Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский
центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской
академии наук»

На правах рукописи

Васильев Олег Викторович

Адаптивные вейвлетные коллокационные методы многомасштабного численного моделирования задач механики жидкости и газа

Специальность: 01.01.07 — «Вычислительная математика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2020

Оглавление

Стр.

Стр.

Стр.

Введение

Актуальность темы. Степень её разработанности. Численное моделирование задач механики жидкости и газа является одной из самых сложных областей вычислительной математики, в основном из-за нелинейности уравнений Эйлера и Навье—Стокса, большого разнообразия режимов и физики течений (ламинарные/турбулентные, инертные/химическиреагирующие, дозвуковые/сверхзвуковые течения сжимаемой/несжимаемой вязкой/невязкой жидкости/газа) и необходимости разрешения широкого спектра масштабов, неравномерно распределённых в пространстве и времени [174]. Важность разработки новых эффективных адаптивных вычислительных подходов, использующих пространственно-временную перемежаемость и способных численно моделировать течения с большим числом Рейнольдса, хорошо видна на примере турбулентности, для которой вычислительная стоимость прямого численного моделирования зависит от числа Рейнольдса как $\mathrm{R}e^3$ [109].

В основе классических адаптивных методов лежит адаптация на основе индикаторов ошибки или метрики сетки, в зависимости от которых происходит сгущение или разрежение сетки [9; 10; 13; 14; 18; 25; 244; 275; 278; 279; 283]. В отличие от адаптивных методов на основе индикаторов ошибки, вейвлетный анализ позволяет разрабоатывать адаптивные методы с прямым контролем ошибки решения. Вейвлетный подход к решению задач механики жидкости и газа — довольно новая область исследований, появившаяся около тридцати пяти лет назад. Способность вейвлетного анализа идентифицировать и выделять локализованные структуры решения, такие как ударные волны и вихри, математическая строгость многомасштабного анализа в оценке ошибки вейвлетного разложения и регулярности решения, а также возможность эффективного представления решения вейвлетным разложением с пороговым сжатием и существование быстрого $O(N)$ вейвлетного преобразования делают вейвлеты очень привлекательными при разработке адаптивных численных методов.

Вейвлетные адаптивные методы могут быть разделены на два больших класса: подходы на основе аппроксимации Галеркина [159; 160] или Петрова—Галеркина [94; 95] и на основе методов коллокаций [35; 195; 333; 335]. Основные сложности при использовании вейвлетных методов Галеркина связаны с определением общих граничных условий и вычислением нелинейных членов уравнений.

Граничные условия в вейвлетных методах Галеркина могут быть наложены либо с помощью специальных модифицированных вейвлетов, удовлетворяющих граничным условиям [46], либо посредством тау-метода, как в спектральном случае [37]. Вычисление нелинейных членов в пространстве вейвлетных коэффициентов с помощью коэффициентов связи [170] на практике неэффективно [186], поэтому большинство разработанных вейвлетных методов Галеркина используют оценку нелинейных членов в физическом пространстве [41; 94; 119] по аналогии с псевдоспектральным методом [37].

В адаптивных вейвлетных коллокационных методах задача решается в узлах адаптивной вычислительной сетки, что устраняет две основные сложности, связанные с аппроксимацией Галеркина, а именно, вычисление нелинейных членов и возможность задавать общие граничные условия. В ранних работах по разработке вейвлетных коллокационных методов [195], включая ранние работы автора диссертации [333—335], помимо применения сеточной адаптации на основе анализа вейвлетных коэффициентов и вейвлетной многоуровневой интерполяции, были попытки использовать операторное сжатие на основе прямого дифференцирования вейвлетного разложения с посчитанными значениями производных вейвлетных функций в бинарных точках. Однако эта процедура оказалась неэффективна по сравнению с более поздними разработками на основе интерполяционных свойств вейвлетов и многоуровневой конечно-разностной аппроксимации производных на фиксированном шаблоне с использованием фантомных узлов [328; 329] или с переменным динамическим шаблоном [183; 200].

Ранние работы по разработке вейвлетных коллокационных методов [35], включая работы автора диссертации [333—335], продемонстрировали возможности применения метода для численного решения уравнений математической физики, но отличались рядом существенных недостатков и ограничений, в основном связанных с использованием вейвлетов первого поколения, определённых операциями сдвига и масштабирования базисного вейвлета. Несмотря на работы по обобщению вейвлетов первого поколения для интервалов [46; 52; 171; 173], в котором видоизменялись вейвлеты, близкие к границам области, вейвлеты первого поколения больше подходили для методов Галеркина, а коллокационные методы, основанные на вейвлетах первого поколения, обладали следующими недостатками:

– отсутствием вейвлетного преобразования на адаптивной сетке;

– необходимостью использования квадратур для оценки вейвлетных коэффициентов на адаптивной сетке;
– неэффективным прямым дифференцированием вейвлетного разложения;
– плохой обусловленностью вейвлетов первого поколения в ограниченных областях, ухудшающей сходимость численных методов.

В 1996-ом году Свелденс [230] разработал вейвлеты второго поколения, построение которых, в отличие от вейвлетов первого поколения, осуществляется в физическом пространстве и не накладывает требования инвариантности сдвига и масштабирования. Уникальные свойства двухстадийного вейвлетного преобразования второго поколения позволили автору диссертации устранить все вышеупомянутые недостатки подходов на основе вейвлетов первого поколения и разработать быстрое $O(N)$ вейвлетное преобразование на адаптивной сетке [328; 329], а также класс адаптивных вейвлетных коллокационных методов (AWCM) для решения эллиптических [332], параболических [328; 329] и гиперболических [323] систем уравнений.

Несмотря на более чем тридцатипятилетнюю историю вейвлетов со дня их открытия Гроссманом и Морле [110] и широкого применения в науке и технике, параллельные вейвлетные технологии развивались лишь усилиями небольших групп исследователей, включая автора диссертации. До недавнего времени основное внимание было направлено на развитие неадаптивных параллельных вейвлетных алгоритмов, таких как параллельное дискретное вейвлетное преобразование без межпроцессорной связи [163], коммуникационно-эффективное вейвлетное преобразование без дистрибутивного транспонирования матрицы [177], распределённое параллельное би-ортогональное вейвлетное преобразование второго поколения [106], параллельное вейвлетное преобразование для параллельных компьютеров с распределённой и общедоступной архитектурой памяти [143] и параллельное вейвлетное преобразование для графических процессоров [99; 101; 228; 232]. Помимо параллельного адаптивного вейвлетного коллокационного метода (P-AWCM), разработанного автором диссертации [319], также отметим существенный вклад в развитие параллельных адаптивных вейвлетных технологий таких методов, как многоблочный адаптивный вейвлетный метод [205], метод адаптивной вейвлетной многомасштабной аппроксимации [183] и адаптивный вейвлетный метод для уравнений мелкой воды на сфере [2; 137].

В большинстве традиционных и вейвлетных адаптивных методов используются пространственная адаптация и маршевые методы с адаптивным глобальным или варьирующимся в пространстве шагом по времени [11; 73; 74; 175]. Основным недостатком всех маршевых методов является накопление ошибки во времени, даже при контроле пространственно-временных ошибок интегрирования. В настоящий момент существует два подхода контроля глобальной ошибки во времени. Первый основан на вариационном подходе [125; 126; 148; 164; 165; 248], в котором глобальная ошибка интегрирования по времени может быть уменьшена до желаемой точности для любого конечного промежутка времени, второй — на использовании пространственно-временных конечных элементов [235]. Автором диссертации исследован альтернативный адаптивный подход к численному решению задач в пространственно-временной области, не базирующийся на маршевых методах. Разработанный пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод (ST-AWCM) [292] для решения параболических уравнений устраняет две основные проблемы классических методов, а именно, неэффективность использования общего, не меняющегося в пространстве шага интегрирования по времени и отсутствие возможности контролировать глобальную ошибку во времени.

Эффективное численное моделирование течений жидкости и газа со сложной геометрией, особенно с движущимися элементами или деформируемыми границами, представляет собой довольно сложную задачу. В настоящий момент существует два основных подхода численного моделирования задач сложной геометрии: методы на основе согласованных сеток, отслеживающих границы области [168; 233], и методы погруженных (затопленных) границ [172; 189]. В общепринятом подходе на основе согласованных структурированных и неструктурированных сеток узлы расчётной сетки совпадают с границей области, что позволяет напрямую накладывать граничные условия в узлах сетки. Основной сложностью использования согласованных сеток является дороговизна их построения, контроль качества вычислительных сеток и невозможность применения декартовых сеток. Построение согласованных сеток сильно усложняется для геометрии с движущимися или деформируемыми границами, так как требует непрерывной адаптации или построения новой сетки с интерполяцией решения со старой сетки на новую [172].

Метод погруженных границ позволяет избежать затрат и сложностей, связанных с построением согласованных сеток, и дает возможность численного моделирования с использованием декартовых сеток посредством изменений уравнений, обеспечивающих выполнение граничных условий без сосредоточения узлов сетки вдоль поверхности. Методы погруженных границ могут быть разделены на два больших класса: дискретные и дифференциальные (объёмные) методы. Дискретные подходы основаны на прямой манипуляции дискретизированных уравнений, обеспечивающей выполнение тех или иных граничных условий, что делает их трудно обобщаемыми ввиду прямой зависимости от методов дискретизации [144; 189; 211]. Самым большим недостатком дискретных методов погруженных границ является отсутствие математических доказательств их сходимости и сложность контроля ошибки аппроксимации граничных условий. Дифференциальные методы погруженных границ [7; 105; 269; 270] основаны на решении модифицированных уравнений, пенализированных штрафными функциями в виде дополнительных сил или членов обратной связи, обеспечивающих выполнение граничных условий.

Методы штрафных функций (МШФ) представляют отдельный подкласс дифференциальных методов погруженных границ, в которых эффект присутствия объектов сложной геометрии достигается посредством введения дополнительных объёмных источниковых членов в дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию течения жидкости или газа, после чего модифицированные пенализированные уравнения дискретизируются и решаются с помощью соответствующего вычислительного метода. Метод штрафных функций Бринкмана (МШФБ) [5], первоначально предложенный Аркусом и Калтагироном [7] для численного моделирования вязких течений несжимаемой жидкости, заключается в использовании физически мотивированных штрафных функций, моделирующих твёрдое тело как пористую среду с малой, приближающейся к нулю, проницаемостью. Основным преимуществом МШФБ по сравнению с другими известными методами погруженных границ является возможность аналитической оценки и активного контроля ошибки решения пенализированных уравнений через изменение штрафного параметра [5]. Более того, в работах [5; 38; 85] было доказано, что решение пенализированных уравнений сходится к решению уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости в пределе штрафного параметра, стремящегося к нулю. Ввиду простоты, лёгкости и общности применения, а также малой вычислительной стоимости, метод штрафных функций Бринкмана подходит для численного моделирования течений сложной геометрии, включая течения с движущимися и деформируемыми границами. Начиная с работы Ангота [4], МШФБ был обобщён и применён в контексте разнообразных численных методов, таких как псевдоспектральные методы [81; 123; 141; 184], методы конечных элементов

[199], методы конечных объёмов [262—264] и вейвлетные методы [132; 212; 253], включая работы автора диссертации [293; 294; 298; 310—315; 331].

В отечественной литературе получило развитие независимое параллельное направление исследований дифференциального подкласса метода погруженных границ, широко известного как метод *фиктивных областей* (МФО) [271], основная идея которого заключается в решении приближенной задачи не в исходной сложной области Ω_f, а в более простой области Ω_s, включающей $\Omega_f \subset \Omega_s$. Вспомогательная задача в фиктивной (комплементарной) области $\Omega_p = \Omega_s \backslash \Omega_f$ формулируется таким образом, чтобы в ней присутствовал малый параметр η, определяющий величину разрыва коэффициентов уравнений на границе области $\partial\Omega_p$, и имела место сходимость приближенного решения параметризированной задачи к точному решению в области Ω_f при $\eta \to 0$. Детальный обзор литературы по истории развития и применению МФО можно найти в монографии Вабищевича [271]. Ниже приведено краткое обсуждение работ, связанных с развитием и использованием метода фиктивных областей для решения задач гидромеханики. Самой первой основополагающей работой в этом направлении можно назвать вышедшую в 1960-ом году работу Вишика [276], в которой была сформулирована идея о переходе к расширенной области. Впервые метод фиктивных областей, как метод численного решения эллиптических задач со сложной геометрией, был сформулирован в работах Саульева [287; 288], в которых был разработан метод фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам и получены оценки ошибки приближённого решения. Расширение метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам предложено Лебедевым [282]. Обоснование метода фиктивных областей с продолжением по младшим и старшим коэффициентам для эллиптических уравнений второго порядка представлено в работе Бугрова [268], где были получены оценки сходимости решения по параметру η. Обобщение МФО для параболических уравнений впервые сформулировано Коноваловым в работе [281]. Расширения метода фиктивных областей для решения уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости рассмотрены в многочисленных работах по численному моделированию как стационарных [267; 269; 272; 273; 285; 286; 289], так и нестационарных [265; 270; 274] течений. Отметим, что метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам математически идентичен методу штрафных функций Бринкмана, и в западной литературе названия этих методов используются взаимозаменяемо [4; 138; 199], с более частым употреблением термина «метод *штрафных функций*», несмотря на историческое первенство названия «метод *фиктивных областей*». Ввиду математической эквивалентности двух подходов и для простоты обсуждения, в данной диссертации все дифференциальные подклассы метода погруженных границ классифицируются как метод штрафных функций.

Методы штрафных функций и, в частности, МШФБ хорошо подходят для совместного использования с классическими методами сеточной адаптации [113] и адаптивными подходами на основе вейвлетов. Для правильного определения геометрии вблизи границы и разрешения всех локальных структур решения, как правило, требуется высокое сеточное разрешение. Адаптация сетки позволяет воспроизводить геометрию с заданной точностью без чрезмерного разрешения вдали от границы и минимизировать количество узлов сетки внутри объекта сложной геометрии, необходимых для определения граничных условий. Динамическая адаптация сетки позволяет численное моделирование не только стационарных тел, но и объектов с движущимися или деформируемыми границами.

Большинство методов штрафных функций, включая МШФБ, разработано для численного моделирования течений несжимаемой жидкости [19; 48; 189; 196; 261]. Одна из первых попыток обобщить метод погруженных границ для сжимаемого газа была предпринята Гиасом и соавторами [103], однако в формулировке работы не было учтено отражение и прохождение акустических волн через границу газа и твердой поверхности, что может привести к существенной ошибке, особенно при наличии ударных волн. Метод несогласованного импеданса [47] представляет более систематизированный подход, но его применение ограничено линеаризованными задачами со стационарными базовыми течениями [3; 47; 145]. Метод несогласованного импеданса был обобщён в работе [54] для нестационарных неоднородных течений, однако метод имеет существенные недостатки, связанные с потерей точности и неустойчивостью решения вблизи границы раздела. Обобщение метода штрафных функций Бринкмана для течений сжимаемого газа впервые было предложено автором диссертации на основе физически обоснованной математической модели течения через пористую среду [314; 315]. В разработанном методе, как и в случае несжимаемой жидкости, ошибка решения пенализированных уравнений может контролироваться через изменение параметров штрафных функций.

Методы штрафных функций Бринкмана, несмотря на возможность контроля ошибки численного решения изменением величин штрафных параметров, обладают существенным недостатком, связанным с отсутствием возможности накладывать общие граничные условия. Для устранения этого ограничения, автором диссертации разработан метод характеристических штрафных функций (МХШФ) [293; 294], позволяющий задавать общие однородные и неоднородные граничные условия Неймана и Робена и сохраняющий возможность контролировать ошибку численного решения пенализированных уравнений с помощью параметров штрафных функций.

Таким образом, актуальность темы диссертации подтверждается

- необходимостью разработки эффективных адаптивных технологий численного моделирования, интерес к которым с увеличением применения компьютерных вычислений для проектирования сложных инженерных систем постоянно возрастает;
- большим количеством работ в области вейвлетных методов и методов погружённых границ при сравнительно недолгой истории развития темы;
- целесообразностью устранения недостатков и ограничений ранее разработанных адаптивных методов на основе вейвлетов первого поколения;
- необходимостью расширения области применения адаптивных вейвлетных методов для решения задач со сложной геометрией со стационарными, подвижными и деформируемыми границами;
- потребностью разработки более общих методов штрафных функций, расширяющих область применения для всех скоростных режимов течения жидкости и газа и обеспечивающих возможность задавать общие однородные и неоднородные граничные условия с контролируемой ошибкой решения; а также
- необходимостью разработки универсального и эффективного метода для численного решения широкого спектра задач механики жидкости и газа, включающих моделирование дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых, инертных и химически реагирующих, ламинарных, переходных и турбулентных течений.

Цели и задачи. Целью данной диссертации является разработка новых классов эффективных многомасштабных адаптивных вычислительных методов для решения задач математической физики в сложной геометрии, позволяющих задавать произвольные граничные условия и динамически адаптировать сетку к локальным структурам решения и геометрии задачи с априорной аналитической оценкой и активным контролем ошибки решения, и демонстрация возможностей применения разработанных методов для решения широкого спектра задач механики жидкости и газа, включающих течения несжимаемого/сжимаемого, вязкого/невязкого, инертного/химически реагирующего газа/жидкости во всех скоростных режимах.

Для достижения поставленной цели в диссертации решены следующие **задачи**:

– разработан класс адаптивных вейвлетных коллокационных методов (AWCM) для решения эллиптических [332], параболических [328; 329] и гиперболических [323] систем уравнений, состоящий из следующих ключевых компонент:
  - процедуры проверки восстановления функции, обеспечивающей принудительное включение узлов-предков нижних уровней разрешения, необходимых для рекурсивного вычисления вейвлетных коэффициентов на адаптивной сетке,
  - быстрого $O(N)$ вейвлетного преобразования второго поколения на адаптивной сетке,
  - алгоритма быстрого $O(N)$ вычисления производных на адаптивной сетке, использующего интерполяционные свойства вейвлетов и многоуровневую конечно-разностную аппроксимацию производных на фиксированных шаблонах с фантомными узлами,
  - многоуровневого итерационного вейвлетного коллокационного метода для решения эллиптических задач на адаптивной сетке;

– разработан параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод (P-AWCM) [319], включающий следующие ключевые компоненты:
  - асинхронное параллельное адаптивное вейвлетное преобразование второго поколения,
  - алгоритм динамической балансировки загрузки процессов с сохранением локальности соседних узлов адаптивной сетки;

– разработан пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод (ST-AWCM) [292], обладающий способностью активного контроля глобальной ошибки интегрирования во времени;
– разработан итерационный вейвлетный метод полной аппроксимации (W-FAS) [292] для решения нелинейных систем уравнений;
– метод штрафных функций Бринкмана обобщён для течений сжимаемого газа [314; 315];
– разработан метод характеристических штрафных функций (МХШФ) [293; 294], позволяющий задавать общие однородные и неоднородные граничные условия Неймана и Робена с контролируемой ошибкой решения;
– для расширения области применения адаптивных вейвлетных коллокационных методов для решения задач со сложной геометрией AWCM объединён с разработанными методами штрафных функций [293; 294; 310—315; 331];
– продемонстрированы возможности применения разработанных методов для численного решения широкого спектра задач механики жидкости и газа, включающих моделирование вязкой несжимаемой жидкости [296—298; 300; 302; 303; 307; 309; 316; 317; 330], вязкого [293; 301; 304; 305; 314; 315; 320; 328] и невязкого [294; 323—326] сжимаемого газа, а также дозвуковых [293; 299; 304; 305; 314; 315; 320; 321], трансзвуковых [304] и сверхзвуковых [294; 301; 304; 305; 323; 325], инертных [293; 301; 304; 305; 314; 315; 320; 321] и химически реагирующих [308; 322; 324; 325; 328; 329], ламинарных [292; 293; 310], переходных [298] и турбулентных [299; 301; 302; 304; 305; 309; 317] течений.

Научная новизна. В диссертации представлен разработанный автором принципиально новый класс коллокационных методов на основе вейвлетов второго поколения, обеспечивающий системный подход к численному решению параболических, эллиптических и гиперболических систем уравнений и способный выделять, разрешать и отслеживать локальные структуры решения на адаптивных вычислительных сетках с активным контролем ошибки решения.

В диссертации также представлены разработанные автором метод штрафных функций Бринкмана для численного моделирования течений сжимаемого вязкого газа и принципиально новый метод характеристических штрафных функций с уникальными свойствами, отличающими его от всех известных методов погруженных границ общностью формулировки и возможностью накладывать произвольные граничные условия с контролируемой ошибкой решения, по функциональности, гибкости и простоте применения близкой к определению аналитических граничных условий.

Новаторскими результатами автора также являются обобщение адаптивного вейвлетного коллокационного метода для параллельных вычислений, разработка принципиально нового пространственно-временного адаптивного вейвлетного коллокационного метода, позволяющего получить численное решение на адаптивной пространственно-временной сетке и обладающего способностью активного контроля глобальной ошибки во времени, и объединение адаптивного вейвлетного коллокационного метода с разработанными методами штрафных функций, расширяющее возможности применения комбинированного метода и позволяющее локальное разрешение геометрии и структур решения с систематическим контролем ошибки решения и аппроксимации граничных условий.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют как теоретическую, так и практическую значимость. Адаптивный вейвлетный коллокационный метод является новым перспективным направлением вычислительной математики, развитие которого будет способствовать прогрессу в области адаптивных вычислительных технологий, потребность в которых с увеличением применения компьютерных вычислений для проектирования сложных инженерных систем постоянно возрастает.

Разработанные в диссертации методы штрафных функций применимы для совместного использования практически со всеми известными адаптивными и неадаптивными методами, включая методы конечных объёмов и конечных элементов, спектральные и конечно-разностные методы.

Способность разработанных в диссертации методов получать решение с автоматическим контролем ошибки на адаптивной сетке, отслеживающей и разрешающей с заданной точностью все структуры решения и границы области, общность формулировки, возможность задавать произвольные граничные условия и применимость методов для решения широкого спектра задач математической физики, включая численное моделирование течений вязкого/невязкого, сжимаемого/несжимаемого, химически инертного/реагирующего газа во всех скоростных режимах, существенно упрощает применение разработанных методов в инженерных и научных задачах.

Разработанный адаптивный вейвлетный коллокационный метод с возможностью систематического контроля ошибки и сеточного разрешения открывает перспективы принципиально новой философии численного моделирования, основанной на осознании необходимости тесной интеграции математического моделирования, адаптивных численных методов и алгоритмов генерации сетки для более гибкого учёта физики задачи, минимизации вычислительных ресурсов, улучшения качества и эффективности численного моделирования и повышения степени прогнозирования физических свойств моделируемых систем. Одним из таких перспективных направлений исследований является иерархическое адаптивное вихреразрешающее моделирование турбулентных течений, ключевым звеном которого служит адаптивный вейвлетный коллокационный метод.

Методология и методы исследования. В основе адаптивного вейвлетного коллокационного метода лежит многомасштабный вейвлетный анализ второго поколения, позволяющий разложение решения по многоуровневым базисным функциям, локализованным как в физическом пространстве, так и в пространстве волновых чисел, и обеспечивающий эффективное сжатое представление решения с одновременным контролем ошибки аппроксимации. Полиномиальная сходимость вейвлетного разложения и локальность вейвлетных базисных функций даёт возможность использовать метод коллокаций с однозначным соответствием между узлами сетки и базисными функциями, что, в свою очередь, открывает возможность сеточной адаптации и контроля ошибки аппроксимации на основе анализа коэффициентов вейвлетного разложения и порогового вейвлетного сжатия решения. Процедура проверки восстановления функции и обобщение вейвлетного преобразования второго поколения для адаптивной многоуровневой сетки основаны на уникальных свойствах двухстадийного рекурсивного вейвлетного преобразования второго поколения. Процедура численного дифференцирования на адаптивной сетке использует быстрое $O(N)$ вейвлетное преобразование на адаптивной сетке и многоуровневую конечно-разностную аппроксимацию.

Многоуровневый итерационный алгоритм адаптивного вейвлетного коллокационного метода для решения эллиптических задач аналогичен многосеточному методу [25; 26; 28; 112; 249; 266; 290; 291], но отличается структурой встроенных сеток и применением вейвлетной интерполяции для операторов расширения и сжатия. Способность вейвлетного анализа определять месторасположение разрывов решения и динамически сгущать вычислительную сетку используется для определения локализованной искусственной вязкости в AWCM для сглаживания разрывных решений и по своему духу напоминает метод ограничения потока [242].

Обобщение адаптивного вейвлетного коллокационного метода для параллельных вычислений основано на разработанном автором диссертации асинхронном параллельном вейвлетном преобразовании второго поколения, использующим динамически распределённую между процессами структуру деревьев произвольной размерности с динамической балансировкой загрузки процессов.

Для расширения области применения AWCM для задач со сложной геометрией использован метод погруженных границ на основе ряда методов штрафных функций, разработанных автором диссертации, позволяющих накладывать произвольные граничные условия на поверхности встроенных областей с заранее предписанной и контролируемой точностью.

Все разработанные методы и алгоритмы подтверждены численными экспериментами и проверкой теоретически полученных оценок асимптотической сходимости на примере тестовых задач с известными аналитическими или численными решениями. Разработанные методы продемонстрированы для численного решения уравнений Эйлера и Навье—Стокса для несжимаемой жидкости и сжимаемого реагирующего и инертного газа как в простой, так и в сложной геометрии с применением методов штрафных функций.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для эффективного численного решения параболических, эллиптических и гиперболических систем уравнений разработан класс коллокационных методов на основе вейвлетов второго поколения, способных выделять, разрешать и отслеживать локальные структуры решения на адаптивных вычислительных сетках с активным контролем ошибки решения. Теоретически полученные аналитические оценки асимптотической сходимости разработанных методов подтверждены результатами численных экспериментов по решению тестовых задач с известными аналитическими решениями.

2. Адаптивный вейвлетный коллокационный метод обобщён для параллельных вычислений.

3. Для параболических задач с высокой перемежаемостью разработан пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод, позволяющий получить решение с одновременной адаптацией сетки в пространстве и времени.
4. Для расширения области применения адаптивного вейвлетного коллокационного метода при решении задач со сложной геометрией, включая подвижные и деформируемые границы, разработан класс методов штрафных функций, позволяющих задавать однородные и неоднородные граничные условия Дирихле, Неймана и Робена на границе областей сложной геометрии с возможностью оценки и активного контроля ошибки решения через изменение параметров штрафных функций. Получены теоретические оценки асимптотической сходимости разработанных методов.
5. Продемонстрированы возможности применения и эффективность адаптивного вейвлетного коллокационного метода для численного моделирования широкого спектра задач механики жидкости и газа как в простой, так и в сложной геометрии с применением разработанных методов штрафных функций.

Личный вклад автора. Автор диссертации является основателем класса коллокационных методов на основе вейвлетов второго поколения [319; 323; 328; 329; 332]. Вклад автора в совместные работы заключался: в формулировке разрабатываемых методов [292—295; 314; 315; 319; 323; 329; 332], постановке задач [292—307; 314—321; 323; 329—332], получении ключевых теоретических и практических результатов [293—296; 299—302; 306—308; 314—326; 329—336], технической реализации [292—310; 312—326; 329—337], постановке численных экспериментов [292—310; 312—326; 329—336] и анализе полученных результатов [292—336]. Автор диссертации является основным разработчиком адаптивной среды для универсального численного многомасштабного моделирования (AWESUMM) [337], которая использовалась для получения результатов диссертации и всех вышеупомянутых работ. Вклад автора является определяющим при получении всех научных результатов, выносимых на защиту.

Степень достоверности результатов исследований, изложенных в диссертации. Апробация. Достоверность результатов диссертации подтверждается следующим:

1. Все разработанные методы детально описаны и реализованы в адаптивной среде для универсального численного многомасштабного моделирования (AWESUMM) [337].
2. Все теоретически полученные оценки асимптотической сходимости разработанных методов подтверждены результатами численных экспериментов по решению тестовых задач с известными аналитическими или численными решениями.
3. Результаты численного моделирования течений подтверждены соответствием с опубликованными экспериментальными и вычислительными результатами, полученными другими авторами с использованием альтернативных методов.
4. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в **46** печатных изданиях [292—337], **42** из которых – в периодических научных журналах или изданиях, индексируемых **Web of Science** или **Scopus** [292—310; 314—336], **3** — в тезисах докладов [311—313].
5. Результаты диссертации представлены автором в приглашённых докладах на следующих **международных конференциях** и на семинарах университетов и научных центров:
   - «Modeling Physical Systems with Wide Range of Spatial Scales», Applied Mathematics Seminar, University of Missouri-Columbia, January 21 and 28, 2000.
   - «On the Use of the Adaptive Wavelet Collocation Method in the Direct Numerical Simulation of Reacting Flows», Minisymposium on Adaptive and Wavelet Methods Applied to Numerical Combustion, Eight International Conference on Numerical Combustion, Amelia Island, March 5-8, 2000.
   - «Modeling Physical Systems with Wide Range of Spatial Scales Using Wavelets», Institute of Geology, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Switzerland, March 5, 2001.

- «A Novel Approach for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Aero-Fluid Dynamics Problems», Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado Boulder, May 3, 2001.
- «On the Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Aero-Fluid Dynamics Problems», NASA Langley Research Center, July 24, 2001.
- «The Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Phenomena», Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, August 16, 2001.
- «The Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Phenomena», Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Rutgers University — The State University of New Jersey, March 11, 2002.
- «The Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Phenomena», Department of Mechanical Engineering, Washington University in St. Louis, March 14, 2002.
- «The Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Phenomena», Department of Mechanical Engineering, University of Colorado Boulder, March 19, 2002.
- «The Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Phenomena», Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, April 18, 2002.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method for the Solution of Partial Differential Equations», IMACS Workshop on Adaptive Methods for Partial Differential Equations, Toronto, Canada, August 6-9, 2002.
- «Use of Wavelets for Modeling and Simulation of Multi-Scale Phenomena», Department of Physics and Nuclear Technology, AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland, May 30, 2003.
- «Modeling and Simulation of Multi-Scale Phenomena Using Wavelets», Center for the Physics of Geological Processes, University of Oslo, Oslo, Norway, June 12, 2003.
- «Modeling and Simulation of Multi-Scale Phenomena Using Wavelets», Department of Mathematics and Computing, University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia, June 30, 2003.

- «Recent Progress in Modeling and Simulation of Multi-Scale Phenomena Using Wavelets», International Kyoto Workshop: Wavelet Analysis and Scientific Computation, Kyoto, Japan, May 19-20, 2005.
- «Recent Progress in Development of Adaptive Wavelet Collocation Methodology», International Conference on Scientific Computation and Differential Equations (SciCADE05), Nagoya, Japan, May 23-27, 2005.
- «Modeling and Simulation of Multi-Scale Phenomena Using Wavelets», Institute of Geophysics, Swiss Institute of Technology — Zurich, Switzerland, January 12, 2006.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method for Solution of Multi-Scale Problems», Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California at Los Angeles, Los Angeles, California, March 3, 2006.
- «An Adaptive Multi-Scale Modeling, Simulation, and Visualization Framework for Solution of Complex Multi-Physics Flows», Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, August 21, 2006.
- «An Adaptive Multi-Scale Modeling, Simulation, and Visualization Framework for Solution of Complex Multi-Physics Problems», Institute of Geophysics, Swiss Institute of Technology — Zurich, Zurich, Switzerland, January 9, 2007.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method for Solution of Multi-Scale Problems», Institute of Computational Science, Swiss Institute of Technology — Zurich, Zurich, Switzerland, January 10, 2007.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method for Solution of Multi-Scale Problems», Cornell Fluid Dynamics Seminar, Cornell University, Ithaca, New York, April 10, 2007.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method for Solution of Multi-Scale Problems», Institute of Analysis and Scientific Computing, Swiss Institute of Technology — Lausanne, Lausanne, Switzerland, July 16, 2008.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method for Modeling and Simulation of Complex Multi-Scale Fluid Dynamics Problems», Thermo and Fluid Dynamics Colloquium, Institute of Fluid Dynamics, Swiss Institute of Technology — Zurich, Zurich, Switzerland, August 20, 2008.

- «An Adaptive Multiscale Wavelet Framework for Modeling and Simulation of Fluid Dynamics Flows», Institute of Fluid Mechanics, Technical University of Dresden, Dresden, Germany, January 13, 2009.
- «An Adaptive Multiscale Wavelet Framework for Modeling and Simulation of Fluid Dynamics Flows», DLR Colloquium, German Aerospace Center (DLR), Göttingen, Germany, January 15, 2009.
- «Adaptive Wavelet Collocation Methods for Partial Differential Equations», Mathematics Colloquium, Institute for Numerical Mathematics, University of Ulm, Ulm, Germany, June 30, 2009.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Department of Mechanical Engineering, University of Colorado, October 22, 2009.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Fluid Mechanics Seminar, Stanford University, October 27, 2009.
- «Вейвлетные методы в вычислительной гидродинамике», Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия, 22 июня, 2010.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Department of Mathematics Colloquium, Central Michigan University, October 7, 2010.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Department of Mathematics, Imperial College London, London, May 23, 2012.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics» (3-lecture series), Fields Institute Workshop on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Ottawa, Canada, August 19-22, 2013.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Boulder Fluid Dynamics Seminar, University of Colorado Boulder, January 21, 2014.
- «Метод характеристических штрафных функций для задач механики жидкости и газа», Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия, 11июня, 2014.
- «Вейвлетные методы в вычислительной гидродинамике», Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия, 24 июня, 2014.

- «Adaptive Wavelet Collocation Method for Solution of Partial Differential Equations», Department of Computer Science, AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland, September 17, 2014.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Department of Computer Science, AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland, October 2, 2014.
- «Volume Penalization Methods for Flow Simulations in Complex Geometries», Department of Computer Science, AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland, October 2, 2014.
- «Adaptive wavelet paradigm for multiscale modeling and simulation in fluid mechanics», XIV International Seminar Mathematical Models and Modeling in Laser Plasma Processes and Advanced Science Technologies, Moscow, Russia, July 4-9, 2016.
- «Wavelet Methods in Computational Fluid Dynamics», Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia, October 27, 2016.
- «Volume penalization methods for flow simulations in complex geometries», Osaka University, Osaka, Japan, March 28, 2017.
- «Wavelet methods in Computational Fluid Dynamics», Special Seminar of Chubu branch of Japan Society of Fluid Dynamics, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, Japan, April 12, 2017.

6. Результаты диссертации докладывались на следующих **международных конференциях**:
   - «An Adaptive Wavelet Method for Turbulence in Complex Geometries», Sixteenth IMACS World Congress on Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation, Lausanne, Switzerland, August 21-25, 2000.
   - «On the Use of Second Generation Adaptive Wavelet Collocation Method in Fluid Mechanics», ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Oxford, England, March 26-29, 2001.
   - «An Adaptive Wavelet Method for Fluid-Structure Interaction», Fourth Workshop on Direct and Large-Eddy Simulation (DLES4), Enschede, Netherlands, July 18-20, 2001.

- «Role of Wavelets in the Physical and Statistical Modeling and Visualization of Complex Geological Processes», Third International ACES Meeting, Maui, Hawaii, May 5-10, 2002.
- «An Adaptive Wavelet Collocation Method for Complex Geometry Flows», Airframe Noise Workshop, NASA Langley, October 22-23, 2002.
- «An Adaptive Wavelet Collocation Method for Fluid-Structure Interaction — Part I», Fifty-Fifth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Dallas, November 24-26, 2002.
- «An Adaptive Wavelet Collocation Method for Fluid-Structure Interaction — Part II», Fifty-Fifth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Dallas, November 24-26, 2002.
- «Dynamically Adaptive Wavelet Collocation Method for the Solution of Partial Differential Equations», 5th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Sydney, Australia, July 7-11, 2003.
- «A Three-Dimensional Adaptive Wavelet Method for Fluid-Structure Interaction», Fifth international ERCOFTAC workshop on direct and large-eddy simulations (DLES5), Munich, Germany, August 27-29, 2003.
- «Three-Dimensional Simulations Using an Adaptive Wavelet Collocation Method - Part I: Theory and Application to Fluid-Bluff Body Interaction», Fifty-Sixth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, East Rutherford, New Jersey, November 23-25, 2003.
- «Adaptive Multilevel Second-Generation Wavelet Collocation Elliptic Solver: A Cure for High Viscosity Contrasts», Annual American Geophysical Union Meeting, San Francisco, December 8-12, 2003.
- «Application of Mutlidimensional Wavelets to Unveiling Multi-Phase Diagrams and in Situ Rock Physical Properties», Annual American Geophysical Union Meeting, San Francisco, December 8-12, 2003.
- «An Adaptive Wavelet Collocation Solver for Time-Accurate Complex-Geometry Flow Simulations and Far-Field Acoustic Prediction», Airframe Noise Workshop, NASA Langley, February 10-11, 2004.
- «An Adaptive Wavelet Collocation Method for Turbulence Calculations», Large Eddy Simulation, Coherent Vortex Simulation and Vortex Methods for Turbulent Flows, Euromech Colloquium 454, Marseilles, France, April 14-16, 2004.

- «Adaptive Wavelet Simulation of Fluid Structure Interaction in 2D and 3D», Large Eddy Simulation, Coherent Vortex Simulation and Vortex Methods for Turbulent Flows, Euromech Colloquium 454, Marseilles, France, April 14-16, 2004.
- «Identification of Mantle Plumes Using Second Generation Wavelets», 25th IUGG Conference on Mathematical Geophysics, Columbia University, New York, June 16-18, 2004.
- «Simultaneous Space-Time Adaptive Wavelet Solution of Turbulence», Fifty-Seventh Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Seattle, Washington, November 21-23, 2004.
- «Hybrid Adaptive Wavelet Collocation — Brinkman Penalization — Ffowcs Williams and Hawkings Method for Compressible Flow Simulation and Far-Field Acoustics Prediction», Fifty-Eighth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Chicago, Illinois, November 20-22, 2005.
- «Multiscale space-time adaptive simulation of 2D incompressible turbulence», Fifty-Eighth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Chicago, Illinois, November 20-22, 2005.
- «Dynamically Adaptive Wavelet Collocation Method for Shock Computations», Fifty-Eighth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Chicago, Illinois, November 20-22, 2005.
- «Hybrid Adaptive Wavelet Collocation-Brinkman Penalization Method for DNS and URANS Simulations of Compressible Flow around Bluff Bodies», 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, San Francisco, California, June 5-8, 2006.
- «A New Formulation of Brinkman Penalization Method for Compressible Flow Simulations in Complex Geometries», Fifty-Ninth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Tampa, Florida, November 19-21, 2006.
- «An Adaptive Wavelet Shock Capturing Scheme for Compressible Inert and Reactive Flows», Fifty-Ninth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Tampa, Florida, November 19-21, 2006.

- «Detonation Initiation on the Microsecond Time Scale: One and Two Dimensional Results Obtained from Adaptive Wavelet-Collocation Numerical Methods», 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 8-11, 2007
- «Numerical Modeling of Detonation Initiation Using Acoustic Time Scale Heat Deposition», Sixtieth Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Salt Lake City, Utah, November 18-20, 2007.
- «Numerical Modeling of Acoustic Timescale Detonation Initiation», 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 7-10, 2008
- «Numerical Modeling of Multi-dimensional Acoustic Timescale Detonation Initiation», 61st Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Antonio, Texas, November 23-25, 2008.
- «Feasibility of using Hybrid Wavelet Collocation — Brinkman Penalization Method for Shape and Topology Optimization», 62nd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Minneapolis, Minnesota, November 22-24, 2009.
- «Adaptive Wavelet-Based Simulations of Variable Density Flows», Turbulent Mixing and Beyond Conference, Trieste, Italy, 27 July — 7 August, 2009.
- «Extension of Brinkman Penalization for Ocean Circulation Modeling using Adaptive Wavelet Collocation Method», 62nd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Minneapolis, Minnesota, November 22-24, 2009.
- «Wavelet-Based Simulations of Single-Mode Rayleigh-Taylor Instability», 62nd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Minneapolis, Minnesota, November 22-24, 2009.
- «Ocean Circulation Modeling Using Adaptive Wavelet Collocation Method», 9th International workshop on Multiscale (Un)-structured mesh numerical Modeling for coastal, shelf, and global ocean dynamics, Cambridge, MA, USA August 17-20, 2010.
- «Towards Wavelet-based Adaptive Numerical Simulation of Turbulent Flow past Bluff-bodies». In: Proceedings of the 5th International Conference on Vortex Flow and Vortex Methods. Caserta, 8-10 November 2010.

– «Ocean Circulation Modeling Using Adaptive Wavelet Collocation Method», 63rd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Long Beach, California, November 21-23, 2010.
– «Wavelet-Based Simulations of Rayleigh-Taylor Instability», 63rd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Long Beach, California, November 21-23, 2010.
– «Shape Optimization for Drag Reduction in Linked Bodies using Evolution Strategies and the Hybrid Wavelet Collocation — Brinkman Penalization Method», 63rd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Long Beach, California, November 21-23, 2010.
– «Application of the Adaptive Wavelet-Collocation Method to Resolving the Time-History of Planar Detonation Initiation», 13th International Conference on Numerical Combustion, Corfu, Greece, April 27-29, 2011.
– «Wavelet-based Adaptive Methods for Solution of PDEs», Workshop on Direct Image Data Assimilation in Oceanic and Atmospheric Applications, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, October 7, 2011.
– «Shallow Water Model Using Adaptive Wavelet Collocation Method», 64rd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Baltimore, Maryland, November 20-22, 2011.
– «Parallel Adaptive Wavelet Collocation Method for PDEs», 64rd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Baltimore, Maryland, November 20-22, 2011.
– «Simulations of Compressible Rayleigh-Taylor Instability Using the Adaptive Wavelet Collocation Method», 64rd Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Baltimore, Maryland, November 20-22, 2011.
– «Parallel Adaptive Wavelet Based Environment for Complex Multi-Physics Flows», An International Workshop of Deep Geothermal Systems, Wuhan, China, June 29-30, 2012.
– «Simulations of Compressible Rayleigh-Taylor Instability Using the Adaptive Wavelet Collocation Method», Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7), Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012.

- «Wavelet-based Adaptive Numerical Simulation of Unsteady 3D Flow around a Bluff Body», 65th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Diego, California, November 18-20, 2012.
- «Adaptive Wavelet Collocation Method in Shallow Water Model: Validation Study», 65th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Diego, California, November 18-20, 2012.
- «A Characteristic-Based Volume Penalization Method for Compressible Viscous Flows in Complex Geometries», 65th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Diego, California, November 18-20, 2012.
- «A Characteristic-Based Volume Penalization Method for Compressible Inviscid Flows in Complex Geometries», 65th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Diego, California, November 18-20, 2012.
- «In Marriage of Model and Numerics, Glimpses of the Future», 65th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Diego, California, November 18-20, 2012.
- «Direct Numerical Simulation of Square-cylinder Flow Using Hybrid Wavelet-Collocation/Volume-Penalization Method», Ninth International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations (DLES9), Dresden, Germany, April 2-5, 2013.
- «Characteristic-Based Volume Penalization Method for Arbitrary Mach Flows Around Solid Obstacles», Ninth International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations (DLES9), Dresden, Germany, April 2-5, 2013.
- «Wavelet-based Simulations of Unsteady Compressible Flows», 66th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Pittsburgh, Pennsylvania, November 24-26, 2013.
- «Characteristic-based Volume Penalization Method for Arbitrary Mach Flows Around Solid Obstacles», 66th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Pittsburgh, Pennsylvania, November 24-26, 2013.

– «On the Use of Adaptive Wavelet-based Methods for Ocean Modeling and Data Assimilation Problems», European Geosciences Union General Assembly, Vienna, Austria, April 27-May 2, 2014.
– «Wavelet-based Computational Modeling of Wall-bounded Turbulent Flows with Lagrangian Variable Thresholding», Sixth European Conference on Computational Fluid Dynamics — ECCOMAS ECFD 2014, Barcelona, Spain, July 20-25, 2014.
– «Characteristic-based Volume Penalization Method for Arbitrary Mach Flows Around Solid Obstacles», 67th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Francisco, California, November 23-25, 2014.
– «A Characteristic Based Volume Penalization Method for Modeling and Simulation of Compressible Particle-Laden Flows», 67th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, San Francisco, California, November 23-25, 2014.
– «Adaptive LES of Immersed-Body Flows Based on Variable Wavelet Threshold Filtering», Tenth International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations (DLES10), Limassol, Cyprus, May 27-29, 2015.
– «Wall-resolved Adaptive Simulation with Spatially-anisotropic Wavelet-based Refinement», 68th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Boston, Massachusetts, November 22-24, 2015.
– «Characteristic-based Volume Penalization Method for Arbitrary Mach Flows Around Moving and Deforming Complex Geometry Obstacles», 68th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Boston, Massachusetts, November 22-24, 2015.
– «Spatially-anisotropic Parallel Adaptive Wavelet Collocation Method», 68th Annual Meeting of the American Physical Society, Division of Fluid Dynamics, Boston, Massachusetts, November 22-24, 2015.
– «Adaptive direct numerical simulation with spatially- anisotropic wavelet-based refinement», Eleventh International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations (DLES11), Pisa, Italy, May 29-31, 2017.
– «Wavelet-based adaptive unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes computations of wall-bounded internal and external compressible turbulent

flows», 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting, Kissimmee, Florida, January 8-12, 2018.
- «Wavelet-based delayed detached eddy simulation method for compressible wall bounded turbulent flow modeling», 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting, Kissimmee, Florida, January 8-12, 2018.
- «Adaptive Wavelet-based Delayed Detached Eddy Simulations of Anisothermal Channel Flows with High Transverse Temperature Gradients», 2019 AIAA Aerospace Sciences Meeting, San Diego, California, 7-11 January 2019.
- «Towards wavelet-based intelligent simulation of wall-bounded turbulent compressible flows», Twelfth International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations (DLES12), Madrid, Spain, June 5-7, 2019.
- «Adaptive Wavelet-based Delayed Detached Eddy Simulation of Shock Wave-Turbulent Boundary Layer Interaction in a Compression Ramp Flow», AIAA Aviation 2019 Forum, Dallas, Texas, 17-21 June 2019.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 395 страниц, включая 161 рисунок, 12 алгоритмов и 6 таблиц. Список литературы содержит 337 наименований.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, обсуждается степень её разработанности, представлены основные цели и задачи, научная новизна, значимость работы, а также основные положения, выносимые на защиту.

В **главе 1** после краткого описания основных свойств вейвлетного многомасштабного анализа первого и второго поколений соответственно в разделах 1.1 и 1.2, в разделе 1.3 представлены ключевые компоненты разработанного автором диссертации адаптивного вейвлетного коллокационного метода (AWCM). В подразделе 1.3.1 рассмотрено вейвлетное пороговое сжатие, позволяющее активный контроль ошибки аппроксимации через пороговый параметр ε. В подразделе также приведены асимптотические оценки локального разрешения, количества *значимых* коэффициентов вейвлетного разложения $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ в зависимости от величины вейвлетного порога и полиномиального порядка вейвлета, а также асимптотическая оценка ошибки вейвлетной аппроксимации как функции от $\mathcal{N}_\mathrm{S}$. В этом же подразделе представлены результаты сходимости вейвлетного интерполянта с пороговым сжатием для тестовых одномерных и двумерных функций для однородных и неоднородных сеток, подтверждающие соответствие численных результатов с асимптотическими оценками.

Быстрое $O(\mathcal{N}_\mathrm{S})$ адаптивное вейвлетное преобразование второго поколения произвольной размерности обсуждено в подразделе 1.3.2, где также описана процедура проверки восстановления функции, обеспечивающая принудительное включение узлов-*предков*, необходимых для рекурсивного вычисления вейвлетных коэффициентов на адаптивной сетке.

Концепция *смежной* области, используемой в вейвлетной сеточной адаптации, расширяющей область значимых вейвлетных коэффициентов и включающей в себя узлы сетки, в которых вейвлетные коэффициенты могут стать *значимыми* во время интегрирования по времени или во время следующей итерации, описана в подразделе 1.3.3. Процедура адаптации сетки на основе анализа коэффициентов вейвлетного разложения рассмотрена в подразделе 1.3.4.

Алгоритм быстрого $O(\mathcal{N}_\mathrm{S})$ вычисления пространственных производных на адаптивной сетке, использующий интерполяционные свойства вейвлетного разложения и многоуровневую конечно-разностную аппроксимацию на фиксированных шаблонах с фантомными узлами, представлен в подразделе 1.3.5. Здесь же приведена асимптотическая оценка сходимости процедуры дифференцирования и обсуждены результаты проверки сходимости, подтверждающие соответствие численных результатов асимптотическим оценкам.

Три класса адаптивных вейвлетных коллокационных методов, разработанных для решения эллиптических, параболических и гиперболических систем уравнений, описаны соответственно в разделах 1.4, 1.5 и 1.6.

В подразделе 1.4.1 приведён глобальный итерационный метод для решения эллиптических задач. В подразделе 1.4.2 рассмотрен многоуровневый итерационный вейвлетный коллокационный метод для решения как эллиптических уравнений одной из стадий итеративной сеточной адаптации, так и для решения дифференциальных ограничительных условий в эволюционных задачах, например, уравнения неразрывности в уравнениях Навье—Стокса для несжимаемой жидкости. Эффективность сеточной адаптации, асимптотическая сходимость глобального эллиптического алгоритма и многоуровневого итерационного вейвлетного коллокационного метода продемонстрированы в подразделе 1.4.3 на примере двумерной и трёхмерной тестовых эллиптических задач с аналитическими решениями.

Способность AWCM разрешать локализованные структуры решения на динамически адаптивных однородных и неоднородных сетках, эффективность сеточной адаптации, измеряемая коэффициентом сжатия, асимптотическая сходимость адаптивного вейвлетного коллокационного метода представлены в подразделе 1.5.1 на примере одномерных и двумерных тестовых параболических задач с аналитическими решениями.

В разделе 1.6 рассмотрен AWCM для решения гиперболических систем уравнений, использующий локализованную искусственную вязкость, основанную на вычислении маркировочной функции разрыва решения, определяемой значениями вейвлетных коэффициентов на самом высоком уровне разрешения и описанной в подразделе 1.6.1. Детали AWCM для численного моделирования гиперболических задач приведены в подразделе 1.6.2. Применение адаптивного вейвлетного коллокационного метода для решения гиперболических систем уравнений показано в подразделе 1.6.3 на примере тестовых одномерных и двумерных задач Римана с известными аналитическими решениями.

Глава 2 посвящена описанию обобщения адаптивного вейвлетного коллокационного метода для параллельных вычислений. Параллельное асинхронное вейвлетное преобразование второго поколения представлено в разделе 2.2. Структура данных типа дерева произвольной размерности, использованная в параллельном адаптивном вейвлетном коллокационном методе (P-AWCM), описана в разделе 2.3. Расширение алгоритма сеточной адаптации на основе вейвлетов для параллельных вычислений, а также параллельное обобщение процедуры восстановления функции рассмотрены в разделе 2.4. Параллельное обобщение алгоритма вычисления производных обсуждено в разделе 2.5. В разделе 2.6 рассмотрены квантование и межпроцессное перемещение (миграция) данных, используемых в P-AWCM при динамической балансировке загрузки процессов. Динамическое межпроцессное разбиение адаптивной сетки (динамическое распараллеливание задачи) представлено в разделе 2.7. Алгоритм P-AWCM, основанного на применении вышеупомянутых компонент, описан в разделе 2.8. Эффективность распараллеливания, «вычислительная сложность», параллельная масштабируемость и теоретически возможная эффективность параллелизации P-AWCM обсуждены в разделе 2.9.

В **главе 3** представлен пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод (ST-AWCM), разработанный для решения параболических задач с одновременной адаптацией сетки в пространстве и времени. ST-AWCM устраняет две основные проблемы классических маршевых вычислительных методов: а именно, неэффективность использования общего (не варьирующегося в пространстве) шага интегрирования по времени и отсутствие возможности контроля глобальной ошибки во времени. Пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод описан в разделе 3.2. Подраздел 3.2.1 посвящен обсуждению основных положений вейвлетного метода полной аппроксимации (W-FAS), разработанного для решения нелинейных алгебраических задач, полученных в результате дискретизации эволюционных уравнений. Расширение алгоритма для задач произвольной продолжительности при ограниченных вычислительных ресурсах описано в подразделе 3.2.3.

При применении ST-AWCM задача решается в пространственно-временной области с одновременной адаптацией сетки в пространстве и времени с целью разрешения структур решения на оптимальной пространственно-временной сетке. Результаты численных экспериментов для решения задач в двумерном пространстве (x,t) для уравнений Бюргерса представлены в разделе 3.3. Эффективность пространственно-временной сеточной адаптации, способность ST-AWCM активно контролировать глобальную ошибку интегрирования во времени и сходимость ST-AWCM обсуждены соответственно в подразделах 3.3.2, 3.3.3 и 3.3.4.

Приложения вейвлетных адаптивных коллокационных методов для задач механики жидкости и газа в простой геометрии рассмотрены в **главе 4**. В разделе 4.1 описаны результаты применения AWCM для вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования (WA-DNS) течения вязкой несжимаемой жидкости на примере двухмерной задачи слияния вихрей. WA-DNS моделирование течений химически инертного и реагирующего вязкого сжимаемого газа с применением AWCM представлено в разделе 4.2 на примерах задачи неустойчивости Рэлея—Тейлора (подраздел 4.2.1) и ламинарного взаимодействия диффузионного пламени с парой вихрей (подраздел 4.2.2). WA-DNS моделирование течений химически инертного и реагирующего невязкого сжимаемого газа на примерах задач неустойчивости Рихтмайера—Мешкова и прямой инициации детонации описано соответственно в подразделах 4.3.1 и 4.3.2. Во всех случаях обсуждены конкретные реализации AWCM, моделируемые уравнения с граничными условиями и параметры задач, а также продемонстрированы возможности AWCM выделять и разрешать локальные структуры течения.

Применение пространственно-временного адаптивного вейвлетного коллокационного метода для численного решения задач механики жидкости и газа проиллюстрировано в подразделах 4.4.1 и 4.4.2 на примерах задач слияния вихрей в несжимаемой вязкой жидкости при $\mathrm{Re} = 1\,000$ и двумерной затухающей турбулентности для чисел Рейнольдса в диапазоне $1\,260 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 40\,400$. Для демонстрации эффективности пространственно-временной адаптации приведены сравнения результатов вычислений и вычислительной сложности для ST-AWCM и маршевых AWCM. В случае двумерной турбулентности также исследована зависимость количества степеней свободы от числа Рейнольдса для пространственно-временного и маршевых адаптивных вейвлетных коллокационных методов.

В **главе 5** рассмотрены методы штрафных функций (МШФ), расширяющие возможности применения адаптивных вейвлетных коллокационных методов для решения задач математической физики в сложной геометрии, включая задачи механики жидкости и газа со стационарными, подвижными и деформируемыми границами. Раздел 5.1 посвящен краткому обзору методов затопленных границ. Метод штрафных функций Бринкмана (МШФБ) для уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости описан в подразделе 5.2.1. Метод интегрирования во времени и решение уравнения Пуассона при совместном применении AWCM и МШФБ обсуждены в подразделе 5.2.2. Результаты вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования обтекания стационарного и подвижного цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100$ и стационарного цилиндра при $\mathrm{Re} = 3\,000$ с совместным использованием метода штрафных функций Бринкмана и адаптивного вейвлетного коллокационного метода описаны соответственно в подразделах 5.2.3, 5.2.4 и 5.2.5.

Обобщение метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования дозвуковых течений сжимаемого вязкого газа показано в подразделе 5.3.2. В обобщённой формулировке МШФБ, в дополнение к штрафным функциям в уравнении сохранения импульса, также используются штрафные функции в уравнениях сохранения массы и энергии, при этом уравнение сохранения массы модифицируется с соблюдением физики течений в пористой среде. В обобщённом МШФБ штрафная область ведет себя как среда с большим акустическим импедансом, приводящим к незначительному проникновению акустических волн. Оценка амплитудной ошибки при отражении акустических волн на основе акустической теории приведена в подразделе 5.3.3. Асимптотический анализ амплитудной и фазовой ошибок при отражении акустических волн от поверхности тела, моделируемого обобщённым методом штрафных функций Бринкмана, представлен в подразделе 5.3.5. Асимптотические оценки амплитудной и фазовой ошибок решения пенализированных уравнений в случае разрешённого и неразрешённого пограничного слоя выведены соответственно в подразделах 5.3.9 и 5.3.10. Применение обобщённого МШФБ совместно с AWCM для моделирования дозвукового обтекания тел сжимаемым вязким газом продемонстрировано на примерах тестовых задач прямого отражения одномерного акустического импульса от плоской поверхности и рассеяния акустической волны стационарным цилиндром и описано в подразделе 5.3.12. В подразделе также приведены результаты проверки сходимости решения, подтверждающие соответствие численных результатов с асимптотической оценкой ошибки в случаях разрешённого и неразрешённого пограничного слоя.

Для устранения ограничений метода штрафных функций Бринкмана, связанных с отсутствием возможности накладывать общие граничные условия и неправильным отражением ударных волн от поверхности твердого тела, аппроксимированного штрафными функциями Бринкмана, разработан метод характеристических штрафных функций (МХШФ), снимающий вышеупомянутые ограничения и основанный на гиперболических дифференциальных штрафных функциях, обеспечивающих возможность задавать общие однородные и неоднородные граничные условия Неймана и Робена. Метод характеристических штрафных функций, представленный в разделе 5.4, довольно гибок и применим для решения как параболических, так и гиперболических систем уравнений, при этом, как и в методе штрафных функций Бринкмана, МХШФ даёт возможность контролировать ошибку численного решения пенализированных уравнений через значения параметров штрафных функций. Метод характеристических штрафных функций сформулирован и описан в подразделе 5.4.1. В отличие от метода штрафных функций Бринкмана в МХШФ члены правой части уравнений полностью удаляются для устранения влияния на точность определения желаемых граничных условий, что позволяет осуществлять согласованный контроль ошибки в независимости от физики задачи и формы эволюционных уравнений. При решении задач сложной геометрии с применением метода характеристических штрафных функций могут возникнуть сложности, связанные с неоднозначностью вектора нормали в области пересечения характеристик и в узлах экстремума функции расстояния, а также из-за дополнительной вычислительной стоимости и снижения устойчивости/точности решения вдали от границ. В подразделе 5.4.2 описано двухслойное обобщение МХШФ, использующее характеристические штрафные функции только в тонком внутреннем гиперболическом слое в непосредственной близости с границей тела и уравнение диффузии во внутренней области вдали от границ, что позволяет устранить вышеупомянутые сложности. Обобщение МХШФ для численного моделирования обтекания тел сложной геометрии сжимаемым вязким газом сформулировано в подразделе 5.4.3. Асимптотический анализ сходимости метода характеристических штрафных функций применительно к уравнениям Навье—Стокса для задачи прямого отражения одномерного акустического импульса малой амплитуды приведён в подразделе 5.4.4. Применение метода характеристических штрафных функций совместно с адаптивным вейвлетным коллокационным методом для решения задач математической физики рассмотрено в подразделе 5.4.5 на примерах уравнения теплопроводности с тремя видами граничных условий, задачи прямого отражения одномерного акустического импульса от плоской поверхности и задачи дозвукового обтекания стационарного цилиндра вязким сжимаемым газом. В подразделе также представлены численные результаты проверки сходимости решения, подтверждающие соответствие результатов вычислений асимптотической оценке ошибки в случае однородных и неоднородных граничных условий Дирихле, Неймана и Робена. В случае задачи ламинарного обтекания стационарного цилиндра при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 40$ и Маха $\mathrm{Ma} = 0.03$ решение хорошо согласуется с ранее опубликованными экспериментальными и численными результатами, полученными с применением альтернативных подходов.

Расширение МХШФ для численного решения уравнений Эйлера для сжимаемого невязкого газа обсуждено в разделе 5.5. Расширение метода характеристических штрафных функций для задач с подвижными/деформируемыми границами описано в подразделе 5.5.1. Для выполнения условия инвариантности Галилея в формулировку метода характеристических штрафных функций добавлены конвекционные члены Лагранжа, обеспечивающие выполнение граничных условий в системе отсчёта движущегося тела. Совместное применение МХШФ и AWCM для численного моделирования сверхзвукового обтекания тел сложной геометрии сжимаемым газом рассмотрено в подразделе 5.5.2 на примерах задачи прямого отражения одномерной ударной волны от плоской поверхности и задачи сверхзвукового обтекания клина с формированием прямого и косого скачков уплотнения. В подразделе также приведены численные результаты проверки сходимости решения, подтверждающие соответствие результатов вычислений асимптотической оценке ошибки решения.

Приложение разработанных методов штрафных функций совместно с адаптивным вейвлетным коллокационным методом для численного моделирования более сложных течений со сложной геометрией рассмотрено в **главе 6**. Применение объединённых AWCM/МШФБ для численного моделирования обтекания массива цилиндров несжимаемой вязкой жидкостью и масштабирование вычислительной сложности задачи от числа Рейнольдса обсуждено в разделе 6.1. Применение метода штрафных функций Бринкмана для моделирования обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью в контексте вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования (WA-DNS) и вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей (WA-LES) рассмотрено соответственно в разделах 6.2 и 6.3. Следует отметить, что подход иерархического адаптивного вихреразрешающего моделирования турбулентных течений, включающий в себя подклассы WA-DNS и WA-LES, не является предметом обсуждения диссертации и приведен для демонстрации широкого спектра применения методов штрафных функций. Кроме этого, в разделе 6.3 вкратце описано использование AWCM с варьирующимся в пространстве и времени вейвлетным порогом, расширяющим возможность AWCM регулировать локальное сеточное разрешение не только для контроля ошибки численного решения, но также из соображений физического моделирования.

Применение метода характеристических штрафных функций совместно с адаптивным вейвлетным коллокационным методом для численного моделирования дозвукового обтекания стационарного и подвижного цилиндров сжимаемым вязким газом обсуждено соответственно в разделах 6.4 и 6.5. Сверхзвуковое обтекание одного и нескольких тел невязким сжимаемым газом описано в разделе 6.6. Выполнение условия инвариантности Галилея при моделировании обтекания стационарных и движущихся тел представлено в разделе 6.7.

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации, их научная новизна, теоретическая и практическая значимость, а также обсуждены направления дальнейшего развития темы диссертации.

Глава 1. Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения уравнений математической физики

1.1 Основные свойства вейвлетов

Теория вейвлетов, разработанная в основном за последние тридцать пять лет, завоевала огромный интерес во многих областях математики, физики, информатики и инженерных наук. Вейвлетные преобразования были открыты Гроссманом и Морле [110], а ортогональные вейвлетные преобразования — Лемарие и Майером [147]. В 1988-ом году Даубечи разработала ортогональные базисные функции на основе вейвлетов с компактным носителем [63], а Маллат открыл быстрый алгоритм дискретного вейвлетного преобразования [161]. Обзор работ по применению вейвлетов к задачам механики жидкости и газа, начиная с работы Фарж и Рабре [83], может быть найден в статьях [82; 327].

Вейвлеты представляют собой базисные функции, локализованные как в физическом пространстве (из-за быстрого затухания и компактного носителя), так и пространстве волновых чисел (из-за их гладкости и наличия нулевых моментов). Пример вейвлетов в физическом пространстве и пространстве волновых чисел проиллюстрирован на рис. 1.1. Для сравнения классическое преобразование Фурье основано на функциях (синусах и косинусах), локализованных в пространстве волновых чисел и не локализованных в физическом пространстве. Одновре-

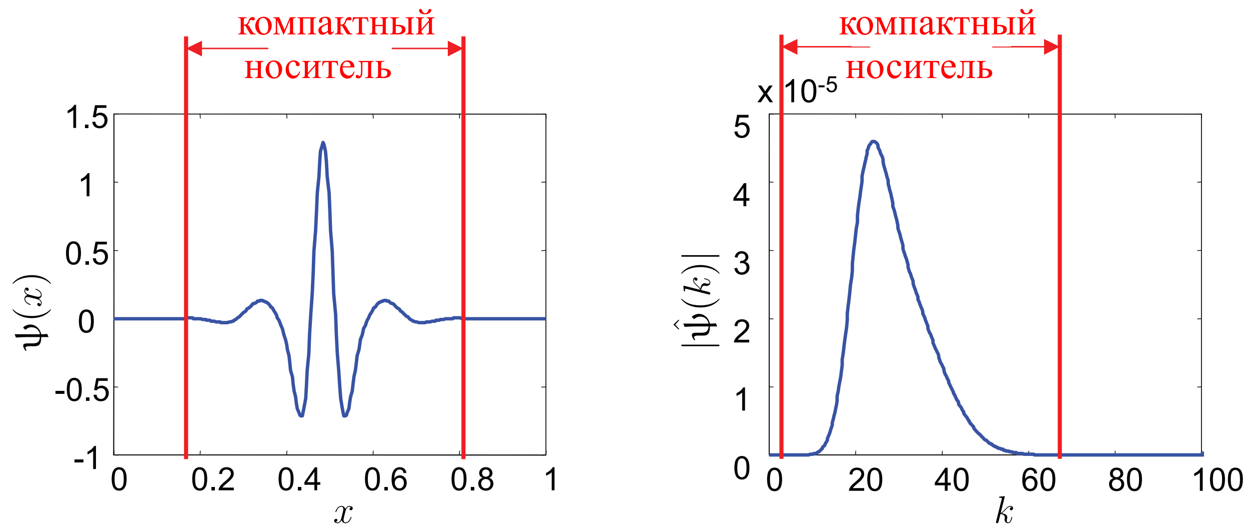


Рисунок 1.1 — Пример вейвлета $\psi(x)$ и модуль его преобразования Фурье $|\hat{\psi}(k)|$.

менная локализации в волновом и физическом пространствах даёт возможность вейвлетному преобразованию одновременно нести в себе как пространственную, так и частотную (масштабную) информацию, в то время как преобразование Фурье содержит только частотную информацию.

Описание вейвлетов удобно начать с определения многомасштабного анализа [124]:

Определение 1. *Многомасштабный анализ* $\mathbf{M}$ *в пространстве* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *определён как последовательность подпространств* $\mathbf{M} = \{\mathcal{V}^j \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \mid j \in \mathbb{Z}\}$, *обладающих следующими свойствами:*

1. $\mathcal{V}^j \subset \mathcal{V}^{j+1}$,
2. $v(x) \in \mathcal{V}^j \Leftrightarrow v(2x) \in \mathcal{V}^{j+1}$,
3. $v(x) \in \mathcal{V}^0 \Leftrightarrow v(x+1) \in \mathcal{V}^0$,
4. $\bigcup\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}^j$ *плотное множество в* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *и* $\bigcap\limits_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}^j = \{0\}$,
5. *существует* скалярная функция $\varphi \in \mathcal{V}^0$ *с ненулевым интегралом, такая, что множество функций* $\{\varphi(x-l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$ *составляет систему Риса в пространстве* $\mathcal{V}^0$.

