Значения компонент правых

собственных векторов  $\mathbf{r}^p$  в (1.27) вычисляются по состоянию  $\mathbf{V}^*$ , определяемому с помощью следующих формул [67]:

$$\rho^* = \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad \xi^* = \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}, \quad \text{для } \xi = u, h, \quad (1.28)$$

где  $u$  - компонента скорости,  $h = (E + p)/\rho$  - удельная энтальпия.

Собственные значения  $\lambda^{*p}$  имеют вид:  $\lambda^{*1} = u^* + c^*$ ,  $\lambda^{*2} = \lambda^{*3} = u^*$ ,  $\lambda^{*4} = u^* - c^*$ , где  $c^* = \sqrt{(p^*)_s}$  ( $p^* = p(\rho^*, \varepsilon^*)$ ). Значения амплитуд  $\alpha^{*p}$  вычисляются по состоянию  $\mathbf{V}^*$  в соответствии с (1.23):

$$\mathbf{V}^* = \sum_p \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*).$$

При использовании метода РРМЛ для решения задач в двухмерной постановке можно расщеплять систему (1.17) по пространственным переменным и решать одномерные уравнения отдельно вдоль каждой координатной оси. Однако при этом необходимо учесть дополнительное изменение величин в граничных точках за счет потоков в соответствующих направлениях. В методе РРМ такая процедура не требуется.

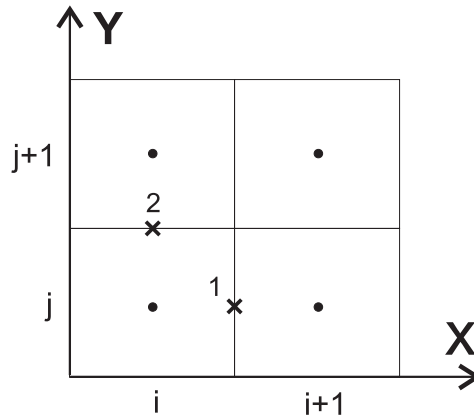


Рис. 1.15. Двухмерная разностная сетка.

Дополнительное изменение величин, например, в точке 1 на рис. 1.15 между ячейками  $(i, j)$  и  $(i + 1, j)$  за счет потока в направлении  $y$  при переходе к следующему моменту времени можно учесть, решив уравнение (1.17) в направлении  $x$ , рассматривая слагаемое, отвечающее за

направление  $y$ , как источник. В этом случае вместо (1.24) будем иметь:

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = D^p, \quad p = 1, \dots, 4, \quad (1.29)$$

$$D^p = -l^p B^p \partial_y V^p, \quad (1.30)$$

где  $l^p$  - левый вектор Якобиана  $A$ ,  $B^p$  - столбец Якобиана  $B$ , отвечающего за направление  $y$ . Значения компонент  $l^p$  и  $B^p$  в (1.30) предлагается вычислять по тому же состоянию, по которому фиксируется базис собственных векторов в ячейке  $(i, j)$  для волн, распространяющихся вдоль характеристик с положительными собственными значениями, либо в ячейке  $(i, j + 1)$  для волн, отвечающих отрицательным собственным значениям (см. стр. 68). Частные производные  $\partial_y V^p$  можно вычислить, заменив их разностными:

$$\partial_y V^p = \frac{V_{i,j+1}^p - V_{i,j}^p}{\Delta y}.$$

Решение уравнения (1.29) записывается аналогично (1.25) с добавлением слагаемого, связанного с источником:

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t) + D^p \tau. \quad (1.31)$$

Левое и правое граничные состояния  $\mathbf{V}^L$  и  $\mathbf{V}^R$  в точке 1 вычисляются по формуле (1.23) путем суммирования соответствующих амплитуд (1.31), домноженных на правые собственные векторы Якобиана  $A$ . Далее для вычисления граничного состояния  $\mathbf{V}_{i+1/2,j}$  используем формулу (1.27).

Состояние  $\mathbf{V}_{i,j+1/2}$  в точке 2 вычисляется аналогично. В этом случае в источнике будет учитываться изменение за счет потока в направлении  $x$ .

### 1.2.3 Вычисление потоков на границах разностных ячеек

На рис. 1.16 показан набор характеристик, отвечающих  $\lambda^p > 0$ , внутри разностной ячейки с номером  $i$ . Характеристика  $x^1(t)$  отвечает максимальному собственному значению  $\lambda^1$ . Точка 1 - это точка пересечения

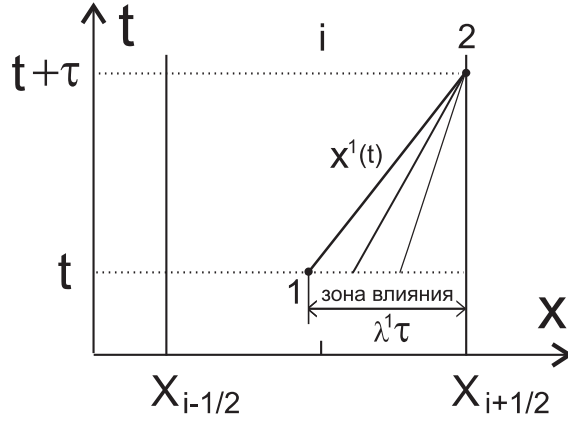


Рис. 1.16. Набор характеристик внутри разностной ячейки.

данной характеристики с кусочной параболой на предыдущем шаге по времени. Очевидно, на состояние в точке 2 (левое граничное состояние) влияет только область от границы ячейки  $x = x_{i+1/2}$  до точки 1.

Для получения второго порядка аппроксимации по времени необходимо усреднить амплитуды  $\alpha^p(x, t)$ , отвечающие каждой характеристике, по своей области влияния. Если рассмотреть волну, распространяющуюся внутри ячейки  $i$  вдоль характеристики с  $\lambda^p > 0$ , то ее усредненная амплитуда на границе  $x = x_{i+1/2}$  в момент времени  $t + \tau$  будет вычисляться по формуле:

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \alpha^p(x) dx, \quad \lambda^p > 0. \quad (1.32)$$

Из (1.23) следует, что вклад каждой характеристики с  $\lambda^p > 0$  внутри ячейки  $i$  в левое граничное состояние  $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$  есть

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x) = \alpha^p(x) \mathbf{r}^p.$$

Отсюда,

$$\alpha^p(x) = \mathbf{l}^p \mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x). \quad (1.33)$$

Подставляем (1.33) в (1.32):

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \mathbf{l}^p \mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x) dx, \quad \lambda^p > 0.$$

Т.к. базис собственных векторов фиксирован в каждой ячейке, то  $\mathbf{1}^p$  можно вынести из-под знака интеграла, тогда

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \mathbf{1}^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}, \quad \lambda^p > 0,$$

где

$$\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x) dx. \quad (1.34)$$

Необходимо выбрать состояние, по которому будем вычислять собственные векторы, фиксированные для каждой ячейки. В качестве такого состояния для ячейки  $i$  предлагается взять  $\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}$  - усредненный по формуле (1.34) вклад в левое граничное состояние, соответствующий амплитуде волны в точке 1 в момент времени  $t$ . Как показали численные расчеты, этот выбор практически не влияет на результаты.

Т.к. волны, распространяющиеся внутри ячейки  $i$  вдоль характеристик с  $\lambda^p < 0$ , очевидно, не влияют на состояние в точке 2, то для  $\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p}$  при  $\lambda^p < 0$  можно взять любое число, например, ноль. Однако из удобства предлагается использовать следующую общую формулу:

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \begin{cases} \mathbf{1}^p (\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}) \cdot \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}, & \lambda^p > 0, \\ \mathbf{1}^p (\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}) \cdot \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}, & \lambda^p < 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Состояние  $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$  слева от границы получается по формуле (1.23) с помощью суммирования амплитуд (1.35), домноженных на правые векторы, однако удобно использовать формулу для разложения приращенного вектора состояния по базису правых собственных векторов. Чтобы ее получить, запишем (1.35) в виде

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \Theta(\lambda^p) \left( \mathbf{1}^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} \right) + (1 - \Theta(\lambda^p)) \left( \mathbf{1}^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} \right). \quad (1.36)$$

(Аргументы собственных векторов для удобства опущены.) Домножив (1.36) на  $\mathbf{r}^p$  и просуммировав по  $p$ , после простых преобразований можно



получить

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^L - \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} = \sum_{p(\lambda^p > 0)} \mathbf{r}^p \left( \mathbf{l}^p \left( \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} - \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} \right) \right). \quad (1.37)$$

До сих пор рассматривалась разностная ячейка с номером  $i$ . Рассмотрим ячейку с номером  $i+1$  и характеристики с отрицательными собственными значениями, можно получить аналогичную формулу для определения состояния  $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$  справа от границы:

$$\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1} - \mathbf{V}_{i+1/2}^R = \sum_{p(\lambda^p < 0)} \mathbf{r}^p \left( \mathbf{l}^p \left( \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,p} - \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1} \right) \right). \quad (1.38)$$

Здесь  $\mathbf{r}^p$  и  $\mathbf{l}^p$  - собственные векторы, фиксированные в ячейке  $i+1$ . Состояние  $\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1}$  - это усредненный по соответствующей области влияния в ячейке  $i+1$  вклад в  $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$  за счет волны, распространяющейся вдоль характеристики, отвечающей максимальному по модулю отрицательному собственному значению.

Формулы (1.37) - (1.38) имеют наглядную интерпретацию - они показывают, что приращение каждой физической переменной в окрестности границы складывается из соответствующих приращений этих величин при пересечении каждой характеристики слева направо от одного состояния к другому.

Теперь необходимо определить поток  $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$  на границе  $x = x_{i+1/2}$ . Снова воспользуемся методом Роу [67]. Для начала перейдем от физических переменных  $\mathbf{V}$  к консервативным  $\mathbf{U}$  (имеется взаимоднозначное соответствие  $\mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{U}$ ) и вычислим потоки слева и справа от границы:  $\mathbf{F}^L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)$  и  $\mathbf{F}^R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R)$ . Далее воспользуемся формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{F}^L + \mathbf{F}^R}{2} - \frac{1}{2} \sum_p |\lambda^p(\mathbf{V}^*)| \Delta\alpha_{i+1/2}^p \mathbf{r}_{\mathbf{U}}^p(\mathbf{U}^*), \quad (1.39)$$

где

$$\Delta\alpha_{i+1/2}^p = \mathbf{l}^p(\mathbf{V}^*) \left( \mathbf{V}_{i+1/2}^R - \mathbf{V}_{i+1/2}^L \right), \quad (1.40)$$

$\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^p = M \mathbf{r}^p$  - правый собственный вектор для консервативной системы газодинамики ( $M$  - матрица перехода (1.18)).

При записи (1.40) используется свойство

$$\mathbf{1}_U^p \Delta \mathbf{U} = \mathbf{1}^p \Delta \mathbf{V},$$

которое дает возможность не использовать левые собственные вектора в консервативных переменных. Компоненты  $\mathbf{V}^*$  вычисляются с помощью (1.28) относительно состояний  $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$  и  $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$ .  $\mathbf{U}^*$  - состояние, соответствующее  $\mathbf{V}^*$  в консервативных переменных.

В двумерной постановке, вычислив потоки на границах между ячейками для направления  $x$ , аналогично определяем потоки для направления  $y$ . Далее, используя разностную схему (1.16), вычисляем состояния в центрах ячеек  $\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}$  на следующем шаге по времени.

Осталось переопределить граничные значения кусочных парабол  $\mathbf{V}_{i,j+1/2}^{n+1}$  и  $\mathbf{V}_{i+1/2,j}^{n+1}$ , вычисленные по формуле (1.27), в областях немоного решения согласно методу PPM (см. [50]), и задача решена.

#### 1.2.4 Тестирование

Предложенный метод был протестирован на примере нескольких одномерных и двумерных задач газовой динамики. Во всех расчетах уравнение состояния и уравнение для энергии брались для случая идеального газа (1.14)-(1.15) с  $\gamma = 1.4$ .

##### 1D тесты

Первые три теста в одномерной постановке проведены в соответствии с работой [57]. Рассматривались задачи Сода [58], Лакса [59] и Шу [60]. Они решались на отрезке  $x \in [-1, 1]$ , который в начальный момент времени разбивался границей  $x_b$  на две части:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x \leq x_b, \\ \mathbf{V}^R, & x > x_b. \end{cases}$$

Использовались "исторические" граничные условия - значения величин в граничных точках не менялись со временем.

Четвертый тест - это задача о взаимодействии двух ударных волн [61], которая решалась на отрезке  $x \in [0, 1]$ . В начальный момент времени отрезок разбивался на три части:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x < 0.1, \\ \mathbf{V}^M, & 0.1 \leq x < 0.9, \\ \mathbf{V}^R, & x \geq 0.9. \end{cases}$$

В этом тесте использовались граничные условия полного отражения. Для реализации таких граничных условий были введены три дополнительные ячейки с состояниями  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_{-1}, \mathbf{V}_{-2}$  для левой границы и три ячейки с состояниями  $\mathbf{V}_{N+1}, \mathbf{V}_{N+2}, \mathbf{V}_{N+3}$  для правой. Значения этих состояний на каждом шаге по времени определялись следующим образом:

$$\rho_{-l+1} = \rho_l, \quad u_{-l+1} = -u_l, \quad p_{-l+1} = p_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$\rho_{N+l} = \rho_{N-l+1}, \quad u_{N+l} = -u_{N-l+1}, \quad p_{N+l} = p_{N-l+1}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Время счета обозначалось буквой  $T$ , количество разностных ячеек -  $N$ . Шаг по времени  $\tau$  вычислялся из условия Куранта с числом Куранта  $\sigma = 0.5$  для всех расчетов.

**Тест 1** (Задача Сода [58]). Начальные условия для системы уравнений газодинамики имеют вид:

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (1, 0, 1),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (0.125, 0, 0.1),$$

$$x_b = 0, \quad N = 100, \quad T = 0.4.$$

**Тест 2** (Задача Лакса [59]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (0.445, 0.698, 3.528),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (0.5, 0, 0.571),$$

$$x_b = 0, \quad N = 100, \quad T = 0.32.$$

**Тест 3** (Задача Шу [60]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (3.857143, 2.629369, 10.3333),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (1 + 0.2 \sin(5\pi x), 0, 1),$$

$$x_b = -0.8, \quad N = 300, \quad T = 0.36.$$

**Тест 4** (Задача о взаимодействии ударных волн (1D) [61]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho^L, u^L, p^L) = (1, 0, 10^3),$$

$$(\rho^M, u^M, p^M) = (1, 0, 10^{-2}),$$

$$(\rho^R, u^R, p^R) = (1, 0, 10^2),$$

$$N = 400, \quad T = 0.038.$$

На рис. 1.17-1.20 представлены результаты данных тестовых расчетов. Точное решение показано сплошной линией. В задаче о взаимодействии ударных волн образуются три области контактного разрыва, средний из которых очень трудно разрешить любыми численными методами (рис. 1.20).

## 2D тесты

Для двумерных расчетов были выбраны два варианта начальной конфигурации из предложенных в [62]. В первом случае происходит движение и взаимодействие ударных волн (тест 5), во втором - контактных разрывов (тест 6). Двухмерная область  $x \times y = [0, 1] \times [0, 1]$  разбивалась на четыре квадрата с разными начальными состояниями. Использовалась разностная сетка  $N_x \times N_y = 400 \times 400$  ячеек, число Куранта  $\sigma = 0.2$ . Значения величин в граничных ячейках задавались путем переноса. Например, для левой границы задавалось:

$$V_{2,j} = V_{3,j}, \quad V_{1,j} = V_{2,j}, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

Кроме того, был проведен тест на отражение наклонной ударной волны [63] (тест 7), и решена задача двойного маховского отражения [64] (тест 8).

**Тест 5** (Задача о взаимодействии ударных волн (2D) [62]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.1, 0, 0, 1.1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.5065, 0.8939, 0, 0.35), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1.1, 0.8939, 0.8939, 1.1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.5065, 0, 0.8939, 0.35), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases}$$

Время счета составило  $T = 0.25$ .

**Тест 6** (Задача о взаимодействии контактных разрывов [62]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (2, 0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1, -0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (3, -0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases}$$

Время счета составило  $T = 0.3$ .

**Тест 7** (Отражение наклонной ударной волны [63]).

Задача решалась в области  $x \times y = [0, 4] \times [0, 1]$  на сетке из  $60 \times 40$  разностных ячеек с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ . Ударная волна инициировалась за счет условий на границах. На нижней границе задавалась твердая стенка, на правой - сверхзвуковое вытекание, слева и вверху фиксировались следующие значения физических переменных:

$$(\rho^L, u^L, v^L, p^L) = (1, 2.9, 0, 1/\gamma),$$

$$(\rho^T, u^T, v^T, p^T) = (1.69997, 2.61934, -0.50632, 1.52819).$$

При таких граничных условиях формируется наклонная ударная волна,двигающаяся от левого верхнего угла и отражающаяся от нижней

границы. После 10000 шагов по времени устанавливалась стационарная картина течения.

**Тест 8** (Двойное маховское отражение [64]).

Задача решалась в области  $x \times y = [0, 4] \times [0, 1]$  на сетке из  $480 \times 120$  разностных ячеек с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ . Отражающая стенка задавалась на нижней границе на отрезке  $(1/6, 0) - (4, 0)$ . На эту стенку в точке  $(1/6, 0)$  падала ударная волна со скоростью 10 Махов, образуя угол в 60 градусов с осью  $x$ . Параметры среды слева и справа от волны брались:

$$(\rho^L, u^L, v^L, p^L) = (8, 7.1447, -4.125, 116.5),$$

$$(\rho^R, u^R, v^R, p^R) = (1.4, 0, 0, 1).$$

В качестве граничных условий на нижней границе на отрезке  $(0, 0) - (1/6, 0)$  и на правой границе использовалась линейная экстраполяция величин, на левой границе - сверхзвуковое втекание, вверху - условия, меняющиеся со временем в зависимости от точного движения ударной волны. Расчет проводился до момента времени  $T = 0.2$ .

На рис. 1.21-1.24 представлены результаты данных двумерных расчетов. Для тестов 5, 6 и 8 линиями показаны уровни постоянной плотности. Для теста 7 (рис. 1.23) приведено давление вдоль линии  $y = 0.55$ , что соответствует номеру  $j = 11$ . Точное решение показано сплошной линией.

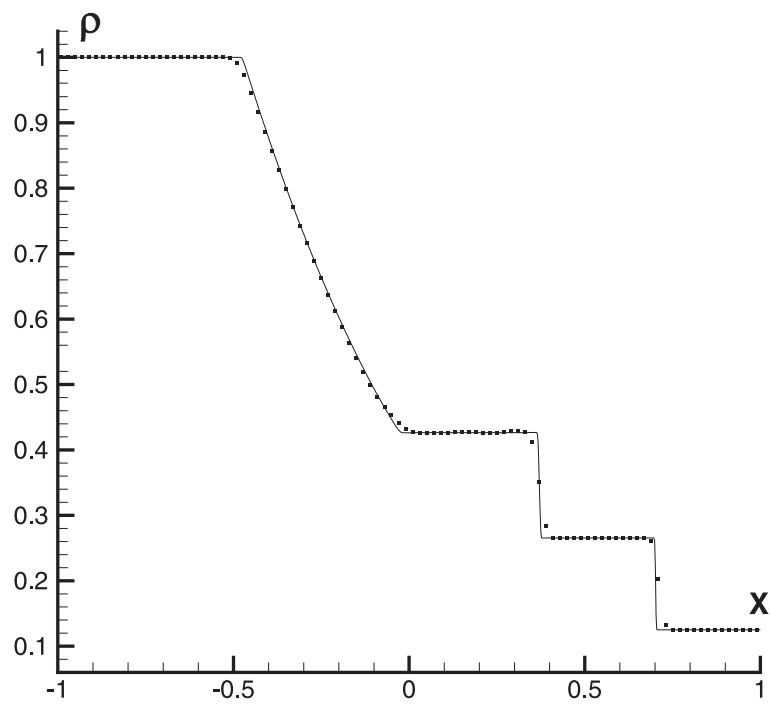


Рис. 1.17. Задача Сода [58].

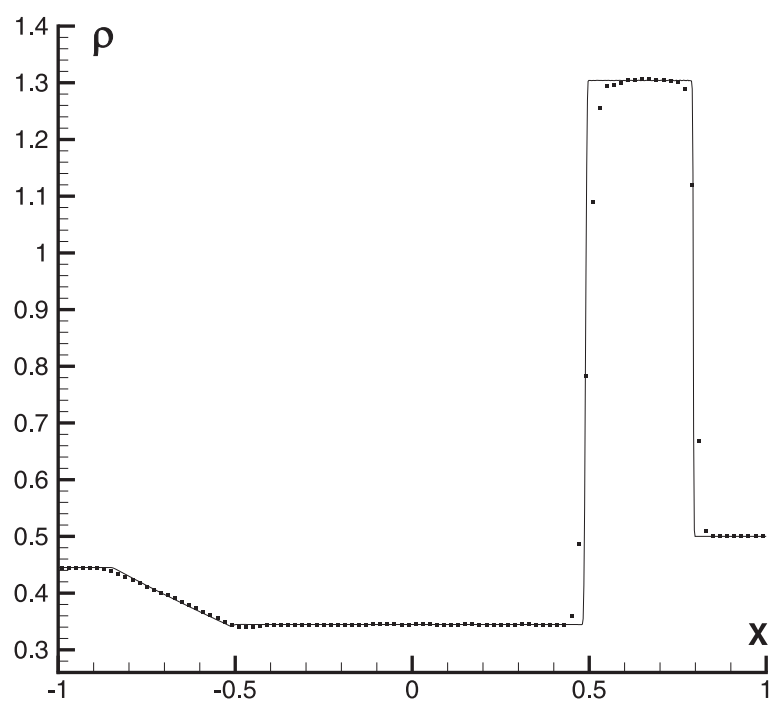


Рис. 1.18. Задача Лакса [59].

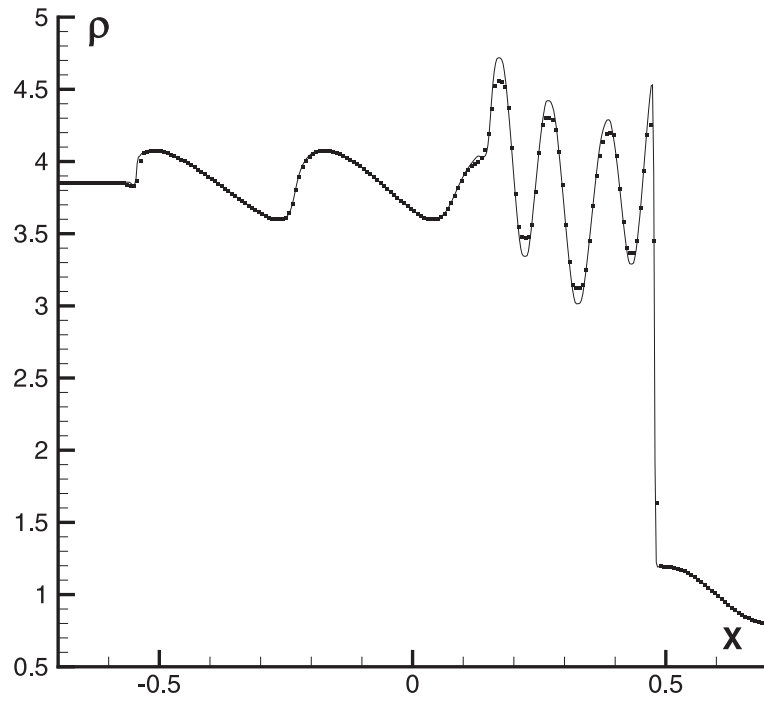


Рис. 1.19. Задача Шу [60].

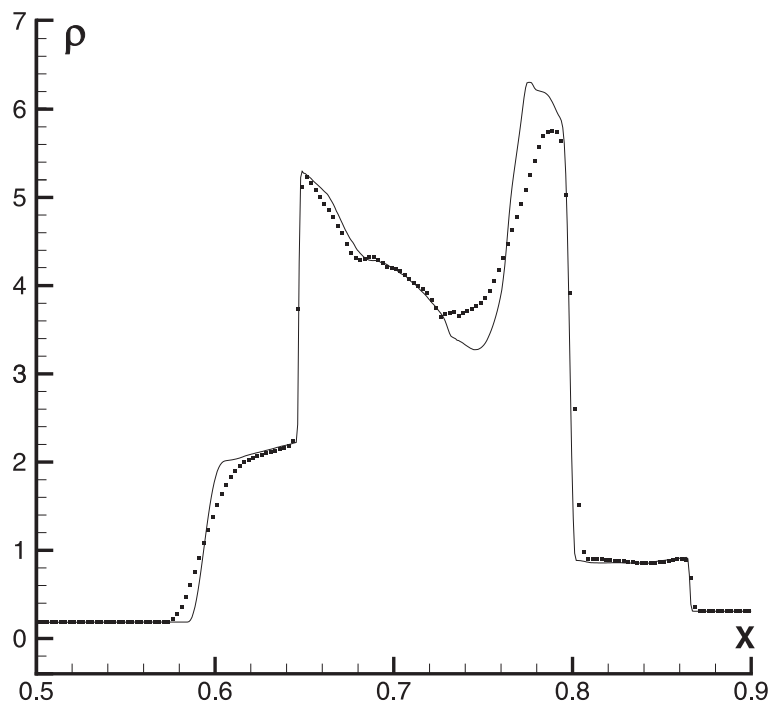


Рис. 1.20. Задача о взаимодействии ударных волн (1D) [61].



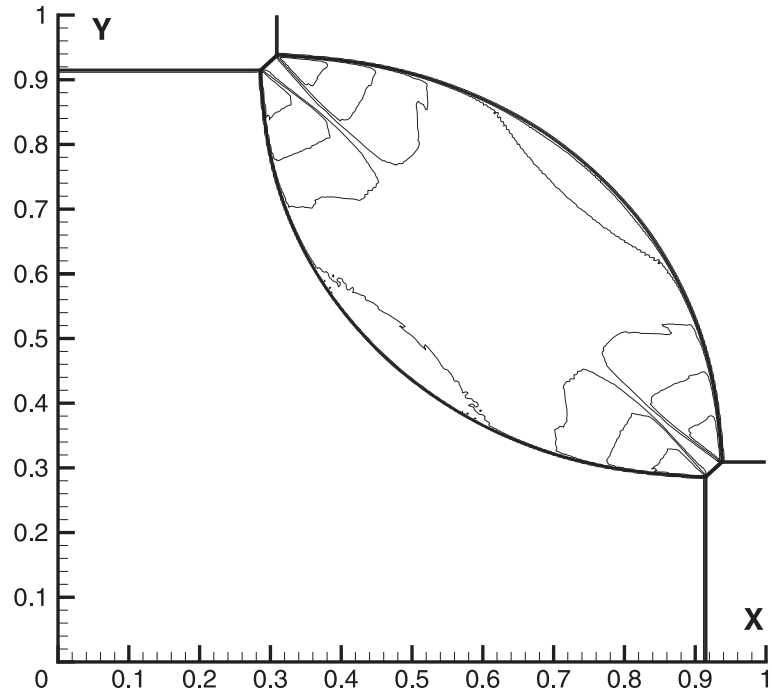


Рис. 1.21. Задача о взаимодействии ударных волн (2D) [62].

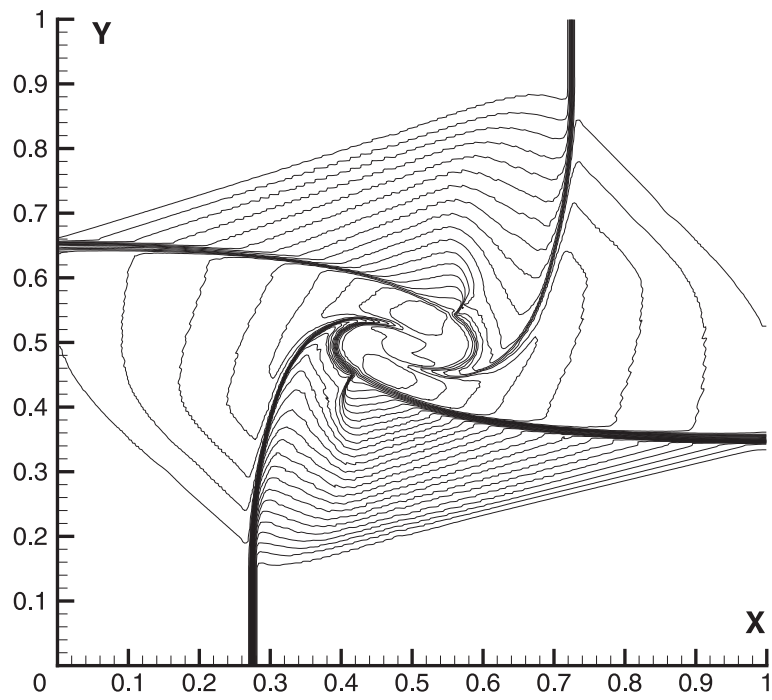


Рис. 1.22. Задача о взаимодействии контактных разрывов [62].

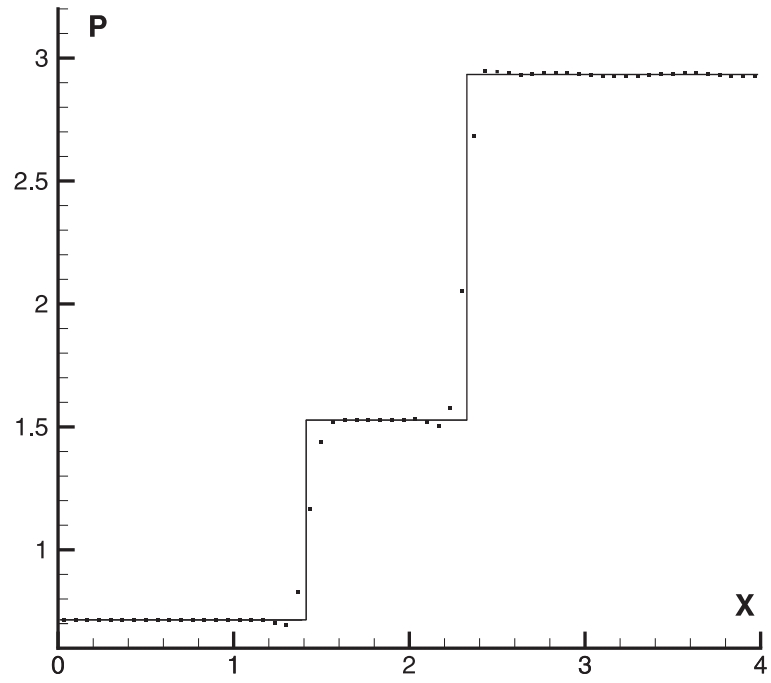


Рис. 1.23. Отражение наклонной ударной волны [63]. Показано давление вдоль линии  $y = 0.55$ .

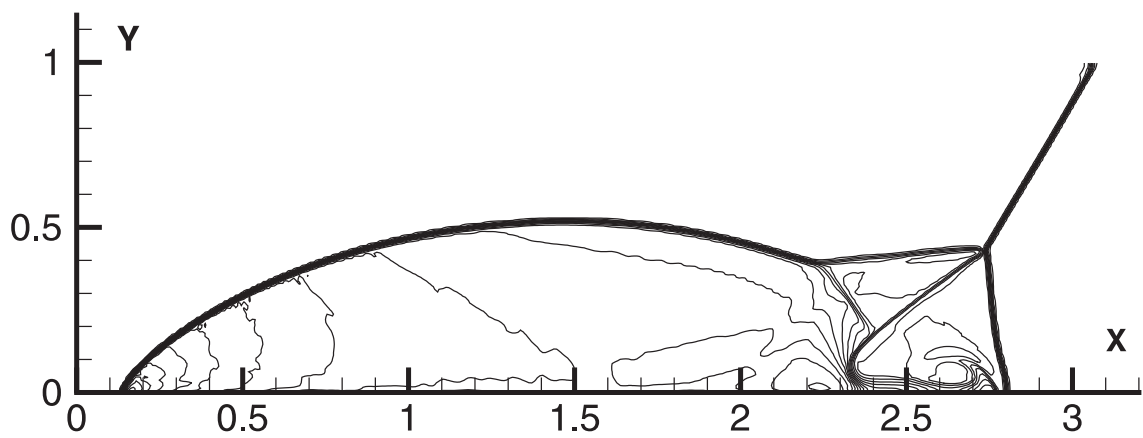


Рис. 1.24. Задача двойного маховского отражения [64].

В данном разделе представлена методика решения уравнений газодинамики методом РРМ<sub>L</sub>, который представляет собой модификацию стандартного кусочно-параболического метода. Данная модификация основана на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений. Чтобы воспользоваться этим свойством, необходимо линеаризовать систему уравнений газодинамики, зафиксировав базис правых и левых собственных векторов в каждой разностной ячейке. Только в этом случае можно провести характеристический анализ. Как показали тестовые расчеты, выбор состояния, по которому фиксируется базис собственных векторов, практически не влияет на решение. Для реализации предложенной разностной схемы необходимо решить две задачи. Во-первых, требуется определить граничные значения кусочных парабол в каждой разностной ячейке при переходе к следующему шагу по времени. Отличие метода РРМ<sub>L</sub> от метода РРМ состоит в том, что теперь, вместо использования интерполяционной процедуры по четырехточечному шаблону для вычисления граничных состояний, они получаются с помощью переноса соответствующих значений амплитуд волн с предыдущего шага по времени вдоль характеристик. При таком подходе для каждой разностной ячейки получаются свои граничные состояния, которые "не сшиты": их значения на одном и том же общем интерфейсе для левой и правой ячейки не совпадают. Для "сшивки" состояний необходимо решить задачу Римана о распаде разрыва между ними. Исключение интерполяционной процедуры позволяет улучшить диссипативные свойства схемы. Вторая задача состоит в вычислении потоков на границах ячеек. Для общего интерфейса смежных ячеек определяются потоки слева и справа, причем для получения второго порядка аппроксимации по времени при вычислении левого и правого граничного состояния приходится усреднять амплитуды волн по своей области влияния. Поток на границе определяется путем решения еще одной задачи Римана о распаде разрыва. Для решения за-

дач Римана в обоих случаях используется метод Роу, т.к. он относительно прост в реализации и обладает низкой схемной вязкостью. Состояния в центрах ячеек легко определяются через потоки по формуле (1.16). После того как состояния в центрах разностных ячеек на следующем шаге по времени будут вычислены необходимо переопределить граничные состояния в областях немонотонного решения согласно стандартному методу РРМ и задача решена. При решении двух- и трехмерных задач имеется еще одно отличие метода РРМЛ от РРМ: при вычислении граничных значений кусочных парабол в методе РРМЛ требуется учесть их изменение за счет потоков в соответствующих направлениях. Т.е. при решении системы уравнений газодинамики, например, вдоль направления  $x$  требуется учесть производные в направлении  $y$  (и  $z$  в трехмерной задаче). Эти производные входят в уравнения для амплитуд в виде источников. В этом случае при применении схемы Роу отсутствует феномен "карбункул" [65]. Решение одно- и двухмерных тестовых задач показало, что модифицированный метод сохранил все преимущества метода РРМ, обладая при этом более низкими диссипативными свойствами. Использование локального шаблона в методе РРМЛ упрощает алгоритм при решении задач на адаптивных разностных сетках.

## 1.3 РРМЛ для идеальной МГД

В данном разделе будет представлена численная схема решения задач идеальной магнитной многомерной газодинамики, построенная на основе метода РРМЛ. В отличие от одномерного случая, здесь необходимо учесть дополнительное ограничение на магнитное поле - условие его бездивергентности (отсутствия магнитных зарядов). В одномерной постановке это условие учитывать не имеет смысла, т.к уравнение эволюции компоненты  $B_x$  магнитного поля превращается в тождество. Кроме того, в многомерной постановке при расщеплении системы МГД по пространственным координатам и последовательном решении вдоль каждого направления необходимо учитывать потоки величин в ортогональных направлениях в виде источников, аналогично методике, использованной при решении системы уравнений газодинамики. Основные элементы построения численной схемы будут проиллюстрированы на примере двухмерного случая. Ее тестирование проведено на нескольких характерных задачах МГД.

### 1.3.1 Уравнения идеальной МГД

Система уравнений идеальной МГД в общем виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B}) + \nabla \bar{p} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} E + \mathbf{v} \bar{p} - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0, \end{array} \right. \quad (1.41)$$

где  $\rho$  - плотность,  $\mathbf{v}$  - вектор скорости (его компоненты в дальнейшем будем обозначать как  $u$ ,  $v$  и  $w$ ),  $\mathbf{B}$  - вектор магнитного поля (чтобы не загромождать уравнения (1.41), множитель  $1/\sqrt{4\pi}$  был включен в опре-

деление  $\mathbf{B}$ ),  $E$  - полная энергия,  $p$  - полное давление (гидродинамическое+магнитное):

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p + p_{mag}, \\ p_{mag} &= \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{2}.\end{aligned}$$

Система (1.41) дополняется уравнением для полной энергии

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}}{2} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{2} \quad (1.42)$$

и уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (1.43)$$

где  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия,  $\gamma$  - показатель адиабаты.

Необходимо также ввести дополнительное ограничение на магнитное поле (условие отсутствия магнитных зарядов):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.44)$$

Дивергентная форма системы (1.41), записанная для консервативных переменных, в двухмерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0, \quad (1.45)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z, E)^T, \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (\rho u, \rho u^2 + \bar{p} - B_x^2, \rho uv - B_x B_y, \rho uw - B_x B_z, 0, \\ &u B_y - v B_x, u B_z - w B_x, u(E + \bar{p}) - B_x(u B_x + v B_y + w B_z))^T, \quad (1.47)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= (\rho v, \rho uv - B_x B_y, \rho v^2 + \bar{p} - B_y^2, \rho vw - B_y B_z, v B_x - u B_y, \\ &0, v B_z - w B_y, v(E + \bar{p}) - B_y(u B_x + v B_y + w B_z))^T, \quad (1.48)\end{aligned}$$

Все величины в (1.46)-(1.48) зависят от координат  $x$ ,  $y$  и времени  $t$ .

Введем обозначения:

$$(b_x, b_y, b_z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (B_x, B_y, B_z), \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2.$$

Тогда скорость звука  $c$ , альвеновская скорость  $c_a$ , быстрая скорость  $c_f$  и медленная скорость  $c_s$  запишутся в виде:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \\ c_a &= |b_x|, \\ c_{f,s} &= \left( \frac{1}{2} (c^2 + b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2 b_x^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для проведения характеристического анализа и построения решения методом РРМЛ систему (1.45) необходимо переписать в физических переменных в квазилинейной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = 0, \quad (1.49)$$

где

$$\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p)^T$$

Матрицы  $A_x$  и  $A_y$  можно вычислить через Якобианы консервативной системы  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$  и  $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{U}$ :

$$A_x = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad A_y = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad (1.50)$$

где  $M$  - матрица перехода:

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & B_x & B_y & B_z & \frac{1}{\gamma - 1} \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)u^2}{2} & ku & kv & kw & kB_x & kB_y & kB_z & (\gamma-1) \end{pmatrix},$$

где  $k = 1 - \gamma$ . Согласно (1.50) матрицы  $A_x$  и  $A_y$  имеют вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & -B_y/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & B_x/\rho & 0 & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & -B_y/\rho & 0 \\ 0 & -B_y & B_x & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матриц  $A_x$  и  $A_y$  могут иметь сингулярности в точках вырождения собственных значений. Чтобы этого избежать Брио



и Ву предложили нормировку вида [66]:

$$(\beta_y, \beta_z) = \begin{cases} \frac{(B_y, B_z)}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1.52)$$

$$(\alpha_f, \alpha_s) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{c^2 - c_s^2}, \sqrt{c_f^2 - c^2}\right)}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0 \text{ или } \gamma p \neq B_x^2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1.53)$$

Собственные значения Якобиана  $A_x$  имеют вид:

$$\lambda_x^{1,8} = u \pm c_f, \quad \lambda_x^{2,7} = u \pm c_a, \quad \lambda_x^{3,6} = u \pm c_s, \quad \lambda_x^{4,5} = u.$$

$\lambda_x^{1,8}$  соответствуют паре быстрых магнито-акустических волн,  $\lambda_x^{2,7}$  - паре альвеновских волн,  $\lambda_x^{3,6}$  - паре медленных магнито-акустических волн,  $\lambda_x^4$  - энтропийной волне,  $\lambda_x^5$  - волна, соответствующая сохранению магнитного потока.