Из определения многомасштабного анализа следует неравенство $\varphi \in \mathcal{V}^0 \in \mathcal{V}^1$, подразумевающее существование уравнения дилатации

$$\varphi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x-k), \tag{1.1}$$

где $h_k \in l^2(\mathbb{Z})$ — последовательность коэффициентов. Определение многомасштабного анализа также предполагает, что множество функций $\{\varphi_k^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \mid k, j \in \mathbb{Z}\}$ образует систему Риса в пространстве $\mathcal{V}^j$. Для удобства записи надстрочный индекс используется для обозначения уровня (масштаба) разрешения, а подстрочный — для обозначения расположения в физическом пространстве на данном уровне разрешения.

Пусть пространство $\mathcal{W}^j$ является дополнением пространства $\mathcal{V}^j$ в пространство $\mathcal{V}^{j+1}$, то есть $\mathcal{V}^{j+1} = \mathcal{V}^j \oplus \mathcal{W}^j$, где символ $\oplus$ обозначает прямую сумму. Другими словами, пространство $\mathcal{W}^j$ содержит *детали* при переходе от аппроксимации на уровне разрешения j к аппроксимации на уровне разрешения $j+1$, из чего следует, что

$$\bigoplus_j \mathcal{W}^j = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Функция $\psi(x) \in \mathcal{W}^0$ является *вейвлетом*, если множество функций $\{\psi(x-l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$ составляет систему Риса в пространстве $\mathcal{W}^0$. Поскольку вейвлет $\psi(x)$ является элементом пространства $\mathcal{V}^1$, то существует такая последовательность коэффициентов $g_l \in l^2(\mathbb{Z})$, что

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \varphi(2x-k). \tag{1.3}$$

Если пространство вейвлетов $\mathcal{W}^j$ определяется как ортогональное дополнение пространства $\mathcal{V}^j$ в пространство $\mathcal{V}^{j+1}$, то соответствующий многомасштабный анализ называется ортогональным. Более того, скалярные функции $\{\varphi(x-l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$ могут быть определены таким образом, что множество $\{\varphi^j_k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ образует ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}^j$.

Требование ортогональности накладывает сильное ограничение на определение вейвлетов. Для большей гибкости многомасштабного анализа часто используется *биортогональное* обобщение. *Дуальная скалярная функция* $\widetilde{\varphi}$ и *дуальный вейвлет* $\widetilde{\psi}$, принадлежащие соответственно пространствам $\widetilde{\mathcal{V}}^j$ и $\widetilde{\mathcal{W}}^j$, определяют дуальный многомасштабный анализ, такой, что

$$\widetilde{\mathcal{V}}^j \perp \mathcal{W}^j, \quad \mathcal{V}^j \perp \widetilde{\mathcal{W}}^j, \quad \widetilde{\mathcal{W}}^j \perp \mathcal{W}^{j'} \text{ for } j \neq j', \tag{1.4}$$

который может быть записан в более удобной форме как

$$\left\langle \widetilde{\varphi}^j_k, \varphi^j_{k'} \right\rangle = \delta_{kk'}, \qquad k,\ k',\ j \in \mathbb{Z}, \tag{1.5}$$

$$\left\langle \widetilde{\psi}^j_l, \psi^{j'}_{l'} \right\rangle = \delta_{ll'}\delta_{jj'}, \qquad l,\ l',\ j,\ j' \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

где δ_{km} обозначает символ Кронекера, а оператор $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используется для обозначения скалярного произведения, определённого как

$$\langle u, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)g(x)dx. \tag{1.7}$$

Следует отметить, что многомасштабный анализ подразумевает выполнение дуальной скалярной функцией и вейвлетом следующих соотношений

$$\widetilde{\varphi}(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k\, \widetilde{\varphi}(2x-k), \tag{1.8}$$

$$\widetilde{\psi}(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{g}_k\, \widetilde{\varphi}(2x-k). \tag{1.9}$$

В случае биортогонального многомасштабного анализа операторы проекции $\mathcal{P}^j$ и $\mathcal{Q}^j$ на пространства $\mathcal{V}^j$ и $\mathcal{W}^j$ соответственно могут быть определены как

$$\mathcal{P}^j u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle u, \widetilde{\varphi}_k^j \right\rangle \varphi_k^j(x), \tag{1.10}$$

$$\mathcal{Q}^j u(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\langle u, \widetilde{\psi}_l^j \right\rangle \psi_l^j(x), \tag{1.11}$$

что подразумевает следующее разложение скалярного поля $u(x)$ по базисным функциям $\varphi_k^0(x)$ и $\psi_l^j(x)$:

$$u(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\langle u, \widetilde{\psi}_l^j \right\rangle \psi_l^j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle u, \widetilde{\varphi}_k^0 \right\rangle \varphi_k^0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\langle u, \widetilde{\psi}_l^j \right\rangle \psi_l^j(x) \tag{1.12}$$

или в более традиционной форме

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 \varphi_k^0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l\in\mathbb{Z}} d_l^j \psi_l^j(x), \tag{1.13}$$

где c_k^0 являются коэффициентами разложения скалярной функции на самом низком уровне разрешения, а d_l^j обозначают коэффициенты разложения по вейвлетному базису $\psi_l^j(x)$ на уровне разрешения j, соответственно определённых как

$$c_k^j = \left\langle u, \widetilde{\varphi}_k^j \right\rangle, \tag{1.14}$$

$$d_l^j = \left\langle u, \widetilde{\psi}_l^j \right\rangle. \tag{1.15}$$

Таким образом, вейвлетное разложение (1.13) может быть интерпретировано как многоуровневое или многомасштабное представление функции, где каждый уровень разрешения j (кроме самой грубой) состоит из вейвлетов одного и того же уровня (масштаба), но расположенных в точках с разными координатами. Скалярные коэффициенты c_k^0 представляют собой осредненные значения поля, в то время как вейвлетные коэффициенты d_l^j являются мерой флуктуаций (деталей) поля $u(x)$ на уровне j в непосредственной близости вейвлета $\psi_l^j(x)$. Следует отметить, что вейвлетное разложение (1.13) может быть применено к векторным полям покомпонентно.

Основными условиями вейвлетного разложения являются требования к моментам скалярной функции, вейвлетов и их дуалов, определённым как

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx, \qquad N_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx, \tag{1.16}$$

$$\widetilde{M}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \widetilde{\varphi}(x) dx, \qquad \widetilde{N}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \widetilde{\psi}(x) dx \tag{1.17}$$

для $k \in \mathbb{N}$. Обычно скалярные функции нормализованы таким образом, что $M_0 = \widetilde{M}_0 = 1$. В многочисленных работах [110; 147] было показано, что необходимым условием хорошего представления функции определённой гладкости и безошибочного разложения полиномиальных функций порядка p по базисным функциям $\{\varphi(x-l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$ является требование существования следующих нулевых моментов дуальных вейвлетов:

$$\widetilde{N}_k = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant k < p \quad \text{и} \quad \widetilde{N}_p \neq 0. \tag{1.18}$$

В частности, условие (1.18) является необходимым условием для хорошего сжатия регулярной по Гёльдеру функции с показателем Гёльдера (Липшица) $\alpha < p$. Другим важным следствием условия (1.18) является сходимость вейвлетных вычислительных методов. Так, для функции с гладкостью p ($u \in \mathcal{C}^p$) выполняется следующее условие:

$$\|\mathcal{P}^j u(x) - u(x)\|_\infty = O(h^p), \quad \text{где} \quad h = 2^{-j}, \tag{1.19}$$

известное как условие Странга—Фикса [86].

Наконец, одним из важнейших свойств вейвлетного анализа является наличие быстрого рекурсивного вейвлетного преобразования, позволяющего вычисление вейвлетных коэффициентов по значениям коэффициентов скалярных функций на более высоком уровне разрешения. Как уже обсуждалось ранее, из свойства многомасштабного разложения $\mathcal{V}^{j+1} = \mathcal{V}^j \oplus \mathcal{W}^j$ следует, что функция $v^{j+1} \in \mathcal{V}^{j+1}$ может быть переписана как сумма функций $v^j \in \mathcal{V}^j$ и $w^j \in \mathcal{W}^j$:

$$v^{j+1}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{j+1}\, \varphi_k^{j+1}(x) = \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l^j\, \varphi_l^j(x)}_{v^j(x)} + \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}} d_l^j \psi_l^j(x)}_{w^j(x)}. \tag{1.20}$$

Подставляя уравнения (1.8) и (1.9) в уравнения (1.14) и (1.15), коэффициенты c_l^j и d_l^j могут быть найдены, используя следующие рекурсивные соотношения:

$$c_l^j = \left\langle v^{j+1}, \widetilde{\varphi}_l^j \right\rangle = \sqrt{2} \left\langle v^{j+1}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{k-2l}\, \widetilde{\varphi}_k^{j+1} \right\rangle = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{k-2l}\, c_k^{j+1}, \tag{1.21}$$

$$d_l^j = \left\langle v^{j+1}, \widetilde{\psi}_l^j \right\rangle = \sqrt{2} \left\langle v^{j+1}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{g}_{k-2l}\, \widetilde{\varphi}_k^{j+1} \right\rangle = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{g}_{k-2l}\, c_k^{j+1}. \tag{1.22}$$

Аналогично, подстановка уравнений (1.1) и (1.3) в уравнение (1.20) приводит к следующему рекурсивному выражению:

$$c_k^{j+1} = \left\langle v^{j+1}, \widetilde{\varphi}_k^{j+1} \right\rangle = \sqrt{2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{k-2l}\, c_l^j + \sqrt{2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} g_{k-2l}\, d_l^j. \tag{1.23}$$

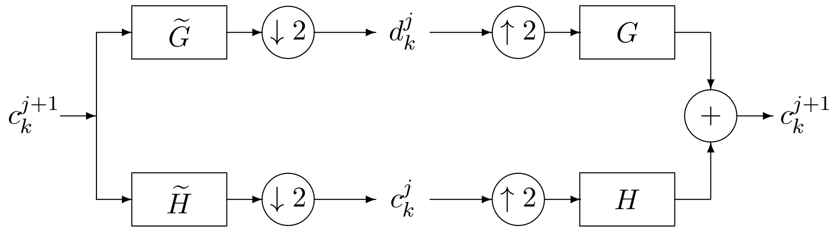


Рисунок 1.2 — Блок-диаграмма быстрого вейвлетного преобразования.

При рекурсивном применении эти выражения определяют *быстрое вейвлетное преобразование* с алгоритмической стоимостью $O(N)$, при этом уравнения (1.21) и (1.22) определяют прямое преобразование, а уравнение (1.23) — обратное.

Блок-диаграмма одного шага вейвлетного преобразования показана на рис. 1.2, где фильтры $\widetilde{H}$, $\widetilde{G}$, H и G построены на основе уравнений (1.21-1.23), оператор ($\downarrow 2$) обозначает оператор понижения дискретизации (децимации), который удаляет нечетные компоненты сигнала, а оператор ($\uparrow 2$) обозначает оператор повышения дискретизации, который вставляет ноль между соседними выборками. Более детальное обсуждение вейвлетов и банков фильтров приведены в источниках [64; 162; 227].

Одномерные вейвлеты $\psi_k^j(x)$, определённые в неограниченной или периодической области операциями сдвига с равномерным интервалом дискретизации и масштабирования базового вейвлета $\psi(x)$, то есть $\psi_k^j(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, относятся к *вейвлетам первого поколения*. Отметим, что вейвлеты первого поколения могут быть дополнительно обобщены на конечные интервалы, в частности видоизменяя их в окрестностях границ интервала и оставляя их неизменными внутри области вдали от границ [46; 52; 171; 173]. Альтернативный механизм построения вейвлетов на конечном интервале был сравнительно недавно предложен Свелденсом [230], в котором вейвлеты определяются в физическом пространстве без требования сдвиговой и дилатационной инвариантности. Такие вейвлеты относятся к *вейвлетам второго поколения*. Альтернативный механизм, предложенный Свелденсом, обеспечивает возможность построения вейвлетов с произвольными граничными условиями и неоднородным сдвигом, при этом вейвлеты остаются локализованными в физическом и волновом пространствах и имеют нулевые моменты.

1.2 Вейвлеты второго поколения

Вейвлеты второго поколения являются обобщением биортогональных вейвлетов, позволяющих их применение к функциям, определенным в областях более общих, чем $\mathbb{R}^n$. Вейвлеты второго поколения образуют систему Риса для некоторого функционального пространства, при этом вейвлеты локализованы как в физическом, так и в волновом пространствах, имеют нулевые моменты, но не инвариантны по отношению к операциям сдвига и дилатации. Несмотря на потерю инвариантности, вейвлеты второго поколения сохраняют все основные свойства биортогональных вейвлетов первого поколения, включая существование быстрого $O(N)$ преобразования. Описание вейвлетов второго поколения удобно начать с определения многомасштабного анализа [231]:

Определение 2. *Многомасштабный анализ второго поколения* $\mathbf{M}$ *в пространстве* $\mathbf{L}$ *определён как последовательность подпространств* $\mathbf{M} = \{\mathcal{V}^j \subset \mathbf{L} \mid j \in \mathcal{J}\}$*, обладающих следующими свойствами:*

1. $\mathcal{V}^j \subset \mathcal{V}^{j+1}$*,*
2. $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{V}^j$ *плотное множество в* $\mathbf{L}$ *и*
3. *для каждого* $j \in \mathcal{J}$ *существует множество скалярных функций* $\{\varphi_k^j \mid k \in \mathcal{I}_\varphi^j\}$*, составляющих систему Риса в пространстве* $\mathcal{V}^j$*,*

где $\mathcal{I}_\varphi^j$ — некое множество индексов. Подчеркнём, что в отличие от многомасштабного анализа первого поколения, в определении 2 снято ограничение на сдвиговую и дилатационную инвариантность скалярной функции φ_k^j.

Дуальный многомасштабный анализ $\widetilde{\mathbf{M}} = \{\widetilde{\mathcal{V}}^j \subset \mathbf{L} \mid j \in \mathcal{J}\}$ определяется аналогично в пространствах $\widetilde{\mathcal{V}}^j$, заданных линейной оболочкой дуальных скалярных функций $\widetilde{\varphi}_k^j$, биортогональных по отношению к скалярным функциям φ_m^j. На основании свойства 1 определения многомасштабного анализа скалярная функция φ_k^j, лежащая в пространстве $\mathcal{V}^j$, также принадлежит пространству $\mathcal{V}^{j+1}$, а следовательно, может быть представлена как

$$\varphi_k^j = \sum_{l\in\mathcal{I}_\varphi^{j+1}} h_{k,l}^j \varphi_l^{j+1}. \tag{1.24}$$

Таким образом, многомасштабный анализ на основе скалярных функций φ_k^j может быть так же легко определён через коэффициенты фильтра $h_{k,l}^j$ при условии, что набор коэффициентов допускает существование решения уравнения (1.24). Отметим, что далеко не все наборы коэффициентов фильтра обеспечивают существование такого решения.

Вейвлеты ψ_k^j определены так же, как и в биортогональном случае, а именно, как базисные функции пространства $\mathcal{W}^j$, дополняющего пространство $\mathcal{V}^j$ до пространства $\mathcal{V}^{j+1}$, то есть $\mathcal{V}^{j+1} = \mathcal{V}^j \oplus \mathcal{W}^j$. В свою очередь, дуальные вейвлеты биортогональны вейвлетам и являются линейной оболочкой дополнения пространства $\widetilde{\mathcal{V}}^j$ до пространства $\widetilde{\mathcal{V}}^{j+1}$. Определённые таким образом вейвлеты образуют систему Риса в функциональном пространстве $\mathbf{L}$ и позволяют представление функции по значениям вейвлетных коэффициентов. По аналогии со скалярными функциями вейвлеты уровня j могут быть представлены как линейная комбинация скалярных функций на уровне $j+1$

$$\psi_k^j = \sum_{l \in \mathcal{I}_\varphi^{j+1}} g_{k,l}^j \varphi_l^{j+1}. \tag{1.25}$$

Как и в случае вейвлетов первого поколения, описанных в разделе 1.1, $\varphi_k^{j+1} \in \mathcal{V}^j \oplus \mathcal{W}^j$, что подразумевает выполнение следующего соотношения:

$$\varphi_k^{j+1} = \sum_{l \in \mathcal{I}_\varphi^j} \widetilde{h}_{l,k}^j \varphi_l^j + \sum_{l \in \mathcal{I}_\psi^j} \widetilde{g}_{l,k}^j \psi_l^j. \tag{1.26}$$

Таким образом, многомасштабный анализ второго поколения автоматически подразумевает существование быстрых вейвлетных преобразований. Зная коэффициенты скалярных функций c_k^{j+1} на уровне $j+1$, вейвлетные коэффициенты d_k^j и коэффициенты скалярных функций c_k^j на уровне j могут быть найдены из следующих соотношений:

$$d_k^j = \sum_{l \in \mathcal{I}_\varphi^{j+1}} \widetilde{g}_{k,l}^j c_l^{j+1}, \tag{1.27}$$

$$c_k^j = \sum_{l \in \mathcal{I}_\varphi^{j+1}} \widetilde{h}_{k,l}^j c_l^{j+1}. \tag{1.28}$$

Обратное вейвлетное преобразование, в свою очередь, задаётся следующим выражением:

$$c_k^{j+1} = \sum_{l \in \mathcal{I}_\varphi^j} h_{l,k}^j c_l^j + \sum_{l \in \mathcal{I}_\psi^j} g_{l,k}^j d_l^j. \tag{1.29}$$

Коэффициенты c_k^j и d_k^j часто называют сглаженными и детальными компонентами сигнала на уровне $j+1$.

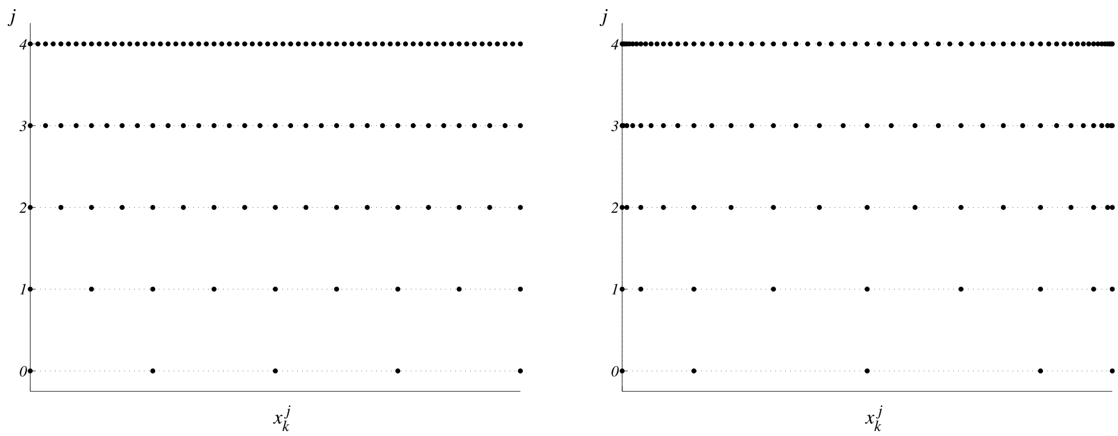


Рисунок 1.3 — Пример диадных сеток с однородным (слева) и неоднородным (справа) сдвигом.

1.2.1 Построение вейвлетов второго поколения

Вейвлеты второго поколения [231] могут быть построены на кривых, поверхностях и геометрических многообразиях, при этом процедура построения вейвлетов примерно одинакова во всех случаях. В данном подразделе проиллюстрировано построение вейвлетов второго поколения на интервале Ω_s с произвольным распределением узлов сетки. Процесс построения вейвлета начинается с определения множества интерполяционных узлов $\{x_k^j \in \Omega_\mathrm{s}\}$, определяющих последовательность вложенных сеток

$$\mathcal{G}^j = \left\{ x_k^j \in \Omega_\mathrm{s} : \; x_k^j = x_{2k}^{j+1}, \; k \in \mathcal{I}_\varphi^j \right\}, \quad j \in \mathcal{J}, \tag{1.30}$$

где x_k^j — координаты точек сетки уровня разрешения j. Отметим, что операция сеточной децимации (прореживания) $x_k^j = x_{2k}^{j+1}$ гарантирует вложенность сеток, то есть $\mathcal{G}^j \subset \mathcal{G}^{j+1}$. Примеры диадных сеток с однородным и неоднородным сдвигом для $j = 0, \ldots, 4$ приведены на рис. 1.3.

Процесс построения вейвлетов второго поколения состоит из процедуры так называемого *«ленивого»* (тривиального) вейвлетного преобразования и процедуры подъема. Процедура ленивого вейвлетного преобразования состоит из четной и нечетной децимации. Процедуру подъёма можно рассматривать как процесс изменения существующего вейвлета путем добавления линейной комбинации скалярных функций одного уровня разрешения $\psi(x) = \psi^{\mathrm{old}}(x) - \sum_k u_k \varphi(x-k)$, где коэффициенты обновления u_k выбраны таким образом, чтобы модифицированный вейвлет обладал нужными свойствами. Процедура подъёма не влияет на скалярные функции, но меняет дуальные скалярные функции и вейвлеты. В качестве альтернативы можно рассмотреть процедуру дуального подъёма, в которой дуальные скалярные функции остаются без изменений, а изменяются дуальные вейвлеты, скалярные функции и вейвлеты.

Важным свойством и достоинством вейвлетного преобразования является возможность вычисления вейвлетных коэффициентов с помощью рекурсивного применения одношагового вейвлетного преобразования. Если предположить, что коэффициенты скалярной функции c_k^{j+1} на уровне $j+1$ известны, то вейвлетные коэффициенты d_l^j и коэффициенты скалярных функций c_k^j на уровне j могут быть найдены с помощью вейвлетного преобразования второго поколения, состоящего из следующих двух стадий:

$$\text{стадия предсказания: } d_k^j = \frac{1}{2}\left(c_{2k+1}^{j+1} - \sum_{l\in\mathcal{I}_\varphi^j} w_{k,l}^j c_{2k+2l}^{j+1}\right), \tag{1.31}$$

$$\text{стадия обновления: } c_k^j = c_{2k}^{j+1} + \sum_{l\in\mathcal{I}_\psi^j} \widetilde{w}_{k,l}^j d_{k+l}^j, \tag{1.32}$$

при этом соответствующее одномерное обратное вейвлетное преобразование второго поколения может быть записано в следующем виде:

$$\text{обратная стадия обновления: } c_{2k}^{j+1} = c_k^j - \sum_{l\in\mathcal{I}_\psi^j} \widetilde{w}_{k,l}^j d_{k+l}^j, \tag{1.33}$$

$$\text{обратная стадия предсказания: } c_{2k+1}^{j+1} = 2d_k^j + \sum_{l\in\mathcal{I}_\varphi^j} w_{k,l}^j c_{2k+2l}^{j+1}, \tag{1.34}$$

где $w_{k,l}^j$ и $\widetilde{w}_{k,l}^j$ — коэффициенты, соответствующие двум стадиям вейвлетного преобразования. Отметим, что раскраска членов в уравнениях (1.32), (1.33) и на рисунке 1.5 в синий цвет связана с параллельной реализацией алгоритма и обсуждается в главе 2.

Первая стадия прямого вейвлетного преобразования называется стадией предсказания, так как вейвлетные коэффициенты вычисляются путем предсказания значений функции с использованием интерполяционных узлов на предыдущем, более грубом уровне разрешения. Стадия предсказания прямого одномерного вейвлетного преобразования второго поколения показана на рисунке 1.4а. Значения коэффициентов скалярной функции c_k^j, перенесённые с

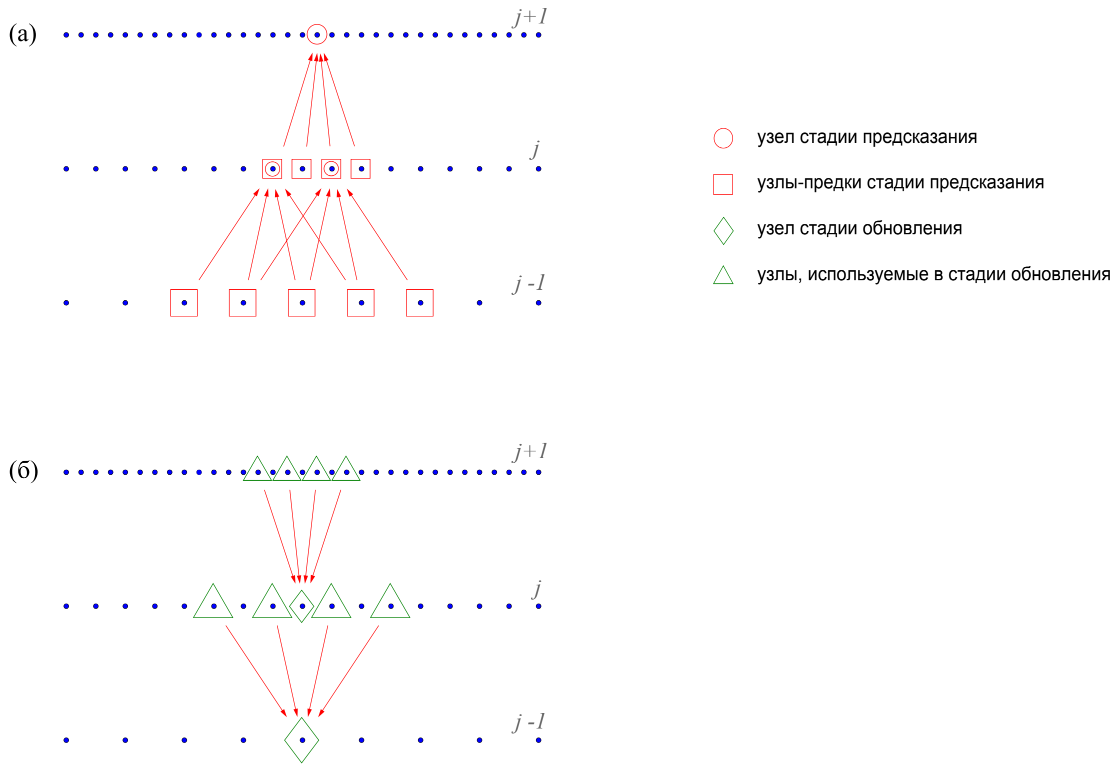


Рисунок 1.4 — Диаграмма зависимости вейвлетных коэффициентов в стадиях предсказания (а) и обновления (б) прямого вейвлетного преобразования. На каждом уровне разрешения показаны узлы сетки, принадлежащие самому уровню и всем нижележащим уровням разрешения.

более высокого уровня разрешения, обновляются, используя вейвлетные коэффициенты, полученные на первой стадии преобразования. Стадия обновления, показанная на рис. 1.4б, гарантирует нулевое среднее значение интерполяционного вейвлета, то есть $N_0 = 0$. Более того, процедура построения гарантирует существование p нулевых моментов $N_k = 0$, $k = 0, \ldots, p-1$ для интерполяционного вейвлета порядка p. Обратное вейвлетное преобразование заключается в инвертировании порядка операций прямого преобразования. Отметим, что в отличие от прямого вейвлетного преобразования, заключающегося в рекурсивном применении одношагового преобразования, начиная с самого высокого уровня разрешения, обратное преобразование начинается на нижнем уровне и заканчивается на высоком уровне разрешения.

Блок-схема одношагового вейвлетного преобразования показана на рис. 1.5, где S и S^{-1} обозначают соответственно операторы задержки и опережения, то есть $Su_k = u_{k-1}$ и $S^{-1}u_k = u_{k+1}$, символы $(\downarrow 2)$ и $(\uparrow 2)$ — операторы пониже-

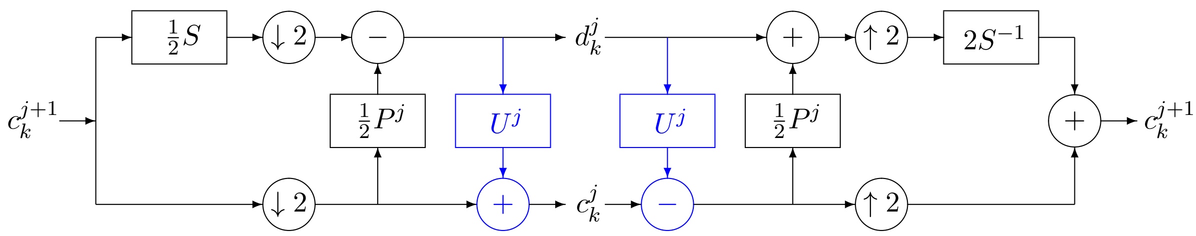


Рисунок 1.5 — Блок-схема вейвлетного преобразования второго поколения.

ния и повышения разрешения, а U^j и P^j — операторы предсказания и обновления. Простота вейвлетных преобразований второго поколения заключается в том, что коэффициенты $w_{k,l}^j$ оператора P^j являются весами интерполяционного полинома порядка $p - 1$, использующего p ближайших четных узлов x_k^j ($k \in \mathcal{I}_\varphi^j$). Аналогично, коэффициенты $\widetilde{w}_{k,l}^j$ оператора U^j являются весами интерполяционного полинома порядка $\widetilde{p} - 1$, использующего $\widetilde{p}$ ближайших нечетных узлов x_{2l+1}^{j+1} ($l \in \mathcal{I}_\psi^j$).

Скалярные функции второго поколения φ_m^j могут быть формально определены, задав коэффициенты $c_k^j = \delta_{k,m}$ для всех $k \in \mathcal{I}_\varphi^j$ и $d_l^{j'} = 0$ для всех $l \in \mathcal{I}_\psi^{j'}$, $j' \geqslant j$, а затем рекурсивно применяя обратное вейвлетное преобразование до произвольно высокого уровня разрешения $j_{\max}$, тем самым однозначно определяя значения скалярной функции φ_k^j в узлах $x_k^{j_{\max}}$. Аналогично, вейвлеты второго поколения ψ_l^j могут быть формально определены, задав $d_m^{j'} = \delta_{j',j}\delta_{l,m}$ для всех $l \in \mathcal{I}_\psi^j$, $j' \geqslant j$ и $c_k^j = 0$ для всех $k \in \mathcal{I}_\varphi^j$, а затем рекурсивно применяя обратное вейвлетное преобразование до произвольно высокого уровня разрешения $j_{\max}$. В результате такого построения, используя принцип суперпозиции, легко показать, что на каждом уровне разрешения $j_{\max}$ функция $u(x)$ может быть аппроксимирована следующим образом:

$$u^{j_{\max}}(x) = \sum_{k \in \mathcal{I}_\varphi^0} c_k^0 \varphi_k^0(x) + \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{l \in \mathcal{I}_\psi^j} d_l^j \psi_l^j(x). \tag{1.35}$$

Таким образом, в пределе $j_{\max} \to \infty$ вейвлетное разложение функции $u(x)$ принимает следующий вид:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathcal{I}_\varphi^0} c_k^0 \varphi_k^0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l \in \mathcal{I}_\psi^j} d_l^j \psi_l^j(x). \tag{1.36}$$

Отметим, что порядок интерполяционного полинома с нечётных в чётные узлы может отличаться от порядка интерполянта с чётных узлов на нечётные.

Таким образом, веса $\widetilde{w}^j_{k,l}$ определяются интерполяционным полиномом порядка $\widetilde{p}-1$, использующего $\widetilde{p}$ ближайших нечетных узлов. В результате интерполяционное вейвлетное преобразование контролируется двумя параметрами p и $\widetilde{p}$, при этом, как было показано в работах Свелденса [230; 231], параметры p в стадии предсказания (1.31) и $\widetilde{p}$ в стадии обновления (1.32) контролируют соответственно количество нулевых моментов скалярной функции и вейвлетов.

Вейвлеты легко обобщаются для многомерного случая. Существует два варианта обобщения: первый с использованием тензорного произведения [64], а второй — на основе прямого построения неразделимых многомерных вейвлетов [51]. В двумерном случае семейство тензорных вейвлетов задаётся как

$$\psi^{\mu,j}_{i,k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi^j_i(x_1)\,\varphi^j_k(x_2) & \mu=1 \\ \varphi^j_i(x_1)\,\psi^j_k(x_2) & \mu=2 \\ \psi^j_i(x_1)\,\psi^j_k(x_2) & \mu=3 \end{cases}, \tag{1.37}$$

при этом двумерная скалярная функция задаётся как $\varphi^j_{i,k}(\mathbf{x}) = \varphi^j_i(x_1)\,\varphi^j_k(x_2)$, где $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ — двумерная координата, а $\psi^j_i(x_1)$, $\psi^j_k(x_2)$ и $\varphi^j_i(x_1)$, $\varphi^j_k(x_2)$ — одномерные вейвлеты и скалярные функции. Точно так же семейство трёхмерных тензорных вейвлетов задаётся следующим образом:

$$\psi^{\mu,j}_{i,k,l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi^j_i(x_1)\,\varphi^j_k(x_2)\,\varphi^j_l(x_3) & \mu=1 \\ \psi^j_i(x_1)\,\varphi^j_k(x_2)\,\psi^j_l(x_3) & \mu=2 \\ \psi^j_i(x_1)\,\psi^j_k(x_2)\,\varphi^j_l(x_3) & \mu=3 \\ \varphi^j_i(x_1)\,\varphi^j_k(x_2)\,\psi^j_l(x_3) & \mu=5 \\ \varphi^j_i(x_1)\,\psi^j_k(x_2)\,\varphi^j_l(x_3) & \mu=6 \\ \varphi^j_i(x_1)\,\psi^j_k(x_2)\,\psi^j_l(x_3) & \mu=4 \\ \psi^j_i(x_1)\,\psi^j_k(x_2)\,\psi^j_l(x_3) & \mu=7 \end{cases} \tag{1.38}$$

с трёхмерной скалярной функцией, определённой как $\varphi^j_{i,k,l}(\mathbf{x}) = \varphi^j_i(x_1)\,\varphi^j_k(x_2)\,\varphi^j_l(x_3)$, где $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$ — трёхмерная координата, а $\psi^j_i(x_1)$, $\psi^j_k(x_2)$, $\psi^j_l(x_3)$ и $\varphi^j_i(x_1)$, $\varphi^j_k(x_2)$, $\varphi^j_l(x_3)$ — одномерные вейвлеты и скалярные функции.

Процесс построения n-мерного тензорного вейвлета второго поколения [231; 328], как и в одномерном случае, начинается с определения последовательности вложенных сеток

$$\mathcal{G}^j = \left\{\mathbf{x}^j_{\mathbf{k}} \in \Omega_{\mathrm{s}} : \mathbf{k} \in \mathcal{I}^j_{\varphi}\right\}, \quad j \in \mathcal{J}, \tag{1.39}$$

определённых в n-мерной прямоугольной области Ω_{s}, где $\mathcal{I}_{\varphi}^{j}$ — некое множество индексов скалярных функций уровня j, а $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$. Обратим внимание, что координаты сеточных узлов $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{j} = (x_{1,k_1}^{j}, \ldots, x_{n,k_n}^{j})$ соответствуют тензорному произведению одномерных вложенных сеток, при этом вложенность каждого множества одномерных сеток ($x_{m,k_l}^{j} = x_{m,2k_l}^{j+1}$, $m = 1, \ldots, n$) автоматически гарантирует вложенность n-мерной сетки, то есть $\mathcal{G}^{j} \subset \mathcal{G}^{j+1}$. Основное отличие построения вейвлетов в n-мерном пространстве заключается в существовании $2^n - 1$ семейств n-мерных вейвлетов. Следует отметить, что одношаговое прямое вейвлетное преобразование состоит из последовательного применения одношаговых одномерных вейвлетных преобразований, начиная с направления x_1, в то время как одношаговое обратное вейвлетное преобразование состоит из последовательного применения одношаговых одномерных обратных вейвлетных преобразований в противоположном порядке, начиная с направления x_n.

Как и в одномерном случае, функция $u(\mathbf{x})$ может быть представлена в виде вейвлетного разложения как

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}_{\varphi}^{0}} c_{\mathbf{k}}^{0} \varphi_{\mathbf{k}}^{0}(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{\mu=1}^{2^n-1} \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j}} d_{\mathbf{l}}^{\mu,j} \psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x}), \tag{1.40}$$

где $\varphi_{\mathbf{k}}^{j}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{k} \in \mathcal{I}_{\varphi}^{j}$) и $\psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{l} \in \mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j}$) — соответственно n-мерные тензорные скалярные функции и вейвлеты разных семейств, а $\mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j}$ — некое множество индексов вейвлетного семейства μ на уровне j.

Неразделимые многомерные вейвлеты могут быть построены на произвольном наборе узлов сетки. При заданных правилах «ленивого» вейвлетного преобразования процедура подъема аналогична одномерному случаю. Пример построения неразделимых вейвлетов приведен в работе [214], где вейвлеты построены на сфере с использованием треугольного разбиения. Основным преимуществом неразделимых многомерных вейвлетов является возможность их построения в произвольных областях, а основным недостатком является большая вычислительная стоимость по сравнению с тензорными вейвлетами, которая существенно возрастает с увеличением размерности пространства. Следует отметить, что все методы, обсуждаемые в диссертации, основаны на тензорных вейвлетах в связи с их вычислительной эффективностью.

1.3 Адаптивный вейвлетный коллокационный метод: ключевые компоненты

Ключевые компоненты адаптивного вейвлетного коллокационного метода (AWCM), описанного в этой главе, основаны на материалах, опубликованных в работах автора [323; 328; 329; 332].

Описание AWCM начнём с рассмотрения обобщённой системы уравнений математической физики, принимающей следующий вид:

$$\mathbf{F}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},\mathbf{u},\nabla\mathbf{u},\mathbf{x},t\right) = 0, \tag{1.41}$$

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{u},\nabla\mathbf{u},\mathbf{x},t\right) = 0, \tag{1.42}$$

где уравнение (1.41) описывает эволюцию во времени векторной функции $\mathbf{u}$, а уравнение (1.42) представляет граничные условия, определения потоков и, возможно, алгебраические/дифференциальные связи.

Численный метод формально основан на дискретизации системы уравнений (1.41), (1.42) в коллокационных узлах, приводящей к системе нелинейных обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих эволюцию решения в коллокационных точках. Для эффективного численного решения уравнений математической физики необходимо, с одной стороны, разрешить все структуры решения, а с другой — минимизировать количество неизвестных, что приводит к необходимости создания вычислительных подходов с динамической сеточной адаптацией, позволяющей динамически сгущать и разрежать вычислительную сетку, отражая локальные изменения структуры решения.

1.3.1 Вейвлетное пороговое сжатие

В вычислительных методах на основе вейвлетного анализа сеточная адаптация напрямую связана с процессом вейвлетного порогового сжатия решения [116; 149]. Для иллюстрации алгоритма рассмотрим функцию $u(\mathbf{x})$, определенную в замкнутой n-мерной прямоугольной области Ω_{s}. Основным достоинством вейвлетного разложения (1.40) является возможность сжатия функций. При вейвлетном разложении функций, содержащих изолированные мелкие структуры на фоне крупномасштабных структур, то есть функций с большой перемежаемостью, большинство вейвлетных коэффициентов малы. В результате хорошее приближение функции может быть сохранено даже после отбрасывания из вейвлетного разложения большого количества вейвлетов с малыми коэффициентами. Интуитивно понятно, что коэффициент $d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}$ мал, если в непосредственной близости от вейвлета $\psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x})$ не наблюдается изменений функции $u(\mathbf{x})$ на масштабе уровня j. Точнее, если вейвлетное разложение (1.40) переписать как сумму двух членов, состоящих из вейвлетов, нормированные коэффициенты которых по амплитуде соответственно больше и меньше некоего безразмерного порогового параметра ε

$$u(\mathbf{x}) = u_{\geqslant}(\mathbf{x}) + u_{<}(\mathbf{x}), \tag{1.43}$$

где

$$u_{\geqslant}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_{\varphi}^{0}} c_{\mathbf{k}}^{0}\varphi_{\mathbf{k}}^{0}(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{\mu=1}^{2^n-1}\sum_{\substack{\mathbf{l}\,\in\,\mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j}\\ |d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}|\,\geqslant\,\varepsilon\|u\|}} d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}\psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x}), \tag{1.44}$$

$$u_{<}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{\mu=1}^{2^n-1}\sum_{\substack{\mathbf{l}\,\in\,\mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j}\\ |d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}|\,<\,\varepsilon\|u\|}} d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}\psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x}), \tag{1.45}$$

символ $\|\cdot\|$ обозначает абсолютный (размерный) масштаб переменной u, то, как показано Донохо [75], для достаточно гладкой функции $u(\mathbf{x})$ выполняется следующее неравенство:

$$\|u(\mathbf{x}) - u_{\geqslant}(\mathbf{x})\|_{\infty} \leqslant C_1\varepsilon\|u\|. \tag{1.46}$$

Именно на этом свойстве вейвлетного сжатия и основан активный контроль ошибки аппроксимации всех численных алгоритмов на основе вейвлетного анализа. Для понимания механизма вейвлетной сеточной адаптации оценим величину коэффициента скалярной функции $c_{\mathbf{k}}^{j}$ для функции $u(\mathbf{x})$, который может быть найден из следующего выражения:

$$c_{\mathbf{k}}^{j} = \int_{\Omega_s}\widetilde{\varphi}_{\mathbf{k}}^{j}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})d\mathbf{x} = u(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{j}) + O(\Delta_j^p), \tag{1.47}$$

где Δ_j — сеточное разрешение в окрестности точки $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{j}$, $\widetilde{\varphi}_{\mathbf{k}}^{j}(\mathbf{x})$ — дуальная скалярная функция (раздел 1.2), удовлетворяющая условиям биортогональности

$$\int_{\Omega_s}\widetilde{\varphi}_{\mathbf{k}}^{j}(\mathbf{x})\varphi_{\mathbf{m}}^{j}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta_{\mathbf{km}}, \tag{1.48}$$

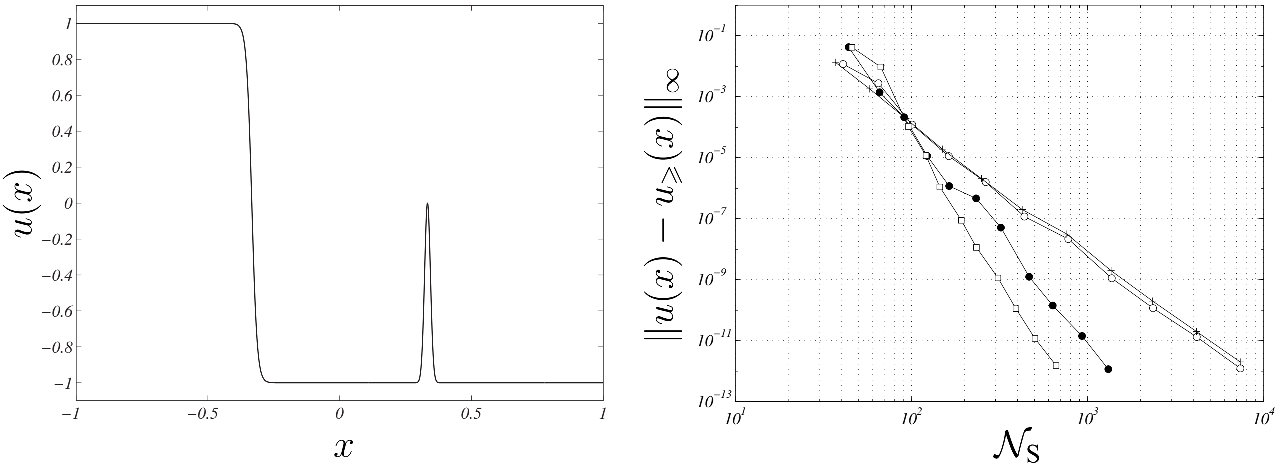


Рисунок 1.6 — Сходимость одномерного вейвлетного порогового интерполянта $u_{\geqslant}(x)$ для тестовой функции (1.51) (показанной слева) для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ ($\circ$); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ ($+$); $p = \widetilde{p} = 6$ ($\bullet$); $p = \widetilde{p} = 8$ ($\square$).

а $\delta_{\mathbf{km}}$ — n-мерный символ Кронекера. Оценка порядка поправочного члена в уравнении (1.47) получена из условия Странга—Фикса (1.19) и предположения, что функция в окрестности узла $\mathbf{x}_\mathbf{k}^j$ хорошо (асимптотически) разрешена на уровне разрешения j, а также из условия нормированного нулевого момента дуальной скалярной функции $\widetilde{M}_0 = 1$. Таким образом, вейвлетные коэффициенты, отброшенные из аппроксимации (1.44), могут быть оценены как величины порядка $O(\Delta_j^p)$. Как показано Донохо [75], из этой оценки вытекает, что количество значимых вейвлетных коэффициентов $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ ограничено пороговым параметром как

$$\mathcal{N}_\mathrm{S} \leqslant C_2 \varepsilon^{-n/p}, \tag{1.49}$$

где n — размерность задачи, а коэффициенты $C_i = O(1)$ зависят от $u(\mathbf{x})$. Отметим, что параметр p контролирует количество нулевых моментов скалярной функции. Напомним, что вейвлетное преобразование второго поколения характеризуется еще одним параметром $\tilde{p}$, описанным в подразделе 1.2.1 и определяющим количество нулевых моментов вейвлета. Объединяя уравнения (1.46) и (1.49), получаем следующую оценку ошибки вейвлетной аппроксимации (1.44) как функции от $\mathcal{N}_\mathrm{S}$

$$\|u(\mathbf{x}) - u_{\geqslant}(\mathbf{x})\|_\infty \leqslant C_3 \|u\| \mathcal{N}_\mathrm{S}{}^{-p/n}, \tag{1.50}$$

что подтверждает полиномиальную сходимость адаптивных вейвлетных методов.

Соответствие оценки ошибки вейвлетной пороговой аппроксимации (1.50) с результатами численных экспериментов продемонстрировано в одномерном

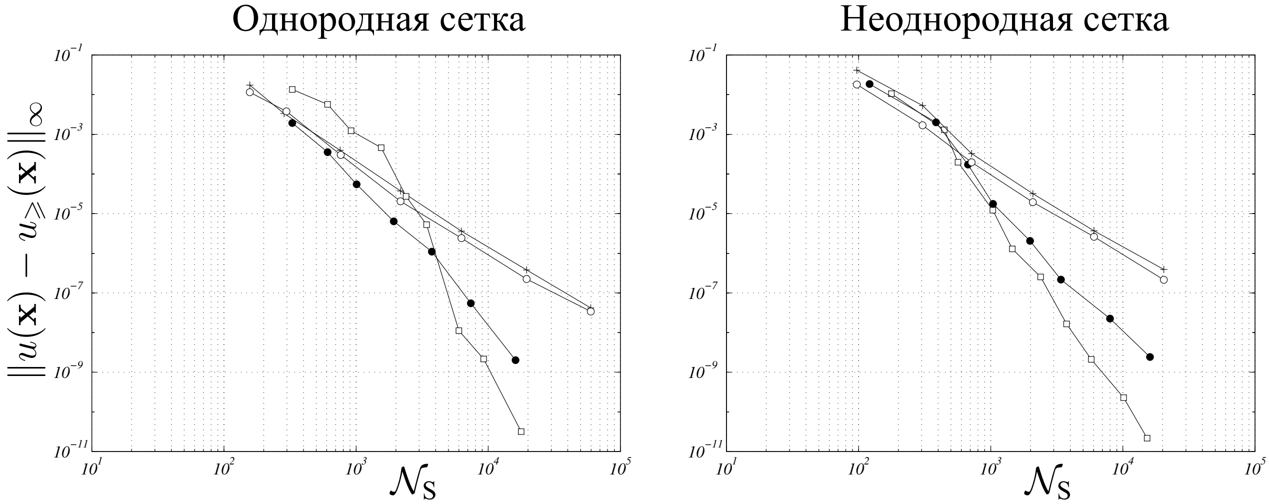


Рисунок 1.7 — Сходимость двумерного вейвлетного порогового интерполянта $u_{\geqslant}(\mathbf{x})$ для тестовой функции (1.52) для однородных и неоднородных сеток и разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ (+); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□).

случае в работе [329] для тестовой функции

$$u(x) = -\tanh\left(\frac{x + x_0}{2\nu}\right) + \exp\left(-64^2\,(x - x_0)^2\right) \tag{1.51}$$

с параметрами $x_0 = 1/3$ и $\nu = 10^{-2}$ и в двумерном случае в работе [328] для тестовой функции

$$u\,(x_1, x_2) = \exp\left(-\alpha\left(\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right) - \frac{1}{5}\sin\left(2\pi x_1\right)\sin\left(2\pi x_2\right) \tag{1.52}$$

с $\alpha = 200$ и $\mathbf{x} \in [0{,}1] \times [0{,}1]$. Результаты сходимости представлены на рисунках 1.6 и 1.7 для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$. В двумерном случае сходимость продемонстрирована как для однородных, так и для неоднородных сеток. В качестве неоднородной сетки рассмотрена сетка Гаусса—Лобатто, определённая как

$$x_{i,k}^j = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi k}{2^j K_i}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, 2^j K_i, \tag{1.53}$$

где K_i — количество узлов на самом грубом ($j = 0$) уровне разрешения в направлении x_i . Пример неоднородной сетки Гаусса—Лобатто в одноименном случае приведен на рис. 1.3.

1.3.2 Адаптивное вейвлетное преобразование второго поколения

Уравнения (1.46) и (1.50) составляют основу, позволяющую представление функции со значительно меньшим количеством степеней свободы, сохраняя при этом хорошее приближение. Однако для того, чтобы полностью реализовать все преимущества вейвлетного сжатия, необходимо иметь возможность восстановить функцию $u_{\geqslant}(\mathbf{x})$, используя только подмножество $\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$ *значимых* узлов сетки, в дальнейшем обозначаемых маской $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$ или $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}(u)$, определённой как

$$\mathcal{M}^{\mathrm{S}}(u) = \left\{ |d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}| \geqslant \varepsilon \|u\| : j \in \mathcal{J}, \mu \in [1,2^n - 1], \mathbf{l} \in \mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j} \right\}. \tag{1.54}$$

Как описано в разделе 1.2, каждая скалярная функция $\varphi_{\mathbf{k}}^{j}(\mathbf{x})$, $\mathbf{k} \in \mathcal{I}_{\varphi}^{j}$ взаимно однозначно соответствует узлу сетки $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{j}$, а каждый вейвлет $\psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x})$, $\mathbf{l} \in \mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j}$ однозначно ассоциирован с соответствующей коллокационной точкой, например, двумерные вейвлеты $\psi_{(l_1,l_2)}^{1,j}(\mathbf{x})$, $\psi_{(l_1,l_2)}^{2,j}(\mathbf{x})$ и $\psi_{(l_1,l_2)}^{3,j}(\mathbf{x})$ однозначно соответствуют узлам $(x_{1,2l_1+1}^{j+1}, x_{2,l_2}^{j})$, $(x_{1,l_1}^{j}, x_{2,2l_2+1}^{j+1})$ и $(x_{1,2l_1+1}^{j+1}, x_{2,2l_2+1}^{j+1})$. Таким образом, в вейвлетном пороговом разложении (1.44) существует взаимно однозначное соответствие между узлами адаптивной сетки и либо вейвлетами, либо скалярными функциями на самом грубом уровне разрешения, из чего следует, что узлы сетки должны быть удалены, если соответствующие им вейвлеты опущены из разложения (1.44). Следует отметить, что для сохранения среднего значения функции все узлы, ассоциированные со скалярными функциями на самом грубом уровне разрешения, должны присутствовать на адаптивной сетке, а значит должны быть автоматически включены в маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$.

Удаление коллокационных узлов только на основе анализа вейвлетных коэффициентов представляет потенциальную трудность с точки зрения возможности существования быстрого вейвлетного преобразования на адаптивной сетке. Поскольку при удалении узлов сетки информация о значении функции $u_{\geqslant}(\mathbf{x})$ в удалённых коллокационных точках перестаёт быть доступна, вычисление вейвлетных коэффициентов, использующих значения функции в удалённых узлах адаптивной сетки, может стать невозможным. Такая ситуация может быть предотвращена введением дополнительной процедуры проверки *восстановления* функции (RCP) [329], которая обеспечивает принудительное включение всех коллокационных точек на нижних уровнях разрешения

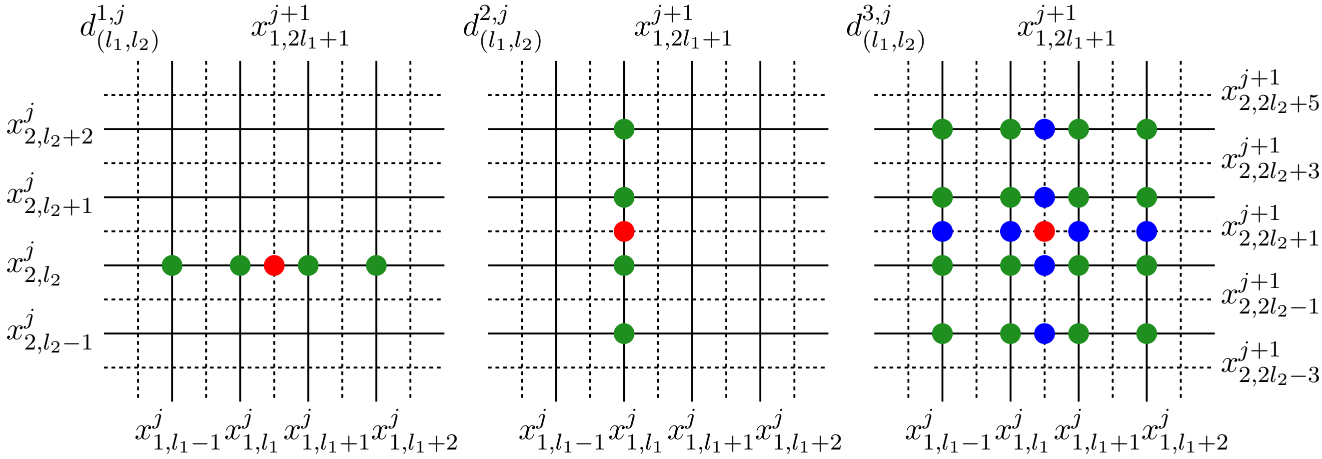


Рисунок 1.8 — Иллюстрация процедуры проверки восстановления функции для двумерного вейвлетного преобразования четвертого порядка ($p = 4$): узлы-предки на более грубом уровне разрешения j, обозначенные как •, и более высоком уровне разрешения $j + 1$, обозначенные как •, необходимые для вычисления вейвлетного коэффициента $d^{\mu,j}_{1}$, $\mu = 1, \ldots, 3$, обозначенного как •.

(узлов-предков), необходимых для рекурсивного вычисления вейвлетных коэффициентов $d^{\mu,j}_{1}$, принадлежащих маске $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$. Для иллюстрации процедуры проверки восстановления функции рассмотрим одношаговое прямое одномерное вейвлетное преобразование, заданное уравнениями (1.31) и (1.32). Для определения вейвлетного коэффициента d^j_l в стадии предсказания необходимы значения коэффициентов c^{j+1}_k в коллокационных точках, соответствующих вейвлету $\psi^j_l(x)$, то есть в коллокационной точке x^{j+1}_{2l+1} и p ближайших четных узлах сетки x^{j+1}_{2l+2m}. При этом для вычисления c^j_k в стадии обновления необходимы только ненулевые значения вейвлетных коэффициентов d^j_l.

В многомерном случае ситуация аналогична. Единственное различие состоит в том, что n-мерное вейвлетное преобразование состоит из последовательности n одномерных преобразований в направлениях x_i, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, для того, чтобы определить узлы-предки, необходимые для рекурсивного вычисления вейвлетного коэффициента $d^{\mu,j}_{1}$, процедура n-мерной проверки восстановления функции заключается в последовательном применении одномерной RCP процедуры в направлениях $i = n, \ldots, 1$, начиная с узла, соответствующего вейвлетному коэффициенту $d^{\mu,j}_{1}$ и последовательно включая все точки, необходимые для одномерного вейвлетного преобразования в x_l, $l = i + 1, \ldots, n$ направлениях. По окончании этой рекурсивной проверки будет определено минимальное множество узлов, необходимых для вычисления вейвлетного коэффициента $d^{\mu,j}_{1}$, при условии, что вейвлетные коэффициенты в узлах, не включенных в адаптивную сетку,

Алгоритм 1.1: Процедура проверки восстановления функции (RCP) для адаптивного вейвлетного преобразования: $\mathcal{M} \xrightarrow{\text{RCP}} \mathcal{M}$.

определить маску $\mathcal{M}$
for $j = j_{\max} : -1 : j_{\min}$ **do**
| **расширить** маску $\mathcal{M}$, включив в неё узлы-предки на уровне j
end
включить в маску $\mathcal{M}$ все узлы на уровне $j = j_{\min}$

имеют либо нулевые, либо пренебрежимо малые значения (ниже заранее установленного порога). Рисунок 1.8 иллюстрирует минимальное множество узлов сетки в двумерном случае, необходимых для вычисления вейвлетного коэффициента $d_1^{\mu,j}$, принадлежащего разным семействам вейвлетов, то есть $\mu = 1, \ldots ,2^n - 1$.

Прямое вейвлетное преобразование на такой адаптивной сетке идентично применению вейвлетного преобразования к функции $u_{\geqslant}(\mathbf{x})$ на неадаптивной сетке с последовательным обнулением всех коэффициентов в узлах, не принадлежащих адаптивной сетке. Критерий идентичного восстановления вейвлетно сжатой функции $u_{\geqslant}(\mathbf{x})$ назовём критерием *полного восстановления* функции [328; 329], а процедуру добавления дополнительных узлов в сетку, гарантирующую выполнение критерия полного восстановления функции, — процедурой проверки *восстановления* функции [328; 329]. Псевдокод процедуры проверки восстановления функции для произвольной маски $\mathcal{M}$ представлен в алгоритме 1.1, где $j_{\min}$ соответствует минимальному уровню разрешения, на котором все узлы (вейвлеты) принудительно включены. Применение этой процедуры к маске $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$, определённой выражением (1.54), расширяет маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$ и обеспечивает возможность её использования в адаптивном вейвлетном преобразовании.

1.3.3 Смежная область

При решении эволюционных или эллиптических задач необходимо использовать дополнительный механизм сеточной адаптации, который должен обеспечить достаточность сокращенного вейвлетного базиса для аппроксимации решения на адаптивной вычислительной сетке с априорно гарантированной точностью на следующем шаге по времени или следующей итерации. Один из самых

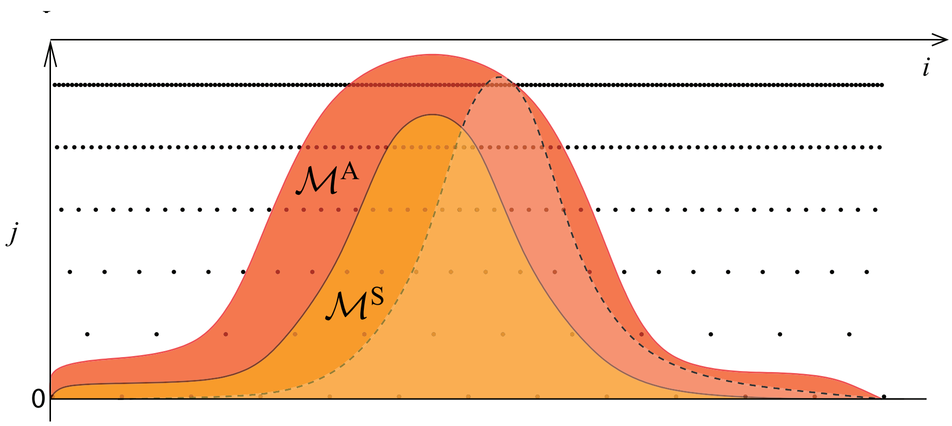


Рисунок 1.9 — Иллюстрация смежной области и сеточной адаптации на основе вейвлетного анализа в пространстве вейвлетных коэффициентов с уровнем разрешения j и индексом координаты i.

распространённых механизмов дополнительной сеточной адаптации основан на применении концепции смежной области или области безопасности [149], суть которой заключается во включении в вычислительную сетку узлов, связанных с вейвлетами, чьи коэффициенты являются или могут стать значимыми на следующем шаге по времени или следующей итерации, при которых адаптивная сетка не меняется. Другими словами, в произвольный момент времени или во время итерации вычислительная сетка должна включать в себя узлы, соответствующие вейвлетам, принадлежащим *смежной области* значимых вейвлетов $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$. Для удобства обсуждения обозначим объединённое множество значимых и смежных узлов маской $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$, а процедуру расширения маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$ до $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$ обозначим как $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$. Отметим, что $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$. Формально смежная область вейвлета $\psi_{\mathbf{l}}^{\mu,j}(\mathbf{x})$, соответствующего узлу $x_{\mathbf{k}}^{j+1}$, может быть определена как совокупность коллокационных точек $x_{\mathbf{k}'}^{j'+1}$, соответствующих вейвлетам $\psi_{\mathbf{l}'}^{\mu',j'}(\mathbf{x})$, для которых выполняется следующее условие:

$$|j - j'| \leqslant L, \quad |2^{j'-j} k_m - k'_m| \leqslant M, \quad m = 1, \ldots n, \tag{1.55}$$

где L определяет глубину включения узлов более высокого и более низкого уровней разрешения, а M — ширину смежной области в физическом пространстве. Значения L и M влияют на общее количество узлов адаптивной сетки $\mathcal{G}_{\geqslant}$ в определённый момент времени или для конкретной итерации, а также определяют временной интервал или количество итераций, в течение которых можно выполнять вычисления без изменения адаптивной сетки. С точки зрения вычислительной эффективности желательно минимизировать общее количество

Алгоритм 1.2: Сеточная адаптация на основе вейвлетного анализа.

оценить функцию $u(\mathbf{x})$ в узлах сетки $\mathcal{G}^{j_{\max}}$ или $\mathcal{G}_{\geqslant}$
выполнить прямое вейвлетное преобразование
for $j = j_{\min} : 1 : j_{\max}$ **do**
  создать маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} = \mathcal{M}^{\mathrm{S}}(u) = \left\{ |d_{\mathbf{l}}^{\mu,j}| \geqslant \varepsilon\|u\| : \mu \in [1,2^n-1], \mathbf{l} \in \mathcal{I}_{\psi}^{\mu,j} \right\}$
end
расширить маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
выполнить процедуру проверки восстановления функции
(алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

используемых узлов, при этом также минимизируя изменения адаптивной сетки. В работах автора [328; 329; 332] было показано, что оптимальной является смежная область, включающая непосредственных соседей значимых вейвлетов, то есть $L = M = 1$.

1.3.4 Сеточная адаптация на основе вейвлетного анализа

Принцип сеточной адаптации для эволюционных (параболических или гиперболических) или эллиптических задач проиллюстрирован на рис. 1.9, на котором показаны коллокационные точки, соответствующие местоположениям вейвлетов в физическом (индекс i) и волновом (уровень разрешения j) пространствах. Область значимых вейвлетов $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$ схематически обозначена оранжевым цветом под колоколообразной кривой. Более светлая колоколообразная область справа, окрашенная в розовый цвет, схематически обозначает область значимых вейвлетов в конце шага интегрирования или следующей итерации и, как правило, заранее не известна. Смежная область или область безопасности $\mathcal{M}^{\mathrm{A}}$ схематически обозначена терракотовым цветом. Наконец, объединение значимой и смежной областей задается маской $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$. Отметим, что большинство современных методов сеточной адаптации на основе вейвлетного анализа, включая AWCM, основано именно на принципе смежной области.

Псевдокод сеточной адаптации на основе вейвлетного анализа приведён в алгоритме 1.2. По завершении адаптации сетки формируется маска $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$, на основе которой строится множество вложенных адаптивных вычислительных сеток $\mathcal{G}^j_\geqslant = \left\{\mathbf{x}^j_\mathbf{k} \in \Omega_\mathrm{s} : \mathbf{k} \in \mathcal{I}^j_\varphi, \mathbf{x}^j_\mathbf{k} \in \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}\right\}$, для которых автоматически выполняется условие вложенности $\mathcal{G}^j_\geqslant \subset \mathcal{G}^{j+1}_\geqslant$ для любого уровня разрешения $j < j_{\max}$, где $j_{\max}$ — это самый высокий уровень разрешения, присутствующий в вейвлетном разложении (1.44).

1.3.5 Вычисление пространственных производных на адаптивной сетке

Эффективное и точное вычисление производных функции в коллокационных точках является одной из основных компонент вычислительного метода. В этом подразделе приведена процедура определения производных, описанная в работах автора [328; 329], в основе которой лежат многомасштабное вейвлетное разложение, быстрое адаптивное вейвлетное преобразование и конечно-разностное дифференцирование. Другими словами, разработанная процедура численного дифференцирования на адаптивной сетке использует основные преимущества вейвлетов: сжатие и интерполяцию, а конечно-разностные схемы применяются для дифференцирования локальных полиномиальных вейвлетных интерполянтов.

Процедура численного дифференцирования функции по её значениям в узлах адаптивной сетки основана на интерполяционных свойствах вейвлетов второго поколения. Как обсуждалось ранее, вейвлетные коэффициенты $d^{\mu,j}_\mathbf{l}$ являются мерой разности аппроксимаций функции на уровнях разрешения $j+1$ и j. Таким образом, если на адаптивной сетке в непосредственной близости от узла $\mathbf{x}^j_\mathbf{k}$ отсутствуют узлы более высокого уровня разрешения, то есть $|d^{\mu,j}_\mathbf{m}| < \varepsilon$ для всех соседних узлов, подразумевая, что адаптивная сетка $\mathcal{G}^{j+1}_\geqslant$ не содержит узлов $\mathbf{x}^{j+1}_{(2k_1\pm1,\ldots,2k_d\pm1)}$, то существует некая окрестность Ω^j_{sk} узла $\mathbf{x}^j_\mathbf{k}$, где функция хорошо аппроксимируется вейвлетным интерполянтом, использующим значения коэффициентов скалярных функций $c^j_\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} \in \mathcal{I}^j_\varphi$), то есть выполняется следующее неравенство:

$$\left| u(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{m}\in\mathcal{I}^j_\varphi} c^j_\mathbf{m} \varphi^j_\mathbf{m}(\mathbf{x}) \right| \leqslant \tilde{C}\varepsilon\|u\|, \quad \mathbf{x} \in \Omega^j_{\mathrm{sk}}. \tag{1.56}$$

Алгоритм 1.3: Вычисление производных на адаптивной сетке.