Левые и правые собственные векторы Якобиана  $A_x$  с учетом нормировки (1.52)-(1.53) имеют вид:

$$\mathbf{l}_x^{1,8} = \left( 0, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2c^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho}c} \beta_y, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho}c} \beta_z, \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{1,8} = \left( \rho \alpha_f, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_y, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_f \gamma p \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^{2,7} = \left( 0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, 0, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, \mp \frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}}, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{2,7} = \left( 0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, 0, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_y, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^{3,6} = \left( 0, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2c^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho}c} \beta_y, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho}c} \beta_z, \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{3,6} = \left( \rho \alpha_s, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_y, -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_s \gamma p \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^4 = \left( 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_x^4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_x^5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

Записанные таким образом собственные векторы ортонормированны. Собственные значения и собственные векторы Якобиана  $A_y$  записываются аналогично:

$$\lambda_y^{1,8} = v \pm c_f, \quad \lambda_y^{2,7} = v \pm c_a, \quad \lambda_y^{3,6} = v \pm c_s, \quad \lambda_y^{4,5} = v,$$

$$\mathbf{l}_y^{1,8} = \left( 0, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2c^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho}c} \beta_x, 0, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho}c} \beta_z, \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_y^{1,8} = \left( \rho \alpha_f, \mp \alpha_s c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_x, 0, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_f \gamma p \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^{2,7} = \left( 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, 0, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, 0, \mp \frac{\beta_x}{\sqrt{2\rho}}, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_y^{2,7} = \left( 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, 0, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, 0, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_x, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^{3,6} = \left( 0, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2c^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_x, 0, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_y^{3,6} = \left( \rho \alpha_s, \pm \alpha_f c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_x, 0, -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_s \gamma p \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^4 = \left( 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_y^4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_y^5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

### 1.3.2 Численная схема

При построении численной схемы для решения системы уравнений многомерной МГД на основе метода PRML применяется тот же подход, что и для решения системы уравнений газодинамики. В каждой разностной ячейке необходимо линеаризовать уравнения МГД, фиксируя базис собственных векторов, и вычислить состояния на границах и в центрах ячеек, необходимые для реконструкции решения с помощью кусочных парабол. Далее следует применить ряд процедур монотонизации решения. Изменения, связанные с многомерностью задачи, будут касаться учета дополнительных потоков величин при вычислении состояний на границах ячеек и выполнения условия бездивергентности магнитного поля (1.44) при определении его компонент. Также необходимо будет модифицировать формулу для лимитеров в одной из процедур монотонизации решения.

### 1.3.3 Вычисление состояний на границах разностных ячеек

Будем расщеплять систему МГД по пространственным координатам и решать ее последовательно вдоль каждого координатного направления. Рассмотрим, например, направление  $x$ . Вектор-функция состояния  $\mathbf{V}(x, t)$  в каждой ячейке раскладывается по фиксированному локальному базису правых собственных векторов  $\mathbf{r}_x^p$ :

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_p \alpha^p(x, t) \mathbf{r}_x^p. \quad (1.54)$$

Коэффициенты  $\alpha^p(x, t)$  в разложении (1.54) (амплитуды волн) являются инвариантами Римана, сохраняющимися вдоль характеристик системы (1.49). Поэтому значения  $\alpha^p(x, t)$ , например, на правой границе ячейки с номером  $(i, j)$  при  $x = x_{i+1/2}$  в момент времени  $t + \tau$  можно вычислить, зная значения амплитуд волн, распространяющихся в ячейке  $(i, j)$ , в момент времени  $t$ . Однако при этом необходимо учесть вклад в амплитуды за счет потока в ортогональном направлении  $y$ .

Разложим матрицу  $A_x$  по собственным векторам:

$$A_x = R_x \Lambda_x L_x, \quad (1.55)$$

где  $R_x$  - матрица, столбцы которой есть правые собственные векторы  $\mathbf{r}_x^p$ ,  $L_x$  - обратная ей матрица, строки которой есть левые собственные векторы  $\mathbf{l}_x^p$ ,  $\Lambda_x$  - диагональная матрица собственных значений:  $(\Lambda_x)_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ ,  $(\Lambda_x)_{ij} = \lambda_x^p$  для  $i = j = p$ . Подставим (1.55) в (1.49) и домножим на матрицу  $L_x$  слева, тогда

$$L_x \partial_t \mathbf{V} + \Lambda_x L_x \partial_x \mathbf{V} + L_x A_y \partial_y \mathbf{V} = 0. \quad (1.56)$$

Подставив (1.54) в (1.56) и рассмотрев слагаемое, отвечающее за направление  $y$ , как источник, получим уравнение относительно  $\alpha^p(x, t)$ :

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = D^p, \quad p = 1, \dots, 8, \quad (1.57)$$

$$D^p = -\mathbf{l}_x^p A_y^p \partial_y V^p, \quad (1.58)$$

где  $\mathbf{I}_x^p$  - левый вектор Якобиана  $A_x$ ,  $A_y^p$  - столбец Якобиана  $A_y$ ,  $V^p$  - компонента вектора физических переменных. Решение уравнения (1.57) для амплитуд волн, распространяющихся к правой границе ячейки с номером  $(i, j)$ , записывается в виде:

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda_x^p \tau, t) + D^p \tau \quad \text{для } \lambda_x^p > 0. \quad (1.59)$$

(На состояние на правой границе влияют только те волны внутри ячейки с номером  $(i, j)$ , которые распространяются вдоль характеристик, отвечающих положительным  $\lambda_x^p$ .)

Значения компонент  $\mathbf{I}_x^p$  и  $A_y^p$  в (1.58) предлагается вычислять по тому же состоянию, по которому фиксируется базис собственных векторов в каждой ячейке. Частные производные  $\partial_y V^p$  можно вычислить, заменив их разностными:

$$\partial_y V^p = \frac{V_{i,j+1}^p - V_{i,j}^p}{\Delta y}.$$

Амплитуды волн в момент времени  $t + \tau$  на правой границе ячейки с номером  $(i, j)$  вычисляются по формуле (1.59) через значения амплитуд в момент времени  $t$ . В свою очередь, значения амплитуд в момент времени  $t$  вычисляются в соответствии с (1.54) путем домножения состояния  $\mathbf{V}(x, t)$  в точке  $x^p = x_{i+1/2} - \lambda_x^p \tau$  на соответствующие левые собственные векторы:

$$\alpha^p(x^p, t) = \mathbf{I}_x^p \cdot \mathbf{V}(x^p, t) \quad \text{для } \lambda_x^p > 0.$$

Состояние на правой границе ячейки  $(i, j)$  будет являться левым относительно интерфейса между ячейками  $(i, j)$  и  $(i + 1, j)$ . Обозначим его как  $\mathbf{V}^L$ . После определения амплитуд (1.59) оно вычисляется по формуле (1.54) путем суммирования по собственным векторам, фиксированным в ячейке  $(i, j)$ , отвечающим положительным собственным значениям.

Аналогичным образом определяется состояние  $\mathbf{V}^R$  справа от интерфейса, при этом в ячейке с номером  $(i + 1, j)$  рассматриваются характеристики, отвечающие  $\lambda_x^p < 0$ . После этого методом Рунге [67] решается

задача Римана о распаде разрыва между состояниями  $\mathbf{U}^L$  и  $\mathbf{U}^R$ , соответствующим состояниям в простых переменных  $\mathbf{V}^L$  и  $\mathbf{V}^R$ , и вычисляется состояние  $\mathbf{U}_{i+1/2,j}$  на интерфейсе:

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j} = \frac{\mathbf{U}^L + \mathbf{U}^R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p (\lambda_x^{*p} > 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}_{\mathbf{U}^x}^p(\mathbf{V}^*) - \frac{1}{2} \sum_{p (\lambda_x^{*p} < 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}_{\mathbf{U}^x}^p(\mathbf{V}^*), \quad (1.60)$$

где  $\mathbf{r}_{\mathbf{U}^x}^p = M \mathbf{r}_x^p$  - правые собственные векторы для консервативной системы МГД ( $M$  - матрица перехода (1.51)). Значения их компонент вычисляются по состоянию  $\mathbf{V}^*$ , определяемом с помощью следующих формул:

$$\rho^* = \sqrt{\rho^L \rho^R},$$

$$\xi^* = \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \text{ для } \xi = u, v, w, h,$$

$$B_x^* = \frac{B_x^L + B_x^R}{2}, \quad (1.61)$$

$$B_{y,z}^* = \frac{B_{y,z}^L / \sqrt{\rho^L} + B_{y,z}^R / \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad (1.62)$$

$$p^* = \left( \rho^* h^* - W^* - B^* \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma},$$

где

$$W^* = \rho^* \frac{(u^*)^2 + (v^*)^2 + (w^*)^2}{2},$$

$$B^* = (B_x^*)^2 + (B_y^*)^2 + (B_z^*)^2.$$

Величина  $h = (E + \bar{p})/\rho$  есть удельная энтальпия. Значения амплитуд  $\alpha^{*p}$  в (1.60) вычисляются по состоянию  $\mathbf{V}^*$  в соответствии с (1.54):

$$\mathbf{V}^* = \sum_p \alpha^{*p} \mathbf{r}_x^p(\mathbf{V}^*).$$

Таким образом, состояния на границах разностных ячеек вдоль направления  $x$  определены. Направление  $y$  рассматривается аналогичным образом. При этом формулы усреднения (1.61) и (1.62) заменяются на

$$B_y^* = \frac{B_y^L + B_y^R}{2},$$

$$B_{x,z}^* = \frac{B_{x,z}^L / \sqrt{\rho^L} + B_{x,z}^R / \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \sqrt{\rho^L \rho^R},$$

а в источнике  $D^p$  будет учитываться вклад потока величин в направлении  $x$ . При решении системы МГД в трехмерной постановке таких источников будет два.

Методика вычисления потоков на границах ячеек полностью повторяет изложенную для одномерного случая. Консервативная разностная схема для вычисления состояний в центрах ячеек на временном шаге  $n + 1$  имеет вид:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) - \frac{\tau}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (1.63)$$

Полуцелые пространственные индексы у потоков показывают, к каким границам разностной ячейки они относятся. Полуцелый номер шага по времени  $n + 1/2$  означает, что берутся усредненные значения потоков по временному шагу  $\tau$ , что дает второй порядок аппроксимации по времени.

### 1.3.4 Выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$

При численном решении системы МГД (1.41) условие бездивергентности магнитного поля (1.44) может не выполняться. В этом случае возможен нефизический перенос вещества в направлении, ортогональном полю  $\mathbf{V}$  (появляются фиктивные силы), также возможно нарушение законов сохранения энергии и момента. В настоящее время существует несколько подходов к решению данной проблемы. Подробное их обсуждение можно найти в работе [68].

Один из способов заключается в использовании восьмиволнового представления уравнений МГД, которое, как оказалось, ведет себя более стабильно при их разностной аппроксимации [69]. В систему МГД вводится дополнительное уравнение, отвечающее за перенос  $\operatorname{div} \mathbf{V}$ , и, таким образом, если в процессе численного счета где-то возникает ненулевая

дивергенция магнитного поля, она сносится за границу расчетной области. Этот подход не является универсальным, т.к. существуют задачи, в которых  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  может накапливаться в некоторых областях. Кроме того, появляющаяся восьмая характеристика может привести к нефизическим решениям (отрицательным температуре и плотности).

Другой способ - использование так называемых проекционных схем (projection scheme) [70]. Идея основана на том, что любое векторное поле можно представить в виде суммы ротора и градиента:

$$\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi. \quad (1.64)$$

Если поле  $\mathbf{B}$  бездивергентно, то оно определяется только ротором векторного потенциала:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.65)$$

Если в результате численного решения получено поле  $\mathbf{B}^*$  с ненулевой дивергенцией, то согласно (1.64)-(1.65) его можно скорректировать:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}^* - \nabla \phi. \quad (1.66)$$

При этом, согласно (1.64), потенциал  $\phi$  вычисляется из уравнения Пуассона

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \mathbf{B}^*. \quad (1.67)$$

Недостатком метода является трудоемкость численного решения (1.67), обеспечивающего выполнение (1.66).

Наконец, можно удовлетворить условию бездивергентности магнитного поля, воспользовавшись теоремой Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.68)$$

что впервые было предложено в работе [71] (схема с ограничением переноса - constrained transport или СТ). В этом случае компоненты магнитного поля определяются в центрах граней разностных ячеек, электрического поля - в узлах сетки, остальные величины - в центрах ячеек.



В работе [72] была предложена методика, объединяющая идею использования теоремы Стокса при таком расположении величин на сетке со схемами гоуновского типа (схема Flux-CT). Этой методикой и предлагается воспользоваться при построении численной схемы на основе метода PPML.

Очевидно, используя (1.68) для определения магнитного поля на каждом шаге по времени, будет обеспечена его бездивергентность. Как известно,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Следовательно, из (1.47)-(1.48) видно, что вычисляя потоки в каждый момент времени, получаются компоненты электрического поля, относящиеся, как и сами потоки, к границам ячеек. Так, шестая компонента потока  $F_6$  есть  $z$ -компонента электрического поля с обратным знаком, относящаяся к левой и правой границе ячейки, а пятая компонента потока  $G_5$  есть  $z$ -компонента электрического поля, относящаяся к верхней и нижней границе ячейки. Применяя разложение Тейлора вблизи узлов сетки для этих компонент и усредняя их, можно определить  $z$ -компоненту электрического поля в узлах сетки.

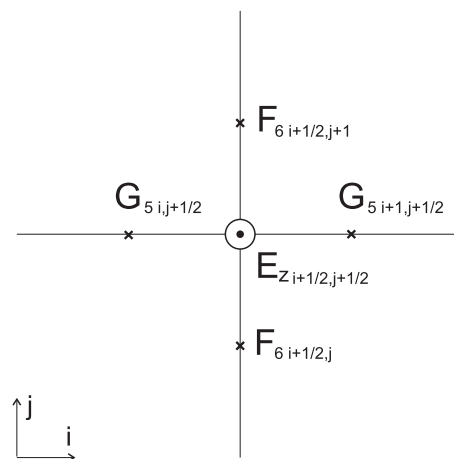


Рис. 1.25. Компоненты потоков, используемые для вычисления  $E_z$ .

$$E_{z\ i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} \left( E_{z\ i+1/2,j+1/2}^{left} + E_{z\ i+1/2,j+1/2}^{right} + E_{z\ i+1/2,j+1/2}^{top} + E_{z\ i+1/2,j+1/2}^{bottom} \right), \quad (1.69)$$

где например

$$E_{z\ i+1/2,j+1/2}^{left} = E_{z\ i,j+1/2} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{i,j+1/2} \frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{i,j+1/2} = \begin{cases} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i,j}, & v_{i,j+1/2} > 0, \\ \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i,j+1}, & v_{i,j+1/2} < 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i,j} + \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i,j+1} \right], & v_{i,j+1/2} = 0. \end{cases}$$

Вычислив  $E_z$  во всех узлах сетки и зная компоненты поля на предыдущем шаге по времени, можно воспользоваться (1.68) для определения новых компонент магнитного поля на границах ячеек в момент времени  $n+1$ . Теорема Стокса на разностной сетке аппроксимируется следующим образом:

$$B_{x\ i+1/2,j}^{n+1} = B_{x\ i+1/2,j}^n - \frac{\tau}{\Delta y} \left( E_{z\ i+1/2,j+1/2} - E_{z\ i+1/2,j-1/2} \right), \quad (1.70)$$

$$B_{y\ i,j+1/2}^{n+1} = B_{y\ i,j+1/2}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left( E_{z\ i+1/2,j+1/2} - E_{z\ i-1/2,j+1/2} \right). \quad (1.71)$$

На рис. 1.26 показаны компоненты  $E_z$  в узлах ячейки с номером  $(i, j)$  и компоненты  $B_x$  и  $B_y$ , вычисляемые по формулам (1.70)-(1.71) и относящиеся к граням ячейки.

Компоненты поля в центре ячейки  $(i, j)$  получаются усреднением:

$$B_{x\ i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( B_{x\ i-1/2,j}^{n+1} + B_{x\ i+1/2,j}^{n+1} \right), \quad (1.72)$$

$$B_{y\ i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( B_{y\ i,j-1/2}^{n+1} + B_{y\ i,j+1/2}^{n+1} \right). \quad (1.73)$$

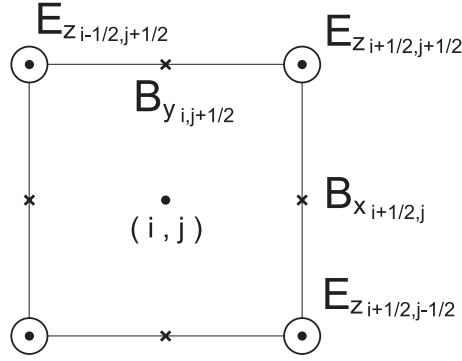


Рис. 1.26. Компоненты  $E_z$ ,  $B_x$  и  $B_y$  в ячейке с номером  $(i, j)$ .

После подстановки (1.70)-(1.71) в (1.72)-(1.73) компоненты поля  $B_{x_{i+1/2, j}}^n$  и  $B_{y_{i, j+1/2}}^n$  на границах ячеек на временном шаге  $n$  усредняются аналогично (1.72)-(1.73) и дают известные с предыдущего шага по времени компоненты  $B_{x_{i, j}}^n$  и  $B_{y_{i, j}}^n$  в центрах ячеек.

Полученное таким образом магнитное поле удовлетворяет условию бездивергентности в каждом узле разностной сетки, в чем можно убедиться, аппроксимировав  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  по формуле:

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div} \mathbf{B})_{i+1/2, j+1/2} = & \frac{1}{2 \Delta x} \left( B_{x_{i+1, j}} + B_{x_{i+1, j+1}} - B_{x_{i, j}} - B_{x_{i, j+1}} \right) \\
 & + \frac{1}{2 \Delta y} \left( B_{y_{i, j+1}} + B_{y_{i+1, j+1}} - B_{y_{i, j}} - B_{y_{i+1, j}} \right).
 \end{aligned}$$

Вычисленные с помощью разностной схемы (1.63) компоненты  $B_x$  и  $B_y$  магнитного поля в центрах ячеек на временном шаге  $n + 1$  необходимо заменить на компоненты, полученные по формулам (1.72)-(1.73). Заметим, что при решении системы МГД в трехмерной постановке необходимо переопределять все три компоненты магнитного поля.

### 1.3.5 Монотонизация решения

Зная состояния на границах ячеек, вычисленные согласно (1.60), и состояния в их центрах, вычисленные согласно (1.63), можно построить вектор-функции  $\mathbf{V}(x)$  и  $\mathbf{V}(y)$  - решение системы (1.41) на следующем

шаге по времени  $t + \tau$ , аппроксимированное с помощью кусочных парабол вдоль каждой координатной оси.

В стандартном методе РРМ имеется процедура монотонизации полученного решения путем модификации граничных состояний и она остается без изменений для многомерного случая. Однако ее оказалось недостаточно для сохранения порядка схема в точках локального экстремума физических переменных. Для решения этой проблемы используется алгоритм предложенной в работе [78].

В начале вычисляются все амплитуды волн  $\alpha_i^p$  для состояний величин в центрах ячеек  $\mathbf{V}_i$  и  $\alpha_{i\pm 1/2}^p$  для граничных состояний  $\mathbf{V}_{i\pm 1/2}$  ( $p = 1, \dots, 8$ ) умножая их на соответствующие левые вектора исходной МГД системы. После этого вычисляются следующие соотношения для граничных значений:

$$\alpha_{i\pm 1/2}^{p,*} = \text{median} \left( \alpha_i^p, \alpha_{i\pm 1/2}^p, \alpha_{i\pm 1}^p \right)$$

и

$$\alpha_{i\pm 1/2}^{p,**} = \text{median} \left( \alpha_i^p, \alpha_{i\pm 1/2}^{p,*}, 3\alpha_i^p - 2\alpha_{i\mp 1/2}^{p,*} \right),$$

где  $\text{median}$  функция есть

$$\begin{aligned} \text{median} (a, b, c) &= a + \text{minmod} (b - a, c - a), \\ \text{minmod} (a, b) &= \frac{1}{2} (\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min (|a|, |b|). \end{aligned}$$

Если оба граничных значения не изменяются, т.е.  $\alpha_{i\pm 1/2}^{p,**} = \alpha_{i\pm 1/2}^p$  для всех  $p$ , процедура завершается. Иначе вычисляются граничные значения  $\alpha_{i\pm 1/2,*}^p$  на основе интерполяции 5-го порядка WENO, применяя алгоритм 2.2.4 из [78] и проверяем, существует локальный экстремум: если  $\alpha_{i\pm 1/2}^{p,**} = \alpha_i^p$  для всех  $p$  тогда применяется алгоритм 2.1.2, 4(b) [78], иначе область монотонная но имеется слишком грубой градиент построенный по значениям полученными из Риманового солвера, и тогда используется алгоритм 2.1.2, 4(c) [78].

При решении задач в многомерной постановке формулу для вычисления лимитеров необходимо модифицировать.

Аппроксимирующая парабола, построенная вдоль направления  $x$ , для каждой компоненты  $V(x)$  состояния  $\mathbf{V}(x, t)$  в некоторый момент времени записывается в виде:

$$V(x) = V_{i,j} + \phi(V) \left[ s_{i,j} (x - x_i) + \frac{\sigma_{i,j}}{2} \left( (x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right) \right], \quad (1.74)$$

где

$$s_{i,j} = \frac{V_{i+1/2,j} - V_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad \sigma_{i,j} = 6 \frac{V_{i+1/2,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1/2,j}}{\Delta x^2}.$$

В качестве лимитера  $\phi(V)$  используется функция следующего вида [73]:

$$\phi(V) = \min \left( 1, \frac{|V_{i,j} - \max(V_{l,m})|}{|V_{i,j} - \max(V_{i-1/2,j}, V_{i+1/2,j}, V_{i,j-1/2}, V_{i,j+1/2})|}, \frac{|V_{i,j} - \min(V_{l,m})|}{|V_{i,j} - \min(V_{i-1/2,j}, V_{i+1/2,j}, V_{i,j-1/2}, V_{i,j+1/2})|} \right),$$

где  $l = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$ ,  $m = j - 2, j - 1, j, j + 1, j + 2$  кроме случая  $(l, m) = (i, j)$ . Таким образом, в двумерной задаче при вычислении лимитеров учитывается все окружение ячейки  $(i, j)$ .

С помощью ограниченной аппроксимирующей параболы (1.74) для каждой ячейки с номером  $(i, j)$  вычисляются новые граничные значения компонент  $V_{i-1/2,j}^R$  и  $V_{i+1/2,j}^L$  (индексы  $i - 1/2$  и  $i + 1/2$  обозначают левую и правую границы ячейки, а индексы  $R$  и  $L$  означают, что вычисленные величины являются компонентами правого и левого состояния относительно этих границ). После данной процедуры кусочные параболы оказываются не сшитыми на границах ячеек:  $V_{i+1/2,j}^L \neq V_{i+1/2,j}^R \neq V_{i+1/2,j}$ .

Процедура монотонизации, связанная с определением пределов допустимого изменения амплитуд волн, по которым вычисляются граничные состояния, останется без изменений.

В проведенных тестовых двумерных расчетах, последовательность методик монотонизации решения осуществлялась следующим образом: сначала была применена процедура определения пределов допустимого изменения амплитуд волн, по которым вычисляются граничные состоя-

ния, далее использовалась многомерная реконструкция с помощью лимитеров, и, наконец, для устранения ложных экстремумов применялась стандартная процедура монотонизации PPM.

### 1.3.6 Тестирование

Численный метод был протестирован на примере нескольких характерных двумерных задач МГД. Во всех расчетах уравнение состояния и уравнение энергии брались для случая идеального газа (1.42)-(1.43).

#### Тест 1: численная диссипация и затухание альвеновской волны

Как показали численные эксперименты, распространение волн в задачах МГД происходит с минимальной диссипацией величин, если волны распространяются под углом  $45^\circ$  к осям разностной сетки. Однако при моделировании реальных физических процессов, в частности при исследовании турбулентности, способность численной схемы обеспечивать малую диссипацию при распространении волн под малыми углами к сетке оказывается необходимой для получения правильного физического решения. Для исследования вопроса, как ведет себя численная схема на основе метода PPM в этом случае, используется тестовая задача из статьи [74], в которой происходит затухание альвеновской волны.

Альвеновская волна задавалась с помощью параметрических флуктуаций скорости и магнитного поля в области размером  $[-r/2, r/2] \times [-r/2, r/2]$ , где  $r = 6$ . Она распространялась вдоль вектора

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} \mathbf{e}_x + \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \mathbf{e}_y.$$

Угол между  $\mathbf{n}$  и осью  $y$  при  $r = 6$  составляет  $9.462^\circ$ . Скорость волны определялась с помощью параметра  $\xi$  по формуле

$$\mathbf{v} = (v_0 n_x - \xi n_y \cos \phi) \mathbf{e}_x + (v_0 n_y + \xi n_x \cos \phi) \mathbf{e}_y + \xi \sin \phi \mathbf{e}_z,$$

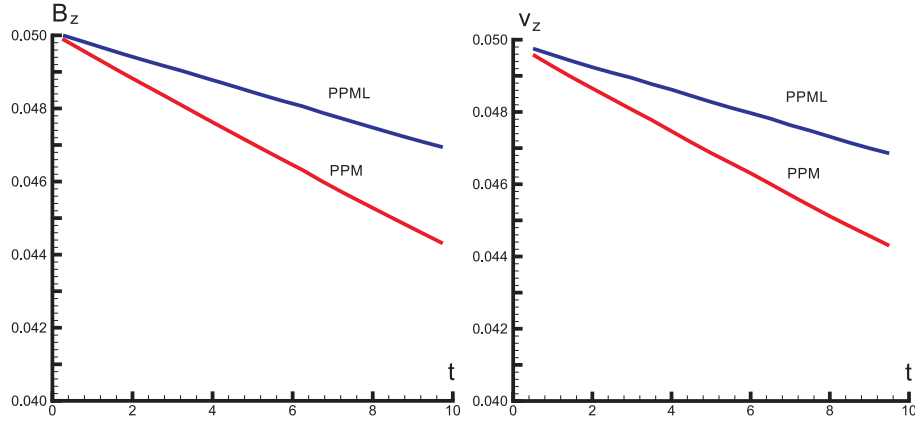


Рис. 1.27. Затухание Альвеновских волн. Показаны максимальные значения  $B_z$  и  $v_z$  как функции времени.

где  $\phi$  - фаза волны:

$$\phi = \frac{2\pi}{n_y} \left( n_x x + n_y y - \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} t \right).$$

Магнитное поле задавалось в виде:

$$\mathbf{B} = \left( B_0 n_x + \xi n_y \sqrt{4\pi\rho_0} \cos \phi \right) \mathbf{e}_x + \left( B_0 n_y - \xi n_x \sqrt{4\pi\rho_0} \cos \phi \right) \mathbf{e}_y - \xi \sqrt{4\pi\rho_0} \sin \phi \mathbf{e}_z.$$

При  $t = 0$  задавались невозмущенные значения  $\rho_0 = 1$  и  $p_0 = 1$ . Использовались следующие значения параметров:  $v_0 = 0$ ,  $B_0 = 1$ ,  $\xi = 0.2$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Расчетная область разбивалась на  $120 \times 120$  разностных ячеек, вычисления проводились с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ , использовались периодические граничные условия.

Рисунок 1.27 показан десятичный логарифм максимального по расчетной области значения  $z$  компоненты магнитного поля и скорости в зависимости от временного шага, полученный со схемой PPML и PPM. В то время как обе схемы имеют очень низкую диссипацию, PPML дает диссипацию даже меньше, чем у схемы PPM. В работе [74] представлены результаты данного теста для нескольких численных схем второго порядка из которых видно, что диссипация численной схемы на основе метода PPML сравнима с диссипацией лучших взвешенных безосцилляторных схем (weighted essentially non-oscillatory scheme или WENO [75]),

в которых используется процедура интерполяции на расширенных шаблонах, и значительно меньше диссипации TVD схем Годуновского типа.

**Тест 2: распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны**

Данная тестовая задача была предложена в статье [68] для сравнения точности численных схем на гладких решениях. Задача описывает распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны под углом  $\alpha = 30^\circ$  к оси  $x$  в области  $[0, 1/\cos \alpha] \times [0, 1/\sin \alpha]$ . Начальные условия имеют вид:

$$\rho = 1, \quad v_{\parallel} = 0, \quad v_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi\xi), \quad w = 0.1 \cos(2\pi\xi)$$

$$B_{\parallel} = 1, \quad B_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi\xi), \quad B_z = 0.1 \cos(2\pi\xi), \quad p = 0.1,$$

где  $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ . Здесь для удобства вместо компонент  $u, v, B_x$  и  $B_y$  используются компоненты скорости и магнитного поля, параллельные и ортогональные направлению движения альвеновской волны (например,  $B_{\parallel} = B_x \cos \alpha + B_y \sin \alpha$ ,  $B_{\perp} = B_y \cos \alpha - B_x \sin \alpha$ ). Волна распространяется в направлении точки  $(x, y) = (0, 0)$  со скоростью  $B_{\parallel}/\sqrt{\rho} = 1$ . Заметим, что при  $v_{\parallel} = 1$  волна превращается в стоячую.

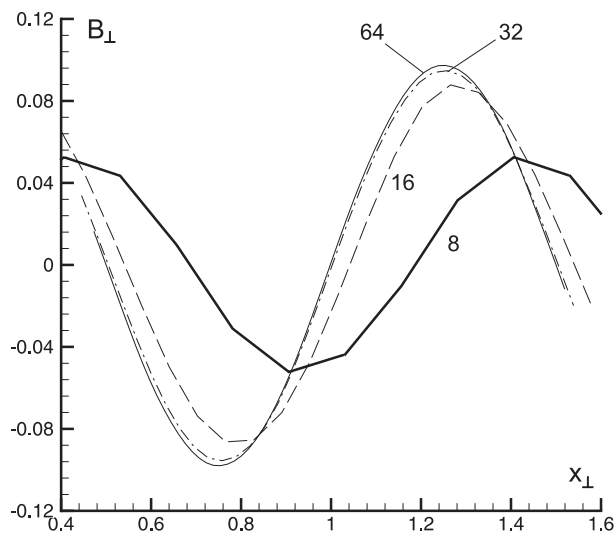


Рис. 1.28. Ортогональная компонента  $B_{\perp}$  магнитного поля в перемещающейся альвеновской волне при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения  $N$ .



Задача решалась на сетке  $N \times 2N$  при  $N = 8, 16, 32$  и  $64$ , при этом оценивалась относительная численная ошибка каждой величины по формуле

$$\delta_N(U) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2N} |U_{i,j}^N - U_{i,j}^E|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2N} |U_{i,j}^E|}, \quad \text{для } U = v_{\perp}, w, B_{\perp}, B_z,$$

где  $U_{i,j}^E$  - точное решение (за точное принималось решение, вычисленное при  $N = 128$ ). Скорость сходимости схемы оценивалась как

$$R_N = \log_2 (\delta_{N/2} / \delta_N), \quad (1.75)$$

где в качестве  $\delta_N$  бралось среднее

$$\delta_N = \frac{1}{4} (\delta_N(v_{\perp}) + \delta_N(w) + \delta_N(B_{\perp}) + \delta_N(B_z)). \quad (1.76)$$

Расчет проводился до момента времени  $t = 5$  с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , использовались периодические граничные условия. На рис. 1.28 представлена ортогональная компонента  $B_{\perp}$  магнитного поля при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения  $N$ . Видно, что при увеличении  $N$  решение приближается к точному.

В таблице 1 представлена усредненная относительная ошибка (1.76) и скорость сходимости (1.75). Для сравнения даны результаты данного теста для схемы с центральной разностью для потоков с ограничением переноса (Flux Central Difference/Constrained Transport или Flux-CD/CT), взятые из [68]. Данная схема является TVD-разностной схемой гоудоновского типа, и в ней используется тот же принцип сохранения бездивергентности поля. Видно, что результаты, полученные по предложенной нами схеме на основе метода PRML, превосходят полученные с помощью схемы Flux-CD/CT по точности, однако скорость сходимости метода несколько меньше.

Таблица 1: усредненная относительная ошибка и скорость сходимости для схем на основе PPML и Flux-CD/CT при расчетах на разных сетках.

N	PPML		Flux-CD/CT	
	$\delta_N$	$R_N$	$\delta_N$	$R_N$
8	$6.1129 \times 10^{-1}$	—	$9.71 \times 10^{-1}$	—
16	$2.2419 \times 10^{-1}$	1.4471	$3.93 \times 10^{-1}$	1.3049
32	$6.9068 \times 10^{-2}$	1.6986	$1.05 \times 10^{-1}$	1.9041
64	$2.5900 \times 10^{-2}$	1.4151	$2.9 \times 10^{-2}$	1.8563

### Тест 3: 2.5-мерная ударная волна (the 2.5D shock tube problem)

Это одна из популярных тестовых задач, которая представляет собой задачу Римана о распаде разрыва и демонстрирует вращение компонент магнитного поля [68, 76]. Т.к. все три компоненты скорости и магнитного поля ненулевые, а зависят только от координат  $x$  и  $y$ , задача считается 2.5-мерной. Решение задачи Римана состоит из двух быстрых ударных волн, двух вращательных разрывов, двух медленных ударных волн и контактного разрыва, который находится между медленными ударными волнами.

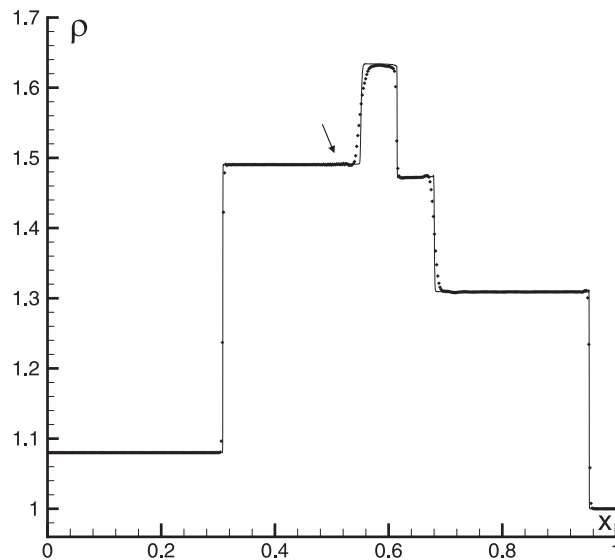


Рис. 1.29. 2.5-мерная ударная волна. Распределение плотности.

В начальный момент времени линия разрыва величин задается под

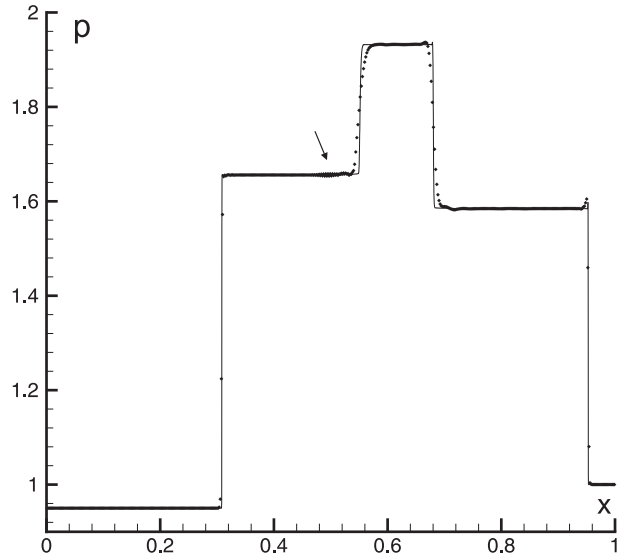


Рис. 1.30. 2.5-мерная ударная волна. Распределение полного давления.

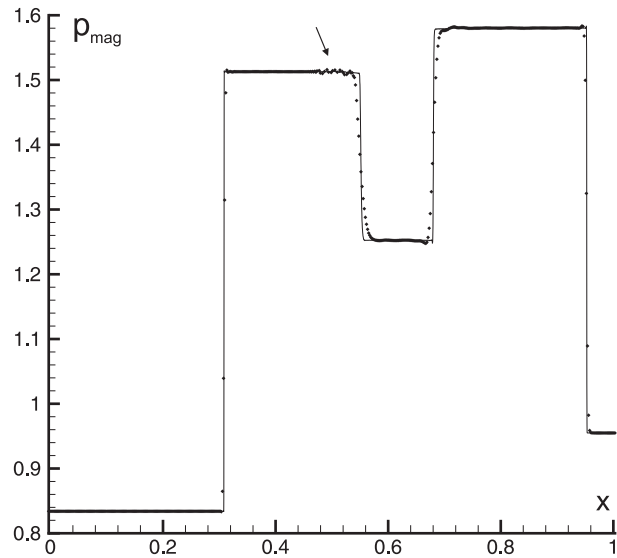


Рис. 1.31. 2.5-мерная ударная волна. Распределение магнитного давления.

углом  $\alpha = 45^\circ$  к разностной сетке. Состояния справа и слева имеют вид:

$$(\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p) = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 2, 3.6, 2, 0.95), \quad \text{для } \xi < 0,$$

$$(\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p) = (1, 0, 0, 0, 2, 4, 2, 1), \quad \text{для } \xi > 0,$$

где  $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ . Т.к. распределение величин вдоль направления  $x$  одинаково при любом  $y$  с точностью до смещения, то вдоль направления  $y$  нет необходимости брать большую расчетную область. Задача

решалась в области  $[0, 1] \times [0, 6/512]$  на сетке из  $512 \times 6$  ячеек. При этом использовались периодические граничные условия вдоль направления  $y$  и интерполяция нулевого порядка вдоль направления  $x$ . Расчет проводился до момента времени  $t = 0.2/\sqrt{2}$  с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ .

На рис. 1.29-1.31 представлено распределение плотности, полного давления и магнитного давления  $p_{mag} = \mathbf{B}\mathbf{B}/2$  вдоль направления  $x$ . Сплошной линией показано точное решение, оно было получено на сетке из  $5120 \times 6$  ячеек. Видно, что численная схема хорошо воспроизводит разрывные решения, однако имеются незначительные осцилляции в областях, отмеченных на рисунках стрелками. Этот эффект возникает из-за усреднения компонент потоков по формуле (1.69) на границе раздела, когда одна из четырех усредняемых компонент относится к одному состоянию, а три остальные - к другому. Таким образом, эта немонотонность связана с видом начальных условий в данной задаче.

**Тест 4: быстрое вращение цилиндра в покоящейся среде с однородным магнитным полем (rotor problem)**

Задача была предложена в [72] и использовалась при исследовании численных схем в работах [68, 76]. Для многих схем она оказалась трудной, т.к. в процессе счета возникали отрицательные значения давления [68].

Расчетная область - квадрат размером  $[0, 1] \times [0, 1]$  с однородным давлением и магнитным полем. В начальный момент времени имеется единственная ненулевая компонента поля  $B_x \neq 0$ . В центре квадрата задается вращающийся плотный диск (сечение цилиндра) радиуса  $r_0 = 0.1$ . При  $r < r_0$  задается  $\rho = 10$ ,  $u = -v_0(y - 0.5)/r_0$ ,  $v = v_0(x - 0.5)/r_0$ , где  $r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$ . При  $r > r_1$  среда неподвижна ( $u = v = 0$ ) и имеет плотность  $\rho = 1$ . В переходной зоне  $r_0 < r < r_1$  используется линейная интерполяция величин:  $\rho = 1 + 9f$ ,  $u = -fv_0(y - 0.5)/r$ ,  $v = fv_0(x - 0.5)/r$ , где  $f = (r_1 - r)/(r_1 - r_0)$ . Компонента скорости  $w = 0$  во всей расчетной области. Заданная таким образом система сре-

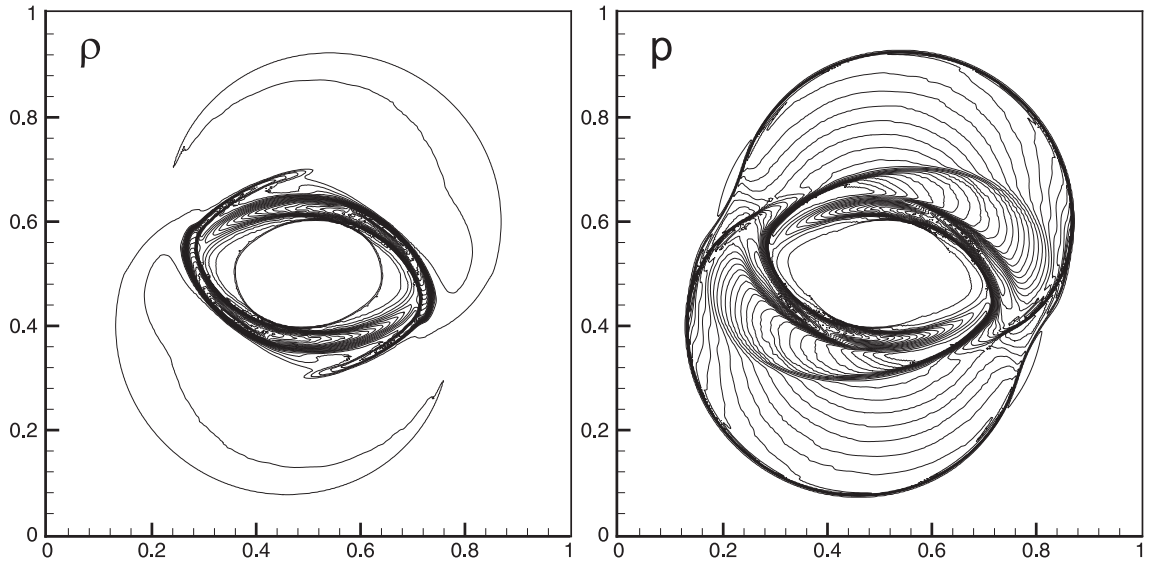


Рис. 1.32. Вращение цилиндра (вариант 1). Линиями показаны 30 уровней плотности в диапазоне от 1.3 до 13.5 и давления - от 0.12 до 2.1.

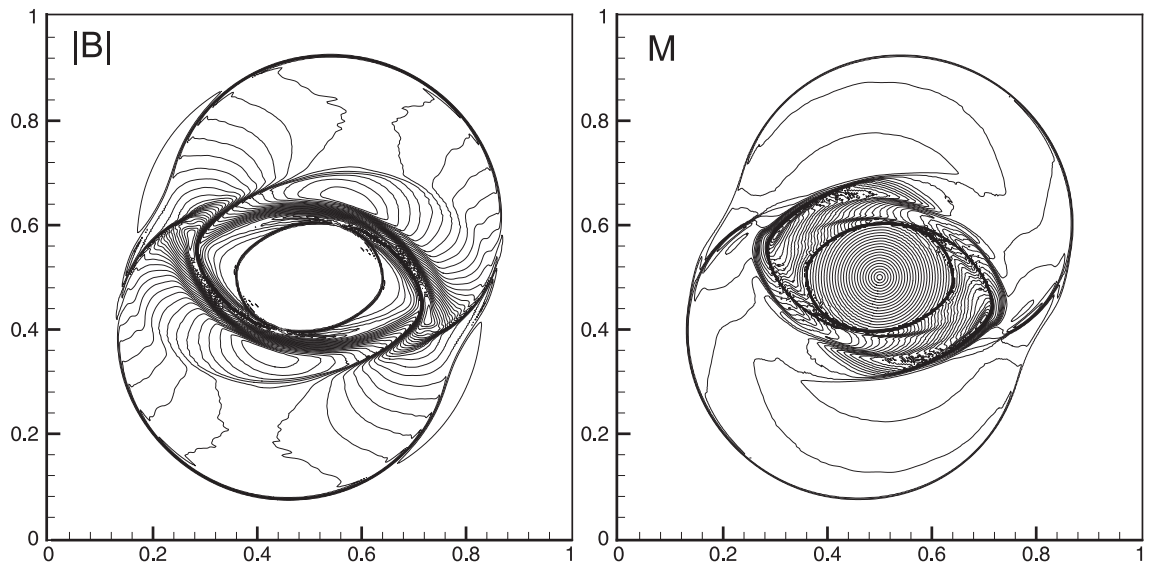


Рис. 1.33. Вращение цилиндра (вариант 1). Линиями показаны 30 уровней модуля магнитного поля  $|B|$  в диапазоне от 0.32 до 2.288 и числа Маха - от 0.144 до 4.27.

да + вращающийся диск не является равновесной конфигурацией, т.к. не сбалансированы центробежные силы. Вращающееся вещество будет постепенно перераспределяться по расчетной области, захватывая неподвижную его часть, при этом магнитное поле будет удерживать вращающееся вещество в сплюснутой форме.

Следуя работам [68, 76], проведены расчеты с двумя вариантами на-

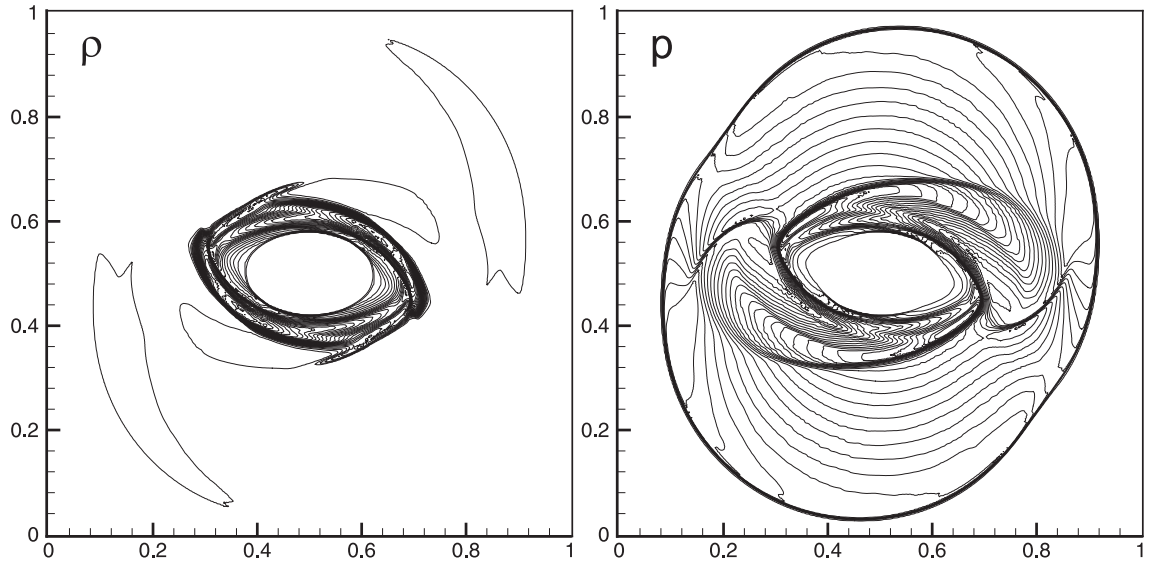


Рис. 1.34. Вращение цилиндра (вариант 2). Линиями показаны 30 уровней плотности в диапазоне от 0.9 до 10.1 и давления - от 0.036 до 0.75.

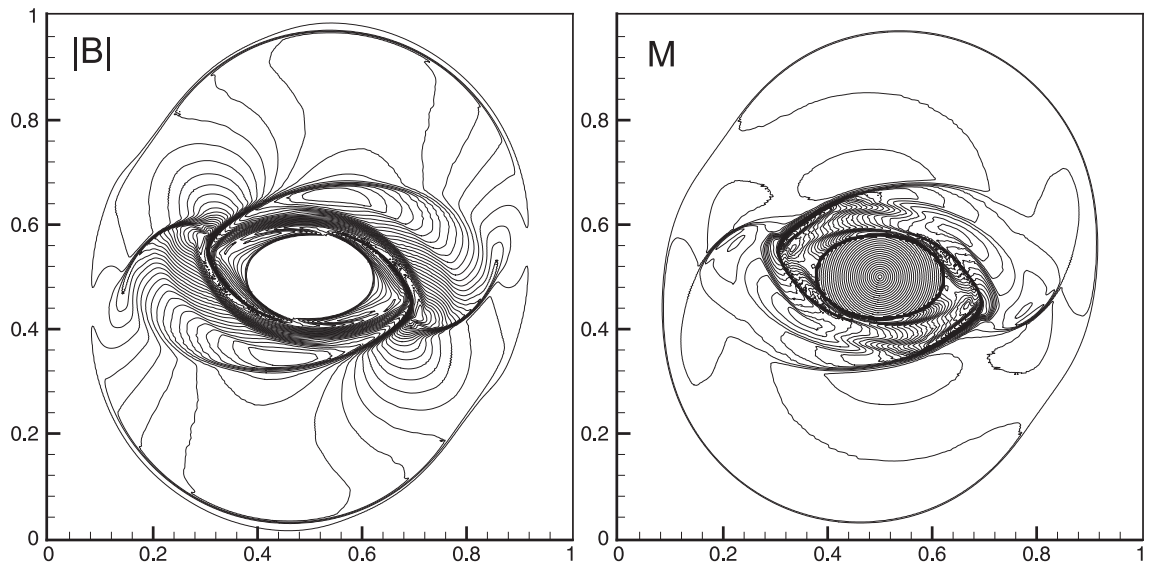


Рис. 1.35. Вращение цилиндра (вариант 2). Линиями показаны 30 уровней модуля магнитного поля  $|\mathbf{B}|$  в диапазоне от 0.152 до 1.155 и числа Маха - от 0.096 до 2.86.

чальных данных:

1.  $v_0 = 2$ ,  $p = 1$ ,  $B_x = 5/\sqrt{4\pi}$ ,  $\gamma = 1.4$ , время счета  $t = 0.15$ ;
2.  $v_0 = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $B_x = 2.5/\sqrt{4\pi}$ ,  $\gamma = 5/3$ , время счета  $t = 0.295$ .

Расчеты проводились на сетке  $N \times N = 400 \times 400$  с числом Куранта  $\sigma = 0.4$ . Граничные условия - интерполяция нулевого порядка. На

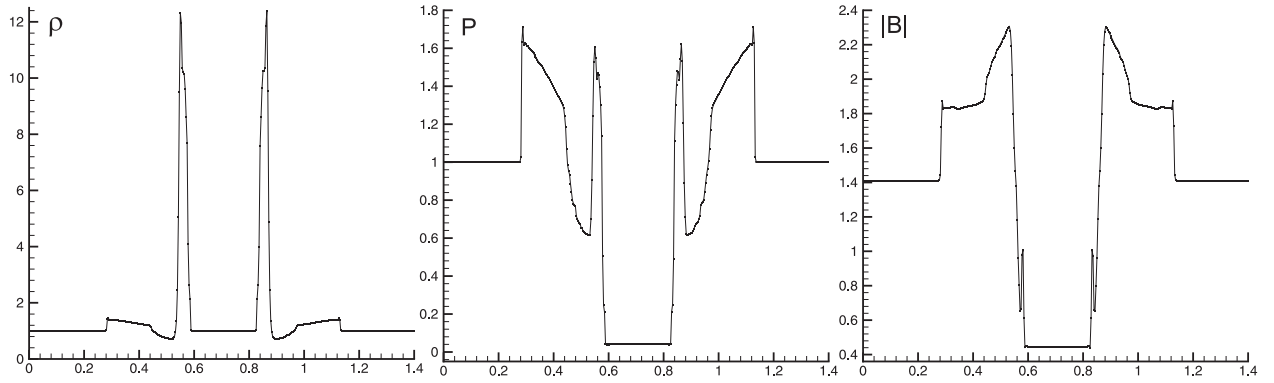


Рис. 1.36. Вращение цилиндра (вариант 1). Сечение вдоль диагонали  $x = y$  для плотности, давления и модуля магнитного поля  $|\mathbf{B}|$ .

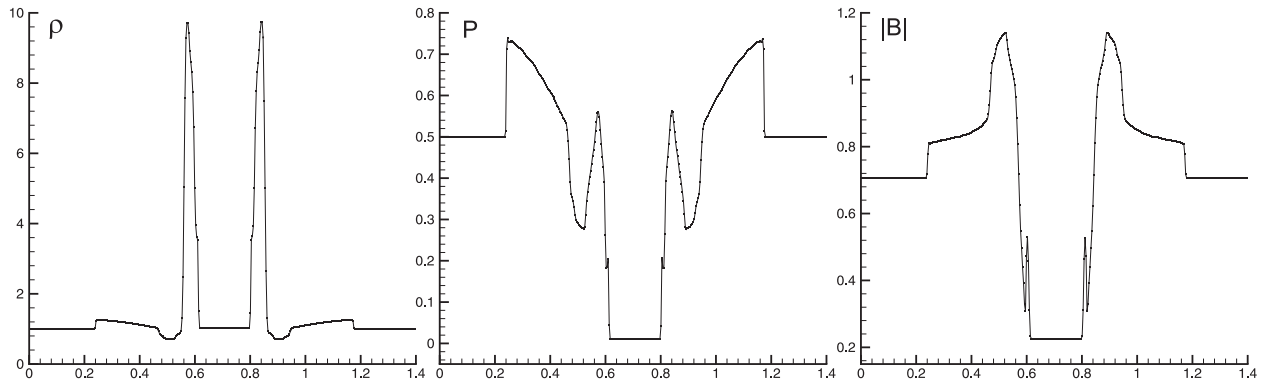


Рис. 1.37. То же, что на рис. 1.36 для варианта 2.

рис. 1.32-1.33 представлены результаты на конечный момент времени для варианта 1, на рис. 1.34-1.35 - для варианта 2, на рис. 1.36-1.37 показаны сечения некоторых величин вдоль диагонали  $x = y$ . Из рисунков видно, что решение, полученное по численной схеме на основе метода PPM, имеет хорошее разрешение и сравнимо по точности с решением, полученным по схеме Flux-CT [68], а также с решением на адаптивной сетке [76].

#### Тест 5: вихрь Орзага-Танга (Orszag-Tang vortex problem)

Задача была впервые предложена в статье [77] и часто используется для тестирования численных методов в двухмерной МГД (см., например, [68, 75]). В частности, она демонстрирует процесс формирования ударных

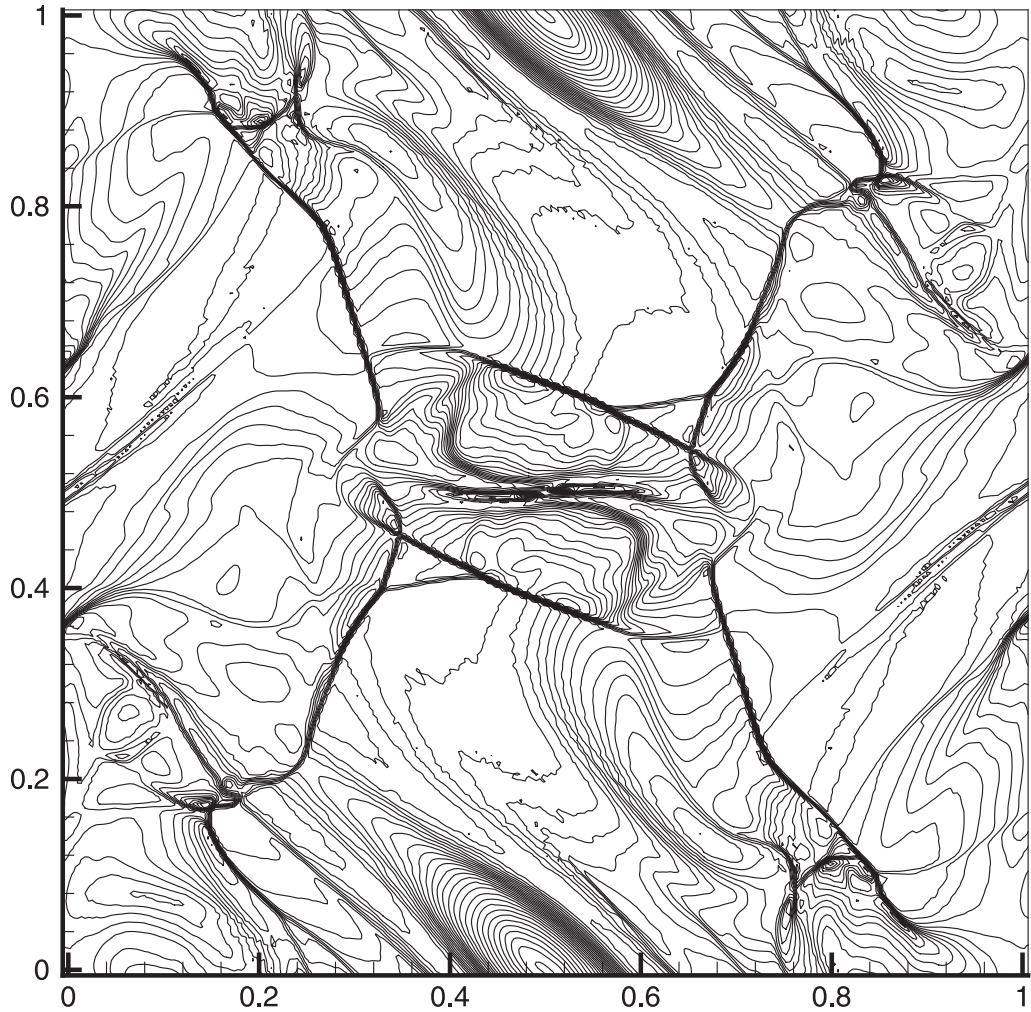


Рис. 1.38. Вихрь Орзага-Танга. Линиями показаны 30 уровней давления в диапазоне от 0.02 до 0.5 на момент  $t = 0.5$ .

волн и их взаимодействие, переход к сверхзвуковой турбулентности.

В расчетной области размером  $[0, 1] \times [0, 1]$  в начальный момент времени задаются следующие параметры среды:  $\rho = 25/(36\pi)$ ,  $p = 5/(12\pi)$ ,  $\gamma = 5/3$  (в этом случае скорость звука  $c = \sqrt{\gamma p/\rho} = 1$ ). Скорости и компоненты магнитного поля задаются периодическим образом:  $u = -\sin 2\pi y$ ,  $v = \sin 2\pi x$ ,  $w = 0$ ,  $B_x = -B_0 \sin 2\pi y$ ,  $B_y = B_0 \sin 4\pi x$ ,  $B_z = 0$ , где  $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$ . Несмотря на гладкие начальные условия, картина движения вещества становится очень сложной.

Проведены расчеты на сетке  $N \times N$  при различных  $N$  с числом Куранта  $\sigma = 0.3$ . Использовались периодические граничные условия. На



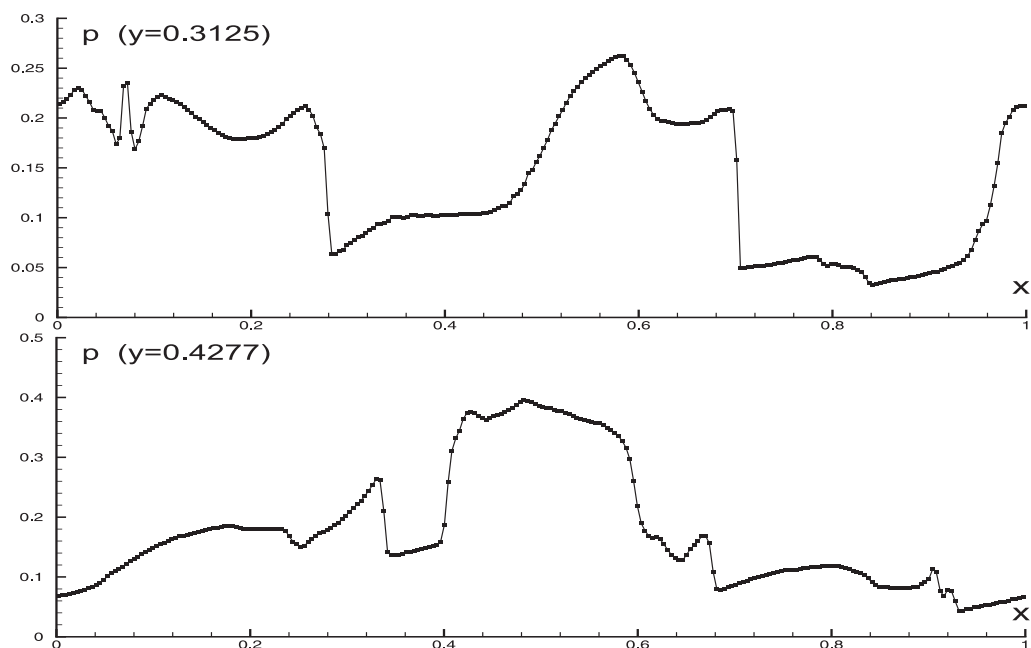


Рис. 1.39. Вихрь Орзага-Танга. Давление вдоль линий  $y = 0.3125$  и  $y = 0.4277$  на момент  $t = 0.5$ .

рис. 1.38 линиями уровней показано распределение давления по расчетной области в момент времени  $t = 0.5$  для варианта с  $N = 256$ , на рис. 1.39 показаны срезы давления вдоль линий  $y = 0.3125$  ( $j = 83$ ) и  $y = 0.4277$  ( $j = 112$ ) соответственно, по которым можно оценить точность передачи разрывов.

Так же как и в задаче о распространении циркулярно-поляризованной альвеновской волны (тест 2) были вычислены усредненная относительная ошибка  $\delta_N$  и скорость сходимости решения к точному  $R_N$  при расчетах на сетках с  $N = 50, 100$  и  $200$  по формулам (1.76) и (1.75) соответственно (в (1.76) усреднялись все имеющиеся ненулевые компоненты решения). За точное принималось решение на сетке с  $N = 400$ . Результаты представлены в таблицах 2 и 3 на моменты времени  $t = 0.159$  и  $t = 0.5$ . Для сравнения приведены результаты для схемы с центральной разностью для потоков (Flux-CT) и для схемы с ограничением переноса (Flux-CT), взятые из [68]. (В статье [68] размер расчетной области был другой, выбранные нами моменты времени отличаются от представлен-

ных в [68] в  $2\pi$  раз.) Из таблиц видно, что результаты, полученные по предложенной нами схеме на основе метода PRML, как и в тесте 2, превосходят полученные с помощью схем Flux-CT и Flux-CD по точности, однако скорость сходимости метода несколько меньше. При увеличении времени счета скорость сходимости метода уменьшается, приближаясь, тем не менее, к скорости сходимости Flux-CT и Flux-CD.

Таблица 2: усредненная относительная ошибка и скорость сходимости для схем PPML, Flux-CT и Flux-CD при расчетах на разных сетках при  $t = 0.159$ .

N	PPML		Flux-CT		Flux-CD	
	$\delta_N$	$R_N$	$\delta_N$	$R_N$	$\delta_N$	$R_N$
50	$2.7262 \times 10^{-2}$	—	$3.21 \times 10^{-2}$	—	$3.47 \times 10^{-2}$	—
100	$1.0412 \times 10^{-2}$	1.3887	$1.14 \times 10^{-2}$	1.4935	$1.22 \times 10^{-2}$	1.5081
200	$4.1575 \times 10^{-3}$	1.3244	$3.5 \times 10^{-3}$	1.7036	$3.7 \times 10^{-3}$	1.7213

Таблица 3: то же что и в таблице 2 для  $t = 0.5$ .

N	PPML		Flux-CT		Flux-CD	
	$\delta_N$	$R_N$	$\delta_N$	$R_N$	$\delta_N$	$R_N$
50	$1.2246 \times 10^{-1}$	—	$1.352 \times 10^{-1}$	—	$1.380 \times 10^{-1}$	—
100	$6.9122 \times 10^{-2}$	0.8251	$7.37 \times 10^{-2}$	0.8754	$7.75 \times 10^{-2}$	0.8324
200	$3.0589 \times 10^{-2}$	1.1761	$3.58 \times 10^{-2}$	1.0417	$3.73 \times 10^{-2}$	1.0550

В данном разделе представлена численная схема для решения задач многомерной идеальной МГД, основанная на методе PPML. При переходе от одномерного случая к многомерному методика построения численной схемы не изменяется. Фиксируется базис собственных векторов в каждой разностной ячейке и, таким образом, исходная система МГД линеаризуется. После этого используем свойство сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений для определения состояний на границах разностных ячеек. В этом случае для каждой ячейки получаются свои граничные состояния, их значения на общем интерфейсе для левой и правой ячейки не совпадают. Для "сшивки" состояний необходимо решить задачу Римана о распаде разрыва между ними, перейдя при этом от простых переменных к консервативным. При вычислении амплитуд волн, которые используются для определения граничных состояний по формуле (1.54), следует учесть дополнительные потоки величин в ортогональных направлениях в виде источников. Состояния в центре ячеек вычисляются с помощью консервативной разностной схемы гудуновского типа (1.63). Методика вычисления потоков на границах полностью повторяет изложенную для одномерного случая. Для получения второго порядка аппроксимации потоков по времени необходимо усреднить амплитуды волн по своей

области влияния, аналогично методике РРМ. Для сохранения монотонности при реконструкции решения кусочными параболами необходимо модифицировать граничные состояния, применяя методику определения пределов допустимого изменения амплитуд волн. Однако использование одномерного метода монотонизации не гарантирует в общем случае монотонного решения в многомерном пространстве. Поэтому применяется многомерная реконструкция с помощью функций-лимитеров. Далее, для устранения ложных экстремумов применяется стандартную процедуру монотонизации метода РРМ. При решении задач МГД в многомерной постановке необходимо обеспечить выполнение условия бездивергентности магнитного поля. Для этого существует несколько подходов (см. раздел 1.3.4). Предлагается воспользоваться теоремой Стокса (1.68), как наиболее простым. Новые компоненты магнитного поля, гарантирующие его бездивергентность, получаются при решении уравнения (1.68) на разностной сетке. Необходимые для этого компоненты электрического поля берутся из потоков (1.47)-(1.48) и усредняются по всем граням вокруг каждого узла сетки. Тестирование численной схемы проведено на примере нескольких известных двухмерных задач. Результаты расчетов показали, что метод РРМЛ дает хорошее представление как для гладких, так и для разрывных решений за счет низкой диссипации (см. рис. 1.27). Полученные двухмерные картины течения имеют хорошее разрешение. Для задачи о распространении циркулярно-поляризованной альвеновской волны (тест 2) и задачи о вихре Орзага-Танга (тест 5) была вычислена усредненная относительная ошибка и скорость сходимости решения к точному на различных сетках (см. таблицы 1-3). Оказалось, что результаты, полученные по предложенной нами схеме на основе метода РРМЛ, превосходят полученные с помощью схем Flux-CT и Flux-CD по точности, однако скорость сходимости метода несколько меньше. При увеличении времени счета скорость сходимости метода уменьшается, приближаясь, тем не менее, к скорости сходимости Flux-CT и Flux-CD.

### 1.3.7 Моделирование сжимаемой турбулентности

Сверхзвуковая МГД турбулентность играет важную роль в статистических теориях звездообразования [98]. Это стимулирует развитие аккуратных численных методов удобных для моделирования турбулентных молекулярных облаков. Одной из мотиваций в развитии численной схемы PRML стала необходимость в МГД схеме, обладающей малой численной диссипацией или лучше, чем у известной схемы PRM. В этом разделе иллюстрируется применение метода PRML для решения трудной проблемы расчета форсированной суперальвеновской турбулентности. Многие численные методы, которые успешно проходят стандартные МГД тесты, становятся неустойчивыми при решении этой задачи [93]. Добавление небольшой вязкости в численную схему, для обеспечения ее устойчивости, приводит в конечном счете к деградации турбулентных статистик [80]. Поэтому проблема численной устойчивости становится решающей для моделирования как сверхзвуковой турбулентности, так и самого процесса звездообразования.

В качестве примера здесь представлены результаты численного моделирования слабозамагниченной, сверхзвуковой турбулентности. В периодической трехмерной коробке с длиной  $L = 1$  рассматривается эволюция турбулентности под действием крупномасштабной соленоидальной силы в течении 8 характерных времен  $t_d \equiv L/2M_s$ . В начальный момент времени  $t = 0$ , однородный газ с плотностью  $\rho \equiv 1$  пронизан слабым однородным магнитным полем  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{x}$  с плазменным параметром  $\beta_0 \equiv 2p/B_0^2 = 20$ . Кроме того задается начальное, крупномасштабное поле скорости, которое соответствует среднеквадратичному звуковому числу Маха  $M_s \sim 10$ . Предполагается изотермическое уравнение состояния ( $c \equiv 1$ ), которое представляет усредненные термодинамические свойства вещества в плотных молекулярных облаках ( $n = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 10 \text{ K}$ ).



Рис. 1.40. Моделирование сверхзвуковой турбулентности с RPML на сетке  $512^3$  ячеек. Четыре слайда показывают распределение плотности на плоскости  $x \equiv 0$ , иллюстрируя переход к полностью развитой турбулентности с  $M_s \approx M_A \approx 10$ . Переход к турбулентности включает образование первых сильных ударных волн на каустиках начального соленоидального поля скорости ( $t = 0.5t_d$ , верху-слева), взаимодействие ударных волн и развитие первых сдвиговых неустойчивостей ( $t = 1t_d$ , верху-справа), и постепенный переход к статистически стационарному состоянию ( $t = 2t_d$  и  $4t_d$ , нижний ряд). Стандартная логарифмическая черно-красно-белая палитра показывает области высокой плотности в светло-красном цвете и волны разрежения в черном цвете.

Развитие процесса турбулентности начинается с образования сильных ударных волн на "каустиках" начального поля скорости (рис. 1.40). Взаимодействие ударных волн приводит к каскаду начальной кинетической

энергии от крупных масштабов вниз ко все более мелким масштабам в духе процесса Колмогорова-Ричардсона. Магнитное поле усиливается в 50 раз посредством мелкомасштабного механизма динамо [81]. Крупномасштабная соленоидальная сила удерживает среднеквадратичное звуковое число Маха постоянным при значении  $M_s \approx 10$ . Эволюция кинетической и магнитной энергий показаны на левой стороне рисунка 1.41. Также изображена величина  $\max(|\nabla \cdot \mathbf{B}|)$  как функция времени в течении этого моделирования. Численный метод PRML удерживает абсолютное значение дивергенции магнитного поля ниже  $10^{-12}$  для всех времен, даже после 70,000 шагов интегрирования по времени (если используется в расчетах арифметика вычислений с двойной точностью). После 4 характерных времен эволюции, система завершает переход к полностью развитому изотропному состоянию с  $M_s \approx 10$  и  $M_A \approx 10$ . Правая половина рисунка показывает спектральные характеристики этого насыщенного состояния, с усредненным по 25 набором данных полного куба взятых в промежутке между  $t = 4t_d$  и  $t = 8t_d$ , спектра мощности плотности, скорости и силы магнитного поля.

Спектр скорости имеет расширенный диапазон масштабирования с наклоном около  $-2$  как и в Бюргерс турбулентности, подобно соответствующему масштабированию для немагнитных течений при высоких числах Маха [79]. Это ожидаемо, поскольку в этом примере турбулентность слабозамагничена. Спектр плотности имеет наклон примерно  $-0.7$  снова согласуясь с предыдущими результатами для немагнитных течений с использованием PRM кода ( $-1.0$  at  $M_s = 6$ ) и с ожидаемым трендом в направлении плоского спектра “белого шума” при  $M_s = \infty$ .

Спектр магнитной энергии не показывает четкого диапазона масштабирования, как и ожидалось при таком умеренном разрешении, предполагая эффективное магнитное число Прандля равным единице. Спектр мощности  $\rho^{1/3} \mathbf{v}$  имеет наклон  $-1.7$ . Эта спектральная характеристика сжимаемых течений, означающая скорость переноса энергии в волновом

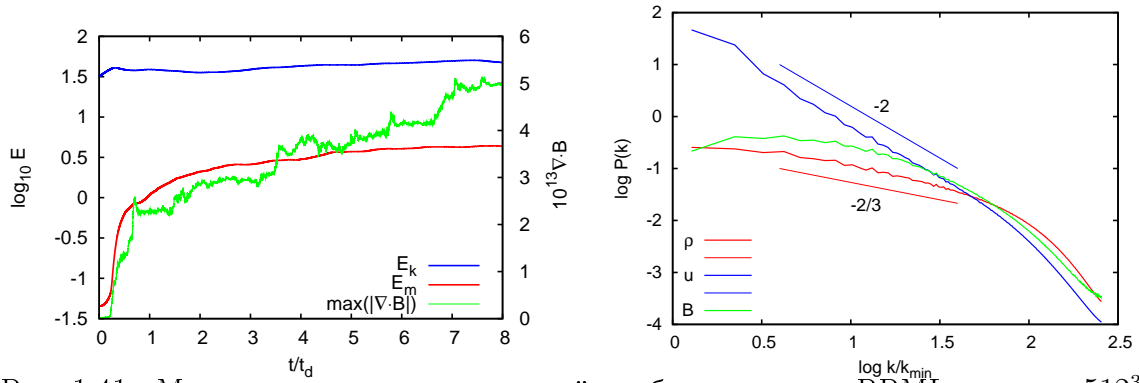


Рис. 1.41. Моделирование сверхзвуковой турбулентности с PPML на сетке  $512^3$  ячеек. Эволюция во времени кинетической и магнитной энергии и максимума абсолютного значения  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  (левая сторона) и спектр мощности для скорости, плотности и магнитного поля (правая сторона).

пространстве, нечувствительна к турбулентному числу Маха и должна иметь Колмогоровский наклон  $-5/3$  [79] как для несжимаемого, так и для сильно сжимаемого режима, хотя наклон обычно получается более крутым вследствие перемежаемости [94]. Это верно, как для немагнитных, так и для слабозамагнитных течений.

Дополнительно были проведены два моделирования с теми же начальными условиями, но разными уровнями магнетизации вещества при  $\beta_0 = 2$  и  $0.2$  [95]. В то время как устойчивое турбулентное состояние при  $\beta_0 = 2$  все еще суперальвеновское с  $M_A \approx 3$ , при магнитной энергии примерно в 3 раза меньшей чем кинетическая энергия, трансальвеновский случай  $\beta_0 = 0.2$  достигает равномерного распределения между кинетической и магнитной энергиями. В обоих случаях, PPML идеально устойчив при числах Куранта  $\sigma = 0.2$ , как и в суперальвеновском случае  $\beta_0 = 20$  рассмотренным выше.

В целом, полученные спектральные характеристики слабозамагнитной, сильносжимаемой турбулентности демонстрируют, что низкая диссипация и широкий спектральный диапазон схемы PPML делают ее идеальной численной схемой для крупномасштабного моделирования сжимаемой, сверхзвуковой турбулентности.



## 1.4 Выводы по главе 1.

В данной главе представлена методика решения уравнений гиперболического типа для скалярного случая, для систем уравнений газодинамики и идеальной магнитогазодинамики методом PRML, который представляет собой модификацию известного кусочно-параболического метода PRM. Данная модификация основана на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений. Это позволяет получить граничные состояния, необходимые для построения кусочной параболы в численной ячейке, без привлечения интерполяционной процедуры, что значительно улучшает диссипативные свойства схемы. Граничные состояния в областях немоногоного решения переопределяются в соответствии с одномерной процедурой монотонизации, сохраняющей порядок схемы, и с многомерным алгоритмом монотонизации, удаляющим локальные выбросы в решении. При вычислении граничных значений кусочных парабол в методе PRML, в многомерном случае учитываются изменения амплитуд волн в поперечных направлениях для преодоления нефизических осцилляций в численном решении. Для обеспечения выполнения условия бездивергентности магнитного поля применяется подход, основанный на теореме Стокса и на определении значений электрического поля из соответствующих компонент векторов потоков системы уравнений МГД. Решение одно- и двухмерных тестовых задач показывает, что метод PRML дает отличное представление как гладких, так и разрывных решений. Моделирование сжимаемой турбулентности при различных значениях уровня магнетизации вещества показывает, что метод PRML является идеально устойчивым методом, обладает широким спектральным диапазоном и не искажает спектральных характеристик турбулентности.

## Глава 2

# Моделирование сверхзвуковой турбулентности в молекулярных облаках

Сверхзвуковая турбулентность играет важную роль в формировании внутренней иерархической структуры молекулярных облаков. Поскольку процесс звездообразования начинается с образования плотных ядер, турбулентность может быть ответственной за создание начальных условий в зарождении звезд. Случайные сверхзвуковые течения в изотермическом газе приводят к сложной сети ударных волн, создающих филаментарную структуру с очень большим градиентом плотности. Это может приводить, естественно, к большим значениям плотности, необходимым для образования звёзд малой массы, в пределах слоёв газа за ударными волнами и, поэтому, турбулентность может прямо воздействовать на распределение масс дозвёздных ядер и звёзд [83]. С другой стороны, турбулентность является, в некоторой степени, ответственной за низкую скорость звездообразования во многих местах [84], поскольку турбулентная энергия обычно превышает гравитационную энергию на малых масштабах в пределах молекулярных облаков. Теоретические модели образования звёзд, основанные на действии турбулентности, уже предложены недавно в работах [85],[86]. Очень трудно моделировать в лаборатории фи-

зические условия протекания сверхзвуковой турбулентности, типичные для условий молекулярных облаков, и необходимая для этого информация из наблюдений также ограничена. Таким образом численное моделирование в настоящее время представляет собой единственный способ исследовать статистику сверхзвуковой турбулентности, которая является ключевой информацией для любой успешной статистической теории звездообразования [96],[98]. Долгое время природа *сильно сжимаемой* и *замагниченной* межзвездной турбулентности оставалась слабо разработанной. Численное моделирование дает возможность оценить перенос энергии между масштабами и найти ключевые пространственные корреляции между основными характеристиками турбулентных течений.

## 2.1 Тестирование PPML при моделировании сверхзвуковой изотермической турбулентности.

Способность численной схемы PPML моделировать сверхзвуковую турбулентность была проверена в решении проблемы эволюции сверхальвеновской изотермической турбулентности при отсутствии действия внешней случайной силы [87]. При решении этой задачи также проводилось сравнение PPML с другими известными численными кодами такими как ENZO, FLASH, RAMSES и др. при одинаковой начальной постановке проблемы.

Численно решалась система уравнений МГД для идеального изотермического газа в кубической области размером  $L$  с периодическими граничными условиями:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \left( p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = \rho \mathbf{F}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\rho$  и  $\mathbf{u}$  есть плотность газа и скорость,  $\mathbf{B}$  - сила магнитного поля,  $p$  - давление газа, и  $\mathbf{I}$  есть единичный тензор.

Начальные данные для моделирования были созданы в 2007 году при помощи численного кода STAGGER на сетке  $1000^3$  ячеек, используя случайную во времени крупномасштабную ( $k/k_{\min} \leq 2$ , где  $k_{\min} = 2\pi/L$ ) изотропную соленоидальную силу  $\mathbf{F}$  для перемешивания газа и сохранения среднеквадратичного значения звукового числа Маха  $M_{s,0} \approx 9$ . В уравнении индукции член со случайной силой отсутствовал, поэтому среднеквадратичное магнитное поле пассивно усиливалось через взаимодействие с полем скорости. В начальный момент времени модель содержала однородную плотность  $\rho_0$  и давление  $p_0$ , случайное крупномасштабное поле скорости  $\mathbf{u}_0$ , и однородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направленное вдоль координаты  $z$ . Величина магнитного поля  $B_0 = \sqrt{2/\beta_0} = 0.3$  при отношении теплового давления к магнитному давлению  $\beta_0 = 22$ . Чтобы достигнуть насыщенного состояния турбулентности, эволюция течения рассчитывалась численным кодом STAGGER в течение трёх динамических времён (определенным как  $t_d \equiv L/2M_{s,0}$ ). Предполагая начально  $M_{s,0} = 10$ , величина  $t_d = 0.05$  определялось в единицах времени пересечения звуком вычислительной области. В насыщенном состоянии турбулентности, уровень магнитных флуктуаций в  $\sim 50$  раз выше чем  $B_0$ , т.е.  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ , где  $b_{\text{rms}} \gg B_0$  и  $\langle \mathbf{b} \rangle \equiv \mathbf{0}$ . Тестирование численного кода PRML было проведено на сетке содержащей  $1024^3$  ячеек. Эволюция турбулентности без действия вынуждающей, случайной силы ( $\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ ) продолжалось в течении  $\Delta t = 0.2 = 4t_d$  и 10 наборов данных результатов моделирования, расположенных с равным интервалом по времени, были записаны для последующего анализа.

Главный акцент в анализе численных схем сделан на исследовании статистик основных МГД величин. Поскольку начальная модель задавалась одинаковой для всех численных схем, единственным источником различия в решении была численная диссипация.

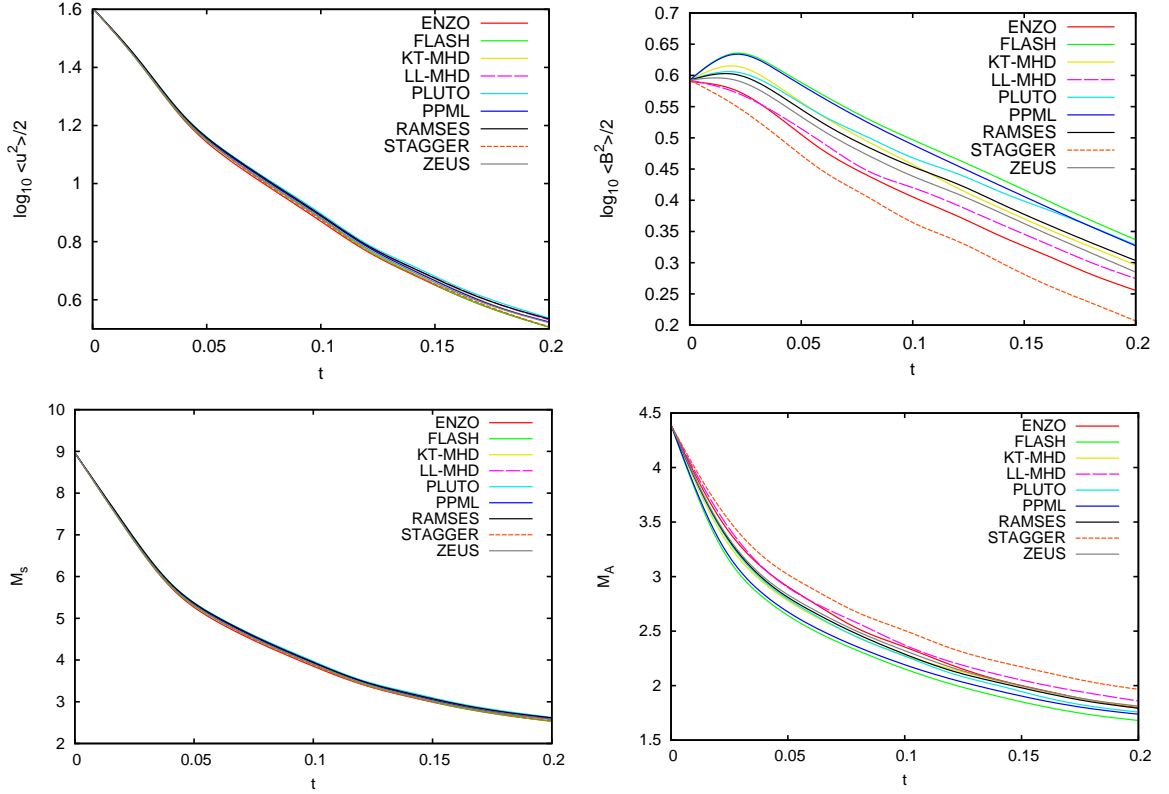


Рис. 2.1. Эволюция во времени средней удельной кинетической энергии (вверху слева), магнитной энергии (вверху справа), звукового (внизу слева) и альвеновского (внизу справа) среднеквадратичного числа Маха на сетке разрешением  $512^3$  ячеек.