оценить функцию $u(\mathbf{x})$ в узлах сетки $\mathcal{G}^{j_{\max}}$ или $\mathcal{G}_{\geqslant}$

выполнить прямое вейвлетное преобразование для $u_{\mathbf{k}}$ на маске $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$

for $j = j_{\min} : 1 : j_{\max}$ **do**

  выполнить один шаг обратного вейвлетного преобразования на уровне j на маске $\mathcal{M}^{\text{S+A+G}}$

  вычислить производные в узлах, принадлежащих множеству $\mathcal{D}^j$

end

Для каждого уровня разрешения обозначим множество узлов, в окрестности которых выполняется условие (1.56), символом $\mathcal{D}^j$. Другими словами, $\mathcal{D}^j$ — это подмножество маски $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$, на котором производные оцениваются на уровне разрешения j, то есть

$$\mathcal{D}^j = \left\{ \mathbf{x}^j_{\mathbf{k}} \in \Omega_{\text{s}} : \ \mathbf{x}^j_{\mathbf{k}} \in \mathcal{M}^{\text{S+A}}, \text{дифференцирование на уровне } j \right\}. \qquad (1.57)$$

Отметим, что множества $\mathcal{D}^j$ ортогональны, то есть $\bigoplus\limits_{j=0}^{j_{\max}} \mathcal{D}^j = \mathcal{M}^{\text{S+A}}$. Результатом дифференцирования интерполянта (1.56) является аппроксимация производной функции в узле $\mathbf{x}^j_{\mathbf{k}}$. Конечно-разностный оператор, использующий значения вейвлетного интерполянта на уровне разрешения j, можно получить, переписав этот локальный интерполянт как полином Лагранжа порядка p, то есть того же порядка, что и вейвлетный интерполянт, затем продифференцировав этот полином и оценив результаты дифференцирования в узле $\mathbf{x}^j_{\mathbf{k}}$, при этом дифференциальный оператор может использовать значения интерполянта на уровне j не только в узлах адаптивной сетки, но и в *вспомогательных* узлах, не включённых в маску $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$. Определим множество значимых, смежных и вспомогательных узлов сетки маской $\mathcal{M}^{\text{S+A+G}}$. Таким образом, для того, чтобы определить производные в узлах, соответствующих маске $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$, необходимо интерполировать функцию в узлы, включённые в маску $\mathcal{M}^{\text{S+A+G}}$. Псевдокод для процедуры вычисления производных на адаптивной сетке приведен в алгоритме 1.3. Процедура, описанная в алгоритме 1.3, обеспечивает вычисление производных во всех узлах адаптивной сетки, при этом алгоритм вычисления производных асимптотически линеен, то есть $O(\mathcal{N}_{\text{S}})$, и практически равносилен стоимости прямого и обратного адаптивного вейвлетного преобразования.

Теперь рассмотрим точность процедуры вейвлетного дифференцирования. Предположим, что локальный вейвлетный интерполянт продифференцирован в

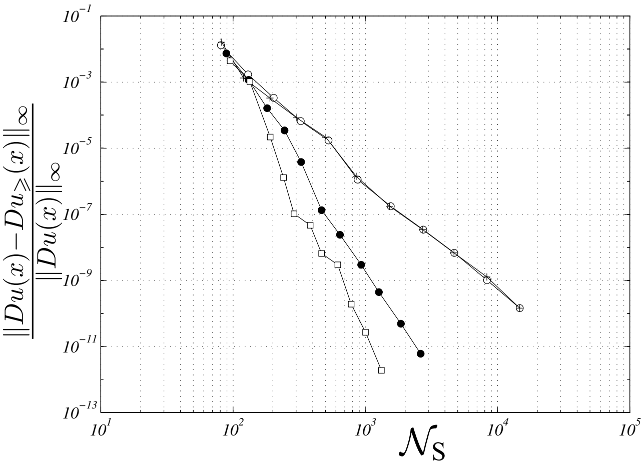


Рисунок 1.10 — Сходимость первой производной одномерного вейвлетного порогового интерполянта $u_{\geqslant}(x)$ для тестовой функции (1.51) для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ (+); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□).

узле $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{j} \in \mathcal{D}^{j}$, используя конечно-разностный оператор с локальным осреднённым по направлениям сеточным шагом Δ_j (подраздел 1.3.1). Из условия Странга—Фикса (1.19) и оценок ошибки аппроксимации (1.47) и (1.56) вытекает, что локальная ошибка вейвлетного интерполянта $(\Delta_j)^p = O(\varepsilon)$, из чего следует, что ошибка вычисления пространственной производной k-го порядка на основе полиномиальной аппроксимации может быть оценена как $(\Delta_j)^{p-k} = O\left(\varepsilon^{\frac{p-k}{p}}\right)$. Таким образом, в свете уравнения (1.49) ошибка вейвлетного дифференцирования оценивается как

$$\left\|D_{x_i}^k u(\mathbf{x}) - D_{x_i}^k u_{\geqslant}(\mathbf{x})\right\|_{\infty} \leqslant C_5 \left\|D_{x_i}^k u(\mathbf{x})\right\|_{\infty} \mathcal{N}_{\mathrm{S}}^{-(p-k)/n}, \qquad (1.58)$$

где символ $D_{x_i}^k$ представляет оператор дифференцирования k-го порядка в направлении x_i. Результаты численной проверки сходимости (1.58) для тестовых функций (1.51) и (1.52) для одномерного [329] и двумерного [328] случаев приведены на рисунках 1.10 и 1.11 для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$. По аналогии с результатами сходимости, приведёнными в подразделе 1.3.1, в двумерном случае сходимость также продемонстрирована как для однородных, так и для неоднородных сеток, где в качестве неоднородной сетки рассмотрена сетка с распределениями Гаусса—Лобатто (1.53) в обоих направлениях.

Сеточная адаптация на основе вейвлетного анализа, быстрое $O(\mathcal{N}_{\mathrm{S}})$ адаптивное вейвлетное преобразование и быстрое $O(\mathcal{N}_{\mathrm{S}})$ вейвлетное дифференцирование на адаптивной сетке составляют три основные компоненты адаптивного

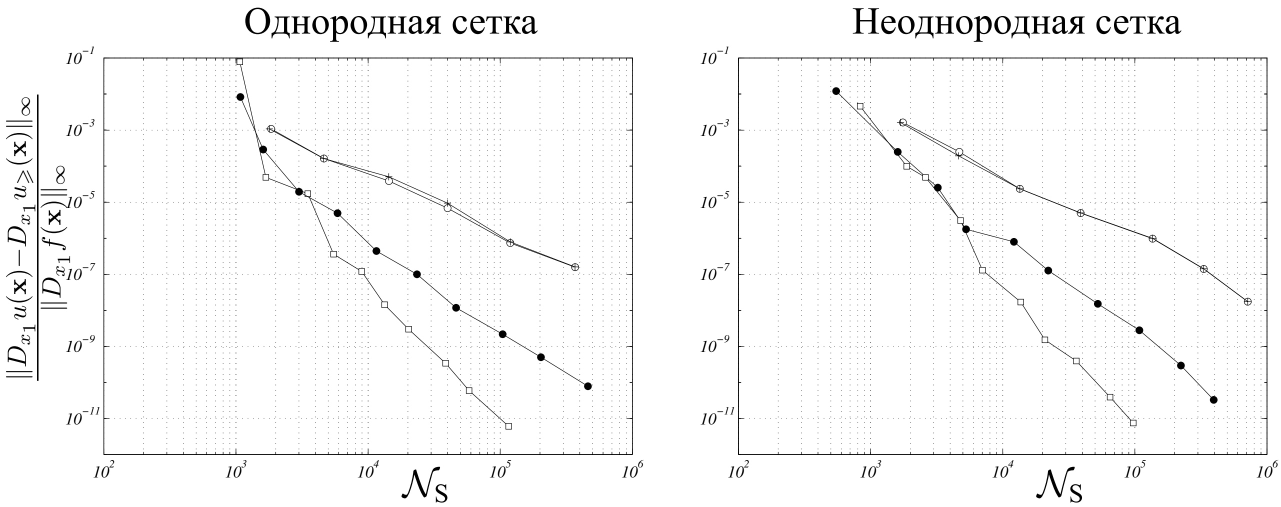


Рисунок 1.11 — Сходимость первой производной двумерного вейвлетного порогового интерполянта $u_{\geqslant}(x)$ для тестовой функции (1.52) для однородных и неоднородных сеток и разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ (+); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□).

вейвлетного коллокационного метода (AWCM) для решения уравнений математической физики эллиптического, параболического и гиперболического типа, соответственно рассмотренных в разделах 1.4, 1.5 и 1.6.

1.4 Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения эллиптических уравнений

Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения эллиптических уравнений, представленный в этом разделе, основан на материалах, опубликованных в статье автора [332].

Рассмотрим линейное эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, записанное в общем виде как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{u} &= \mathbf{f} \quad \text{on } \Omega_\mathrm{s} \subset \mathbb{R}^d, \\ \mathcal{B}\mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{on } \partial\Omega_\mathrm{s}, \end{aligned} \tag{1.59}$$

где $\mathcal{L}$ — линейный эллиптический оператор, $\mathcal{B}$ — оператор граничных условий, а $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — источниковые члены. В этом разделе описан многоуровневый AWCM для определения численного решения $\mathbf{u}$ с условием сходимости невязки $||\mathcal{L}\mathbf{u}-\mathbf{f}||_\infty <$

δ_ε для заданных оператора $\mathcal{L}$ и источника $\mathbf{f}$ на вычислительной сетке, автоматически адаптирующейся к решению задачи с заданной точностью δ_ε.

Численный метод формально основан на дискретизации системы уравнений (1.59) в узлах сетки. Как уже обсуждалось в разделе 1.3, для точного и эффективного решения системы уравнений (1.59) необходимо использовать вычисленный метод с сеточной адаптацией, позволяющей сгущать и разрежать сетку, в зависимости от структуры решения. AWCM для решения эллиптических задач состоит из двух взаимосвязанных частей: глобального адаптивного вейвлетного эллиптического решателя, позволяющего получить решение на оптимально-адаптивной (сжатой) сетке, и локального вейвлетного решателя для численного решения эллиптической задачи на адаптивной, но фиксированной вычислительной сетке. Глобальный решатель основан на общей инфраструктуре вейвлетной сеточной адаптации, описанной в подразделе 1.3.4. Локальный решатель представляет собой многоуровневый итерационный метод, очень похожий на многосеточный метод [25; 26; 28; 112; 219; 249; 266; 290; 291], но отличающийся структурой вложенных сеток и применением вейвлетной интерполяции как для операторов пролонгации, так и для операторов ограничения.

1.4.1 Глобальный адаптивный вейвлетный эллиптический решатель

Стратегия построения адаптивной вычислительной сетки, или эквивалентно маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}$, описанная в подразделе 1.3.2, предполагает знание решения на самом высоком уровне разрешения, которое можно записать в сжатом виде, используя вейвлетное сжатие. Однако при решении задач математической физики желательно сразу получить решение в сжатом виде без дополнительных вычислительных затрат для решения задачи на неадаптивной сетке, которые могут быть существенными при наличии сильно локализованных структур. Для эффективного численного решения эллиптических задач с высокой степенью локализации алгоритм должен быть основан на итеративной адаптации сетки. Один из способов итеративной сеточной адаптации основан на получении начального приближения на грубой сетке с последующей итеративной адаптацией сетки на основе анализа вейвлетных коэффициентов решения, которые являются или могут стать значимыми на следующей итерации. Другими словами, как уже обсуждалось в подразделе 1.3.3, вычислительная сетка должна включать в себя не только узлы, связанные с вейвлетами, чьи коэффициенты по величине больше заданного порога ε, но и с вейвлетами, принадлежащими к *смежной* области, заданной уравнением (1.55). Как обсуждалось в подразделе 1.3.3, значения L и M влияют на общее количество адаптивных узлов сетки $\mathcal{G}_{\geqslant}$. В контексте эллиптических задач оптимальными являются значения параметров $L = M = 1$, обеспечивающие минимальную смежную область, включающую в себя только ближайших соседей на том же уровне, а также на следующем, более высоком, и предыдущем, более низком, уровнях разрешения.

Псевдокод глобального адаптивного вейвлетного итерационного метода для решения эллиптических задач приведен в алгоритме 1.4. Обратим внимание, что $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m}$ обозначает дискретизированную векторную функцию $\mathbf{u}$ со значениями в узлах сетки $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^{j_{\max}} \in \mathcal{G}_{\geqslant m}^{j_{\max}}$ во время m-ой итерации, $v_r(\mathbf{x})$, $r = 1, \ldots, N_c$ — управляющие переменные, используемые для адаптации сетки, а N_c — число управляющих переменных. В вышеописанном алгоритме узлы сетки непрерывно адаптируются к локальным структурам численного решения. Следует подчеркнуть, что ошибка вейвлетной аппроксимации решения автоматически контролируется пороговым параметром ε, исключая из адаптивного вейвлетного разложения вейвлеты с коэффициентами ниже заданного порога. Таким образом, вейвлетный коллокационный метод обладает очень важным свойством — активным контролем ошибки решения: чем меньше значение порогового параметра ε, тем меньше ошибка решения. Для большинства прикладных задач при правильной нормализации переменных обычно используются пороговые параметры в диапазоне между 10^{-6} и 10^{-3}. Также отметим, что наименьший масштаб, присутствующий в вейвлетной аппроксимации (1.44), контролируется пороговым параметром ε, так как вейвлеты более высокого уровня разрешения добавляются автоматически, используя механизм смежной области.

Следует отметить, что алгоритм сеточной адаптации может быть основан на различных критериях. Например, адаптивная вычислительная сетка может быть построена на основе анализа вейвлетных коэффициентов управляющих переменных, $v_r(\mathbf{x})$, которые могут быть как функциями решения и его производных, так и источниковыми членами. При решении системы уравнений сеточная адаптация осуществляется на основе анализа вейвлетных коэффициентов всех компонент решения или управляющих переменных. Адаптивная сетка $\mathcal{G}_{\geqslant} = \mathcal{G}_{\geqslant}^{j_{\max}}$ может быть построена как объединение адаптивных сеток, построенных на вейвлетном

Алгоритм 1.4: AWCM для решения эллиптических задач.

начальное приближение $(m = 0)$: $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m}$ и $\mathcal{G}_{\geqslant m}^{j_{\max}}$

while $m = 0$ **или** $\Big\{ m > 0$ **и** $\Big\{ \mathcal{G}_{\geqslant m}^{j_{\max}} \neq \mathcal{G}_{\geqslant m-1}^{j_{\max}}$ **или** $\|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m} - \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m-1}\|_{\infty} > \delta_{\varepsilon} \Big\}\Big\}$

do

- **выполнить** прямое вейвлетное преобразование для каждой из компонент решения $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m}$
- **for** $j = j_{\max} : -1 : j_{\min}$ **do**
  - **создать** маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} = \bigcup\limits_{r=1}^{N_c} \mathcal{M}^{\mathrm{S}}\big(v_r(\mathbf{x},t)\big)$
- **end**
- **расширить** маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
- **выполнить** процедуру проверки восстановления функции (алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
- **построить** $\mathcal{G}_{\geqslant m+1}^{j_{\max}}$ на основе маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
- **добавить** вспомогательную маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\bigoplus_{j=0}^{j_{\max}} \mathcal{D}^j} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$
- **выполнить** процедуру проверки восстановления функции (алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$
- **if** $\mathcal{G}_{\geqslant m+1}^{j_{\max}} \neq \mathcal{G}_{\geqslant m}^{j_{\max}}$ **then**
  - **проинтерполировать** решение $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m}$ на сетку $\mathcal{G}_{\geqslant m+1}^{j_{\max}}$
- **end**
- **решить** систему уравнений (1.59), используя алгоритм 1.5
- $m = m + 1$

end

анализе каждой из переменных. Подчеркнём, что алгоритм может быть обобщён на случай, когда используются разные адаптивные сетки для каждой из переменных. Однако применение множества сеток неэффективно, так как дополнительные вычислительные затраты, связанные с межсеточной интерполяцией, существенно выше, чем для случая одной общей сетки.

Следует подчеркнуть, что алгоритм 1.4 также может быть использован для получения сжатого начального условия и начальной адаптивной сетки для эволюционных задач, описанных в разделах 1.5 и 1.6. Алгоритм 1.4 может быть применён практически без изменений для задач с начальными условиями, заданными алгебраической системой уравнений. При решении эволюционных задач с аналитическими начальными условиями численное решение системы (1.59) в алгоритме 1.4 заменяется аналитическим выражением.

1.4.2 Локальный многоуровневый итерационный вейвлетный коллокационный эллиптический решатель

Алгоритм, представленный в этом подразделе, может быть применён как для решения эллиптических уравнений на одной из стадий итеративной сеточной адаптации, описанной в подразделе 1.4.1, так и для решения уравнений дифференциальных связей в эволюционных задачах, таких как уравнение неразрывности в уравнениях Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, где для выполнения условия несжимаемости решается уравнение Пуассона для давления.

Многоуровневая структура вейвлетного разложения обеспечивает естественный механизм для итеративных V-циклов на адаптивной сетке $\mathcal{G}_{\geqslant}$. Напомним, что адаптивная вычислительная сетка $\mathcal{G}_{\geqslant} = \mathcal{G}_{\geqslant}^{j_{\max}}$ построена как множество вложенных адаптивных вычислительных сеток $\mathcal{G}_{\geqslant}^{j} \subset \mathcal{G}_{\geqslant}$, для которых автоматически выполняется условие вложенности $\mathcal{G}_{\geqslant}^{j} \subset \mathcal{G}_{\geqslant}^{j+1}$ для всех $j < j_{\max} - 1$, где $j_{\max}$ — максимальный уровень разрешения. Такая структура вложенных сеток обеспечивает механизм, позволяющий использовать решение с более грубого уровня для улучшения аппроксимации решения на более высоком уровне.

Псевдокод для локального эллиптического решателя (без сеточной адаптации) приведён в алгоритме 1.5, где $\mathbf{U}^j = \left\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^j) : \mathbf{x}_{\mathbf{k}}^j \in \mathcal{G}_{\geqslant}^j\right\}$ и $\mathbf{F}^j = \left\{\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}^j)) : \mathbf{x}_{\mathbf{k}}^j \in \mathcal{G}_{\geqslant}^j\right\}$ — векторы, содержащие соответственно решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и источниковый член $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в узлах адаптивной сетки $\mathcal{G}_{\geqslant}^j$, оператор $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ является дискретным аналогом оператора $\mathcal{L}$, j_0 и $j_{\max}$ — соответственно нижний и верхний уровни разрешения, на которых выполняются итерации, ν_1 и ν_2 — соответственно количество операций сглаживания V-цикла, ν_3 — это число итераций точного решателя, ω_0 и ω_1 — параметры демпфирования, а символы $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{w}}^{j}$ соответственно обозначают вейвлетные операторы ограничения и пролонгации. Многоуровневый итерационный алгоритм 1.5 аналогичен многосеточному методу [25; 26; 28; 112; 219; 249; 266; 290; 291]. Главное сходство заключается

Алгоритм 1.5: Локальный многоуровневый итерационный вейвлетный эллиптический решатель.

while $\|\mathbf{F}^{j_{\max}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^{j_{\max}}\|_\infty > \delta_\varepsilon$ **do**
 $\mathbf{r}^{j_{\max}} = \mathbf{F}^{j_{\max}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^{j_{\max}}$
 for $j = j_{\max} : -1 : j_0 + 1$ **do**
  ν_1 итераций **приближенного** решателя для $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{V}^j = \mathbf{r}^j$
  $\mathbf{r}^{j-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\left(\mathbf{r}^j - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{V}^j\right)$
 end
 получить численное решение на уровне $j = j_0$: $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{V}^j = \mathbf{r}^j$
 for $j = j_0 + 1 : 1 : j_{\max}$ **do**
  обновить: $\mathbf{V}^j \leftarrow \mathbf{V}^j + \omega_0\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{w}}^j\mathbf{V}^{j-1}$
  ν_2 итераций **приближенного** решателя для $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{V}^j = \mathbf{r}^j$
 end
 обновить: $\mathbf{U}^{j_{\max}} \leftarrow \mathbf{U}^{j_{\max}} + \omega_1\mathbf{V}^{j_{\max}}$
 ν_3 итераций **точного** решателя для $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^{j_{\max}} = \mathbf{F}^{j_{\max}}$
end

в том, что оба метода основаны на рекурсивном уточнении решения с использованием поправки с более грубого уровня. Оба алгоритма также используют *приближенные* итерационные решатели низкого порядка для сглаживания ошибки в уравнении невязки и точные решатели высокого порядка на самом высоком уровне разрешения для коррекции решения и вычисления невязки, используемой приближенным решателем.

Основные отличия между многоуровневым вейвлетным и многосеточным алгоритмами проявляются в деталях реализации. Одним из главных отличий является структура вложенных сеток. В отличие от многосеточного метода, в многоуровневом вейвлетном методе сетка более низкого уровня разрешения не обязательно разрежена во всей области и в некоторых её частях может полностью совпадать с сеткой более высокого или низкого уровней разрешения. Вторым отличием является применение вейвлетного адаптивного коллокационного метода низкого порядка для вычисления производных в приближенном операторе вейвлетного эллиптического решателя. В-третьих, в вейвлетном многоуровневом решателе в качестве операторов пролонгации и ограничения используются соответственно вейвлетная интерполяция и вейвлетная проекция на более низкий уровень разрешения.

Численные результаты, описанные в этом подразделе, получены для одинаковых параметров демпфирования и взвешенного метода Якоби с весом $2/3$ для оптимальной сходимости. Результаты численных экспериментов также подтвердили оптимальность веса $2/3$. Отметим также, что, как и в многосеточных методах, BI-CGSTAB [240] и GMRES [208] методы применялись в качестве точного решателя на самом высоком уровне разрешения.

1.4.3 Обсуждение результатов

В этом подразделе точность и эффективность AWCM продемонстрированы для ряда двух- и трёхмерных тестовых линейных эллиптических задач. Обобщение метода для нелинейного случая обсуждается в главе 3 в контексте пространственно-временного адаптивного вейвлетного коллокационного метода (ST-AWCM).

Постановка тестовых задач

I. *Двумерная эллиптическая задача.* В качестве первой тестовой задачи рассмотрим двумерное уравнение Пуассона

$$\Delta u = f, \tag{1.60}$$

где символ Δ обозначает оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \tag{1.61}$$

f — локализованный источник, выбранный таким образом, что решение уравнения Пуассона описывается следующим выражением:

$$u\,(x_1,x_2) = 1 + \exp\left(-\frac{\left(x_1'\right)^2 + \left(x_2'\right)^2}{2\mu_1}\right) + \exp\left(-\frac{\left(x_1''\right)^2}{2\mu_2}) - \frac{\left(x_2''\right)^2}{2\mu_3}\right), \tag{1.62}$$

где $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{R}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\right)$, $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$ — константные параметры, а матрица $\mathbf{R}$ — матрица поворота, заданная углом θ как

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Начальное приближение на грубой сетке и граничные условия Дирихле получены из аналитического решения (1.62). Уравнение Пуассона (1.60) решено для следующих значений параметров: $\mathbf{x}_0 = (0.2{,}0.1)$, $\mathbf{x}_1 - = (-0.25, -0.25)$, $\theta = 60°$, $\mu_1 = 10^{-2}$, $\mu_2 = 10^{-3}$, $\mu_3 = 10^{-1}$.

II. *Трёхмерная эллиптическая задача*. В качестве второй тестовой задачи рассмотрим трёхмерное уравнение Пуассона (1.60) с трёхмерным оператором Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.63}$$

и локализованным источником f, выбранным таким образом, что решение задачи (1.60) описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} u\left(x_1{,}x_2\right) = 1 + \exp\left(-\frac{\left(x_1'\right)^2 + \left(x_2'\right)^2 + \left(x_3'\right)^2}{2\mu_1}\right) \\ + \exp\left(-\frac{\left(x_1''\right)^2}{2\mu_2} - \frac{\left(x_2''\right)^2}{2\mu_3} - \frac{\left(x_3''\right)^2}{2\mu_4}\right), \end{aligned} \tag{1.64}$$

где $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{R}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\right)$, $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$ — константные параметры, а матрица $\mathbf{R}$ — матрица поворота, заданная углами ξ, η и ζ как

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\zeta)\cos(\eta)\cos(\xi) - \sin(\zeta)\sin(\xi) & \cos(\zeta)\cos(\eta)\sin(\xi) + \sin(\zeta)\sin(\xi) & -\cos(\zeta)\sin(\eta) \\ -\sin(\zeta)\cos(\eta)\cos(\xi) - \cos(\zeta)\sin(\xi) & -\sin(\zeta)\cos(\eta)\sin(\xi) + \cos(\zeta)\cos(\xi) & \sin(\zeta)\sin(\eta) \\ \sin(\eta)\cos(\xi) & \sin(\eta)\sin(\xi) & \cos(\eta) \end{bmatrix}.$$

Начальное приближение на грубой сетке и граничные условия Дирихле получены из аналитического решения (1.64). Уравнение Пуассона (1.60) решено для следующих значений параметров: $\mathbf{x}_0 = (-0.5, -0.5, -0.5)$, $\mathbf{x}_1 = (0.2{,}0.15{,}0.1)$, $\xi = 45°$, $\eta = -45°$ и $\zeta = 30°$, $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_3 = 2 \times 10^{-2}$, $\mu_4 = 5 \times 10^{-1}$.

Сходимость глобального адаптивного вейвлетного эллиптического решателя

Начнем с рассмотрения стратегии сеточной адаптации, описанной в алгоритме 1.4. Последовательность адаптивных вычислительных сеток $\mathcal{G}_{\geqslant}^{m}$ для первой

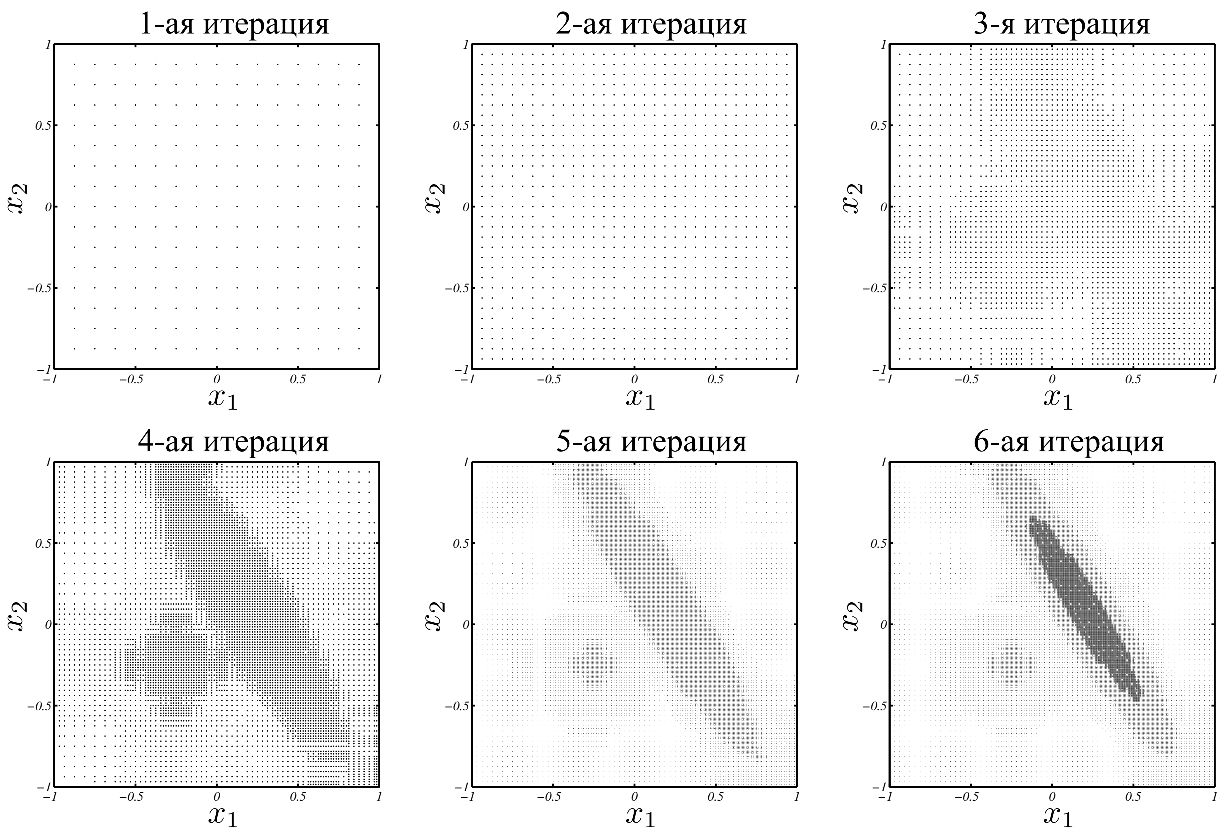


Рисунок 1.12 — Адаптивные вейвлетные сетки $\mathcal{G}^m_{\geqslant}$ ($m = 1, \ldots, 6$) для последовательности глобальных итераций ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

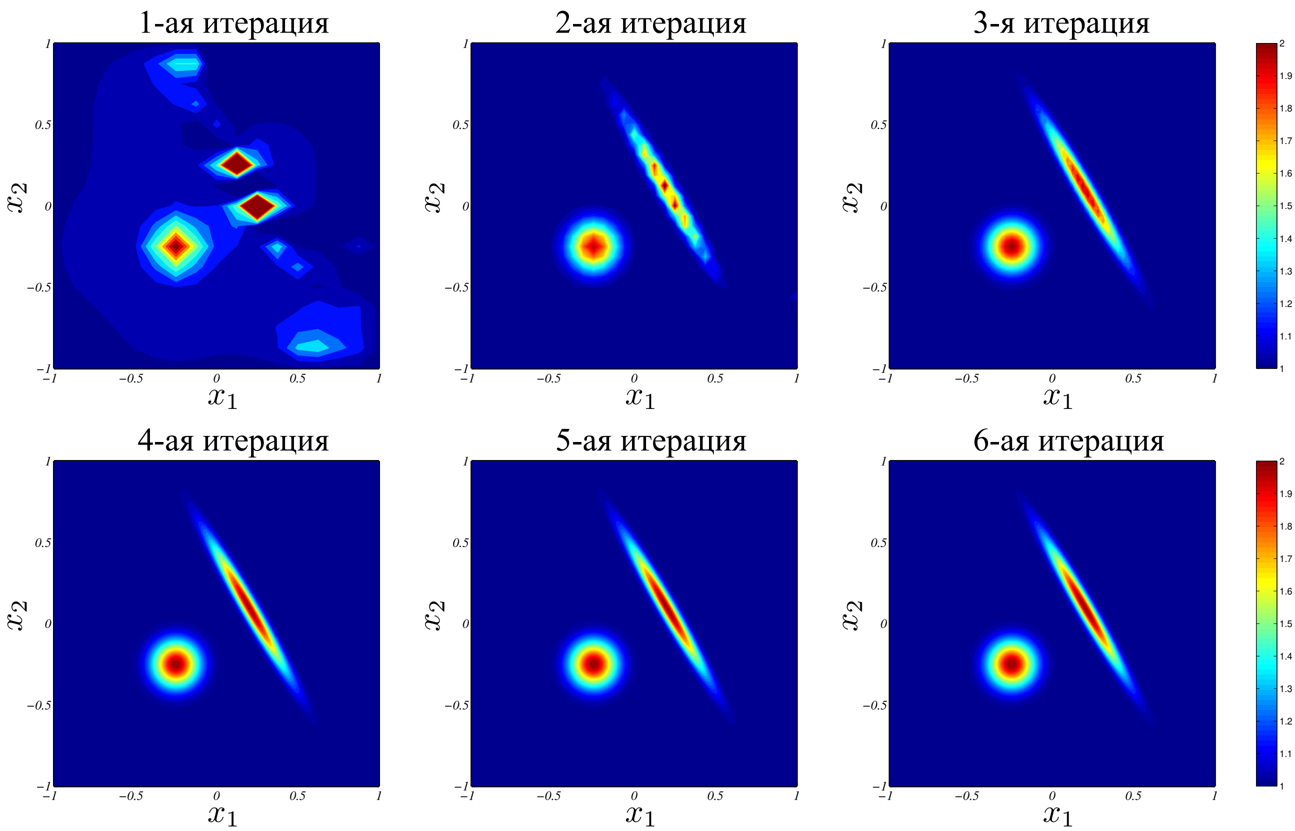


Рисунок 1.13 — Решения эллиптической задачи (1.60), соответствующие адаптивным вычислительным сеткам, приведённым на рис. 1.12 ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

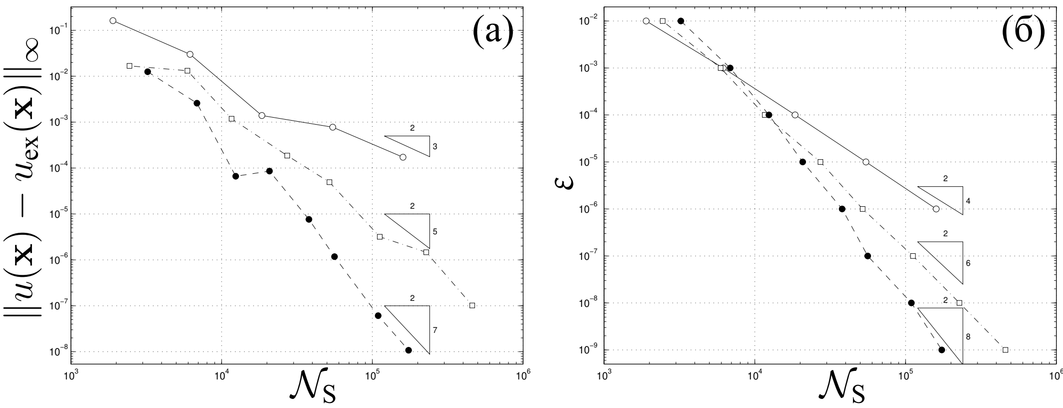


Рисунок 1.14 — Зависимость поточечной L_∞ ошибки численного решения эллиптической задачи (1.60) (а) и количества адаптивных узлов сетки $\mathcal{N}_\text{S}$ (б) от ε для различных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = \widetilde{p} = 6$ (□); $p = \widetilde{p} = 8$ (●). Треугольники обозначают скорости сходимости, соответственно предсказанные выражениями (1.58) и (1.50).

тестовой задачи приведена на рис. 1.12 для вейвлетов порядка $p = \tilde{p} = 6$ и безразмерного вейвлетного порогового параметра $\varepsilon = 10^{-5}$. Сравнивая структуры адаптивных сеток с соответствующим решением, приведённым на рис. 1.13, легко заметить, что область с высоким разрешением соответствует локальным структурам решения. Отметим, что вычислительная сетка для цилиндрической локальной структуры не меняется между 5-ой и 6-ой итерациями, что указывает на полное разрешение структуры для заданного порога ε.

Рисунки 1.12 и 1.13 иллюстрируют процесс сеточной адаптации. Для количественного описания необходимо рассмотреть сходимость глобального эллиптического решателя. Следует подчеркнуть, что сходимость адаптивных вейвлетных алгоритмов отличается от традиционной сходимости, достигаемой последовательным увеличением уровня разрешения неадаптивной сетки. В вейвлетных алгоритмах сходимость проверяется последовательным уменьшением величины порогового параметра ε, что приводит к соответствующему увеличению максимального уровня разрешения, необходимого для аппроксимации решения с заданной точностью. Отметим, что при изучении сходимости вейвлетных адаптивных методов уровень максимального разрешения не определяется заранее, а получается в процессе вейвлетной адаптации и зависит от величины ε. Таким образом, изучение сходимости вейвлетного эллиптического решателя осуществляется посредством последовательного уменьшения величины порогового параметра, сравнивая итоговое численное решение с аналитическим. Уменьше-

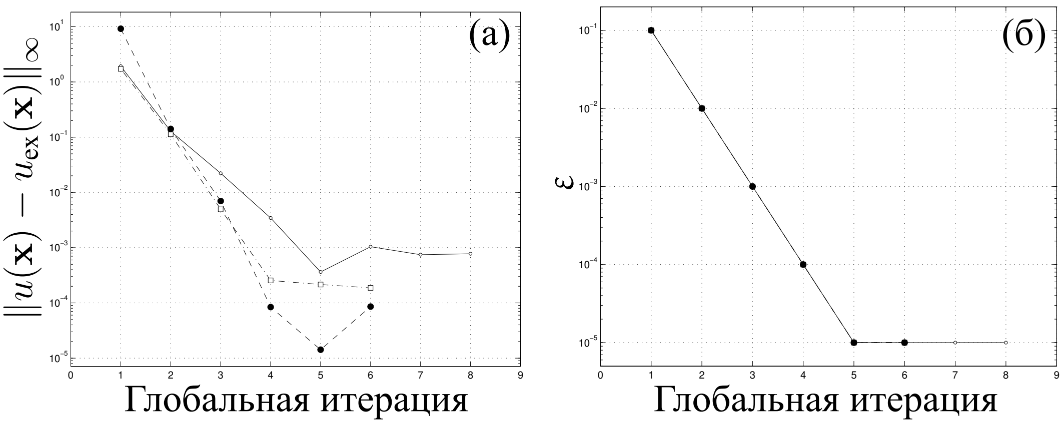


Рисунок 1.15 — Зависимость поточечной L_∞ ошибки численного решения эллиптической задачи (1.60) (а) и величины порогового параметра ε (б) от глобальной итерации для $\varepsilon = 10^{-5}$ и различных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = \widetilde{p} = 6$ (□); $p = \widetilde{p} = 8$ (●).

ние параметра ε приводит к увеличению количества узлов адаптивной сетки и максимального уровня разрешения. В случае сходимости ошибка численного решения пропорциональна значению порогового параметра. Более того, так как количество узлов адаптивной сетки зависит от ε в соответствии с выражением (1.49), то зависимость ошибки решения от числа узлов адаптивной сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ определяется выражением (1.58). Для увеличения вычислительной эффективности глобального эллиптического решателя значение порогового параметра последовательно уменьшалось от $\varepsilon = 10^{-1}$ до желаемого уровня, при этом при переходе на следующую глобальную итерацию параметр ε уменьшался в 10 раз до достижения желаемого значения, после чего порог оставался неизменным до полной сходимости решения и вычислительной сетки согласно критерию сходимости, описанному в алгоритме 1.4.

Результаты сходимости двумерной эллиптической задачи представлены на рис. 1.14а, где показана зависимость поточечной L_∞ ошибки численного решения от количества узлов адаптивной сетки. Численные результаты подтверждают соответствие с аналитической оценкой сходимости (1.58), для удобства обозначенной треугольниками. Зависимость количества узлов сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от величины порогового параметра ε показана на рис. 1.14б. Также как и в предыдущем случае, зависимость $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от ε согласуется с аналитической оценкой (1.49), для удобства обозначенной треугольниками. Эти результаты наглядно демонстрируют сходимость численного метода при уменьшении ε. Отметим, что, как правило, численная ошибка решения немного больше, чем ε, но имеет тот же порядок. Та-

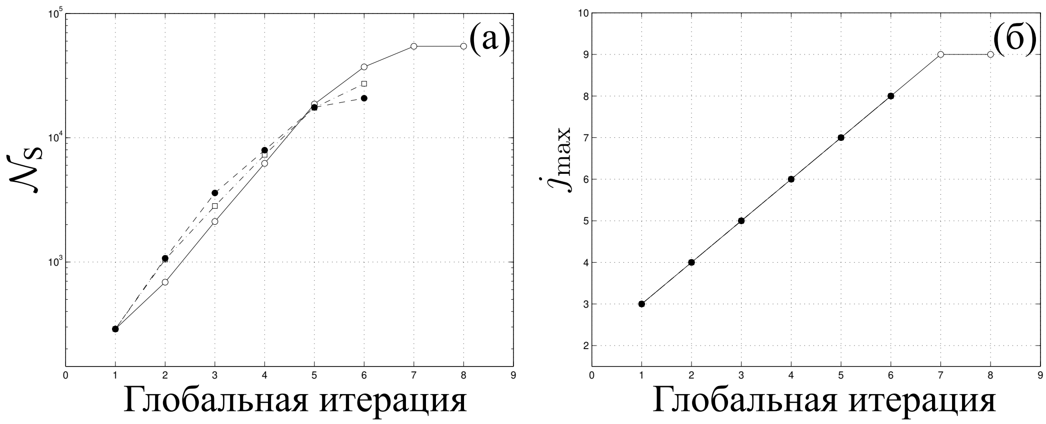


Рисунок 1.16 — Зависимость количества узлов адаптивной сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ (а) и максимального уровня разрешения j_max (б) от глобальной итерации для $\varepsilon = 10^{-5}$ и различных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□).

ким образом, ошибка решения может быть полностью контролируема пороговым параметром ε.

Представленные выше результаты наглядно демонстрируют сходимость алгоритма при уменьшении ε, но не показывают скорость сходимости метода. Эффективность алгоритма продемонстрирована на рис. 1.15а, где показана быстрая (один порядок на итерацию) сходимость решения как функция от глобальных итераций. Отметим немонотонный характер сходимости, обусловленный оценкой ошибки на текущей сетке, которая, как и решение, на промежуточных итерациях ещё не достигло сходимости. Интерполяция решения на более густую сетку приводит к увеличению ошибки, легко наблюдаемой на рис. 1.15а. Зависимость числа узлов адаптивной сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ и максимального уровня разрешения j_max от глобальных итераций соответственно приведена на рисунках 1.16а-б.

Наконец, для демонстрации существенной экономии вычислительных ресурсов и эффективности адаптивного вейвлетного метода показательно сравнить количество узлов, используемых в адаптивном и неадаптивном случаях. Эффективность сеточной адаптации может быть измерена с помощью коэффициента сжатия $\mathcal{C} = 1 - \left(\mathcal{N}_\mathrm{S}/N^{j_\mathrm{max}}\right)$, показанного на рис. 1.17а, где $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ — количество узлов адаптивной сетки, а N^{j_max} — число узлов, необходимых для решения той же задачи неадаптивным методом с сопоставимым разрешением. Другими словами, коэффициент сжатия измеряет процент неиспользованных узлов неадаптивной сетки. Чем больше коэффициент сжатия, тем эффективнее адаптивный алгоритм. Коэффициент сжатия 0% означает полное отсутствие сеточной адаптации. Из рисунка видно монотонное увеличение коэффициента сжатия с каждой глобаль-

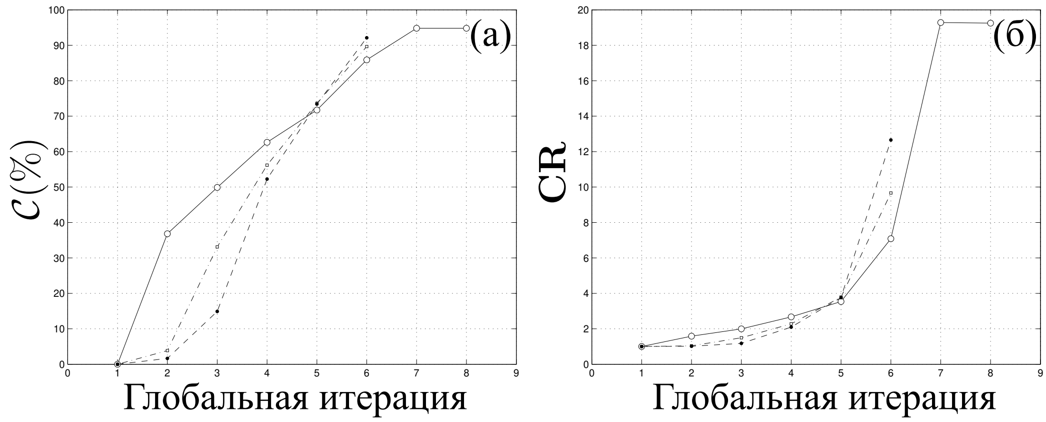


Рисунок 1.17 — Зависимость коэффициента сжатия $\mathcal{C}$ (а) и степени сжатия $\mathbf{CR}$ (б) от глобальных итераций для $\varepsilon = 10^{-5}$ и различных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ ($\circ$); $p = \widetilde{p} = 6$ ($\bullet$); $p = \widetilde{p} = 8$ ($\square$).

ной итерацией до полной сходимости сетки и решения. Эффективность сеточной адаптации также может быть измерена степенью сжатия $\mathbf{CR} = N^{j_{\max}}/\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$, показанной на рис. 1.17б и измеряющей отношение общего числа узлов сетки, необходимых для неадаптивного расчета, и числа узлов адаптивной сетки. Из рис. 1.17б видно, что при достижении сходимости решения и адаптивной сетки количество узлов, используемых адаптивной сеткой, примерно в двадцать раз меньше, чем в неадаптивном случае, то есть $\mathbf{CR} \approx 20$. Отметим, что степень сжатия может быть намного выше для более локализованных структур. Результаты численных экспериментов продемонстрировали линейную зависимость вычислительной стоимости от числа узлов адаптивной сетки. Таким образом, степень сжатия является прямой мерой эффективности адаптивного алгоритма.

Сходимость локального многоуровневого эллиптического решателя

Эффективность адаптивного вейвлетного метода зависит не только от глобальной сходимости решения и адаптивной сетки, но и от скорости сходимости локального итерационного многоуровневого эллиптического решателя, описанного в подразделе 1.4.2. Ввиду перечисленных ранее сходств между многоуровневым эллиптическим вейвлетным решателем и многосеточными методами, естественно ожидать линейной сходимости, то есть с каждой итерацией величина невязки должна уменьшаться примерно в одно и то же число раз. Зависимость

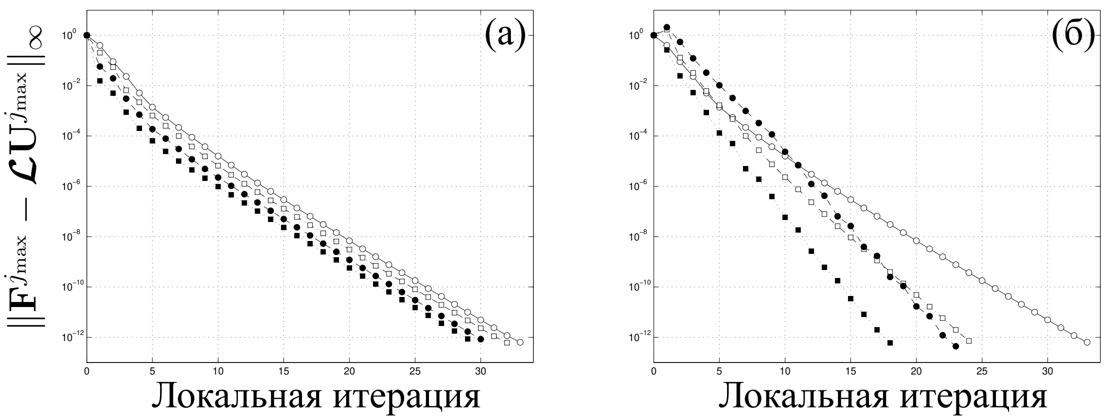


Рисунок 1.18 — Зависимость L_∞ нормы невязки многоуровневого вейвлетного коллокационного решателя от локальных итераций (V-циклов) для $\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$, $\omega_0 = 2/3$, $\omega_1 = 1$ и различных значений итерационных параметров ν_1, ν_2 и ν_3: (а) влияние количества операций сглаживания в V-цикле ν_1 и ν_2 ($\nu_3 = 0$): $\nu_1 = \nu_2 = 2$ (○); $\nu_1 = \nu_2 = 2$ (□); $\nu_1 = \nu_2 = 10$ (●); $\nu_1 = \nu_2 = 20$, (■); (б) влияние числа итераций точного решателя ν_3 ($\nu_1 = \nu_2 = 2$): $\nu_3 = 0$ (○); $\nu_3 = 2$ (□); $\nu_3 = 4$ (●); $\nu_3 = 10$ (■).

сходимости многоуровневого эллиптического решателя от локальных итераций (V-циклов) для разных значений итерационных параметров показана на рисунках 1.18 и 1.19. В частности, влияние количества операций сглаживания ν_1 и ν_2 на сходимость многоуровневого решателя продемонстрировано на рис. 1.18а, из которого видно, что на каждом этапе V-цикла достаточно двух операций сглаживания, а их дальнейшее увеличение только незначительно уменьшает невязку и не влияет на скорость сходимости. Скорость сходимости более чувствительна к числу итераций ν_3 точного решателя, что ясно видно из рис. 1.18б. Диапазон сходимости варьируется от одного порядка за три итерации V-цикла при отсутствии итераций точного решателя до двух порядков за три итерации для $\nu_3 = 10$. Стоит отметить, что вычислительные затраты BI-CGSTAB и особенно GMRES значительно существеннее, чем для одной итерации приближенного решателя. В дополнение увеличение количества итераций ν_3 точного решателя, основанного на GMRES, требует увеличения размерности подпространства Крылова, что приводит к увеличению размера памяти, используемой решателем. Именно по этой причине рекомендуется либо использовать точный решатель на основе GMRES с несколькими итерациями, либо вообще его не использовать, $\nu_3 = 0$. Влияние значений релаксационных параметров ω_0 и ω_1 на сходимость метода продемонстрировано на рис. 1.19. Ввиду оптимальности приближенного решателя с точки

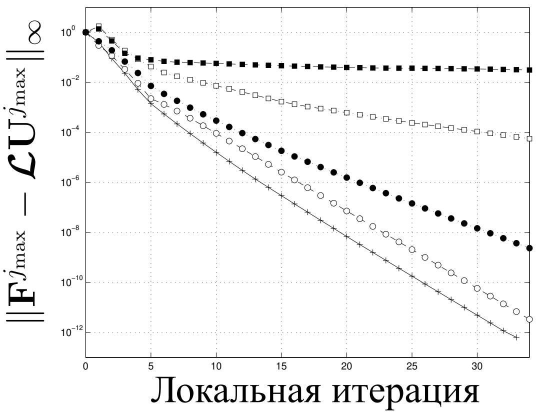


Рисунок 1.19 — Зависимость L_∞ нормы невязки для многоуровневого вейвлетного коллокационного решателя от локальных итераций (V-циклов) для $\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$, $\nu_1 = \nu_2 = 2$, $\nu_3 = 0$ и различных значений итерационных параметров ω_0 и ω_1: $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1$ (+); $\omega_0 = 0.75$, $\omega_1 = 1$ (○); $\omega_0 = 1.1$, $\omega_1 = 1$ (●); $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.75$ (□); $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1.1$ (■).

зрения сглаживания решения, скорость сходимости уменьшается при недостаточной ($\omega < 1$) и чрезмерной релаксации ($\omega > 1$) как для ω_0, так и для ω_1. Обратим внимание, что для других эллиптических операторов оптимальные значения параметров ω_0 и ω_1 могут отличаться от единицы и являются дополнительными параметрами, которые могут улучшить сходимость алгоритма 1.5.

Результаты трёхмерных вычислений

Описанный в этом подразделе метод применим также и к трёхмерным задачам. Численное решение трёхмерной эллиптической задачи и соответствующая адаптивная вычислительная сетка приведены на рис. 1.20, а результаты исследования сходимости представлены на рис. 1.21а, где представлена зависимость поточечной L_∞ ошибки численного решения от количества узлов адаптивной сетки для вейвлетов разного порядка. Из рисунка видно, что, как и в двумерном случае скорость сходимости решения согласуется с аналитической оценкой (1.58), для удобства обозначенной треугольниками. Зависимость количества узлов адаптивной сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от порогового параметра ε показана на рис. 1.21б. Как и в двумерном случае, зависимость $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от ε согласуется с теоретической оценкой (1.49), для удобства обозначенной треугольниками. Аналогично двумерному

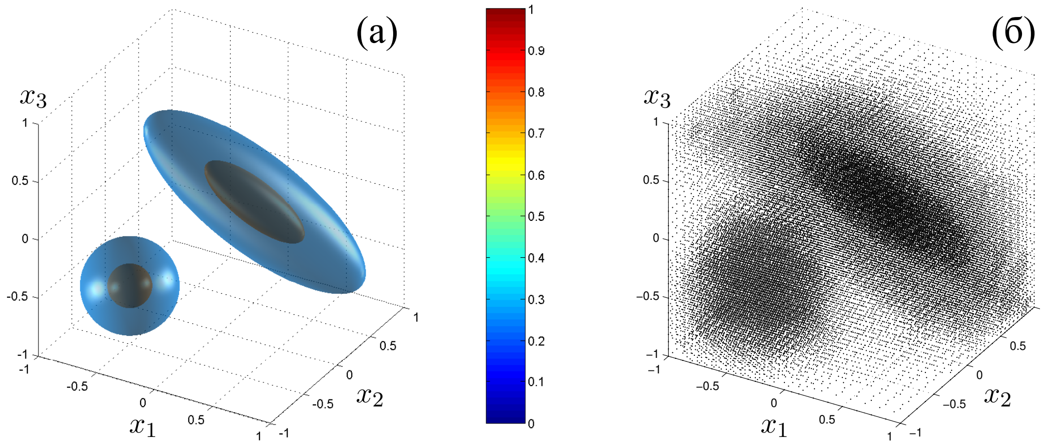


Рисунок 1.20 — Решение трёхмерной эллиптической задачи (1.60) (уровни изоповерхностей со значением 0.25 и 0.75) (а) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка $\mathcal{G}_{\geqslant}$ (б) ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

случаю, линейная сходимость локального итерационного многоуровневого эллиптического решателя продемонстрирована на рис. 1.22. Влияние итерационных параметров ν_1, ν_2, ν_3, ω_0 и ω_1 аналогично двумерному случаю.

1.5 Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения параболических уравнений

Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения параболических систем уравнений, представленный в этом разделе, основан на материалах, опубликованных в работах автора [328; 329].

Рассмотрим систему параболических уравнений с начальными и граничными условиями, записанную в общем виде как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{F}(\mathbf{u}) && \text{на } \Omega_{\mathrm{s}} \times (t_0, t_{\mathrm{end}}], \quad \Omega_{\mathrm{s}} \subset \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{B}\mathbf{u} &= \mathbf{G} && \text{на } \partial\Omega_{\mathrm{s}} \times (t_0, t_{\mathrm{end}}], \\ \mathbf{u}|_{t_0} &= \mathbf{u}_0 && \text{на } \Omega_{\mathrm{s}}, \end{aligned} \tag{1.65}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ — это векторная функция решения, $\mathbf{F}$ — правая часть системы уравнений, содержащая диффузионные члены, $\mathcal{B}$ — оператор граничных условий, $\mathbf{G}$ — источниковый член неоднородных граничных условий, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ — начальные условия, а Ω_{s} — физическая область. Как и в случае эллиптических уравнений,

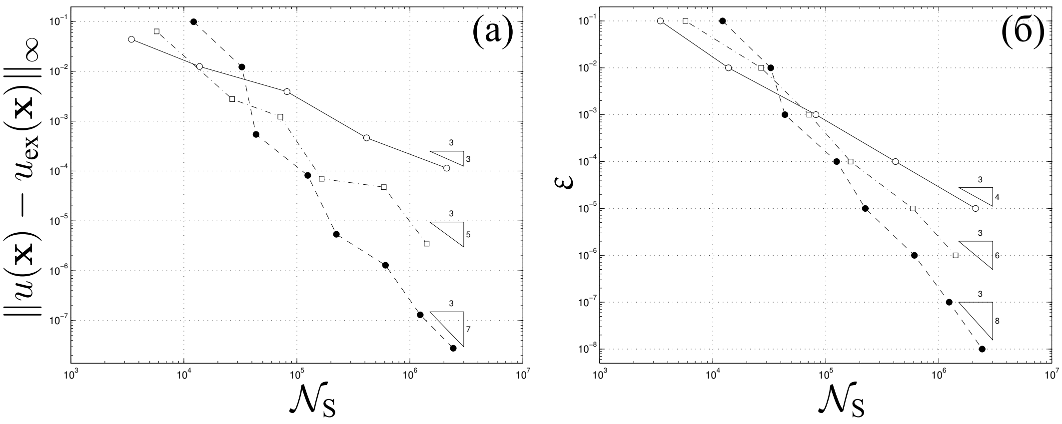


Рисунок 1.21 — Зависимость поточечной L_∞ ошибки численного решения трёхмерной эллиптической задачи (1.60) (а) и количества адаптивных узлов сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ (б) от ε для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = \widetilde{p} = 6$ (□); $p = \widetilde{p} = 8$ (●). Треугольники обозначают скорости сходимости, соответственно предсказанные выражениями (1.58) и (1.50).

численный метод формально основан на дискретизации системы уравнений (1.65) в узлах сетки и последующем решении результирующей системы нелинейных обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений, полученных в результате дискретизации и описывающих эволюцию решения в узлах адаптивной сетки.

Стратегия сеточной адаптации при решении параболических задач основана на вейвлетной адаптации, описанной в подразделах 1.3.2 и 1.3.3, и заключается в использовании узлов сетки, связанных как со значимыми вейвлетами, так и с вейвлетами смежной области, чьи коэффициенты могут стать значимыми во время интегрирования по времени. Псевдокод алгоритма для решения системы параболических уравнений приведён в алгоритме 1.6. Отметим, что $\mathbf{u}_\mathbf{k}(t)$ обозначает дискретизированную векторную функцию $\mathbf{u}$ со значениями в узлах сетки $\mathbf{x}_\mathbf{k}^{j_{\max}} \in \mathcal{G}_\geqslant^t$ в момент времени t, $v_r(\mathbf{x}, t)$, $r = 1, \ldots, N_c$ — управляющие переменные, используемые для адаптации сетки, а N_c — число управляющих переменных. В алгоритме активные узлы сетки непрерывно корректируются для идентификации и отслеживания локальных структур решения, разрешая их на адаптивной вычислительной сетке. Как уже обсуждалось в подразделе 1.3.1, вейвлетное пороговое сжатие используется для контроля как локального сеточного разрешения, так и ошибки аппроксимации: чем меньше значение порогового параметра ε, тем меньше ошибка вейвлетной аппроксимации решения и тем гуще вычислительная сетка. Как уже обсуждалось в подразделе 1.4.1, для большинства прикладных за-

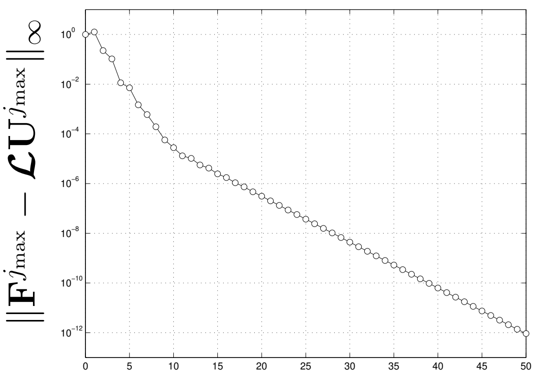


Рисунок 1.22 — Зависимость L_∞ нормы невязки многоуровневого вейвлетного коллокационного решателя от локальных итераций (V-циклов) для $\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$, $\omega_0 = 2/3$, $\omega_1 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 3$, $\nu_3 = 0$ ($\circ$).

дач при правильной нормализации переменных обычно используются пороговые параметры в диапазоне между 10^{-6} и 10^{-3}.

При решении параболических задач размер смежной области, описанный в подразделе 1.3.3, задаёт ограничения на максимальный шаг по времени, который может быть сделан без потери аппроксимации решения. Обычно смежная область значимого вейвлета включает в себя соседние вейвлеты того же уровня, более высокого (вейвлеты потомки) и более низкого (вейвлеты предки) уровней разрешения. Толщина смежной области накладывает ограничение на максимальный шаг по времени без изменения вычислительной сетки, гарантирующее, что структура на данном уровне разрешения в течение интервала интегрирования не выйдет за границы смежной области. Как уже отмечалось в подразделе 1.3.3, минимальный размер смежной области, включающий в себя только непосредственные соседние вейвлеты, оптимален с точки зрения эффективности вычислений и в случае присутствия конвекционных механизмов приводит к ограничению, схожему с ограничением по числу CFL [59].

Следует подчеркнуть, что алгоритм 1.6 может использовать разные критерии для сеточной адаптации. В большинстве приложений достаточно адаптации на интегрируемые по времени переменные. Однако в некоторых задачах, динамика которых определяется управляющими переменными $v_r(\mathbf{x},t)$, необходима адаптация и разрешение этих переменных. Так, например, в задачах механики жидкости и газа такими переменными могут быть источниковые члены химических реакций, поля завихренности или скорости деформации. Адаптивная сетка

Алгоритм 1.6: AWCM для решения параболических задач.

начальные условия $(t = t_0)$: **получить** $\mathbf{u_k}(t_0)$ и $\mathcal{G}^{t_0}_{\geqslant}$, используя алгоритм 1.4

while $t < t_{\text{end}}$ **do**

  выполнить прямое вейвлетное преобразование для каждой из компонент решения $\mathbf{u_k}(t)$

  for $j = j_{\max} : -1 : j_{\min}$ **do**

    создать маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} = \bigcup\limits_{r=1}^{N_c} \mathcal{M}^{\mathrm{S}}\big(v_r(\mathbf{x},t)\big)$

  end

  расширить маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

  выполнить процедуру проверки восстановления функции (алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

  построить $\mathcal{G}^{t+\Delta t}_{\geqslant}$ на основе маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

  добавить вспомогательную маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\bigoplus\limits_{j=0}^{j_{\max}} \mathcal{D}^j} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$

  выполнить процедуру проверки восстановления функции (алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$

  if $\mathcal{G}^{t+\Delta t}_{\geqslant} \neq \mathcal{G}^{t}_{\geqslant}$ **then**

    проинтерполировать решение $\mathbf{u_k}(t)$ на сетку $\mathcal{G}^{t+\Delta t}_{\geqslant}$

  end

  проинтегрировать систему уравнений (1.65) с шагом по времени Δt

  $t = t + \Delta t$

end

$\mathcal{G}^{t}_{\geqslant}$ строится как объединение адаптивных сеток для каждой из интегрируемых и управляющих переменных.

Алгоритм 1.6 может использовать практически любой метод интегрирования по времени. Адаптивный вейвлетный коллокационный метод, реализованный в адаптивной вейвлетной среде для универсального многомасштабного численного моделирования (AWESUMM) [337], может использовать целый ряд явных и неявных методов, таких как метод Кранка—Николсона [61], неявные-явные (IMEX) методы Рунге—Кутта, диагонально неявные методы Рунге—Кутта (DIRK) и полностью явные методы Рунге—Кутта (ERK) [8], а также метод интегрирования в подпространстве Крылова [80]. Следует отметить, что адаптивный вейвлетный коллокационный метод основан на безматричном вычислении результатов действия операторов и не требует явного построения дискретных дифференциальных операторов. Это свойство особенно важно, так как пространственные производные в AWCM, описанном в подразделе 1.3.5, вычисляются напрямую без явного построения дискретного дифференциального оператора.

1.5.1 Обсуждение результатов

Для иллюстрации точности и эффективности адаптивного вейвлетного коллокационного метода для параболических задач рассмотрим его применение к ряду тестовых задач, использовавшихся в прошлом для демонстрации методов, основанных на вейвлетах первого поколения [118; 333]. Применение AWCM для решения более сложных задач будет рассмотрено в главе 4. Во всех примерах, обсуждаемых в этом подразделе, использовался метод интегрирования по времени в подпространстве Крылова [80] с адаптивным шагом по времени, позволяющим контролировать ошибку интегрирования.

Постановка тестовых задач

I. *Одномерное уравнение Бюргерса*. В качестве первой тестовой задачи рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (-1,1)\,,\ t > 0 \tag{1.66}$$

с начальными и граничными условиями, заданными как

$$u\,(x,0) = -\sin\left(\pi x\right), \quad u\,(\pm 1,t) = 0, \tag{1.67}$$

с известным аналитическим решением

$$u\,(x,t) = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\pi\left(x-\eta\right)\right)\exp\left(-\frac{\cos(\pi(x-\eta))}{2\pi\nu}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\nu t}\right)d\eta}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\cos(\pi(x-\eta))}{2\pi\nu}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\nu t}\right)d\eta}. \tag{1.68}$$

Задача решена для $\nu = 10^{-2}/\pi$ и $0 \leqslant t \leqslant 2/\pi$.

II. *Одномерное модифицированное уравнение Бюргерса*. В качестве второй тестовой задачи рассмотрим модифицированное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v + u)\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (-\infty, +\infty)\,,\ t > 0, \tag{1.69}$$

где v — константа. Начальные и граничные условия заданы как

$$u\,(x,0) = -\tanh\left(\frac{x - x_0}{2\nu}\right), \quad u\,(\pm\infty,t) = \mp 1. \tag{1.70}$$

Аналитическое решение этой задачи

$$u\,(x,t) = -\tanh\left(\frac{x - x_0 - vt}{2\nu}\right) \tag{1.71}$$

представляет ударную волну, движущуюся с равномерной скоростью v. При численном решении задачи из-за экспоненциального затухания решения на бесконечности задача может быть рассмотрена в конечной области. Таким образом, для $\nu = 10^{-2},\ x_0 = -1/2$, $v = 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ правомерно рассматривать задачу в области $x \in [-1,1]$ с граничными условиями Дирихле.

III. *Двумерная линейная адвекция*. В качестве третьей тестовой задачи рассмотрим задачу линейной адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + vD_\theta u = 0, \quad \mathbf{x} \in [0,L_1] \times [0,L_2],\ t > 0, \tag{1.72}$$

где оператор D_θ представляет собой производную по направлению, определённую как

$$D_\theta = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{1.73}$$

а θ — угол относительно оси x_1. Начальные и граничные условия Дирихле получены из аналитического решения

$$u\,(x_1,x_2,t) = \exp\left(-\alpha\left(\left(x_1 - \frac{1}{2} - vt\cos\theta\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2} - vt\sin\theta\right)^2\right)\right). \tag{1.74}$$

Численное решение получено для $\alpha = 200$, $L_1 = L_2 = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 0.25$ и $\theta = 30°$.

IV. *Квази-двумерное уравнение Бюргерса*. В качестве четвертой тестовой задачи рассмотрим квази-двумерное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uD_\theta u = \nu D_\theta^2 u, \quad \mathbf{x} \in [-1,1] \times [-1,1],\ t > 0, \tag{1.75}$$

где оператор D_θ задан выражением (1.73). Начальные и граничные условия Дирихле получены из аналитического решения $u(x_1,x_2,t) = u_{1\text{-D}}(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta,t)$, где $u_{1\text{-D}}$ — одномерное решение, заданное уравнением (1.68). Задача решена для $\nu = 10^{-1}/\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 3/2\pi$ и нескольких значений угла θ.