Эволюция средней кинетической энергии хорошо представлена всеми численными методами и эта величина оказалась нечувствительной к вариации мелкомасштабной численной диффузии между различными численными методами. Спектр мощности скорости  $P(\mathbf{u}, k) \sim k^\alpha$  имеет в инерциальном диапазоне наклон  $\alpha \in [-2, -5/3]$ , который зависит от величины звукового числа Маха. (см., например, рис. 2.3 ниже). Поскольку спектральный наклон такой большой, средняя удельная плотность кинетической энергии,  $E_K \equiv \langle \mathbf{u}^2 / 2 \rangle = \int_0^\infty P(\mathbf{u}, k) dk / 2$ , определяется в большой степени крупными масштабами. Когда разрешение достаточно, чтобы захватить большие структуры в движении вещества, тогда достигнута сходимость по энергии. Это хорошо видно на левой половине рисунка 2.1 при разрешении  $512^3$  ячеек.

Средняя плотность магнитной энергии  $E_M \equiv \langle \mathbf{B}^2 / 2 \rangle = \int_0^\infty P(\mathbf{B}, k) dk / 2$ ,

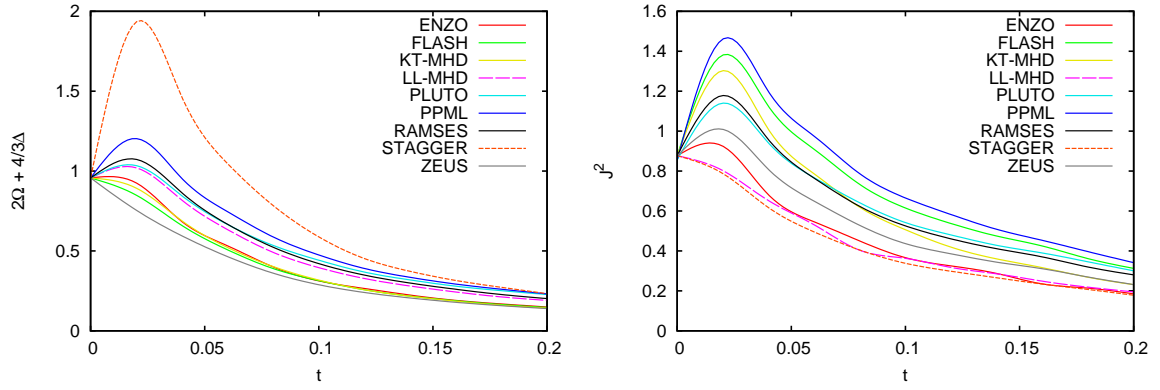


Рис. 2.2. Эволюция во времени величины  $-\epsilon_K \text{Re}_{\text{eff}} = 2\Omega + 4/3\Delta$  (слева) и среднего квадрата тока  $J^2 = \langle |\nabla \times \mathbf{B}|^2 \rangle$  (справа).

оказывается более чувствительной к изменениям в мелкомасштабной численной кинетической и магнитной диффузии, см. рис. 2.1, (правая сторона). Большая часть методов показывает в начале моделирования увеличение магнитной энергии, но асимптотически, после того как насыщение достигнуто, все из них дают схожую скорость уменьшения магнитной энергии  $\dot{E}_M/E_M$ . Существует небольшое различие между численными методами в величине среднеквадратичного альвеновского числа Маха  $M_A = \sqrt{2 \langle \rho u^2 \rangle / \langle B^2 \rangle}$ . Необходимо отметить, что в то время как  $E_K$  уменьшается на коэффициент  $> 10$  в ходе моделирования, уменьшение  $E_M$  происходит намного медленнее, только в  $\sim 2$  раза. Подобно несжимаемому случаю [88], в сверхзвуковой турбулентности отношение энергий  $\Gamma \equiv E_K/E_M$  не является константой и уменьшается со временем. В то время как  $M_s$  уменьшается на коэффициент  $\sim 3$  от  $\sim 9$  до  $\sim 2.6$ ,  $M_A$  показывает в 2.5 раза падение от  $\sim 4.5$  к  $\sim 1.8$ . Эти различия в скорости уменьшения кинетической и магнитной энергии, также как поведение  $M_s$  и  $M_A$ , могут быть поняты как результат самоорганизации, т.е. релаксации турбулентности в направлении состояния с минимумом свободной энергии [88].

Уровень численной диссипации может быть оценен с помощью анализа временной эволюции энтропии  $\Omega = \frac{1}{2} \langle |\nabla \times \mathbf{u}|^2 \rangle$ , дилатации  $\Delta =$

$\langle |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 \rangle$ , среднего квадрата плотности тока  $J^2 = \langle |\nabla \times \mathbf{B}|^2 \rangle$ . Эти величины показывают сильные осцилляции на масштабе сетки. Спектр этих величин в основном определяется большими волновыми числами и их функция распределения плотности вероятности имеет протяженный экспоненциальный "хвост"[90]. Они также очень слабо сходятся при увеличении разрешения сетки вследствие сильной зависимости от числа Рейнольдса  $Re$  и магнитного числа Рейнольдса  $Rm$ . Эти величины имеют связь с полной скоростью вязкой и омической диссипации в пределах периодической области [79]. Например, в незамагниченной сжимаемой турбулентности, которая имеет большое сходство с сверхальвеновской турбулентностью, средняя скорость диссипации удельной кинетической энергии может быть определена как  $\epsilon_K = -(Re)^{-1}(2\Omega + 4/3\Delta)$  [89]. Поскольку глобальная скорость диссипации кинетической энергии  $E_K$  приблизительно одинакова для всех рассмотренных численных методов (см. рис. 2.1), относительное ранжирование эффективных чисел Рейнольдса для этих методов полностью определено значением величины  $2\Omega + 4/3\Delta$ . Таким образом, используя скорость диссипации представленную на левой части рисунка 2.2, можно определить относительное поведение методов в соответствии с величиной  $Re_{eff}$ . В течение первой половины эволюции  $t \in [0, 0.1]$  численный код STAGGER показывает лучший результат, в то время как PRMЛ является лучшим среди методов, использующих схему Годунова для вычисления численных потоков.

То же самое приближение применяется для оценки относительного поведения численных методов по отношению к величине эффективного магнитного числа Рейнольдса  $Rm_{eff}$ . Правая сторона рис. 2.2, изображает зависимость величины среднего квадрата плотности тока  $J^2$  от времени. Величина плотности тока является чувствительной как к величине  $\epsilon_M$ , так и величине  $Rm_{eff}$ , поскольку  $\epsilon_M \sim -(Rm)^{-1} J^2$ . Метод PRMЛ показывает наивысший  $Rm_{eff}$  среди всех рассмотренных численных методов. Порядок, в котором методы следуют друг за другом на

правой стороне рис. 2.2, такой же как на изображении величины  $E_M$  на рис. 2.1. Таким образом величины  $Rm_{\text{eff}}$  и  $E_M$  хорошо скоррелированы.

Рисунок 2.3 показывает спектр мощности скорости и магнитной энергии в моменты времени  $t = 0.02, 0.06, \text{ и } 0.2$ . Спектры, полученные при  $512^3$  ячеек, демонстрируют очень хорошее согласие друг с другом вплоть до значений  $\log_{10} k/k_{\text{min}} \sim 1.2$  и немного расходятся при больших значениях волновых чисел. Это означает, что численная диссипация особенно сильно действует на масштабах меньше  $\sim 16$  ячеек сетки при моделировании сверхзвуковой турбулентности с лучшими из рассмотренных методов. Анализ спектра мощности скорости и магнитной энергии показывает, что PPML обладает в совокупности наименьшей численной диссипацией среди представленных программ.

Для оценки вариаций в спектре мощности, полученных различными методами, применяется процедура развитая в работах [91] и [92] для случая сжимаемой турбулентности при умеренных чисел Маха. Поскольку PPML является наименее диссипативным среди всех рассмотренных методов, принимается  $1024^3$  PPML решение, предварительно отфильтрованное к разрешению  $256^3$ , как точное и обозначается далее как *эталонное решение*. После этого строится скомпенсированный спектр мощности эталонного решения для момента времени  $t = 0.02$ , см. рис. 2.4. Затем устанавливается интервал на уровне  $\pm 25\%$  от эталонного решения и определяется ширина спектральной полосы метода как доля частоты Найквиста, где скомпенсированный спектр отклоняется на более чем  $25\%$  от эталонного решения. Обладая некоторой произвольностью, эта процедура помогает установить подходящую количественную меру оценки использования численных методов для моделирования тестов с распадающейся турбулентностью.

Левая сторона рисунка 2.4 изображает скомпенсированный спектр скорости. STAGGER, PPML и RAMSES имеют наибольшую ширину спектральной полосы для скорости. Правая сторона рисунка 2.4 показывает



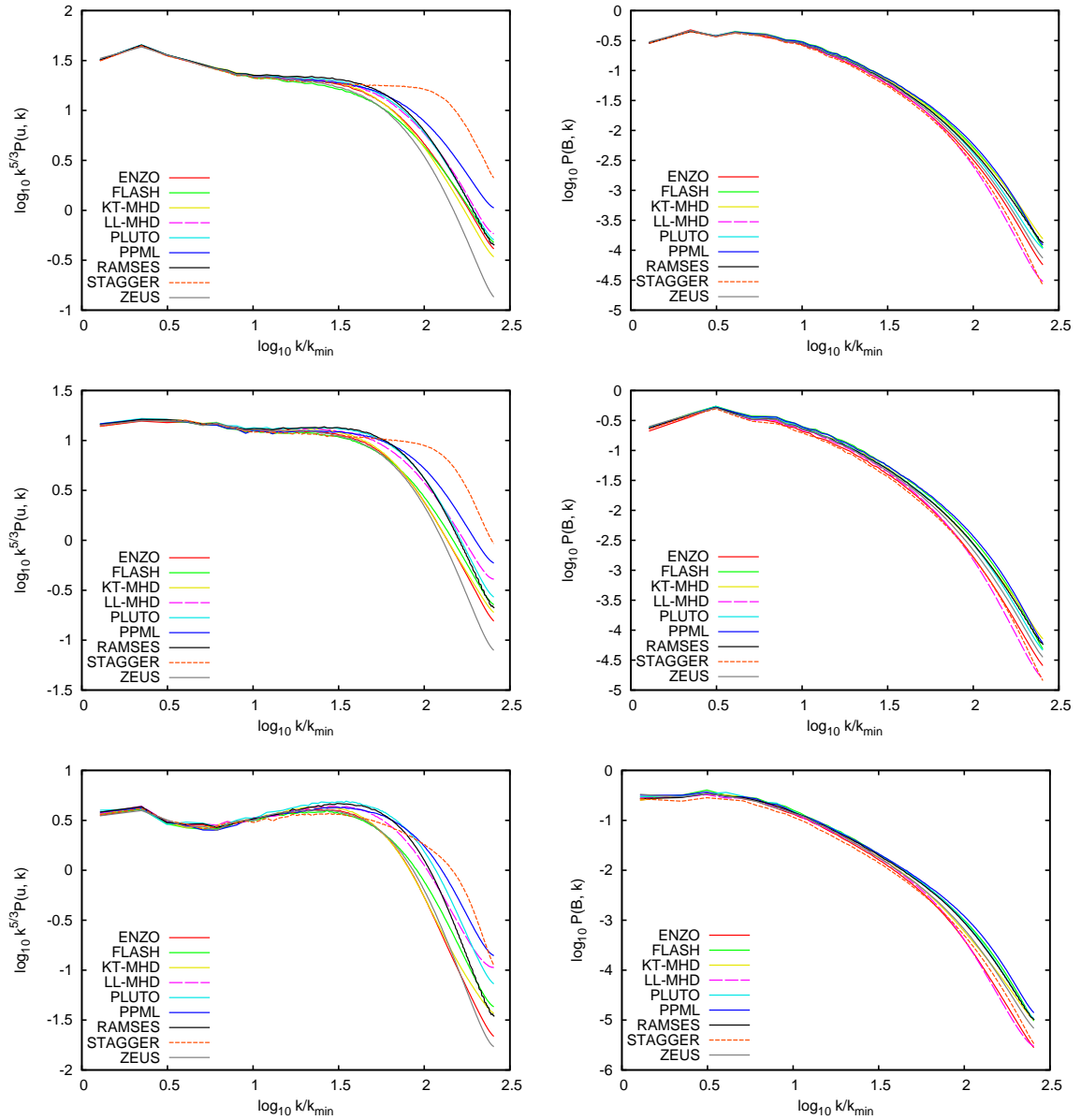


Рис. 2.3. Спектр мощности скорости (левая сторона) и магнитной энергии (правая сторона) на сетке  $512^3$  ячеек для выборок 1, 3, и 10 для моментов времени  $t = 0.02, 0.06$  и  $0.2$  (сверху вниз), соответственно. Спектр скорости скомпенсирован на множитель  $k^{5/3}$ , в то время как спектр магнитной энергии некомпенсирован.

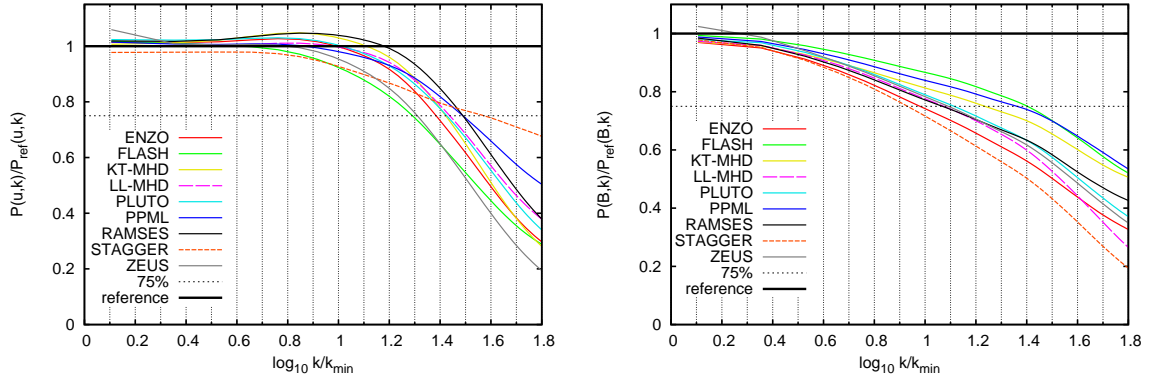


Рис. 2.4. Скомпенсированный спектр мощности для скорости (левая сторона) и магнитной энергии (правая сторона) для первой выборки для момента времени  $t = 0.02$  из расчетов на сетке  $256^3$  ячеек.

скомпенсированный спектр магнитной энергии. Ситуация в этом случае другая. В отличие от спектра скорости, спектр магнитной энергии довольно рано начинает отклоняться вниз от эталонного решения из-за медленной сходимости величины  $E_M$  при увеличении разрешения сетки. FLASH и PPML имеют наибольшую ширину спектральной полосы для магнитной энергии, PLUTO, ZEUS, LL-MHD, ENZO и RAMSES очень схожи друг с другом и показывают наибольшую численную магнитную диссипацию. При сетке  $256^3$  ячеек, ширина спектральной полосы лучших численных МГД кодов равна  $\sim 0.3$  для скорости и  $\sim 0.2$  для магнитной энергии. Таким образом численная диссипация сильно воздействует на масштабы с волновыми числами меньшими по величине  $(0.2-0.3)k_N$ .

На основе оценок ширины спектральной полосы и чисел Рейнольдса для скорости и магнитного поля можно сделать вывод, что метод PPML обладает наилучшими диссипативными свойствами среди всех численных методов, представленных в моделировании разрушенной турбулентности.

## 2.2 Моделирование сверхзвуковой изотермической турбулентности

### 2.2.1 Закон 1/3 для Сверхзвуковой гидродинамической турбулентности

В [99] показано, что однородная изотропная турбулентность в сильно сжимаемом режиме, типичном для межзвездного газа, может быть аппроксимирована модифицированным законом Колмогорова, поскольку нелинейный перенос все еще остается основным физическим процессом в отсутствие магнитных полей. Сущностью такой модификации является использование статистик для скорости газа предварительно умноженной на плотность, которое названо законом 1/3 для сверхзвуковой турбулентности. Заменяя скорость  $\mathbf{u}$  на  $\rho^{1/3}\mathbf{u}$ , можно показать, что для этой величины закон 4/5 [102] приблизительно сохраняется для звуковых чисел Маха вплоть до  $M_s = 6$ , в то время как спектр мощности для скорости удовлетворяет закону  $\sim k^2$  как в турбулентности Бюргера.

Соотношение von Kármán–Howarth (1938) между второго порядка поперечными и продольными структурными функциями для скорости сохраняется приближенно при  $M_s = 6$ . Хотя не существует очевидных доказательств действия этих фундаментальных законов для сверхзвукового режима, результаты численных экспериментов помогают расширить феноменологию Колмогорова к широкому классу проблем при исследовании турбулентности в астрофизике.

В [99] показано, что низкого порядка статистика  $\rho^{1/3}\mathbf{u}$  инварианта при изменении числа Маха. Например, наклон спектра мощности есть  $-1.69$ , и экспонента третьего порядка структурной функции  $S_3(\ell)$  есть единица,  $S_3(\ell) \equiv \langle |\delta u(\ell)|^3 \rangle \sim \ell$ .

Турбулентные статистики, полученные из результатов моделирования с разрешением  $2048^3$  (рис. 2.5), подтверждают сходимость ранних ре-

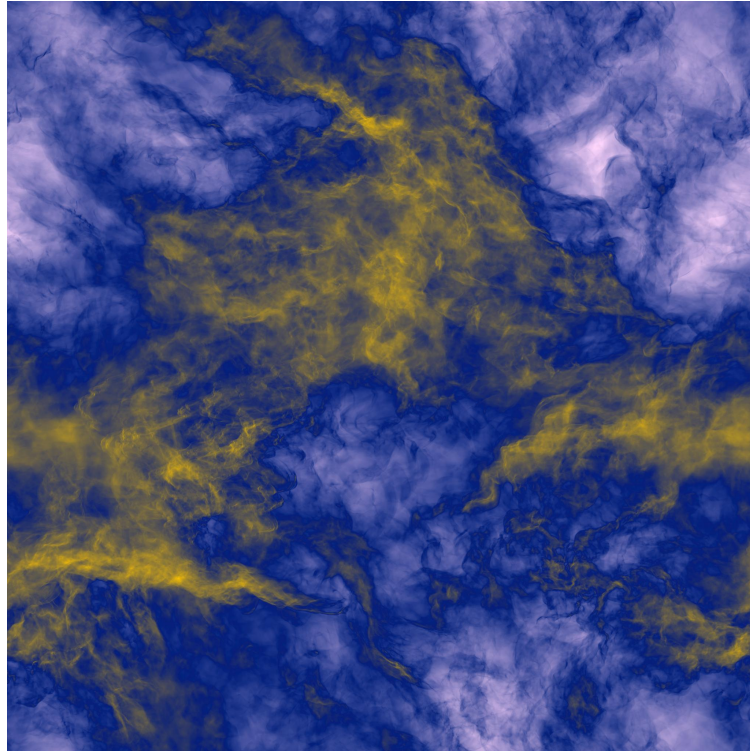


Рис. 2.5. Изображение проекционной плотности газа для 6 Мах моделирования на сетке  $2048^3$  ячеек с PPM численным кодом. Белый-голубой-желтый цвета соответствуют к низким-средним-высоким значениям проекционной плотности.

результатов, выполненных при более низком численном разрешении. Рисунок 2.6 дает краткое представление турбулентных статистик. Спектр мощности проекционной плотности газа имеет наклон  $-2.01 \pm 0.01$  в инерциальном диапазоне согласуясь со значением степени  $-1.07 \pm 0.01$  в спектре мощности плотности (рис. 2.6a). Фрактальная размерность в распределении плотности для инерциального диапазона в случае турбулентности с числом Маха 6 равна  $D_m \approx 2.3$ , согласуясь хорошо с полученным ранее значением 2.4 (рис. 2.6b).

В диссипативном диапазоне, где индивидуальные ударные волны являются доминирующими структурами,  $D_m = 2$  [94]. Рисунок 2.6c сравнивает функцию плотности вероятности распределения плотности из моделирований с различной вынуждающей силой. Оба случая хорошо согласуются с логнормальным распределением при высоких плотностях и показывают небольшую расхожимость при малых плотностях, которая может быть частично объяснена плохим статистическим представлением

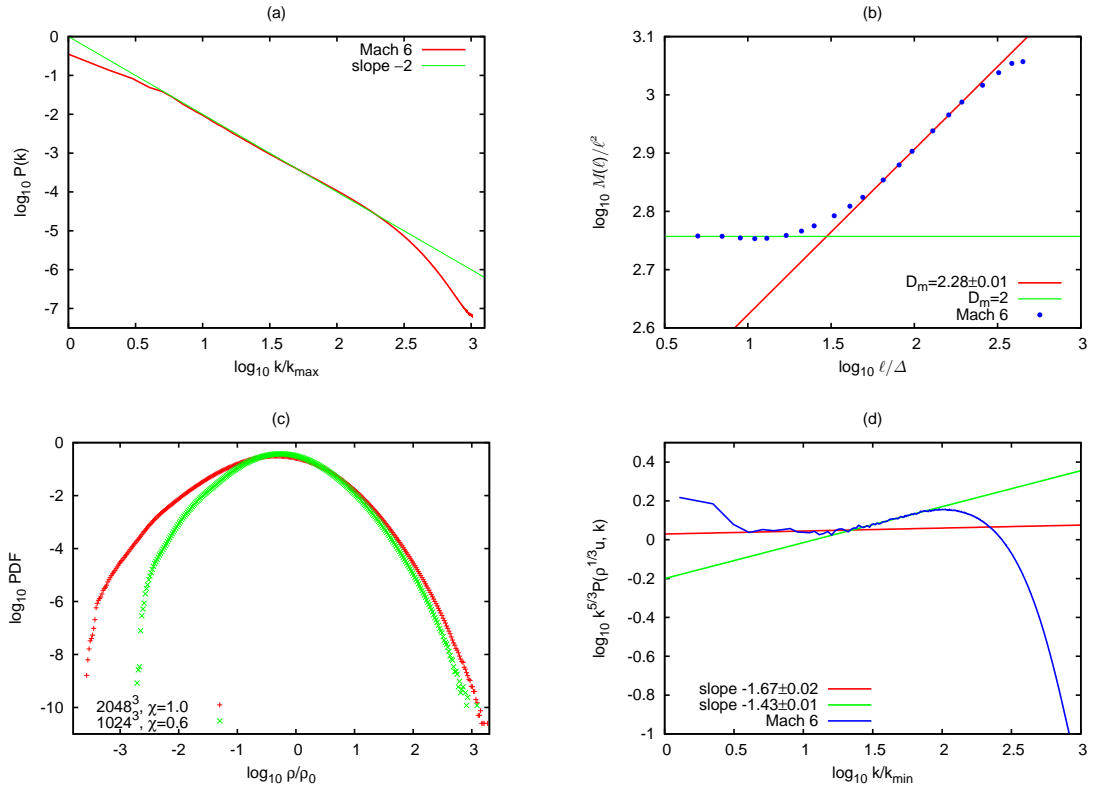


Рис. 2.6. Статистики сверхзвуковой турбулентности при разрешении  $2048^3$  из моделирования при  $M_s = 6$ : (a) спектр мощности для проекционной плотности (среднее по ансамблю из 1275 проекций); (b) средняя масса газа  $M(\ell)$  для областей центрированных около пиков с наивысшей плотностью как функция размера области, горизонтальная линия соответствует фрактальной размерности массы  $D_m = 2$ ; (c) плотность вероятности распределения плотности для  $2048^3$  с соленоидальной случайной силой ( $\chi = 1$ ) и для  $1024^3$  с действием гибридной силы ( $\chi = 0.6$ , K07); (d) скомпенсированный спектр мощности величины  $\rho^{1/3}\mathbf{u}$ .

волн разрежения [93]. В конце, рисунок 2.6d показывает спектр мощности величины  $\rho^{1/3}\mathbf{u}$ , который также подтверждает скейлинг, полученный в моделировании при более низком разрешении.

### 2.2.2 Новые законы скейлинга для сверхзвуковой МГД турбулентности.

Проведено численное моделирование форсированной, изотермической, сверхзвуковой турбулентности при звуковых числах Маха 10 на сетке  $512^3$  с использованием метода PRML для идеальной МГД [103]. Модели задавались с начальным однородным магнитным полем, направленным вдоль координаты  $x$ , и включали переход к турбулентности и дальнейшую эволюцию вплоть до 10 динамических времен. Крупномасштабная ( $k \leq 2$ ) соленоидальная сила перемешивала газ в периодической области так, чтобы удерживать  $M_s$  приблизительно равным 10 в течение всего процесса моделирования см. рис. 2.7a. Магнитное поле не изменялось под действием внешней случайной силы и получало энергию только через взаимодействие с полем скорости. Это не служило причиной увеличения среднего магнитного поля, но, тем не менее, приводило к усилению мелкомасштабной магнитной энергии через процесс известный, как мелкомасштабное динамо [81]. Неявно предполагалось, что магнитное число Прандтля  $Pm \approx 1$  во всех численных случаях. Каждое моделирование достигало стационарного состояния с постоянной магнитной энергией и макроскопически, статистически изотропным магнитным полем (см. рис. 2.7b). Все модели были параметризованы величиной плазменного параметра  $\beta \equiv P_{gas}/P_{mag}$  равного отношению теплового давления к магнитному давлению. Выбор начальных значений  $\beta_0 = 20$  и 2 приводил в результате к получению магнитной энергии на уровне около 10% и 30% от кинетической, соответственно (рис. 2.7b).

При  $\beta_0 = 0.2$  было получено статистически устойчивое состояние

с равенством магнитной и кинетической энергий. Трехмерное моделирование полностью перекрывало переход от сильно сверхальвеновского режима турбулентности при  $\beta_0 = 20$  со среднеквадратичным альвеновским числом Маха  $M_A \approx 10$  к мягко сверхальвеновскому ( $\beta_0 = 2$ ,  $M_A \approx 3$ ) и далее к трансальвеновскому режиму ( $\beta_0 = 0.2$ ,  $M_A \approx 1$ ) (см. рис. 2.7а). Величина средней, нормальной, поперечной спиральности  $\sigma_c \equiv 2 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \rangle / (\langle \mathbf{u}^2 \rangle + \langle \mathbf{B}^2 \rangle)$  находилась в пределах  $\pm 1.5\%$  для  $\beta_0 = 20$  и 2, в то время как при  $\beta_0 = 0.2$  поперечная спиральность немного осциллировала с  $\sigma_c \in (-0.073, 0.015)$ . Тем не менее, с хорошей аппроксимацией турбулентность имела нулевую спиральность. Во всех трех случаях метод PRML удерживал величину дивергенции магнитного поля, за все время моделирования, в пределах  $|\nabla \cdot \mathbf{B}| < 10^{-12}$ . Были вычислены усредненные по времени турбулентные статистики, по крайней мере, для 4 динамических времен насыщенного состояния турбулентности.

Зависимость плотности распределения вероятности (pdf) плотности от значения  $\beta_0$  показывает отчетливо существенное ослабление волн разрежения в течении при увеличении напряженности магнитного поля (см. рис. 2.7с). При разрешении сетки  $512^3$  ячеек, средний минимум плотности составляет около  $10^{-3.6}$ ,  $10^{-2.7}$ , и  $10^{-2}$  для  $\beta_0 = 20$ , 2, и 0.2, соответственно. В тоже самое время, крылья высокой плотности в pdf сохраняют свою логнормальную форму и оказываются нечувствительными к уровню интенсивности магнитных флуктуаций в пределах изученного диапазона  $\beta_0$ .

Спектр мощности плотности также показывает некоторый тренд при изменении силы магнитного поля, хотя он не так заметен, как в случае спектра скорости. Например, спектр мощности логарифма проекционной плотности газа масштабируется как  $k^{-1.79}$ ,  $k^{-1.64}$ , и  $k^{-1.52}$  при  $\beta_0 = 20$ , 2, и 0.2, соответственно. Спектр плотности для  $\beta_0 = 20$  (слабо замагниченная среда) при  $M_s = 10$  масштабируется как  $k^{-0.7}$ , то есть он более плоский, чем для немагнитного случая при  $M_s = 6$ , где  $k^{-1}$  скейлинг был

обнаружен. Этот результат подтверждает предсказание работы [99], что в пределе  $M_s \rightarrow \infty$  спектр плотности является плоским,  $P(\rho, k) \sim k^0$ , подобно к спектру белого шума. При фиксированном звуковом числе Маха ( $M_s = 10$ ), с увеличением магнетизации течения ( $M_A$  падает от 10 до 1), спектр плотности становится все более плоским (см. рис. 2.7d). Та же самая тенденция отчетливо видна в спектре логарифма плотности с величиной наклона около  $-1.3$  при  $M_s = 10$ . Это согласуется с величиной наклона  $-1.7$ , измеренного в моделировании с  $M_s = 6$  и  $\beta_0 = \infty$ . Протяженность интервала масштабирования сокращается в спектре десятичного логарифма плотности с уменьшением величины  $\beta_0$  от 20 до 0.2.

Результаты моделирования показывают, что наклон спектра скорости изменяется в широком диапазоне значений от  $-1.5$  до  $-2$  в зависимости от величины магнитного поля (рис. 2.7e). Как и ожидалось, в сильно сверхальвеновском случае  $\beta_0 = 20$  получаются значения аналогичные значениями для немагнитных течений: Бюргерс-скейлинг для спектра мощности скорости  $P(\mathbf{u}, k) \sim k^{-1.94}$ , и Колмогоровский спектр для взвешенной по плотности скорости  $P(\rho^{1/3}\mathbf{u}, k) \sim k^{-1.7}$  (рис. 2.7f, [104]). Имеется ясный тренд в уплощении спектра мощности скорости при увеличении магнитного поля. Получается  $k^{-1.62}$  при  $\beta_0 = 2$  и  $k^{-1.51}$  при  $\beta_0 = 0.2$ , в полном согласии с работой [105] в случае сильного магнитного поля,  $k^{-1.38}$  при  $\beta_0 = 0.02$  и  $M_s = 6.9$ . Этот результат означает, что наклон спектра мощности скорости равный примерно  $-1.8$  и полученный из наблюдений молекулярных облаков может указывать на сверхальвеновскую природу турбулентности [106].

Существует набор точных законов масштабирования для однородной и изотропной несжимаемой МГД турбулентности аналогичных закону 4/5 Колмогорова для обыкновенной турбулентности в нейтральных средах [108]. Законы МГД могут быть записаны в переменных Эльзассера  $\mathbf{z}^\pm \equiv \mathbf{u} \pm \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$  [107], как  $S_{\parallel,3}^\pm \equiv \left\langle \delta z_{\parallel}^\mp(\ell) [\delta z_i^\pm(\ell)]^2 \right\rangle = -\frac{4}{d}\epsilon^\pm \ell$ , где



$\delta \mathbf{z}_{\parallel}(\ell) \equiv [\mathbf{z}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}\ell) - \mathbf{z}(\mathbf{x})] \cdot \hat{\mathbf{e}}$ ,  $d$  - размерность пространства,  $\hat{\mathbf{e}}$  - единичный вектор в произвольном направлении,  $\hat{\mathbf{e}}\ell$  - вектор смещения, где скобки означают усреднение по ансамблю, суммирование проведено по повторяющимся индексам. Эквивалентно, законы масштабирования могут быть записаны для основных физических полей  $(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ , но в МГД не существует отдельно точных законов для скорости и магнитного поля. Очень важно не пренебрегать корреляциями между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{B}$  или  $\mathbf{z}^+$  и  $\mathbf{z}^-$ , ограниченных инвариантными свойствами уравнений в моделях турбулентного каскада. При исследовании сверхзвуковой турбулентности также важно учитывать корреляции между плотностью и скоростью, и между плотностью и напряженностью магнитного поля. В несжимаемой МГД полная энергия  $\langle (u_i^2 + B_i^2)/2 \rangle$  и поперечная спиральность  $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \rangle$  играют роль идеальных инвариантов и, таким образом, полная скорость переноса энергии  $\epsilon^T = (\epsilon^+ + \epsilon^-)/2$  и скорость переноса поперечной спиральности  $\epsilon^C = (\epsilon^+ - \epsilon^-)/2$ . При исчезновении магнитного поля  $\mathbf{B}$ , снова действует закон Колмогорова 4/5 :  $\langle [\delta \mathbf{u}_{\parallel}(\ell)]^3 \rangle = -4/5 \epsilon \ell$ , где  $\epsilon$  есть средняя скорость переноса кинетической энергии [109].

Численные моделирования обычно подтверждают эти скейлинги для несжимаемого случая, хотя числа Рейнольдса все еще слишком малы, чтобы воспроизвести асимптотически линейное поведение с разумной точностью и результаты остаются чувствительными к статистическим ошибкам [110]. Третьего порядка структурная функция поперечной скорости показывает линейный скейлинг в моделировании немагнитной турбулентности и разность показателей скейлинга для продольных и поперечных структурных функций может быть робастной мерой статистической неопределенности вычисленных показателей [111]. В МГД моделировании третьего порядка структурные функции для переменных Эльзассера  $\langle |\delta z_{\parallel}^{\mp}(\ell)|^3 \rangle$  имеют также линейный скейлинг, но этот результат не может быть универсальным, поскольку корреляции между  $\mathbf{z}^{\pm}$  полями играют важную роль в нелинейных процессах переноса.

Можно ли закон  $4/3$  для несжимаемой МГД турбулентности обобщить для сильно сжимаемых сверхзвуковых течений в молекулярных облаках? Поскольку взвешенная по плотности скорость  $\rho^{1/3}\mathbf{u}$ , сохраняет приблизительно линейный скейлинг третьего порядка структурной функции при больших числах Маха для немагнитного случая, то можно прямо переопределить переменные Эльзассера для сжимаемых течений используя правило  $1/3$ :  $\mathbf{Z}^\pm \equiv \rho^{1/3}(\mathbf{u} \pm \mathbf{V}/\sqrt{4\pi\rho})$ , так что они переходят в  $\mathbf{z}^\pm$  поля в несжимаемом случае и сводятся к  $\rho^{1/3}\mathbf{u}$  в пределе исчезновения магнитного поля  $\mathbf{V}$ . Новые  $\mathbf{Z}^\pm$  поля могут иметь универсальный скейлинг в однородно изотропных турбулентных течениях с широким диапазоном звуковых и альвеновских чисел Маха. Для того чтобы проверить это утверждение, по результатам МГД моделирования были вычислены структурные функции третьего порядка  $S_{\parallel,3}^\pm$  и  $S_{\perp,3}^\pm$  определенные выше, но с использованием новых  $\mathbf{Z}^\pm$  полей. Поскольку основной интерес представлял перенос энергии через инерционный интервал, была вычислена сумма  $S_{\parallel,3}^-$  и  $S_{\parallel,3}^+$ , которая определяет скорость переноса энергии  $\epsilon^T$  в несжимаемом пределе. Результаты представлены на рисунке 2.7h, который показывает скомпенсированный скейлинг  $S_3(\ell) \equiv (S_{\parallel,3}^- + S_{\parallel,3}^+ + S_{\perp,3}^- + S_{\perp,3}^+)/4$  усредненный по 24 наборам значений для каждого из трех турбулентных состояний с различным уровнем магнитных флуктуаций. Хотя область скейлинга небольшая, в каждом из трех случаев видно линейное поведение  $S_3(\ell) \sim \ell$ , в противоположность к соответствующим скейлингам для скорости и магнитной энергии, которые сильно зависят от  $\beta_0$  (см. рис. 2.7e и g). Для проверки были вычислены  $\tilde{S}_3(\ell) \equiv (S_{\parallel,3}^- + S_{\parallel,3}^+)/2$  для простых  $\mathbf{z}^\pm$  полей и для взвешенных по плотности  $\mathbf{Z}^\pm$  полей при  $\beta_0 = 2$ . Сравнение скейлингов  $\tilde{S}_3 \sim \ell^\alpha$  для двух случаев показывает, что использование простых переменных Эльзассера дает более крутой наклон  $\Delta\alpha \equiv \alpha_z - \alpha_{\mathbf{z}} \approx 0.23$ . Измеренная подобная разница в немагнитном случае дает величину  $\Delta\alpha \approx 0.31$  для третьего порядка структурной функции скорости при числе Маха  $M_s = 6$ .

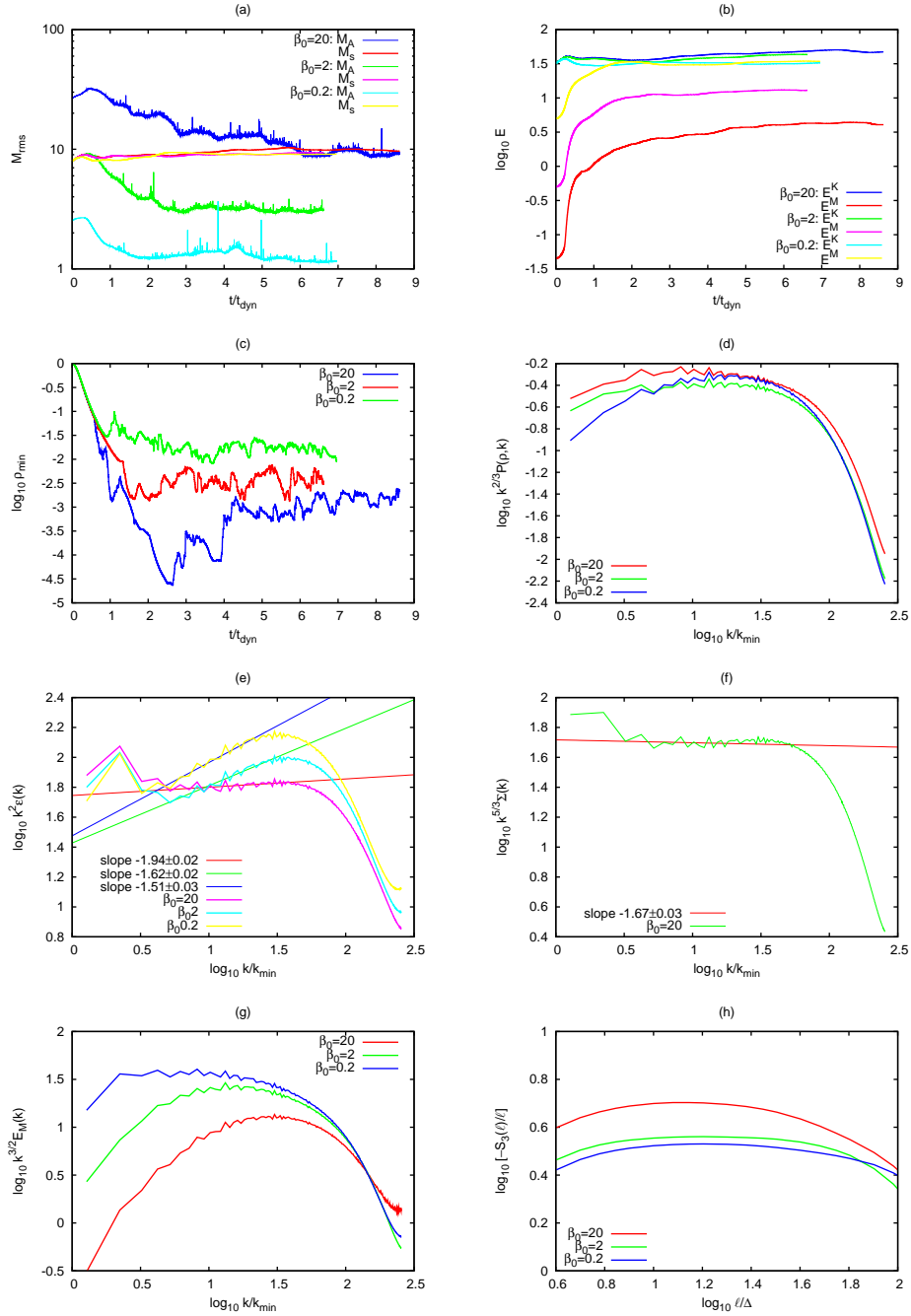


Рис. 2.7. Статистики МГД турбулентности для  $M_s = 10$  и  $\beta_0 = 20, 2$  и  $0.2$  из моделирования PRM на сетке с  $512^3$  ячеек: (а) rms звукового и альвеновского числа Маха от времени; (б) средние кинетические и магнитные энергии от времени; (в) минимальная плотность газа от времени; (д) усредненный по времени скомпенсированный спектр плотности; (е) усредненный по времени скомпенсированный спектр скорости; (ф) усредненный по времени скомпенсированный спектр  $\rho^{1/3} \mathbf{u}$  для  $\beta_0 = 20$ ; (г) усредненный по времени скомпенсированный спектр магнитной энергии; (h) усредненный по времени скомпенсированная третьего порядка структурная функция  $S_3(\ell)$  для обобщенных переменных Эльзассера  $\mathbf{Z}^\pm$ .