Результаты вычислений: одномерные задачи

Первая тестовая задача проверяет способность адаптивного вейвлетного коллокационного метода разрешать структуру одномерной ударной волны с фиксированным положением и изменяющейся во времени толщиной. Вторая задача проверяет способность метода разрешать структуру движущейся одномерной ударной волны. Динамическая адаптация вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ показана на рисунках 1.23 и 1.24 соответственно для первой и второй тестовых задач. В обоих случаях численное решение получено для $\varepsilon = 10^{-5}$ и $p = \widetilde{p} = 3$. Как видно из рис. 1.23, эволюция решения уравнения Бюргерса от гладкого решения к структуре ударной волны с уменьшающейся толщиной приводит к росту вейвлетных коэффициентов на высоких уровнях разрешения и сгущению сетки в непосредственной близости с ударной волной. Во второй тестовой задаче продемонстрирована способность AWCM динамически адаптировать вычислительную сетку к движущейся локальной структуре (ударной волне). На рис. 1.24 показано, как область со сгущением узлов адаптивной сетки отслеживает движение ударной волны и перемещается вместе с ней.

Для демонстрации вычислительной эффективности AWCM сравним количество узлов, используемых в адаптивном и неадаптивном случаях. Как уже обсуждалось в подразделе 1.4.3, одной из мер эффективности сеточной адаптации является степень сжатия $\mathbf{CR} = N^{j_{\max}}/\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$, эволюция которой для первых двух тестовых задач приведена на рис. 1.25. Отметим, что, поскольку минимальное разрешение определяется толщиной ударной волны, то при решении уравнения Бюргерса степень сжатия уменьшается с увеличением интенсивности ударной волны и достигает минимума, когда градиент решения в начале координат достигает своего максимума. Также обратим внимание, что степень сжатия для второй тестовой задачи остается неизменной при перемещении ударной волны.

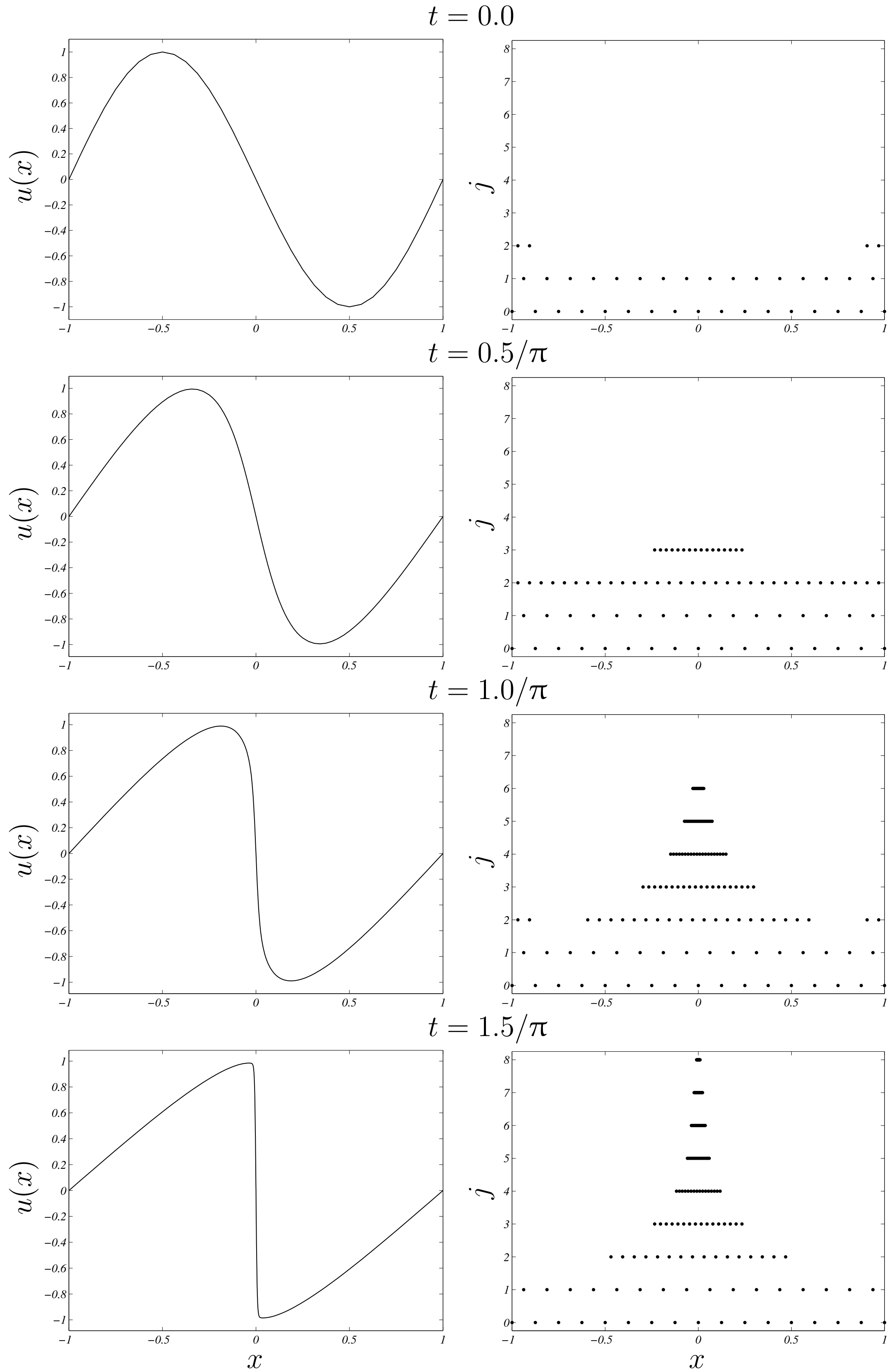


Рисунок 1.23 — Эволюция решения (слева) и соответствующая адаптивная сетка $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ (справа) для тестовой задачи I ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 3$).

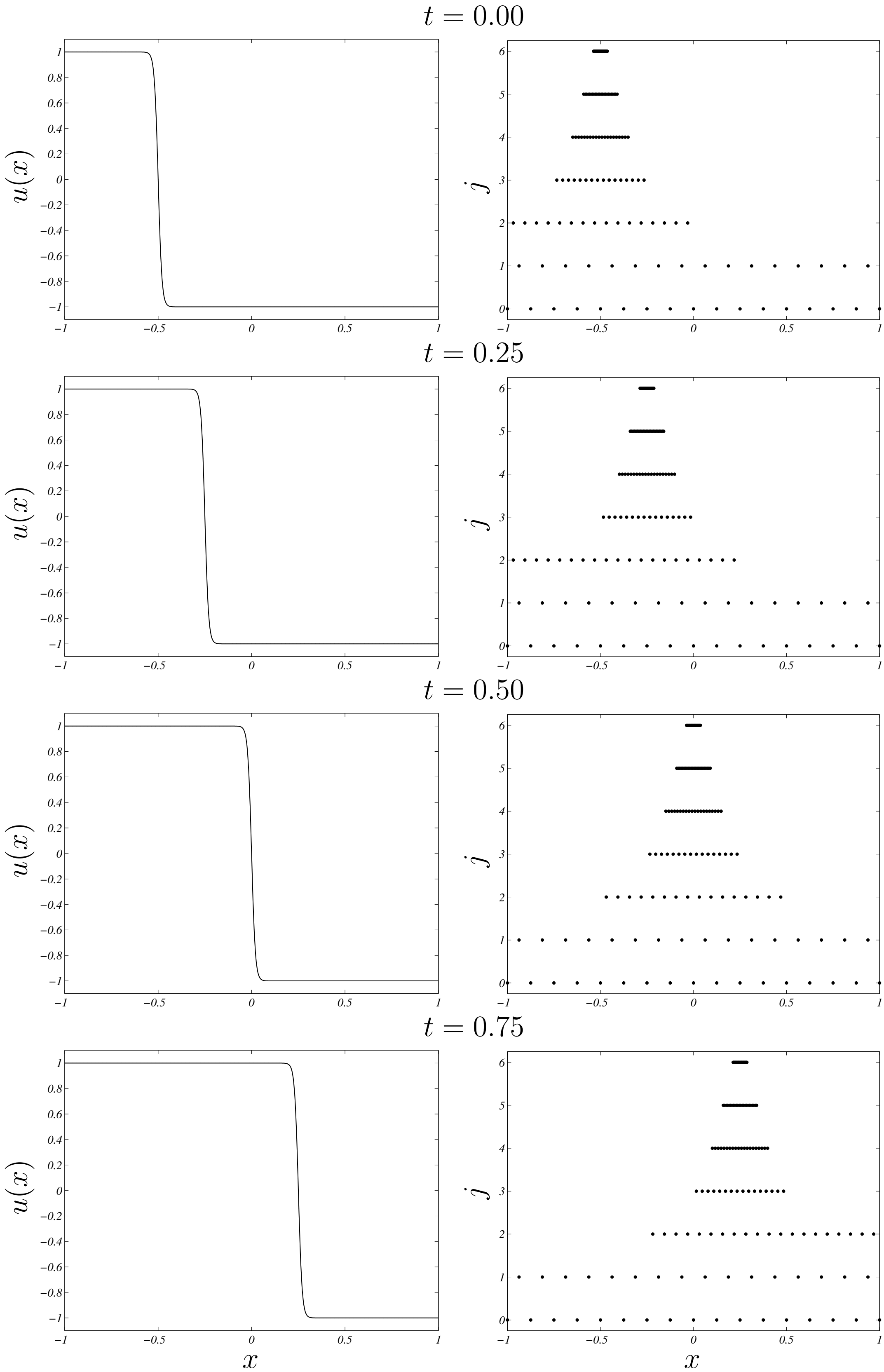


Рисунок 1.24 — Эволюция решения (слева) и соответствующая адаптивная сетка $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ (справа) для тестовой задачи II ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 3$).

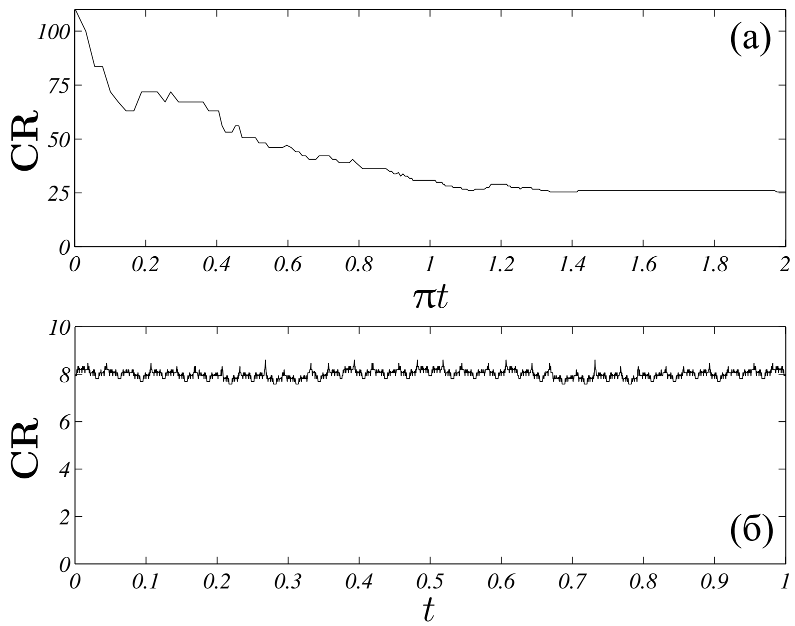


Рисунок 1.25 — Эволюция степени сжатия $\mathbf{CR}$ для (а) тестовой задачи I и (б) тестовой задачи II ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

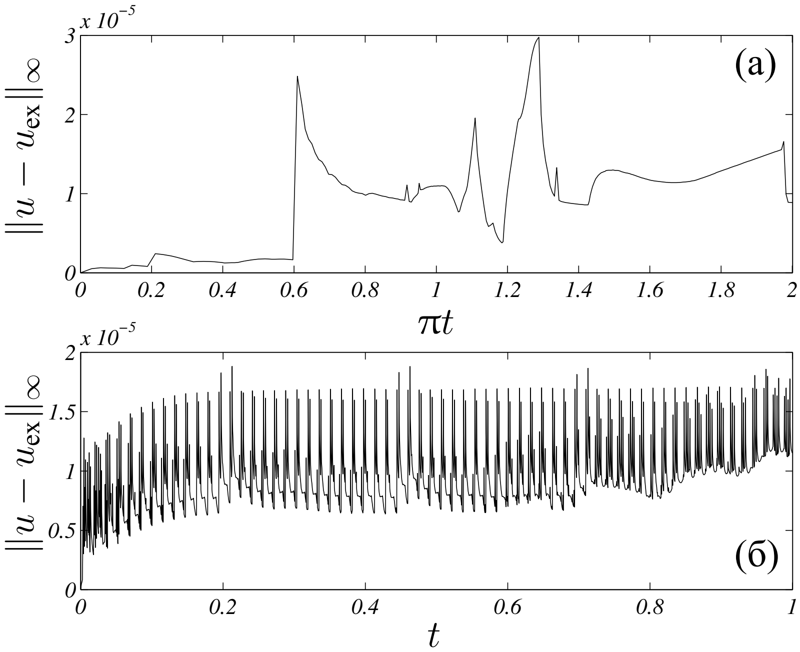


Рисунок 1.26 — Эволюция поточечной L_∞ ошибки решения для (а) тестовой задачи I и (б) тестовой задачи II ($\varepsilon = 10^{-5}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

Как и в эллиптическом случае, проверка сходимости адаптивного вейвлетного коллокационного метода отличается от сходимости неадаптивных алгоритмов, определяемой последовательным увеличением уровня разрешения $j_{\max}$. При изучении сходимости адаптивных вейвлетных методов максимальный уровень разрешения не фиксируется и может меняться в зависимости от требований решения. Как и в эллиптическом случае, сходимость адаптивного вейвлетного

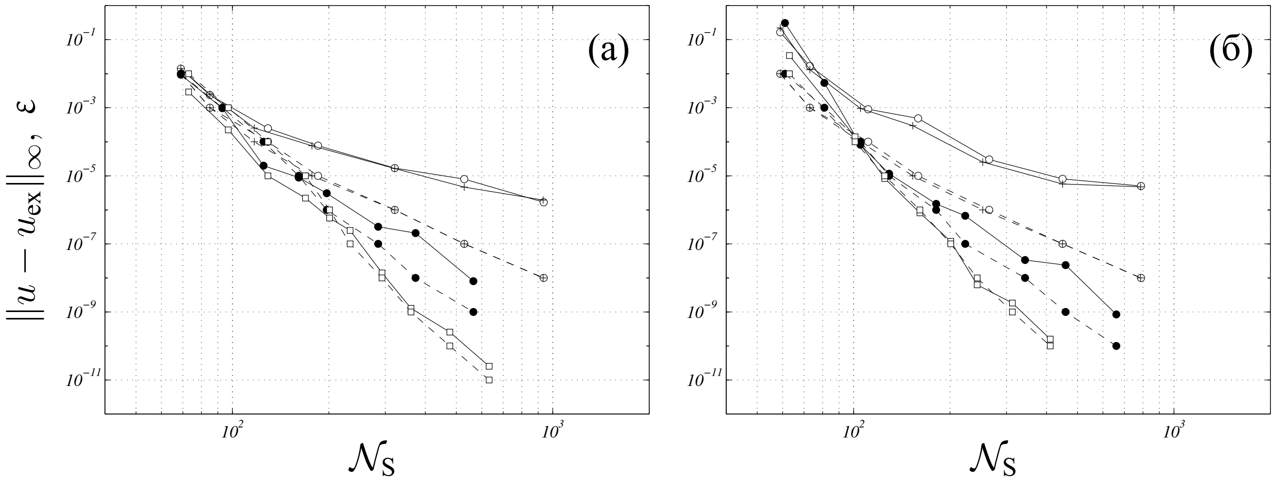


Рисунок 1.27 — Поточечная L_∞ ошибка решения для (а) тестовой задачи I в момент времени $t = 2/\pi$ и (б) тестовой задачи II в момент времени $t = 1$ для различных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ (+); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□). Пунктирная линия показывает значение $\mathcal{N}_{\rm S}$ как функцию от ε.

коллокационного метода проверяется последовательным уменьшением величины порогового параметра ε. Уменьшение ε приводит к увеличению числа узлов сетки и максимального уровня разрешения. Как было показано в подразделах 1.3.1 и 1.3.5, пороговый параметр ε контролирует точность вейвлетного разложения и точность определения производных функции. Отметим, что аналитические оценки точности решения, приведённые в подразделах 1.3.1 и 1.3.5, не гарантируют, что ошибка зависящего от времени решения останется ограниченной и контролируемой ε. По этой причине для устранения ошибки, связанной с интегрированием, шаг интегрирования по времени должен быть достаточно малым, чтобы ошибка интегрирования по времени была существенно меньше ε. Таким образом, при изучении сходимости AWCM предполагается, что ошибка интегрирования по времени не превышает ошибки пространственной дискретизации. Зависимость ошибки решения от времени для первых двух тестовых задач приведена на рис. 1.26 для $\varepsilon = 10^{-5}$ и $p = \widetilde{p} = 6$.

Результаты исследования сходимости AWCM для первых двух тестовых задач представлены на рис. 1.27, где показана зависимость поточечной L_∞ ошибки решения в конечный момент времени от количества узлов адаптивной сетки $\mathcal{N}_{\rm S}$. Зависимость $\mathcal{N}_{\rm S}$ от ε также показана на рисунке пунктирной линией. Результаты, приведённые на рис. 1.27, однозначно демонстрируют сходимость решения с уменьшением ε. Так как ошибка решения имеет тот же порядок, что и ε, то пороговый параметр ε может быть использован для активного контроля ошиб-

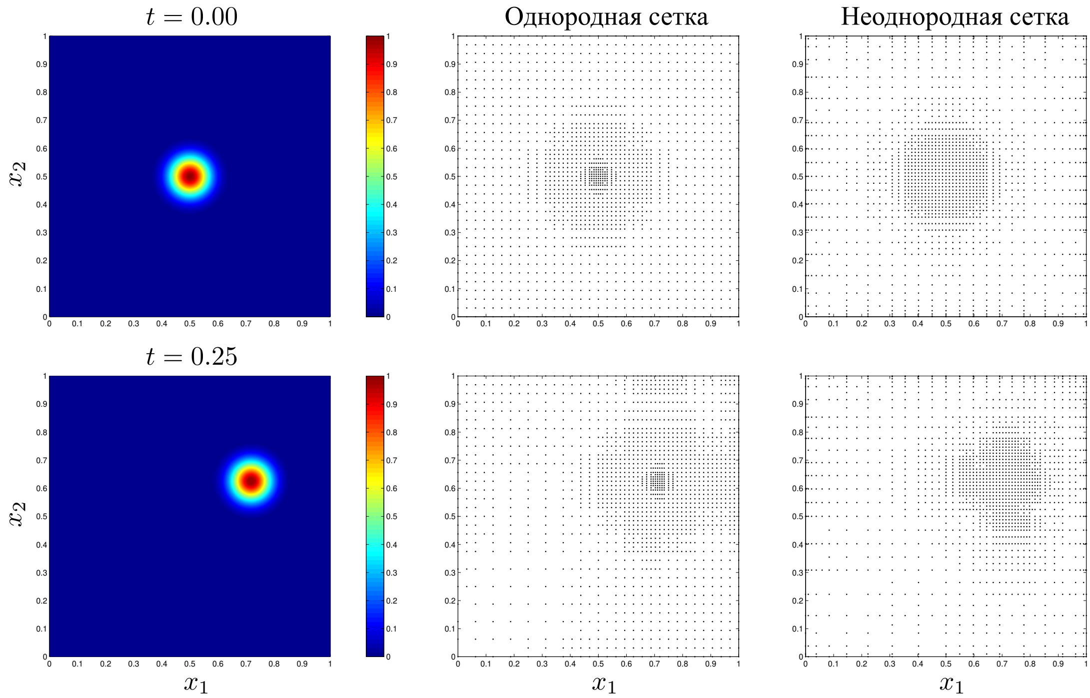


Рисунок 1.28 — Эволюция решения и адаптивной вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ для тестовой задачи III ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

ки решения. Результаты исследования, представленные на рис. 1.27, показывают значительное улучшение сходимости по сравнению с адаптивными методами на основе вейвлетов первого поколения [333; 334], для которых ошибка не уменьшалась, а накапливалась и устанавливалась на уровне, зависящем от порядка вейвлета.

Результаты вычислений: двумерные задачи

Третья тестовая задача демонстрирует способность адаптивного вейвлетного коллокационного метода разрешать и отслеживать перемещение двумерных локализованных структур. Динамическая адаптация вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ продемонстрирована на рис. 1.28 для однородной и неоднородной сеток, из которого видно, что область сгущения сетки отслеживает локализованную структуру, перемещаясь вместе с ней. Отметим, что неоднородная сетка соответствует распределению Гаусса—Лобатто (1.53) в обоих направлениях. Из рис. 1.28 видно, что распределение сеточных узлов на неоднородной сетке менее симметрично, что вызвано сильным сжатием узлов сетки вблизи границ области.

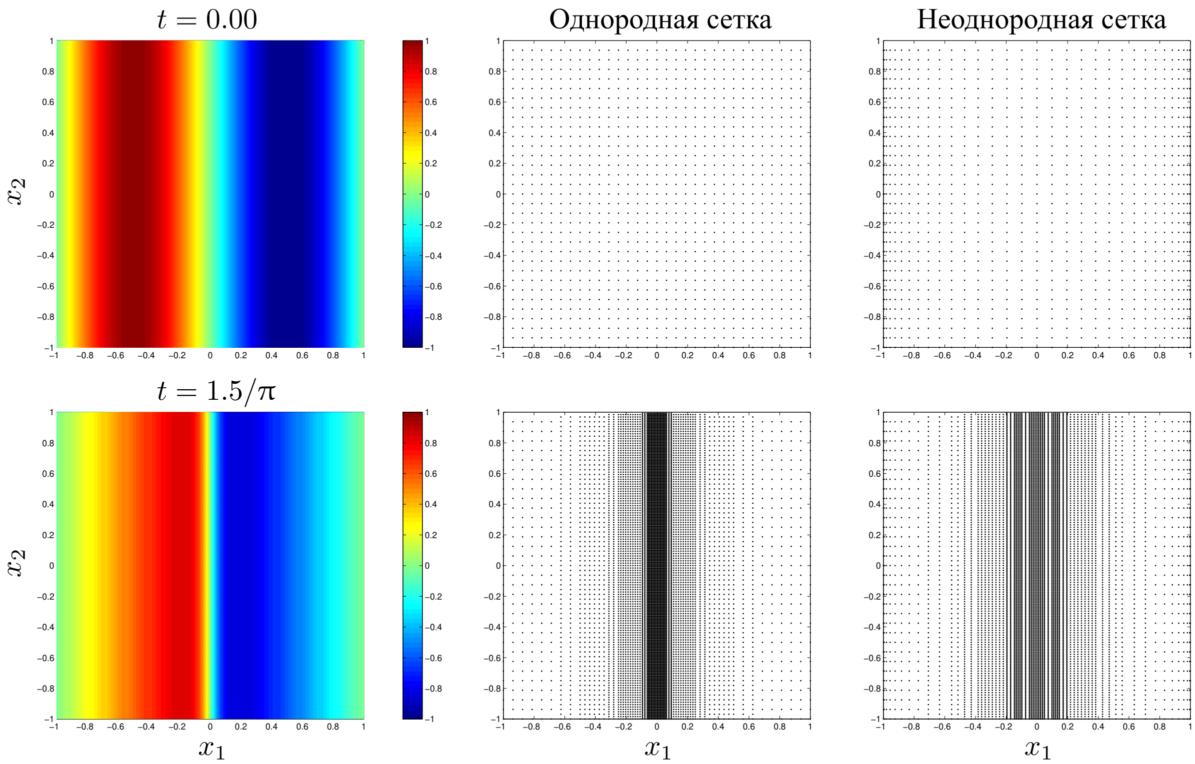


Рисунок 1.29 — Эволюция решения и адаптивной вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ для тестовой задачи IV для $\theta = 0^\circ$ ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

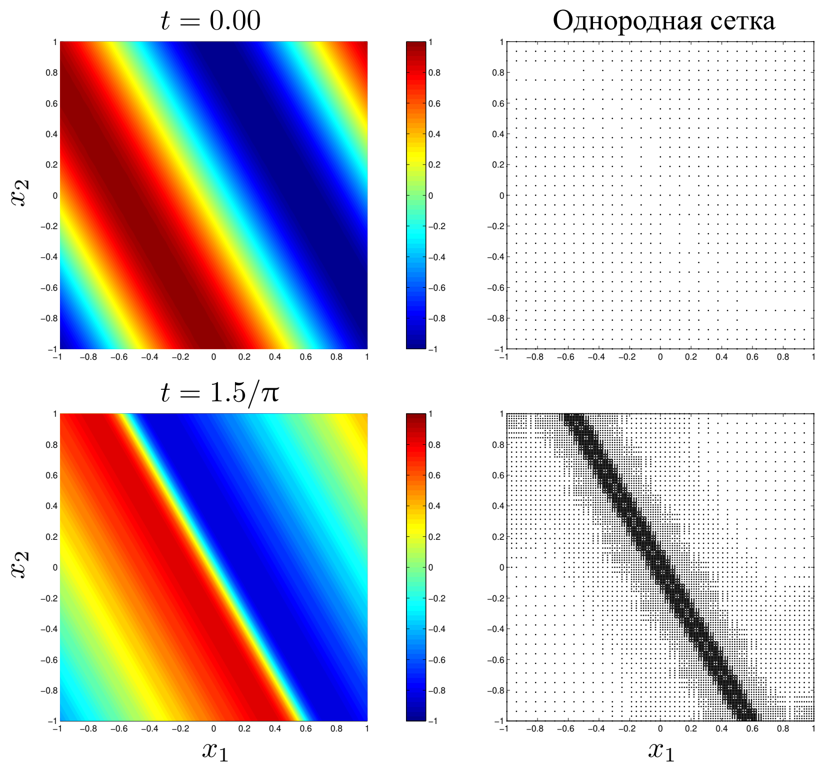


Рисунок 1.30 — Эволюция решения и адаптивной вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ для тестовой задачи IV для $\theta = 30^\circ$ ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 6$).

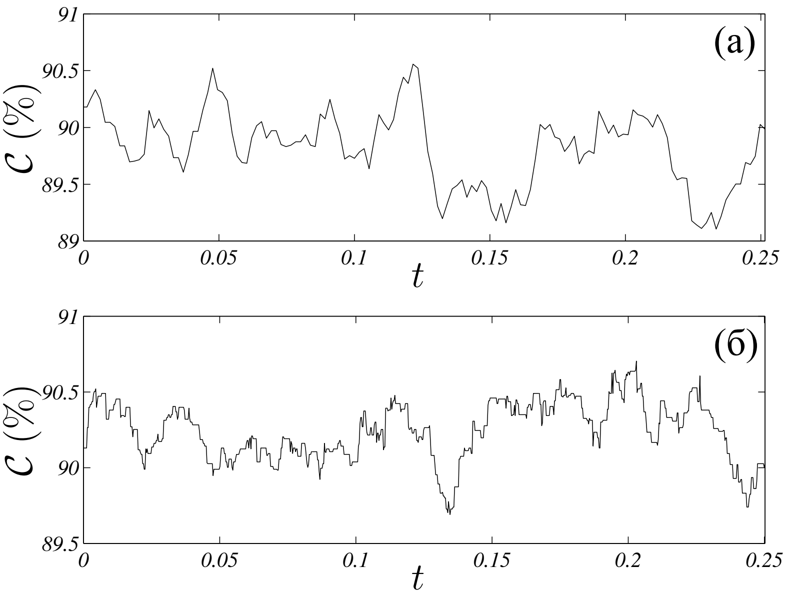


Рисунок 1.31 — Эволюция степени сжатия $\mathcal{C}$ для тестовой задачи III ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 6$): (а) — однородная сетка; (б) — неоднородная сетка.

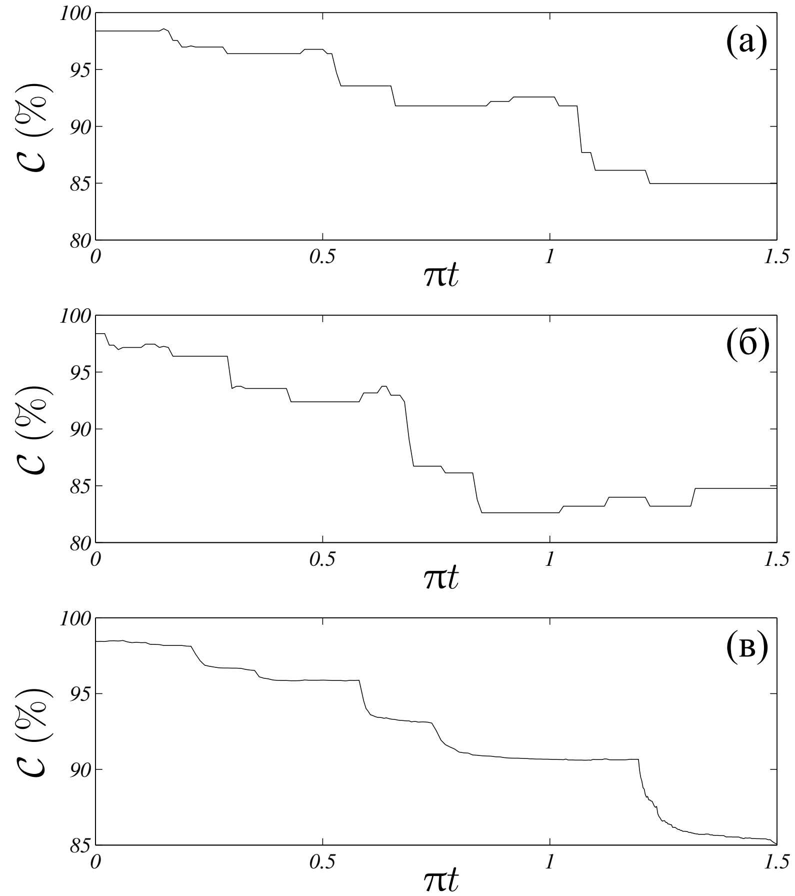


Рисунок 1.32 — Эволюция степени сжатия $\mathcal{C}$ для тестовой задачи IV ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 6$): (а) — однородная сетка, $\theta = 0°$; (б) — неоднородная сетка, $\theta = 0°$; (в) — однородная сетка, $\theta = 30°$.

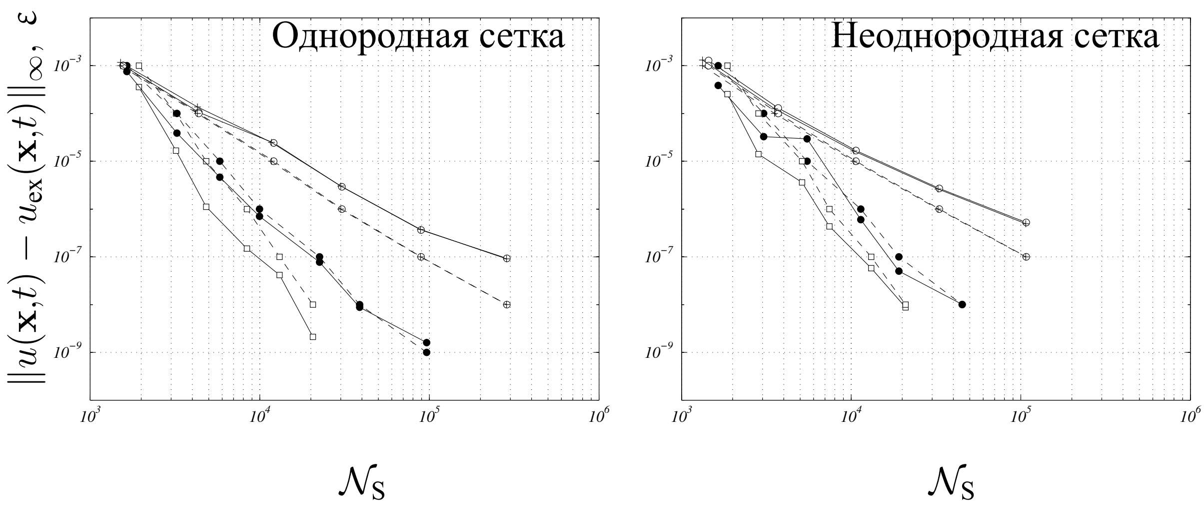


Рисунок 1.33 — Поточечная L_∞ ошибка решения задачи III в момент времени $t = 0.25$ для однородной и неоднородной сеток для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ (+); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□). Пунктирная линия показывает зависимость $\mathcal{N}_\text{S}$ от ε.

Четвертая тестовая задача демонстрирует способность метода разрешать структуру ударной волны с фиксированным положением и изменяющейся во времени толщиной. Численное решение получено для

a) $\theta = 0^\circ$, граничных условий Дирихле при $x_1 = \pm 1$ и периодических граничных условий в направлении x_2,
b) $\theta = 30^\circ$, граничных условий Дирихле при $x_i = \pm 1$, $i = 1,2$.

В первом случае решение получено как для однородной, так и для неоднородной сетки, построенной как тензорное произведение одномерной сетки Гаусса—Лобатто (1.53) в x_1 направлении и равномерной сетки в x_2 направлении. Во всех рассмотренных случаях решение получено для $\varepsilon = 10^{-3}$ и $p = \widetilde{p} = 6$. Решение квази-двумерного уравнения Бюргерса для $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 30^\circ$ и соответствующие адаптивные вычислительные сетки показаны на рисунках 1.29 и 1.30. На рисунках видна эволюция сетки от равномерного распределения для гладкого начального условия к адаптивной сетке с областью высокого разрешения, сосредоточенной в непосредственной близости с ударной волной.

Эффективность AWCM в двумерном случае продемонстрирована на рисунках 1.31 и 1.32, где показана эволюция коэффициента сжатия $\mathcal{C} = 1 - \left(\mathcal{N}_\text{S}/N^{j_\text{max}}\right)$. Как уже обсуждалось в подразделе 1.4.3, коэффициент сжатия измеряет процент неиспользованных узлов неадаптивной сетки, и чем больше его значение, тем эффективнее адаптивный алгоритм. Из рисунка 1.31 видно, что для третьей

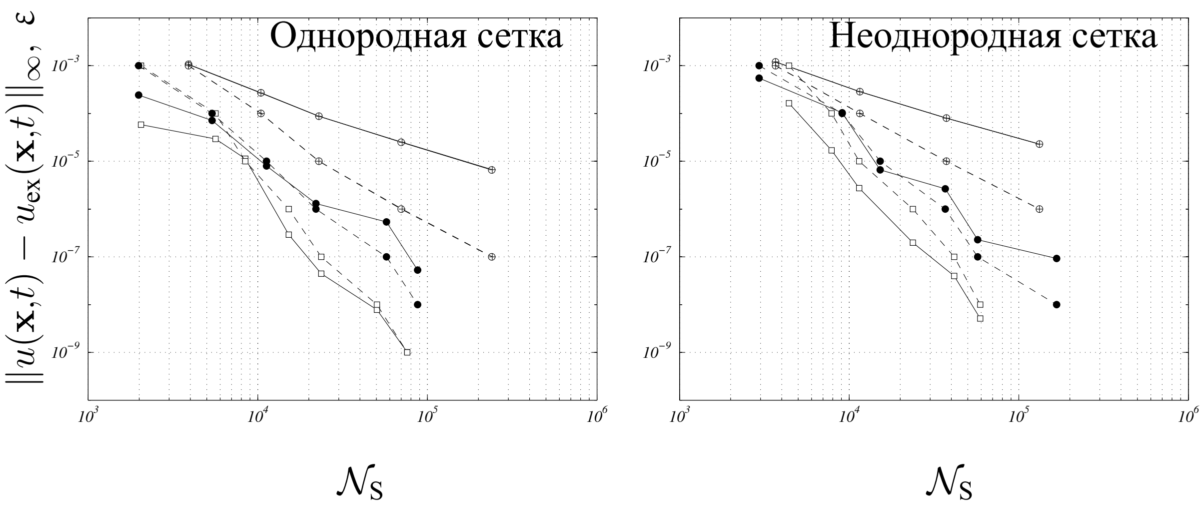


Рисунок 1.34 — Поточечная L_∞ ошибка решения задачи IV для $\theta = 0^\circ$ в момент времени $t = 3/4\pi$ для однородной и неоднородной сеток для разных значений параметров p и $\widetilde{p}$: $p = \widetilde{p} = 4$ (○); $p = 4, \widetilde{p} = 0$ (+); $p = \widetilde{p} = 6$ (●); $p = \widetilde{p} = 8$ (□). Пунктирная линия показывает зависимость $\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$ от ε.

тестовой задачи коэффициент сжатия колеблется около значения 90% как для однородной, так и для неоднородной сеток с более выраженными осцилляциями в случае неоднородной сетки. Для четвёртой тестовой задачи область максимального разрешения и уровень разрешения диктуются минимальной толщиной ударной волны, поэтому очень высокое сжатие 98% в начале вычислений объясняется гладкостью решения для малых времён. С появлением ударной волны и уменьшением её толщины коэффициент сжатия решения квази-двумерного уравнения Бюргерса уменьшается и достигает минимума около 85%, соответствующего моменту достижения минимальной толщины ударной волны.

Сходимость адаптивного метода в двумерном случае продемонстрирована на рисунках 1.33 и 1.34, показывающих поточечную L_∞ ошибку численных решений в конечный момент времени. На рисунках также показана пунктирными линиями зависимость количества узлов адаптивной сетки от величины порогового параметра ε. Скорости сходимости решения соответствуют аналитическим оценкам (1.49) и (1.58). Результаты, приведённые на рисунках 1.33 и 1.34, наглядно демонстрируют сходимость решения с уменьшением ε. Следует также отметить, что ошибка решения обычно больше, чем ε, но имеет тот же порядок. Таким образом, как и в одномерном случае, пороговый параметр ε может быть использован для контроля ошибки решения параболических уравнений.

1.6 Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения гиперболических уравнений

Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения гиперболических систем уравнений, представленный в этом разделе, основан на материалах, опубликованных в статье автора [323].

В отличие от эллиптических и параболических задач, численное моделирование гиперболических систем уравнений усложняется возможностью формирования разрывных решений. В настоящий момент разработано большое число подходов, при этом в большинстве своём основанных на применении искусственной вязкости. Одним из простейших способов разрешения ударных волн является искусственное увеличение вязкости в области разрыва, предотвращающее нефизичные осцилляции. Для получения физически приемлемых, резко меняющихся решений, в области разрыва требуется сетка с высоким разрешением, что неэффективно, если не использовать адаптивную сетку [178; 255]. Современные методы решения гиперболических задач включают такие методы как HLLC [117], ENO [114], WENO [153], MUSCL [55; 242], AUSM [151; 152]. Более детальное описание этих методов можно найти в книгах [146; 234]. Из-за ограничений, накладываемых теоремой Годунова [280] о невозможности построения линейных монотонных схем с порядком аппроксимации выше первого, для повешения порядка точности все вышеупомянутые схемы нелинейны и используют информацию, полученную из решения задачи. Большинство разностных схем высокого порядка, упомянутых выше, основано на подсеточной реконструкции решения, что существенно увеличивает вычислительную стоимость.

Для уменьшения числа узлов сетки, необходимых для решения уравнений Эйлера для сжимаемого газа, Хартен [116] предложил использовать центрально-разностную схему в областях с гладким решением, а в областях ударных волн и контактных разрывов, определённых из анализа коэффициентов вейвлетного разложения, — упрощенную схему ENO. Хартен продемонстрировал, что порядок величины вейвлетного коэффициента определяется порядком разрыва в решении. Более того, из анализа вейвлетных коэффициентов можно получить информацию о гладкости решения и оценить величину показателя Гёльдера—Липшица [221]. Именно поэтому вейвлетные коэффициенты могут быть использованы в качестве индикаторов разрывов при решении гиперболических уравнений в численных методах конечного объёма [45; 53] и методах WENO [33]. Из работ по применению адаптивных схем для вычисления ударных волн [116; 247; 259] видно, что адаптивные многомасштабные методы предлагают существенные преимущества по сравнению с классическими схемами.

Способность вейвлетного анализа выявлять разрывы решения и динамически адаптировать вычислительную сетку позволяет разработку новых вейвлетных методов численного моделирования ударных волн и контактных разрывов, философия которых отличается от основной тенденции с применением дорогостоящих схем высокого порядка и основана на явном использовании локализованной искусственной вязкости для сглаживания ударных волн, и по своему духу напоминает метод ограничения потока [242]. Основное преимущество такого подхода заключается в применении сеточной адаптации, существенно уменьшающей вычислительную стоимость, а также возможности использования простого метода без сложных манипуляций потоков. Несмотря на то, что для простых методов на основе искусственной вязкости количество узлов сетки, необходимое для разрешения ударных волн и контактных разрывов, больше, чем в случае более сложных схем [55; 151; 153], существенное уменьшение общего числа узлов сетки при применении вейвлетной адаптации оправдывает использование более широкого шаблона для аппроксимации разрывов. Вычислительные преимущества вейвлетов позволяют применять искусственную вязкость, добавленную явным образом в непосредственной близости с ударными волнами и контактными разрывами, обеспечивая локальное сглаживание решения. Многие классические методы противопоточного расщепления, как правило, вносят неявную искусственную вязкость, которая обеспечивает нелинейное условие устойчивости для численного решения гиперболических задач. Такие методы теряют свою привлекательность в контексте адаптивных методов. Описанное в настоящем разделе расширение адаптивного вейвлетного коллокационного метода для систем гиперболических уравнений аналогично критерию переключения Хартена [116] и основано на вычислении *маркировочной* функции разрыва Φ, определяемой значениями вейвлетных коэффициентов на самом высоком уровне разрешения. Маркировочная функция Φ, в свою очередь, используется для добавления искусственной вязкости в непосредственной близости с контактными разрывами или ударными волнами. В комбинации с вейвлетной динамической адаптацией применение локализованной искусственной вязкости позволяет построение универсального численного алгоритма для решения гиперболических задач, при этом сохраняя способность контроля ошибки решения, присущего вейвлетным адаптивным методам. Разработанный подход не привязан к методу интегрирования по времени и, подобно AWCM для параболических уравнений, описанному в разделе 1.5, протестирован для ряда явных и неявных методов [8; 61; 80], реализованных в рамках адаптивной вейвлетной среды для универсального многомасштабного численного моделирования (AWESUMM) [337]. Как и в параболическом случае, в AWCM для гиперболических уравнений необходимо ограничить шаг по времени условием типа CFL [59], при этом ограничение шага по времени вытекает не из классического анализа устойчивости, а из условия, которое гарантирует, что структуры решения в течение шага интегрирования по времени не выйдут за границу смежной области, описанной в подразделе 1.3.4.

1.6.1 Маркировочная функция разрыва

Вейвлетные коэффициенты, будучи пропорциональны размеру разрыва [116], являются хорошим индикатором близости с ударной волной или контактным разрывом. В методах ограничения потока [229; 241; 260] ограничительная функция вычисляется либо из значений функций консервативных переменных, либо разности потоков в соседних узлах. Ограничительная функция, в свою очередь, минимизирует искусственную вязкость в областях гладкого решения и допускает большие значения искусственной вязкости в областях разрыва.

В общем случае система одномерных гиперболических уравнений, записанная в консервативной форме, принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu(\Phi)\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right), \tag{1.76}$$

где $\mathbf{U}$ — вектор решения, $\mathbf{F}$ — вектор потоков, а ν — искусственная вязкость, зависящая от ограничительной функции потоков Φ, для большей ясности именуемой маркировочной функцией разрыва. В адаптивном вейвлетном коллокационном методе для гиперболических задач вместо ограничений на потоки в области ударной волны или контактного разрыва вводится явная искусственная вязкость, плавно меняющаяся вблизи области разрыва и позволяющая демпфировать нефизичные осцилляции решения до уровня ниже диффузионного порога ε_{d}. Отметим, что диффузионный пороговый параметр ε_{d} вводится для дополнительного контроля гладкости решения, ограничения максимального значения искусственной вязкости, а также для определения векторной маркировочной функции разрыва $\mathbf{\Phi}$ для каждой из компонент вектора решения $\mathbf{U}$, определённой как

$$\mathbf{\Phi}_k = \begin{cases} \frac{|\mathbf{d}_k^{j_{\max}}|}{\|\mathbf{U}\|} & \text{для } 0 < |\mathbf{d}_k^{j_{\max}}| \leqslant \varepsilon_{\mathrm{d}}\|\mathbf{U}\| \\ 1 & \text{для } |\mathbf{d}_k^{j_{\max}}| > \varepsilon_{\mathrm{d}}\|\mathbf{U}\| \end{cases}. \tag{1.77}$$

Результаты численных экспериментов показали, что использование скалярной маркировочной функции разрыва для всех консервативных переменных, определённой как

$$\Phi_k = \max(\mathbf{\Phi}_k), \tag{1.78}$$

вычислительно более эффективно при сохранении качества численного решения. Отметим, что из-за ограничений на размер памяти, накладываемых компьютерными системами, необходимости более быстрых вычислений и невозможности точного представления разрывных решений гиперболических систем уравнений на сетке с ограниченным разрешением, как правило, приходится ограничивать максимальный уровень разрешения $j_{\max}$. При этом в областях, где структуры решения полностью разрешены, то есть локальный уровень разрешения меньше, чем $j_{\max}$, ошибка численного решения контролируется вейвлетным пороговым параметром ε. Достижение же максимального уровня разрешения подразумевает наличие в этих областях вейвлетов с коэффициентами, превышающими пороговые значения, что, в свою очередь, подразумевает недостаточное сеточное разрешение, приводящее к потере аппроксимации. Именно поэтому вейвлетные коэффициенты на максимальном уровне разрешения могут быть использованы в качестве индикатора достаточности сеточного разрешения и необходимости применения искусственной вязкости.

Коэффициенты вейвлетов на уровнях $j < j_{\max}$ не могут служить индикаторами присутствия разрыва, поэтому для вычисления маркировочной функции разрыва Φ_k в узлах сетки, соответствующих $j < j_{\max}$, используются максимальные значения вейвлетных коэффициентов соседних вейвлетов уровня $j_{\max}$. Из-за диадной природы вейвлетного преобразования, вейвлетные коэффициенты присутствуют только в нечётных узлах вычислительной сетки данного уровня. Для сглаживания маркировочной функции разрыва применяется низкочастотный фильтр, сохраняющий позитивность. Типичная структура ударной волны и

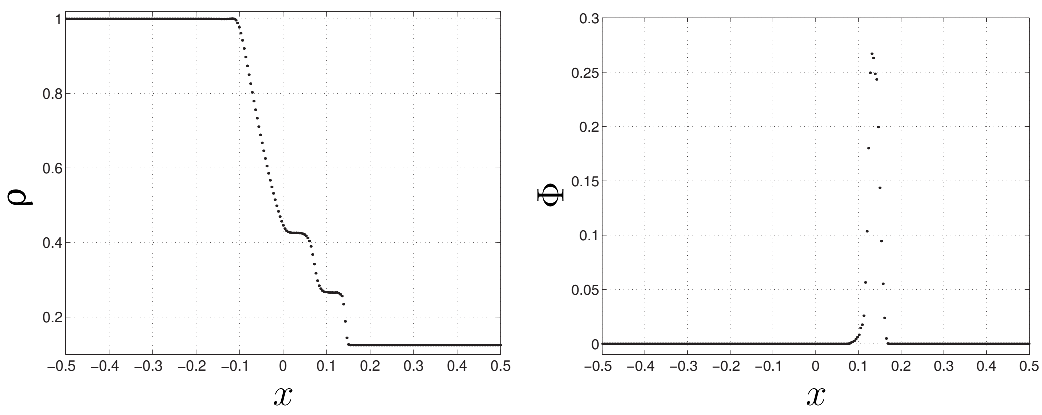


Рисунок 1.35 — Структура численного решения задачи распространения ударной волны и маркировочная функция разрыва Φ, используемая для определения искусственной вязкости.

соответствующая ей маркировочная функция разрыва Φ показаны на рис. 1.35. Интересно отметить, что маркировочная функция разрыва отлична от нуля только в непосредственной близости с ударной волной и не наблюдается в области контактного разрыва и границах волны разрежения. Это объясняется малостью значений вейвлетных коэффициентов в этих областях, не требующих применения искусственной вязкости. Обратим внимание, что искусственная вязкость в областях контактного разрыва присутствует в начальных стадиях решения, но автоматически отключается, как только решение сглаживается и ошибка начинает контролироваться пороговым параметром. Уточним, что ввиду применения сглаживающего фильтра, маркировочная функция разрыва, используемая в AWCM, фактически является осреднённой по пространству функцией.

1.6.2 Описание численного метода

Начнём с рассмотрения метода на примере скалярного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{1.79}$$

Для простоты рассмотрим дискретизацию уравнения (1.79) в узле x_i, используя центральную разностную схему второго порядка для конвективного члена. После добавления искусственной вязкости дискретная форма уравнения (1.79) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{\nu_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \nu_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}. \tag{1.80}$$

Уравнение (1.80) может быть записано в явном виде с минимальной вязкостью, удовлетворяющей нелинейному условию устойчивости [146]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\left(|a_{i+1/2}|\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - |a_{i-1/2}|\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\right), \tag{1.81}$$

где скорость адвекции определена как

$$a_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1})-f(u_i)}{u_{i+1}-u_i} & u_{i+1} \neq u_i \\ f'(u_i) & u_{i+1} = u_i \end{cases}. \tag{1.82}$$

Для законов сохранения векторных величин скалярная скорость адвекции $a_{i+1/2}$ в уравнении (1.81) обычно заменяется матрицей Якоби $\mathbf{A}_{\mathrm{i}+1/2}$ или её приближением. Так, в случае уравнений Эйлера часто используется осреднённая по Рою [202] матрица Якоби. Для простоты в настоящем алгоритме рассматривается одноволновое приближение, в котором скорость адвекции $a_{i+1/2}$ заменяется максимальной характеристической скоростью $|u_{i+1/2}| + c_{i+1/2}$, для простоты обозначенной как $A_{i+1/2}$. Такая замена приводит к искусственной вязкости, обеспечивающей устойчивость аппроксимации ударной волны, но приводит к избыточной диффузии контактных разрывов. Однако в отличие от ударной волны, искусственная вязкость при аппроксимации контактного разрыва автоматически обнуляется после нескольких шагов по времени. Таким образом, уравнение (1.81) может быть переписано в векторной форме как

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{1}{2}A_{i+1/2}\frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i}{\Delta x} - \frac{1}{2}A_{i-1/2}\frac{\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}}{\Delta x} \tag{1.83}$$

со скалярными скоростными коэффициентами, определёнными как

$$A_i = |u_i| + c_i, \tag{1.84}$$

где c_i — скорость звука в узле x_i, а среднее интервальное значение аппроксимируется как

$$A_{i+1/2} = \max(A_i, A_{i+1}). \tag{1.85}$$

Следует обратить внимание, что консервативные переменные в узле x_i, записанные в векторной форме как $\mathbf{U}_i$, отличны от компонент скорости $\mathbf{u}$ и вектора потоков $\mathbf{F}$. Если уравнение (1.83) переписать в форме расщепления потоков, то можно показать, что метод удовлетворяет условию позитивности Хартена [115]. При использовании схемы с явной искусственной вязкостью важно, чтобы величина вязкости была достаточной для демпфирования осцилляций. Из условия позитивности, которое более сильное, чем условие TVD [115], следует, что искусственная вязкость достаточна, чтобы демпфировать осцилляции до уровня ниже порогового параметра ε. Подчеркнём, что из-за ошибки адаптивной вейвлетной интерполяции в аппроксимации решения всегда присутствуют осцилляции с амплитудой меньшей, чем ε, однако искусственная вязкость обеспечивает необходимое демпфирование для поддержания этих осцилляций ниже допустимого уровня.

Следует отметить, что в уравнении (1.83) для дифференцирования потоков применялась центрально-разностная схема второго порядка. В методах расщепления потоков высокого порядка обычно применяется переключатель между схемами высокого и низкого порядка, при этом метод низкого порядка используется для обеспечения монотонности. При применении искусственной вязкости в явном виде монотонность алгоритма гарантируется только для метода второго порядка. На практике адаптивный вейвлетный коллокационный метод использует схемы более высокого порядка, например, четвертого или шестого, с искусственной вязкостью без явного выделения разрывов. Следует подчеркнуть, что формально для схем высокого порядка монотонность схемы не поддерживается. Для уменьшения возможных осцилляций решения на максимальном уровне разрешения вводится верхняя граница значения вейвлетного коэффициента — диффузионный порог ε_{d}, используемый в уравнении (1.77) для демпфирования вейвлетных коэффициентов максимального уровня разрешения до величины, не превышающей этот порог. Результаты численных экспериментов показали, что величина диффузионного порога должна быть выше вейвлетного порога ε, но не превышать его значение больше, чем на порядок. Применение больших значений ε_{d} уменьшает демпфирование осцилляций с амплитудой, сравнимой с вейвлетным порогом ε, что нежелательно.

Вспомним, что искусственная вязкость существенна только в областях разрывов решения. Объединяя маркировочную функцию разрыва Φ с общим методом ограничения потоков, диффузионная форма уравнения (1.83) с явной искусственной вязкостью может быть записана как

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x} + \frac{\nu_{i+1/2}\frac{\mathbf{U}_{i+1}-\mathbf{U}_i}{\Delta x} - \nu_{i-1/2}\frac{\mathbf{U}_i-\mathbf{U}_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}, \tag{1.86}$$

$$\nu_{i+1/2} = \frac{1}{2}\Phi_{i+1/2}\left(c_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|\right)\Delta x, \tag{1.87}$$

где для аппроксимации дифференциального оператора $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x}$ используется центрально-разностная схема высокого порядка. На практике, как правило, применяется схема четвертого или более высокого порядка. Как и в случае параболических уравнений, адаптивный вейвлетный коллокационный метод для гиперболических задач основан на вейвлетной сеточной адаптации и численном многоуровневом вейвлетном дифференцировании, описанном соответственно в подразделах 1.3.4 и 1.3.5. Отметим, что для улучшения эффективности численного метода, минимальное значение $c_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|$ ограничено максимальным значением $\Phi_{i+1/2}c_{i+1/2}$, обозначенного как $\|c\Phi\|_\infty$. Таким образом, искусственная вязкость, используемая в уравнении (1.86), принимает следующую форму

$$\nu_{i\pm1/2} = \frac{1}{2}\Phi_{i\pm1/2}\max\left\{(c_{i\pm1/2} + |u_{i\pm1/2}|), \|c\Phi\|_\infty\right\}\Delta x. \tag{1.88}$$

Многомерное обобщение

В многомерном случае обобщение уравнений (1.86) и (1.88) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{F}_k(\mathbf{U})}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu_k\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k}\right), \tag{1.89}$$

где $\mathbf{F}_k(\mathbf{U})$ — вектор потоков в направлении x_k, ν_k — искусственная вязкость в направлении x_k, определённая как

$$\nu_k = \frac{1}{2}\Delta x_k\Phi C, \tag{1.90}$$

а C — характеристическая скорость, определённая как

$$C = \max\{(c + |\mathbf{u}|), \|c\Phi\|_\infty\}, \tag{1.91}$$

Алгоритм 1.7: AWCM для решения гиперболических задач.

начальные условия $(t = t_0)$: **получить** $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}(t_0)$ и $\mathcal{G}^{t_0}_{\geqslant}$, используя алгоритм 1.4

while $t < t_{\text{end}}$ **do**

  выполнить прямое вейвлетное преобразование для каждой из компонент решения $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}(t)$

  for $j = j_{\max} : -1 : j_{\min}$ **do**

    создать маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} = \bigcup\limits_{r=1}^{N_c} \mathcal{M}^{\mathrm{S}}\left(v_r\left(\mathbf{x},t\right)\right)$

  end

  расширить маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

  выполнить процедуру проверки восстановления функции (алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

  построить $\mathcal{G}^{t+\Delta t}_{\geqslant}$ на основе маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$

  добавить вспомогательную маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\bigoplus\limits_{j=0}^{j_{\max}} \mathcal{D}^j} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$

  выполнить процедуру проверки восстановления функции (алгоритм 1.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$

  if $\mathcal{G}^{t+\Delta t}_{\geqslant} \neq \mathcal{G}^{t}_{\geqslant}$ **then**

    проинтерполировать решение $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}(t)$ на сетку $\mathcal{G}^{t+\Delta t}_{\geqslant}$

  end

  вычислить Φ и ν_k с помощью уравнений (1.78) и (1.90)

  проинтегрировать систему уравнений (1.89) с шагом по времени Δt

  $t = t + \Delta t$

end

где c — скорость звука и $|\mathbf{u}|$ — величина скорости. Обратим внимание на наличие n различных искусственных вязкостей ν_k, каждая из которых пропорциональна соответствующему сеточному разрешению Δx_k. Также отметим, что характеристическая скорость является скалярной величиной.

Псевдокод алгоритма для решения системы гиперболических уравнений приведён в алгоритме 1.7. Подчеркнём, что $\mathbf{U}_{\mathbf{k}}(t)$ обозначает дискретизированную векторную функцию $\mathbf{U}$ со значениями в узлах сетки $\mathbf{x}^{j_{\max}}_{\mathbf{k}} \in \mathcal{G}^{t}_{\geqslant}$ в момент времени t, $v_r(\mathbf{x},t)$, $r = 1,\ldots,N_c$ — управляющие переменные, используемые для адаптации сетки, а N_c — число управляющих переменных. В приведённом алгоритме маркировочная функция разрыва, локализованная искусственная вязкость и адаптивная сетка непрерывно корректируются для выявления ударных волн, контактных разрывов и других локальных структур решения, отслеживания и разрешая их на адаптивной вычислительной сетке. Обратим внимание, что алгоритм 1.7 практически идентичен алгоритму 1.6 для параболических систем уравнений и отличается лишь вычислением локализованной искусственной вязкости. Следует отметить, что алгоритм 1.7 может быть применён в контексте параболических задач, не требующих разрешения ударных волн, например, как в случае взаимодействия ударной волны с пограничным слоем [72]. Также следует подчеркнуть, что маркировочная функция разрыва может быть построена на основе подмножества консервативных или дополнительных переменных.

1.6.3 Численные результаты: одномерные и двумерные задачи Римана

Адаптивный вейвлетный коллокационный метод для систем гиперболических уравнений продемонстрирован на примере решений тестовых одномерных и двумерных задач Римана. В качестве одномерных задач рассмотрены тестовые задачи с известными аналитическими решениями. Двумерная задача Римана наглядно демонстрирует общность подхода и простоту его реализации.

Одномерные задачи Римана

Одномерные уравнения Эйлера, описывающие эволюцию плотности ρ, момента ρu и полной энергии ρe_T, могут быть записаны в векторной форме как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \tag{1.92}$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ определены как

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ (\rho e_T + P)u \end{bmatrix}, \tag{1.93}$$

а давление определено как

$$P = (\gamma - 1)\left(\rho e_T - \frac{1}{2}\rho u^2\right), \tag{1.94}$$

где постоянная газа γ определена как отношение удельных теплоемкостей. Гиперболическая система уравнений (1.92) может быть дискретизирована в виде (1.86) с добавлением явной искусственной вязкости, заданной выражением (1.88) со скоростью звука $c = (\gamma P/\rho)^{1/2}$.

Для каждой одномерной тестовой задачи численное решение было получено на адаптивных сетках с эффективными разрешением 320, 640 и 1280 узлов соответственно для $j_{\max} = 4$, 5 и 6. Численные результаты получены для диффузионного порога $\varepsilon_{\mathrm{d}} = 0.01$ и CFL $= 1.0$.

Слабая ударная волна

В качестве первой тестовой задачи рассмотрим задачу о формировании слабой ударной волны [234] со следующими начальными условиями

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathrm{L}} = 1.0, \quad \rho_{\mathrm{R}} = 0.125, \\ &u_{\mathrm{L}} = 0.0, \quad u_{\mathrm{R}} = 0.0, \\ &p_{\mathrm{L}} = 1.0, \quad p_{\mathrm{R}} = 0.1, \end{aligned} \tag{1.95}$$

где индексы L и R обозначают величины слева и справа от границы разрыва.

Решение задачи в момент времени $t = 0.24$ и соответствующая адаптивная сетка показаны на рисунках 1.36, 1.37 и 1.38 для разных уровней разрешения. Подчеркнём, что при увеличении $j_{\max}$ на единицу толщина области разрыва уменьшается в два раза, тем самым, указывая на первый порядок сходимости метода вблизи области разрыва, что ожидаемо из-за пропорциональности искусственной вязкости размеру ячейки сетки на максимальном уровне разрешения. Следует отметить, что вычисления с $j_{\max} = 4$ используют 147 узлов адаптивной сетки при эффективном сеточном разрешении в 320 узлов. При увеличении уровня разрешения до $j_{\max} = 5$ количество адаптивных узлов сетки возрастает всего на 31 при удвоении эффективного разрешения до 640 узлов. Дальнейшее увеличение максимального уровня разрешения до $j_{\max} = 6$ приводит к увеличению узлов адаптивной сетки еще на 30 при удвоении эффективного разрешения

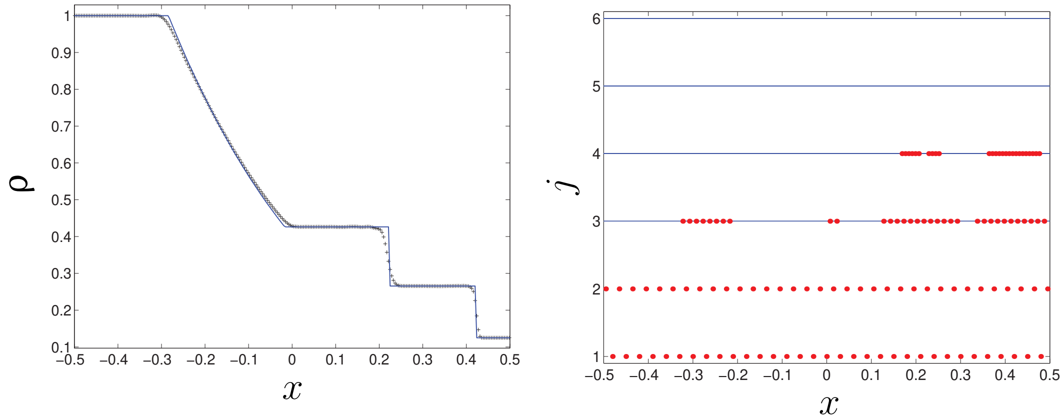


Рисунок 1.36 — Слабая ударная волна: распределение плотности в момент времени $t = 0.24$ (слева) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка (справа), состоящая из 147 узлов (•) при эффективном разрешении в 320 узлов. Сплошная линия обозначает аналитическое решение.

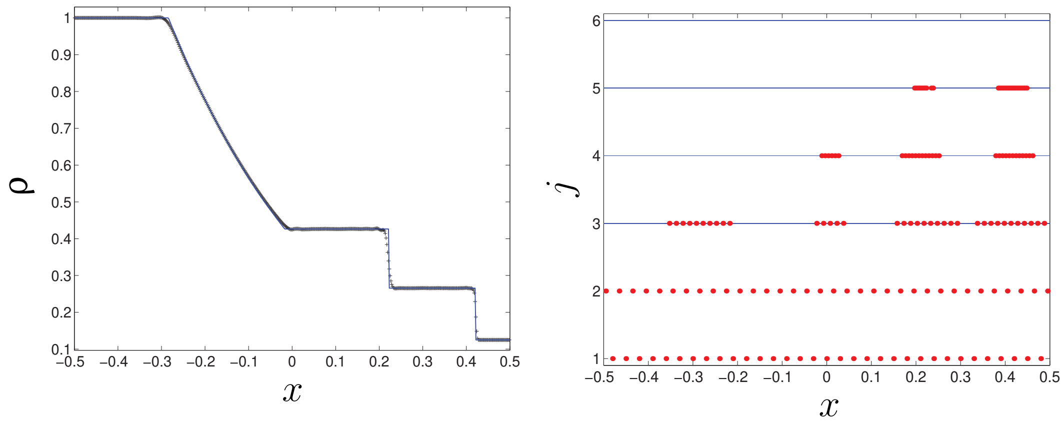


Рисунок 1.37 — Слабая ударная волна: распределение плотности в момент времени $t = 0.24$ (слева) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка (справа), состоящая из 178 узлов (•) при эффективном разрешении в 640 узлов.

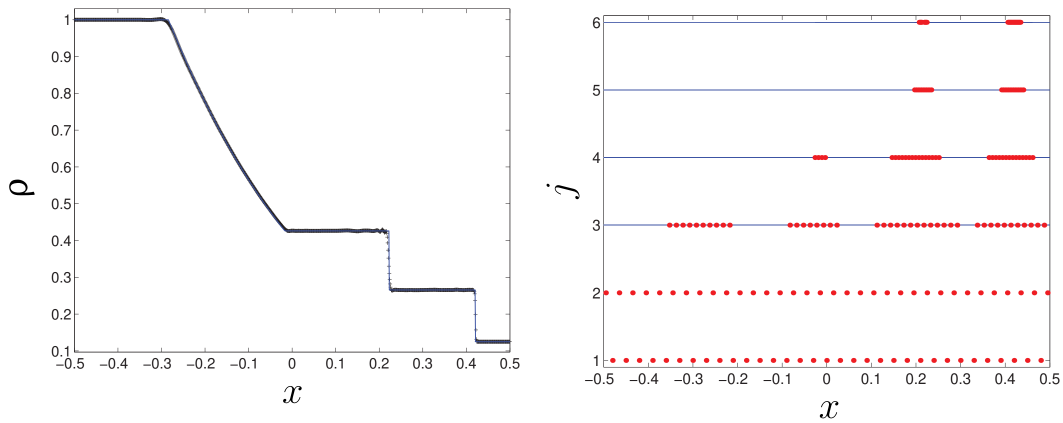


Рисунок 1.38 — Слабая ударная волна: распределение плотности в момент времени $t = 0.24$ (слева) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка (справа), состоящая из 208 узлов (•) при эффективном разрешении в 1280 узлов.

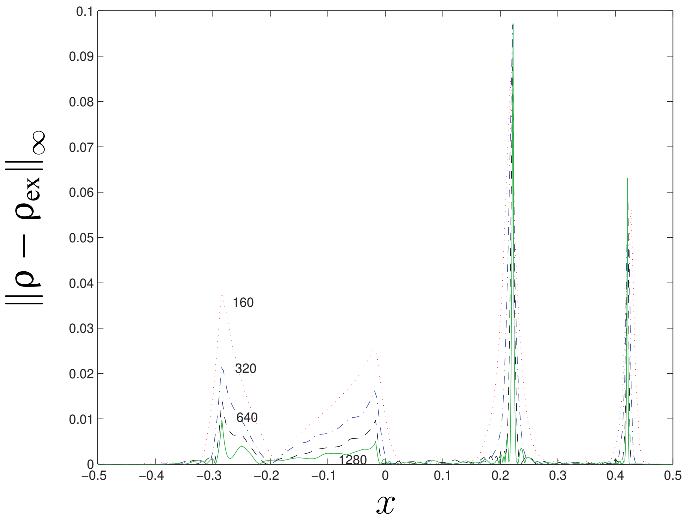


Рисунок 1.39 — Поточечная L_∞ ошибка решения задачи о формировании слабой ударной волны для разных уровней разрешения при эффективном разрешении в 160, 320, 640 и 1280 узлов.

до 1280 узлов. Обратим внимание, что для вычисления L_∞ ошибки, численное решение с адаптивной сетки интерполировалось на неадаптивную сетку с тем же максимальным уровнем разрешения.

Для иллюстрации локального характера ошибки решения поточечная L_∞ ошибка численного решения задачи о формировании слабой ударной волны показана на рис. 1.39 для четырёх различных уровней максимального разрешения. Обратим внимание, что с увеличением разрешения толщина области контактного разрыва и ударной волны уменьшается в два раза с каждым увеличением уровня разрешения. Также отметим наличие значимой ошибки в областях крайних точек волны разрежения, особенно в случае низкого разрешения. Эта ошибка вызвана ненулевой искусственной вязкостью в начальной стадии решения, сглаживающей особенности в течение нескольких первых шагов по времени. В начальный момент времени волна разрежения, контактный разрыв и ударная волна находятся в области существенной искусственной вязкости, обусловленной наличием разрыва, что приводит к сглаживанию не только ударной волны, но и контактного разрыва и волны разрежения. Однако по истечении некоторого времени искусственная вязкость в областях контактных разрывов и волн разрежения автоматически обращается в ноль. Это происходит вследствие того, что численное решение сглаживается и полностью разрешается, автоматически отключая искусственное демпфирование вейвлетных коэффициентов на максимальном уровне

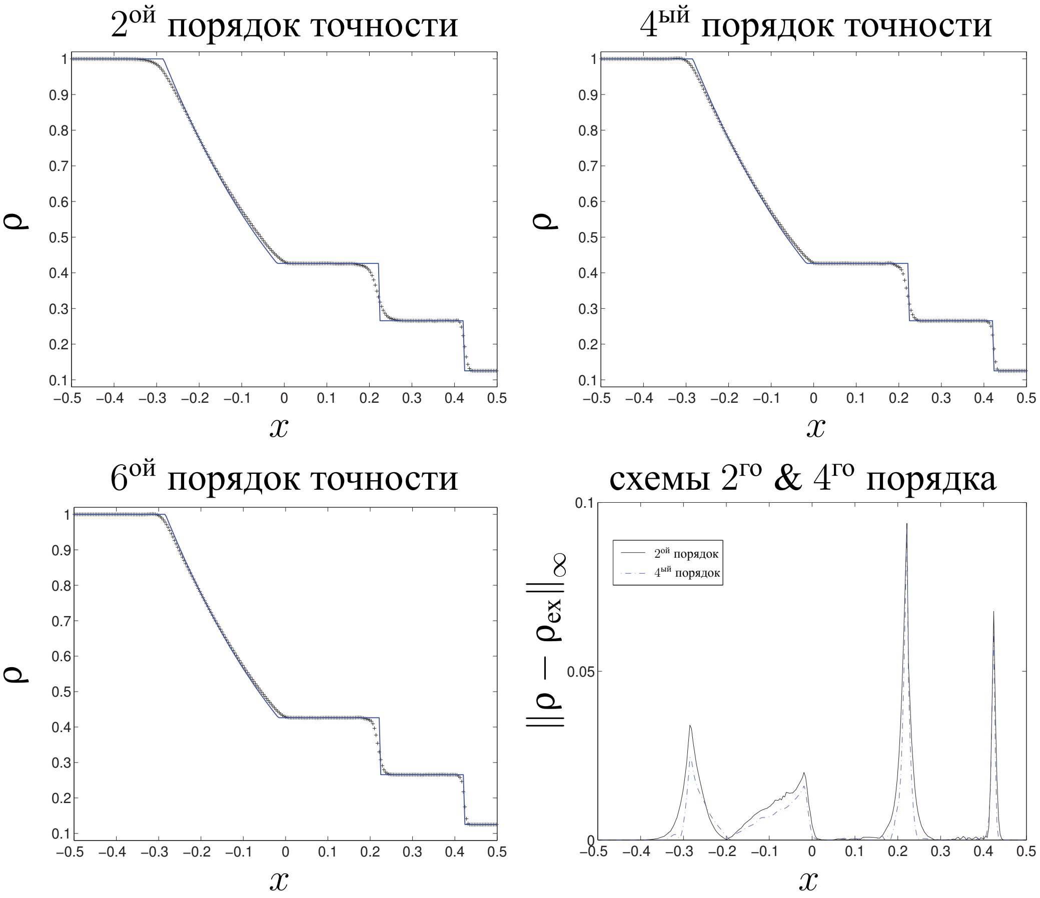


Рисунок 1.40 — Сравнение численного решения, полученного AWCM второго, четвертого и шестого порядка точности на адаптивной сетке с эффективным разрешением в 320 узлов, с аналитическим распределением плотности.

разрешения. Автоматическое отключение искусственной вязкости в областях гладкого решения очень важно для избежания нефизичного демпфирования акустических волн и других структур решения.

В большинстве численных расчетов, приведённых в этом подразделе, применялся AWCM шестого порядка точности. Крутизна областей разрывов напрямую зависит от порядка схемы. Для схем второго порядка уравнение (1.86) приобретает вид стандартного противопоточного метода. Однако для схем более высокого порядка, как видно из рис. 1.40, наблюдается небольшое, но заметное улучшение по сравнению с противопоточными методами. Заметные изменения видны при сравнении результатов вычислений с использованием схем второго и четвёртого порядка. Дальнейшее увеличение порядка схемы приводит только к небольшим улучшениям, что с точки зрения вычислительной эффективности не оправдано, так как сравнимые по вычислительной стоимости, но более точные результаты могут быть получены с применением схемы четвертого порядка с меньшим ε.

Сильная ударная волна

Одним из основных достоинств адаптивного вейвлетного коллокационного метода является возможность его применения для решения многомасштабных задач. Задача о формировании слабой ударной волны проиллюстрировала основные способности AWCM, но не продемонстрировала возможность его использования в жестких задачах. В этом подразделе обсуждено применение AWCM для решения задачи о формировании сильной ударной волны [234] со следующими начальными условиями

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathrm{L}} = 1.0, \quad \rho_{\mathrm{R}} = 0.01, \\ &u_{\mathrm{L}} = 0.0, \quad u_{\mathrm{R}} = 0.0, \\ &p_{\mathrm{L}} = 10.0, \ p_{\mathrm{R}} = 0.01. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Из-за увеличения интенсивности и скорости распространения ударной волны, величина искусственной вязкости в области ударной волны намного больше, чем в предыдущем случае. Контраст значений переменных между областями разрыва составляет три порядка по сравнению с контрастом в один порядок в случае слабой ударной волны. Результаты численного решения задачи о формировании сильной ударной волны и соответствующие адаптивные сетки показаны на рисунках 1.41, 1.42 и 1.43 для трёх уровней разрешения. Отметим, что из-за численной диффузии ударная волна размазывается, в результате чего фронт ударной волны слегка опережает аналитическое решение. При увеличении разрешения толщина ударной волны уменьшается, и численное решение приближается к аналитическому.

Из рисунков 1.36-1.38 и 1.41-1.43 видно, что толщина ударной волны как слабой, так и сильной, примерно составляет 3-4 межузловых расстояний. Следует обратить внимание, что в обоих случаях размазывание контактных разрывов происходит в начальных стадиях решения, поэтому большая величина искусственной вязкости в случае сильной ударной волны приводит к большему сглаживанию области контактного разрыва. Однако сеточная адаптация позволяет приблизить решение к аналитическому при увеличении разрешения и добавлении незначительного количества узлов сетки. Так, например, при увеличении максимального уровня разрешения с $j_{\max} = 4$ до $j_{\max} = 5$ количество узлов адаптивной сетки увеличивается с 168 до 209 при удвоении эффективного разрешения с 320 до

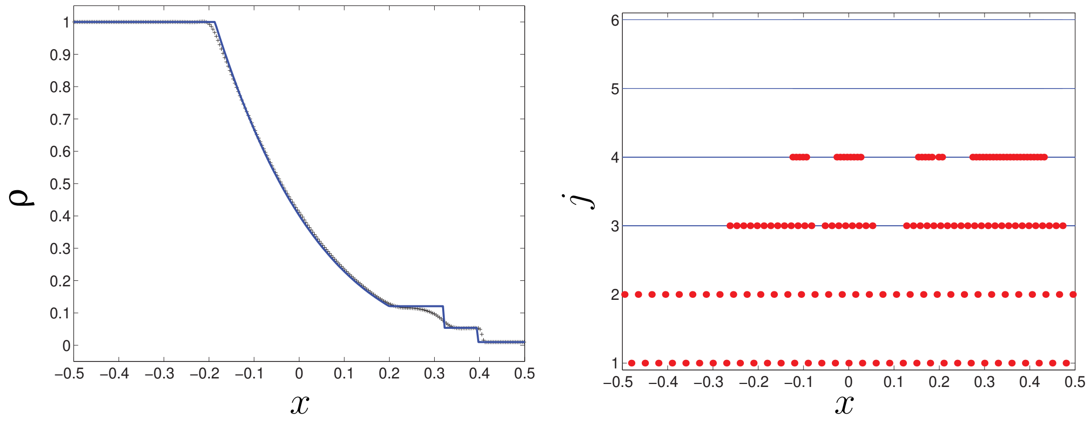


Рисунок 1.41 — Сильная ударная волна: распределение плотности в момент времени $t = 0.0.05$ (слева) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка (справа), состоящая из 168 узлов (●) при эффективном разрешении в 320 узлов.

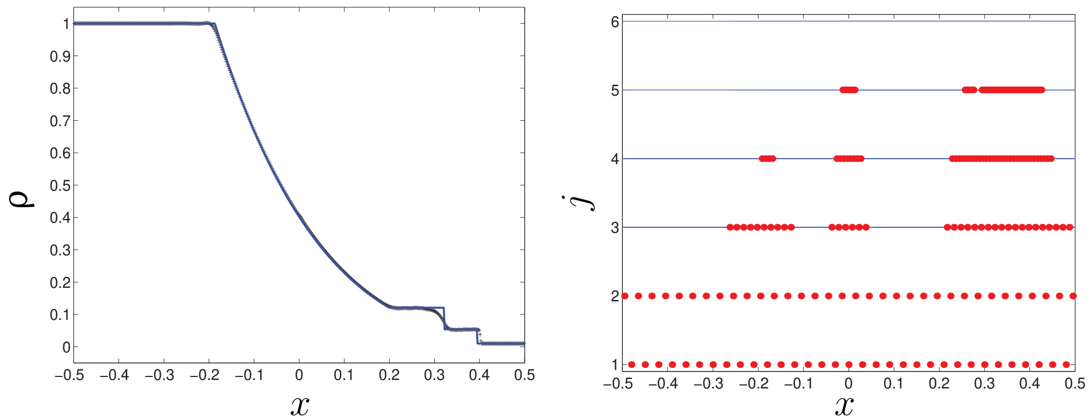


Рисунок 1.42 — Сильная ударная волна: распределение плотности в момент времени $t = 0.0.05$ (слева) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка (справа), состоящая из 209 узлов (●) при эффективном разрешении в 640 узлов.

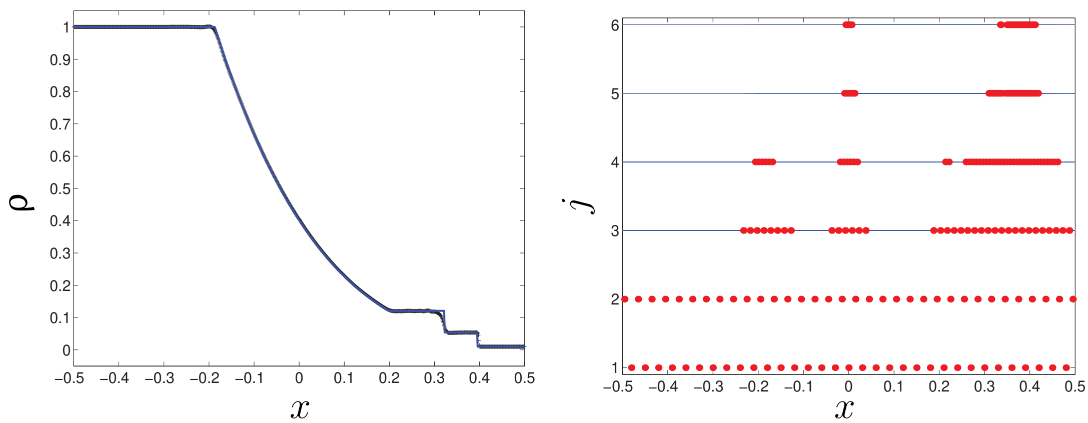


Рисунок 1.43 — Сильная ударная волна: распределение плотности в момент времени $t = 0.0.05$ (слева) и соответствующая адаптивная вычислительная сетка (справа), состоящая из 239 узлов (●) при эффективном разрешении в 1280 узлов.

640 узлов. При последующем увеличении максимального уровня разрешения до $j_{\max} = 6$ и эффективного разрешения до 1280 узлов количество узлов адаптивной сетки увеличивается всего на 30.

Двумерная задача Римана

Двумерные уравнения Эйлера, описывающие эволюцию консервативных переменных ρ, ρu_1, ρu_2 и ρe_T, могут быть записаны в векторной форме как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial x_2} = 0, \tag{1.97}$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ и давление определены как

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho e_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + P \\ \rho u_1 u_2 \\ (\rho e_T + P) u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_2^2 + P \\ (\rho e_T + P) u_2 \end{bmatrix}, \tag{1.98}$$

$$P = (\gamma - 1)\left(\rho e_T - \frac{1}{2}\rho\left(u_1^2 + u_2^2\right)\right). \tag{1.99}$$

Как и в одномерном случае, гиперболическая система уравнений (1.97) может быть дискретизирована в виде (1.89) с добавлением искусственной вязкости, заданной выражением (1.90) со скоростью звука $c = (\gamma P/\rho)^{1/2}$.

Цилиндрическая ударная волна

Тестовая задача, обсуждаемая в этом подразделе, является двумерным аналогом задачи о формировании слабой ударной волны. Численное решение получено в квадратной области $\Omega_{\mathrm{s}} = [-1{,}1] \times [-1{,}1]$ с внутренней цилиндрической областью радиусом $R = 0.4$. Внутри внутренней области давление газа и плотность изначально выше, чем во внешней области, что приводит к формированию цилиндрической ударной волны, контактного разрыва и волны разрежения, распространяющихся в радиальном направлении от центра координат. Начальные

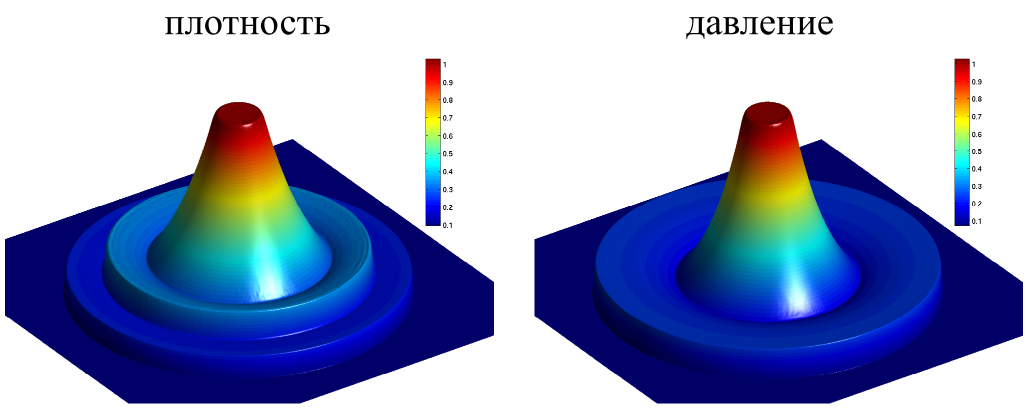


Рисунок 1.44 — Задача о формировании двумерной ударной волны: численное решение для плотности и давления в момент времени $t = 0.24$ на адаптивной сетке с эффективным разрешением в $1\,024 \times 1\,024$ узлов.

условия для внутренней и внешней областей [234], соответственно обозначенные индексами in и out, заданы как

$$
\begin{aligned}
\rho_{\text{in}} &= 1.0, & \rho_{\text{out}} &= 0.125,\\
u_{1\text{in}} &= 0.0, & u_{1\text{out}} &= 0.0,\\
u_{2\text{in}} &= 0.0, & u_{2\text{out}} &= 0.0,\\
p_{\text{in}} &= 1.0, & p_{\text{out}} &= 0.1.
\end{aligned}
\qquad (1.100)
$$

Численные решения получены для адаптивных сеток с эффективным разрешением в 256×256, 512×512, и $1\,024 \times 1\,024$ узлов, соответствующих максимальному уровню разрешения $j_{\max} = 6$, 7 и 8 при базовом сеточном разрешении 8×8 узлов. Численные результаты получены для AWCM четвертого порядка для диффузионного порога $\varepsilon_{\text{d}} = 10^{-2}$, вейвлетного порога $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ и CFL $= 0.8$.

На рис. 1.44 приведено численное решение для плотности и давления на адаптивной сетке с эффективным разрешением на адаптивных сетках с эффективными разрешением $1\,024 \times 1\,024$. Для лучшей визуальной демонстрации гладкости решения трёхмерная поверхность визуализирована, используя эффект отражающей поверхности, который усиливает визуальное восприятие мелких осцилляций решения. При этом решение на рис. 1.44 выглядит гладким, демонстрируя эффективность AWCM. Обратим внимание, что для больших значений ε мелкие осцилляции поверхности становятся видимыми.

Численные решения задачи о формировании цилиндрической слабой ударной волны на адаптивных сетках с эффективным разрешением в 256×256,

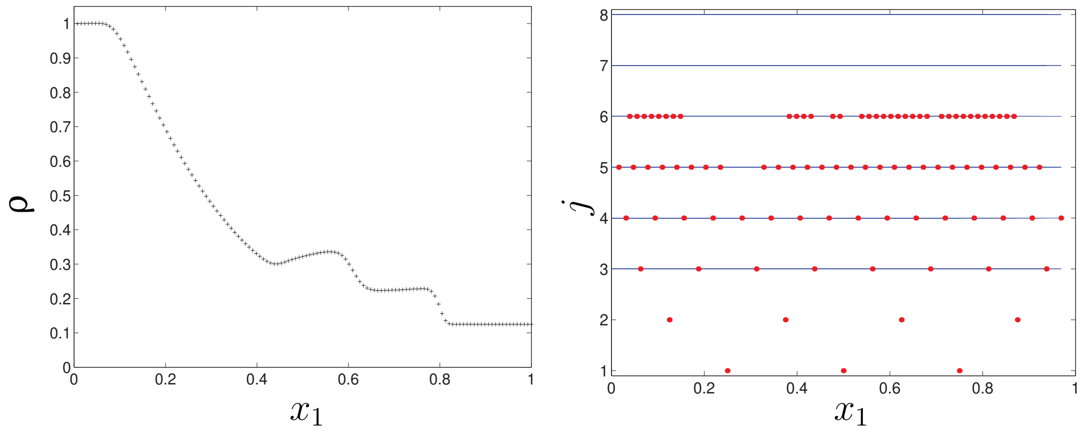


Рисунок 1.45 — Распределения плотности и вейвлетных коэффициентов в поперечном сечении для численного решения, полученного на адаптивной сетке с эффективным разрешением в 256×256 узлов и $j_{\max} = 6$.

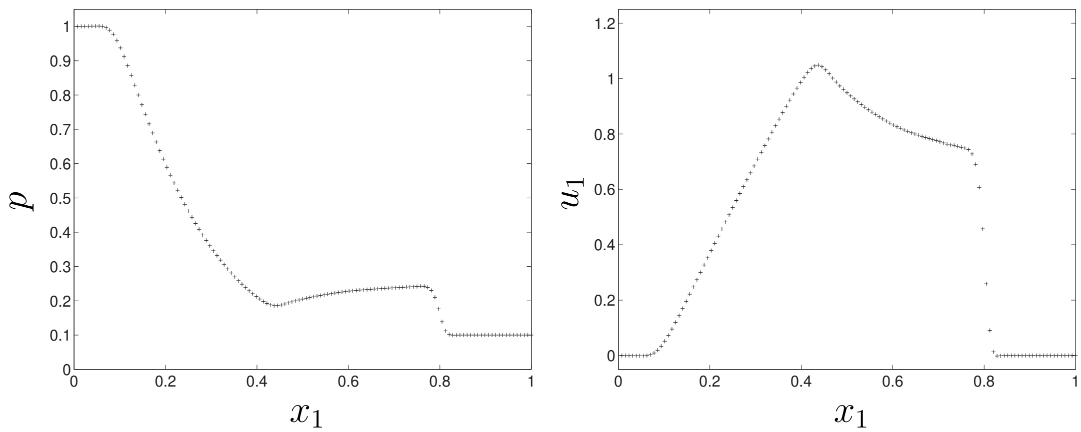


Рисунок 1.46 — Распределения давления и скорости в поперечном сечении для численного решения, полученного на адаптивной сетке с эффективным разрешением в 256×256 узлов и $j_{\max} = 6$.

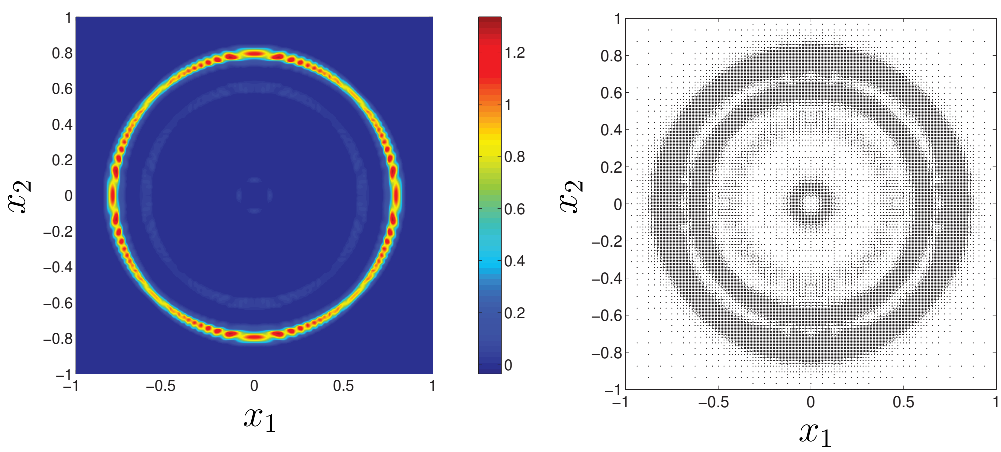


Рисунок 1.47 — Двумерная маркировочная функция разрыва $C\Phi$, отмасштабированная на характеристическую скорость, и соответствующая адаптивная сетка в конечный момент времени.

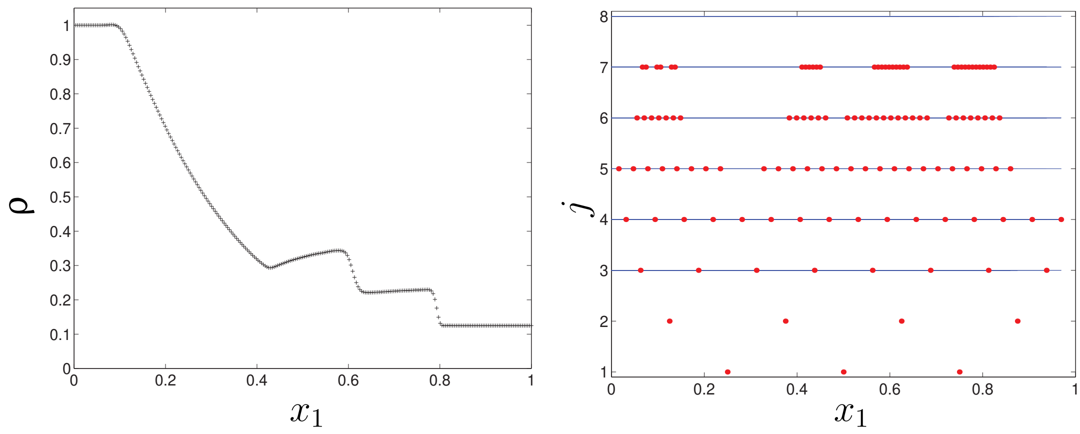


Рисунок 1.48 — Распределения плотности и вейвлетных коэффициентов в поперечном сечении для численного решения, полученного на адаптивной сетке с эффективным разрешением в 512×512 узлов и $j_{\max} = 7$.

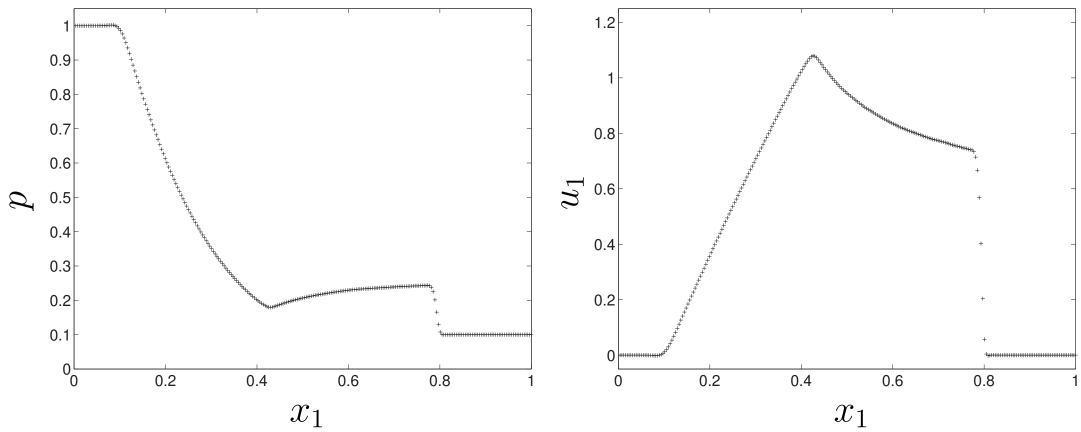


Рисунок 1.49 — Распределения давления и скорости в поперечном сечении для численного решения, полученного на адаптивной сетке с эффективным разрешением в 512×512 узлов и $j_{\max} = 7$.

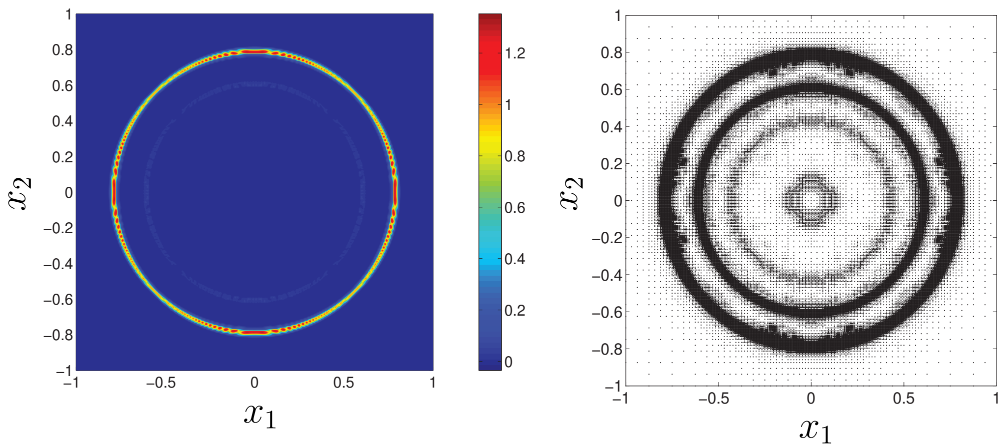


Рисунок 1.50 — Двумерная маркировочная функция разрыва $C\Phi$, отмасштабированная на характеристическую скорость, и соответствующая адаптивная сетка в конечный момент времени.

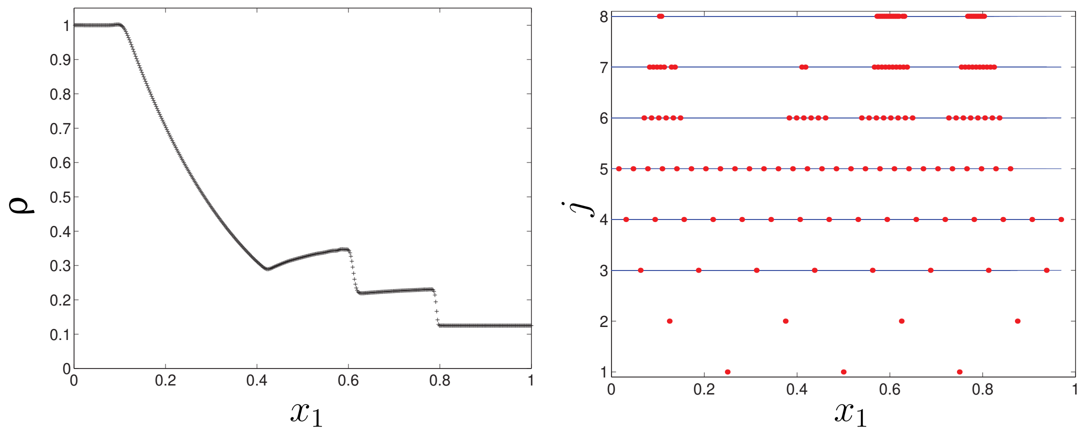


Рисунок 1.51 — Распределения плотности и вейвлетных коэффициентов в поперечном сечении для численного решения, полученного на адаптивной сетке с эффективным разрешением в $1\,024 \times 1\,024$ узлов и $j_{\max} = 8$.

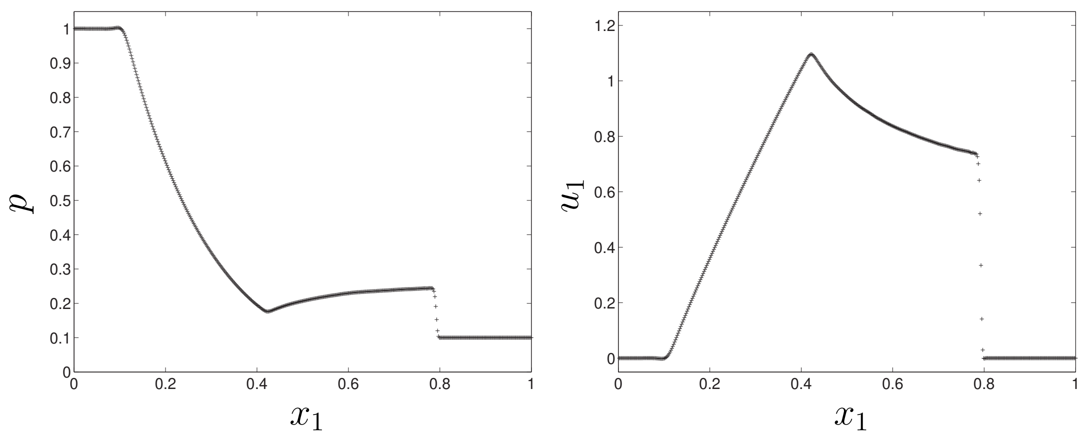


Рисунок 1.52 — Распределения давления и скорости в поперечном сечении для численного решения, полученного на адаптивной сетке с эффективным разрешением в $1\,024 \times 1\,024$ узлов и $j_{\max} = 8$.

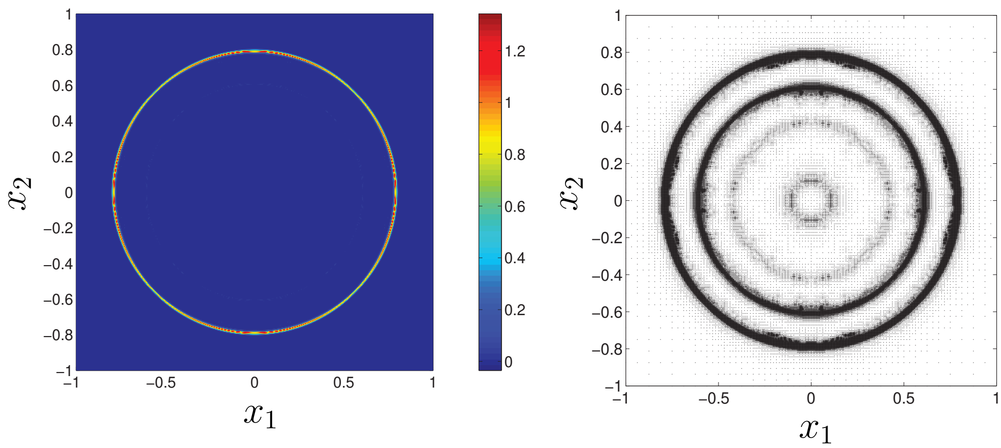


Рисунок 1.53 — Двумерная маркировочная функция разрыва $C\Phi$, отмасштабированная на характеристическую скорость, и соответствующая адаптивная сетка в конечный момент времени.

512×512 и $1\,024 \times 1\,024$ узлов представлены на рисунках 1.45-1.53, где на рисунках 1.45, 1.46, 1.48, 1.49, 1.51 и 1.52 показано распределение решения и узлов адаптивной сетки в поперечном сечении. В силу симметрии задачи решение показано только для положительных значений координаты x_1. При увеличении уровня разрешения на единицу ширина ударной волны и контактного разрыва уменьшается в два раза. Решение в поперечном сечении на адаптивной сетке с эффективным разрешением в 256×256 узлов использует 95 адаптивных узла. При увеличении максимального уровня разрешения до $j_{\max} = 7$ количество адаптивных узлов в поперечном сечении возрастает до 125 на сетке с эффективным разрешением в 512×512 узлов. Максимальное сжатие достигается для адаптивной сетки с эффективным разрешением в $1\,024 \times 1\,024$ узлов, при этом количество узлов адаптивной сетки в поперечном сечении возрастает всего на 19. Рисунки 1.47, 1.50 и 1.53 демонстрируют двумерную маркировочную функцию разрыва, отмасштабированную на характеристическую скорость (1.91), и соответствующие адаптивные вычислительные сетки. Следует отметить малое количество узлов, используемых адаптивным вейвлетным коллокационным методом по сравнению с равномерной неадаптивной сеткой того же разрешения, что ещё раз демонстрирует эффективность AWCM.

Глава 2. Параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения уравнений математической физики

2.1 Параллельное вейвлетное преобразование

Несмотря на более чем тридцатипятилетнюю историю вейвлетов со дня их открытия Гроссманом и Морле [110] и широко распространённого применения вейвлетов в науке и технике, параллельные вейвлетные технологии развивались лишь усилиями небольших групп исследователей, включая автора. До недавнего времени основные усилия по развитию параллельных вейвлетных алгоритмов были направлены на разработку неадаптивных преобразований, например, параллельное дискретное вейвлетное преобразование без межпроцессорной связи [163], коммуникационно-эффективное вейвлетное преобразование без дистрибутивного транспонирования матрицы [177], распределённое параллельное би-ортогональное вейвлетное преобразование второго поколения [106], параллельное вейвлетное преобразование для параллельных компьютеров с распределённой и общедоступной архитектурой памяти [143] и параллельное вейвлетное преобразование для графических процессоров (ГП) [99; 101; 228; 232]. Помимо параллельного адаптивного вейвлетного коллокационного метода (P-AWCM), разработанного автором [319] и описанного в этой главе, к существенным вкладам в развитие параллельных адаптивных вейвлетных технологий можно отнести многоблочный адаптивный вейвлетный метод [205], метод адаптивной вейвлетной многомасштабной аппроксимации [183] и адаптивный вейвлетный метод для уравнений мелкой воды на сфере [2; 137].

В этой главе представлено обобщение адаптивного вейвлетного коллокационного метода для параллельных вычислений, основанное на материалах, опубликованных в работе автора [319] . Глава организована следующим образом. Сложности, связанные с распараллеливанием стадии обновления вейвлетного преобразования второго поколения, объяснены в разделе 2.2, где также описано параллельное асинхронное вейвлетное преобразование второго поколения. Динамическая параллельная структура данных типа деревьев произвольной размерности с однонаправленным списком связей и детерминистическим путём прохождения, используемая в параллельном адаптивном вейвлетном коллокационном методе (P-AWCM), описана в разделе 2.3. Параллельное расширение алгоритма сеточной адаптации на основе вейвлетов обсуждено в разделе 2.4, где также описано параллельное обобщение процедуры восстановления функции. Параллельное обобщение алгоритма вычисления производных представлено в разделе 2.5. В разделе 2.6 обсуждены квантование и межпроцессная синхронизация данных, используемых в P-AWCM. Алгоритм динамической балансировки загрузки процессов (динамического распараллеливания задачи) с сохранением локальности соседних узлов адаптивной сетки описан в разделе 2.7. Алгоритм P-AWCM, основанный на применении вышеупомянутых компонент, представлен в разделе 2.8. Эффективность распараллеливания, вычислительная сложность, параллельная масштабируемость и теоретически возможная эффективность параллелизации P-AWCM обсуждены в разделе 2.9.

2.2 Асинхронное параллельное вейвлетное преобразование второго поколения

В силу чётно-нечетного разделения зависимости значений коэффициентов вейвлетного преобразования второго поколения в стадиях предсказания и обновления, неадаптивное вейвлетное преобразование, описанное в разделе 1.2, является заведомо алгоритмически параллельным алгоритмом, особенно для параллельных систем с общедоступной архитектурой памяти. На сегодняшний день разработано множество реализаций дискретных вейвлетных преобразований как для параллельных систем с общедоступной архитектурой памяти [99], так и для графических процессоров [90; 98; 99; 101; 232; 239], а также для параллельных компьютеров с распределённой архитектурой памяти [106; 143; 163; 177]. Сравнение параллельной эффективности различных реализаций параллельных неадаптивных алгоритмов дискретного вейвлетного преобразования показало, что параллельные алгоритмы на основе процедуры подъёма более эффективны, чем алгоритмы на основе банков фильтров, в то время как алгоритмы, использующие банки фильтров, более эффективны для графических процессоров.

Ситуация кардинально меняется для адаптивного вейвлетного преобразования, описанного в разделе 2.4. Основная трудность заключается в балансировке загрузки параллельных процессов для задач с пространственно неравномерным

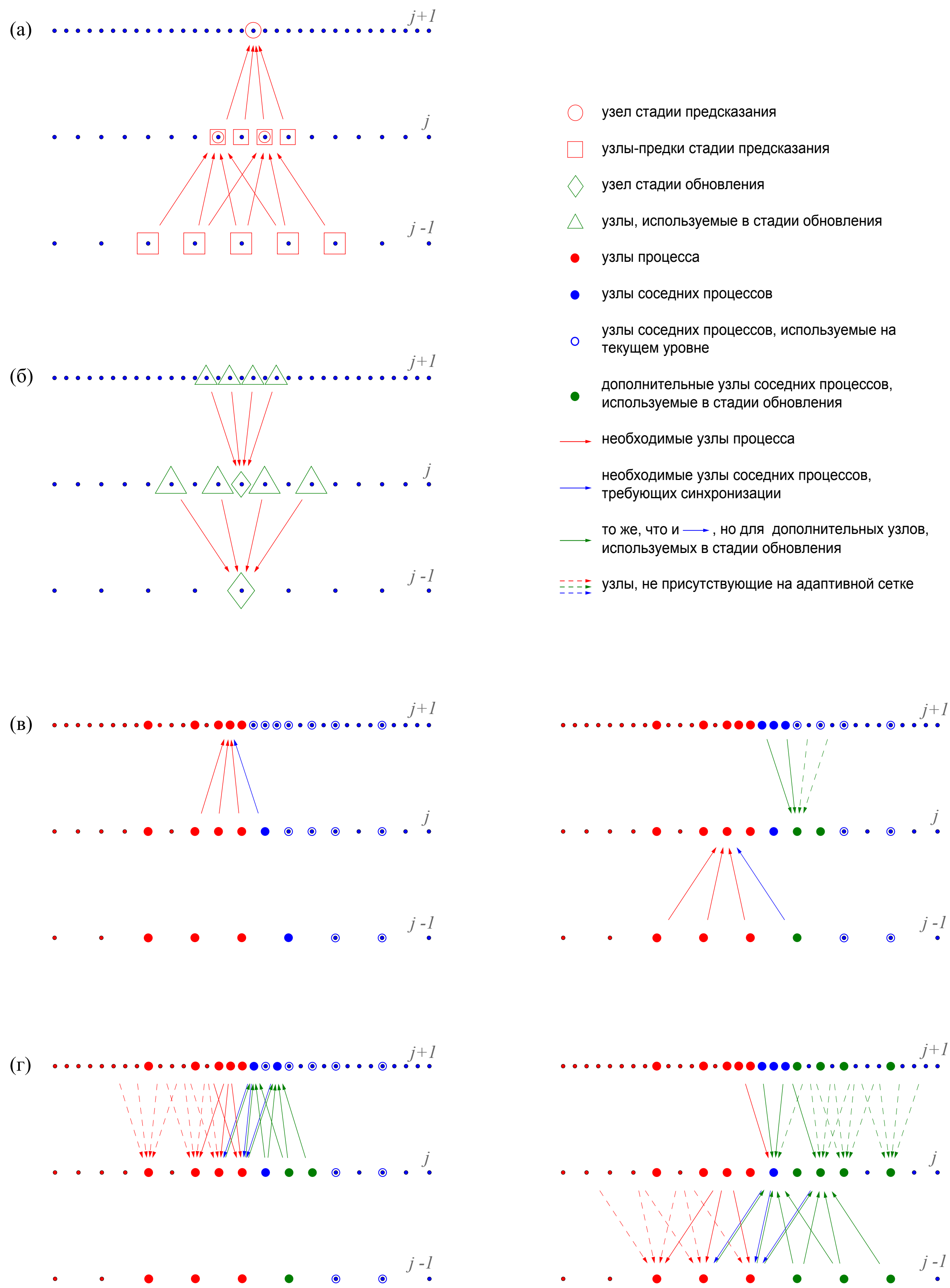


Рисунок 2.1 — Диаграмма зависимости вейвлетных коэффициентов в прямом параллельном вейвлетном преобразовании в стадиях предсказания (а) и обновления (б); в стадии предсказания на уровнях $j+1$ и j (в); в стадии обновления на уровнях j и $j-1$ (г). На каждом уровне разрешения показаны узлы сетки, принадлежащие самому уровню и всем нижележащим уровням разрешения.

распределением узлов адаптивной сетки. Большинство параллельных алгоритмов неадаптивного вейвлетного преобразования не применимо к адаптивному преобразованию, в основном из-за требования синхронизации вейвлетных коэффициентов на каждом уровне разрешения, что абсолютно непрактично как с точки зрения локализации данных, так и с точки зрения параллельного балансирования загрузки. Таким образом, эффективная параллельная реализация адаптивного вейвлетного преобразования должна быть основана на асинхронном алгоритме, использующем синхронизацию данных только в начале вейвлетного преобразования.

Как объяснено в разделе 1.2 и проиллюстрировано на рис. 2.1б, вейвлетное преобразование как прямое, так и обратное, в стадии обновления требует включения и синхронизации данных в узлах сетки на более высоком уровне разрешения. Для вычисления вейвлетных коэффициентов в узлах на более высоком уровне разрешения необходимо включение соответствующих узлов-предков на предыдущем уровне разрешения, что продиктовано требованиями процедуры полного восстановления функции, проиллюстрированного на рис. 2.1а. Рисунки 2.1в-г показывают серию стадий предсказания и обновления, а также соответствующие дополнительные стадии, необходимые для одного шага параллельного прямого адаптивного вейвлетного преобразования. На рис. 2.1в схематически представлена зависимость вейвлетного коэффициента от значений в узлах на уровнях $j+1$ и j в стадии предсказания, а зависимость коэффициентов скалярных функций на стадии обновления от значений вейвлетных коэффициентов на уровнях j и $j-1$ показаны на рис. 2.1г. Последовательность операций, проиллюстрированная на этих рисунках, начинается с узла уровня $j+1$, принадлежащего рассматриваемому процессу, узлы которого раскрашены в красный цвет. Для процедуры предсказания в этом узле требуется включение четырех узлов-предков уровня j, один из которых принадлежит соседнему процессу справа, чьи узлы обозначены синим цветом. Кроме того, два узла из трех включённых узлов процесса принадлежат нижнему уровню разрешения $j-1$. Отметим, что при вейвлетном преобразовании на уровне $j+1$, во всех включённых в адаптивную сетку узлах уровней j и $j-1$ нужно выполнить процедуры обновления. Для удобства рассмотрения узлы соседнего процесса, в которых требуется выполнить процедуру обновления, обозначены зелёным цветом. Таким образом, для выполнения процедуры предсказания в одном узле процесса необходима информация с трёх узлов соседнего процесса.

Процедура поиска узлов соседнего процесса, используемых в стадии обновления, проиллюстрирована на рисунке 2.1г, где показаны две дополнительные стадии обновления на уровне $j + 1$ соседнего процесса, необходимые для обновления значений в четырёх узлах уровня j красного процесса. При переходе на более низкий уровень разрешения количество дополнительных стадий обновления быстро возрастает: для обновления трех узлов на уровне $j - 1$ красного процесса необходимы две дополнительные стадии предсказания и четыре стадии обновления на уровне j. Рекурсивная природа вейвлетного преобразования приводит к очень быстрому росту узлов на соседних процессах, необходимых для асинхронного вейвлетного преобразования на рассматриваемом красном процессе.

В многомерном случае вейвлетное преобразование состоит из последовательности одношаговых одномерных вейвлетных преобразований. При параллельном вейвлетном преобразовании значения вейвлетных коэффициентов должны быть согласованы между процессами. Узлы сетки соседних процессов, необходимые для синхронизации данных с рассматриваемым процессом, формируют *буферную* область, обозначенную на рисунках 2.1в-г узлами синего и зеленого цвета. Как видно из рисунков, данные со всех синих и зелёных узлов соседних процессов должны быть получены процессом красного цвета для выполнения операций в стадиях предсказания и обновления, при этом следует напомнить, что все эти узлы необходимы для правильного асинхронного вейвлетного преобразования лишь в одном узле красного процесса на уровне $j + 1$.

Как уже говорилось, для асинхронного вейвлетного преобразования с одной синхронизацией данных буферной области, для вычисления вейвлетных коэффициентов на нижних уровнях разрешения необходимо включение в буферную область узлов с более высокого уровня разрешения, что приводит к необходимости синхронизации всей области на всех процессах. Такая синхронизация не практична, поскольку она сильно усложняет логику обмена данными между процессами и неэффективна с вычислительной точки зрения. Таким образом, асинхронное адаптивное вейвлетное преобразование, включающее стадию обновления, не практично для параллельных вычислений. В качестве альтернативного варианта параллельного расширения адаптивного вейвлетного преобразования можно использовать синхронизацию вейвлетных коэффициентов на каждом уровне разрешения после каждой одномерной стадии предсказания или обновления во всех направлениях. Чем больше стадий поуровневой синхронизации, тем меньше размер буферной области, в которой требуется синхронизация вейвлетных коэффициентов. Так, например, для n-мерной задачи с максимальным уровнем разрешения $j_{\max}$ требуется $(2)nj_{\max}$ стадий синхронизации для адаптивного вейвлетного преобразования, где коэффициент 2 указан в скобках, подразумевая возможность синхронизации на каждом уровне разрешения либо после стадии обновления, либо после каждой стадии. Такой алгоритм неэффективен, так как, в силу неравномерности распределения узлов сетки, неминуемо приведёт к несбалансированной параллелизации и простою процессов в ожидании окончания поуровневой синхронизации между процессами.

В результате исследования пяти различных вариантов параллельного расширения адаптивного вейвлетного преобразования, включающих синхронизацию на каждом уровне как после каждой из стадий вейвлетного преобразования, так и только после стадии обновления, а также варианты вейвлетного преобразования с полным или частичным отключением стадии обновления либо вблизи границы процессов, либо во всей области, было установлено, что наиболее эффективным решением является вариант полного отключения стадии обновления во всей вычислительной области. Отключение стадии обновления позволяет асинхронное параллельное расширение адаптивного вейвлетного преобразования с одной единственной синхронизацией данных в буферной области в начале преобразования. При такой синхронизации независимые адаптивные вейвлетные преобразования выполняются как в узлах процесса, так и в узлах буферной области. Возможность вейвлетного преобразования в буферной области гарантируется параллельным расширением процедуры проверки восстановления функции, описанной в разделе 2.4. Кроме того, отсутствие стадии обновления сокращает вдвое время вычисления вейвлетного преобразования. Отметим, что исключение стадии обновления не изменяет порядка сходимости адаптивного вейвлетного преобразования (подраздел 1.2.1), так как порядок вейвлетной полиномиальной интерполяции и точность метода определяются только стадией предсказания. Основным недостатком исключения стадии обновления является потеря вейвлетами нулевого среднего значения.

Для более визуальной демонстрации различия между последовательным и параллельным алгоритмами части вейвлетного преобразования (раздел 1.2) в выражениях (1.31)–(1.34) и блок-диаграмме на рис. 1.5, не используемые в параллельной версии, окрашены в *синий* цвет.

2.3 Структура данных

Параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод использует динамическую структуру данных типа деревьев произвольной размерности: двоичное дерево — в одномерном случае, четверичное — в двумерном и восьмеричное — в трёхмерном. Двумерная структура данных проиллюстрирована на рис. 2.2. Структура деревьев применяется для хранения, записи и чтения вейвлетных коэффициентов. Деревья организованы как однонаправленный список связей с детерминистическим путём прохождения, задаваемым глобальным n-мерным индексом с началом в корнях каждого из деревьев. В свою очередь, корни деревьев расположены на заданном уровне разрешения j_{root}. Отметим, что в силу того, что уровень корней деревьев, как правило, выше нижнего уровня разрешения, деревья могут быть пустыми. Для параллельного вейвлетного преобразования деревья используются как минимальный квант (блок) данных для обмена между процессами. Другими словами, каждое конкретное дерево данных может находиться только на одном процессе. При перебалансировке расчетной сетки между процессами дерево вместе со всеми узлами сетки, принадлежащими ему, может быть перемещено с одного процесса на другой только целиком.

Для уменьшения промахов в кэше во время прохождения по дереву узлы каждых двух уровней, начиная с минимального, сгруппированы. Таким образом, дерево имеет следующие свойства:

1. Узлы сетки сгруппированы по уровням для упрощения доступа во время вейвлетного преобразования и для быстрого доступа.
2. Узел дерева размерности n на уровне разрешения j имеет $2^n - 1$ связей с узлами более высокого уровня разрешения $j + 1$.
3. Каждый узел дерева на уровне j также рассматривается как узел на уровнях $j + 1, j + 2, \cdots, j_{\max}$.

Для непрямого доступа к данным используются координаты узла, а длина пути к узлу на уровне $j_{\text{root}} + j'$ не превышает j'. Количество операций для доступа ко всем узлам на уровне $j_{\text{root}} + j'$ не превышает $(2^n - 1)2^{(j'-1)n}\mathcal{N}_{\text{Sroot}}(j' + 1)$, где $\mathcal{N}_{\text{Sroot}}$ — количество узлов на корневом уровне дерева j_{root}, то есть $\mathcal{N}_{\text{Sroot}} = m_{\text{base}} 2^{(j_{\text{root}}-1)n}$, где m_{base} количество узлов на самом грубом (базовом) уровне разрешения: $\mathbf{m}_{\text{base}} = [m_1 \ldots, m_n]$. Отметим, что корневой уровень дерева

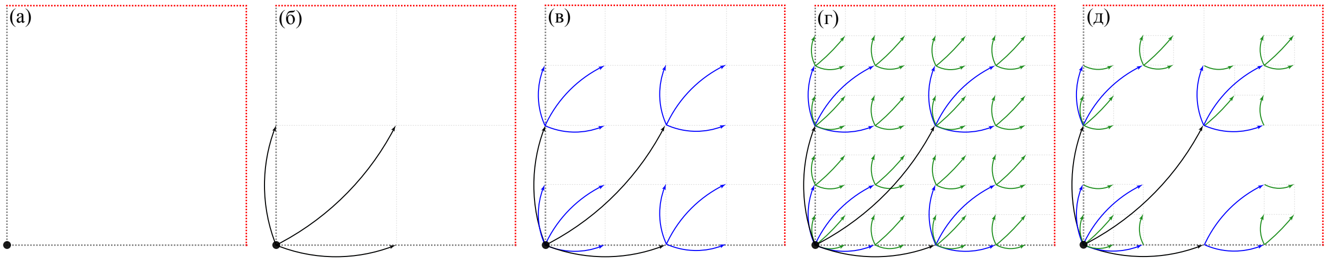


Рисунок 2.2 — Возможные связи от корневого узла дерева в двумерном случае $n = 2$: (а) пустое дерево на уровне $j = j_{\text{root}}$, (б) все возможные связи на уровне $j = j_{\text{root}} + 1$, (в) все возможные связи на уровне $j = j_{\text{root}} + 2$, (г) все возможные связи на уровне $j = j_{\text{root}} + 3$ (неадаптивная сетка), (д) связи на адаптивной сетке на уровне $j = j_{\text{root}} + 3$. На каждом уровне разрешения узлы сетки связаны с $2^n - 1$ узлами следующего уровня разрешения и самими собой. Узлы корневого уровня обозначены черными кругами (●). Черные стрелки (→) обозначают связи со следующим уровнем $j = j_{\text{root}} + 1$, синие (→) — с уровнем $j = j_{\text{root}} + 2$, а зеленые (→) — с уровнем $j = j_{\text{root}} + 3$. Узлы правой и верхних границ, обозначенных красными пунктирными линиями, принадлежат соседним деревьям.

j_{root} является входным параметром. В пределе больших значений j' легко показать, что в неадаптивном случае $\mathcal{N}_{\text{S}} \cong \mathcal{N}_{\text{Sroot}} 2^{j'n}$, что подразумевает $j' \cong \frac{1}{n} \log_2 \frac{\mathcal{N}_{\text{S}}}{\mathcal{N}_{\text{Sroot}}}$. Таким образом, асимптотическая стоимость непрямого доступа к данным оценивается как $O(\mathcal{N}_{\text{S}} \log \mathcal{N}_{\text{S}})$.

В дополнение для более быстрого доступа к данным, указатели на данные хранятся в виде ортогонального списка, параметризированного по типу семейства вейвлетов, принадлежности к границам прямоугольной вычислительной области (внутренние, поверхностные, граневые, угловые), уровню разрешения, уровню вычисления производной. Применение такого списка уменьшает асимптотическую стоимость прямого доступа к данным до $O(\mathcal{N}_{\text{S}})$.

Деревья и соответствующие им данные ортогонально распределены между процессами, однако для более быстрого вейвлетного преобразования и вычисления производных каждый процесс имеет копию матрицы корней деревьев, индексированную рангом процесса, на котором хранятся деревья. Отметим, что, поскольку выбор уровня корня дерева влияет на размер матрицы корней дерева, на длину пути доступа к узлам, на количество деревьев и их размер для обмена данными между процессами, то оптимальное значение уровня j_{root} зависит от решаемой задачи и может быть выбрано для улучшения вычислительной эффективности.

Для удобства описания алгоритма все деревья, принадлежащие самому процессу, назовём *внутренними* деревьями или деревьями *внутренней* области, а соответствующие им узлы назовём *внутренними* узлами. Все деревья, не принадлежащие процессу, назовём деревьями *буферной* области, а соответствующие им узлы — узлами *буферной* области. Чтобы отличить узлы буферной области в зависимости от их принадлежности конкретному процессу, для каждого процесса $p \in \{0, \ldots, \mathsf{n_p} - 1\}$ удобно ввести множество масок $\mathcal{M}_{p,r}$, $r \in \{0, \ldots, \mathsf{n_p} - 1\}$, состоящих из узлов сетки. При этом маска $\mathcal{M}_{p,p}$ содержит узлы внутренней области процесса p, а множества узлов сетки, описываемых масками $\mathcal{M}_{p,r\neq p}$, — узлы буферной области процесса p, хранящихся на процессе r. Обратим внимание, что маски $\mathcal{M}_{p,r}$ включают в себя узлы буферной области, необходимые для асинхронного вейвлетного преобразования (раздел 2.2). Отметим, что множества узлов буферной области, обозначенные масками $\mathcal{M}_{p,r}$, являются подмножеством узлов внутренней области соответствующего процесса, то есть $\mathcal{M}_{p,r} \subset \mathcal{M}_{r,r}$, $p,\ r \in \{0, \ldots, \mathsf{n_p} - 1\}$.

2.4 Адаптация сетки

Для асинхронного параллельного вейвлетного преобразования, описанного в разделе 2.2, определим маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,p}$ или $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,p}(u)$ как множество значимых узлов переменной $u(\mathbf{x})$ на процессе $p \in \{0, \ldots, \mathsf{n_p} - 1\}$, заданное как

$$\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,p}(u) = \left\{ |d^{\mu,j}_{\mathbf{l}}| \geqslant \varepsilon \|u\| : j \in \{0, \ldots, j_{\max}\}, \mu \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}, \mathbf{l} \in \mathcal{I}^{\mu,j}_{p\psi} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{I}^{\mu,j}_{p\psi}$ — некое множество индексов вейвлетного семейства μ на уровне j и процессе p. Отметим, что множества значимых вейвлетов буферной области всегда пусты, то есть $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,r\neq p} \equiv \varnothing$. Также обратим внимание, что $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \equiv \bigoplus\limits_{p\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,p}$.

Для параллельного обобщения адаптивного вейвлетного преобразования, описанного в разделе 1.2, необходимо ввести понятие множества значимых и смежных узлов для внутренних и буферных областей для каждого процесса p, определённого маской $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$. Отметим, что в отличие от пустого множества

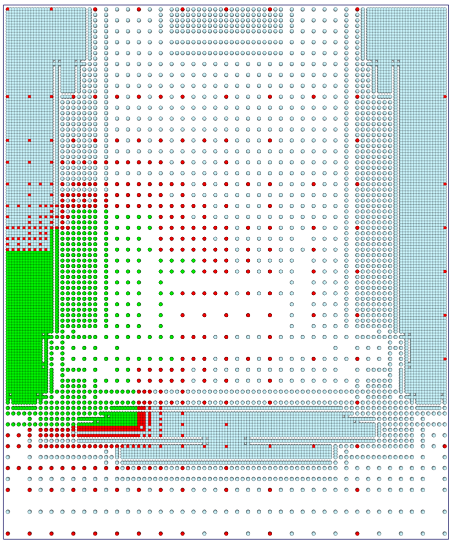


Рисунок 2.3 — Параллельное вейвлетное преобразование: зелёным обозначены узлы процесса p, принадлежащие маске $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$, красным — узлы буферной области $\bigcup\limits_{r\neq p} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$, значения которых должны быть переданы на процесс p, синим — все остальные узлы, то есть $\bigcup\limits_{q\neq p} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{q,q} \setminus \bigcup\limits_{r\neq p} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$.

значимых вейвлетов в буферной области $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,r\neq p}$, множество значимых и смежных вейвлетов $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r\neq p}$ не пусто и состоит из узлов буферной области процесса p, принадлежащих смежной области значимых вейвлетов внутренней области $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$. Обратим внимание, что из ортогональности масок $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$ следует, что $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \equiv \bigoplus\limits_{p\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$, при этом неравенство $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{r,r}$ выполняется для всех процессов $p,r \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$.

Как и в случае адаптивного вейвлетного преобразования для последовательных вычислений, описанных в подразделе 1.3.2, для асинхронного параллельного адаптивного вейвлетного преобразования на процессе $p \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$ необходимо включение в маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$ всех узлов-предков на предыдущих уровнях разрешения, включая узлы, хранящиеся на других процессах. Для этой цели на каждом процессе $p \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$ для маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$, определённой во внутренней области процесса p, выполняется процедура проверки восстановления функции. Результатом применения алгоритма 1.1 к маске $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$ является множество масок $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$, $r \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$, определённых как во внутренней, так и в буферных областях процесса p. После процедуры проверки восстановления функции на каждом процессе данные масок $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r\neq p}$ должны быть синхронизированы между процессами, чтобы обеспечить включение всех узлов-предков и смежных узлов буферной области в маски внутренних областей $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$ соответствующих

Алгоритм 2.1: Процедура проверки восстановления функции (RCP) для параллельного адаптивного вейвлетного преобразования: $\mathcal{M} \xrightarrow{\text{RCP}} \mathcal{M}$.

определить маску $\mathcal{M} \equiv \bigcup\limits_{p\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}_{p,p}$ для заданного разбиения сетки

for $p = 0 : 1 : n_p - 1$ **do**
  for $r = 0 : 1 : n_p - 1$ **do**
    задать маску $\mathcal{M}_{p,r\neq p} = \varnothing$ для $j = j_{\max}$
  end
  for $r = 0 : 1 : n_p - 1$ **do**
    for $j = j_{\max} : -1 : j_{\min}$ **do**
      расширить маску $\mathcal{M}_{p,r}$, включив в неё узлы-предки на уровне j
    end
  end
  включить в маску $\mathcal{M}_{p,p}$ все узлы процесса p на уровне $j = j_{\min}$
end

процессов, что, в свою очередь, гарантирует выполнение свойства $\mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r} \subset \mathcal{M}^{\text{S+A}}_{r,r}$ для любых процессов $p,r \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$. После синхронизации данных в узлах буферной области, определённых множеством $\bigcup\limits_{r\neq p} \mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r}$, адаптивное вейвлетное преобразование на каждом процессе не отличается от последовательного преобразования. Маски $\mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,p}$ и $\bigcup\limits_{r\neq p} \mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r}$ проиллюстрированы на рис. 2.3, где узлы масок показаны как подмножество узлов адаптивной сетки $\bigcup\limits_{p\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,p}$. Отметим, что для некоторых процессов $r \neq p$ множество узлов, определённое маской $\mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r}$, может быть пустым.

Псевдокод процедуры проверки восстановления функции для параллельного асинхронного вейвлетного преобразования на произвольной маске $\mathcal{M} \equiv \bigcup\limits_{p\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}_{p,p}$ представлен в алгоритме 2.1. Применение этой процедуры к маске $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$ приводит к построению множеств узлов, определённых масками $\left\{\mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r} : p, r \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}\right\}$. На основании масок $\mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r}$ для каждого процесса $p \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$ может быть построено множество вложенных сеток $\mathcal{G}^j_{p\geqslant} = \left\{\mathbf{x}^j_{\mathbf{k}} \in \Omega : \mathbf{k} \in \mathcal{K}^j, \mathbf{x}^j_{\mathbf{k}} \in \bigcup\limits_{r\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}^{\text{S+A}}_{p,r}\right\}$, для которых выполняется условие вложенности $\mathcal{G}^j_{p\geqslant} \subset \mathcal{G}^{j+1}_{p\geqslant}$ для всех $j < j_{\max}-1$, где $j_{\max}$ — это макси-

Алгоритм 2.2: Параллельное вычисление производных на адаптивной сетке.

for $p = 0 : 1 : \mathsf{n_p} - 1$ **do**
  оценить функцию $u(\mathbf{x})$ в узлах сетки $\mathcal{G}_p^{j_{\max}}$ или $\mathcal{G}_{p\geqslant}$
end
выполнить прямое вейвлетное преобразование для $u_\mathbf{k}$ на маске $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$
for $p = 0 : 1 : \mathsf{n_p} - 1$ **do**
  for $j = j_{\min} : 1 : j_{\max}$ **do**
    выполнить один шаг обратного вейвлетного преобразования на уровне j на маске $\mathcal{M}_p^{\text{S+A+G}}$
    вычислить производные в узлах, принадлежащих множеству $\mathcal{D}_p^j$
  end
end

мальный уровень разрешения, присутствующий в вейвлетном разложении (1.44). Отметим, что сетки $\mathcal{G}_{p\geqslant}^j$ локальны для каждого процесса.

2.5 Вычисление производных на адаптивной сетке

Параллельное обобщение процедуры дифференцирования функции на адаптивной сетке основано на интерполяционных свойствах вейвлетов второго поколения, описанных в подразделе 1.3.5. Определим множество $\mathcal{D}_p^j$ как подмножество маски $\mathcal{M}_{p,p}^{\text{S+A}}$ на процессе $p \in \{0, \dots, \mathsf{n_p} - 1\}$, на котором дифференцирование адаптивного вейвлетного интерполянта (1.56) производится на уровне j, то есть

$$\mathcal{D}_p^j = \left\{ \mathbf{x}_\mathbf{k}^j \in \Omega : \ \mathbf{x}_\mathbf{k}^j \in \mathcal{M}_{p,p}^{\text{S+A}}, \text{дифференцирование на уровне } j \right\}. \tag{2.2}$$

Отметим, что, как и в случае последовательных вычислений производных, множества $\mathcal{D}_p^j$ — ортогональны, то есть $\bigoplus\limits_{j=1}^{j_{\max}} \mathcal{D}_p^j = \mathcal{M}_{p,p}^{\text{S+A}}$. Для удобства обсуждения определим множество $\mathcal{D}^j$ для всех процессов как $\mathcal{D}^j \equiv \bigoplus\limits_{p=0}^{\mathsf{n_p}-1} \mathcal{D}_p^j$. Аналогично алгоритму для последовательных вычислений, конечно-разностный оператор дифференцирования, использующий значения вейвлетного разложения (1.44) на

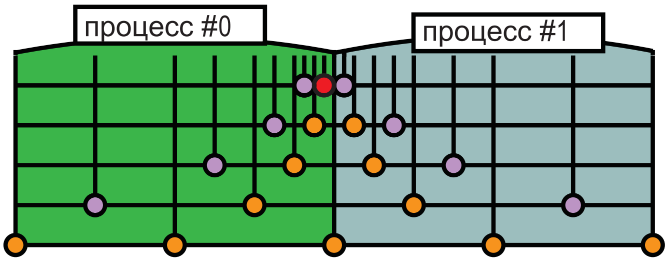


Рисунок 2.4 — Иллюстрация внутренних и буферных областей и соответствующих масок, включающих узлы, необходимые для параллельного вейвлетного преобразования и вычисления производных: • — значимые узлы маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{0,0}$, • — узлы-предки, принадлежащие маскам $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{0,0}$ и $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{0,1}$, • — вспомогательные узлы, принадлежащие маскам $\mathcal{M}^{G}_{0,0}$ и $\mathcal{M}^{G}_{0,1}$.