### 2.2.3 Моделирование сжимаемой турбулентности при высоком разрешении.

В этом разделе представлены результаты моделирования МГД турбулентности при звуковом числе Маха  $M_s = 10$  и альвеновском числе Маха  $M_A = 3$  на сетке от  $256^3$  до  $1024^3$  ячеек. Численный метод PRML применяется для решения уравнений идеальной МГД для изотермического газа, в кубической вычислительной области размером  $L = 1$ , с периодическими граничными условиями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \left( p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = 0. \quad (2.6)$$

здесь  $\rho$  и  $\mathbf{u}$  есть плотность газа и скорость,  $\mathbf{B}$  - магнитное поле, давление газа  $p \equiv c_s^2 \rho$  и изотермическая скорость звука  $c_s \equiv 1$ ,  $\mathbf{I}$  - единичный тензор.

Фиксированная крупномасштабная ( $k \leq 2$ ) изотропная соленоидальная сила  $\mathbf{F} \equiv \rho \mathbf{a} - \langle \rho \mathbf{a} \rangle$ , где  $\mathbf{a}$  есть ускорение и  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по всей вычислительной области, применялась для перемешивания газа, сохраняя  $M_s$  близким к 10, в течение моделирования. В начальной модели имелась однородная плотность  $\rho_0 \equiv 1$ , крупномасштабное поле скорости  $\mathbf{u}_0 = \tau \mathbf{a}$ , где  $\tau$  - константа такая, что  $\langle \mathbf{u}_0^2 \rangle^{1/2} = 8$ , и однородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направленное вдоль координаты  $x$ . Здесь представлены результаты для трех моделирований с  $\beta_0 = 2$  на сетке  $256^3$ ,  $512^3$ , и  $1024^3$  ячеек. Все расчеты были проведены с использованием 2048 ядер на суперкомпьютере *Ranger* в ТАСС. Параллельная программа была создана с помощью языка DVM Fortran [145]. Численные эксперименты покрывали переход к турбулентности и эволюцию в течении 8 динамических времен  $t_d \equiv L/2M_s$ . Ограничения, налагаемые допустимыми вычислительными ресурсами, дают возможность достигать эффективных

чисел Рейнольдса порядка  $10^4$ , в то время как реалистичные значения для молекулярных облаков составляют порядка  $\sim 10^8$ .

После начального этапа перемешивания моделирование достигает статистически устойчивого состояния. Изображение проекционной столбцевой плотности, в таком насыщенном состоянии, показано на рисунке 2.8.

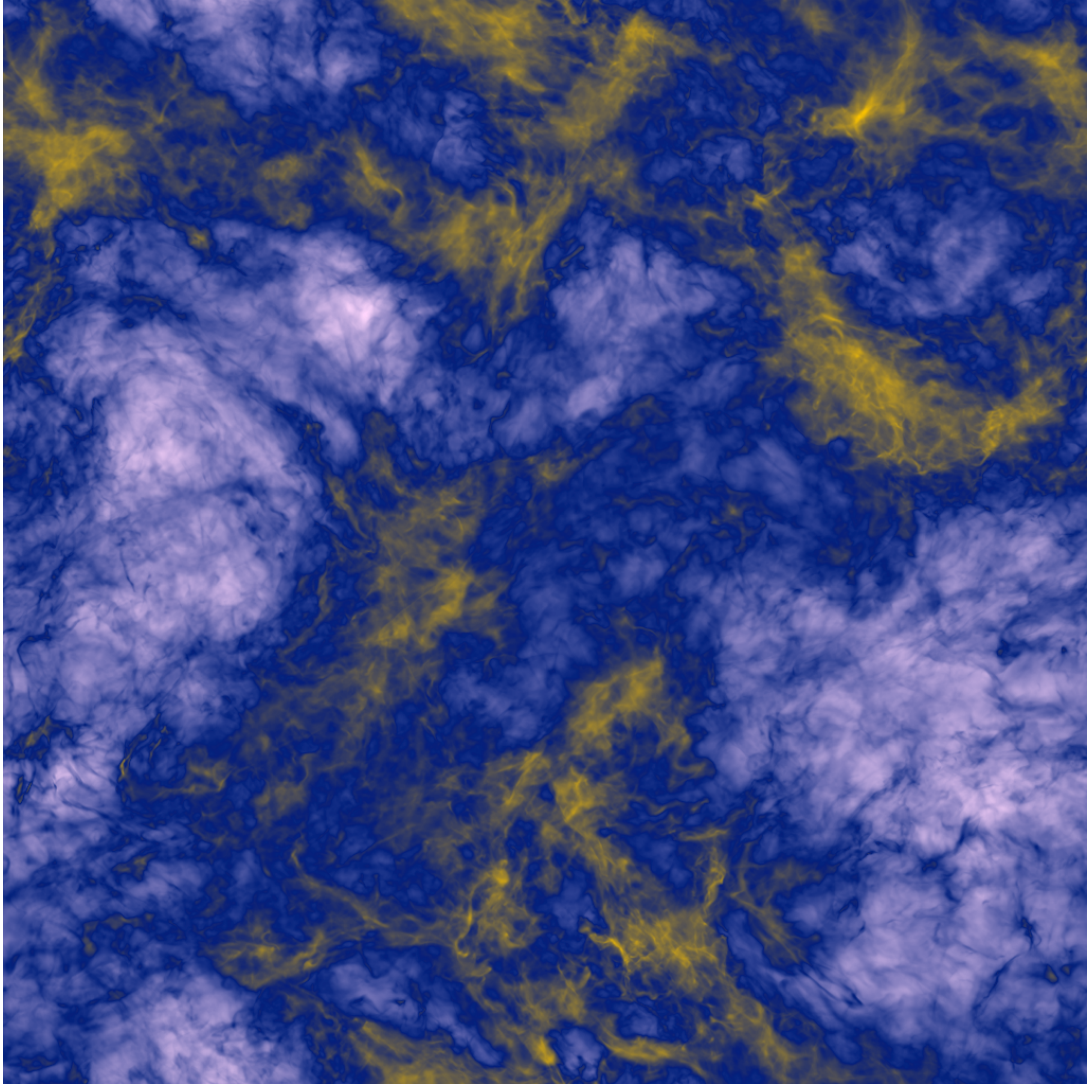


Рис. 2.8. Изображение проекционной столбцевой плотности для момента времени  $t = 6.35t_d$  для  $1024^3$  PRML моделирования МГД турбулентности при  $M_s = 10$  и  $M_A = 3$  проведенного на суперкомпьютере *Ranger* (ТАСС) используя 2048 ядер. Белый-синий-желтый цвета соответствуют к низким-средним-высоким значениям проекционной плотности. Динамический диапазон плотности на изображении равен 100.

Морфология структур, видимая на распределении проекционной плот-

ности, удивительно схожа с той, что есть для моделирования при  $M_s = 6$  в отсутствии магнитного поля, несмотря на то, что наклон спектра мощности равен  $-1.7$  в этом моделировании и равен  $-2.0$  в немагнитном случае. Но морфология распределения плотности в каждом слое заметно различается для этих двух случаев. Этот факт иллюстрирует потерю информации в процедуре проекции и указывает на трудности в измерении физических параметров сверхзвуковых турбулентных течений, полученных только из наблюдаемого распределения проекционной плотности.

Проведено сравнение уровней насыщения нескольких интегральных характеристик турбулентности для моделей с тремя различными разрешениями  $256^3$ ,  $512^3$ , и  $1024^3$ . Поскольку в  $\beta_0 = 2$  случае кинетическая энергия  $E_K \equiv \int \frac{1}{2} \rho u^2 dV$  доминирует над магнитной энергией  $E_M \equiv \int \frac{1}{2} B^2 dV$  на фактор 3, практически рассмотреть  $E_K$  и  $E_M$  отдельно вместо полной энергии  $E_T = E_K + E_M$ . Рисунок 2.9а показывает, что кинетическая энергия всегда сходится на  $256^3$  сетке, в согласии с работой [105]. В противоположность, уровень насыщения магнитной энергии при  $\beta_0 = 2$  зависит ясно от разрешения сетки и существует хороший шанс, что сходимость может быть достигнута уже при разрешении  $2048^3$  ячеек. Среднее значения  $E_M$  для  $t \in [3, 7]$  есть 10.0, 12.3, и 13.5 с наибольшим уровнем, соответствующим самому высокому разрешению  $1024^3$ . Недостаток сходимости в  $E_M$  обусловлен численной диффузией, подавляющей сжатия мелких масштабов и также из-за действия мелкомасштабного динамо. Среднее значение  $E_K$ , для того же временного интервала усреднения составляет 39.8, таким образом магнитная энергия дает около  $1/4$  полной энергии,  $E_M/E_T \approx 0.25$  в  $1024^3$  модели.

В то время как среднеквадратичное звуковое число Маха  $M_s$  выходит на уровень около 9.2 независимо от разрешения сетки, альвеновское число Маха  $M_A \approx 4.0, 3.1, \text{ и } 2.8$  для сеток с  $256^3, 512^3, \text{ и } 1024^3$  ячеек, соответственно (см. рис. 2.9b). При том же самом начальном значении магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , получаются турбулентные состояния со слегка раз-

личными значениями  $M_A$ , с тенденцией в направлении к менее сверхальвеновским течениям при более высоком численном разрешении.

Поскольку явные диссипативные члены не включены в исходные уравнения МГД, диссипация в модели чисто численная и увеличение разрешения приводит, соответственно к более высокому эффективному числу Рейнольдса. Этот подход следует приближению развитому в работе [112] для гидродинамического моделирования турбулентности с численным кодом PRM и предполагает, что природа диссипации не влияет на динамику переноса энергии в инерционном интервале масштабов. Это можно увидеть в изменении уровня среднеквадратичной спиральности, которая растет постепенно при увеличении разрешения (см. рис. 2.9c).

Поскольку случайная сила, с хорошим приближением, не является спиральной, средняя спиральность имеет значения близкие к нулю в ходе всего моделирования. Рисунок 2.9d показывает довольно медленную сходимость в уровне среднеквадратичной поперечной спиральности и конечные отклонения средней поперечной спиральности  $H_C \equiv \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} dV$  от нуля в случае с низким разрешением. PRML не сохраняет точно поперечную спиральность, даже хотя эта величина является одним из идеальных инвариантов в МГД. Нормированная, средняя поперечная спиральность однако содержалась в пределах  $\pm 0.8\%$  для  $\beta_0 = 2$  при  $1024^3$ . Несмотря на то, что кинетическая и магнитная энергии, а также среднеквадратичное альвеновское число Маха достигают константных значения после 3 динамических времен эволюции с  $\beta_0 = 2$ , среднеквадратичная поперечная спиральность продолжает медленно расти вплоть до 4 и даже 5 динамических времен подразумевая, что перемешивание течения к моменту времени  $3t_d$  не является достаточным, чтобы достичь статистически устойчивого стационарного состояния.

Другой основной глобальной характеристикой турбулентности является среднеквадратичное (rms) значение плотности. При увеличении численного разрешения наблюдался более высокий уровень флуктуаций плот-

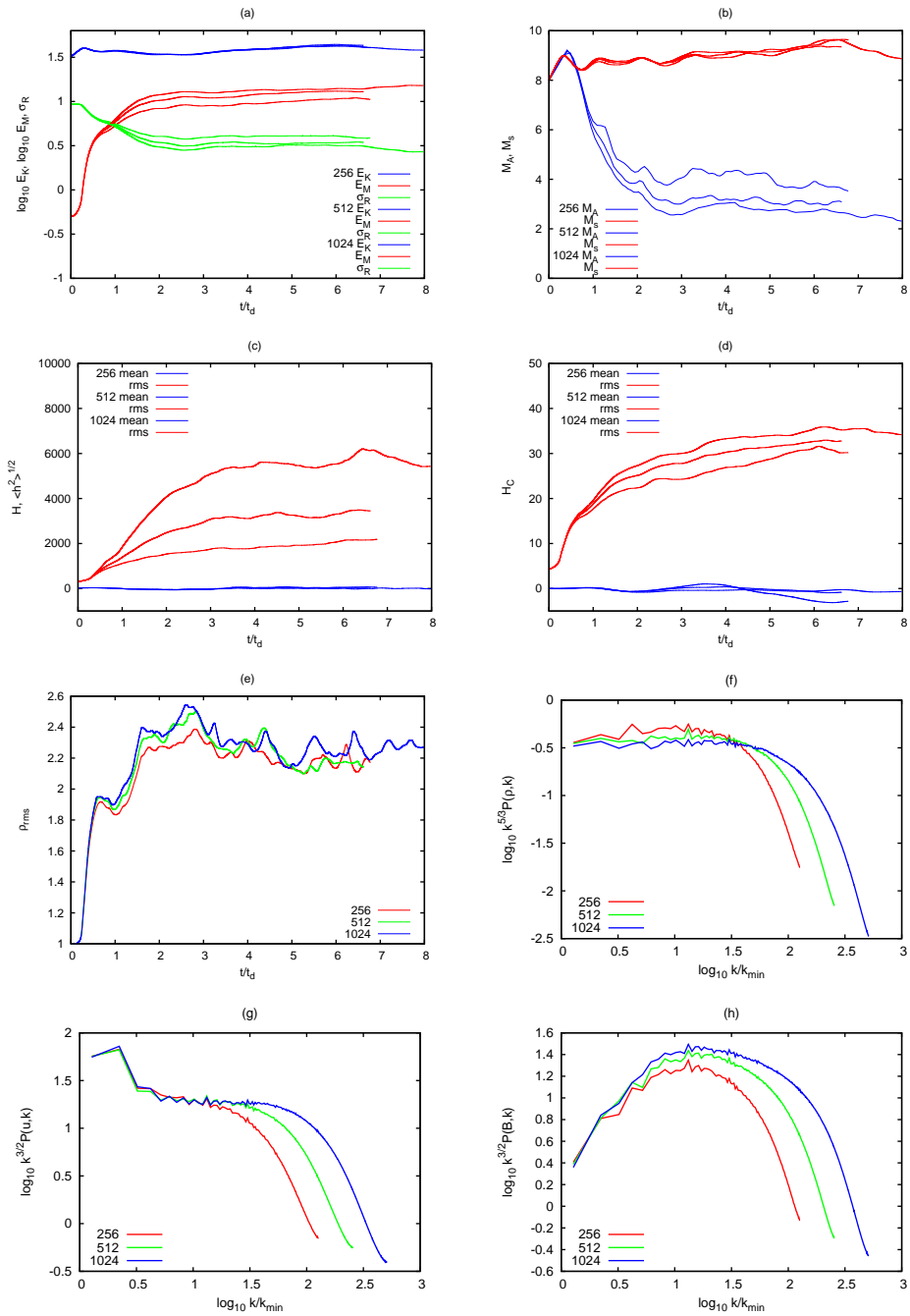


Рис. 2.9. Статистики МГД турбулентности при  $M_s = 10$  и  $\beta_0 = 2$  для PPM-моделирования на сетке с разрешениями  $256^3$ ,  $512^3$  и  $1024^3$  ячеек: (а) средняя кинетическая, магнитная и остаточная энергии ( $\sigma_R \equiv (E_K - E_M)/E_T$ ) от времени; (б) rms звуковой и альвеновский числа Маха; (в) средняя и rms спиральность; (д) средняя и rms поперечная спиральность; (е) rms плотность газа; (ф) скомпенсированный спектр мощности для плотности при  $t = 3.5t_d$ ; (г) скомпенсированный спектр мощности для скорости при  $t = 3.5t_d$ ; (h) скомпенсированный спектр мощности для магнитной энергии при  $t = 3.5t_d$ .



ности. Однако rms плотности слабо чувствительно к разрешению сетки и меняется от 2.2 до 2.3 при увеличении числа ячеек от  $256^3$  до  $1024^3$  (см. рис. 2.9e). Окончательно, чтобы проиллюстрировать сходимость спектральных свойств турбулентных флуктуаций, на рис. 2.9f, g, и h показаны скомпенсированный спектр мощности плотности, скорости, и магнитного поля для насыщенного состояния турбулентности при  $t = 3.5t_d$ , для различных уровней численного разрешения. Как видно из рис. 2.9g, спектр скорости разрешен вплоть до  $\log_{10} k/k_{min} \approx 1.1$  при  $256^3$  и вплоть до  $\log_{10} k/k_{min} \approx 1.4$  при  $512^3$ , согласуясь с изменением разрешения сетки в два раза.

Далее, усредненные по времени статистики представлены для модели с  $\beta_0 = 2$  при  $1024^3$  ячеек сетки и сравнены с результатами предыдущих гидродинамических моделирований при  $M_s = 6$  с разрешением  $1024^3$  и  $2048^3$  ячеек [99]. Результаты МГД моделирования основаны на выборке из 100 кубов взятых через равные промежутки времени для  $t \in [3, 8]t_d$ , т.е. проведено усреднение по пяти динамическим временам. Спектр проекционной плотности основан на выборке из 750 проекций, включая все три направления проекции, за тот же временной интервал  $t \in [3, 8]t_d$ . В начале представлены масштабируемые свойства основных полей, таких как плотность, скорость и магнитное поле и затем обсуждены идеальные инварианты, такие как полная энергия и скорость переноса энергии, которые, с различной степенью, показывают универсальное поведение.

Функция плотности вероятности распределения (pdf) плотности газа является одной из наиболее важных характеристик в теории звездообразования в молекулярных облаках, поскольку она определяет количество плотного материала доступного для гравитационного коллапса, который ведет к рождению звёзд [96]. Нахождение pdf важно и в других астрофизических системах, например для процесса аккреции на черную дыру в ранних галактиках [97]. Также известно, что pdf является одной из наиболее робастных статистических характеристик для сжимаемой изо-

термической турбулентности, так как её логнормальная форма является обычной в численных моделированиях [99].

Из результатов МГД моделирования при  $\beta_0 = 2$  найдено, что pdf имеет логнормальную форму с идеальной совпадением порядка  $\sim 10^8$  по вероятности при больших плотностях. (рис. 2.10a). По сравнению с немагнитным случаем при  $M_s = 6$ , логнормальное распределение в МГД случае при  $M_s = 10$  является, как и ожидалось при больших числах Маха, более широким. При параметризации стандартного отклонения  $\sigma$  как функции звукового числа Маха,  $\sigma^2 \equiv \ln(1 + b^2 M_s^2)$ , получается  $b = 0.22$  и  $0.27$  как лучшие по вероятности значения  $\log_{10} \rho \in [-1, 2.8]$  в МГД и ГД случаях, соответственно. Среднее в распределении является также функцией стандартного отклонения  $\langle \ln \rho \rangle = -\frac{1}{2}\sigma^2$ . Более полная информация о зависимости pdf от значений плазменного параметра  $\beta_0$  представлена в работе [100].

Спектр мощности для плотности (рис. 2.10b) масштабируется как  $k^{-2/3}$ , который более плоский, чем наклон  $-1$  в ГД случае при  $M_s = 6$  [99]. Спектр мощности для логарифма плотности (рис. 2.10c) имеет более крутой наклон  $k^{-4/3}$ , но все еще более плоский, чем  $k^{-5/3}$ , найденный при  $M_s = 6$ . Спектр мощности для логарифма проекционной плотности грубо следует скейлингу  $k^{-5/3}$ , которые немного круче, чем скейлинг спектра мощности плотности (рис. 2.10d), но более плоский, чем  $-2$ , измеренный в ГД случае при  $M_s = 6$ .

Спектр мощности скорости и разложение скорости  $\mathbf{u}$  на несжимаемую ( $\nabla \cdot \mathbf{u}_s \equiv 0$ ) и сжимаемую ( $\nabla \times \mathbf{u}_c \equiv 0$ ) части,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_c$ , показаны на рис. 2.10e. Спектральный показатель степени очень близок к значению  $-3/2$  при отношении  $k/k_{min}$  примерно равному 30, значению предполагаемому для изотропного несжимаемого случая с равномерным распределением турбулентной энергии [101], и спектру с доминирующей соленоидальной компонентой с одинаковым скейлингом. При малых волновых числах (но все еще в пределах инерционного диапазона) спектр скорости

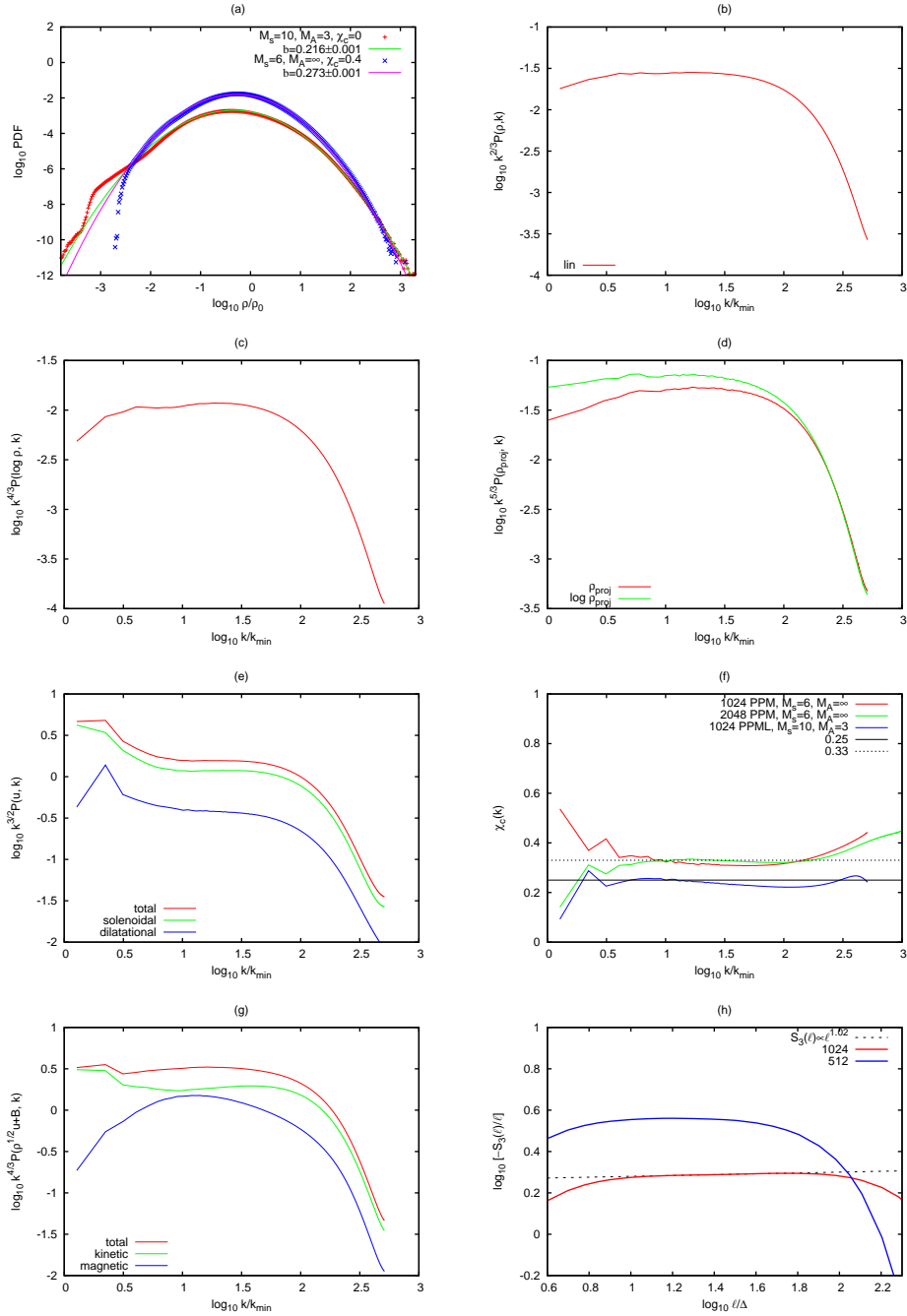


Рис. 2.10. Усредненные по времени статистики МГД турбулентности при  $M_s = 10$  и  $\beta_0 = 2$  из PPM моделирования на сетке с разрешением  $1024^3$  ячеек: (a) pdf плотности газа и логнормальная ее форма  $\log_{10} \rho \in [-1, 2.8]$ ; (b) скомпенсированный спектр мощности для плотности газа; (c) как **b**, но для логарифма плотности; (d) как **b**, но для проекционной плотности и для логарифма проекционной плотности; (e) как **b**, но для скорости и ее соленоидальной и дилатационной части; (f) отношение дилатационной части спектра к спектру полной скорости  $\chi_C$  как функции волнового числа  $k$ ; (g) скомпенсированный спектр мощности для полной, кинетической и магнитной энергии. (h) скомпенсированная третьего-порядка структурная функция  $S_3(\ell)$  для обобщенных переменных Эльзассера  $\mathbf{Z}^\pm$  из  $512^3$  и  $1024^3$  моделирований.

становится более крутым, как и ожидалось для сильно сверхзвукового режима. Спектр для сжимаемой компоненты получается слегка более крутым, как уже отмечалось при моделировании немагнитной турбулентности [90]. Рисунок 2.10f сравнивает долю сжимаемой компоненты в спектре скорости,  $\chi_c(k) \equiv P(\mathbf{u}_c, k)/P(\mathbf{u}, k)$ , в RPML МГД модели при  $\beta_0 = 2$  с RRM ГД модели с  $M_s = 6$  при разрешениях  $1024^3$  и  $2048^3$  ячеек [100]. В обоих ГД расчетах  $\chi_c(k) \approx 1/3$  в инерционном диапазоне, даже при использовании различных случайных сил и различных параметризаций для RRM диффузии в этих моделированиях. В тоже самое время в МГД случае  $\chi_c(k) \approx 1/4$  или даже немного меньше, что можно объяснить дополнительным членом, связанным с магнитным давлением, в уравнении сохранения импульса. Подобное значение для  $\chi_c(k)$  было получено в работе [105] для модели с более сильным магнитным полем ( $\beta_0 = 0.02$ ) при одинаковом разрешении.

Далее, снова исследован вопрос о выполнении закон  $4/3$  для несжимаемой МГД турбулентности для сверхзвукового режима в молекулярных облаках. Для этого по данным из RPML МГД моделирования, при наивысшем разрешении с  $1024^3$  ячейками, вычислены третьего порядка структурные функции  $S_{\parallel,3}^{\pm}$  и  $S_{\perp,3}^{\pm}$  определенные при помощи  $\mathbf{Z}^{\pm}$  полей. Для оценки скорости переноса энергии через инерционный интервал была также вычислена сумма  $S_{\parallel,3}^{-}$  и  $S_{\parallel,3}^{+}$ . Чтобы уменьшить статистическую ошибку, поперечные и продольные структурные функции объединены в единую формулу. Рисунок 2.10h показывает скомпенсированный скейлинг для  $S_3(\ell) \equiv (S_{\parallel,3}^{-} + S_{\parallel,3}^{+} + S_{\perp,3}^{-} + S_{\perp,3}^{+})/4$ , усредненный по 100 кубам данных, и линейная регрессия дает  $S_3(\ell) \sim \ell^{1.020 \pm 0.001}$  для  $\log \ell/\Delta \in [1.1, 1.8]$ . Для сравнения представлены данные из RPML МГД  $512^3$  моделирования. Очевидно при  $1024^3$  получен более широкий диапазон скейлинга и подтвержден линейный скейлинг, полученный ранее на сетке  $512^3$ . Таким образом показано, что скорость переноса энергии приблизительно постоянна в инерционном интервале и закон  $4/3$  для

несжимаемой МГД турбулентности может быть расширен для сверхзвуковых турбулентных течений.

## 2.3 Моделирование образования молекулярных облаков

Турбулентные движения определяют структуру распределения плотности и температуры в межзвездном газе, поскольку большая часть межзвездной среды характеризуется большими числами Рейнольдса [113]. С этой точки зрения часто турбулентность рассматривается как необходимый организующий элемент в образовании и определении формы иерархических крупномасштабных структур в диффузной межзвездной среде и также в областях звездообразования в плотных молекулярных облаках [114]. Доминирование нелинейного переноса в динамике сильно сжимаемого замагниченного самогравитирующего течения делает компьютерное моделирование практически единственным средством в изучении фундаментальных аспектов межзвездной турбулентности, несмотря на то, что эффективные числа Рейнольдса в моделях всегда ограничены доступными компьютерными ресурсами [115]. За последние несколько лет трехмерное численное моделирование способствовало развитию теоретических моделей межзвездной среды подвергающейся нелинейным взаимодействиям и самоорганизации в галактических дисках. Эти модели можно разделить на три основных класса, в зависимости от диапазона масштабов и привлеченной физики:

(i) *мезомасштабные* модели которые рассматривают эволюцию мультифазной межзвездной среды в объёмах с линейным размером несколько десятков килопарсек и разрешают структуры в течениях в долях 1 парсека [116],[117]; (ii) *субмезомасштабные* модели, которые разрешают масштабы на шкале высот диффузного HI ( $\sim 100$  пс) и обычно ограни-

чиваются только к теплой-холодной нейтральной фазе (WNM и CNM) [118],[119],[120]; и (iii) *микромасштабные* модели турбулентности в молекулярных облаках, которые предполагают изотермическое уравнение состояния и ограничиваются объёмами  $< 10$  пс. *Глобальные* модели в галактических дисках [121],[122],[123] в настоящий момент времени могут разрешить масштабы  $\sim 10$  пс, что является недостаточным для правильного представления о тепловой структуре самогравитирующей межзвёздной среды.

В нашем численном эксперименте, межзвёздная среда рассматривается как система с турбулентностью, в которой кинетическая энергия введена на больших масштабах в результате взрыва сверхновых, сдвиг движения обеспечен дифференциальным вращением галактического диска, падение газа на диск осуществлено посредством процесса аккреции и т.д. [124]. Кинетическая энергия переносится от крупных масштабов к мелким в результате каскадного процесса. Поскольку модель включает среднее магнитное поле  $B_0$ , некоторая часть этой кинетической энергии запасена в турбулентной компоненте магнитного поля  $b$ , созданной в результате изменения топологии силовых линий магнитного поля. Межзвёздная среда также подвержена действию ультрафиолетового излучения исходящему от ОВ ассоциаций быстро эволюционирующих массивных звёзд, которые образуются в молекулярных облаках. Это ультрафиолетовое излучение является главным источником энергии для нейтральной фазы газа, при этом объёмный нагрев газа уравновешан радиационным охлаждением [125]. Таким образом межзвёздная среда подвергается действию различных потоков энергии, и саморганизация возникает в результате процесса релаксации посредством нелинейных взаимодействий различных физических составляющих системы при условии выполнения законов сохранения для МГД случая. В этой картине, молекулярные облака с их внутренней иерархической структурой образуются как диссипативные структуры - активные области сильно перемежающегося

турбулентного каскада, который преобразует кинетическую энергию при действии случайной вынуждающей силы.

Чтобы иллюстрировать эти идеи, рассмотрено несколько простых моделей в периодической коробке, в которых отсутствует стратификация газа и дифференциальное вращение в диске и применяется искусственная крупномасштабная соленоидальная сила для имитации переноса кинетической энергии от различных галактических источников. Это дает верхнюю границу для размера вычислительной области  $L$ , которая в моделировании полагается равной 200 пс. Таким образом исходная модель определяется следующими тремя параметрами: средней плотностью газа  $n_0$ , среднеквадратичной скоростью  $u_{\text{rms},0}$ , и средней силой магнитного поля  $B_0$ . Таблица 1 дает значения параметров для моделей А, В, С, D, и Е предполагая  $L = 200$  пс. Таблица также дает численное разрешение  $N$ , начальное значение плазменного параметра  $\beta_{\text{th},0} \equiv 8\pi p_0/B_0^2$ , турбулентного плазменного параметра  $\beta_{\text{turb},0} \equiv 8\pi \rho_0 u_{\text{rms},0}^2/B_0^2$ , и альвеновского числа Маха  $M_{A,0} = (4\pi \rho_0)^{1/2} u_{\text{rms},0}/B_0$ , где  $p_0$  есть начальное тепловое давление газа (см. фазовую диаграмму на рис. 2.12 для больших деталей).

Решались уравнений идеальной МГД для сжимаемого газа с учетом источников нагрева и охлаждения в уравнении для энергии :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B}) + \nabla \bar{p} = \mathbf{F}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} E + \mathbf{v} \bar{p} - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})) = n \Gamma - n^2 \Lambda(T), \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Таблица 2.1. Модельные параметры.

Модель	$N^3$	$n_0$ см $^{-3}$	$u_{\text{rms},0}$ км/сек	$B_0$ $\mu\text{Гс}$	$\beta_{\text{th},0}$	$\beta_{\text{turb},0}$	$M_{A,0}$
A	$512^3$	5	16	9.54	0.2	3.3	1.3
B	$512^3$	5	16	3.02	2	33	4.0
C	$512^3$	5	16	0.95	20	330	13
D	$256^3$	2	16	3.02	2	13.2	2.6
E	$256^3$	5	7	3.02	2	8.3	2.0

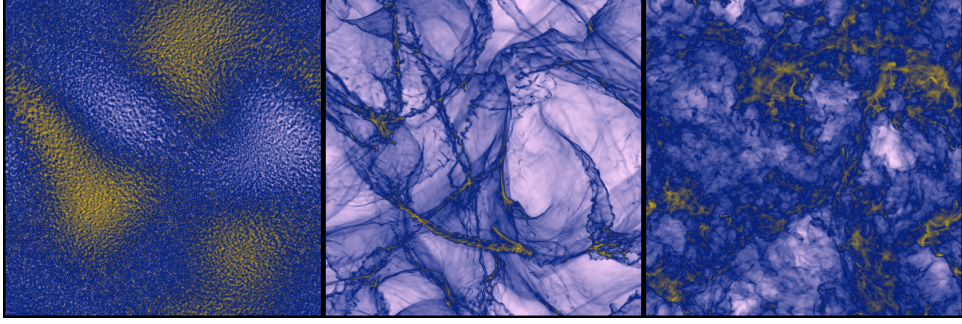


Рис. 2.11. Три рисунка проекционной плотности газа в модели А взятой при  $t = 2, 3,$  и 4 Млет. Белый, голубой, желтый цвета соответствуют к низким, средним, высоким значениям проекционной плотности.

где  $\rho$  - плотность,  $n$  - концентрация,  $\mathbf{v}$  - вектор скорости,  $\mathbf{B}$  - вектор магнитного поля,  $E$  - полная энергия,  $p$  - полное давление (гидродинамическое+магнитное):

$$\bar{p} = p + p_{\text{mag}},$$

$$p_{\text{mag}} = \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{2}.$$

$\Lambda(T)$  и  $\Gamma$  - функции охлаждения и нагрева, соответственно.

Система (2.7) дополнялась уравнением для полной энергии

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}}{2} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{2} \quad (2.8)$$

и уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (2.9)$$

где  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия,  $\gamma$  - показатель адиабаты.



Функция охлаждения  $\Lambda(T)$  задавалась в следующем виде:

$$\frac{\Lambda(T)}{\Gamma} = 1.0 \times 10^7 \exp(-1.184 \times 10^5 / (T + 1000)) + 14 \times 10^{-3} \sqrt{T} \exp(-92/T) \quad (2.10)$$

где  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-26}$  эрг/сек,  $T$  - температура в Кельвинах.

Расщепление по физическим процессам применялось для решения исходной системы уравнений: численный метод PRML использовался для решения дивергентной части уравнений МГД и высокого порядка неявная схема для членов, учитывающих процесс нагрева и охлаждения.

В начальный момент времени в вычислительной области задано однородное распределение газа. Малое случайное изобарическое возмущение плотности при  $t = 0$  добавлено, чтобы начать фазовый переход в бистабильном газе, который быстро переводит  $\sim 25 - 65\%$  массы газа в устойчивую холодную фазу (СNM с температурой ниже  $T = 184$  К), в то время как остальная масса газа разделяется на неустойчивый и устойчивый теплый газ (WNM). В моделях А, В, и С, каждая из фаз СNM и WNM содержит грубо  $\sim 50\%$  полной HI массы, в согласии с наблюдениями [126]. После этого включалась в действие случайная сила и, после нескольких периодов крупномасштабного перемешивания, моделирование приближалось к статистически стационарному состоянию. Рисунок 2.11 показывает эволюцию во времени этого двухстадийного процесса, с изображением на трех слайдах проекционной плотности газа для модели А. Левый рисунок изображает двухфазную среду в момент времени  $t = 2$  Млет точно перед включением случайной силы; средний рисунок иллюстрирует раннюю стадию турбулизации среды с включением в действие случайной силы при  $t = 3$  Млет. Правый рисунок показывает проекционную плотность при  $t = 4$  Млет для статистически развитого турбулентного состояния. Молекулярные облака могут быть видны на правой панели, как волокнистые коричнево-желтые структуры, мор-

фология которых заметно отличается от переходных плотных структур на среднем рисунке. Среднеквадратичное магнитное поле усиливается под действием случайной силы и насыщается при переходе системы к устойчивому стационарному состоянию (рис. 2.12). Уровень насыщения зависит от величины магнитного поля  $B_0$  и от скорости подачи кинетической энергии крупномасштабной силой, которая в свою очередь определена  $u_{\text{rms}}$  и  $n_0$ . Этот уровень может быть легко изменен при выборе трех начальных модельных параметров. В насыщенном состоянии, в моделях А и В устанавливается равенство энергий ( $E_K \sim E_M$ ), в то время как уровень насыщения магнитной энергии в модели С на коэффициент  $\sim 3$  меньше, чем в модели с равенством энергий. Средняя тепловая энергия также увеличивается, вследствие действия случайной силы, но всегда остается малой по отношению к другим видам энергий во всех моделях. Типичная фазовая диаграмма изображена на рис. 2.12. Контуры показывают постоянные уровни объёмной доли для различных диапазонов теплового давления  $p_{\text{th}}$  и плотности  $n$ , отличающиеся по значению в два раза. Около 23% вычислительного объёма заполнено устойчивой тепловой фазой при температуре  $T > 5250$  К, устойчивая холодная фаза при температуре ( $T < 184$  К) занимает  $\sim 7\%$ , и  $\sim 70\%$  остального объёма находится под воздействием тепловой неустойчивости при промежуточных температурах. Большое оранжевое пятнышко в центре отмечает начальные условия в моделях А, В, С, и Е. Фазовая диаграмма показывает, что турбулентность дает вклад в широкий диапазон теплового давления и также, что  $p_{\text{th}}$  в молекулярном газе с концентрацией ( $n > 100 \text{ см}^{-3}$ ) есть выше, чем для диффузной межзвездной среды, даже несмотря на то, что самогравитация игнорирована в модели.