уровне j, может быть получен, переписав вейвлетный интерполянт (1.56) как локальный полином Лагранжа того же порядка, продифференцировав и оценив результаты дифференцирования в узле $\mathsf{x}^j_{\mathsf{k}}$. Обратим внимание, что дифференциальный оператор может использовать значения интерполянта на уровне j не только в узлах адаптивной сетки, но и в *вспомогательных* узлах, не включённых в объединенную маску $\bigcup\limits_{r\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$. Определим маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}_{p,r}$, $r \in \{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}$ как множество значимых, смежных и вспомогательных узлов сетки, используемых для вычисления производных в узлах внутренней области процесса p. В этом случае для того, чтобы определить производные во всех узлах внутренней области процесса p, необходимо проинтерполировать функцию во все узлы, включённые в объединенную маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}_{p} \equiv \bigcup\limits_{r\in\{0,\ldots,\mathsf{n_p}-1\}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}_{p,r}$. Псевдокод для процедуры вычисления производных на адаптивной сетке приведен в алгоритме 2.2. Процедура, описанная в алгоритме 2.2, обеспечивает вычисление производных во всех узлах адаптивной сетки. При этом, как и в случае алгоритма 1.3 для последовательных вычислений, алгоритм 2.2 для параллельных вычислений производных асимптотически линеен, то есть $O(\mathcal{N}_{\mathrm{S}})$, и практически равносилен стоимости прямого и обратного параллельных адаптивных вейвлетных преобразований при одной единственной синхронизации значений функции в буферных областях каждого процесса в начале прямого параллельного вейвлетного преобразования. Ошибка и асимптотическая сходимость процедуры дифференцирования обсуждены в подразделе 1.3.5.

Значимые, смежные и вспомогательные узлы внутренней и буферной областей адаптивной сетки проиллюстрированы на рис. 2.4, где красным обозначены

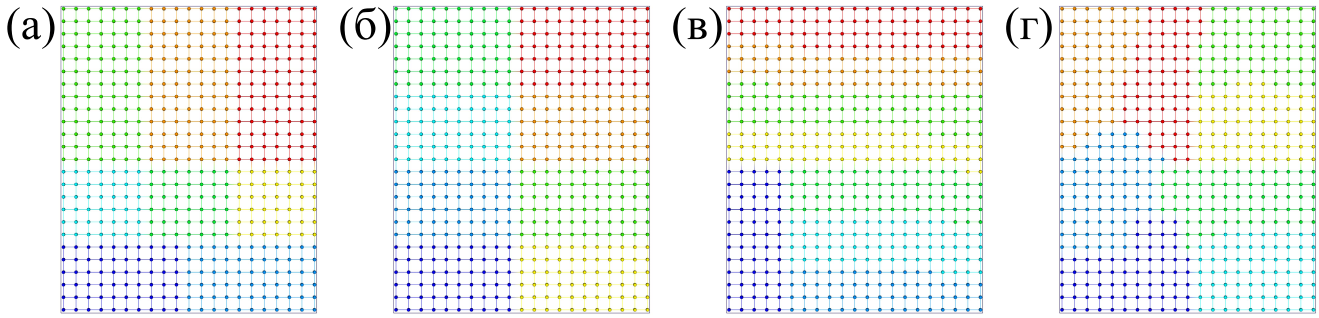


Рисунок 2.5 — Подходы разбиения области: (а) геометрический на основе факторизации, (б) геометрический последовательный, (в) геометрический с использованием библиотеки Золтан, (г) основанный на разбиении гиперграфа с использованием библиотеки Золтан.

значимые узлы процесса 0, принадлежащие маске $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{0,0}$, оранжевым на зелёном фоне — узлы маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{0,0}$, оранжевым на синем фоне — узлы маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{0,1}$, а фиолетовые узлы на зелёном и синем фонах соответствуют узлам масок $\mathcal{M}^{G}_{0,0}$ и $\mathcal{M}^{G}_{0,1}$.

2.6 Передача данных

При параллельном вейвлетном преобразовании и дифференцировании на каждом процессе p значения функции во всех узлах маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$ для всех $r \in \{0, \ldots, \mathsf{n}_\mathsf{p} - 1\}$, $r \neq p$ синхронизируются между процессами, используя протоколы параллельной передачи данных — «все-со-всеми» или «один-со-всеми».

2.7 Разбиение области и динамическая балансировка загрузки процессов

Несколько подходов параллельного разбиения, реализованных в адаптивной вейвлетной среде для универсального многомасштабного численного моделирования (AWESUMM) [337], проиллюстрировано на рис. 2.5. Благодаря линейной вычислительной стоимости параллельного асинхронного вейвлетного преобразования, все разработанные подходы основаны на разбиениях с равномерным распределением значимых узлов сетки между процессами с сохранением

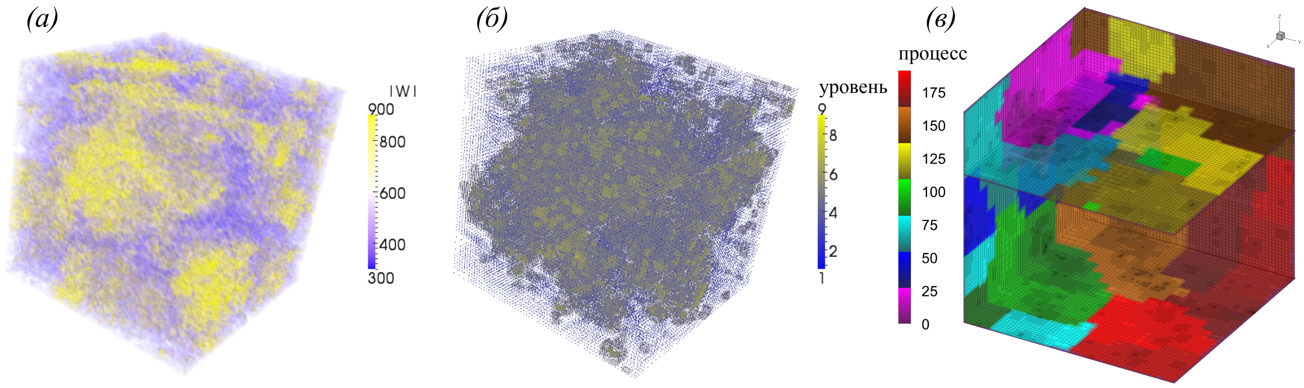


Рисунок 2.6 — Численное моделирование несжимаемой однородной турбулентности при $\mathrm{Re}_\lambda = 320$ с применением метода когерентных вихрей с эффективным сеточным разрешением $\mathcal{N}_{\max} = 2048^3$: (а) объёмная визуализация поля величины завихренности, (б) адаптивная вычислительная сетка со степенью сжатия $\mathcal{N}_{\mathsf{S}}/\mathcal{N}_{\max} = 2.1 \times 10^{-4}$ и узлами, окрашенными согласно уровню разрешения, (в) динамическая балансировка загрузки 192 процессов, основанная на разбиении гиперграфа с использованием библиотеки Золтан.

локальности соседних узлов сетки и на минимизации размера буферных областей. Самый простейший подход основан на геометрическом разбиении, использующем факторизацию количества корней деревьев, и предположении равномерного распределения узлов между деревьями. Основными недостатками этого подхода являются его статичность и плохая балансировка загрузки процессов при неравномерном распределении вейвлетов. При последовательном геометрическом разбиении область вначале разбивается на примерно $\sqrt[n]{\mathsf{n_p}}$ сечений, содержащих приблизительно одинаковое количество узлов, где n — это размерность задачи, а $\mathsf{n_p}$ — количество параллельных процессов. В свою очередь, каждая подобласть распределяется между примерно одинаковым $O\left(\mathsf{n_p}^{\frac{n-1}{n}}\right)$ количеством процессов. После чего процесс разбиения повторяется в других направлениях для каждой из подобластей. Таким образом, конечное разбиение области получается после n рекурсивных шагов разбиения. Такое разбиение может быть не совсем оптимально, но хорошо работает в случае явной анизотропии в одном или нескольких координатных направлениях. В случае неравномерного распределения значимых вейвлетов, используются два варианта разбиения на основе библиотеки Золтан [22—24; 39; 69; 70], разработанной в Сандийской национальной лаборатории: геометрическое разбиение и разбиение гиперграфа. В обоих случаях библиотека Золтан использует взвешенную матрицу, основанную на числе значимых вей-

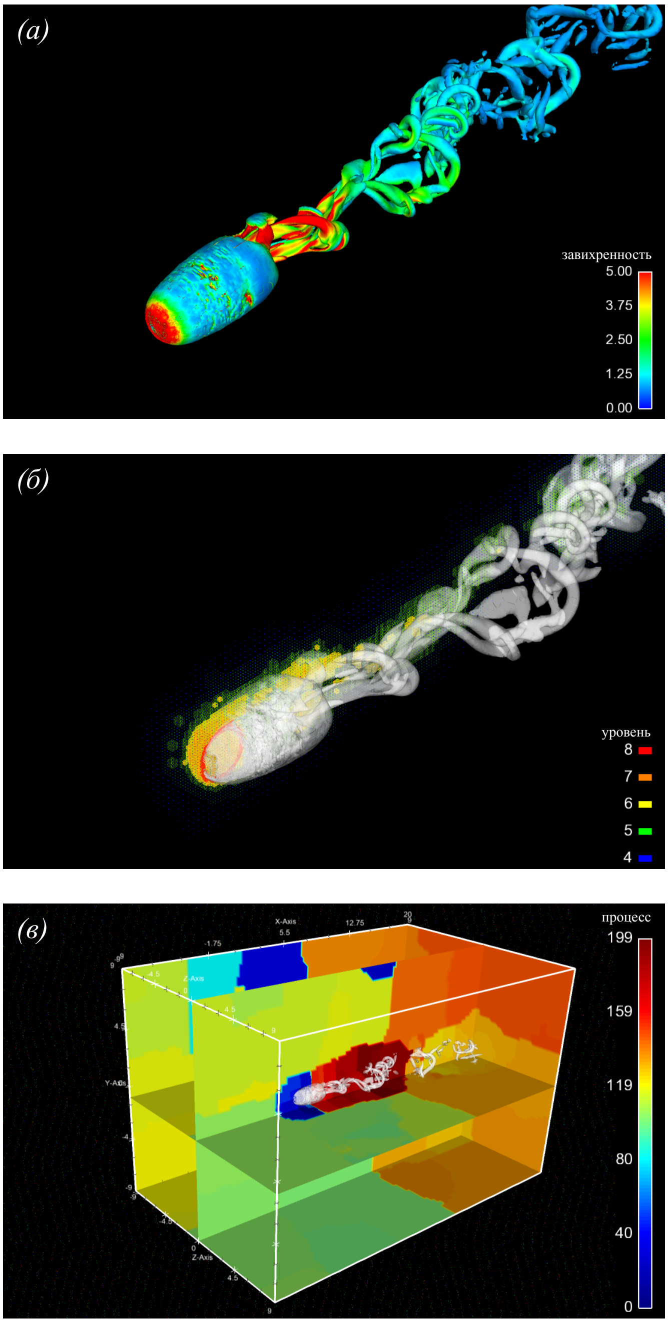


Рисунок 2.7 — Вейвлетное адаптивное прямое численное моделирование обтекания сферы сжимаемым вязким газом при $\mathrm{Re} = 1\,000$ и $\mathrm{Ma} = 0.7$ при совместном применении P-AWCM и МХШФ (раздел 5.4) с эффективным разрешением $3\,713 \times 2\,305 \times 2\,305$: (а) основные вихревые структуры в ближнем следе, изображенные изоповерхностью инварианта $Q = 0.25$, окрашенной согласно величине завихренности, (б) разрез адаптивной вейвлетной сетки с узлами на более высоких уровнях разрешения ($4 \leqslant j \leqslant 8$) с наложенной изоповерхностью основных структур завихренности, (в) разбиение области при динамической балансировке загрузки 200 процессов на основе разбиения гиперграфа с использованием библиотеки Золтан с наложенной изоповерхностью основных структур завихренности.

влетов на каждом из деревьев и весов обмена данных, основанных на количестве узлов на границах соседних деревьев.

Динамическая балансировка загрузки реализуется через переразбиение области в стадии адаптации сетки и переназначение узлов корней деревьев соответствующим процессам. Процесс переразбиения запускается при разбалансировке загрузки процессов, при этом динамическая балансировка загрузки процессов использует разные алгоритмы переразбиения области в зависимости от степени дисбаланса распределения вейвлетов между процессами. При очень сильно разбаласированном разбиении переразбиение области происходит без учёта исходного разбиения. При средне разбаласированном разбиении переразбиение области происходит с учётом исходного разбиения с минимальным изменением границ подобластей. При практически сбалансированном разбиении балансировка достигается несколькими переназначениями деревьев процессов смежных подобластей. Динамическая балансировка загрузки процессов с соответствующими адаптивной сеткой и полями течений продемонстрирована на рисунках 2.6 и 2.7 соответственно для численного моделирования линейно-вынужденной однородной турбулентности методом когерентных вихрей (CVS) [84; 306] при эффективном неадаптивном разрешении $\mathcal{N}_{\max} = 2048^3$ и для вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования (WA-DNS) обтекания сферы сжимаемым вязким газом при $\mathrm{Re} = 1\,000$, $\mathrm{Ma} = 0.7$ и эффективном сеточном разрешении $3\,713 \times 2\,305 \times 2\,305$.

2.8 Параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод

Основные компоненты параллельного адаптивного вейвлетного коллокационного метода для эллиптических, параболических и гиперболических систем уравнений проиллюстрированы в алгоритме 2.3, где символ $\xrightarrow{\mathrm{A}}$ обозначает оператор включения вейвлетов (узлов) смежной области, расширяющий маску значимых вейвлетов $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,p}$ для каждого процесса p до масок $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$ для $r = 0, \dots, \mathsf{n_p} - 1$, а оператор $\xrightarrow{\mathrm{RCP}}$ обозначает процедуру проверки восстановления функции на маске $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,p}$, расширяющий её до масок $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r}$ для $r = 0, \dots, \mathsf{n_p} - 1$.

Алгоритм 2.3: Параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод (P-AWCM).

начальное приближение/условие $(m = 0)$: $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^m$ и $\mathcal{G}_{\geqslant}^m$

выполнить RCP процедуру (алгоритм 2.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S}}$

while $m = 0$ **или** $\left\{ m > 0 \text{ **и** } \left\{ \underbrace{\left[\mathcal{G}_{\geqslant}^m \neq \mathcal{G}_{\geqslant}^{m-1} \text{ **или** } \|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^m - \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{m-1}\|_\infty > \delta_\varepsilon\right]}_{\text{только для эллиптических задач}} \text{ **или** } \underbrace{[t_m < t_{end}]}_{\text{только для эволюционных задач}} \right\} \right\}$ **do**

- **запросить** маски $\mathcal{M}_{p,r\neq p}^{\mathrm{S+A}}$, $p, r \in \{0, \ldots, \mathsf{n_p} - 1\}$ для передачи данных
- **выполнить** параллельное прямое вейвлетное преобразование для каждой из компонент решения $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^m$
- **for** $j = j_{\max} : -1 : j_{\min}$ **do**
  - **создать** маску $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} = \bigcup\limits_{r=1}^{M_c} \mathcal{M}^{\mathrm{S}}\left(v_r\left(\mathbf{x},t\right)\right)$
- **end**
- **расширить** маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
- **for** $p = 0 : 1 : n_p - 1$ **do**
  - **синхронизировать** маски $\mathcal{M}_{p,r}^{\mathrm{S+A}}$: $\mathcal{M}_{r,r}^{\mathrm{S+A}} = \bigcup\limits_{p=0}^{\mathsf{n_p}-1} \mathcal{M}_{p,r}^{\mathrm{S+A}}$
  - **if разбиение не сбалансировано then**
    - **провести переразбиение** области и **переназначение** деревьев
    - **очистить** маски: $\mathcal{M}_{p,r\neq p}^{\mathrm{S+A}} = \varnothing$ и $\mathcal{M}_{p,r\neq p}^{\mathrm{S}} = \varnothing$, $r = 0, \ldots, \mathsf{n_p} - 1$
  - **end**
- **end**
- **выполнить** RCP процедуру (алгоритм 2.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
- **построить** $\mathcal{G}_{\geqslant}^{m+1}$ на основе маски $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}$
- **добавить** вспомогательную маску: $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \xrightarrow{\bigoplus_{j=0}^{j_{\max}} \mathcal{D}^j} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{S}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$
- **выполнить** RCP процедуру (алгоритм 2.1): $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}} \xrightarrow{\mathrm{RCP}} \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}$
- **if** $\mathcal{G}_{\geqslant}^{m+1} \neq \mathcal{G}_{\geqslant}^m$ **then**
  - **проинтерполировать** решение $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^m$ на сетку $\mathcal{G}_{\geqslant}^{m+1}$
- **end**
- либо **решить** систему уравнений (1.59), используя алгоритм 1.5, либо **проинтегрировать** систему уравнений (1.65) или (1.89)
- $m = m + 1$, для эволюционных задач: $t_{m+1} = t_m + \Delta t$

end

2.9 Проверка параллельной масштабируемости P-AWCM

Проверка параллельной масштабируемости P-AWCM проводилась на базе системы Spirit SGI ICE X научно-исследовательской лаборатории ВВС США. Каждый узел системы состоял из 16-ядерных процессоров Intel Xeon E5 Sandy Bridge с 32 ГБ оперативной памяти, соединённых сетью FDR 14x Infiniband. Все тесты проведены при однопроцентной загрузке каждого из ядер. Во всех вычислениях, представленных в этом разделе, интегрирование по времени производилось с применением линеаризованного метода Кранка—Николсона [61]. Оценка параллельной масштабируемости P-AWCM производилась в течение 40 шагов интегрирования по времени с пошаговой сеточной адаптацией.

Для проверки сильной параллельной масштабируемости P-AWCM использовались результаты численного моделирования линейно-вынужденной однородной турбулентности с числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_\lambda = 320$ [155; 204] с применением метода когерентных вихрей [84; 306]. Вычисления были произведены на вейвлетной динамически адаптируемой вычислительной сетке с постоянным вейвлетным порогом $\varepsilon = 0.1$ и эффективным сеточным разрешением 2048^3. Для поддержания неизменного количества локализованных вихревых структур и не сильно меняющегося общего количества значимых узлов адаптивной сетки временной интервал исследования был выбран меньше характерного периода обращения вихря. Детальное описание метода когерентных вихрей (CVS), постановка задачи и значения параметров модели приведены в работе [296]. Примеры турбулентного поля течения, соответствующей адаптивной вычислительной сетки и разбиения области при динамической балансировке загрузки процессов приведены на рис. 2.6. Из-за сильной перемежаемости турбулентных течений геометрическое разбиение приводит к сильной разбалансировке загрузки процессов и неэффективному распараллеливанию. В связи с этим тестирование сильной параллельной масштабируемости P-AWCM производилось при динамической балансировке загрузки процессов на основе разбиения гиперграфа с использованием библиотеки Золтан. Результаты параллельного ускорения на основе динамического разбиения гиперграфа с использованием библиотеки Золтан для протоколов параллельной передачи данных «все-со-всеми» или «один-со-всеми» приведены на рис. 2.8. Полученные результаты демонстрируют линейную масштабируемость до 512 процессов с последующим заметным замедлением для большего числа процессов.

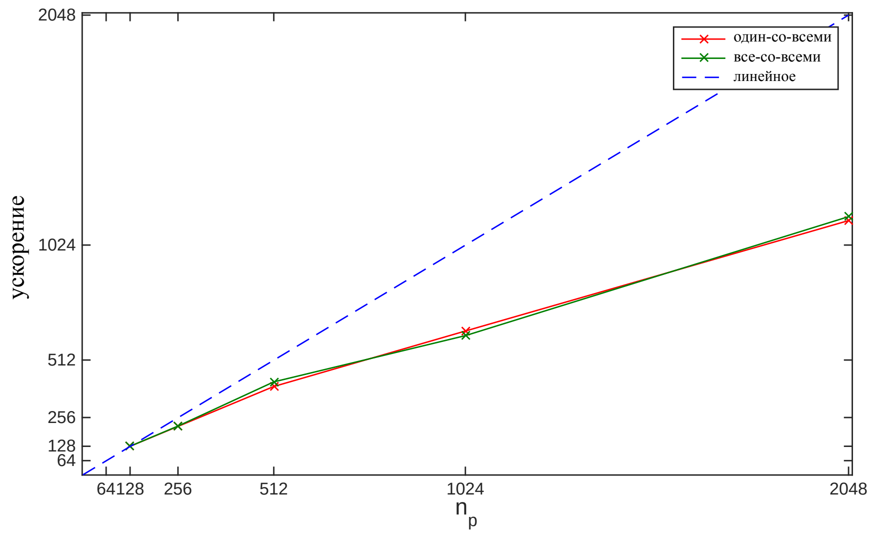


Рисунок 2.8 — Параллельное ускорение P-AWCM для CVS моделирования однородной турбулентности при $\mathrm{Re}_\lambda = 320$ на адаптивной вычислительной сетке с эффективным разрешением 2048^3 при динамической балансировке загрузки процессов на основе разбиения гиперграфа с использованием библиотеки Золтан и протоколов параллельной передачи данных «все-со-всеми» или «один-со-всеми»: (——) — протокол «все-со-всеми», (——) — протокол «один-со-всеми», (- - - -) — идеальное линейное ускорение. Предполагается идеальное линейное ускорение базовых вычислений на 128 процессах.

Такому замедлению могут способствовать многочисленные механизмы, наиболее значимыми из которых могут быть сильная разбалансировка загрузки процессов, насыщение межпроцессного обмена данными и увеличение вычислительных затрат, связанных с использованием буферных областей в параллельном асинхронном вейвлетном преобразовании.

Влияние межпроцессного обмена данными на параллельную эффективность AWCM изучено сравнением двух протоколов параллельной передачи данных — «все-со-всеми» и «один-со-всеми». Так как стоимость обмена данными для протокола «все-со-всеми» существенно возрастает с увеличением общего размера буферных областей на всех процессах и увеличением количества процессов, а кривые параллельного ускорения для обоих протоколов практически идентичны, то ухудшение параллельного ускорения по сравнению с идеальным линейным ускорением не может быть объяснено насыщением межпроцессного обмена данными, по крайней мере, для исследованного числа процессов.

Следующей причиной ослабления параллельной масштабируемости может быть разбалансировка загрузки процессов, которая зависит от равномерности распределения узлов сетки между процессами, а именно, среднего, минимального и максимального числа узлов на процессах, стандартного отклонения числа узлов внутренней $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}$ и буферной $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_B}}$ областей, а также общего числа узлов на процессе $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}$, где индекс SA обозначает значимые и смежные узлы, а индексы I, B, T соответственно обозначают внутреннюю, буферную и суммарную области. Статистические данные для $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}$, $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_B}}$ и $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}$, осредненных между процессами и по времени, приведены на рис. 2.9.

Все четыре статистические меры для значимых узлов точек внутренней области $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}$ уменьшаются с увеличением числа процессов, в то время как относительная разбалансировка загрузки, измеряемая соотношением $\overline{\max(\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}})}/\overline{\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}\rangle}$, не меняется с увеличением числа процессов. Отметим, что относительно постоянная низкая разбалансировка загрузки демонстрирует эффективность процедуры динамического балансирования и возможность контроля распределения загрузки процессов с помощью параметра допустимой разбалансировки, описанного в разделе 2.7. Таким образом, существует дополнительный механизм, ухудшающий параллельную масштабируемость. Как уже упоминалось в разделе 2.4, требование асинхронности параллельного вейвлетного преобразования приводит к дополнительным операциям в значимых и смежных узлах буферной области, эффективно увеличивая вычислительную стоимость вейвлетного преобразования. При выполнении параллельного асинхронного вейвлетного преобразования суммарные вычислительные затраты пропорциональны общему числу значимых и смежных узлов на всех процессах $\mathsf{n_p}\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}\rangle = \mathsf{n_p}\left(\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}\rangle + \langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_B}}\rangle\right)$, где оператор $\langle\cdot\rangle$ обозначает осреднение по всем процессам. В случае вычислений на последовательной компьютерной системе, буферная область полностью отсутствует, и поэтому вычислительная стоимость вейвлетного преобразования пропорциональна общему количеству значимых и смежных узлов внутренней области $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_{I_{serial}}}} \cong \mathsf{n_p}\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}\rangle$. Для хорошо сбалансированного разбиения параллельная эффективность вейвлетного преобразования может быть определена как отношение общего числа значимых и смежных узлов при последовательных и параллельных вычислениях, то есть $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_{I_{serial}}}}/\left(\mathsf{n_p}\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}\rangle\right) = \langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}\rangle/\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}\rangle$. В параллельном случае скорость вычислений определяется процессом с максимальным общим числом значимых и смежных узлов $\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}$. Таким образом, средняя эффективность параллельного

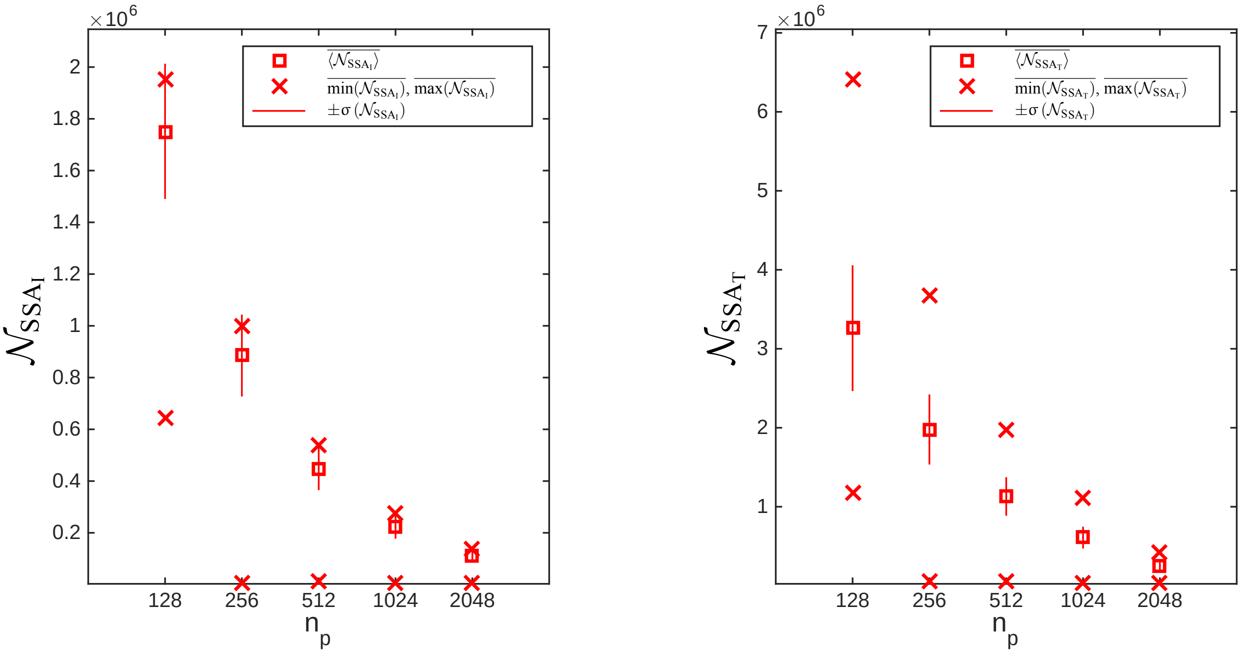


Рисунок 2.9 — $\overline{\min(\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}})}$, $\overline{\max(\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}})}$, $\overline{\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}}\rangle}$ и $\overline{\min(\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}})}$, $\overline{\max(\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}})}$, $\overline{\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}\rangle}$ статистика P-AWCM для CVS моделирования однородной турбулентности при $\mathrm{Re}_\lambda = 320$ на адаптивной вычислительной сетке с эффективным разрешением 2048^3 и динамической балансировкой загрузки процессов. Вертикальные линии показывают разброс в одно стандартное отклонение.

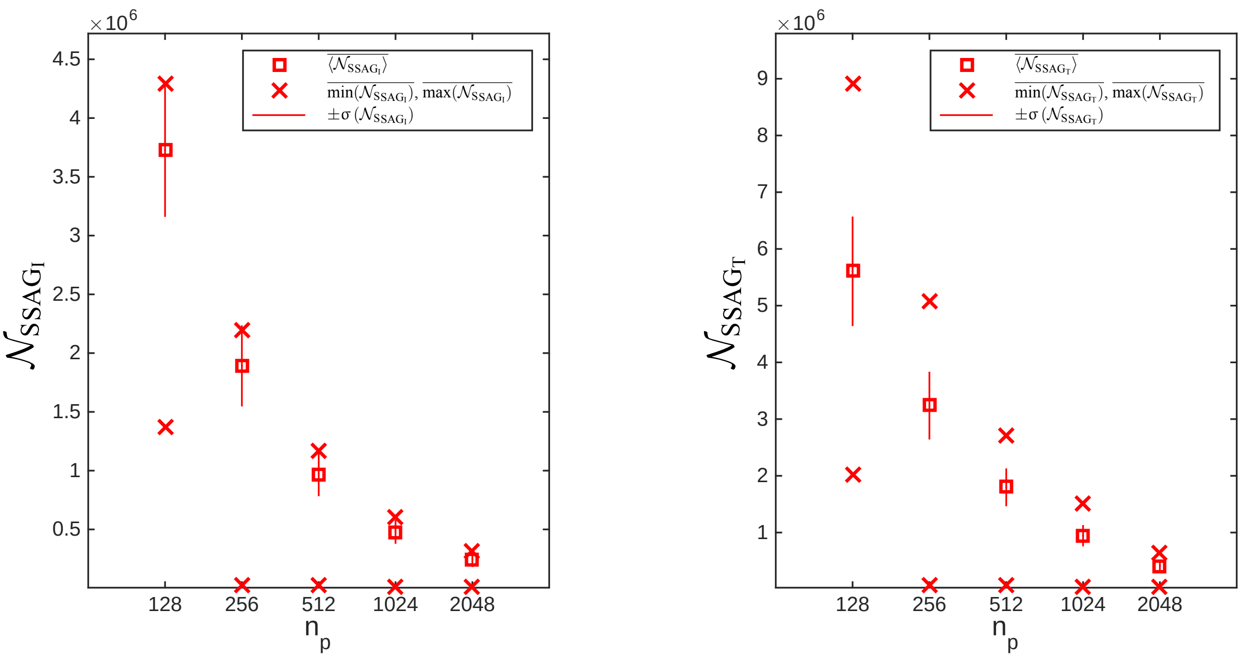


Рисунок 2.10 — $\overline{\min(\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_I}})}$, $\overline{\max(\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_I}})}$, $\overline{\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_I}}\rangle}$ и $\overline{\min(\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_T}})}$, $\overline{\max(\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_T}})}$, $\overline{\langle\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_T}}\rangle}$ статистика P-AWCM для CVS моделирования однородной турбулентности при $\mathrm{Re}_\lambda = 320$ на адаптивной вычислительной сетке с эффективным разрешением 2048^3 и динамической балансировкой загрузки процессов. Вертикальные линии показывают разброс в одно стандартное отклонение.

вейвлетного преобразования, осреднённого по времени, определяется как

$$\mathsf{\eta_p}^{WT} \cong \frac{\overline{\langle \mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}} \rangle}}{\overline{\max\left(\mathcal{N}_{\mathrm{SSA_T}}\right)}}, \tag{2.3}$$

где оператор $\overline{(\cdot)}$ обозначает осреднённое по времени значение.

Следует отметить, что, хотя количество значимых и смежных узлов может быть использовано для оценки вычислительной стоимости вейвлетного преобразования, стоимость вычисления производных пропорциональна общему числу значимых (S), смежных (A) и вспомогательных (G) узлов и является лучшей мерой оценки общего вычислительного времени, так как из алгоритма 2.3 видно, что общее число SAG узлов обычно больше, чем количество значимых и смежных узлов: $\mathcal{M}^{\mathrm{S}}_{p,r} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{S+A+G}}_{p,r}$. Таким образом, более точной мерой параллельной эффективности P-AWCM является

$$\mathsf{\eta_p} \cong \frac{\overline{\langle \mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_I}} \rangle}}{\overline{\max\left(\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_T}}\right)}}. \tag{2.4}$$

Статистические данные для числа узлов сетки $\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_I}}$, $\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_B}}$ и $\mathcal{N}_{\mathrm{SSAG_T}}$, осредненных между процессами и по времени, приведены на рис. 2.10. С учетом этих данных теоретически возможное параллельное ускорение может быть вычислено как $S = \mathsf{n_p}\mathsf{\eta_p}$. Кривая теоретически возможного ускорения приведена на рис. 2.11. Предполагая теоретически возможное ускорение базовых параллельных вычислений на 128 процессах, кривые ускорения параллельных вычислений для протоколов параллельной передачи данных «все-со-всеми» и «один-со-всеми», приведённые на рис. 2.8, перемасштабированы и показаны на рис. 2.11. Из рисунка видно, что параллельная эффективность P-AWCM приближается к максимальной теоретически возможной эффективности вплоть до 512 процессов, с небольшим уменьшением эффективности для большего числа процессов. Следует отметить, что при вычислении теоретически возможного ускорения вычислительная стоимость пересылки данных не рассматривалась, то есть выражение (2.4) предполагает нулевое время задержки, связанной с межпроцессным обменом данными. Как уже обсуждалось в разделах 2.4 и 2.5, для выполнения параллельного асинхронного вейвлетного преобразования необходима синхронизация данных в значимых и смежных узлах буферной области каждого процесса. Результаты вычислений, представленные на рис. 2.9, демонстрируют увеличение

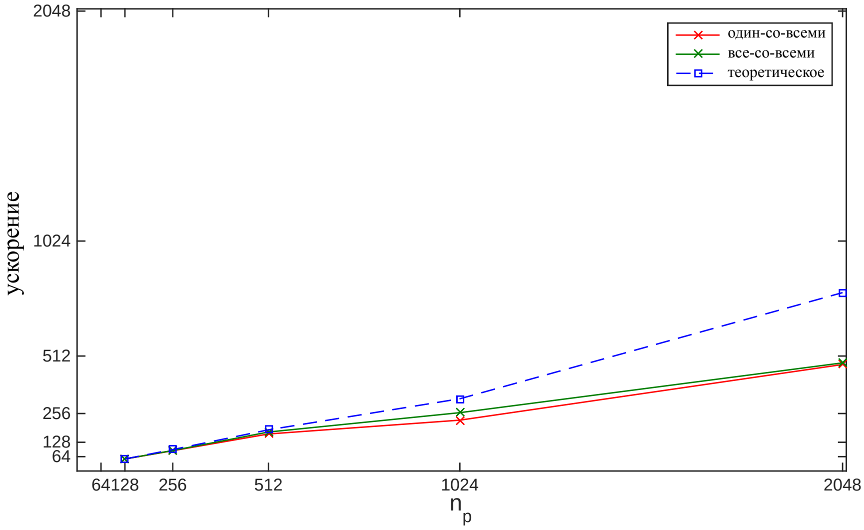


Рисунок 2.11 — Сравнение теоретически возможного и наблюдаемого параллельных ускорений для P-AWCM для CVS моделирования однородной турбулентности при $\mathrm{Re}_\lambda = 320$ на адаптивной вычислительной сетке с эффективным разрешением 2048^3 с использованием динамической балансировки загрузки процессов и протоколов параллельной передачи данных «все-со-всеми» или «один-со-всеми»: (——) — протокол «все-со-всеми», (——) — протокол «один-со-всеми», (----) — теоретическое ускорение. Предполагается идеальное линейное ускорение базовых вычислений на 128 процессах.

соотношения $\overline{\langle \mathcal{N}_{\mathrm{SSA_B}} \rangle} / \overline{\langle \mathcal{N}_{\mathrm{SSA_I}} \rangle}$ при увеличении числа процессов, а значит и увеличение общего размера синхронизированных данных, что, в свою очередь, снижает эффективность межпроцессного обмена данными.

В текущей реализации параллельного асинхронного вейвлетного преобразования, вне зависимости от протокола параллельной передачи данных, используется барьер в конце процедуры согласования данных, что приводит к простою процессов до полного окончания синхронизации данных. Так как размер пересылаемых данных достаточно велик, даже более эффективный алгоритм межпроцессного обмена данными не сможет сильно сократить время межпроцессной передачи данных, чтобы полностью исключить влияние на параллельную эффективность алгоритма. Один из возможных вариантов улучшения параллельной эффективности P-AWCM может заключаться в изменении процедуры вейвлетного преобразования без применения коммуникационного барьера. В текущей реализации асинхронного алгоритма все процессы ожидают окончания полного обмена данными в узлах, принадлежащих маскам $\mathcal{M}^{\mathrm{S+A}}_{p,r\neq p}$. Однако алгоритм вейвлетного преобразования может быть изменён таким образом, чтобы вейвлетное преобразование выполнялось в подмножестве внутренней области $\mathcal{M}_{p,p}^{\mathrm{S+A}}$ каждого из процессов, не требующих значения в узлах буферной области, не дожидаясь полного согласования данных. Более того, процесс межпроцессного обмена данными может происходить поуровненно, начиная с согласования данных буферных областей на самом высоком уровне разрешения, при этом безбарьерно выполняя вейвлетное преобразование на подмножестве узлов, не затрагиваемых этими данными. Использование такого многостадийного процесса межпроцессного обмена данными либо полностью устранит, либо отдалит эффект влияния синхронизации данных на масштабируемость параллельного вейвлетного преобразования. В настоящий момент альтернативные безбарьерные стратегии асинхронного вейвлетного преобразования находятся в стадии разработки.

Глава 3. Пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод для решения параболических уравнений

3.1 Пространственно-временная адаптация сетки

Большинство динамически адаптивных численных методов, включая вейвлетные методы, используют пространственную адаптацию и глобальный адаптивный шаг по времени, величина которого определяется либо из соображений устойчивости численного метода, либо для контроля ошибки интегрирования по времени. Применение общего (глобального) шага по времени сильно уменьшает эффективность метода, особенно для задач с пространственно-временной перемежаемостью. Одним из способов преодоления этой сложности является интегрирование с варьирующимся в пространстве шагом по времени. В контексте адаптивных вейвлетных методов Бакри, Маллат и Папаниколау [11] впервые предложили использовать шаг по времени, зависящий от уровня разрешения, и применили этот метод для решения линейного параболического уравнения и уравнения Бюргерса. Пространственно варьирующийся шаг по времени был также использован в ряде адаптивных многомасштабных схем [73; 74; 175] и применён для решения уравнений Эйлера для сжимаемого газа [73]. В основе вышеупомянутых подходов лежит понимание, что при применении явных схем интегрирования по времени самое жесткое ограничение накладывается самым высоким уровнем разрешения, в то время как в областях с более грубой сеткой может быть использован большой шаг по времени без нарушений требований устойчивости численного метода. Недостающие значения на границе областей с разным разрешением могут быть получены интерполяцией решения по времени.

Несмотря на некоторые несомненные преимущества методов с пространственно варьирующимся шагом по времени, особенно в контексте адаптивных вейвлетных или многомасштабных методов, в основе всех подходов лежит маршевый метод, что приводит к накоплению во времени ошибки, даже при контроле пространственных и временных ошибок интегрирования. В настоящий момент разработано два подхода контроля глобальной ошибки во времени. Первый основан на вариационном подходе, разработанном Марсденом и его соавторами [125; 126; 148; 164; 165; 248], в котором глобальная ошибка интегрирования по времени на любом конечном интервале может быть уменьшена до желаемой точности. Во втором подходе Тремблэй и соавторы [235] предложили использовать метод неадаптивных пространственно-временных конечных элементов.

В этой главе представлен пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод (ST-AWCM) для параболических уравнений. ST-AWCM, описанный в этой главе, основан на материалах, опубликованных в работе автора [292]. ST-AWCM устраняет два основных недостатка классических маршевых вычислительных методов, а именно, неэффективность применения общего, не меняющегося в пространстве шага по времени, и отсутствие возможности контролировать глобальную ошибку во времени. При использовании ST-AWCM задача решается в пространственно-временной вычислительной области при одновременной адаптации сетки в пространстве и во времени с целью разрешения структур решения на оптимальной адаптивной пространственно-временной сетке. Кроме того, как будет показано ниже, ST-AWCM обладает способностью активного контроля глобальной ошибки пространственно-временного решения.

Глава организована следующим образом. Пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод описан в разделе 3.2. Подраздел 3.2.1 посвящен описанию основных положений вейвлетного метода полной аппроксимации (W-FAS), разработанного для решения нелинейных алгебраических задач, полученных в результате дискретизации эволюционных уравнений. Расширение алгоритма для задач произвольной продолжительности при ограниченных вычислительных ресурсах описано в подразделе 3.2.3. Результаты численных экспериментов для решения задач в двумерном пространстве (x,t) для уравнений Бюргерса обсуждены в разделе 3.3. Эффективность пространственно-временной сеточной адаптации, способность ST-AWCM активно контролировать глобальную ошибку интегрирования во времени, сходимость и эффективность ST-AWCM обсуждены соответственно в подразделах 3.3.2, 3.3.3 и 3.3.4. Применение пространственно-временного адаптивного вейвлетного коллокационного метода для численного моделирования задач механики жидкости и газа продемонстрировано в подразделах 4.4.1 и 4.4.2 на примерах задач о слиянии двух вихрей в несжимаемой вязкой жидкости при $\mathrm{Re} = 1\,000$ и двумерной затухающей турбулентности для чисел Рейнольдса в диапазоне $1{,}260 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 40\,400$. Для демонстрации эффективности пространственно-временной адаптации приведены сравнения результатов вычислений и вычислительной сложности для

ST-AWCM и маршевых AWCM. В случае двумерной турбулентности также исследована зависимость количества степеней свободы от числа Рейнольдса для пространственно-временного и маршевого адаптивных вейвлетных коллокационных методов.

3.2 Пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод

Рассмотрим задачу с начальными и граничными условиями для общей системы параболических уравнений (1.65), определенной в n-мерном физическом пространстве $\mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{s} \subset \mathbb{R}^n$ и во времени на интервале $t \in [0,T]$, $T \subset \mathbb{R}$. Система уравнений (1.65), записанная в форме задачи с граничными условиями, более приемлемая для ST-AWCM, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{u} &= \mathbf{f} \quad \text{in} \quad \Omega_{\text{s-t}} \\ \mathcal{B}\mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{in} \quad \partial\Omega_{\text{s-t}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — векторная функция решения, $\mathcal{L}$ — параболический дифференциальный оператор в частных производных, который для удобства обсуждения расщеплен на временную и пространственную составляющие

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H}, \tag{3.2}$$

$\mathcal{B}$ — оператор, определяющий соответствующие граничные условия, $\Omega_{\text{s-t}} \equiv \Omega_\mathrm{s} \times [0,T]$ — $(n + 1)$-мерная пространственно-временная область с границей $\partial\Omega_{\text{s-t}}$, а $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ — $(n + 1)$-мерная координата в области $\Omega_{\text{s-t}}$, при этом $x_{n+1} = t$ является координатой времени. Отметим, что расширенная координата $\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x},t)$ отличается от пространственной координаты $\mathbf{x}$.

Формально ST-AWCM может быть рассмотрен как расширение AWCM для эллиптических задач, описанного в разделе 1.4, но применительно к параболической системе уравнений (3.1). В отличие от эллиптических уравнений, где все координаты не каузальны и математически эквивалентны, временное направление в параболических уравнениях каузально и принципиально отличается от других координатных направлений. Таким образом, численная дискретизация временного направления должна отражать вышеупомянутое отличие. Именно отличительное толкование и дискретизация временной координаты и является основным аспектом расширения AWCM до ST-AWCM.

В отличие от начально-краевой задачи (1.65), пространственно-временная система уравнений (3.1) переписана в виде краевой задачи с псевдо-граничными условиями, при этом начальное условие становится граничным условием Дирихле на границе $t = 0$, а параболическая система уравнений (1.65) выступает в качестве терминальных условий на границе $t = T$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{t=T} + \mathcal{H}\mathbf{u}(\mathbf{x},T) = \mathbf{f}(\mathbf{x},T). \tag{3.3}$$

Поскольку параболическая задача (3.1) поставлена корректно, то есть решение системы (3.1) однозначно определяется из заданных начальных и граничных условий, то трактование параболического уравнения на границе $t = T$ в качестве терминальных граничных условий является простой формальностью для пространственно-временной формулировки (3.1) в виде эллиптической системы уравнений (1.59), описанной в разделе 1.4. Отметим, что эволюционное условие (3.3) не переопределяет задачу и не является искусственным граничным условием, как например, в случае гиперболических систем [56].

Численный метод формально основан на дискретизации системы уравнений (3.1) в узлах пространственно-временной сетки $\mathcal{G}^j_{\geqslant} = \left\{\mathbf{X}^j_{\mathbf{K}} = (\mathbf{x}^j_{\mathbf{k}},t^j_m) \in \Omega_{\text{s-t}} : \mathbf{K} \in \mathcal{I}^j_{\varphi}, \mathbf{X}^j_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}^{\text{S+A}}\right\}$ для $j \leqslant j_{\max}$, где $\mathbf{K} = (\mathbf{k},m)$ — $(n+1)$-мерный пространственно-временной индекс значимых узлов сетки, содержащихся в адаптивной маске $\mathcal{M}^{\text{S+A}}$. Подобно AWCM для эллиптических задач, описанному в разделе 1.4, вычислительная сетка должна адаптироваться к пространственно-временной перемежаемости решения. ST-AWCM для решения параболических уравнений состоит из двух составных частей. Первая часть — это глобальный ST-AWCM решатель, который практически ничем не отличается от глобального адаптивного вейвлетного эллиптического решателя, описанного в разделе 1.4. Применение глобального ST-AWCM решателя приводит к оптимальному (сжатому) решению на пространственно-временной сетке. Алгоритм для второй части аналогичен локальному многоуровневому итерационному алгоритму 1.5, но использует нелинейный многоуровневый адаптивный решатель, описанный в следующем подразделе.

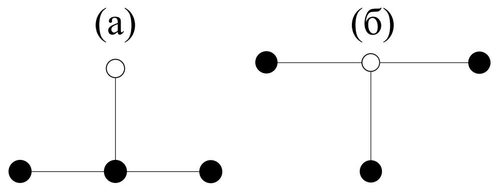


Рисунок 3.1 — Явный (а) и неявный (б) пространственно-временные шаблоны дискретизации, где горизонтальное направление соответствует пространству, а вертикальное — времени: (○) — значимый узел, в котором дискретизируется уравнение, а (●) — соседние узлы пространственно-временной сетки.

3.2.1 Многоуровневый вейвлетный метод полной аппроксимации (W-FAS)

Аналогично локальному эллиптическому AWCM решателю, описанному в подразделе 1.4.2, вектора $\mathbf{U}^j = \left\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^j,t_m^j) : (\mathbf{x}_\mathbf{k}^j, ,t_m^j) \in \mathcal{G}_\geqslant^j\right\}$ и $\mathbf{F}^j = \left\{\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^j,t_m^j)) : (\mathbf{x}_\mathbf{k}^j,t_m^j) \in \mathcal{G}_\geqslant^j\right\}$ содержат соответственно решение $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ и источниковый член $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ в узлах пространственно-временной адаптивной сетки $\mathcal{G}_\geqslant^j$. В адаптивном вейвлетном коллокационном методе производная векторной функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ в узлах $(\mathbf{x}_\mathbf{k}^j,t_m^j)$ вычисляется с использованием значений функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ в соседних узлах сетки $\mathcal{G}_\geqslant^j$ согласно шаблону аппроксимации производной. Пример такого шаблона дискретизации на равномерной сетке, используемый дифференциальным оператором (3.2) низкого порядка точности, показан на рис. 3.1. На практике для численного дифференцирования функции на пространственно-временной адаптивной сетке применяются конечно-разностные схемы более высокого порядка точности. Однако в отличие от пространственных производных на основе центрально-разностных схем высокого порядка, производная по времени использует каузально-смещённые разностные схемы с большим количеством узлов в направлении прошлого. Как и AWCM, ST-AWCM формально основан на дискретизации системы уравнений (3.1) в узлах пространственно-временной сетки $\mathcal{G}_\geqslant^j$ и последующем решении результирующей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j = \mathbf{F}^j, \tag{3.4}$$

где оператор $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ — дискретный аналог оператора $\mathcal{L}$, $\mathbf{U}^j$ и $\mathbf{F}^j$ — вектора размерности $\mathcal{N}_\mathrm{S} \times 1$, содержащие соответственно значения решения и источникового члена уравнения (3.1) в узлах сетки, а $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ — общее количество узлов адаптивной пространственно-временной сетки $\mathcal{G}^j_{\geqslant}$. Отметим, что ST-AWCM, как и все другие AWCM, не требует явного построения дискретного оператора $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j$, а основан на неявной оценке действия оператора, то есть $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j$ использует численное дифференцирование, описанное в подразделе 1.3.5, и явную оценку соответствующих нелинейных членов в узлах адаптивной пространственно-временной сетки. Так как алгоритм вычисления производных и вычисление нелинейных членов асимптотически линейны, то есть $O(\mathcal{N}_{\mathrm{S}})$, то и стоимость вычисления действия оператора $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j$ также асимптотически линейна. Таким образом, задача (3.1) сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (3.4).

Отметим, что в отличие от маршевых методов, накапливающих ошибку во времени, пространственно-временное адаптивное вейвлетное разложение (1.44) гарантирует ошибку аппроксимации решения (1.46), что обеспечивает контроль глобальной ошибки как в пространстве, так и во времени.

Один из вариантов расширения многоуровневого AWCM решателя до нелинейных задач может быть основан на методе Ньютона, в котором на каждой итерации решается линейная система уравнений. Такое расширение не использует преимущества многоуровневого подхода. Одним из недостатков применения метода Ньютона в AWCM является локальный характер уравнения невязки, используемой для уточнения решения. Более глубокое обсуждение этого аспекта с примерами задач может быть найдено в рукописи [28]. Следует обратить внимание на то, что многоуровневое вейвлетное представление решения естественным образом подходит для многосеточных методов, таких как метод полной аппроксимации (FAS) [25; 26; 28; 112; 219; 249; 266; 290; 291]. Многосеточные методы очень схожи с AWCM, так как основаны на вложенных сетках, поэтому FAS метод может быть обобщён для AWCM. Основные отличия от многосеточных методов заключаются в структуре вложенных сеток и применении вейвлетной интерполяции и вейвлетной проекции на более низкий уровень разрешения в качестве операторов пролонгации и ограничения решения в многоуровневом итеративном V-цикле.

Пусть $\tilde{\mathbf{U}}^j$ — приближенное решение уравнения (3.4) на уровне разрешения j, оператор $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{j-1}_{\mathrm{w}}$ — вейвлетный оператор ограничения, определённый как

$$\mathbf{U}^{j-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{j-1}_{\mathrm{w}}\mathbf{U}^j, \tag{3.5}$$

с невязкой приближенного решения на уровне j, заданной выражением

$$\mathbf{r}^j := \mathbf{F}^j — \boldsymbol{\mathcal{L}}\tilde{\mathbf{U}}^j. \tag{3.6}$$

Приближенное решение $\tilde{\mathbf{U}}^{j-1}$ вычисляется из уравнения невязки на более *грубой* сетке предыдущего уровня разрешения

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^{j-1} = \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\tilde{\mathbf{U}}^{j}) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\mathbf{r}^{j}}_{\mathbf{F}^{j-1}}, \tag{3.7}$$

при этом поправка $\mathbf{V}$ на уровне разрешения j определяется операцией пролонгирования оценочной ошибки решения на предыдущем уровне

$$\mathbf{V} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{w}}^{j} \underbrace{\left(\mathbf{U}^{j-1} - \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\mathbf{U}^{j}\right)}_{\text{ошибка грубой сетки}}, \tag{3.8}$$

где $\mathcal{P}_{\mathrm{w}}^{j}$ — вейвлетный оператор пролонгации оценочной ошибки решения на предыдущем уровне разрешения. Таким образом, процедура обновления решения может быть записана как

$$\mathbf{U}^{j} \leftarrow \tilde{\mathbf{U}}^{j} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{w}}^{j}(\tilde{\mathbf{U}}^{j-1} - \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\tilde{\mathbf{U}}^{j}), \tag{3.9}$$

из которой видно, что в нелинейном случае вейвлетный оператор ограничения воздействует как на решение, так и на невязку, в отличие от линейного случая, где оператор ограничения воздействует только на невязку [249].

Итерационный метод решения системы алгебраических уравнений является *релаксационным*, если высокочастотные компоненты ошибки решения быстро демпфируются за несколько итераций [112]. Основная стратегия многосеточных методов основана на релаксации высокочастотных составляющих поправки и рекурсивном ограничении сглаженной ошибки на более грубых уровнях разрешения, при этом поправка на самом грубом уровне разрешения вычисляется из прямого решения уравнения невязки на этом уровне. Рекурсивная процедура пролонгирования продвигает поправку решения на более высокие уровни разрешения. В конце цикла приближение на самом высоком уровне разрешения обновляется перед следующим итерационным циклом. Итерационный цикл с самого высокого уровня разрешения до самого грубого и обратно на самый высокий уровень разрешения обычно называют многосеточным итерационным V-циклом [249]. На каждом шагу V-цикла применяются операторы ограничения и пролонгации, а также процедура релаксации для сглаживания высокочастотных составляющих ошибки.

Основное отличие между линейным и нелинейным V-циклом заключается в том, что в нелинейном случае, помимо ограничения невязки, также ограничивается и решение при переходе на более грубый уровень разрешения. Реализованный в ST-AWCM итерационный нелинейный многоуровневый решатель использует Ньютоновский итерационный метод для релаксации высокочастотных составляющих поправки решения. Также отметим, что многоуровневый нелинейный W-FAS решатель и локальный эллиптический AWCM решатель, описанный в подразделе 1.4.2, отличаются от многосеточного решателя структурой вложенных сеток и применением вейвлетной интерполяции и вейвлетной проекции на более низкий уровень разрешения в качестве операторов пролонгации и ограничения. Следует отметить, что результатом как AWCM эллиптического, так и ST-AWCM решателей, является решение системы уравнений на околооптимальной адаптивной сетке с гарантированной ошибкой численного решения, контролируемой вейвлетным порогом. Также отметим, что в отличие от классических многосеточных методов и нелинейных FAS решателей, применяемых для решения задач на высоком уровне разрешения на неадаптивной сетке и использующих многоуровневый итерационный алгоритм для ускорения вычислений [194], ST-AWCM и AWCM начинают решение задачи с низкого уровня разрешения и итеративно получают решение на околооптимальной адаптивной сетке с заранее заданной гарантированной ошибкой численного решения.

3.2.2 Сглаживание решения в пространственно-временной области

Для удобства обсуждения алгоритма релаксации для сглаживания высокочастотных составляющих поправки решения перепишем уравнение (3.4) на уровне разрешения j как систему нелинейных уравнений

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) = 0, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}^j$ — вектор решения, а надстрочный индекс j, обозначающий уровень разрешения, опущен для упрощения описания алгоритма. Одним из способов решения уравнения (3.10) является итерационный метод Ньютона, для которого линеаризованное уравнение (3.10), переписанное для вектора поправки решения $\mathbf{V}$, выглядит как

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{U})\mathbf{V} = -\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{U}), \tag{3.11}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ — Якобиан функции $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Процедура обновления решения $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} + \mathbf{V}$ состоит из одного шага итерационного метода Ньютона, описанного в алгоритме

3.1. Отметим, что сходимость метода Ньютона квадратична при «хорошем» начальном приближении. Однако вычислительная стоимость решения уравнения поправки (3.11), существенно превышающая $O(\mathcal{N}_{\mathrm{S}})$ стоимость AWCM, не позволяет использование классического метода Ньютона в контексте ST-AWCM.

Для повышения эффективности алгоритма сглаживания рассмотрим альтернативный подход с линейной вычислительной стоимостью. В качестве примера рассмотрим нелинейное параболическое уравнение (3.1), для удобства обсуждения записанное в расщеплённом операторном виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{H}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t). \tag{3.12}$$

Пусть $\mathbf{u}^k$ — k-ая итерация пространственно-временного решения уравнения (3.12). Линеаризованное уравнение поправки решения уравнения (3.12) может быть записано в общем виде как

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathcal{E}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) - \mathcal{H}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \tag{3.13}$$

где $\mathbf{v}$ — поправка решения, используемая в процедуре обновления решения $\mathbf{u}^k \leftarrow \mathbf{u}^k + \mathbf{v}$, а $\mathcal{E} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}}$ — линеаризованный пространственный оператор ошибки. Например, для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

линеаризованный оператор ошибки принимает вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Отметим, что уравнение (3.13) линейно относительно поправки решения $\mathbf{v}$, а значит может быть решено по аналогии с эллиптическим случаем. Дискретизация уравнения (3.13) в узлах адаптивной сетки приводит к системе уравнений (3.11), которая может быть решена с помощью итеративного взвешенного метода Якоби, как в случае локального многоуровневого итерационного вейвлетного коллокационного эллиптического решателя, описанного в подразделе 1.4.2. Так как уравнение (3.11) используется в качестве оператора сглаживания ошибки, то на практике достаточно несколько итераций Якоби для каждой итерации метода Ньютона. Результаты численных экспериментов показали, что трёх итераций метода Ньютона и трёх итераций метода Якоби достаточно для сглаживания высокочастотных составляющих поправки решения.

Алгоритм 3.1: Адаптивное сглаживание функции на основе итерационного метода Ньютона: $\mathbf{U}^j \xrightarrow[\nu_1]{\text{smooth}} \mathbf{U}^j$.

начальное приближение: $\mathbf{U}^j$
do ν_1 шагов
  решить: $\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{U}^j)\mathbf{V} = -\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{U}^j) := \mathbf{F}^j - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j$
  обновить: $\mathbf{U}^j \leftarrow \mathbf{U}^j + \mathbf{V}$
end

В случае нескольких компонент уравнения (3.12) и, соответственно, уравнения (3.10), процедура обновления вектора решения $\mathbf{U}$ может быть записана как

$$\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} - \Big[\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{U})\Big]^{-1} \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{U}). \tag{3.14}$$

Следует отметить, что, так как в методе Якоби используется только диагональная часть матрицы, то формально Якобиан $\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{u})$ в алгоритме 3.1 может быть заменён на диагональную матрицу

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{u}) := \operatorname{diag}\left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_i}\right],$$

где U_i — i-ая компонента вектора $\mathbf{U}$. Таким образом, процедура обновления может быть записана в следующем виде

$$U_i \leftarrow U_i - \frac{\mathcal{F}_i([\ldots U_i \ldots])}{\partial \mathcal{F}_i / \partial U_i}. \tag{3.15}$$

Вышеупомянутая процедура сглаживания была применена для W-FAS алгоритма, описанного в подразделе 3.2.1. Результаты численных экспериментов показали, что одной приближённой итерации Ньютона (3.15) достаточно для сходимости метода. Стоит отметить, что в линейном случае описанный метод автоматически сводится к итерационному методу Якоби. Процедура многоуровневого вейвлетного метода полной аппроксимации приведена в алгоритме 3.2.

3.2.3 Метод разбиения и инвертирования области

Для задач с большим временным интервалом размер дискретизированной пространственно-временной задачи может превышать максимально допустимый

Алгоритм 3.2: Адаптивный W-FAS метод с итеративным V-циклом.

while $\left\|\mathbf{F}^{j_{\max}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^{j_{\max}}\right\|_{\infty} \geqslant \delta_{\varepsilon}$ **do**

  $\mathbf{r}^{j_{\max}} := \mathbf{F}^{j_{\max}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^{j_{\max}}$

  for $j = j_{\max} : -1 : j_0 + 1$ **do**

    ν_1 шагов сглаживания (алгоритм 3.1): $\mathbf{U}^j \xrightarrow[\nu_1]{\text{smooth}} \mathbf{U}^j$

    ограничить: $\mathbf{U}^{j-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\mathbf{U}^j$

    $\mathbf{F}^{j-1} = \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\mathbf{U}^j) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}(\mathbf{F}^j - \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j)$

  end

  решить для $j = j_{\min}$: $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{U}^j = \mathbf{F}^j$

  for $j = j_0 + 1 : 1 : j_{\max}$ **do**

    обновить: $\mathbf{V} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{w}}^{j}(\mathbf{U}^{j-1} - \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{w}}^{j-1}\mathbf{U}^j)$

    обновить: $\mathbf{U}^j \leftarrow \mathbf{U}^j + \mathbf{V}$

    ν_2 шагов сглаживания (алгоритм 3.1): $\mathbf{U}^j \xrightarrow[\nu_2]{\text{smooth}} \mathbf{U}^j$

  end

  обновить: $\mathbf{U}^{j_{\max}} \leftarrow \mathbf{U}^{j_{\max}} + \mathbf{V}$

end

размер, зависящий от доступной памяти используемой компьютерной системы. Один из способов преодоления этого технического ограничения заключается в разбиении пространственно-временной области на временные слои, разбивающие пространственно-временную область на множество подобластей в направлении координаты времени. Разобьём временной интервал $[0,T]$ на P подинтервалов

$$[0,T] = \bigcup_{p=0}^{P-1} [T_p,T_{p+1}], \quad \text{где} \quad T_1 = 0, T_P = T. \tag{3.16}$$

Таким образом, пространственно-временная область $\Omega_{\text{s-t}} = \Omega_{\text{s}} \times [0,T]$ может быть представлена как множество подобластей $\Omega_{\text{s-t}}^p = \Omega_{\text{s}} \times [T_p,T_{p+1}]$, $p \in \{0, \ldots, P-1\}$

$$\Omega_{\text{s-t}} := \bigcup_{p=0}^{P-1} \Omega_{\text{s}} \times [T_p,T_{p+1}]. \tag{3.17}$$

Схематическая диаграмма разбиения пространственно-временной области показана на рис. 3.2. Таким образом, задача в области $\Omega_{\text{s-t}}$ может быть решена как последовательность подзадач P_p в каждый из подобластей $\Omega_{\text{s-t}}^p$ с граничным условием Дирихле при $t = T_p$ и эволюционными условиями (3.3) на границе $t = T_{p+1}$.

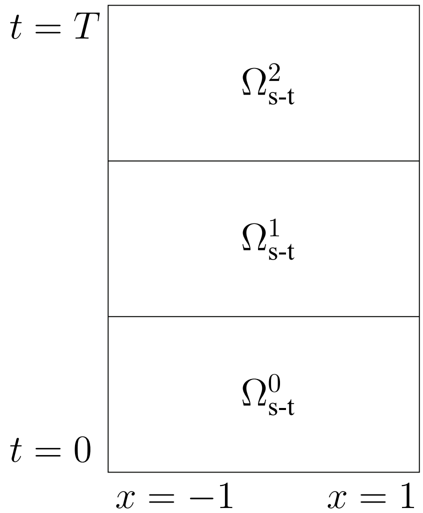


Рисунок 3.2 — Схематическая диаграмма разбиения пространственно-временной области $\Omega_{\text{s-t}}$ на подобласти $\Omega^p_{\text{s-t}}$.

Для каждой подзадачи P_p граничные условия в подобласти $\Omega^p_{\text{s-t}}$ известны из решения задачи P_{p-1}. Отметим, что, поскольку подобласти $\Omega^p_{\text{s-t}}$ и $\Omega^{p-1}_{\text{s-t}}$ имеют общую границу при $t = T_p$, задача P_p может быть инвертирована во времени так, что решение задачи P_p в подобласти $\Omega^p_{\text{s-t}}$ эквивалентно решению обратной задачи P'_{p-1} в подобласти $\Omega^{p-1}_{\text{s-t}}$. Задача P_p в подобласти $\Omega^p_{\text{s-t}}$ является прямой задачей, а задача P'_{p-1} — обратной задачей. При рекурсивном применении процедуры инвертирования времени задача может быть разбита на последовательность прямых и обратных задач в одной и той же подобласти $\Omega^0_{\text{s-t}}$, при этом по-прежнему сохраняется контроль глобальной ошибки задачи во всей области $\Omega_{\text{s-t}}$.

Таким образом, для прямой задачи граничные условия Дирихле задаются на границе $t = T_0$, а эволюционные — на $t = T_1$. Для обратной задачи полученное решение на границе $t = T_1$ становится граничным условием, а на границе $t = T_0$ применяются эволюционные граничные условия. Этот процесс инвертирования времени и граничных условий продолжается до момента достижения конечного времени $t = T$.

Предложенная методика разбиения и инвертирования области разрешает сложность, связанную с нехваткой доступной компьютерной памяти и позволяет решать пространственно-временную задачу как последовательность нескольких подзадач. Отметим, что в каждой подобласти ошибка контролируется тем же пороговым параметром, не меняя сходимости глобальной ошибки, что было подтверждено в вычислительных экспериментах.

3.3 Обсуждение результатов

3.3.1 Постановка тестовых задач

Для подтверждения точности и эффективности ST-AWCM рассмотрим его применение для тестовых параболических задач с пространственно-временным локализованным решением. В данном под е рассмотрены две одномерные задачи: уравнения Бюргерса [34] с неподвижной и движущейся ударными волнами. Эти задачи уже были рассмотрены в подразделе 1.5.1 при обсуждении применения AWCM к параболическим задачам. Обе задачи решены в пространственно-временной области и являются хорошим тестом оценки эффективности ST-AWCM. Особый интерес представляет пространственно-временная адаптация вычислительной сетки и контроль глобальной ошибки в пространственно-временной области. Применение ST-AWCM для численного моделирования задач механики жидкости и газа продемонстрировано в разделе 4.4 на примерах задач о слиянии двух вихрей в несжимаемой вязкой жидкости при $\mathrm{Re} = 1\,000$ и двумерной затухающей турбулентности для чисел Рейнольдса в диапазоне $1{,}260 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 40\,400$.