Рисунок 2.13 (верхний слайд) показывает усредненную по времени PDF плотности для моделей А, В и С в стационарном состоянии. Эффект магнитного поля на PDF плотности очевидно очень слаб в среднем, и часть PDF, соответствующая высокой плотности, может быть хоро-

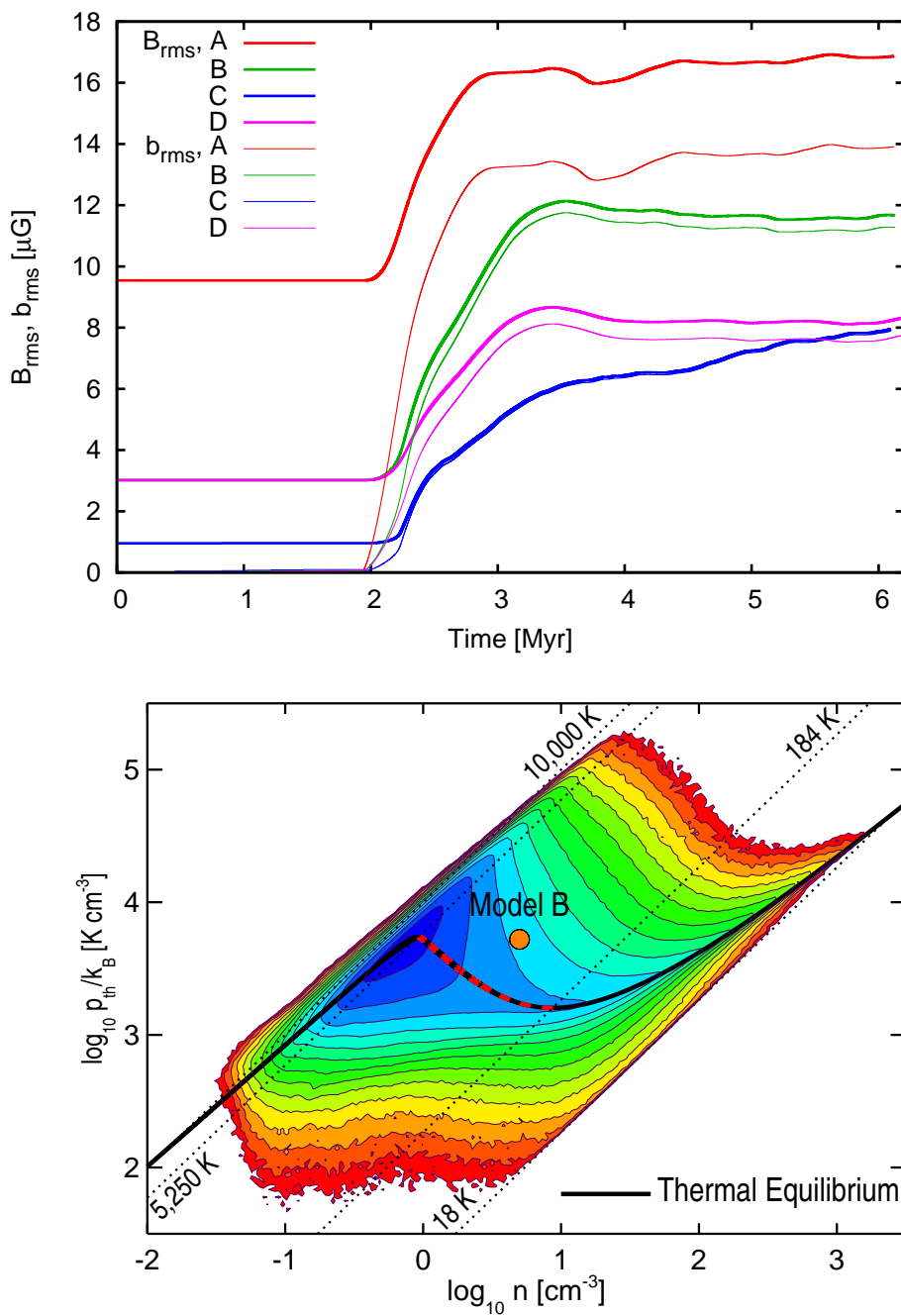


Рис. 2.12. Временная эволюция среднеквадратичной силы магнитного поля  $B_{\text{rms}}$ , ее турбулентной компоненты  $b_{\text{rms}}$  для моделей А, В, С, и D (верхний слайд). Фазовая диаграмма (тепловое давление в зависимости от плотности газа) для модели В при  $t = 5$  Myr (нижний слайд).

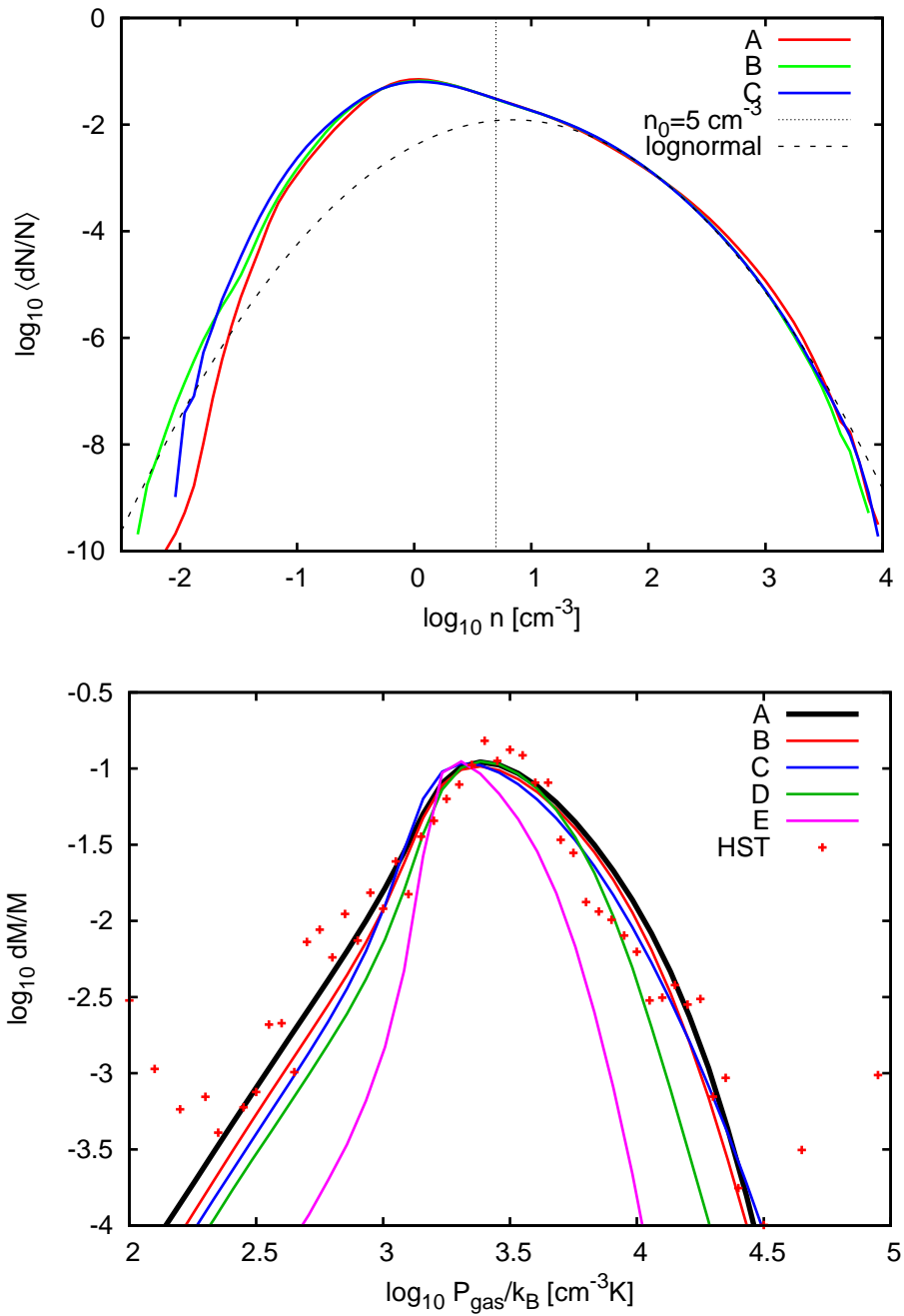


Рис. 2.13. Среднее по времени распределение плотности для полностью развитой турбулентности в моделях А, В и С (верхний слайд) и среднее по времени взвешенное по массе распределение теплового давления для моделей А, В, С и D (нижний слайд).

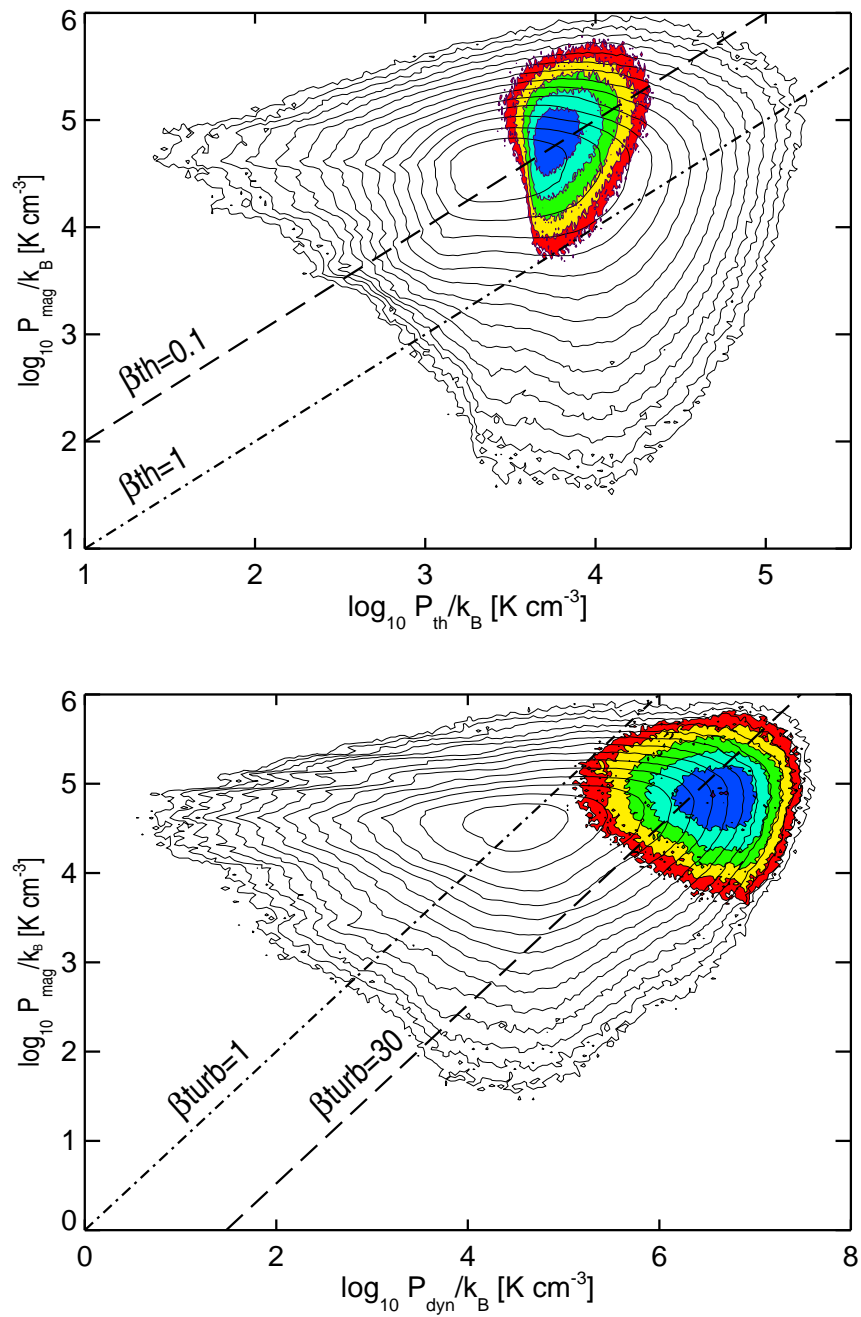


Рис. 2.14. Распределение магнитного давления в зависимости от теплового (верхний слайд) и динамического (нижний слайд) давления для выборки из модели В при  $t = 5$  Млет.

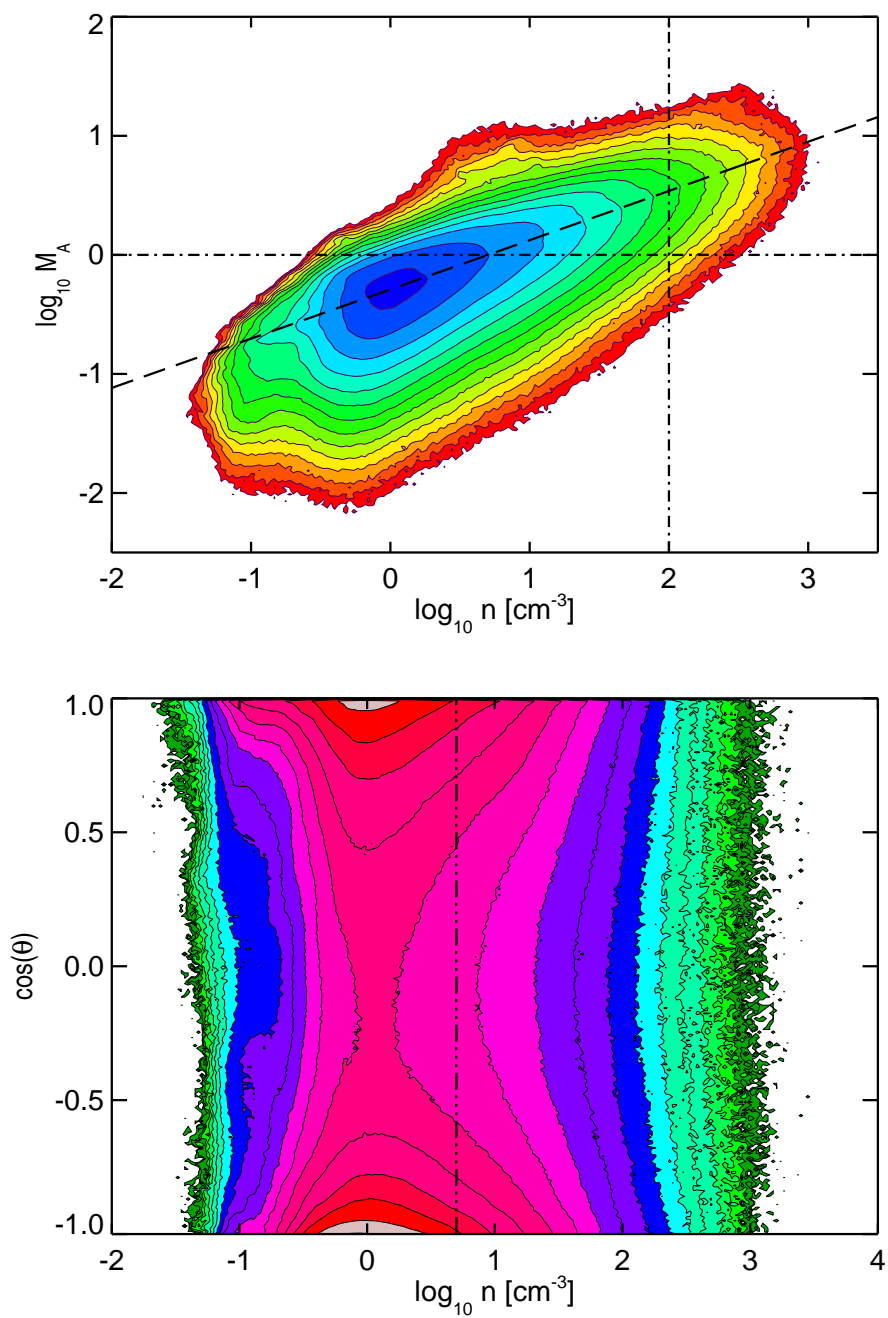


Рис. 2.15. Распределение альвеновского числа Маха (верхний слайд) и косинуса угла коллинеарности между вектором скорости и магнитного поля (нижний слайд) в зависимости от плотности для выборки из модели А при  $t = 5$  Млет.

шо аппроксимирована логнормальной формой, как и в изотермическом случае. Признаки двух устойчивых тепловых фаз в PDF смазаны (относительно) высоким уровнем турбулентности,  $u_{\text{rms}}(100 \text{ пс}) = 16 \text{ км/сек}$  (Brunt & Neyer 2004), но полная форма не является в общем логнормальной. Распределение теплового давления в моделях А, В и С охватывает 6 порядков, не оставляя шансов для старой картины удержания облаков внешним давлением в интенсивно эволюционирующей межзвёздной среде. Все распределения соответствуют характерному давлению типичному в диске Млечного Пути на радиусе расположения Солнца и показывают только слабую зависимость от начальной величины магнитного поля  $B_0$ , в то время как ширина распределения остается чувствительной к  $u_{\text{rms}}$  и  $n_0$ . Рисунок 2.13 (нижний слайд) сравнивает, взвешенное по массе распределение давления, полученное в нашей модели, с аналогичным распределением, реконструированным из наблюдений с высоким разрешением УФ спектра горячих звёзд [127]. Видно, что модели с  $u_{\text{rms}} = 16 \text{ км/сек}$  воспроизводят как форму, так и ширину наблюдаемых распределений вполне отчетливо, в то время как более низкий уровень турбулентности в модели Е приводит к слишком узкому распределению давления.

Эти численные эксперименты позволяют определить уровень напряженности магнитного поля в молекулярных облаках, которые образуются самосогласованно в замагниченной турбулентной, диффузной межзвёздной среде. В верхнем слайде рисунка 2.14 показана точечная диаграмма магнитного давления в зависимости от теплового давления для модели В, в момент времени  $t = 5 \text{ Млет}$ . Черные контурные линии показывают распределение для целой области, которая центрирована при  $\beta_{\text{th}} \approx 0.1$ . Подмножество ячеек представляющих молекулярный газ ( $T < 100 \text{ К}$  и  $n > 100 \text{ см}^{-3}$ , цветные контуры) показывают очень подобные средние значения  $\beta_{\text{th}}$ . Это указывает на значения плазменного параметра для реалистичного моделирования турбулентности в изо-

термических молекулярных облаках. Нижний слайд того же рисунка 2.14 показывает точечную диаграмму магнитного давления в зависимости от динамического давления для тех же моделей. Распределение для целой области центрировано при  $\beta_{\text{turb}} \approx 1$ , из-за приближенного равенства уровней кинетической и магнитной энергии в среднем. В тоже самое время, подмножество ячеек, представляющих молекулярный газ (цветные контуры), дает распределение центрированное при  $\beta_{\text{turb}} \approx 30$ , подразумевая, что турбулентность в молекулярном газе является сверхальвеновской. Рисунок 2.15 (верхний слайд) показывает распределение альвеновского числа Маха  $M_A$ , как функцию плотности для модели А с сильным магнитным полем, которая далее поддерживает этот результат. Существует ясно положительная корреляция  $M_A \sim n^{0.4}$ , показанная штриховой линией, и большая часть плотного вещества ( $n > 100 \text{ cm}^{-3}$ ) очевидно попадает в сверхальвеновскую часть распределения.

Ключ к пониманию происхождения этого сверхальвеновского режима в холодном и плотном молекулярном газе лежит в процессе самоорганизации в замагниченной межзвездной турбулентности. Статистически стационарное состояние, сохраняющееся в рассмотренных моделях в течении нескольких миллионов лет, характеризуется определенной степенью коллинеарности векторов скорости и магнитного поля. Рисунок 2.15 (нижний слайд) показывает распределение косинуса угла коллинеарности,  $\cos \theta \equiv \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} / (Vu)$  для модели А при  $t = 5$  Млет. Контуры обнаруживают похожую на седловину структуру в этом распределении вероятности с сильной коллинеарностью ( $\cos \theta = \pm 1$ ) в WNM при  $n \sim 1 \text{ cm}^{-3}$ . Этот факт подразумевает, что сжатие в WNM газе, который находится в среднем в трансальвеновском режиме (т.е.,  $M_A \in [0.6, 0.9]$  в модели А), происходит предпочтительно вдоль силовых линий магнитного поля. Если молекулярные облака образуются в турбулентной межзвездной среде через крупномасштабное сжатие HI, то турбулентность в таких молекулярных облаках может быть только сверхальвеновской [128].



## 2.4 Выводы по главе 2.

На основе оценок ширины спектральной полосы и чисел Рейнольдса для скорости и магнитного поля показано, что метод PRML обладает наилучшими диссипативными свойствами среди всех известных численных методов, представленных в моделировании разрушенной турбулентности. Проведено численное моделирование сверхзвуковой МГД турбулентности для изотермического случая в проблеме звездообразования. Осуществлен анализ основных спектральных характеристик и законов подобия для сжимаемой изотермической МГД турбулентности. Показано, что образование ядер звёзд происходит в сверхальвеновском режиме, скорость переноса энергии постоянна в инерционном интервале, закон  $4/3$  для несжимаемой МГД может быть перенесен на сверхзвуковые турбулентные течения. Предложена новая теоретическая модель межзвездной среды, подвергающейся нелинейным взаимодействиям и самоорганизации в галактических дисках. Проведено численное моделирование турбулентности, в которых учитывается искусственная крупномасштабная соленоидальная сила имитирующая перенос кинетической энергии от различных галактических источников. Распределение давления, полученное в численном эксперименте для моделей с  $u_{\text{rms}} = 16$  км/сек, хорошо согласуется по форме и ширине с аналогичными распределениями, реконструированными из наблюдений [127]. Обнаружена положительная корреляция  $M_A \sim n^{0.4}$  и найдено, что большая часть плотного вещества ( $n > 100 \text{ cm}^{-3}$ ) попадает в сверхальвеновскую часть распределения. Это означает, что турбулентность в молекулярных облаках, образующихся в диффузной межзвездной среде, может быть только сверхальвеновской.

## Глава 3

# Моделирование локальной солнечной супергрануляции

Конвекция вблизи солнечной поверхности имеет сильно нелокальный и динамический характер. Поэтому численное моделирование дает полезную информацию о пространственных структурах солнечной конвекции и обеспечивает построение согласованных моделей физических процессов протекающих в наблюдаемых солнечных явлениях. Проведено трехмерное моделирование методом крупных вихрей фотосферной, солнечной конвекции, используя реалистичную физическую модель. Исследована тепловая структура конвективных движений в верхней радиационной зоне фотосферы, диапазон возникающих размеров конвективных ячеек и глубина проникновения конвекции вглубь от поверхности Солнца. Рассмотрена временная эволюция и рост крупных конвективных мод на масштабе мезогрануляции и супергрануляции. В работе [129] показано, что коллективное движение малых конвективных ячеек грануляции выносит слабое магнитное поле на края ячеек на масштабе мезогрануляции. Моделирование солнечной фотосферной конвекции [130] в вычислительной области размером 48 Мм по горизонтали и 20 Мм по вертикали показало, что размеры конвективных ячеек увеличиваются с глубиной. В статье [131] предполагается, что развитие при развитии конвекции на

крупных масштабах и на больших временных интервалах, мезогрануляции и супергрануляции естественно возникает как результат коллективного адвективного взаимодействия многих мелких и короткоживущих гранул.

### 3.1 Численная модель солнечной конвекции

Вычисления проводились в областях размером  $60 \times 60$  Мм и  $100 \times 100$  Мм в горизонтальном направлении и от 0 Мм до 20 Мм в вертикальном направлении ниже видимой поверхности. Распределения всех физических величин в начальный момент взяты из стандартной солнечной модели [132] с параметрами  $(X, Z, \alpha) = (0.7385, 0.0181, 2.02)$ , где  $X$  и  $Y$  есть концентрации водорода и гелия по массе, и  $\alpha$  есть отношение длины перемешивания к шкале высот давления в конвективной зоне. Вычислительная область покрывает изменение давления на 5 порядков по абсолютной величине в конвективной области, что составляет половину шкалы высот для давления в полной конвективной области, хотя сама область занимает только 10% по глубине (рис. 3.1). Область также включает слои ионизированного водорода и первый и большую часть второго слоя ионизованного гелия. Уравнение состояния и коэффициенты непрозрачности звездного вещества рассчитывались с помощью таблиц пакета OPAL [133].

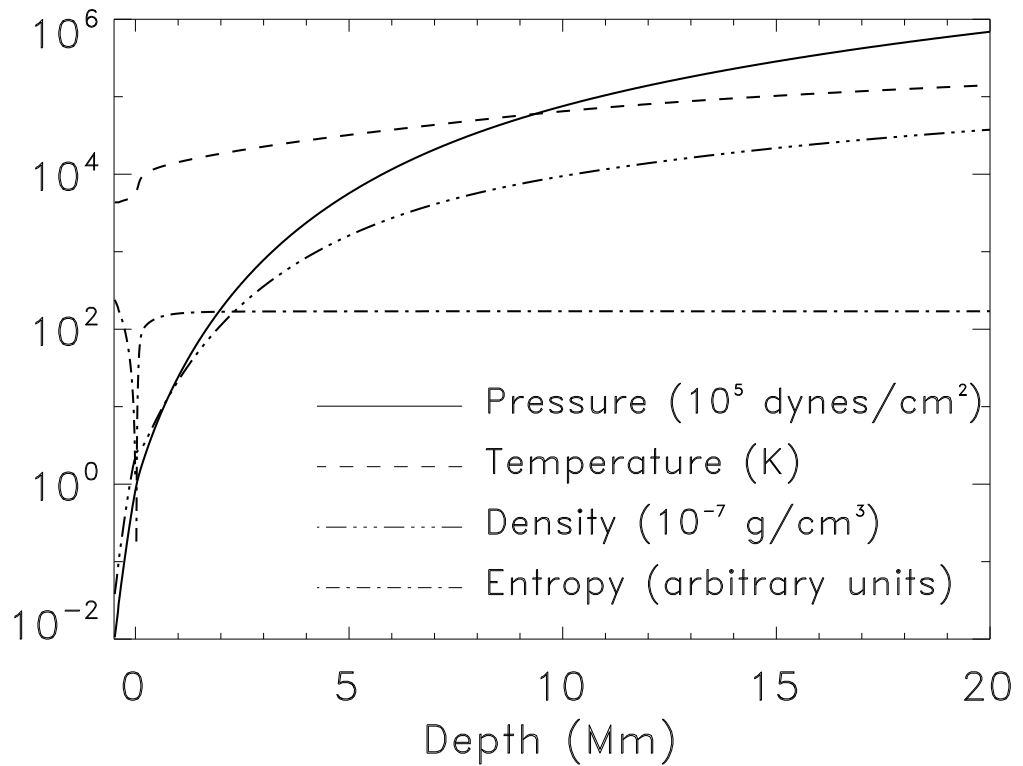


Рис. 3.1. Распределение давления, температуры, плотности, энтропии с глубиной. Вычислительная область покрывает 10 % геометрической глубины конвективной зоны и половину ее шкалы высот по давлению. Давление изменяется на 5 порядков, плотность на 4 порядка и температура на 1 порядок в пределах конвективной зоны.

Решались уравнения сжимаемой гидродинамики с учетом гравитации, вязкости и излучения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \vec{v} \vec{v} + P \hat{I}] = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \hat{\tau} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{v}(E + P)] = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \hat{\tau}) + \rho (\vec{g} \cdot \vec{v}) + Q_{rad} \quad (3.3)$$

где  $\rho$  - плотность,  $P$  - давление,  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $\vec{g}$  - вектор гравитации,  $E = e + \rho v^2/2$  есть полная энергия,  $Q_{rad}$  - член, учитывающий вклад энергии излучения и  $\hat{\tau}$  есть вязкий тензор напряжений. Влияние мелких подсеточных масштабов на крупные масштабы в турбулентном течении моделировалось методом крупных вихрей (LES - Large Eddy Simulation) и скорость диссипации была определена с учетом сил плавлучести и сдвиговых напряжений [134]. Эволюция всех консервативных переменных во времени рассчитывалась с помощью явной TVD консервативной разностной схемы [135, 143]:

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n - \Delta t L(U_{i,j,k}^n), \quad (3.4)$$

где  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  и оператор  $L$  есть

$$L(U_{i,j,k}) = \frac{\tilde{F}_{i+1/2,j,k} - \tilde{F}_{i-1/2,j,k}}{\Delta x_i} + \frac{\tilde{G}_{i,j+1/2,k} - \tilde{G}_{i,j-1/2,k}}{\Delta y_j} + \frac{\tilde{H}_{i,j,k+1/2} - \tilde{H}_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_k} + S_{i,j,k}. \quad (3.5)$$

Поток вдоль каждого направления определялся с использованием локально-характеристического метода

$$\tilde{F}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2} [F_{i,j,k} + F_{i+1,j,k} + R_{i+1/2} W_{i+1/2}]. \quad (3.6)$$

$R_{i+1/2}$  матрица правых собственных векторов якобиевой матрицы  $\partial F/\partial U$  вычисленной как обобщенное среднее Рое по двум значениям консервативных переменных в соседних ячейках  $U_{i,j,k}$  и  $U_{i+1,j,k}$  для реальных газов.  $W_{i+1/2}$  есть матрица численной диссипации.

Элементы  $l$  векторов  $W_{i+1/2}$  выглядят следующим образом

$$(\phi_{i+1/2}^l)^U = \frac{1}{2}\psi(a_{i+1/2}^l)(g_{i+1}^l + g_i^l) - \psi(a_{i+1/2}^l + \gamma_{i+1/2}^l)\alpha_{i+1/2}^l$$

где

$$\gamma_{i+1/2}^l = \frac{1}{2}\psi(a_{i+1/2}^l) \begin{cases} (g_{i+1}^l - g_i^l)/\alpha_{i+1/2}^l & , \alpha_{i+1/2}^l \neq 0 \\ 0 & , \alpha_{i+1/2}^l = 0 \end{cases}$$

Амплитуды волн  $\alpha_{i+1/2}^l$  являются элементами векторов

$$\alpha_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1}(U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}).$$

Функция  $\psi$  есть

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & , |z| \geq \delta_1 \\ (z^2 + \delta_1^2)/2\delta_1 & , |z| < \delta_1 \end{cases}$$

и определяет коррекцию энтропии для  $|z|$ , где  $\delta_1$  - малое положительное число. Функция-лимитер  $g_i^l$  определялась следующим образом:

$$g_i^l = \min\text{mod}(\alpha_{i-1/2}^l, \alpha_{i+1/2}^l)$$

$$g_i^l = (\alpha_{i+1/2}^l \alpha_{i-1/2}^l + |\alpha_{i+1/2}^l \alpha_{i-1/2}^l|) / (\alpha_{i+1/2}^l + \alpha_{i-1/2}^l)$$

Член  $S_{i,j,k}$  учитывает действие гравитационной силы и переноса излучения. Для локального сохранения баланса между градиентом давления и силой гравитации была сделана коррекция в вычислении амплитуд волн в соответствии с работой [136].

Один шаг по времени определялся по методу Рунге-Кутты сохраняющему TVD свойство схемы [138]:

$$\begin{aligned}
U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n) \\
U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}) \\
U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)})
\end{aligned}$$

Разностная схема имеет второй порядок по пространству и времени. Для аппроксимации производных в членах с вязкостью применялись центральные разности. Для оценки радиационного члена в уравнении энергии использовалось диффузионное приближение с применением функции ограничителей потоков  $\lambda(R) = \frac{1}{m\sqrt{1+R^m}}$  [137, 142], где  $R = \frac{|\nabla U|}{3kU}$  и  $U$  - плотность излучения. В этом случае коэффициент диффузии определялся как  $D = \frac{c\lambda}{3k}$ . Этот прием позволяет аккуратно перейти от области с диффузионным приближением к области, где выполняется режим свободного распространения фотонов. Если поток излучения определить как  $F_{rad} = -D\nabla U$ , то при  $R \rightarrow \infty : |F_{rad}| = cU$  (свободное распространение излучения без поглощения), при  $R \rightarrow 0 : \vec{F}_{rad} = -\frac{c\nabla U}{3k}$  имеем диффузионное приближение. Радиационный член в уравнении энергии запишется в виде  $Q_{rad} = -\nabla \cdot F_{rad}$ . Плотность излучения  $U$  определялась из решения стационарного уравнения переноса излучения:

$$-\nabla (D\nabla U) + ckU = ckU_{eq} \quad (3.7)$$

где  $k$  - коэффициент поглощения,  $U_{eq}$  - равновесная плотность излучения:

$$U_{eq} = \frac{4\sigma T^4}{c} \quad (3.8)$$

В  $x$  и  $y$  направлениях бралась равномерная разностная сетка и в вертикальном  $z$  направлении - неравномерная.

В горизонтальном направлении брались периодические граничные условия. В вертикальном направлении на верхней и нижней границе вычис-

лительной области граничные условия задавались двумя способами. В первом способе граничные условия выглядели таким образом

$$v_{z,k} = -v_{z,k-1}, v_{x,k} = v_{x,k-1}, v_{y,k} = v_{y,k-1}$$

$$dp/dz = \rho g_z, p = p(\rho), e = const$$

в которых применялось отражение для  $z$  компоненты скорости и простое копирование из соседней ячейки для тангенциальных  $x$  и  $y$  компонент скорости. Давление и плотность определялись из решения гидростатического уравнения, используя уравнение состояния и принимая постоянное значение внутренней энергии. Во втором способе применялись характеристические граничные условия [139]. В этом случае исходная система уравнений гидродинамики записывалась в виде уравнений для амплитуд волн, в предположении постоянства элементов матрицы Якоби для каждой численной ячейки. В направлении  $z$  уравнение для амплитуд волн запишется в виде

$$\alpha_t + \mathbf{L} + \mathbf{R}_u^{-1} (\partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} - \mathbf{S}) = 0 \quad (3.9)$$

где  $\alpha_i$  - амплитуды волн :

$$\alpha_i = (\mathbf{R}_u^{-1} \cdot \mathbf{u})_i \quad (3.10)$$

Вектор  $\mathbf{L}$  имеет компоненты

$$L_i = \lambda_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \quad (3.11)$$

где  $\lambda_i$  - собственные значения и  $\mathbf{R}_u^{-1}$  - левые собственные вектора матрицы Якоби  $\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{H}$ .

Выбор граничных условий связан со способом определения величин  $\mathbf{L}$ . Для моделирования задачи конвекции на больших временах необходимо использовать неотражающие граничные условия для выходящего потока и условие стационарности течения для входящего [139]. Неотражающие



граничные условия предполагают отсутствие возмущений, входящих в область извне. Это означает, что амплитуды волн, входящих в направлении  $z$  по нормали к границе (для которых  $\lambda_i < 0$ ), не меняются со временем, т.е.  $\alpha_t = 0$ . Стационарные граничные условия предполагают, что эволюция вещества в граничных ячейках определяется только потоками вдоль направлений  $x$  и  $y$ . Течение вещества в вертикальном направлении не оказывает влияния на изменение гидродинамических величин со временем. Чтобы установить вид таких граничных условий система уравнений гидродинамики записывается для физических переменных  $\mathbf{w} = (\rho, v_x, v_y, v_z, p)$  в виде

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{R}_w \mathbf{L} + \mathbf{A}_x \partial_x \mathbf{w} + \mathbf{A}_y \partial_y \mathbf{w} - \mathbf{S} = 0 \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{R}_w$  - правые собственные вектора матрицы  $\mathbf{A}_z$ .

Отсутствие влияния вертикального течения на состояние вещества означает, что

$$\mathbf{R}_w \mathbf{L} - \mathbf{S} = 0 \quad (3.13)$$

Отсюда получаем следующие выражения для величин  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{S} \quad (3.14)$$

Также как и в случае неотражающих граничных условий, формулы для компонент вектора  $\mathbf{L}$  используются только для отрицательных собственных значений. В противном случае следует использовать формулы (3.11).

В начальный момент задавались малые возмущения скорости с максимальной амплитудой  $10^{-4}$  для роста моды конвективной неустойчивости. Разрешение сетки составляло 100 метров в горизонтальном направлении и в минимуме 25 метров в вертикальном направлении. Все расчеты проводились на 256 процессорах суперкомпьютера МВС-1000к с разделен-

ной памятью мультипроцессоров в вычислительном центре Российской Академии наук.

Распараллеливание численной программы проводилось с помощью библиотеки MPI [144] и применением языка DVM Fortran [145]. Распределение данных между процессами параллельной программы производилось исходя из предположения, что реализующая алгоритм программа будет выполняться на однородной параллельной вычислительной системе и на каждом процессоре будет выполняться только один процесс параллельной программы. Процессы параллельной программы логически рассматривались как трехмерная решетка с тремя координатами I, J и K. Для обеспечения оптимального распределения нагрузки между процессорами все узлы всех сеток распределялись по решетке процессов равномерно. При этом на каждый узел решетки процессов распределялся параллелепипед узлов сетки одинакового размера. Разработанный алгоритм численного моделирования задачи конвекции успешно применялся для решения проблемы эволюции плазмы во внешнем магнитном поле с учетом переноса излучения [143, 142, 141] и в моделировании конвекции при взрыве Сверхновой I и II типа [140, 139].

### **3.2 Гидродинамическое моделирование солнечной конвекции**

Моделирование конвекции продолжалось в течение 48 солнечных часов. На верхней границе области, которая соответствует оптической глубине  $\tau = 1$  наблюдается развитие мелкомасштабной конвективной структуры со средним размером ячеек 1.5 Mm и временем жизни порядка 1-2 Min (рис. 3.2 а). Здесь видны широкие течения вверх теплого, низкой плотности и энтропии вещества и холодные текущие вниз, сходящиеся в филаментарные структуры, струи плотного материала. Наблюдает-

ся непрерывная картина образования и разрушения гранул. Гранулы с наивысшим давлением растут и толкают вещество в сторону противоположных гранул, которые затем уменьшаются в размере и исчезают. Восходящее движение вещества увеличивает давление в центре гранулы и поднимающееся вещество замедляет свое движение. Этот процесс уменьшает перенос тепла к поверхности и вынуждает вещество выше гранулы охладиться, стать плотнее и под действием гравитации начать двигаться вниз. В результате наблюдается образование новых холодных слоев расщепляющих первоначальную гранулу.

На глубине 1 Мм от солнечной поверхности наблюдается появление признаков крупных ячеек размером мезогрануляции (рис. 3.2 b). С увеличением глубины размер больших ячеек растёт и их число соответственно уменьшается. На глубине 2-5 Мм средний размер ячеек составляет 10-15 Мм, в то время как он равен 15-20 Мм на глубинах больше чем 10 Мм (рис. 3.2 c,d,e,f). Вертикальное движение на краях конвективных ячеек имеет максимальную скорость и становится сверхзвуковым в углах ячеек на глубинах 3-4 Мм. На больших глубинах течение вещества замедляется и становится всё более ламинарным.

При взгляде на конвективное течение в вертикальной плоскости заметны три области, различающиеся физической природой и характером движения вещества (рис. 3.3, 3.4). В первой турбулентной зоне на глубинах 0-2 Мм мелкомасштабное хаотическое движение гранул, благодаря действию сильной сжимаемости вещества, приводит к образованию узких холодных струй вещества, двигающихся вниз расчетной области. Наиболее мощные струи формируются в местах с сильным вихревым движением, где вещество двигается с различных сторон в одну точку. Во второй переходной зоне простирающейся на глубинах 2-5 Мм существует конвективное движение на масштабе мезогрануляции. Здесь струи приобретают максимальную скорость, в среднем около 4 км/сек при числе Маха 1.5. Вещество движется вниз в форме узких струй, расстояние

между которыми определяет размер ячеек мезогрануляции, и вверх в широких областях ламинарного движения размером 10-15 Мм. В третьей, на больших глубинах, наблюдаются отдельные места где вещество достигает нижней границы с дозвуковой скоростью. Расстояния между этими точками дает размер конвективных ячеек на масштабе супергрануляции порядка 20-30 Мм.

Для нахождения крупномасштабных конвективных структур применяется процедура усреднения компонент скорости по временному интервалу 4 солнечных часа в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Кроме того в начальный момент времени однородно размещались по всей вычислительной области большое количество пассивных Лагранжевых частиц. После 4 солнечных часов моделирования определялись места с максимальным числом частиц. Из рис. 3.5 ясно видны крупномасштабные расходящиеся течения из центров больших конвективных ячеек, которые направляют частицы к краям ячеек. Частицы располагаются в местах сходимости течения (рис. 3.5) где имеются положительные значения двумерной дивергенции скорости и в точках с сильным вихревым движением где присутствуют большие отрицательные значения ротора скорости. Как видно из рис. 3.6 в области существуют большие конвективные ячейки с размером ячеек супергрануляции около 20-30 Мм в диаметре. Вещество двигается радиально из центра ячеек супергрануляции со средней скоростью 1-1.5 км/сек.

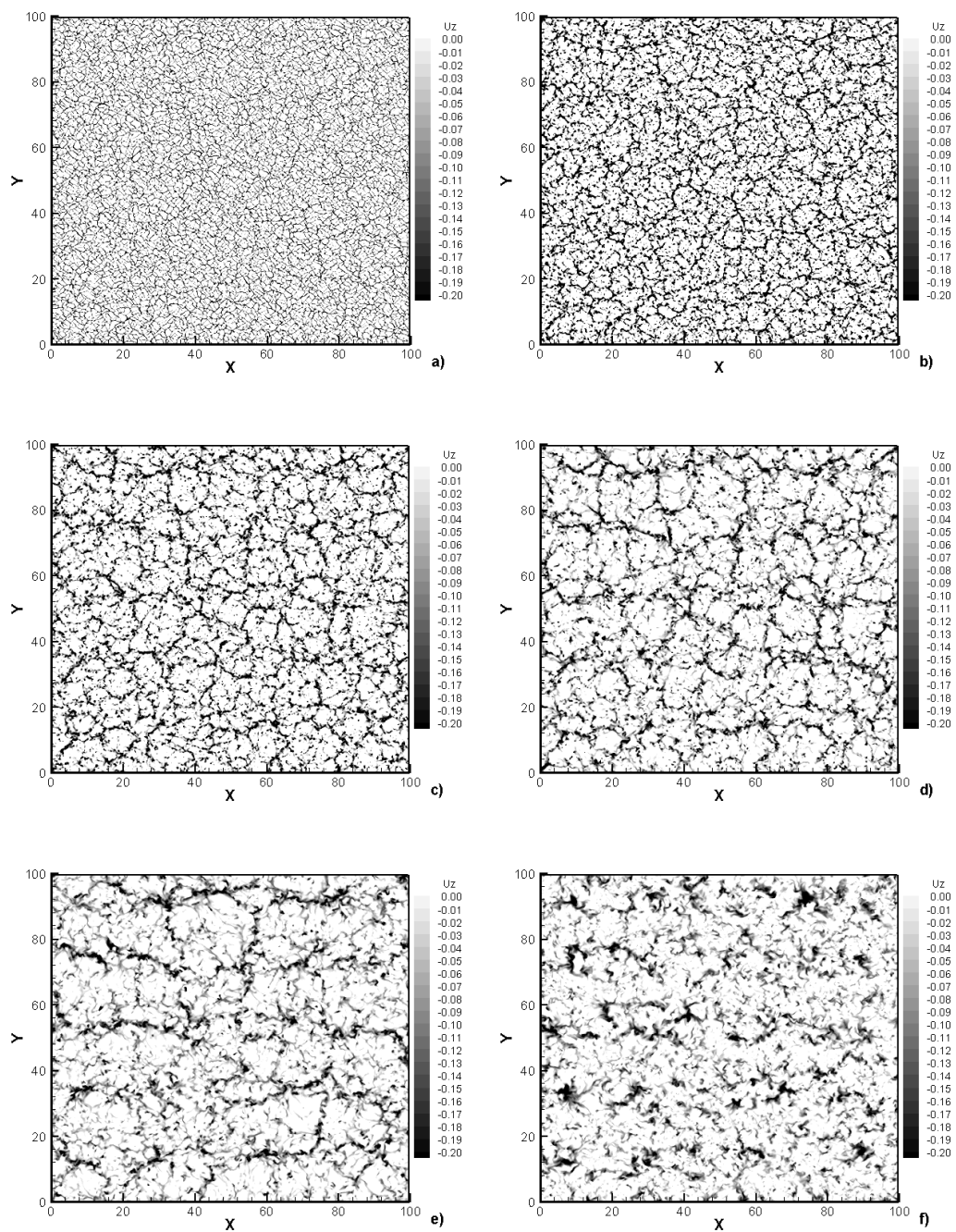


Рис. 3.2. Контуры вертикальной компоненты скорости (в единицах скорости звука) на глубинах 0 (a), 1 (b), 2 (c), 3 (d) 5 (e), 10 (f) Мм. Единицы измерения на осях X и Y в Мм.