Уравнение Бюргерса: задача о формировании ударной волны

Данная задача демонстрирует применимость ST-AWCM для решения задачи о формировании ударной волны. Уравнение Бюргерса решается для пространственно периодических граничных условий, гладких начальных условий и эволюционных условий в конечный момент времени. При использовании метода разбиения и инвертирования области, описанного в подразделе 3.2.3, решаются прямая и обратные задачи, заданные как:

Прямая задача:

$$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0, \tag{3.18}$$
$$u(-1,t) = u(1,t), \qquad t \in (0,T),$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \qquad x \in (-1,1),$$
$$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,T) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,T) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,T) = 0.$$

Обратная задача:

$$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0,$$
$$u(-1,t) = u(1,t), \qquad t \in (0,T),$$
$$u(x,T) = u_1(x,T), \qquad x \in (-1,1),$$
$$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

При решении прямой задачи крутизна ударной волны увеличивается со временем и уменьшением вязкости. Эволюция решения от гладкой функции к ударной волне приводит к росту вейвлетных коэффициентов в окрестности $x = 0$. Численное решение получено для $\nu = 10^{-3}/\pi$ и $T = 0.4$. Аналитическое решение прямой задачи задано выражением (1.68) и проиллюстрировано на рис. 3.3, где показана эволюция решения от гладкого начального условия к структуре ударной волны при $t = T$.

Модифицированное уравнение Бюргерса: задача о движущейся ударной волне

Следующая тестовая задача демонстрирует применимость ST-AWCM для решения задач с локализованными движущимися структурами на примере решения модифицированного уравнения Бюргерса с дополнительным конвективным членом, решением которого является ударная волна, перемещающаяся в пространстве с постоянной скоростью. В отличие от предыдущей задачи, пространственно-временная сетка должна адаптироваться, отслеживая перемещения ударной волны. Следует отметить отличие адаптации в пространственно-временной области от классического метода с подвижными

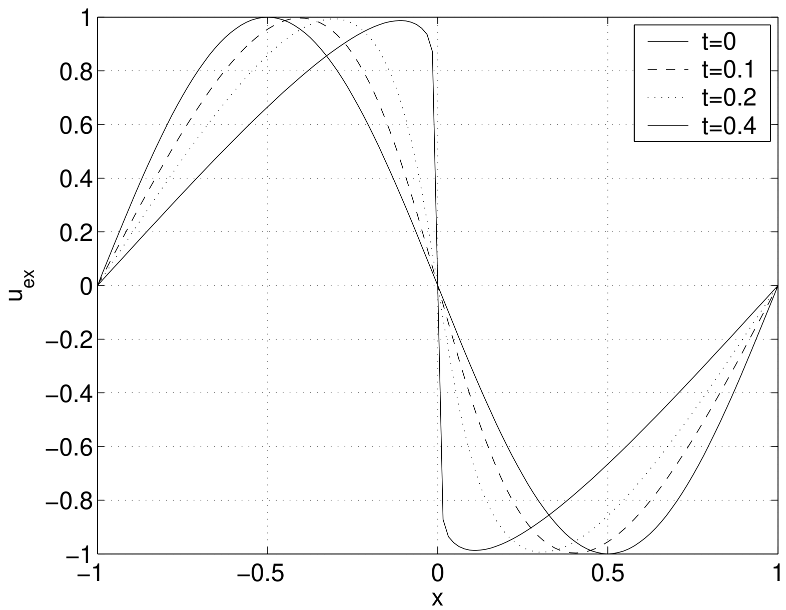


Рисунок 3.3 — Точное решение уравнения Бюргерса в разные моменты времени.

узлами сетки [226], перемещающимися вместе с ударной волной, отслеживая её положение. При применении ST-AWCM пространственно-временная сетка адаптируется итеративно и автоматически, разрешая мелкомасштабные пространственно-временные структуры решения.

При использовании метода разбиения и инвертирования области, описанного в подразделе 3.2.3, решаются прямая и обратные задачи, заданные как:

Прямая задача:

$$\begin{aligned}
-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad (x,t) \in (-1,1)\times(0,T), \\
u(\pm 1,t) &= \mp 1, \\
u(x,0) &= -\tanh\left(\frac{x-x_0}{2\nu}\right), \\
-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad t = T.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Обратная задача:

$$\begin{aligned}
-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+u)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad (x,t) \in (-1,1)\times(0,T), \\
u(\pm 1,t) &= \mp 1,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad t = 0,$$
$$u(x,T) = u_1(x,T).$$

Численное решение получено для $\nu = 10^{-2}$, $x_0 = 0$, $v = 1$ и $T = 0.4$. Аналитическое решение задачи задано выражением (1.71).

3.3.2 Пространственно-временная адаптация сетки

Процедура адаптации пространственно-временной сетки идентична процедуре сеточной адаптации, описанной в разделе 1.4. Как и в эллиптическом случае, процесс адаптации сетки рекурсивный и заключается во включении в адаптивную сетку только тех узлов, которые соответствуют значимым и смежным вейвлетам, а также вейвлетам, включенным в результате процедуры проверки восстановления функции. Соответствующая пространственно-временная задача решается с помощью W-FAS метода, описанного в алгоритме 3.2, после чего процесс сеточной адаптации продолжается до сходимости последовательности адаптивных сеток и решения задачи.

Отметим, что самый мелкий масштаб или максимальный уровень разрешения $j_{\max}$, присутствующий в конкретной задаче, зависит от порогового параметра ε. Таким образом, в процессе сеточной адаптации при начальном приближении решения на грубой сетке более мелкие масштабы добавляются с каждой итерацией адаптивной сетки до полной сходимости как сетки, так и решения задачи. Зависимости количества узлов сетки и максимального уровня разрешения от глобальной итерации показаны на рис. 3.4 для стационарной ударной волны и на рис. 3.5 для движущейся ударной волны.

Отметим, что численные результаты получены без ограничения максимального уровня разрешения. Также отметим, что на начальных итерациях адаптивная сетка достаточно груба по сравнению с самым мелким масштабом, присутствующим в решении, но при последующих глобальных итерациях максимальный уровень разрешения увеличивается, и адаптивная сетка сгущается в области ударной волны. Результаты пространственно-временных решений для вейвлетного порога $\varepsilon = 10^{-5}$ для начальной, промежуточной и завершающей глобальных итераций показаны на рис. 3.6 вместе с соответствующими пространственно-временными

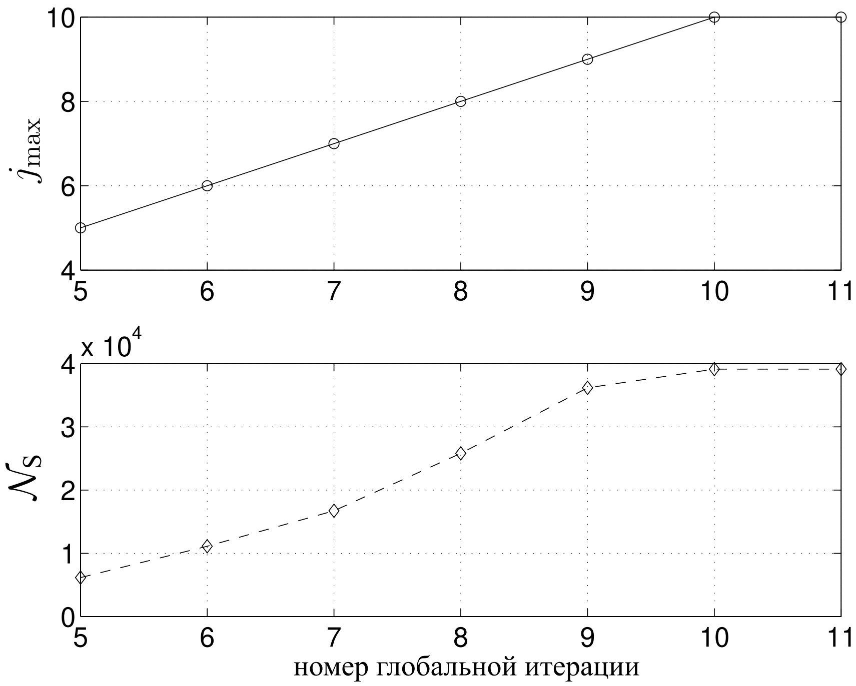


Рисунок 3.4 — Зависимость максимального уровня разрешения $j_{\max}$ и количества адаптивных узлов сетки $\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$ от глобальной итерации для $\varepsilon = 10^{-5}$ для задачи о формировании ударной волны.

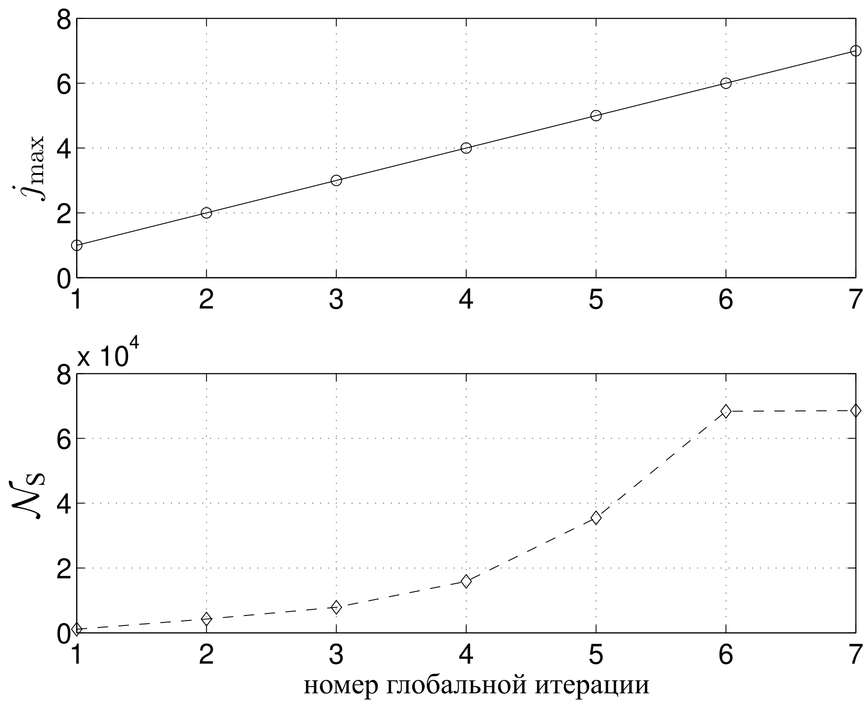


Рисунок 3.5 — Зависимость максимального уровня разрешения $j_{\max}$ и количества адаптивных узлов сетки $\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$ от глобальной итерации для $\varepsilon = 10^{-5}$ для задачи о движущейся ударной волне.

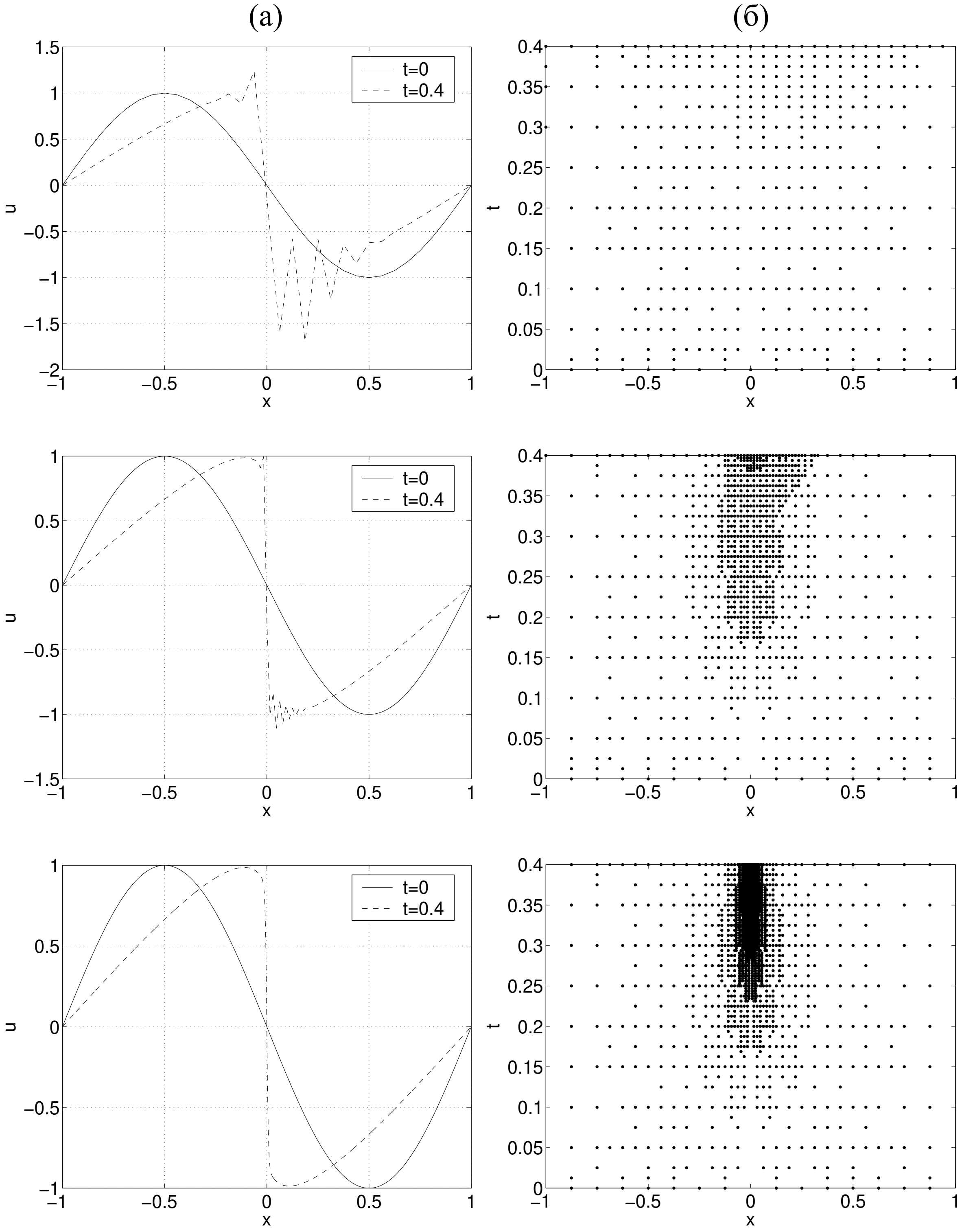


Рисунок 3.6 — Решение уравнения Бюргерса (3.18) (а) и соответствующая пространственно-временная адаптивная сетка (б) для глобальных итераций, показанных на рис. 3.4, соответствующих $j_{\max} = 3{,}5{,}9$.

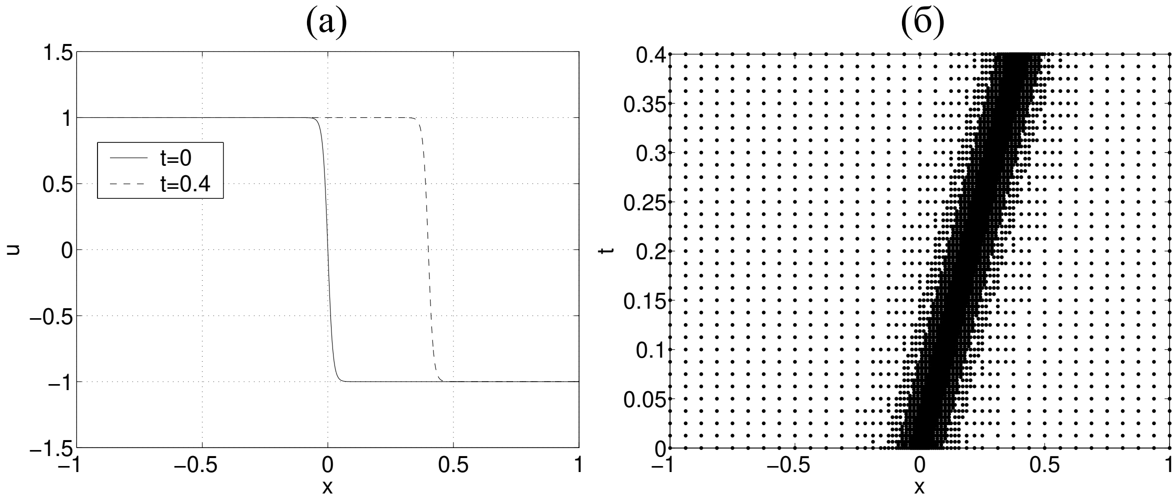


Рисунок 3.7 — Движущаяся ударная волна: (а) Решение. (б) Пространственно-временная адаптивная сетка.

адаптивными сетками. Скопление пространственно-временных узлов в области формирования ударной волны демонстрирует эффективность ST-AWCM. Следует обратить внимание, что промежуточные решения при недостаточном сеточном разрешении демонстрируют видимую ошибку в области формирования ударной волны для $t = 0.4$, которая уменьшается при последующих итерациях и увеличении максимального уровня разрешения. Решение для движущейся ударной волны и соответствующая пространственно-временная сетка показаны на рис. 3.7. В отличие от случая формирования ударной волны, область высокого пространственно-временного разрешения отслеживает перемещение волны.

3.3.3 Контроль глобальной ошибки

Как уже отмечалось в разделе 3.1, применение маршевых методов приводит к накоплению ошибки во времени, при этом на глобальную ошибку влияет как пространственная, так и временная дискретизация уравнений. Отметим, что ошибку, связанную с методом интегрирования во времени, можно контролировать шагом по времени, в то время как глобальная накопительная ошибка, связанная с пространственной дискретизацией, не может быть устранена уменьшением шага по времени. Согласно оценки (1.46), ошибка вейвлетного разложения функции определяется величиной вейвлетного порога ε, из чего

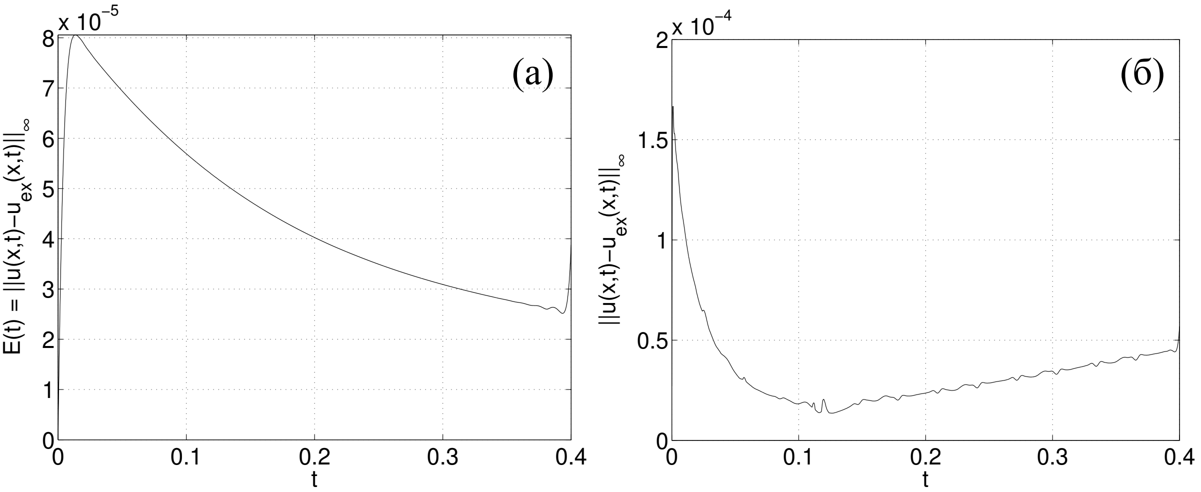


Рисунок 3.8 — Зависимость глобальной ошибки от времени: (а) формирующаяся ударная волна, (б) движущаяся ударная волна.

вытекает, что ошибка вейвлетного пространственно-временного решения также должна быть ограничена ε. Таким образом, в отличие от маршевых методов, глобальная ошибка ST-AWCM ограничена и контролируется пороговым параметром. Для демонстрации контроля глобальной ошибки решения достаточно рассмотреть L_p ошибку аппроксимации временного среза, определённую как $E(t) := \{\int_x |u(x,t) - u_{\text{ex}}(x,t)|^p dx\}^{1/p}$. Эволюция глобальной L_∞ ошибки временного среза проиллюстрирована на рис. 3.8 для формирующейся и движущейся ударных волн.

Для демонстрации метода разбиения и инвертирования области рассмотрим задачу о формировании ударной волны, разбив пространственно-временную область $[-1,1] \times [0,0.4]$ на две равные подобласти, при этом прямая задача решается в подобласти $[-1,1] \times [0, 0.2]$, а обратная — в $[-1,1] \times [0.2, 0.4]$. Эволюция глобальной ошибки временного среза для прямой и обратной задач с соответствующими пространственно-временными сетками в каждой из подобластей продемонстрирована на рисунках 3.9 и 3.10. Как видно из рисунков 3.6, 3.8-3.10, глобальная ошибка и адаптивная пространственно-временная сетка сравнимы при решении задачи во всей области и в двух подобластях, применяя метод разбиения и инвертирования области.

Для демонстрации накопительной ошибки маршевых методов задача о формировании ударной волны была решена, используя маршевые методы с разной пространственной дискретизацией: псевдоспектральный метод с деалиасингом, конечно-разностный метод и AWCM. Накопительная ошибка для всех трёх методов показана на рис. 3.11(а), где L_∞ ошибка маршевых методов с фиксированным

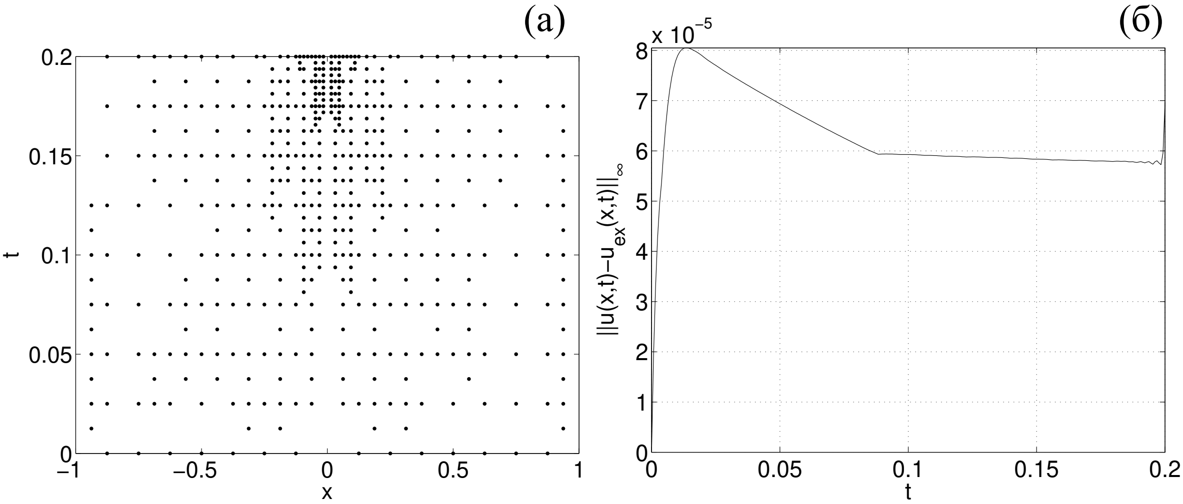


Рисунок 3.9 — Результаты решения задачи о формировании ударной волны с применением метода разбиения и инвертирования области: (а) пространственно-временная адаптивная сетка в подобласти $[-1{,}1] \times [0{,}0.2]$, (b) зависимость глобальной ошибки от времени.

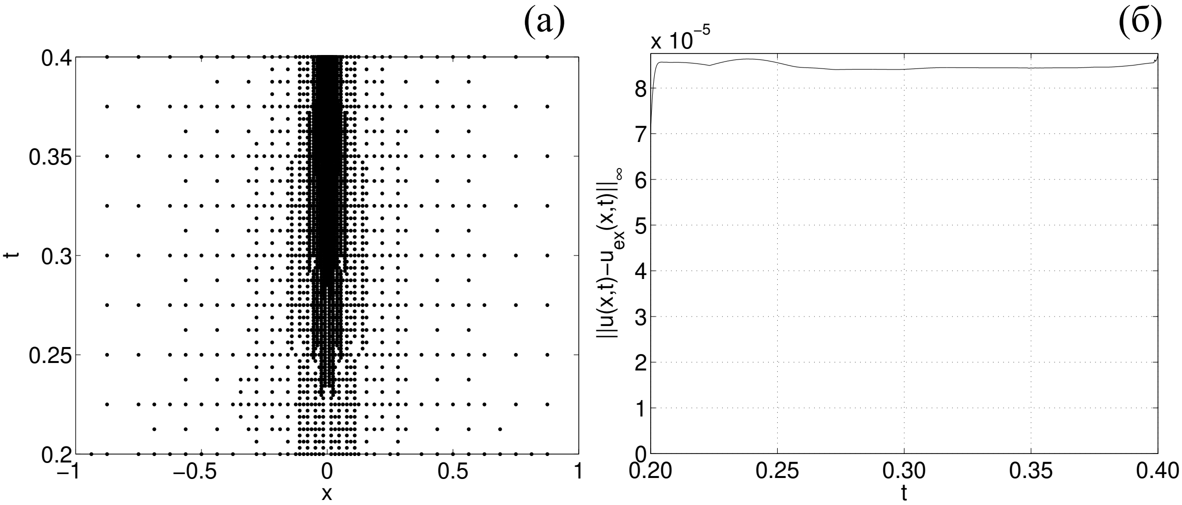


Рисунок 3.10 — Результаты решения задачи о формировании ударной волны с применением метода разбиения и инвертирования области: (а) пространственно-временная адаптивная сетка в подобласти $[-1{,}1] \times [0.2{,}0.4]$, (b) зависимость глобальной ошибки от времени.

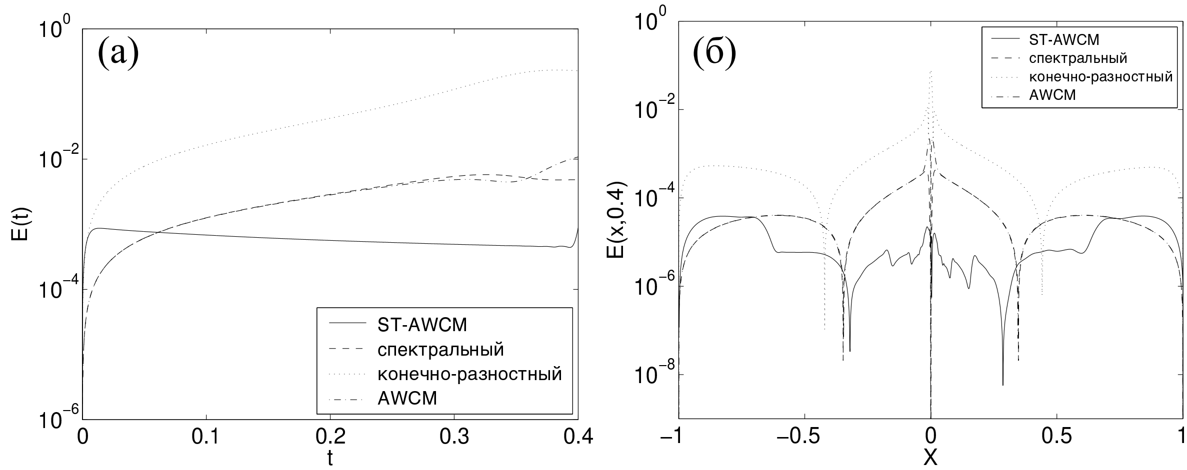


Рисунок 3.11 — Задача о формировании ударной волны: (а) сравнение глобальной L_∞ ошибки решения для пространственно-временного и маршевых методов с фиксированным шагом по времени, (б) пространственные распределения ошибок для пространственно-временного и маршевых методов в момент времени $t = 0.4$.

шагом по времени ($\Delta t = 10^{-3}$) и равномерной сеткой ($\Delta = 10^{-3}$) сравнима с ошибкой пространственно-временного решения. Как видно из рисунка, во всех маршевых методах ошибка монотонно возрастает примерно до времени $t = 0.3$, в то время как для пространственно-временного метода ошибка контролируется величиной вейвлетного порогового параметра ($\varepsilon = 10^{-5}$). Пространственное распределение ошибки численного решения для ST-AWCM и маршевых методов в момент времени $t = 0.4$ показана на рис. 3.11б. Отметим, что для всех маршевых методов максимальная ошибка достигается в области максимальной крутизны решения, в то время как для пространственно-временного адаптивного вейвлетного коллокационного метода ошибка распределена равномерно по пространству.

3.3.4 Точность и эффективность ST-AWCM

Как обсуждалось в разделе 1.3, зависимость ошибки вейвлетного решения от общего числа узлов адаптивной сетки может быть оценена, используя выражения (1.46), (1.50) и (1.58), в которых коэффициент полиномиальной сходимости p/n зависит от порядка вейвлета p и размерности задачи ($n = 2$ в рассматриваемом случае). Как и в предыдущих главах, сходимость ST-AWCM изучается последовательным уменьшением вейвлетного порога ε при фиксиро-

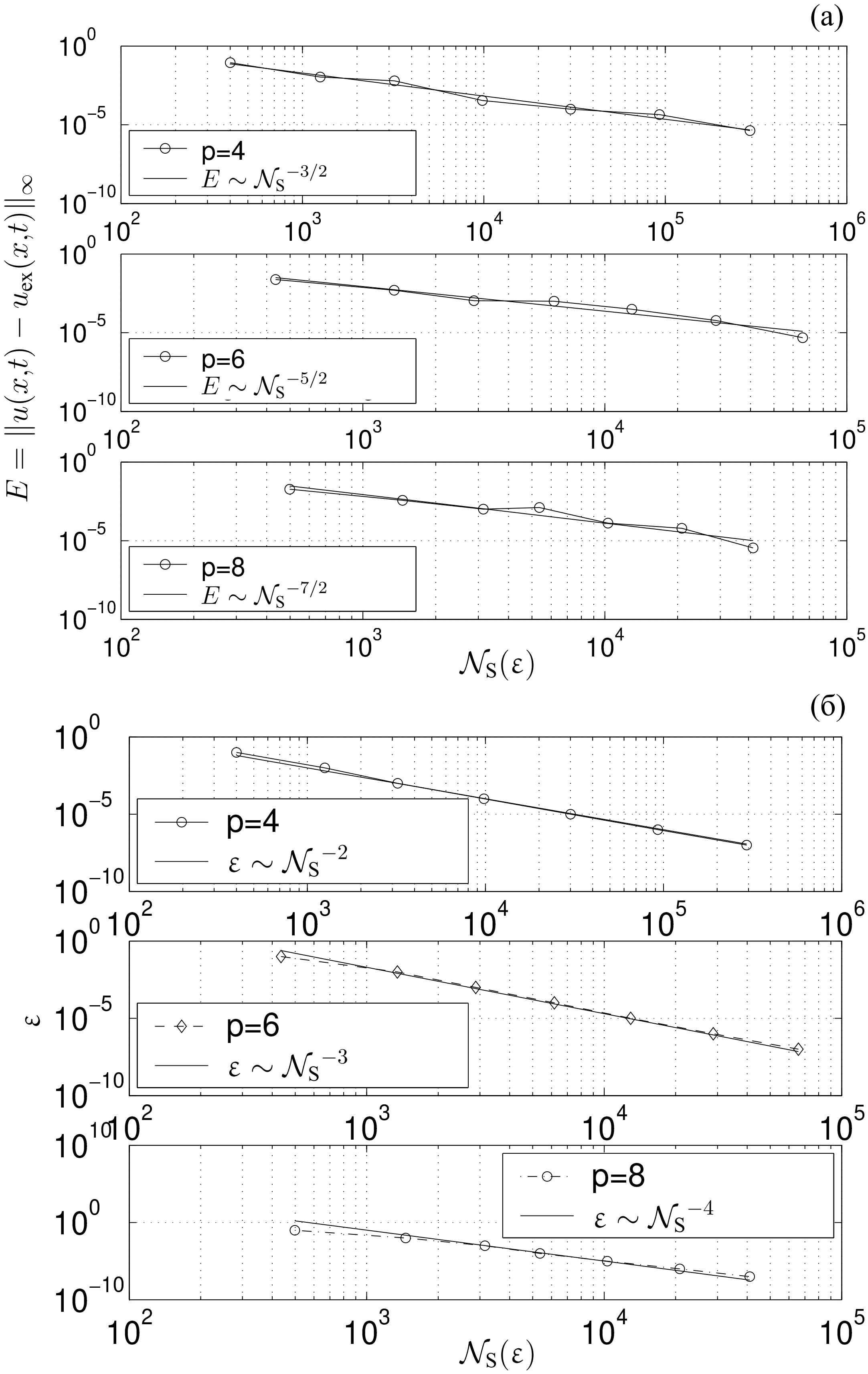


Рисунок 3.12 — (а) Зависимость поточечной L_∞ ошибки решения задачи о формировании ударной волны от общего числа узлов адаптивной сетки для вейвлетов разного порядка ($p = 4, 6, 8$). (б) Зависимость общего числа узлов адаптивной сетки от вейвлетного порога ε для вейвлетов разного порядка ($p = 4, 6, 8$).

ванном порядке вейвлета. Результаты проверки сходимости приведены на рис. 3.12, где продемонстрирована зависимость L_∞ ошибки решения от числа узлов адаптивной сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$, а также зависимость $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от величины порогового параметра ε и разных значений параметра $p = 4, 6, 8$. Из результатов, приведённых на рисунке, видно, что зависимость ошибки и число узлов адаптивной сетки совпадают с теоретической оценкой, соответственно заданной выражениями (1.58) и (1.49). Отметим потерю одного порядка точности, связанной с полиномиальной природой вейвлетного разложения и применением конечно-разностных схем для дифференцирования функции.

Глава 4. Применения адаптивного вейвлетного коллокационного метода для численного моделирования простых течений жидкости и газа

4.1 Течения несжимаемой вязкой жидкости

Рассмотрим течения вязкой несжимаемой жидкости, описываемые уравнениями Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}, \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость жидкости относительно наложенного потока, двигающегося со скоростью $\mathbf{U}$, P — давление, а ν — кинематическая вязкость.

Численное решение уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости получено с применением адаптивного вейвлетного коллокационного метода как для параболических задач при решении уравнения (4.1), так и эллиптических задач для обеспечения условия несжимаемости (4.2).

Для иллюстрации процедуры решения уравнений Навье—Стокса (4.1)–(4.2) рассмотрим случай применения простейшего метода интегрирования по времени. В практических приложениях используется аналогичный метод второго порядка, описанный в конце этого раздела. Метод интегрирования во времени основан на методе расщепления, часто называемом двухшаговым методом прогноза и коррекции, в котором промежуточное несоленоидальное поле скоростей, получаемое после первого шага интегрирования (шага прогноза), корректируется, используя метод проекции давления, гарантирующего соленоидальность поля скоростей после шага коррекции. Для вычисления поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t_{n+1}) \equiv \mathbf{u}^{n+1}$ в момент времени t_{n+1} при заданных с предыдущего шага по времени давлении P^n и скорости $\mathbf{u}^n$ вначале решается уравнение Навье—Стокса с фиксированным давлением P^n

$$\mathcal{L}\mathbf{u}^* \equiv \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n + \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \nu \Delta \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nabla P^n, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{u}^*$ — промежуточное несоленоидальное поле скоростей, а $\mathcal{L}$ — линейный оператор. Отметим, что для аппроксимации оператора Лапласа для скорости применяется неявная дискретизация во времени, в то время как для дискретизации конвективного члена используется полу-неявная схема, позволяющая вычисления с шагом по времени, ограниченным числом CFL [59]. Линейная система (4.3) решается с помощью метода сопряженных градиентов BI-CGSTAB [240].

На шаге коррекции несоленоидальное промежуточное поле скоростей $\mathbf{u}^*$ корректируется с помощью метода проекции давления

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \delta P, \tag{4.4}$$

где $\delta P = P^{n+1} - P^n$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \nabla \delta P = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \tag{4.5}$$

Уравнения (4.4) и (4.5) обеспечивают соленоидальность скорости в момент времени t_{n+1}, то есть $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. Все пространственные производные вычисляются, используя процедуру вейвлетного дифференцирования на адаптивной сетке, описанную в подразделе 1.3.5. Отметим, что ввиду применения совмещённой сетки, давление и скорость определены в одних и тех же узлах, что значительно упрощает метод в контексте адаптивной сетки, но требует специального метода решения уравнения (4.5). В частности, чтобы избежать неустойчивость, связанную с четно-нечетным размежеванием узлов, характерную для совмещенной сетки, оператор Лапласа определяется как последовательность операторов дивергенции и градиента с противоположной асимметрией шаблонов. Следует отметить, что Грибель и Костер [108] независимо разработали аналогичный подход для метода Галеркина для решения уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости. Уравнение Пуассона (4.5) решается с помощью многоуровневого вейвлетного коллокационного эллиптического решателя, описанного в подразделе 1.4.2. Метод расщепления устойчив для жестких задач и может быть использован для задач как с периодическими, так и непериодическими граничными условиями. В случае непериодических граничных условий, хорошо обусловленными граничными условиями являются $\nabla P \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к границе вычислительной области.

На практике для интегрирования во времени применяется аналогичный неявный метод второго порядка, основанный на линеаризованном методе Кранка—Николсона [61]. Отметим, что для задач с непериодическими граничными условиями для уменьшения эффекта пограничного слоя вдоль границы численной области, связанного с $O(\Delta t)$ разрывом тангенциальной компоненты скорости на шаге коррекции, используется вращательная форма метода расщепления, предложенная Гермондом и Шеном [111].

4.1.1 Двумерная задача слияния вихрей

AWCM применён для решения двумерной задачи слияния вихрей, включающей в себя основные нелинейные процессы двумерной турбулентности [213]. Безразмерное уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \mathbf{u}, \tag{4.6}$$

совместно с уравнением неразрывности (4.2) решаются в двухпериодической области $\Omega_\mathrm{s} = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$. Начальные условия соответствуют двум одинаковым Гауссовым вихрям с завихренностями в направлении координаты z, заданными как

$$\omega(x, y, 0) = \frac{\Gamma}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2}{\sigma^2}\right), \tag{4.7}$$

где циркуляция $\Gamma = 1$, начальный радиус вихря $\sigma = \sqrt{\nu\pi^2}$, начальное расстояние между вихрями $2r = 1$, начальные фазы $\varphi = \pm\pi/4$, а завихренность связана с полем скоростей следующим соотношением:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \omega. \tag{4.8}$$

Число Рейнольдса определено как $\mathrm{Re} = \Gamma/\nu = 1\,000$. Значение числа Рейнольдса достаточно велико для появления локализованных нитевидных областей завихренности. Для решения задачи использован метод расщепления, описанный в разделе 4.1, основанный на линеаризованном методе Кранка—Николсона [61]. Численное решение получено для вейвлетного порогового параметра $\varepsilon = 10^{-5}$. Поле завихренности и соответствующая адаптивная вычислительная сетка в моменты времени $t = 0.2, 9.6, 25.2$ приведены на рис. 4.1. Основной материал подраздела опубликован в работе автора [310].

4.2 Течения сжимаемого газа

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса совместно с уравнениями сохранения энергии и массы индивидуальных компонент многокомпонентной смеси

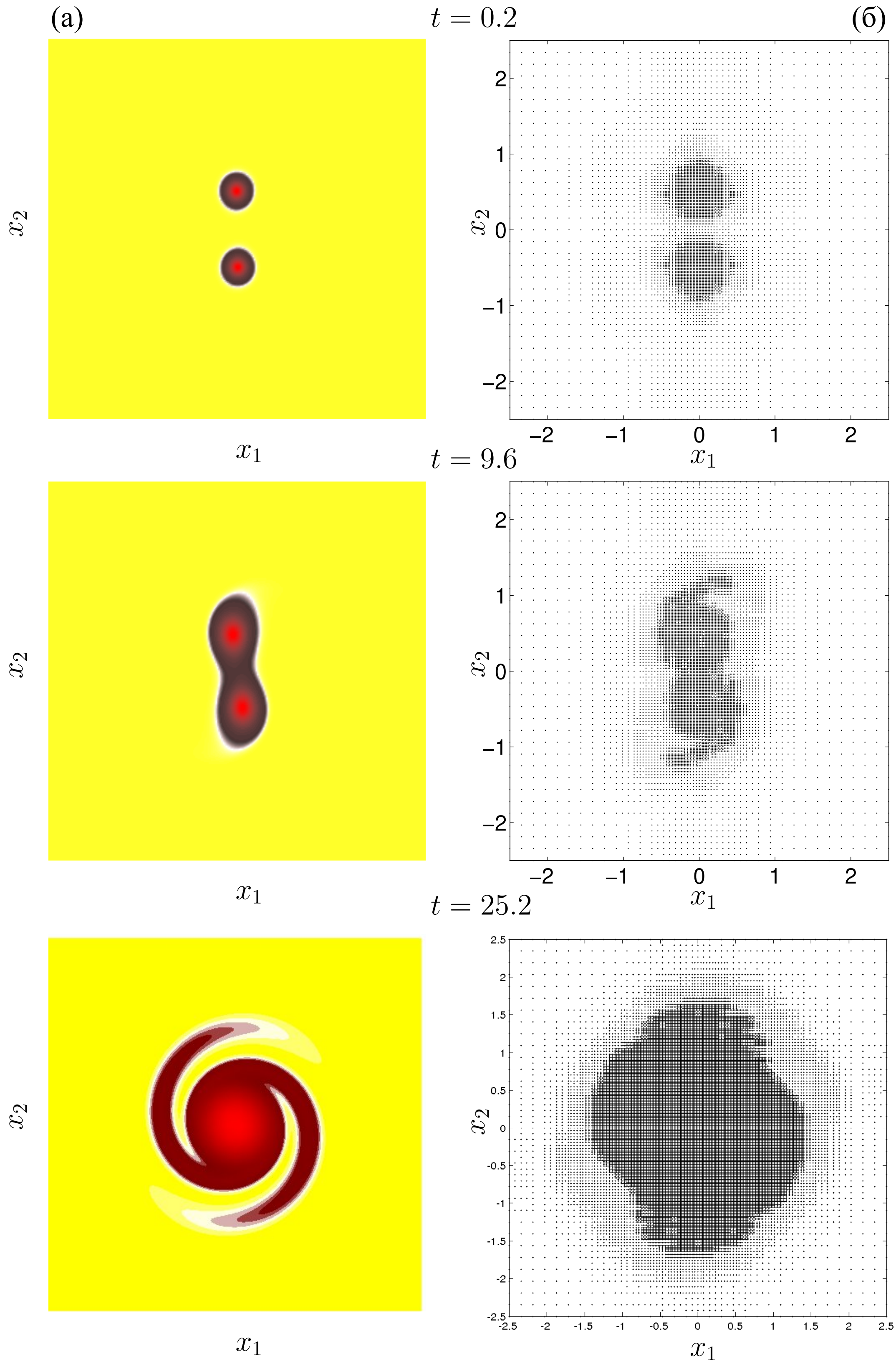


Рисунок 4.1 — Слияние вихрей при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$: (а) поле завихренности и (б) соответствующая адаптивная сетка в три разные моменты времени.

реагирующих идеальных газов

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) u_j}{\partial x_j} = \rho u_i g_i + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{N_\mathrm{s}} \left(\frac{\partial c_{p_k} T s_{jk}}{\partial x_j} + Q_k \dot{\omega}_k \right), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_j} + \dot{\omega}_k, \qquad k = 1, \ldots, N_\mathrm{s} \tag{4.12}$$

$$p = \rho R T = \rho \frac{R_\mathrm{u}}{W} T, \tag{4.13}$$

где ρ, p, T и u_i — соответственно плотность, давление, температура и x_i компоненты скорости, g_i — составляющая гравитационного ускорения в направлении x_i, Y_k — массовая доля k-ой компоненты смеси, N_s — количество компонент смеси, R — газовая постоянная, R_u — универсальная газовая постоянная, e — полная удельная энергия, τ_{ij} — тензор вязких напряжений, q_j — компоненты потока тепла в направлении x_j, s_{jk} — поток массы k-ой компоненты смеси в направлении x_j, определённых как

$$e = c_v T + \frac{1}{2} u_i u_i, \tag{4.14}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \tag{4.15}$$

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{4.16}$$

$$s_{jk} = \rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}. \tag{4.17}$$

Для простоты баро- и термо-диффузионные механизмы, эффект Дюфура и тепловое излучение не рассмотрены. Термомеханические коэффициенты многокомпонентной смеси, такие как динамическая вязкость μ, коэффициент теплопроводности κ, удельные теплоёмкости c_v и c_p, определены как средневзвешенные по массе величины индивидуальных коэффициентов каждой из компонент. Например, коэффициент динамической вязкости и средняя молекулярная масса смеси определены как

$$\mu = \sum_{k=1}^{N_\mathrm{s}} \mu_k Y_k \tag{4.18}$$

и

$$\frac{1}{W} = \sum_{k=1}^{N_s} \frac{Y_k}{W_k}, \tag{4.19}$$

где W_k — молекулярная масса k-ой компоненты. Величины $\dot{\omega}_k$, Q_k и $Q_k\dot{\omega}_k$ соответственно обозначают скорость реакции, удельный источник тепла и источник тепла в уравнении реакции k-ой компоненты смеси. Для простоты обозначения повторяющийся индекс направления предполагает операцию суммирования по направлениям, в то время как для суммирования по компонентному индексу используется явное суммирование. Обратим внимание, что уравнения (4.9) и (4.12) переопределены, так как уравнение (4.9) может быть получено суммированием уравнений (4.12) по всем компонентам. Поэтому система уравнений (4.12) обычно решается только для $(N_s - 1)$ компонент смеси.

В диссертации система уравнений (4.9)–(4.13) используется для моделирования как химически реагирующих, так и инертных течений, для которых источниковые члены равны нулю. Подчеркнём, что эта же система уравнений используется и в случае невязких течений, для которых вязкостью, теплопроводностью и диффузией можно пренебречь. Следует отметить, что в численном моделировании, как правило, применяется безразмерная форма уравнений (4.9)–(4.13).

4.2.1 Инертные течения сжимаемого газа: неустойчивость Рэлея—Тейлора

Неустойчивость Рэлея—Тейлора наблюдается, когда легкая жидкость поддерживает более тяжелую жидкость в присутствии гравитационных сил или ускоряющейся границы раздела. Первоначально малые возмущения растут согласно линейной теории устойчивости с известными аналитическими решениями [40]. Скорость роста возмущений зависит от многих параметров задачи, таких как коэффициенты вязкости и диффузии, сжимаемость и стратификация [77; 154]. Простейшим примером неустойчивости Рэлея—Тейлора является одномодальный случай, в котором более тяжелая жидкость с большей молярной массой расположена поверх более легкой жидкости/газа. Соотношение молярных масс коренным образом влияет на форму и размер структуры неустойчивости и, как

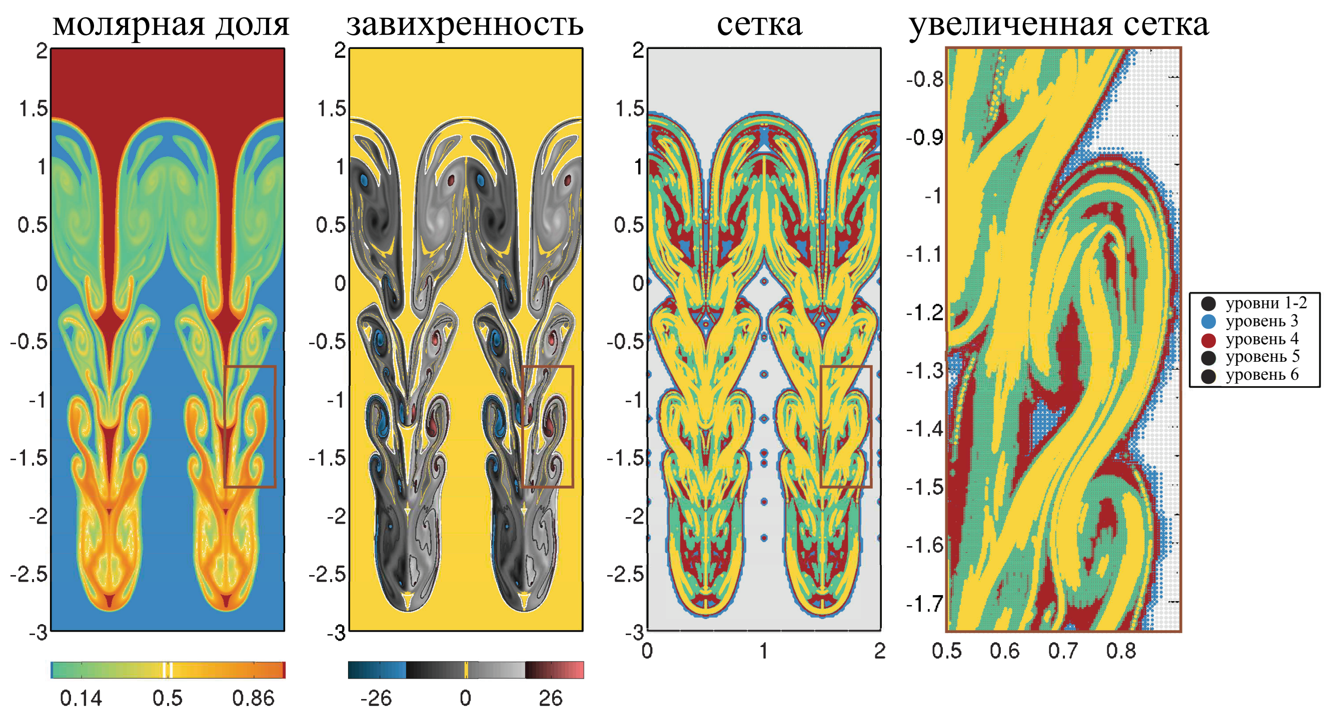


Рисунок 4.2 — Молярная доля, завихренность и соответствующая адаптивная сетка для позднего роста неустойчивости Рэлея—Тейлора с $\mathrm{Ma} = 0.3$ и $\mathrm{A} = 0.3$. Увеличенный вид адаптивной сетки соответствует выделенной на рисунке прямоугольной области.

правило, характеризуется числом Атвуда, определённым как

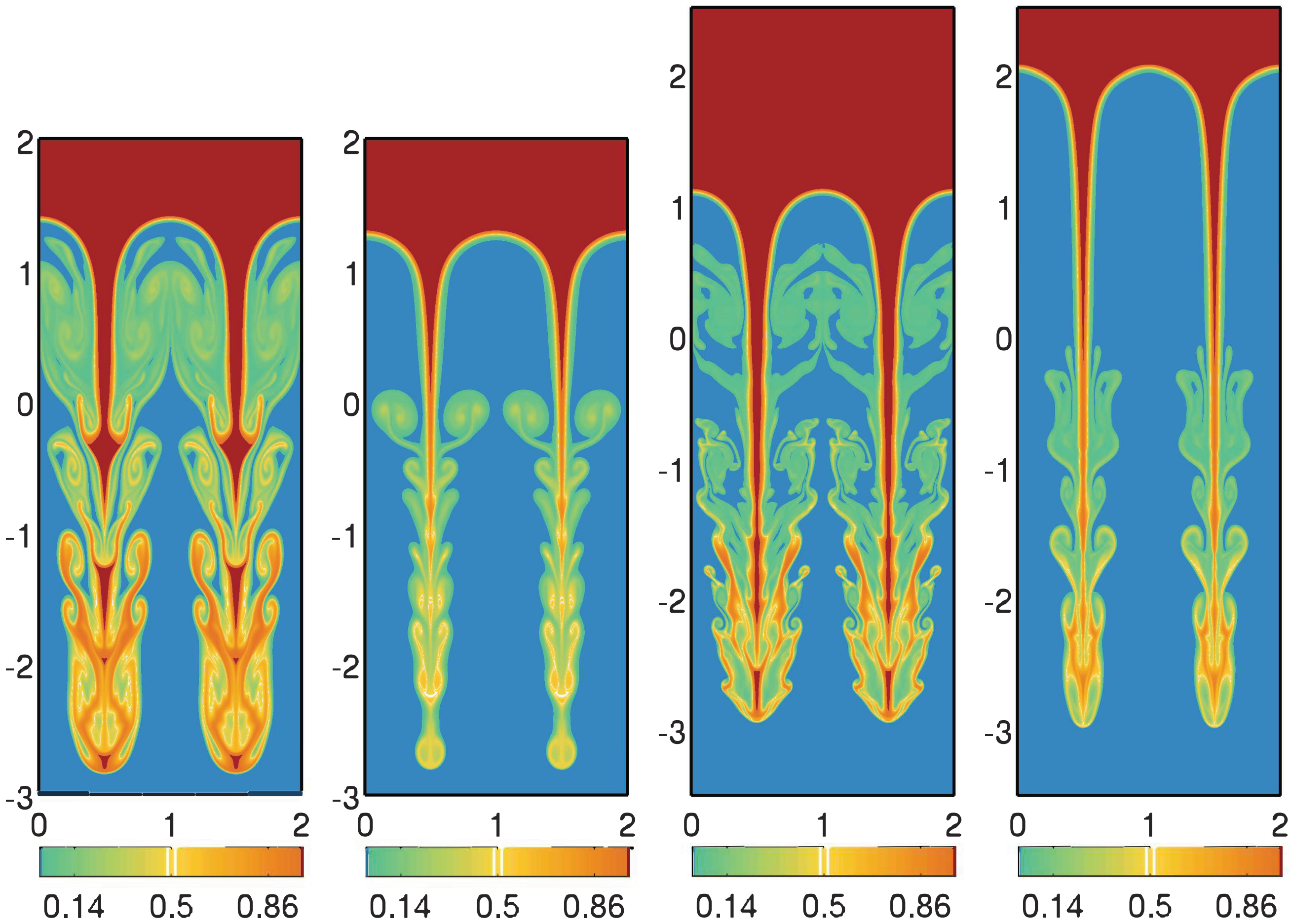
$$\mathrm{A} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}. \tag{4.20}$$

Для характеризации влияния сжимаемости на неустойчивость Рэлея—Тейлора удобно ввести число Маха

$$\mathrm{Ma} = \sqrt{\frac{\rho_I g \lambda}{P_I}}, \tag{4.21}$$

определённое как отношение гравитационной волновой скорости $\sqrt{g\lambda}$ и изотермической скорости звука $c_0 = \sqrt{P_I/\rho_I}$, где P_I и T_I — характерные давление и температура на границе раздела, а λ — характерный размер возмущения, определённый длиной волны доминирующего возмущения.

Система уравнений (4.9)–(4.13) решена с помощью AWCM для параболических уравнений, описанного в разделе 1.5. AWCM хорошо подходит для прямого численного моделирования неустойчивости Рэлея—Тейлора, так как наличие высоко локализованных структур в слое смешения приводит к высокому сжатию



(а) $\mathrm{Ma} = 0.3$, $\mathrm{A} = 0.3$ (б) $\mathrm{Ma} = 1.0$, $\mathrm{A} = 0.3$ (в) $\mathrm{Ma} = 0.3$, $\mathrm{A} = 0.7$ (г) $\mathrm{Ma} = 1.0$, $\mathrm{A} = 0.7$

Рисунок 4.3 — Молярная доля на поздней стадии эволюции одномодальной неустойчивости Рэлея—Тейлора для разных режимов сжимаемости (Ma) и контраста плотностей (A).

численного решения, при этом разрешая все основные структуры течения с явным контролем ошибки аппроксимации решения. Типичный пример решения на поздней стадии одномодальной неустойчивости Рэлея—Тейлора для $\mathrm{Ma} = 0.3$ и $\mathrm{A} = 0.3$ приведён на рис. 4.2. Численные результаты, представленные на рисунке, получены с помощью AWCM с адаптацией на молярную долю, завихренность, скорость и модули тензора напряжений и градиента молярной доли при эффективном сеточном разрешении $32\,769 \times 2\,048$. Отметим, что в представленных результатах использовалось $5\,003\,157$ значимых узлов сетки, что соответствует коэффициенту сжатия 92,5%.

Влияние сжимаемости и контраста плотности на динамику неустойчивости Рэлея—Тейлора проиллюстрировано на рис. 4.3, где приведены решения поздней стадии эволюции одномодальной неустойчивости для разных значений чисел Маха и Атвуда при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 16\,500$, где $\mathrm{Re} = \sqrt{g\lambda^3/\nu^2}$ и ν — кинематическая вязкость. Четыре различных режима неустойчивости показывают эффективность AWCM и его способность разрешать весь спектр масштабов и отслеживать эффекты разных соревнующихся физических механизмов, влияющих на развитие неустойчивости. Например, более мелкие вихревые структуры наблюдаются при больших значениях числа Атвуда, а высокие значения числа Маха приводят к появлению тонких структур из-за сильной стратификации. Подробное описание применения AWCM для изучения одномодальной неустойчивости Рэлея—Тейлора для сжимаемого газа может быть найдено в работах автора [320; 321].

4.2.2 Химически реагирующие течения сжимаемого газа: ламинарное взаимодействие диффузионного пламени с вихревой парой

Пример, обсуждаемый в этом подразделе, иллюстрирует применение AWCM для адаптивного прямого численного моделирования диффузионного пламени, взаимодействующего с вихревой парой в прямоугольной двумерной области, содержащей топливо и окислитель по обе стороны пламени. Параметры задачи заданы таким образом, чтобы слой смешения был изначально не нагрет. Интенсивность и расположение вихрей выбраны для имитации турбулентных вихрей, взаимодействующих с пламенем. Параметры химической реакции взяты таким образом, чтобы время задержки воспламенения было относительно коротким, а напряжение, вызванное взаимодействием пары вихрей, влияло на динамику процесса воспламенения. Схема задачи с начальными и граничными условиями показана на рис. 4.4. Результаты, приведённые в этом подразделе, основаны на материалах статьи автора [328].

Механизм химической реакции между топливом и окислителем представлен как

$$F + O = P, \tag{4.22}$$

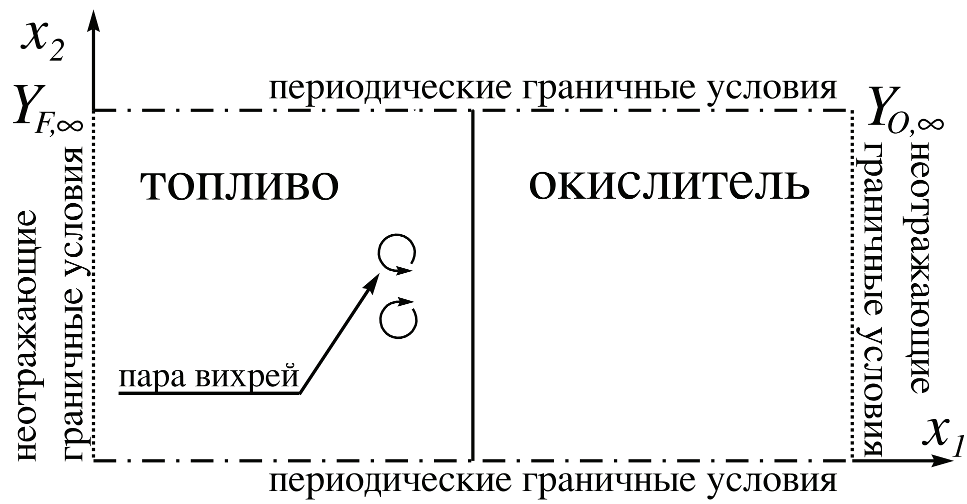


Рисунок 4.4 — Схема задачи взаимодействия диффузионного пламени с вихревой парой и вычислительные граничные условия.

где для простоты рассмотрения стехиометрический коэффициент задан единице, а скорость химической реакции определена уравнением Аррениуса

$$\dot{w} = K\rho^2 Y_F Y_O \exp\left(-\frac{T_{\text{ac}}}{T}\right), \tag{4.23}$$

где ρ — плотность, T_{ac} — температура активации, K — предэкспоненциальный коэффициент, а Y_F и Y_O — соответственно массовые доли топлива и окислителя.

За характерные масштабы задачи взяты длина L^*, скорость звука c_0^* и плотность ρ_0^*. Подстрочный индекс 0 указывает на базовое состояние, а надстрочный символ «*» обозначает размерные величины. Базовое состояние соответствует непрореагировавшему газу, базовая температура $T_{\text{ref}}^* = (\gamma - 1)T_0^*$ получена из уравнения состояния газа, где γ — показатель адиабаты, определяемый отношением удельных теплоёмкостей $\gamma = c_p/c_v$. С учётом вышеупомянутых характерных масштабов уравнения (4.9)–(4.19) принимают следующую безразмерную форму:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1{,}2, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho e + p\right) u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{RePr}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \dot{w}_e, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial \rho Y_F}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_F u_j}{\partial x_j} = +\frac{1}{\mathrm{ReSc}_F}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\mu \frac{\partial Y_F}{\partial x_j}\right) - \xi \dot{w}_e, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial \rho Y_O}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_O u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\mathrm{ReSc}_O}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\mu\frac{\partial Y_O}{\partial x_j}\right) - \xi\Phi\dot{w}_e, \tag{4.28}$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho T, \tag{4.29}$$

где

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \tag{4.30}$$

$$\mu = \left[(\gamma - 1)T\right]^a, \tag{4.31}$$

$$e = \frac{1}{2}u_i u_i + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \tag{4.32}$$

$$\dot{w}_e = \Xi\rho^2 Y_F Y_O \exp\left(-\frac{\beta(1-\theta)}{1-\alpha(1-\theta)}\right), \tag{4.33}$$

$$\theta = \frac{1-\alpha}{\alpha}\big((\gamma - 1)T - 1\big), \tag{4.34}$$

$$\alpha = \frac{T_\mathrm{f} - T_0}{T_\mathrm{f}}, \tag{4.35}$$

$$\beta = \alpha\frac{T_\mathrm{ac}}{T_\mathrm{f}}, \tag{4.36}$$

$$\xi = \frac{1}{1+\Phi}\frac{1-\alpha}{\alpha}(\gamma - 1), \tag{4.37}$$

$a = 0.76$, Ξ — безразмерный предэкспоненциальный коэффициент, T_f — адиабатическая температура пламени, а Φ — соотношение эквивалентности. Отметим, что уравнение (4.33) является безразмерной формой уравнения (4.23), переписанной в форме, предложенной Вильямсом [250]. Задача характеризуется следующими безразмерными параметрами:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0^* c_0^* L^*}{\mu_0^*}, \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu^* c_P^*}{\kappa^*}, \qquad \mathrm{Sc}_F = \frac{\mu^*}{\rho^* D_F^*}, \qquad \mathrm{Sc}_O = \frac{\mu^*}{\rho^* D_O^*}, \tag{4.38}$$

где μ^* — динамическая вязкость, κ^* — теплопроводность, а D_F^* и D_O^* — соответственно коэффициенты диффузии топлива и окислителя. Для простоты рассмотрения число Прандтля Pr и числа Шмидта Sc_F и Sc_O приняты за константы.

Начальные условия заданы как

$$\rho(x_1,x_2,0) = 1, \tag{4.39}$$

$$u_1(x_1,x_2,0) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\Lambda_i}{\sigma_i^2}(x_2 - x_{2,i}) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{1,i})^2 + (x_2 - x_{2,i})^2}{\sigma_i^2}\right), \tag{4.40}$$

$$u_2(x_1,x_2,0) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\Lambda_i}{\sigma_i^2}(x_1 - x_{1,i}) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{1,i})^2 + (x_2 - x_{2,i})^2}{\sigma_i^2}\right), \tag{4.41}$$

$$T(x_1,x_2,0) = \frac{1}{\gamma - 1}, \tag{4.42}$$

$$Y_F(x_1,x_2,0) = Y_{F,\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x_1}{\Delta}\right)\right), \tag{4.43}$$

$$Y_O(x_1,x_2,0) = Y_{O,\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x_1}{\Delta}\right)\right), \tag{4.44}$$

где Λ_i $(i = 1{,}2)$ — интенсивности вихрей, $(x_{1,i}, x_{2,i})$ $(i = 1{,}2)$ — координаты начального расположения вихрей, а функция ошибки определена как $\mathrm{erf}(x) = 2\pi^{-1/2}\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$. Вычислительная область выбрана как $[-L_{x_1}, L_{x_1}] \times [-L_{x_2}, L_{x_2}]$ с $x_1 = 0$ расположением пламени в начальный момент времени. В качестве граничных условий используются неотражающие характеристические граничные условия Пуансо и Леле [192] в направлении x_1 и периодические граничные условия в направлении x_2.

Численное решение задачи получено для следующих параметров:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re} = 10^3, \quad Pr = 1, \quad Sc_F = Sc_O = 1, \quad \gamma = 1.4,\\
&\alpha = 0.6, \quad \beta = 4, \quad \Xi = 10^3, \quad \Phi = 1, \quad Y_{F,\infty} = Y_{O,\infty} = 1,\\
&L_{x_1} = 4, \quad L_{x_2} = 1, \quad \Delta = 5 \times 10^{-2}, \quad \Lambda_1 = -\Lambda_2 = 5 \times 10^{-2}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.15,\\
&(x_{1,1},x_{2,1}) = (-0.25,0.2), \quad (x_{1,2},x_{2,2}) = (-0.25,-0.2).
\end{aligned}$$

Модельная задача взаимодействия диффузионного пламени с вихревой парой включает в себя шесть неизвестных, систему из шести дифференциальных уравнений (4.24)–(4.28) и уравнение состояния (4.29). Отметим, что в данной задаче, помимо адаптации на консервативные переменные, необходимо также адаптировать сетку на скорость химической реакции. Таким образом, адаптация вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ основана на анализе вейвлетных коэффициентов шести интегрируемых переменных и источникового члена $\dot{w}_e$, определённого уравнением (4.33). Как описано в разделе 1.5, адаптивная сетка $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ построена как

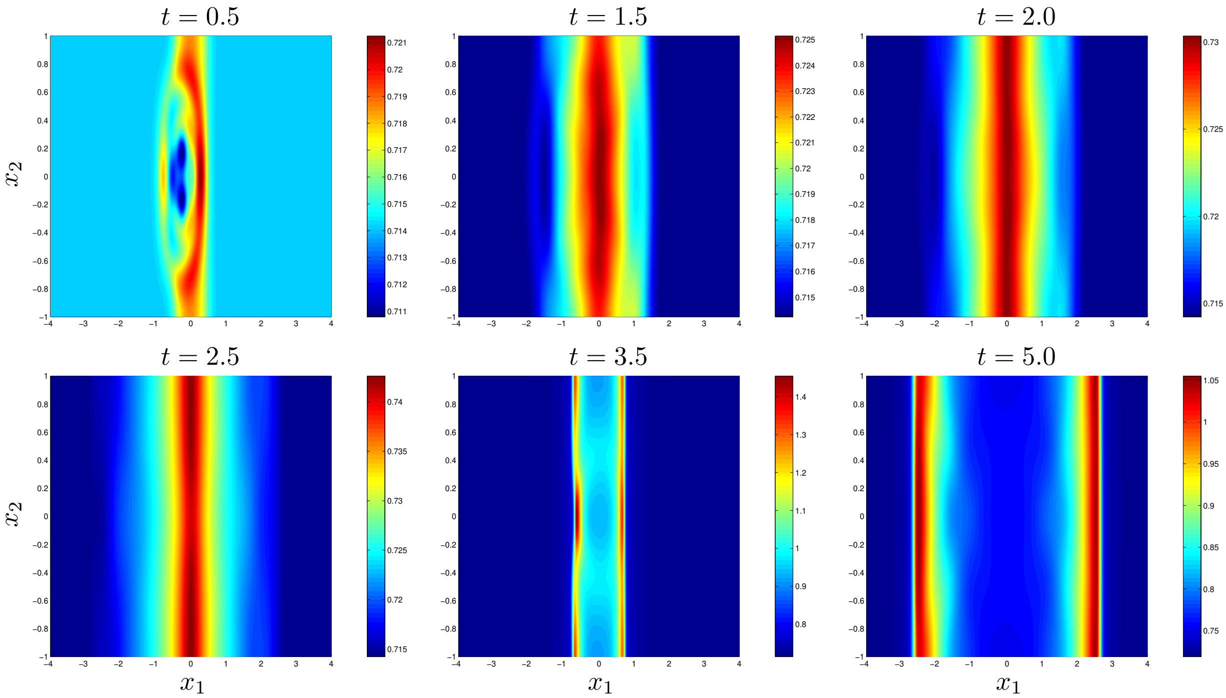


Рисунок 4.5 — Эволюция давления в задаче взаимодействия диффузионного пламени с вихревой парой ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 4$).