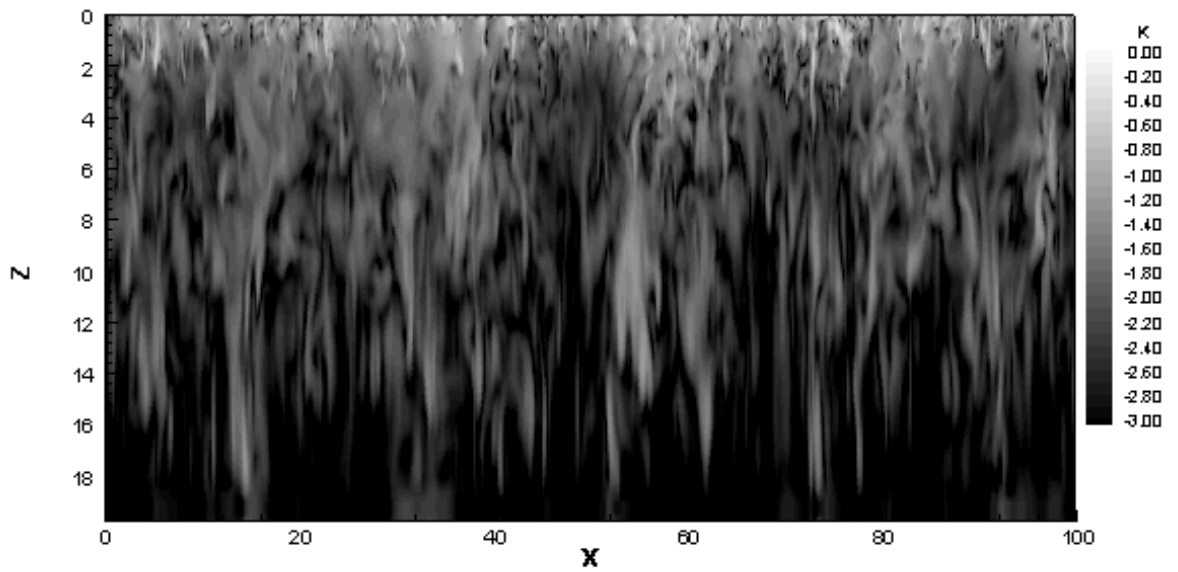


Рис. 3.3. Контуры десятичного логарифма кинетической энергии в вертикальной плоскости. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.

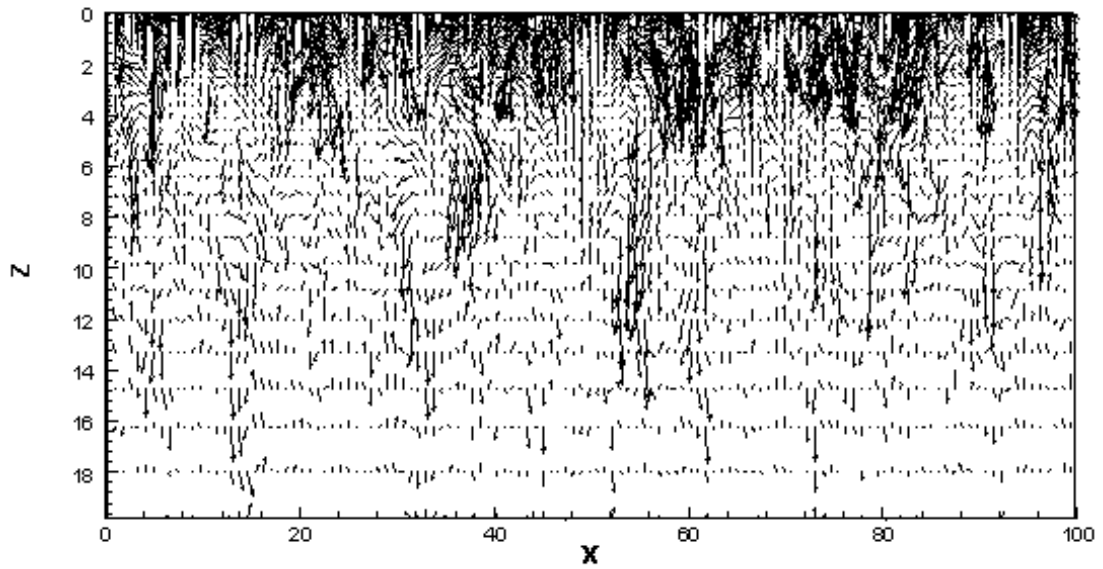


Рис. 3.4. Распределение поля скоростей в вертикальной плоскости. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.

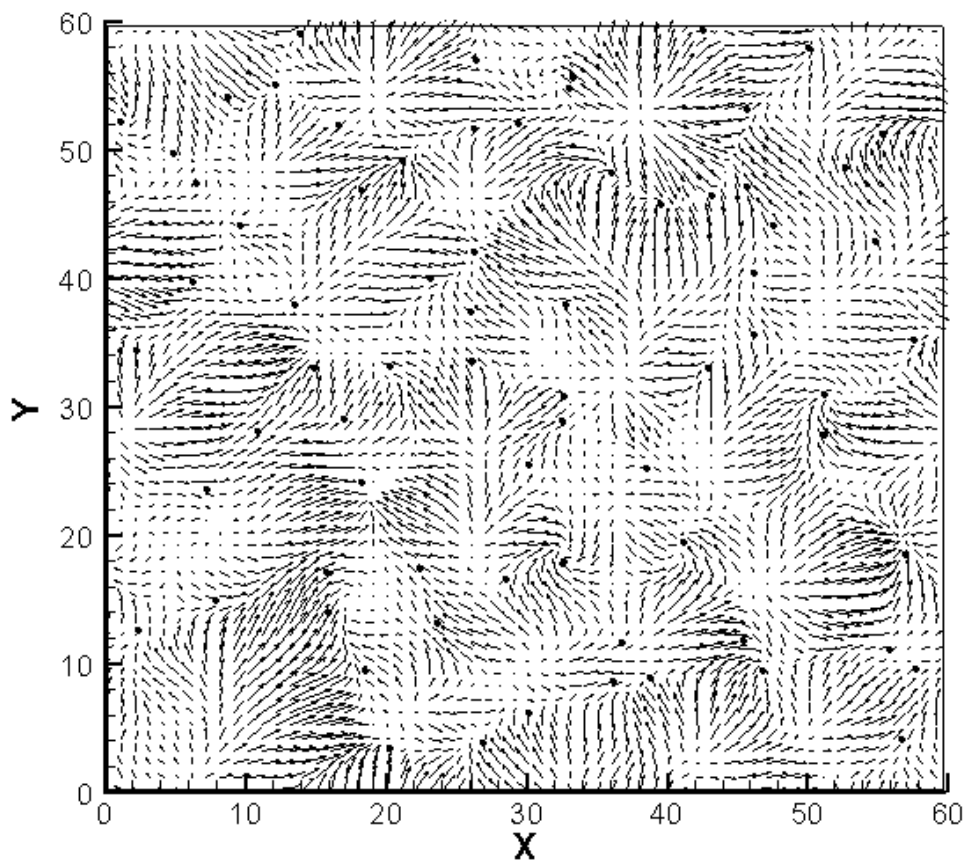


Рис. 3.5. Поле скоростей и расположение лагранжевых частиц. Единицы измерения на осях X и Y в Мм.

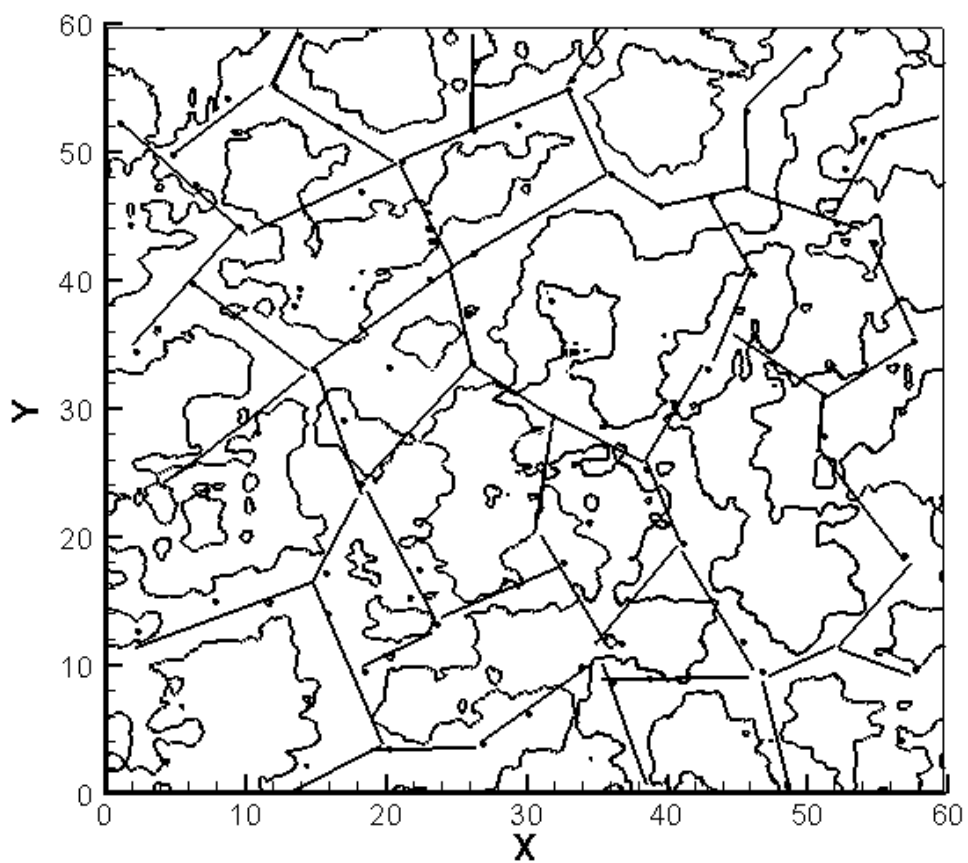


Рис. 3.6. Нуль контуры двумерной дивергенции скорости и границы ячеек супергрануляции. Единицы измерения на осях X и Y в Мм.



### 3.3 МГД моделирование солнечной конвекции

Проведено моделирование развития солнечной конвекции на масштабе супергрануляции в трехмерной вычислительной области с наложенным однородным слабым магнитным полем. Магнитное поле может менять пространственную структуру и темп развития конвекции, ограничивать рост конвективных мод на различных масштабах от грануляции до супергрануляции. В областях сильной концентрации магнитного поля, как например в солнечных пятнах, конвекция может быть полностью подавлена. Начальные условия, основные элементы физико-математической модели и численная схема следует гидродинамическому моделированию, описанному в предыдущем разделе. Отметим изменения в общей схеме исследования, связанные с включением магнитного поля.

Во-первых решались уравнения сжимаемой неидеальной магнитогидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \vec{v} \vec{v} + \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) I - \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{4\pi} \right] = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \hat{\tau} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \vec{v} \left( E + P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\vec{B} (\vec{v} \cdot \vec{B})}{4\pi} \right] = \\ & = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{B} \times \eta \nabla \times \vec{B}) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \hat{\tau}) + \rho (\vec{g} \cdot \vec{v}) + Q_{rad} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \vec{B} - \vec{B} \vec{v}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) \quad (3.18)$$

где  $\rho$  есть плотность,  $P$  - давление,  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $\vec{B}$  - вектор магнитного поля,  $\vec{g}$  - гравитация,  $E = e + \rho v^2/2 + B^2/8\pi$  - полная энергия,  $Q_{rad}$  - энергия излучения и  $\tau$  - вязкий тензор напряжений.

Во-вторых добавлялись граничные условия на компоненты магнитного поля в следующем виде

$$B_x = B_y = 0, dB_z/dz = 0$$

В третьих для сохранения дивергенции магнитного поля равной нулю применялся метод ограниченного переноса [72], в основе которого лежит теорема Стокса об изменении магнитного поля вследствие циркуляции электрического поля и дуализм между компонентами потоков дивергентной системы МГД и компонентами электрического поля. Ввиду увеличения размерности основных массивов консервативных переменных все расчеты проводились на 512 процессорах суперкомпьютера МВС-1000к с разделенной памятью мультипроцессоров в вычислительном центре Российской Академии наук.

В начале моделирования накладывалось однородное вертикальное магнитное поле силой 50 G. Величина магнитной диффузии равнялась постоянному значению  $\eta = 1.1 \times 10^{11} \text{см}^2 \text{сек}^{-1}$ . Все вычисления проводились в области размером  $60 \times 60 \times 20 \text{ Mm}$  на сетке  $600 \times 600 \times 204$  ячеек в течении 48 солнечных часов [146]. На рисунках 3.7, 3.8, 3.9 представлены результаты МГД моделирования конвекции в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Найдено что магнитное поле концентрируется в расширенных областях, подобно солнечным пятнам, с диаметром около 5 Mm и в тонких вертикальных слоях на границе ячеек супергрануляции. В протяженных областях найдено увеличение силы магнитного поля до значений 700-800 Гаусс, уменьшение температуры на несколько тысяч градусов кельвинов, падение вертикальной компоненты скорости в среднем до значений 0.05 км/сек и как результат в этих местах наблюдается полное отсутствие конвекции. Магнитное давление препятствует втеканию вещества снаружи солнечного пятна и таким образом перенос радиационной энергии здесь подавлен. Внутри ячейки супер-

грануляции значение вертикальной компоненты магнитного поля очень мало около 1 Гаусса и меньше. Расходящиеся конвективные течения из центра ячейки супергрануляции выталкивают слабое магнитное поле к краям конвективной ячейки. Средний размер ячеек супергрануляции составляет 20-30 Мм. Вещество двигается из центра супергранулы со скоростью около 1-1.5 км/сек. Максимально найденное значение магнитного поля в вычислительной области было равно 2000 Гаусс.

Внутри супергранулы наблюдается обычная картина эволюции конвекции на масштабах грануляции со средним размером ячеек 1.5 Мм и временем жизни порядка 1-2 Мин. На рисунке 3.10 показана развитие турбулентной конвекции на глубинах 0-4 Мм. Холодные куски вещества двигаются вниз в виде струй с максимальной скоростью около 4 км/сек и числом Маха  $M=0.6$ . Струи имеют различную и очень сложную вертикальную структуру. Одна часть струй проходит малое расстояние от поверхности, замедляется и затем разрушается окружающим движением вещества. Другая часть струй сохраняет движение с высокой скоростью и двигается на расстояние примерно 6 Мм. Различная природа такого поведения кроется в начальных условиях образования струй. В местах на солнечной поверхности где вещество двигается с разных сторон в одну точку имеется мощное вихревое движение вещества. Благодаря сильной сжимаемости вещества здесь происходит быстрый отток внутренней энергии и образуются струи с максимальным значением скорости.

На глубинах от 5 до 8 Мм конвективное движение вещества более спокойное, чем в турбулентной зоне. Ниже 8 Мм отчетливо видны отдельные крупномасштабные флуктуации плотности и направленные вниз течения вещества, подобные струям, с максимальной средней скоростью равной 1 км/сек. В этих местах магнитное поле имеет значение около 300 Гауссов. Кроме того на глубинах больше 10 Мм имеются области локализации огромной магнитной энергии соответствующие значениям магнитного поля в диапазоне от 800 до 1000 Гаусс (рис. 3.11). Размеры областей

с сильной концентрацией магнитного поля на их границе сравнимы с масштабом локальных ячеек супергрануляции. Конвективное движение в различных частях солнечной фотосферы приводит к непрерывному изменению топологии магнитного поля. Внутри ячеек супергрануляции имеется множество всплывающих петель силовых линий магнитного поля с большими отрицательными значениями вертикальной компоненты магнитного поля. В углах ячеек супергрануляции с наличием мощного вихревого движения наблюдается высокая скорость переноса магнитной спиральности  $H = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} d^3\mathbf{x}$  поперек солнечной фотосферы (рис. 3.12, 3.13). На границе супергранулы магнитное поле имеет только одну вертикальную компоненту. В этих местах имеется быстрое изменение знака и большие значения токовой спиральности  $H_c = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$  (рис. 3.14).

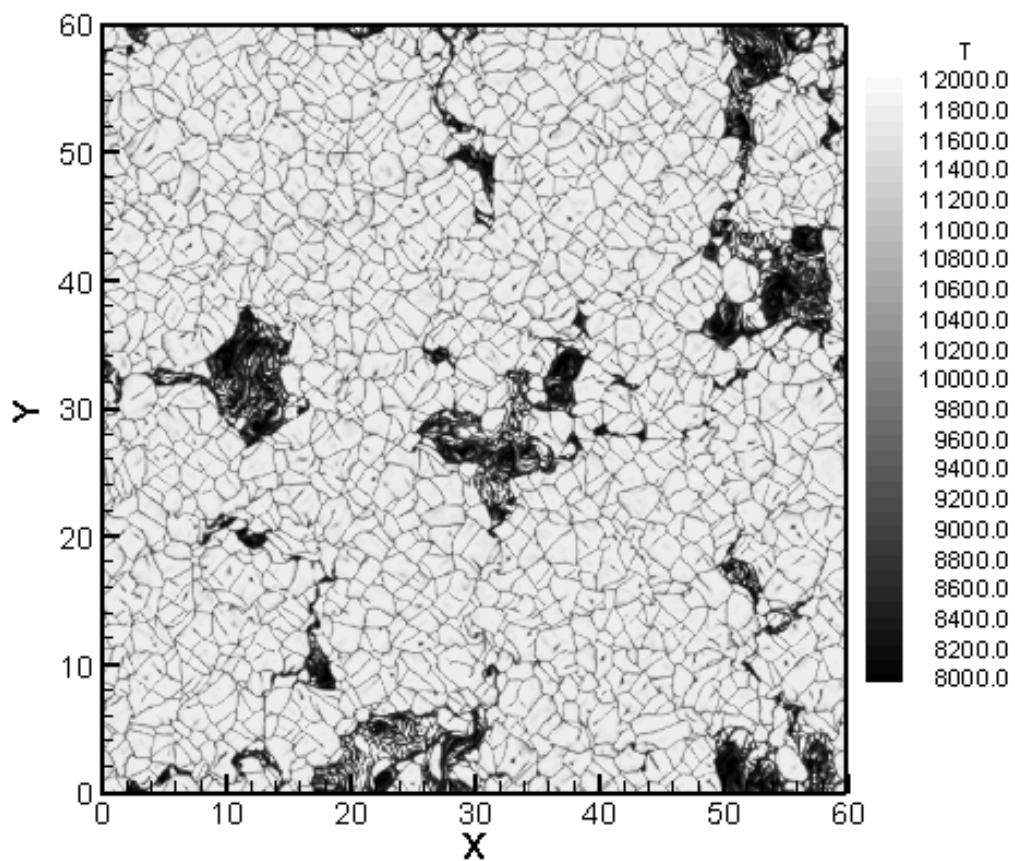


Рис. 3.7. Изображены контуры температуры в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Значения температуры даны в Кельвинах. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.

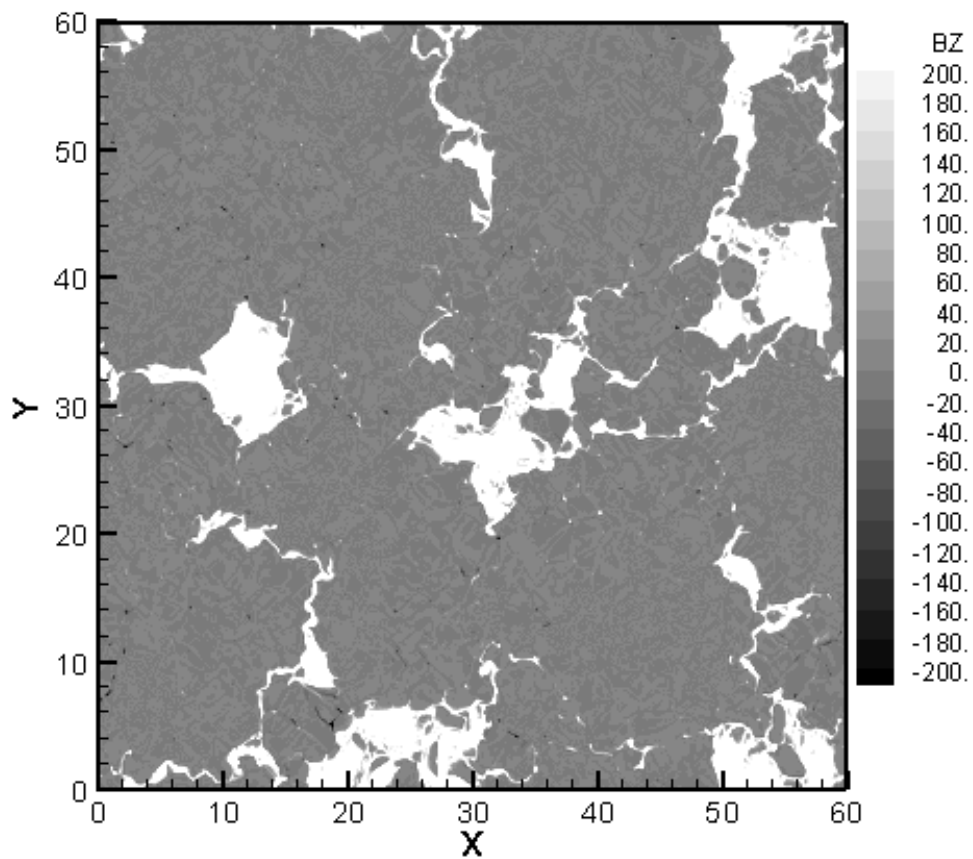


Рис. 3.8. Изображены контуры вертикальной компоненты магнитного поля в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Значения магнитного поля даны в Гауссах. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.

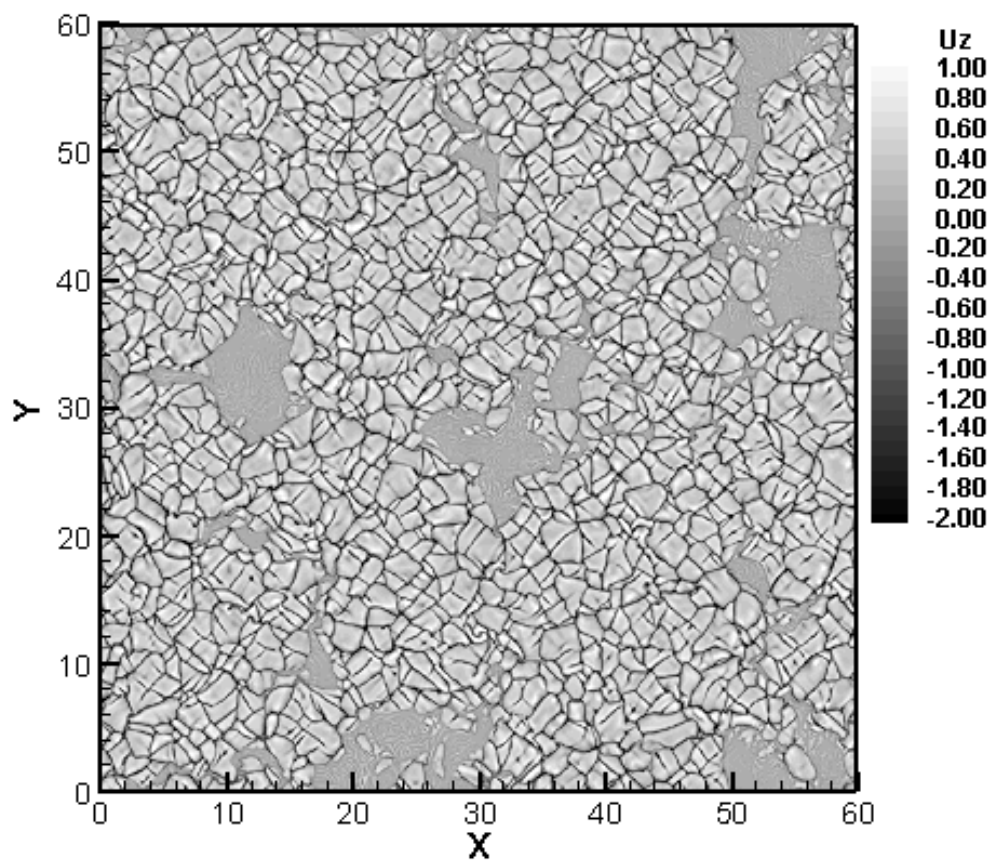


Рис. 3.9. Изображены контуры вертикальной компоненты скорости в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Значения скорости даны в км/сек. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.

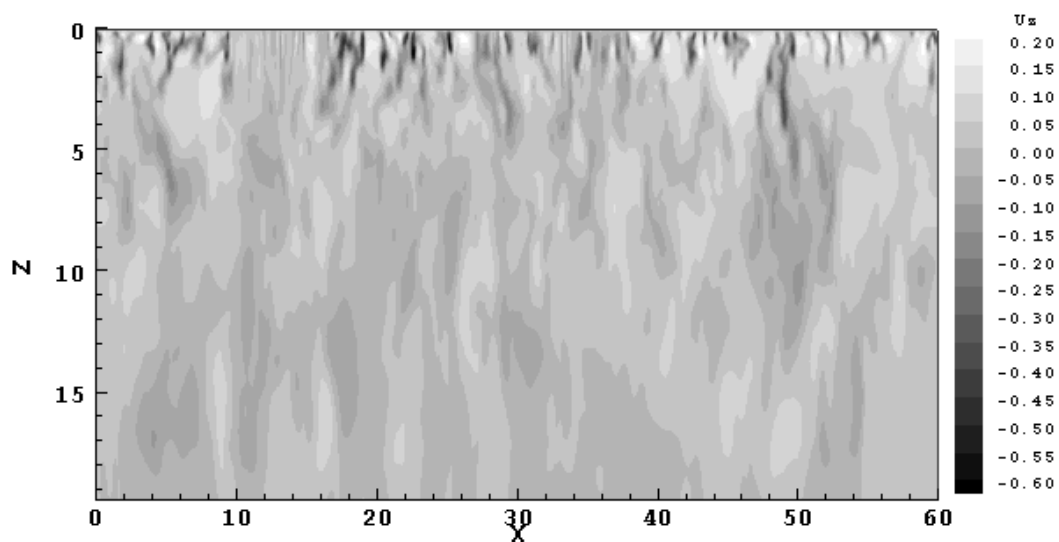


Рис. 3.10. Изображены контуры вертикальной компоненты скорости в вертикальной плоскости. Значения скорости нормированы на величину скорости звука. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.

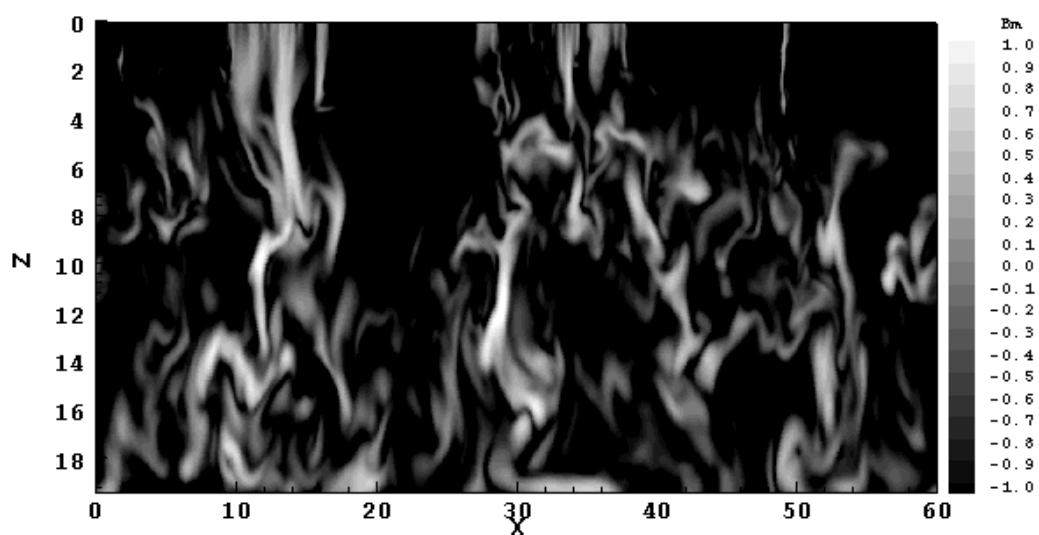


Рис. 3.11. Изображены контуры магнитной энергии (в безразмерных единицах) в вертикальной плоскости. Единицы измерения на осях  $X$  и  $Y$  в Мм.



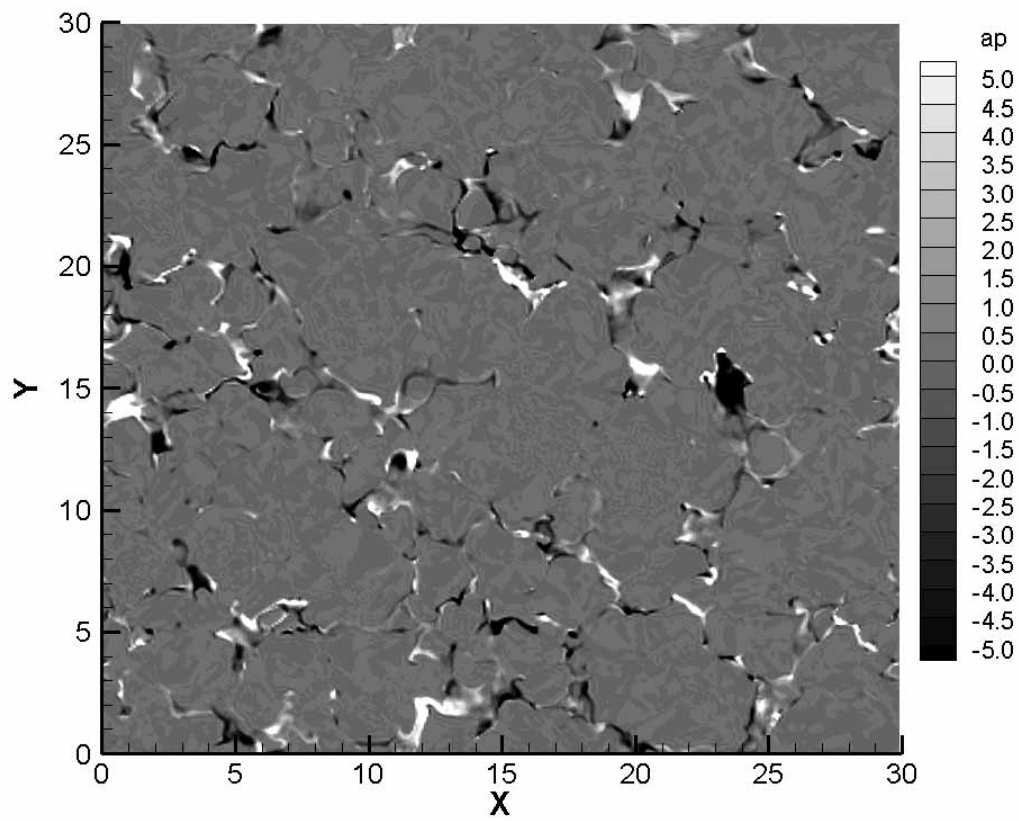


Рис. 3.12. Изображены контуры скорости переноса магнитной спиральности  $H = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{x}$  (в безразмерных единицах) в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Единицы измерения на осях X и Y в Мм.

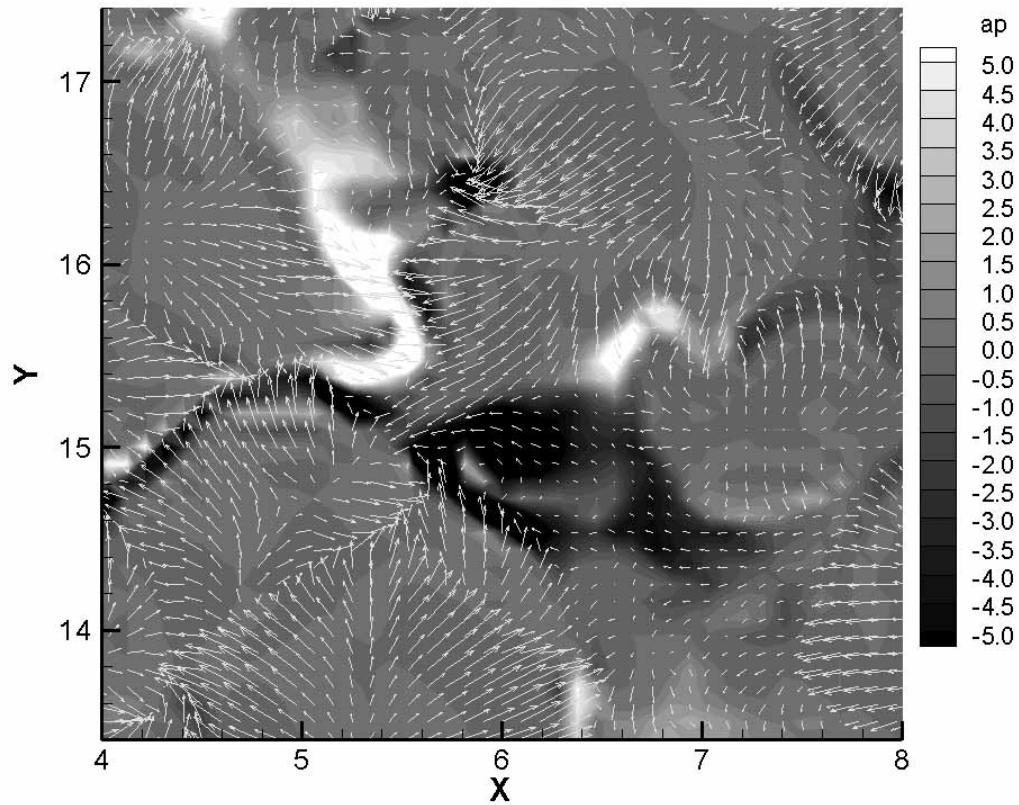


Рис. 3.13. Изображены контуры скорости переноса магнитной спиральности  $H = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} d^3\mathbf{x}$  (в безразмерных единицах) и вертикальной компоненты скорости в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности в небольшой части вычислительной области. Единицы измерения на осях X и Y в Мм.

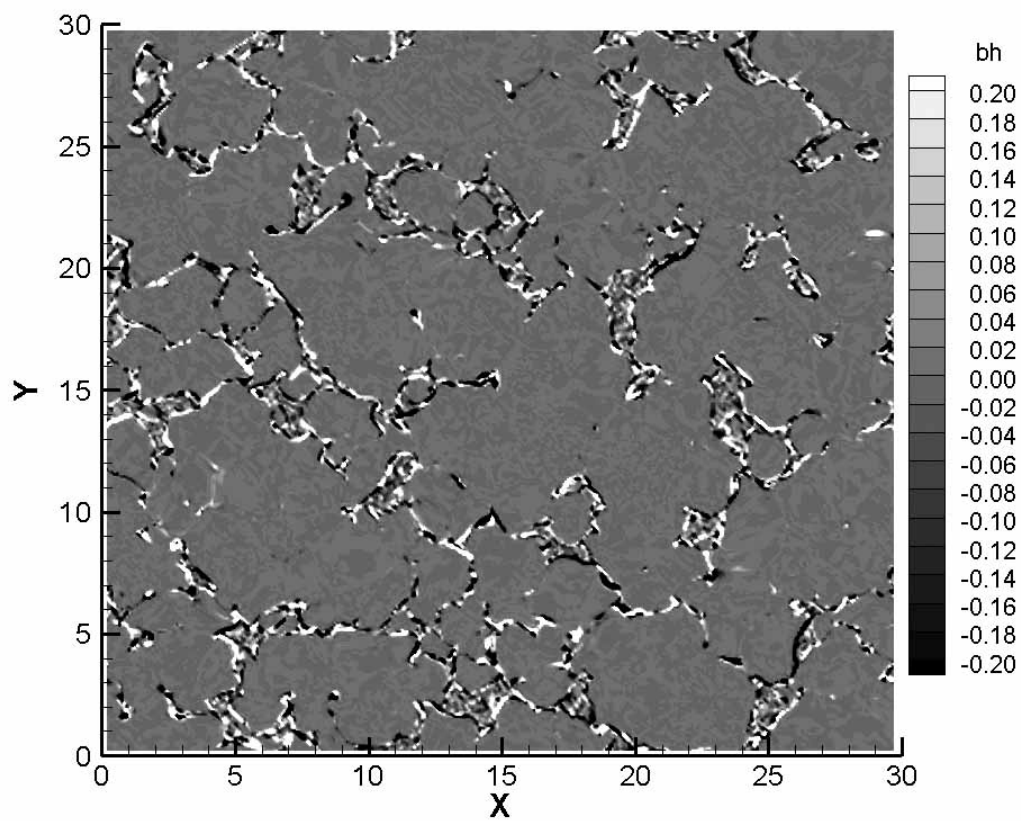


Рис. 3.14. Изображены контуры токовой спиральности  $H_c = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  (в безразмерных единицах) в горизонтальной плоскости вблизи солнечной поверхности. Единицы измерения на осях X и Y в Мм.

### 3.4 Гелиосейсмическая инверсия трехмерных полей.

Приповерхностные слои Солнца являются оптически толстыми, что не оставляет возможности прямого наблюдения внутренних слоев. Понимание свойств плазмы в этих областях имеет большое значение для теории солнечной конвекции, устойчивости солнечных пятен, динамики стратифицированной конвекции и др. Большая часть знания о конвекции приходит первоначально из численного моделирования. Гелиосейсмическая инверсия приповерхностных течений играет важную роль в ограничении теории турбулентной конвекции. Мощным средством для получения информации о внутренних слоях Солнца является исследование статистик акустических и поверхностных гравитационных волн на поверхности. Акустические и гравитационные моды колебаний создаются случайно мощной турбулентной конвекцией в верхней части конвективной зоны. Эти колебания наблюдаются в солнечной фотосфере по измерению Доплеровского сдвига фотосферных линий поглощения. Прямое моделирование позволяет соотносить аномалии (подобно течениям, тепловым горячим/холодным участкам и т.д.) с изменениями в гелиосейсмических переменных. Согласно методам пространственно-временной гелиосейсмологии информация о внутренних движениях вещества содержится в величине времени распространения волн между двумя любыми точками на поверхности Солнца, которая может быть определена из кросс-корреляционного анализа наблюдаемых сигналов. Имея большое множество измерений такой величины и решая обратную задачу можно получить структуру приповерхностных течений (вращение, меридиональная циркуляция, конвекция), магнитного поля и измерить отклонения в физических величинах плазмы (температура, плотность, давление) от средних значений для покоящегося Солнца.

Для построения величины времени распространения сигнала используются результаты гидродинамического моделирования [45] солнечной

конвекции. Вычислительная область представляет собой прямоугольный параллелепипед глубиной 20 Мм и шириной 60 Мм в каждом координатном направлении. Моделирование дает реалистичное описание течений в верхней конвективной зоне  $\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ . Из результатов расчета конвекции берутся данные для момента времени  $t = 500$  мин (см. рис. 3.15). Следуя работе [147], рассматриваются различные способы измерения времени распространения сигнала между точкой на поверхности в положении  $\mathbf{r}$  и точками в концентрической кольце или квадрате. Карты времени распространения обозначены как  $\tau^a(\mathbf{r})$ , где символ  $a$  есть целое число, которое уникально определяет отдельную комбинацию вариантов анализа данных: тип геометрии (oi, we, or ps), радиус кольца (от 7.3 Мм до 29.2 Мм каждый 1.46 Мм), и тип фильтра для волн (здесь, фильтр для  $f$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , или  $p_4$  мод).

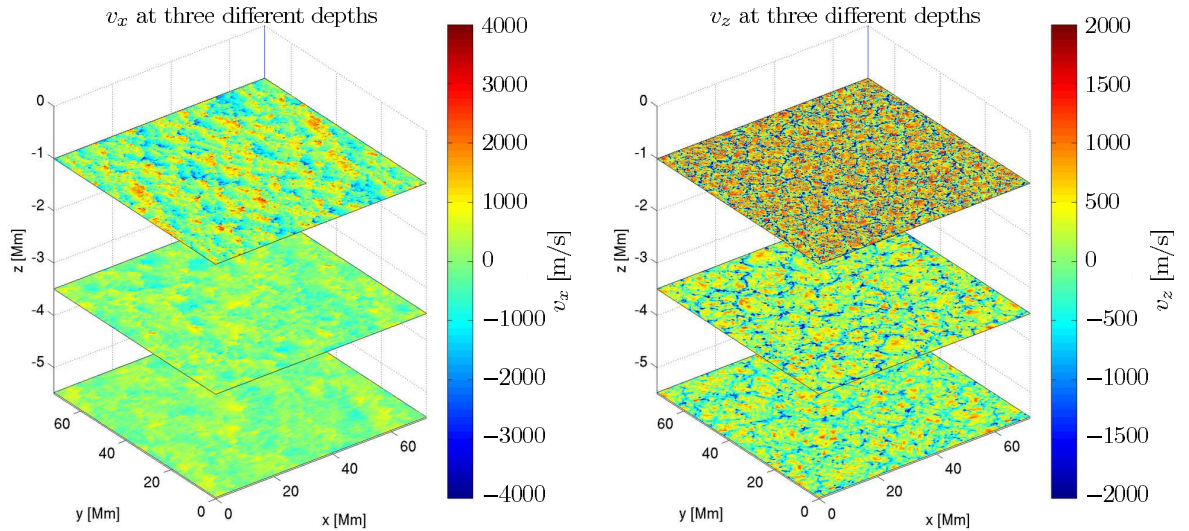


Рис. 3.15. Распределение  $x$  и  $z$  компонент скорости  $\nu$  в трех плоскостях на глубинах 1 Мм, 3.5 Мм и 5.5 Мм.

Карты времени распространения созданы сверткой поля скоростей с ядром оператора следующим образом

$$\tau^a(\mathbf{r}) = \int_{\odot} \mathbf{K}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}', z) d^2\mathbf{r}' dz + n^a(\mathbf{r}) , \quad (3.19)$$

где  $\mathbf{r}^a = (K_x^a, K_y^a, K_z^a)$  - вектор ядра оператора,  $\mathbf{v}$  - вектор скорости, объёмный интеграл взят по всему Солнцу. Компонента шума обозначена как  $n^a$ . Оригинальный размер области 60 Mm был слишком мал для построения карты. Поскольку скорость есть периодическая величина в горизонтальной плоскости, результаты моделирования были скопированы  $10 \times 10$  раз. Ядра вычислены в приближении Борна [148] и зависят от собственных значений распределения величин в одномерной стандартной солнечной модели [149]. Волны на Солнце возбуждены действием турбулентной конвекции и поэтому величина времени распространения сигнала содержит случайную компоненту. Следуя работе [150], реалистичная случайная матрица ковариации

$$\Lambda_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = E[n^a(\mathbf{r})n^b(\mathbf{r}')], \quad (3.20)$$

создает реализацию случайной компоненты.

Каждая карта времени распространения сигнала имеет  $400 \times 400$  пикселей с пространственным периодом 1.46 Mm, соответствующая к размеру пиксела Michelson-Doppler-Imager изображения диска Солнца [151]. Всего создано 240 различных карт времени распространения сигнала. Эти карты имеют пространственный спектр мощности подобный к спектрам MDI данных полученных из наблюдений (см. рис. 3.17). Однако, построенные карты имеют более слабую мощность при низких волновых числах, вследствие отсутствия данных для скоростей конвекции ниже  $k R_\odot = 60$ .

Карты времени распространения сигнала затем инвертированы при помощи многоканальной SOLA инверсии [152] и сравнены с реальными течениями. Это приближение позволяет исследовать различные типы ошибок в результатах инверсии и разработать робастную процедуру, чтобы их минимизировать. Наиболее серьезные ошибки связаны с корреляцией среди компонент скорости потока вызванной сохранением массы. Использование значений скорости, полученных из реалистичных числен-

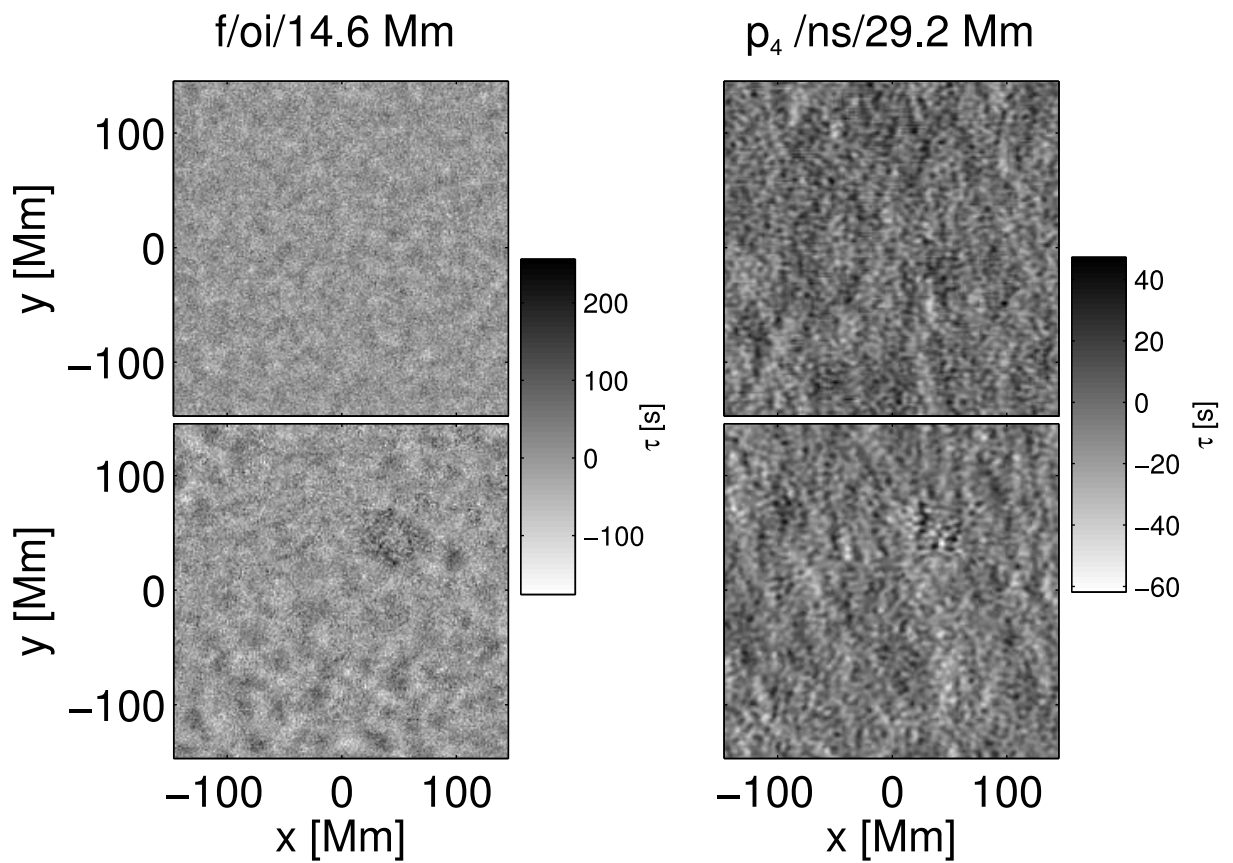


Рис. 3.16. Синтетическая карта времени распространения сигналов (верхний ряд) и аналогичная карта из SOHO/MDI данных (нижний ряд). Интервал времени наблюдения  $T = 6$  часов.

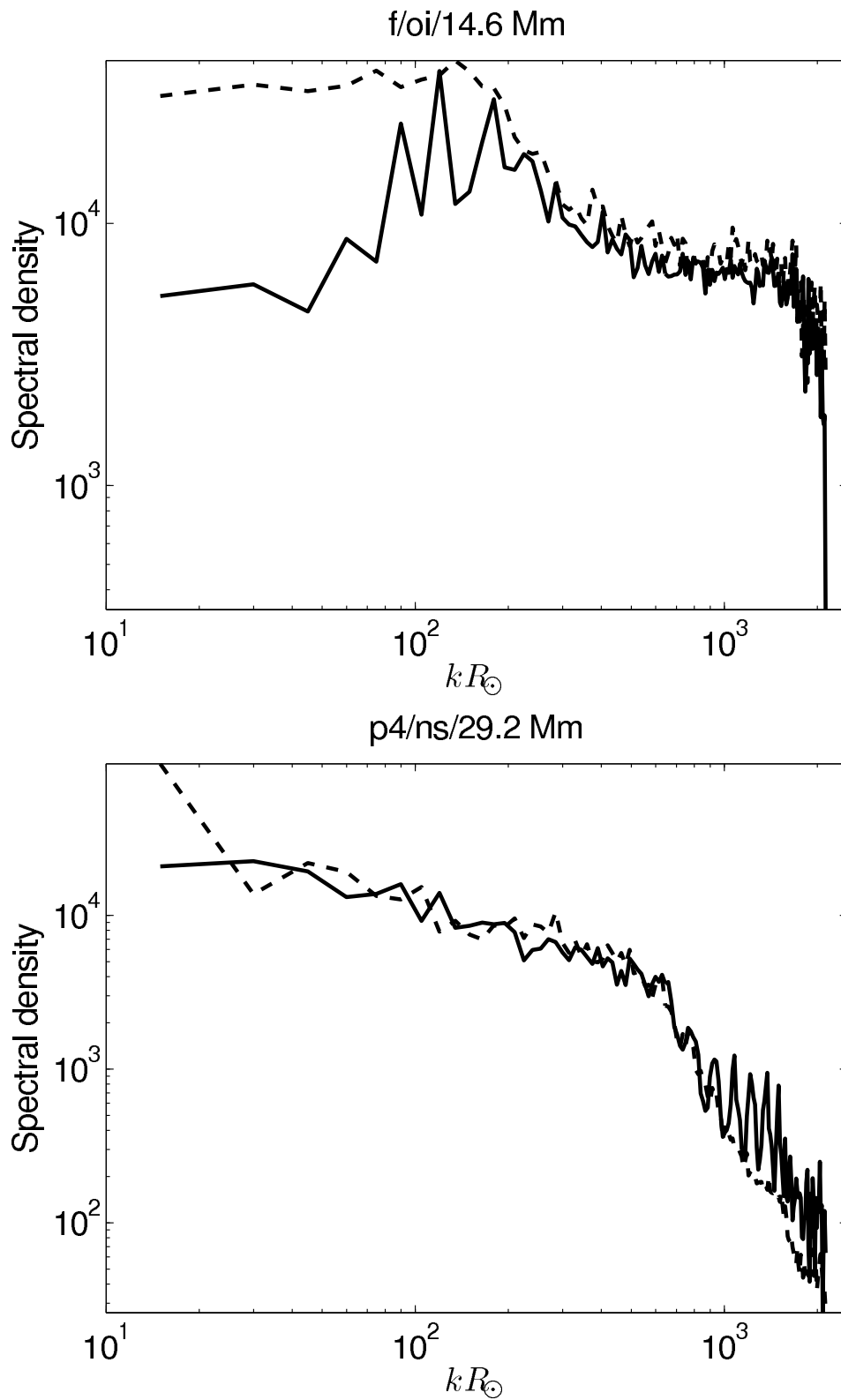


Рис. 3.17. Сравнение азимутально усредненных пространственных спектров  $|\bar{\tau}^a(k)|^2$  синтетического (сплошная линия) и наблюдаемого (штриховая линия) времени распространения изображенных на рис. 3.16 как функции  $kR_{\odot}$ , где  $k$  горизонтальное волновое число и  $R_{\odot}$  - радиус Солнца.



ных моделирований конвекции как входных данных, позволяет установить допустимый уровень случайного шума инвертированных значений скорости потока. Разработанная методика применялась к известным синтетическим картам времени распространения для того чтобы проверить начальные данные и качество процедуры инверсии. Проведен анализ горизонтальных компонент скорости  $\alpha = x$  или  $\alpha = y$ . Проведено сравнение двух основных величин: (1) карта скорости, которая получена свёрткой известного поля скорости с целевой функцией ( $v_\alpha^{tgt}$ ), т.е., наилучший сценарий инверсии, и (2) карта скорости, прямо полученная из инверсии ( $v_\alpha^{inv}$ ). Таким образом можно исследовать в деталях различные источники ошибок в результатах. Качество  $v_x$  инверсии показано на рис. 3.18. На этом рисунке изображена  $v_x^{tgt}$  на трёх различных глубинах и  $v_x^{inv}$  без вклада шума. Эти две величины очень близки на глубинах 1 и 3.5 Мм. Разница между величиной  $v_x^{tgt}$  и  $v_x^{inv}$  на глубине 5.5 Мм вызвана применением неидеального усредненного ядра. Когда случайный шум добавлен к решению (нижний ряд рис. 3.18), видно что инверсии для  $v_x$  на глубине 1 Мм и 3.5 Мм все еще выглядят хорошо, в то время как инвертированные значения  $v_x$  на глубине 5.5 Мм сильно подвержены влиянию шума. Минимизация поперечных корреляций не улучшает качество решения в этом случае.

При рассмотрении усредненных по частоте от  $f$  до  $p_4$  мод и пространственных масштабов супергрануляции возможно применить надежные и заслуживающие доверия карты инверсия течения, усредненные по нескольким дням, начиная с глубины 3.5 Мм конвективной зоны вверх для горизонтальных  $v_x$  и  $v_y$  компонент, и с глубины 1 Мм вверх для вертикальной  $v_z$  компоненты. Исходя из эксперимента, показано, что при использовании карт времени распространения сигнала, усредненных по интервалу времени 4 дня возможно измерить трехмерные скорости величиной не менее 10 м/сек на поверхности Солнца и горизонтальные скорости имеющие амплитуду 20 м/сек на глубине 5 Мм. Оценки показывают,

что карты времени распространения сигнала, усредненные по интервалу времени 1 день, дают возможность измерить все компоненты скорости течения на масштабе супергрануляции на поверхности и горизонтальные компоненты до глубин 5 Мм. Минимизация поперечных корреляций является решающей для измерения корректных значений вертикальной скорости.

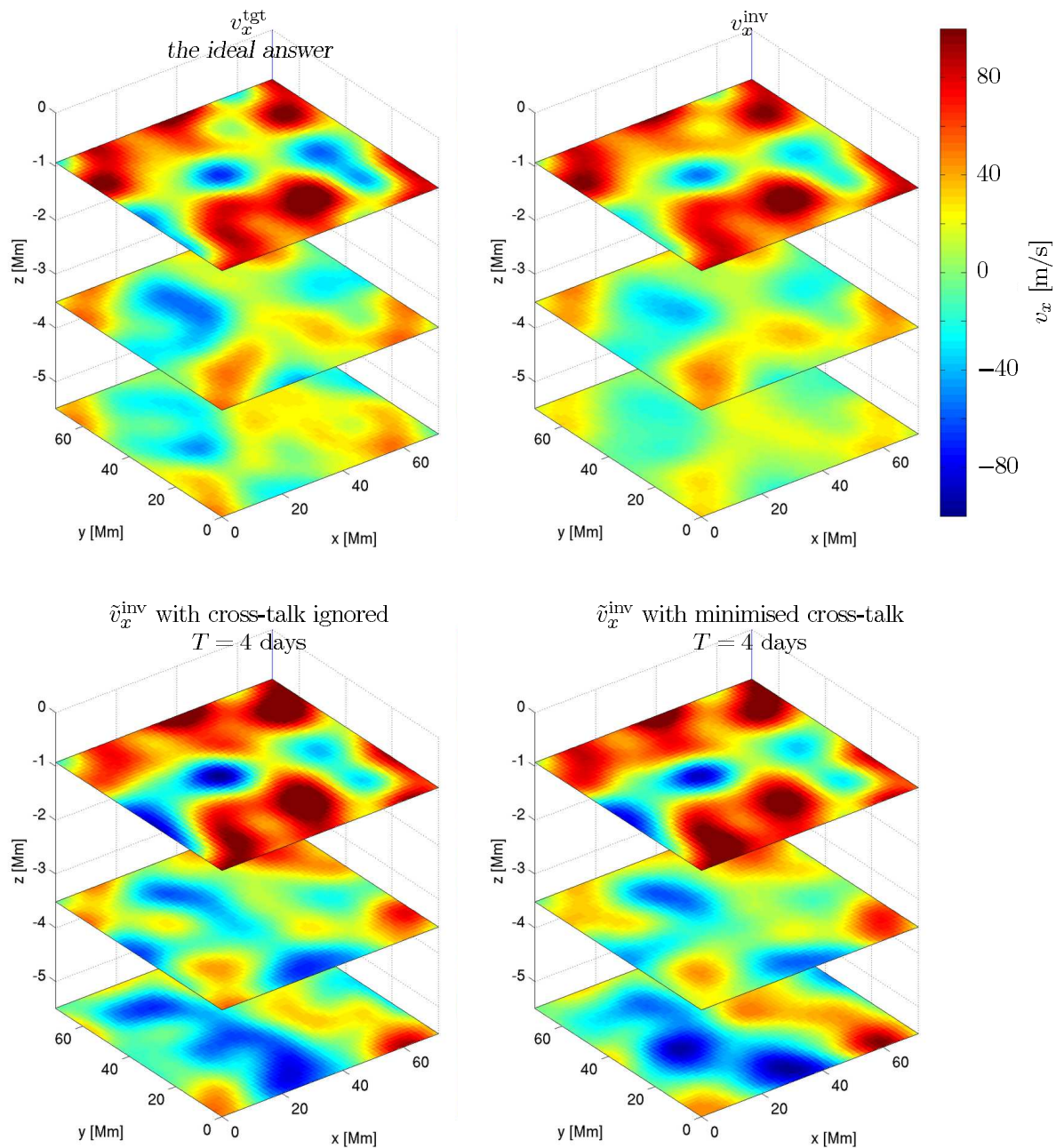


Рис. 3.18. Сравнение инвертированных  $v_x$  с входными данными. Верхний ряд показывает входные данные свернутые с целевой функцией и усредненным ядром соответственно. Нижний ряд показывает результаты инверсии в случае когда поперечные корреляции игнорированы (слева) и минимизированы (справа).

### 3.5 Выводы по главе 3.

Проведено трехмерное численное моделирование методом крупных вихрей локальной солнечной супергрануляции на основе реалистичной физической модели конвекции. Представлена трехмерная численная модель эволюции конвекции на масштабе супергрануляции, учитывающая подсеточные модели турбулентности, реалистичное уравнение состояния звездного вещества, начальное распределение физических величин согласно стандартной солнечной модели, действие гравитации, переноса радиационного излучения. Показано, что с увеличением глубины размер конвективных ячеек растёт и их число соответственно уменьшается. Средний размер крупномасштабных конвективных ячеек, найденный в моделировании, равен 20-30 Мм в диаметре и соответствует наблюдаемым размерам ячеек супергрануляции. Проведено моделирование развития солнечной конвекции на масштабе супергрануляции в трехмерной вычислительной области с наложением однородного слабого магнитного поля. Найдено, что магнитное поле концентрируется в расширенных областях, подобно солнечным пятнам, с диаметром около 5 Мм и в тонких вертикальных слоях по краям ячеек супергрануляции. Внутри расширенных областей с концентрацией магнитного поля наблюдается полное отсутствие конвекции при уменьшении температуры на несколько тысяч градусов кельвинов и падении вертикальной компоненты скорости в среднем до значений 0.05 км/сек. Представлена методика построения временных карт распространения сигнала с использованием методов гелиосейсмологии и результатов гидродинамического моделирования солнечной конвекции. Показано, что при использовании временных карт распространения сигнала, усредненных по интервалу времени 4 дня возможно измерить трехмерные скорости течения вещества величиной не менее 10 м/сек на поверхности Солнца и горизонтальные скорости, имеющие амплитуду 20 м/сек на глубине 5 Мм.

## Заключение

С получением в последнее время мощных вычислительных возможностей и беспрецедентных наземных и космических наблюдений с высоким разрешением стало возможным осуществить большой прогресс в исследовании сжимаемой турбулентности при образовании звезд и в решении проблемы развития конвекции на масштабе супергрануляции. В диссертации разработан устойчивый численный метод PRML высокого порядка для моделирования сверхзвуковой турбулентности в молекулярных облаках, обладающий низкой численной диссипацией, отличным представлением разрывных решений и широким инерционным интервалом в спектре мощности основных физических характеристик. В результате численного эксперимента по моделированию изотермической сверхзвуковой МГД турбулентности найдено, что метод PRML в совокупности лучше других популярных методов отражает спектральные характеристики сверхзвуковой турбулентности. Из анализа основных спектральных характеристик и законов подобия для сжимаемой изотермической МГД турбулентности, полученных в ходе трехмерного численного моделирования найдено, что образование ядер звёзд происходит в сверхальвовеновском режиме, скорость переноса энергии постоянна в инерционном интервале, закон  $4/3$  для несжимаемой МГД может быть перенесен на сверхзвуковые турбулентные течения. Предложена новая теоретическая модель межзвездной среды, подвергающейся нелинейным взаимодействиям и самоорганизации в галактических дисках. Проведено численное моделирование турбулентности, в которых учитывается искусственная крупномасштабная соленоидальная сила имитирующая перенос кинетической энергии от различных галактических источников. Распределение давления, полученное в численном эксперименте для моделей с  $u_{\text{rms}} = 16$  км/сек, хорошо согласуется по форме и ширине с аналогичными распределениями, реконструированными из наблюдений [127]. Проведено трехмерное

численное МГД моделирование локальной солнечной конвекции на масштабе супергрануляции с реалистичной физикой. В расчетах получено, что характерные масштабы конвекции растут при движении вглубь от поверхности солнечной фотосферы, магнитное поле концентрируется по краям ячеек супергрануляции и в расширенных областях, где наблюдается подавление конвекции. Средний радиус крупномасштабных конвективных ячеек, обнаруженный в моделировании, соответствует наблюдаемым размерам ячеек супергрануляции.

# Литература

- [1] Scalo J., Vazquez-Semadeni E., Chappell D., and Passot T., *Astrophys. J.*, 1998, **504**, 835.
- [2] von Weizsäcker C.F., *Astrophys. J.*, 1951, **114**, 165.
- [3] Chandrasekhar S., *Royal Society of London Proceedings Series A*, 1951, **210**, 18.
- [4] Chandrasekhar S., *Royal Society of London Proceedings Series A*, 1951, **210**, 26.
- [5] Larson R.B., *MNRAS*, 1981, **194**, 809.
- [6] Bonazzola S., Perault M., Puget J.L., Heyvaerts J., Falgarone E., and Panis J.F., *J.Fluid.Mech.*, 1973, 1.
- [7] Panis J.F. and Pérault M., *Physics of Fluids*, 1998, **10**, 3111.
- [8] Federrath C., Duval J., Klessen R., Schmidt W., and Mac Low M.-M., *Astron. Astroph.*, 2010, **512**, A81.
- [9] Nakamura F. and Li Z.-Y., *Astrophys. J.*, 2007, **662**, 395.
- [10] Mac Low M. and Klessen R.S., *Reviews of Modern Physics*, 2004, **76**, 125.
- [11] Gritschneder M., Naab T., Burkert A., Walch S., Heitsch F., and Wetzstein M., *MNRAS*, 2009, **393**, 21.

- [12] Ballesteros-Paredes, J., Vázquez-Semadeni, E., and Kim, J., *Protostars and Planets V*, 2005, 8630.
- [13] Banerjee, R., Vázquez-Semadeni, E., Hennebelle, P., and Klessen, R.S., *MNRAS*, 2009, **398**, 1082.
- [14] Bergin E.A. and Tafalla M., *Annual Rev. Astronom. Astroph.*, 2007, **45**, 339.
- [15] Rieutord, M., Roudier, T., Malherbe, J.M., Rincon, F. *Astron. Astrophys.*, 2000, **357**, 1063.
- [16] Simon, G.W., Leighton, R.B. *Astrophys. J.*, 1964, **140**, 1120.
- [17] Ploner, S.R.O., Solanki, S.K., Gadun, A.S. *Astron. Astrophys.*, 2000, **356**, 1050.
- [18] Roudier, T., Lignières, F., Rieutord, M., Brandt, P.N., & Malherbe, J.M. *Astron. Astrophys.*, 2003, **409**, 299.
- [19] Crouch, A.D., Charbonneau, P., Thibault, K. *Astrophys. J. Lett.*, 2007, **662**, 715.
- [20] Meunier, N., Roudier, T., Tkaczuk, R. *Astron. Astroph.*, 2007, **466**, 1123.
- [21] Gizon, L., Duvall, T.L., Schou, J. *Nature*, 2003, **421**, 43.
- [22] Ishihara T., Gotoh T., Kaneda Y., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2009, **41**, 165.
- [23] Schekochihin A.A., Iskakov A.B., Cowley S.C., McWilliams J.C., Proctor M.R.E., Yousef T.A., *New Journal of Physics*, 2007, **9**, 300.
- [24] Graham E., *J. Fluid Mech.*, 1975, **70**, 689.
- [25] Lesur G., Longaretti P.-Y., *MNRAS*, 2007, **378**, 1471.
- [26] Fromang S., Papaloizou J., Lesur G., Heinemann T., *Astron. Astrophys.*, 2007, **476**, 1123.



- [27] Hartlep T., Tilgner A., Busse F.H., *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **91**, 064, 501.
- [28] Parodi A., von Hardenberg J., Passoni G., Provenzale A., Spiegel E.A., *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **92**, 503.
- [29] von Hardenberg J., Parodi A., Passoni G., Provenzale A., Spiegel E.A., *Phys. Lett. A*, 2008, **372**, 2223.
- [30] Cattaneo F., Lenz D., Weiss N., *Astrophys. J. Lett.*, 2001, **563**, L91.
- [31] Rieutord M., Ludwig H.-G., Roudier T., Nordlund A., Stein R., *Nuovo Cimento C*, 2002, **25**, 523.
- [32] Rincon F., Lignières F., Rieutord M., *Astron. Astrophys.*, 2005, **430**, L57.
- [33] Stein R.F., Lagerfjård A., Nordlund Å., et al. The Second Hinode Science Meeting: Beyond Discovery-Toward Understanding, 2009, **415**, 63.
- [34] Tao L., Weiss N.O., Brownjohn D.P., Proctor M.R.E., *Astrophys. J. Lett.*, 1998, **496**, L39.
- [35] Weiss N.O., Proctor M.R.E., Brownjohn D.P., *MNRAS*, 2002, **337**, 293.
- [36] Cattaneo F., *Astrophys. J. Lett.*, 1999, **515**, L39.
- [37] Emonet T., Cattaneo F., *Astrophys. J. Lett.*, 2001, **560**, L197.
- [38] Cattaneo F., Emonet T., Weiss N., *Astrophys. J.*, 2003, **588**, 1183.
- [39] Bushby P.J., Houghton S.M., *MNRAS*, 2005, **362**, 313.
- [40] Bushby P.J., Houghton S.M., Proctor M.R.E., Weiss N.O., *MNRAS*, 2008, **387**, 698.
- [41] Stein R.F., Nordlund Å., *Astrophys. J.*, 2006, **642**, 1246.
- [42] Vögler A., Schüssler M., *Astron. Astrophys.*, 2007, **465**, L43.

- [43] Ustyugov, S.D., *Numerical Modeling of Space Plasma Flows*, 2006, **359**, 226.
- [44] Ustyugov, S.D., *Fifty Years of Romanian Astrophysics*, 2007, **895**, 109.
- [45] Ustyugov, S.D., *Subsurface and Atmospheric Influences on Solar Activity*, 2008, **383**, 43.
- [46] Ustyugov S. D., *Solar-Stellar Dynamos as Revealed by Helio- and Asteroseismology: GONG 2008/SOHO 21*, 2009, **416**, 427.
- [47] Stein R.F., Lagerfjård, A., Nordlund, Å., Georgobiani D., *Solar Phys.*, 2011, **268**, 271.
- [48] Georgobiani D., Zhao J., Kosovichev A.G., Benson D., Stein R.F., Nordlund Å., *Astrophys. J.*, 2007, **657**, 1157.
- [49] Couvidat S., Birch A.C., *Solar Phys.*, 2009, **257**, 217.
- [50] Collela P., Woodward P., *J. Comp. Phys.*, 1984, **54**, 174.
- [51] van Leer B., *J. Comp. Phys.*, 1974, **14**, 361.
- [52] Guinot V., *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2004, **44**, 1119.
- [53] Галанин М.П., Еленина Т.Г., *Препринт ИПМ им.М.В. Келдыша РАН*, 1998, **52**, 33.
- [54] Галанин М.П., Еленина Т.Г., *Препринт ИПМ им.М.В. Келдыша РАН*, 1999, **40**, 42.
- [55] Yang H.Q., Przekwas A.J., *J. Comp. Phys.*, 1992, **102**, 139.
- [56] Roe P.L., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1986, **18**, 337.
- [57] Suresh A., Huynh H.T., *J. Comp. Phys.*, 1997, **136**, 83.
- [58] Sod G.A., *J. Comp. Phys.*, 1978, **27**, 1.

- [59] Lax P.D., *Commun. Pure Appl. Math.*, 1954, **7**, 159.
- [60] Shu C.-W., *J. Sci. Comp.*, 1990, **5**, 127.
- [61] Woodward P., Collela P., *J. Comp. Phys.*, 1984, **54**, 115.
- [62] Schulz-Rinne C.W., Collins J.P., Glaz H.M., *SIAM J. Sci. Comput.*, 1993, **14**, 1394.
- [63] Collela P., *J. Comp. Phys.*, 1990, **87**, 171.
- [64] Woodward P., Collela P., *J. Comp. Phys.*, 1984, **54**, 115.
- [65] Quirk J.J., *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 1994, **18**, 555.
- [66] Brio M., Wu C.C., *J. Comp. Phys.*, **75**, 1988, 400.
- [67] Roe P.L., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1986, **18**, 337.
- [68] Tóth G., *J. Comp. Phys.*, 2000, **161**, 605.
- [69] Gombosi T.I., Powell K.G., De Zeuw D.L., *J. Geophys. Res.*, 1994, **99**, 21, 525.
- [70] Brackbill J.U., Barnes D.C., *J. Comp. Phys.*, 1980, **35**, 426.
- [71] Evans C.R., Hawley J.F., *Astrophys. J.*, 1988, **332**, 659.
- [72] Balsara D.S., Spicer D.S., *J. Comp. Phys.*, 1999, **149**, 270.
- [73] Barth T.J. in *Computational Fluid Dynamics* (Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1990), Lecture Series 1990-04.
- [74] Balsara D.S., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2004, **151**, 149.
- [75] Jiang G.S., Wu C.C., *J. Comp. Phys.*, 1999, **150**, 561.
- [76] Han J., Tang H., *J. Comp. Phys.*, 2007, **220**, 791.
- [77] Orszag A., Tang C.M., *J. Fluid Mech.*, 1979, **90**, 129.

- [78] Rider W.J., Greenough J.A., Kamm J.R., *J. Comput. Phys.*, 2007, **225**, 1827.
- [79] Kritsuk A.G., Norman M.L., Padoan P., Wagner R., *Astrophys. J.*, 2007, **665**, 416.
- [80] Yee H.C., Sjögreen B., *J. Comput. Phys.*, 2007, **225**, 910.
- [81] Schekochihin A.A., Cowley S.C., in *Magnetohydrodynamics: Historical Evolution and Trends*, 2007, 85.
- [82] McKee C.F., Ostriker E.C., *Annual Rev. of Astron. Astrophys.*, 2007, **45**, 565.
- [83] Hennebelle P., Chabrier G., *Astrophys. J.*, 2009, **702**, 1428.
- [84] Krumholz M.R., Tan J.C., *Astrophys. J.*, 2007, **654**, 304.
- [85] Padoan P., Nordlund A., *Astrophys. J.*, 2011, **730**, 40.
- [86] Krumholz M.R., McKee C.F., *Astrophys. J.*, 2005, **630**, 250.
- [87] Kritsuk A.G., Nordlund Å., Collins D., et al., *Astrophys. J.*, 2011, **737**, 13.
- [88] Biskamp D., *Magnetohydrodynamic Turbulence*, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.
- [89] Pan L., Padoan P., Kritsuk A.G., *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **102**, 034501.
- [90] Porter D.H., Pouquet A., Woodward P.R., *Phys. Rev. E*, 2002, **66**, 026301.
- [91] Lele S.K., Larsson J., Bhagatwala A., Moin P., in *ASP Conf. Ser.*, 406, *Numerical Modeling of Space Plasma Flows*, ed. N. V. Pogorelov, E. Audit, P. Colella, G. Zank (San Francisco, CA: ASP), 2009, 31.
- [92] Johnsen E., et al. *J. Comput. Phys.*, 2010, **229**, 1213.

- [93] Lemaster M.N., Stone J.M., *Astrophys. J.*, 2009, **691**, 1092.
- [94] Kritsuk A.G., Padoan P., Wagner R., Norman M.L., Scaling Laws and Intermittency in Highly Compressible Turbulence, *AIP Conf. Proc.*, 2007, **932**, 393.
- [95] Kritsuk A., Ustyugov S.D., Norman M.L., Padoan P., *Bulletin of the American Astronomical Society*, 2009, 41, #485.10.
- [96] Padoan P., Nordlund Å., Kritsuk A., Norman M., Li P.S., *Astrophys. J.*, 2007, **661**, 972.
- [97] Milosavljević M., Bromm V., Couch S.M., Oh S.P., *Astrophys. J.*, 2009, **698** 766.
- [98] McKee C.F., Ostriker E.C., *Annual Rev. Astron. Astroph.*, 2007, **45**, 565.
- [99] Kritsuk A.G., Norman M.L., Padoan P., Wagner R., *Astrophys. J.*, 2007, **665**, 416.
- [100] Kritsuk A.G., Ustyugov S.D., Norman M.L., Padoan P., *ASP Conference Series*, 2009, **406**, 15.
- [101] Kraichnan R.H., *Physics of Fluids*, 1965, **8**, 1385.
- [102] Kolmogorov A.N., *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1941, **32**, 196.
- [103] Ustyugov S.D., Popov M.V., Kritsuk A.G., Norman M.L., *J. Comput. Phys.*, 2009, **228**, 7614.
- [104] Kowal G., Lazarian, A., *Astrophys. J.Lett.*, 2007, **666**, L69.
- [105] Lemaster M.N., Stone J.M., *Astrophys. J.*, 2009, **691**, 1092.
- [106] Padoan P., Juvela M., Kritsuk A., Norman M.L., *Astrophys. J.Lett.*, 2006, **653**, L125.

- [107] Elsässer, W.M., *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 183.
- [108] Politano H., Pouquet A., *Phys. Rev. E*, 1998, **57**, 21.
- [109] Politano H., Pouquet A., *Geoph. Res. Lett.*, 1998, **25**, 273.
- [110] Biskamp D., Müller, W.C., *Physics of Plasmas*, 2000, **7**, 4889.
- [111] Kritsuk A.G., Norman M.L., *Astrophys. J.Lett.*, 2004, **601**, L55.
- [112] Sytine I.V., Porter D.H., Woodward P.R, Hodson S.W., Winkler K.H.,  
*J. Comput. Phys.*, 2000, **158**, 225.
- [113] Elmegreen B.G., Scalo J., *Annual Rev. of Astron. Astrophys.*, 2004, **42**,  
211.
- [114] Vázquez-Semadeni E., Passot T., Interstellar Turbulence, Proc. 2nd  
Guillermo Haro Conference, Eds. J. Franco and A. Carraminana.  
Cambridge University Press, 1999, 223.
- [115] Kritsuk A.G., Norman M.L., Padoan P., *Astrophys. J.Lett.*, 2006, **638**,  
L25.
- [116] de Avillez M.A., Breitschwerdt D., *Astron. Astrophys.*, 2005, **436**, 585.
- [117] de Avillez M.A., Breitschwerdt D., *Astrophys. J.Lett.*, 2007, **665**, L35.
- [118] Kissmann R., Kleimann J., Fichtner H., Grauer R., *MNRAS*, 2008,  
**391**, 1577.
- [119] Gazol A., Luis L., Kim J., *Astrophys. J.*, 2009, **693**, 656.
- [120] Seifried D., Schmidt W., Niemeyer J.C., 2010, arXiv:1009.2871
- [121] Tasker E.J., Bryan G.L. *Astrophys. J.*, 2006, **641**, 878.
- [122] Tasker E.J., Bryan G.L. *Astrophys. J.*, 2008, **673**, 810.
- [123] Wada K., *Astrophys. J.*, 2008, **675**, 188.

- [124] Klessen R.S., Hennebelle P., *Astron. Astrophys.*, 2010, **520**, A17.
- [125] Wolfire M.G., McKee C.F., Hollenbach D., Tielens A.G.G.M., *Astrophys. J.*, 2003, **587**, 278.
- [126] Heiles C., Crutcher R., *Cosmic Magnetic Fields Lect. Notes Phys.*, 2005, **664**, 137.
- [127] Jenkins E.B., Tripp T.M. *Astrophys. J.*, 2010, **587**, 278.
- [128] Padoan P., Kritsuk A.G., Lunttila T., Juvela M., Nordlund A., Norman M.L., Ustyugov S.D. AIP Conf. Proc., 2010, **1242**, 219.
- [129] Ustyugov, S. D., 2006, Numerical Modeling of Space Plasma Flows: Astronom-2006 ASP Conference Series, 2006 Volume 359, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific., p.226
- [130] Stein R.F., Nordlund A., *Astrophys. J.*, 2006, **192**, 91.
- [131] Rast M.P., *Astrophys. J.*, 2006, **597**, 1200.
- [132] Christensen-Dalsgaard J., *Rev.Mod.Phys.*, 2003, **74**, 1073.
- [133] Iglesias C.A., Rogers F.J., *Astrophys. J.*, 1996, **464**, 943.
- [134] Canuto V.M., Minotti F.O., Schilling J.L., *Astrophys. J.*, 1994, **425**, 303.
- [135] Yee H.C., Kloppfer G.H., Montagne J.L., *J. Comput. Phys.*, 1990, **88**, 31.
- [136] Hubbard M.E., Garcia-Navarro P., *J. Comput. Phys.*, 2000, **165**, 89.
- [137] Gordon L. Olson, *J. Comp. Phys.*, 2007, **226**, 1181.
- [138] Shu C.W., Osher S., *J. Comput. Phys.*, 1988, **77**, 439.
- [139] Попов М.В., Устюгов С.Д., Чечеткин В.М, *Астрономический журнал*, 2005, **82**, № 6, 505.

- [140] Попов М.В., Устюгов С.Д., Чечеткин В.М., *Астрономический журнал*, 2004, **81**, № 11, 1011.
- [141] Устюгов С.Д., Устюгов Д.О., *Матем. моделирование*, 2011, **23**, № 3, 49.
- [142] Устюгов Д.О., Устюгов С.Д., *Матем. моделирование*, 2009, **21**, № 11, 33.
- [143] Устюгов Д.О., Устюгов С.Д., *Матем. моделирование*, 2008, **20**, № 8, 74.
- [144] Калинов А. Я., Климов С. А., Посыпкин М. А., Савин Г. И., Устюгов С. Д., Чечёткин В. М., Шабанов Б. М., *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004, **20**, № 5, 953.
- [145] Бахтин В.А., Воронков А.В., Голубев А.С., Крюков В.А., Поддерюгина Н.В., Сычугова Е.П., Устюгов С.Д., Труды Всероссийской научной конференции “Научный сервис в сети Интернет: решение больших задач”, М.: Изд-во МГУ, 2008, 185.
- [146] Ustyugov S.D., *Physica Scripta*, 2010, **142**, 014031.
- [147] Duvall Jr. T.L., Kosovichev A.G., Scherrer P.H. et al., *Solar Phys.*, 1997, **170**, 63.
- [148] Birch A.C., Gizon L., *Astron. Nachr.*, 2007, **328**, 228.
- [149] Christensen-Dalsgaard J., Dappen W., Ajukov S.V., et al., *Science*, 1996, **272**, 1286.
- [150] Gizon L., Birch A.C., *Astrophys. J.*, 2004, **614**, 472.
- [151] Scherrer P.H., Bogart R.S., Bush R.I., et al., *Solar Phys.*, 1995 **162**, 129.



[152] Švanda M., Gizon L., Hanasoge S.M., Ustyugov S.D., *Astron. Astroph.*,  
2011, **530**, A148.