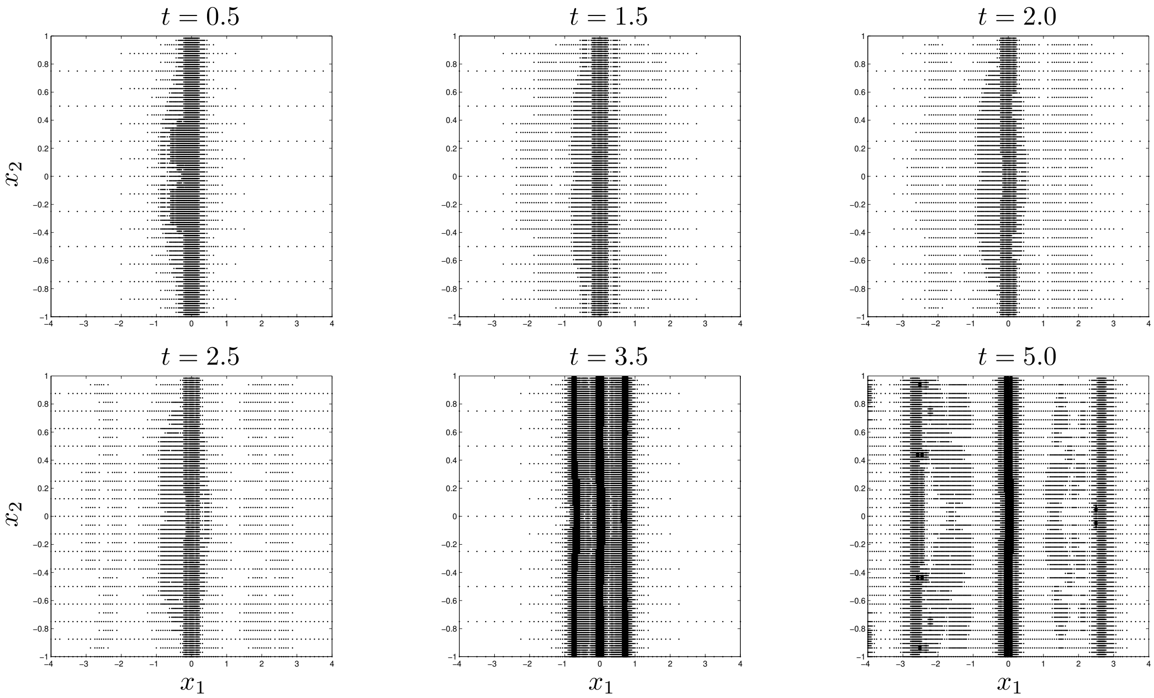


Рисунок 4.6 — Эволюция адаптивной вычислительной сетки $\mathcal{G}^t_{\geqslant}$ в задаче взаимодействия диффузионного пламени с вихревой парой ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 4$).

объединение адаптивных сеток для каждой из консервативных переменных и источникового члена химической реакции.

Эволюция давления, связанного с процессами самовоспламенения, приведена на рис. 4.5. Из рисунка видно, что, начиная с момента времени $t = 1.50$, гидродинамическое давление, индуцируемое вихревой парой, наблюдаемое в момент времени $t = 0.5$, полностью подавляется термодинамическим давлением, вызванным процессом самовоспламенения. Резкое возрастание давления приводит к формированию двух ударных волн, представляющих собой слабые волны детонации, которые инициализируются в околостехиометрическом газе и быстро выгорают до экстремумов возгорания по обе стороны диффузионного пламени с прогрессивным уменьшением энергии, выделяемой химической реакцией распространяющегося пламени и уменьшением интенсивности ударной волны.

Отметим, что разрешение больших градиентов в области ударной волны требует высокого сеточного разрешения, наблюдаемого на рис. 4.6, где продемонстрированы адаптивные сетки в моменты времени, соответствующие решениям, приведённым на рис. 4.5. Из рисунка также видна адаптация сетки в области химической реакции диффузионного пламени.

На рисунках 4.7 и 4.8 показаны поля скорости реакции и температуры в увеличенной области самовоспламенения. Следует обратить внимание на максимальные значения химической реакции во время самовоспламенения, которые на порядок выше значений химической реакции до и после самовоспламенения. Эффект влияния вихревой пары на слой смешения очевиден — приближение пары вихрей к зоне смешения топлива и окислителя порождает неравномерное напряжение в зоне смешения, что, в свою очередь, приводит к неравномерной химической реакции в зоне смешения. В частности, взаимодействие вихревых структур с диффузионным пламенем приводит к появлению двух горячих пятен, приводящих в конечном счёте к самовоспламенению. Так как скорость химической реакции возрастает с увеличением температуры, пламя воспламеняется локально в горячих пятнах. Этот процесс аналогичен процессу, описанному в работе [167] в двумерном численном моделировании турбулентного самовоспламенения. Отметим, что в результате воспламенения появляются две структуры тройного пламени, похожие по характеристикам на структуры, описанные в работе [207], которые быстро распространяются навстречу друг другу до момента встречи $t \approx 3.14$, после чего структура тройного пламени формирует

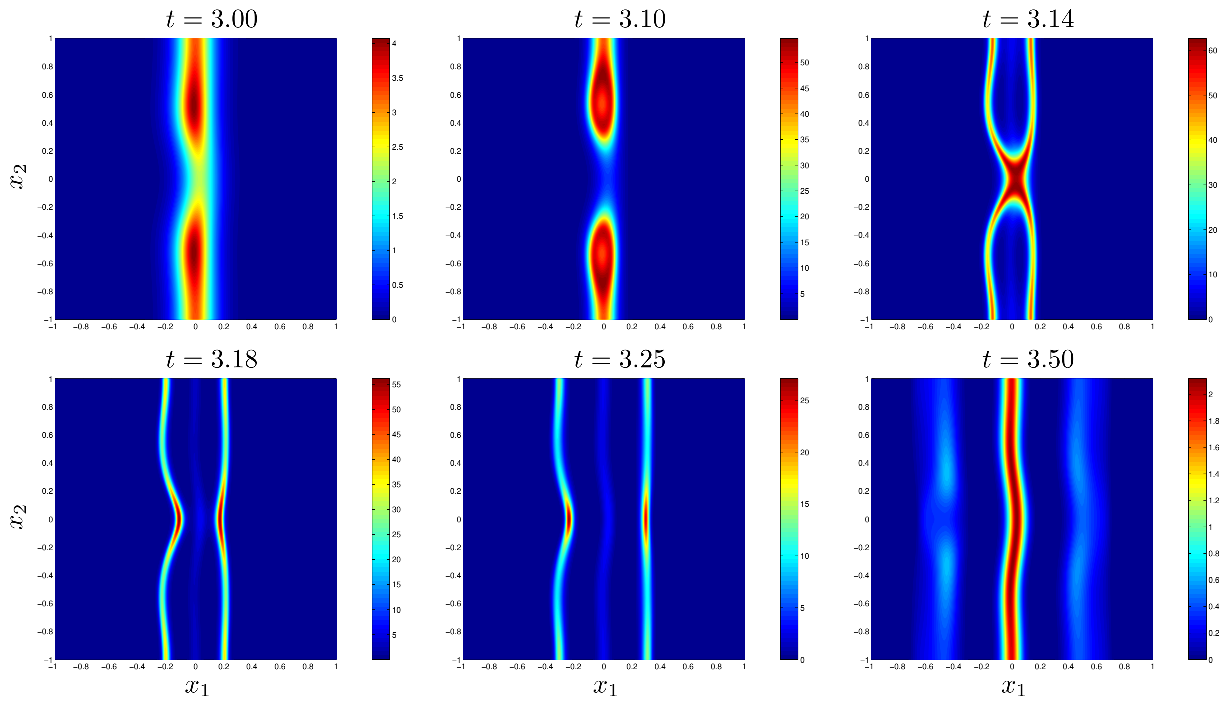


Рисунок 4.7 — Химическая реакция $\dot{w}_e$ в увеличенной области воспламенения в разные моменты времени.

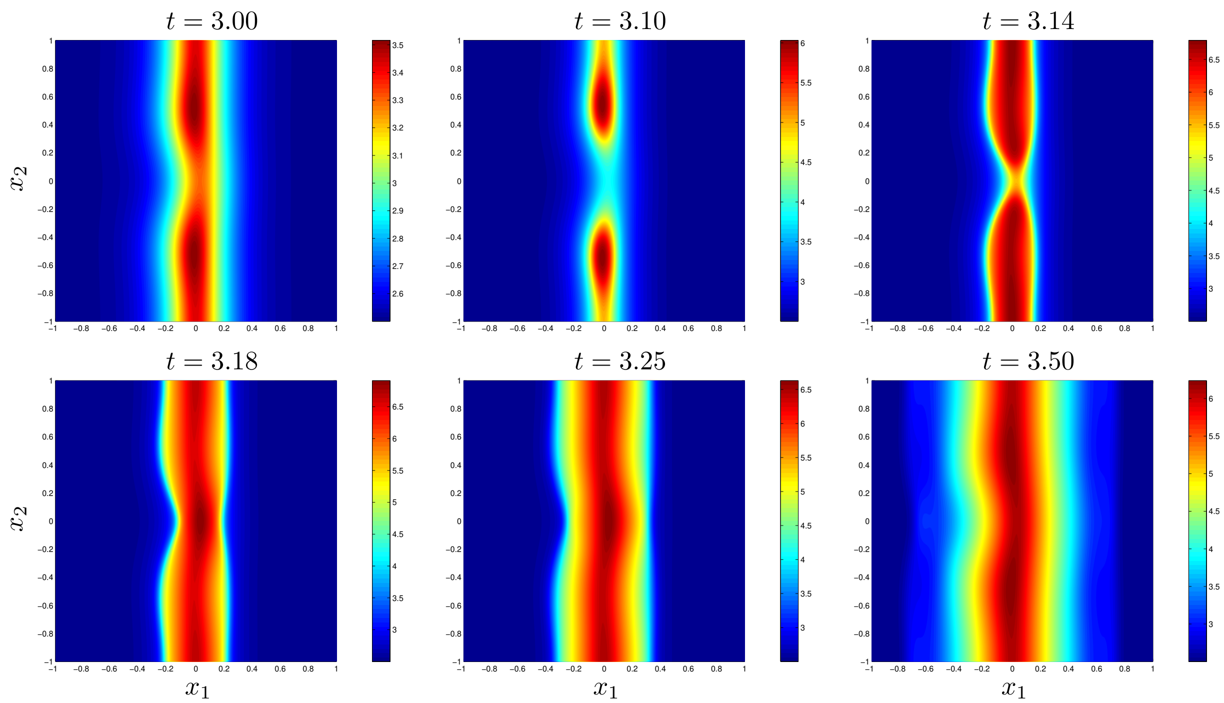


Рисунок 4.8 — Температура в увеличенной области воспламенения в разные моменты времени.

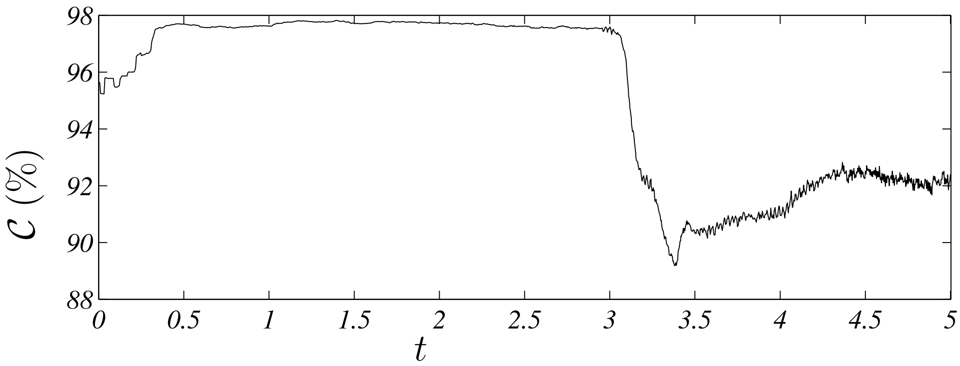


Рисунок 4.9 — Эволюция коэффициента сжатия $\mathcal{C}$ адаптивной сетки в задаче взаимодействия диффузионного пламени с вихревой парой ($\varepsilon = 10^{-3}$, $p = \widetilde{p} = 4$).

диффузионное пламя и две частично смешанные детонационные волны, распространяющиеся по направлению друг от друга.

Эффективность сеточной адаптации продемонстрирована на рис. 4.9, где показана эволюция коэффициента сжатия. Все вышеупомянутые результаты получены с использованием AWCM с восемью уровнями и эффективным разрешением 1025×256. Из рисунка видно уменьшение сжатия в момент времени $t \approx 3$, вызванное появлением структур тройного пламени.

4.3 Течения невязкого сжимаемого газа

4.3.1 Инертные течения невязкого сжимаемого газа: неустойчивость Рихтмайера—Мешкова

Способность AWCM моделировать невязкие многокомпонентные течения сжимаемого газа проиллюстрирована на примере двумерной задачи неустойчивости Рихтмайера—Мешкова при числе Атвуда $\mathrm{A} = 0.67$, при котором, как было показано в работе [1], формируются вихревые структуры грибовидной формы. Результаты, обсуждаемые в этом подразделе, основаны на материалах статьи автора [323]. Численные результаты получены в вычислительной области $\Omega_{\mathrm{s}} = [0,4] \times [-1,1]$ для ударной волны, двигающейся с числом Маха $\mathrm{Ma} = 1.5$ и

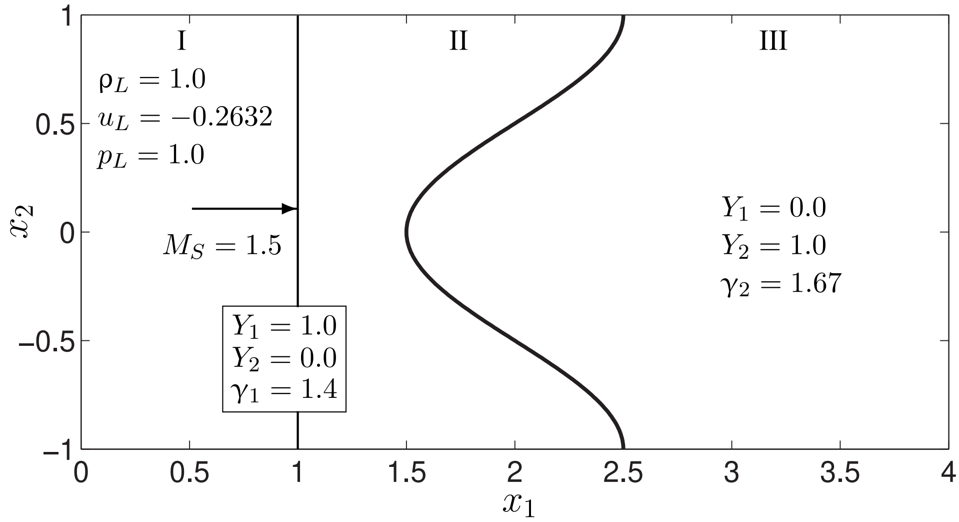


Рисунок 4.10 — Начальные условия для задачи неустойчивости Рихтмайера—Мешкова. Область I — газ за ударной волной, двигающейся с числом Маха $\mathrm{Ma} = 1.5$. Область II — газ между набегающей ударной волной и синусоидальной границей раздела с областью III. Число Атвуда на границе раздела: $\mathrm{A} = 0.67$.

набегающей на синусоидальную область разделения двух газов с различными показателями адиабаты $\gamma_1 = 1.4$ и $\gamma_2 = 1.67$ с начальными условиями, показанными на рис. 4.10. Отметим, что параметры задачи аналогичны случаю, рассмотренному в работе [6]. Следует обратить внимание, что задача решена в подвижной системе отсчета так, чтобы неустойчивость формировалась в центре вычислительной области. Давление, плотность и скорость течения заданы в области I, а все другие величины вычислены для движущейся ударной волны с заданным числом Маха, предполагая термодинамическое равновесие границы раздела газов в областях II и III. В начальный момент времени массовые доли компонент в областях I и II составляют $Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$, а в области III — $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$. Граница раздела областей II и III задана как $x_{1\text{int}} = 2 - 0.5\cos(\pi x_2)$, а начальное расположение ударной волны соответствует $x_1 = 1$. В качестве граничных условий используются неотражающие характеристические граничные условия Пуансо и Леле [192] в направлении координаты x_1 и периодические граничные условия в направлении координаты x_2. Подчеркнём, что на неотражающих границах для корректности характеристических граничных условий нормальная компонента искусственной вязкости обнулена. Тангенциальные компоненты искусственной вязкости не изменены, что согласуется с вязким расширением характеристических неотражающих граничных условий [192].

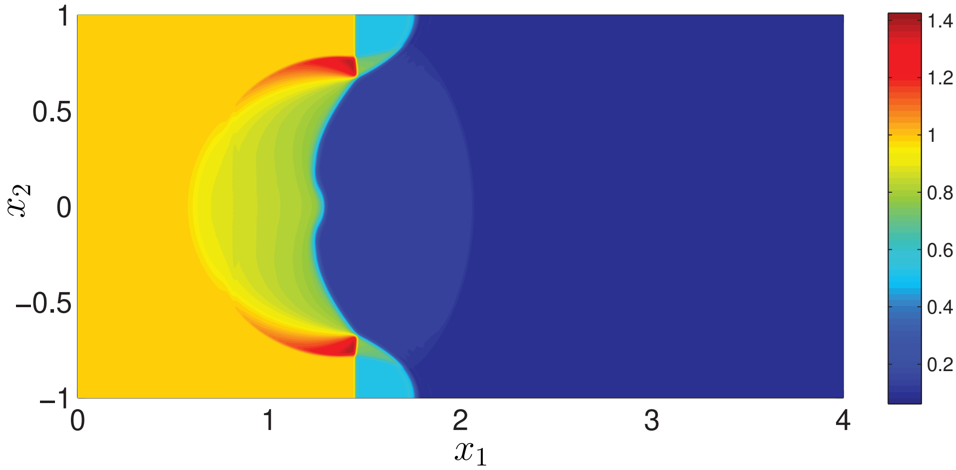


Рисунок 4.11 — Взаимодействие ударной волны с границей раздела газов: распределение плотности в момент времени $t = 0.75$.

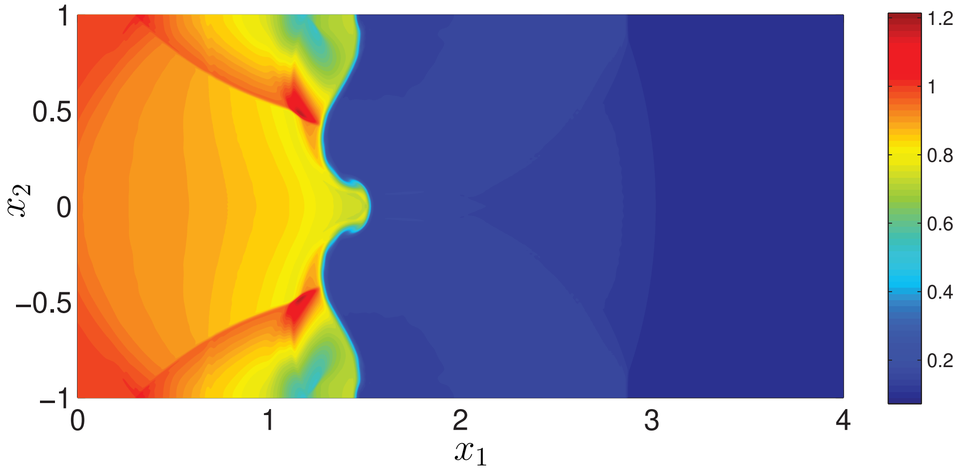


Рисунок 4.12 — Взаимодействие ударной волны с границей раздела газов: распределение плотности в момент времени $t = 1.25$.

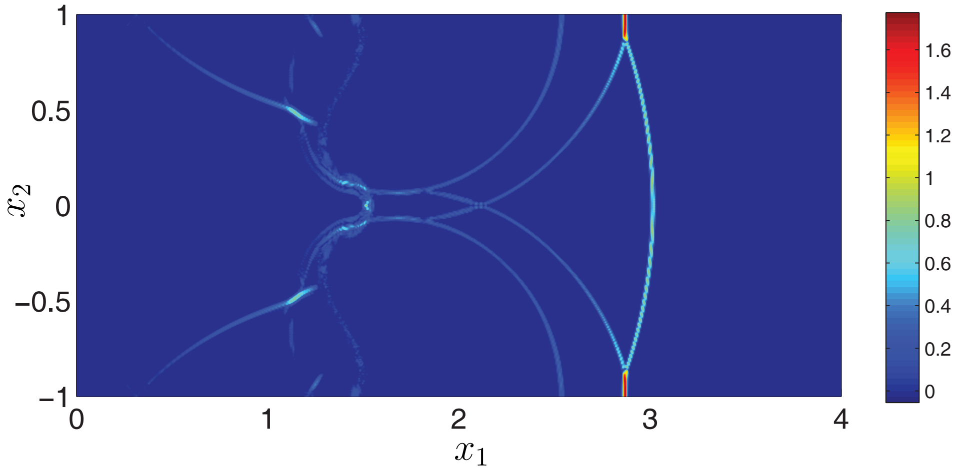


Рисунок 4.13 — Взаимодействие ударной волны с границей раздела газов: маркировочная функция ΦC в момент времени $t = 1.25$.

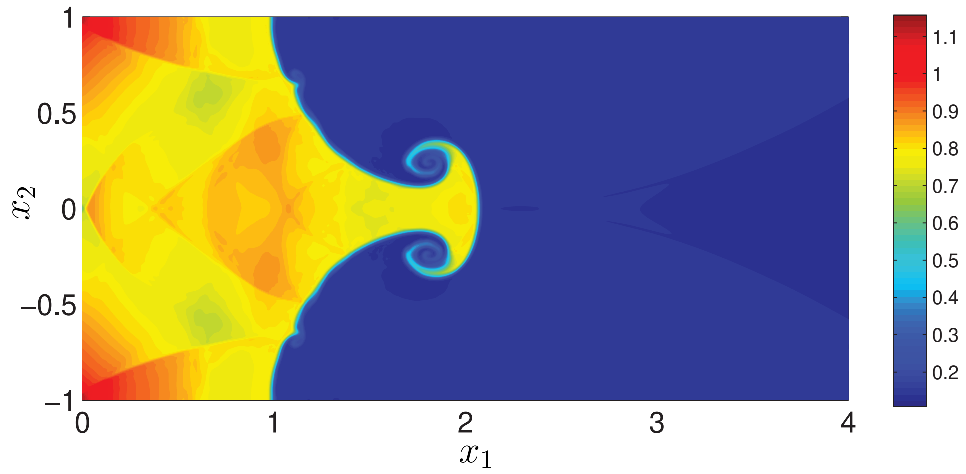


Рисунок 4.14 — Взаимодействие ударной волны с границей раздела газов: распределение плотности в момент времени $t = 2.65$.

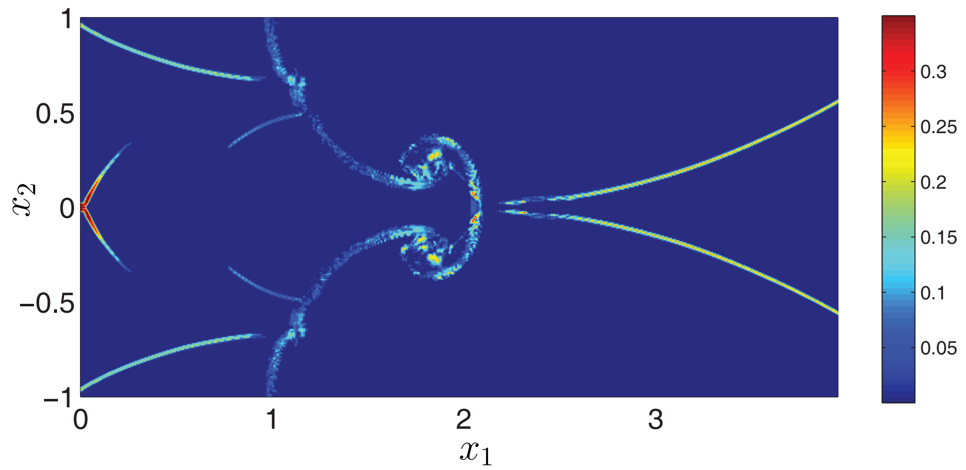


Рисунок 4.15 — Взаимодействие ударной волны с границей раздела газов: маркировочная функция ΦC в момент времени $t = 2.65$.

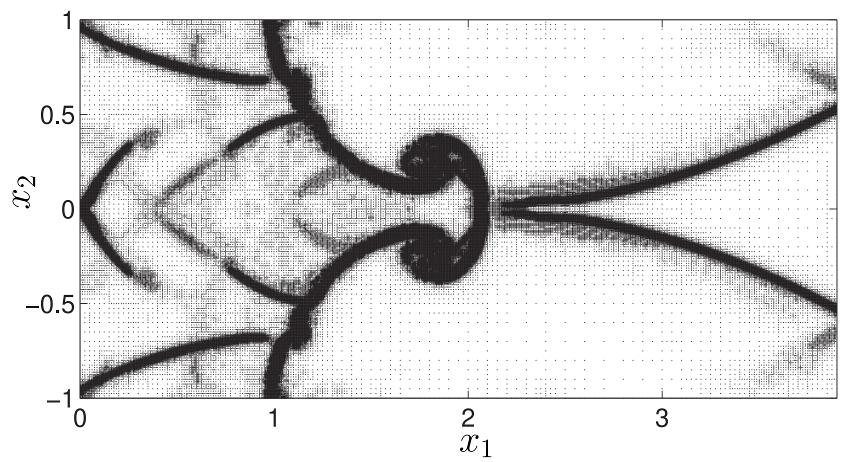


Рисунок 4.16 — Взаимодействие ударной волны с границей раздела газов: адаптивная вычислительная сетка в момент времени $t = 2.65$.

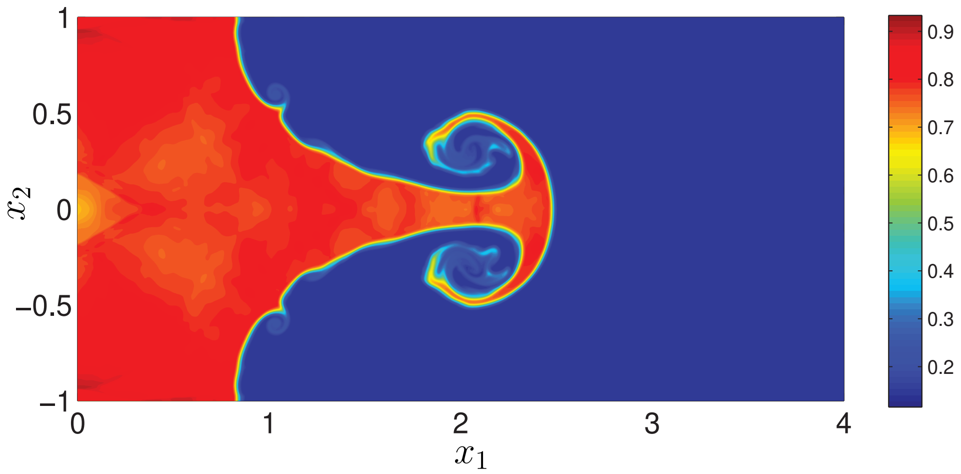


Рисунок 4.17 — Иллюстрация эффекта сглаживания мелкомасштабных вихревых структур в результате действия искусственной вязкости.

В случае двухкомпонентных течений уравнение неразрывности (4.9) заменено на два уравнения сохранения массы (4.12) для каждой из компонент. Численное решение системы уравнений (4.9)–(4.13) для инертного невязкого течения двухкомпонентной смеси газов получено с применением AWCM для гиперболических уравнений, описанного в разделе 1.6 при максимальном уровне разрешения $j_{\max} = 7$ и эффективном разрешении 1280×640. Обратим внимание на наличие начального переходного решения, связанного с использованием аналитических разрывных начальных условий. Решение для плотности в момент времени $t = 0.75$, соответствующий времени проникновения ударной волны во второй газ, показано на рис. 4.11. В областях взаимодействия ударной волны с границей раздела двух газов наблюдается двойное отражение-разрежение, характерное для задачи взаимодействия ударной волны с пузырём другого газа [12; 127]. На рисунке видна ударная волна, проникшая во второй газ, граничная ударная волна, соединяющая область ударной волны в первом газе с областью волны разрежения во втором. Отметим отсутствие осцилляций на границе раздела и в области ударной волны.

В результате взаимодействия с границей раздела газов ударная волна начинает распространяться также в направлении x_2-координаты, отражаясь от верхней и нижней границ. На рисунках 4.12 и 4.13 приведены распределения плотности и маркировочной функции $|\Phi C|$ в момент времени $t = 1.25$. Из рисунков видно наличие локализованной искусственной вязкости в областях ударной волны и границы раздела газов. На рис. 4.14 приведено распределение плотности смеси газов в момент времени $t = 2.65$, принимающее грибовидную форму, характерную для неустойчивости Рихтмайера—Мешкова и связанную с формированием вихревых структур. Следует отметить, что структура неустойчивости схожа с решением, опубликованном в работе [1], несмотря на отличие начальных условий. Маркировочная функция и адаптивная сетка в момент времени $t = 2.65$ приведены на рисунках 4.15 и 4.16. Обратим внимание на увеличение значений функции $|\Phi C|$ в области вихревых структур, что является индикатором достижения максимально допустимого разрешения. Дальнейшее развитие неустойчивости приводит к формированию вторичных вихревых структур на границе раздела [185], которые, как видно из рис. 4.17, сглаживаются под действием искусственной вязкости при достижении максимально допустимого разрешения.

4.3.2 Химически реагирующие течения невязкого сжимаемого газа: задача инициирования детонации

Способность адаптивного вейвлетного коллокационного метода моделировать сложные многокомпонентные течения с химическими реакциями проиллюстрирована на примере решения уравнений Эйлера для задачи инициирования детонации. Результаты, обсуждаемые в этом подразделе, основаны на материалах статей автора [325; 326]. Процессы формирования детонации обычно классифицируются либо как прямое инициирование, либо как переход от дефлаграции к детонации. Прямое инициирование [79] обычно связано с добавлением большего количества энергии в короткий период времени, приводящее к существенному термомеханическому воздействию на газ и формированию взрывной волны в реагирующей смеси. Процесс перехода от дефлаграции к детонации начинается с воспламенения газа с использованием сравнительно небольшого количества энергии, приводящего к ламинарному пламени. Разные механизмы неустойчивости фронта пламени [180; 182; 206] могут инициировать турбулентное горение, увеличение энергии, выделяемой химической реакцией, и термомеханическое формирование волн сжатия, которые, в свою очередь, распространяются впереди области горения и подогревают реагирующую смесь, увеличивая интенсивность химической реакции до формирования детонационной волны, характеризующейся слиянием ударной волны и области химической реакции.

Детонация может быть инициирована локализованным добавлением энергии в реагирующую смесь на масштабе времени, сравнимом с акустическим масштабом времени подогреваемого объёма газа. Первоначально реагирующая смесь находится в покое. Локализованное добавление энергии приводит к формированию ударных волн. Энергия может быть добавлена в реагирующую смесь либо через поверхностные локализованные источники тепла [49; 50], либо напрямую в малый объём [128; 220], например, с помощью лазера. Как правило, для численного моделирования процесса перехода от дефлаграции к детонации используют уравнения Навье—Стокса [100; 122; 134; 139; 140; 181; 182]. При изучении влияния вязкости и диффузионных механизмов на эволюцию детонационной волны [100; 169; 193; 197; 198; 203] были обнаружены различия в мелкомасштабных структурах решения уравнений Эйлера по сравнению с решением уравнений Навье—Стокса. Однако в работах [128; 324—326; 220] была продемонстрирована возможность инициирования детонационной волны с физически реализуемыми свойствами, используя уравнения Эйлера. Следует отметить присутствие в многомерном случае различных видов неустойчивости в процессе формирования волны детонации. Так, неустойчивость Рихтмайера—Мешкова является основным механизмом генерации турбулентности при переходе из дефлаграционного в детонационный режим [100; 182]. Вторичные локальные структуры, связанные с неустойчивостью Кельвина—Гельмгольца, также наблюдаются при переходе от дефлаграции к детонации, при этом неустойчивость часто подавляется диффузионными механизмами [182]. При численном моделировании газодинамического инициирования детонации, помимо разрешения структур решения, связанных с неустойчивостями Рихтмайера—Мешкова и Кельвина—Гельмгольца, необходимо локализовать искусственную вязкость, чтобы минимизировать диффузию тепла в локализованных областях непрореагировавшей смеси и правильно смоделировать время самовоспламенения.

Для демонстрации доминирования газодинамических механизмов над вязкодиффузионными и количественного подтверждения возможности использования уравнений Эйлера для описания прямой инициации детонации система уравнений (4.9)–(4.13) в невязком пределе решена численно, используя AWCM для гиперболических задач, последовательно увеличивая сеточное разрешение до тех пор, пока время формирования волны детонации и полная энергия, выделенная в результате химической реакции, больше не зависят от локальных вторичных структур решения. Для полного подтверждения тепломеханической природы механизма прямого инициирования детонации проведено сравнение решений уравнений Эйлера и Навье—Стокса при достаточно больших числах Рейнольдса.

Формулировка задачи

Математическая модель термомеханического отклика сжимаемой реагирующей смеси газов под первоначальным воздействием локализованного внешнего источника энергии и последующим выделением энергии в результате одношаговой химической реакции типа Аррениуса описывается системой уравнений (4.9)–(4.13), принимающих следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re_a}}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho e + p\right) u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\mathrm{Re_a}}\frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{Re_a Pr}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \dot{w}_\mathrm{m} Q_\mathrm{m} + \dot{Q}(\mathbf{x},t), \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial \rho Y_\mathrm{m}}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_\mathrm{m} u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\mathrm{Re_a}Sc}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\mu \frac{\partial Y_\mathrm{m}}{\partial x_j}\right) - \dot{w}_\mathrm{m}, \tag{4.48}$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma}, \tag{4.49}$$

где Y_m — массовые доли смеси, $\dot{Q}(\mathbf{x},t)$ — безразмерный внешний объёмный локализованный источник тепла,

$$e = \frac{1}{2}u_i u_i + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \tag{4.50}$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right). \tag{4.51}$$

Безразмерная скорость химической реакции задана уравнением Аррениуса

$$\dot{w}_\mathrm{m} = B\rho Y_\mathrm{m} e^{-E/T}, \tag{4.52}$$

где B и E — безразмерные предэкспоненциальный коэффициент и энергия активации. Безразмерные термодинамические переменные определены как

$$(\rho, P, T) = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \frac{p^*}{\gamma p_0^*}, \frac{T^*}{T_0^*}\right), \tag{4.53}$$

где надстрочный индекс $(\cdot)^*$ используется для обозначения размерных переменных, а (ρ_0^*, p_0^*, T_0^*) — характерные (базовые) значения плотности, давления и температуры. Безразмерная скорость определяется как

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{c_0^*}, \tag{4.54}$$

где c_0^* — скорость звука в базовом состоянии. Безразмерные пространственные и временная координаты соответственно определены как

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{l^*}, \qquad t = \frac{t^*}{t_a^*}, \tag{4.55}$$

где l^* — размер характерного объёма внешнего источника энергии $\dot{Q} = \dot{Q}^*/c^{*2}_0$, нормированного на квадрат скорости звука в базовом состоянии, при этом предполагается, что внешний источник имеет характерный масштаб времени добавления энергии t_e^*. Акустический масштаб времени, определённый как $t_a^* = \frac{l^*}{c_0^*}$, представляет собой характерное время распространения акустических возмущений на длину характерного объёма внешнего источника. Соотношение временных масштабов t_e^* и t_a^* является определяющим фактором термодинамического отклика реагирующей смеси газов на внешний источник энергии. Показатель адиабаты γ определяется отношением удельных теплоёмкостей $\gamma = c_p/c_v$, безразмерный предэкспоненциальный коэффициент $B = B^* t_a^*$ обезразмерен на акустический масштаб времени, а безразмерная энергия активации определена как $E = E^*/R^* T_0^*$. Критическими параметрами задачи (4.45)–(4.48) являются акустическое число Рейнольдса $\mathrm{Re_a}$ (обратная величина числа Кнудсена), числа Прандтля Pr и Шмидта Sc, определённые по аналогии с (4.38).

При достаточно большом значении акустического числа Рейнольдса при воздействии внешнего локального источника энергии влиянием вязких и диффузионных членов в системе уравнений (4.46)–(4.48) можно пренебречь и использовать уравнения Эйлера для смеси реагирующих газов, эквивалентные уравнениям (4.45)–(4.48) с нулевой вязкостью $\mu = 0$.

Задача решена для следующих начальных условий:

$$\rho|_{t=0} = p|_{t=0} = Y_1|_{t=0} = 1, \ \mathbf{v}|_{t=0} = 0, \tag{4.56}$$

соответствующих реагирующей смеси газов в состоянии покоя. Локализованный внешний источник тепла $\dot{Q}(\mathbf{x},t)$ задан как

$$\dot{Q}(\mathbf{x},t) = 8.4\Big(\tanh\Big[10\,(t - t_A)\Big] - \tanh\Big[10\,(t - t_B)\Big]\Big) g(\mathbf{x}), \tag{4.57}$$

где область воздействия источника тепла

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\mathbf{x}| \leqslant R, \\ 0 & \text{for } |\mathbf{x}| > R \end{cases} \tag{4.58}$$

ограничена окружностью радиуса $R = 2$ с центром в начале координат. Внешний источник энергии активен в промежутке времени между $t_A = 0.5$ и $t_B = 5.25$. Из определения (4.57) видно, что энергия добавляется в реагирующую смесь за промежуток времени, сравнимый с характерным акустическим временем, что соответствует режиму добавления энергии практически при фиксированном объёме с возрастающими во времени давлением и температурой [129; 130]. Задача решена в области $\Omega_\mathrm{s} = [-3{,}57] \times [-3{,}9]$ с условиями отражения и проскальзывания на всех границах, кроме открытой границы при $x_1 = 57$. Задача решена для разных разрешений с максимальным уровнем разрешения $5 \leqslant j_{\max} \leqslant 9$ и базовым разрешением на самом низком уровне 30×6, что соответствует максимальному эффективному разрешению $15\,360 \times 3\,072$ в случае $j_{\max} = 9$.

Общая картина поведения

Подробное обсуждение различных физических механизмов, наблюдаемых при прямом инициировании детонации, может быть найдено в статье автора [326]. В данном подразделе описание ограничено обсуждением результатов применения AWCM для гиперболических задач для численного моделирования задачи прямой инициации детонации. Последовательность полей температуры для разных моментов времени $2 \leqslant t \leqslant 24$ и разных максимальных уровней разрешения $j_{\max} = 7$, 8, и 9 приведены на рис. 4.18. Отметим, что для обсуждения физических процессов будут использоваться только результаты вычислений с максимальным уровнем разрешения $j_{\max} = 9$. Влияние разрешения будет рассмотрено в следующем подразделе.

Как уже обсуждалось в предыдущем подразделе, внешний локализованный источник тепла, нагревающий реагирующую смесь на масштабе времени, сравнимом с характерным акустическим временем области нагрева, приводит к быстрому возрастанию давления и температуры, что, в свою очередь, приводит к возникновению волн сжатия, распространяющихся в соседние области газа [129].

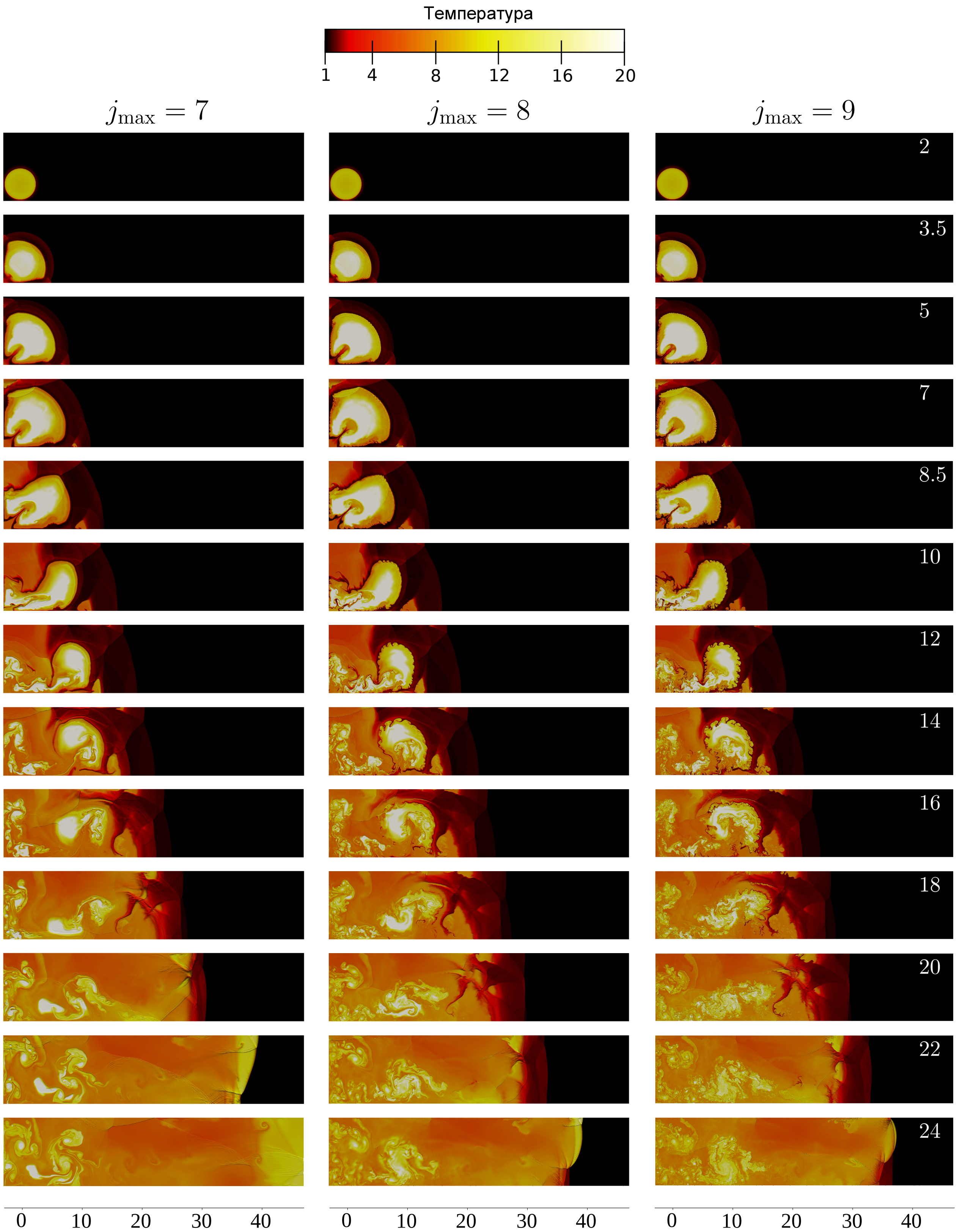


Рисунок 4.18 — Последовательность полей температуры для $j_{\max} = [7,8,9]$ в моменты времени $2 \leqslant t \leqslant 24$, демонстрирующая процесс формирования волны детонации и доминирование газодинамических процессов над эффектом вторичных мелкомасштабных структур.

В первом кадре последовательности решений, приведённых на рис. 4.18, соответствующему моменту времени $t = 2$, волна сжатия поддерживается непрерывным подогревом локализованной области внешним источником тепла до момента времени $t = 5.25$ и теплом, выделяемым в результате химической реакции смеси. Граница раздела прореагировавшей и непрореагировавшей смеси газов, определённая уровнем $Y = 0.5$, практически не отличается от расположения фронта волны сжатия. Для более поздних кадров, соответствующих $t \geqslant 4$, волна сжатия формирует ударную волну, распространяющуюся в реагирующую смесь газов и опережающую фронт горения. Отметим, что расположение ударной волны может быть определено по скачкообразному возрастанию температуры до уровня 2-4, визуализированного на рис. 4.18 как переход от черного к темно-красному цвету. Температура продуктов сгорания изменяется в диапазоне от 8 до 12, соответствующего переходу от оранжевого к желтому цвету в зависимости от скорости химической реакции и расширения газа, приводящего к уменьшению температуры. Следует также обратить внимание, что температура смеси газов в области первоначального нагревания локализованным источником тепла достигает 20, что соответствует белому цвету, а область химической реакции смеси характеризуется переходом от темно-красного к оранжевому цвету.

В некий момент времени вскоре после $t = 2$ после отражения волны сжатия от левой и нижней границ формируются ударные волны. Отметим, что из-за применения локализованной искусственной вязкости в AWCM для гиперболических задач, описанном в разделе 1.6, области, соответствующие разрывным решениям, размазываются на несколько ячеек сетки максимального разрешения. Ударные волны, как первоначально сформированные, так и отраженные, распространяются в направлениях возрастания координат x_1 и x_2. Отметим присутствие неустойчивости Рихтмайера—Мешкова, возникающей при взаимодействии ударных волн с границей раздела прореагировавшей и непрореагировавшей смеси, явно видной на кадрах, соответствующих моментам времени $3.5 \leqslant t \leqslant 8.5$.

В кадре, соответствующем моменту времени $t = 5$, видны ударные волны, отраженные от левой и нижней стенок, а также косые скачки уплотнения вдоль левой и нижней границ. Отражение ударной волны от верхней границы приводит к возникновению горячей локализованной области в верхнем левом углу канала и частичному инерциальному сжатию с возросшим давлением и температурой, вызванным ускорением химической реакции.

Как видно из рис. 4.18 в момент времени $t = 7$ отраженная волна заново проникает в область прореагировавших газов и порождает дополнительное сжатие с продольной составляющей, что приводит к возникновению поперечных волн сжатия. Взаимодействие поперечных волн сжатия с непрореагировавшей смесью газов приводит к воспламенению и порождению новых продольных и поперечных волн, которые, в свою очередь, отражаются от верхней и нижних границ. Следует отметить также присутствие структур неустойчивости Кельвина—Гельмгольца на границах раздела прореагировавшей и непрореагировавшей смеси газов, хорошо видных на кадрах, соответствующих моментам времени $t = [10, 12, 14]$. Обратим внимание на присутствие детально разрешенной границы, демонстрирующей локализованный характер искусственной вязкости AWCM, не размывающей границы.

Примерно в момент времени $t = 20$ период индукции $(2.5 \leqslant t \leqslant 15)$ переходит в режим более быстрого выделения тепла, наблюдаемого на кадрах, соответствующих промежутку времени между $t = 14$ и $t = 24$. Последствия ускоренного тепловыделения можно наблюдать в последовательности температурных контуров, начинающихся примерно при $t = 14$ и заканчивающихся при $t = 24$ с образованием пересжатой детонационной волны на переднем фронте ударной волны.

Зависимость решения от сеточного разрешения

Чисто газодинамический механизм инициации детонации может быть продемонстрирован путем увеличения уровня разрешения до тех пор, пока время формирования волны детонации и общая выделенная энергия перестанут зависеть от сеточного разрешения. При решении уравнений Эйлера в связи с отсутствием диффузионных механизмов, ограничивающих минимальный масштаб локальных вторичных структур течения, увеличение сеточного разрешения приводит к неограниченному росту мелкомасштабных структур. Однако так как скорость химической реакции определяет характерный масштаб времени, зависимость от времени суммарной энергии, выделенной в результате химической реакции, может служить индикатором сходимости и разрешения всех газодинамических структур решения.

Сравнение мелкомасштабных и крупномасштабных структур решения

При сравнении решений на разных уровнях разрешения ($j_{\max} = 7, 8, 9$), приведённых на рис. 4.18, видно, что масштаб мелкомасштабных структур уменьшается с увеличением сеточного разрешения, при этом крупномасштабные газодинамические структуры качественно не меняются. Более того, в поздней стадии инициации детонации мелкомасштабные структуры прореагировавшей смеси газов, наблюдаемые в пристеночной прореагировавшей области около $x_1 = -3$, не могут добавить к суммарному тепловыделению.

При сравнении решений в начальной стадии эволюции в интервале $0 < t < 10$ крупномасштабные газодинамические структуры, такие как фронт ведущей ударной волны и граница раздела прореагировавшей смеси газов, практически не отличаются друг от друга, а основные отличия между тремя решениями наблюдаются в мелкомасштабных вторичных структурах. В поздней стадии развития при $t > 10$ решение с низким разрешением, соответствующее $j_{\max} = 7$, продвигается более быстро по сравнению с решением на более высоком уровне разрешения, что говорит о том, что диффузия, вызванная искусственной вязкостью, ускоряет химическую реакцию и приводит к более быстрой инициации волны детонации. Следует отметить отсутствие отличия в крупномасштабных газодинамических структурах решений между случаями $j_{\max} = 8$ и $j_{\max} = 9$, вплоть до момента инициирования детонации $t \approx 22$, при этом основные отличия наблюдаются в мелкомасштабных вторичных структурах решения, напрямую зависящих от сеточного разрешения.

Глобальная сходимость невязкого решения

Для демонстрации доминирующей роли газодинамических механизмов в процессе прямой инициации детонации рассмотрим зависимость глобальных, пространственно проинтегрированных величин, таких как суммарное тепловыделение, определённое как

$$\dot{Q}_{\text{ch}}(t) = \int_{\Omega} \dot{w}_{\text{m}}(\mathbf{x},t) Q_{\text{m}} d\mathbf{x}. \tag{4.59}$$

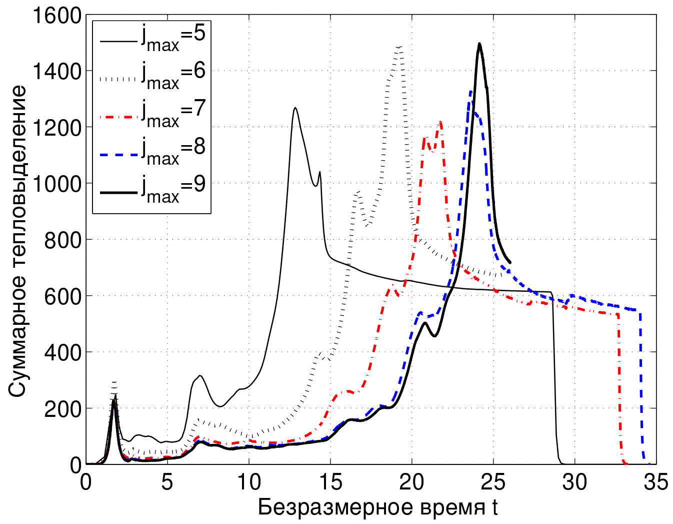


Рисунок 4.19 — Зависимость во времени суммарного тепловыделения для пяти разных уровней максимального разрешения: $j_{\max} = [5, \ldots ,9]$.

Обратим внимание, что эволюция во времени суммарного тепловыделения, помимо демонстрации глобальной сходимости решения, также иллюстрирует фундаментальные физические процессы, управляющие формированием и развитием волны детонации.

Суммарное тепловыделение для пяти различных сеточных разрешений продемонстрировано на рис. 4.19. Каждая кривая показывает схожие глобальные характеристики, связанные с различными газодинамическими механизмами, такими как первоначальное тепло внешнего источника, микровзрывы в левом нижнем и левом верхнем углах, период быстрого сгорания смеси газов, приводящий к формированию пересжатой детонационной волны. Глобальный максимум тепловыделения показывает очень большое сгорание топлива за очень короткий промежуток времени и определяет время формирования детонации.

Из рисунка 4.19 видно, что зависимость суммарного тепловыделения от времени очень сильно меняется в случае $5 \leqslant j_{\max} \leqslant 7$. Более того, время формирования детонации для случая $j_{\max} = 5$ примерно в два раза короче, чем в случаях с высоким разрешением $j_{\max} = 8$ и 9. Расхождение между кривыми становится менее заметным при увеличении разрешения, что демонстрирует снижение зависимости суммарного тепловыделения от сеточного разрешения, уменьшение искусственной вязкости и достижение сходимости для $j_{\max} \geqslant 8$. Отметим, что глобальная сходимость также предполагает зависимость поля температуры $T(t, \mathbf{x})$ от разрешения, что уже было продемонстрировано на рис. 4.18.

Для демонстрации достаточности использования уравнений Эйлера для численного моделирования прямой инициации детонации исследовались три дополнительных численных решений уравнений Навье—Стокса (4.45)–(4.48) для больших чисел Рейнольдса. Первое соответствует невязкому случаю, описанному выше при максимальном уровне разрешения $j_{\max} = 9$, но получено для постоянных значений молекулярной вязкости ($\mu = 1$), чисел Прандтля ($\mathrm{Pr} = 1$) и Шмидта ($\mathrm{Sc} = 1$) и акустического числа Рейнольдса $\mathrm{Re_a} = \dfrac{\rho_0^* c_0^* H^*}{\mu_0^*} = 60\,000$, где H^* — высота канала. Отметим, что число Рейнольдса выбрано достаточно высоким, чтобы минимизировать вязкую диссипацию и диффузию в областях реакции. Второй рассмотренный случай также соответствует $\mathrm{Re_a} = 60\,000$, но с более высоким сеточным разрешением, соответствующим $j_{\max} = 10$. Третий случай соответствует $\mathrm{Re_a} = 120\,000$ и $j_{\max} = 10$ с эффективным сеточным разрешением $30\,720 \times 6\,144$.

Заметим, что, несмотря на высокое разрешение вышеупомянутых численных решений, минимальный разрешенный масштаб всё равно существенно превышает $O(l^* Kn)$, необходимый для полного разрешения физической толщины сильных ударных волн, присутствующих в решении. В связи с невозможностью разрешения ударных волн для больших чисел Рейнольдса ввиду высокой вычислительной стоимости, в вышеупомянутых вычислениях применялась локализованная искусственная вязкость, описанная в разделе 1.6, сглаживающая сильные ударные волны. Обратим внимание на то, что ненулевая искусственная вязкость присутствует только в непосредственной близости ударных волн и автоматически отключается при удалении от них. Для подтверждения высокой локализации искусственной вязкости на рис. 4.20, в дополнение к полю скорости химической реакции в разные моменты времени для случая $\mathrm{Re_a} = 120\,000$ и $j_{\max} = 10$, показаны контурные линии искусственной вязкости для значений $\nu_n = \mathrm{Re_a^{-1}}$ и $\nu_n = 0.1\mathrm{Re_a^{-1}}$. Как видно из рисунка, только в нескольких областях химической реакции в промежутке времени между $t = 14$ и 16 искусственная вязкость превышает молекулярную вязкость (область обозначена зелёным контуром) в тот момент времени, когда сильная ударная волна проходит через химически реагирующую область. Таким образом, как видно из рисунка, при достаточно высоком сеточном разрешении эффект искусственной вязкости на скорость химической реакции минимален.

На рис. 4.21 приведена последовательность полей температуры для трёх решений уравнений Навье—Стокса. Во всех случаях наблюдаются газодинамическое поведение, аналогичное вышеописанному в случае уравнений Эйлера,

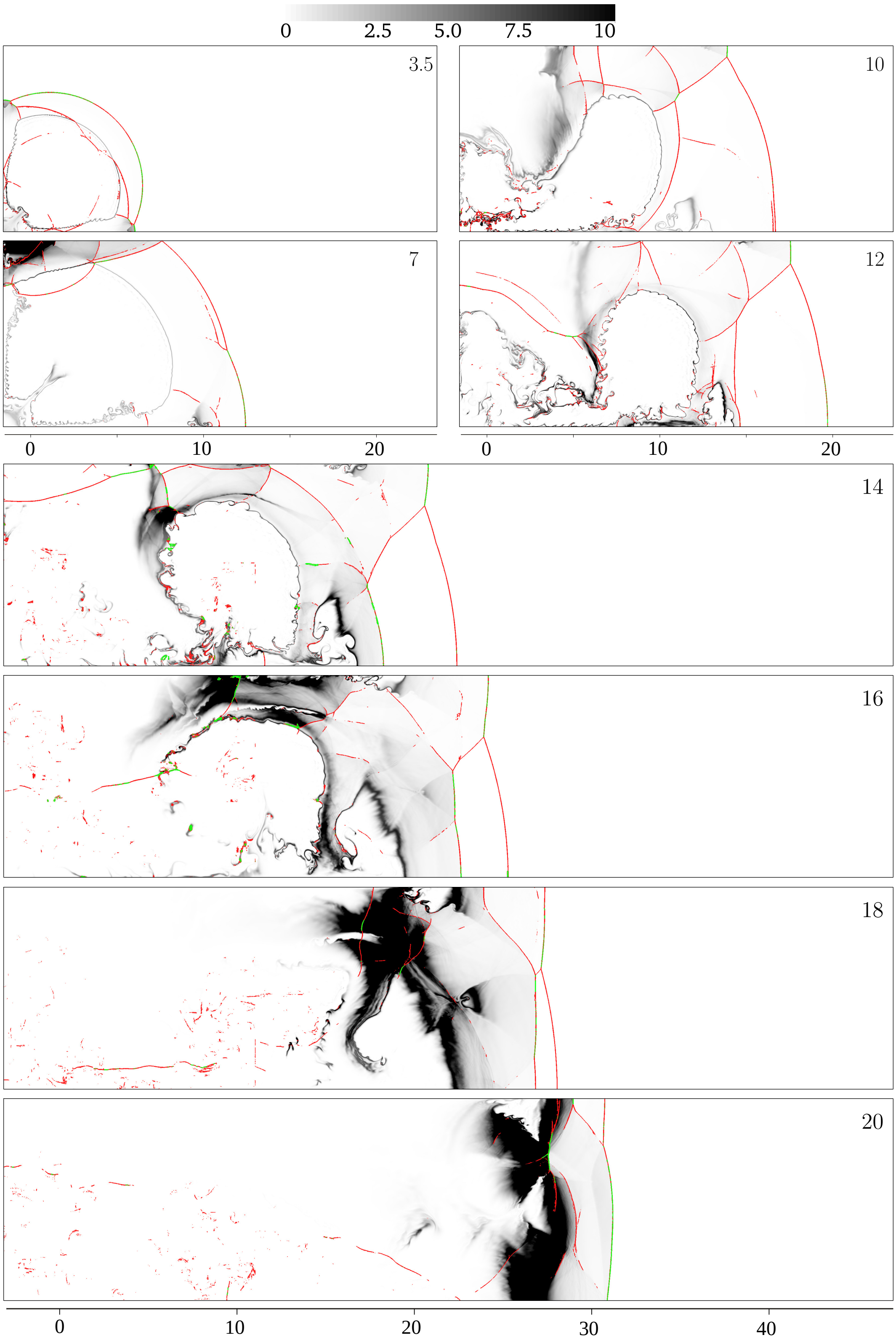


Рисунок 4.20 — Последовательность полей скорости реакции для решения уравнений Навье—Стокса, соответствующего случаю $\mathrm{Re_a} = 120\,000$ при эффективном сеточном разрешении $30\,720 \times 6\,144$ с наложенными контурными линиями искусственной вязкости зеленого цвета для значений $\nu_n = \mathrm{Re_a^{-1}}$ и красного для $\nu_n = 0.1\,\mathrm{Re_a^{-1}}$ в разные моменты времени. Скорость реакции показана, используя черно-белую шкалу с соответствующими безразмерными моментами времени, обозначенными в правом верхнем углу каждого кадра.

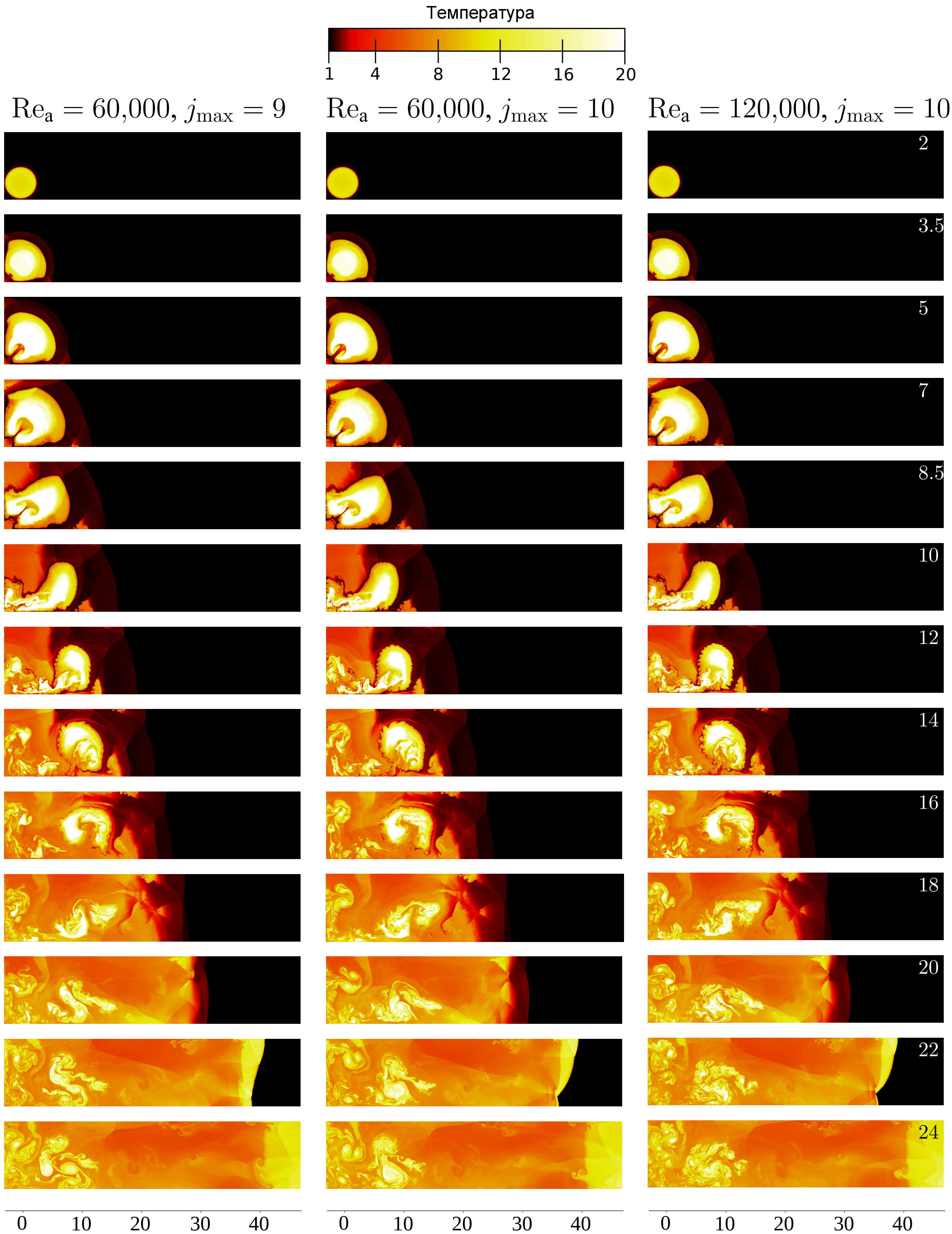


Рисунок 4.21 — Последовательность полей температуры для решений уравнений Навье—Стокса.

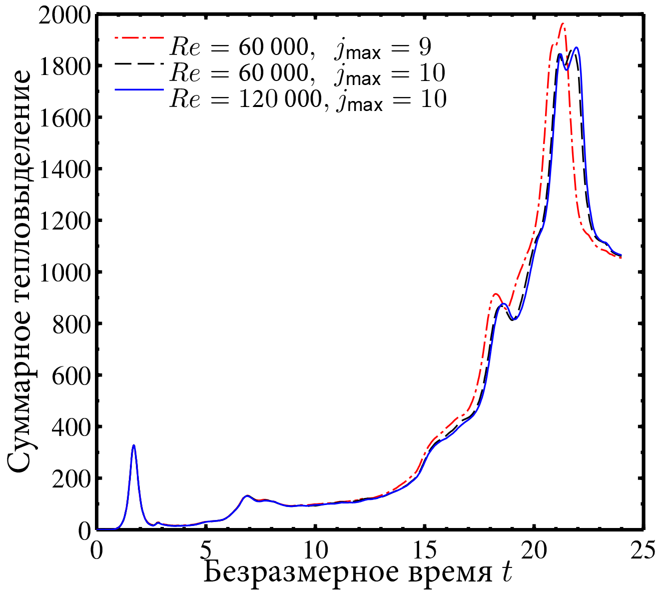


Рисунок 4.22 — Зависимость суммарного тепловыделения для решений уравнений Навье—Стокса.

приводящее к формированию волны детонации. Первые два столбца соответствуют случаю $\mathrm{Re_a} = 60\,000$ при двух разных разрешениях сетки. Отметим практически идентичные решения примерно до момента времени $t = 10$, после чего наблюдаются существенные отличия вдоль границы горячего газа и вихревых структур. В случае меньшего разрешения волна детонации формируется немного раньше, что видно из кадров, соответствующих промежутку времени $t = 22$. Это отличие обусловлено присутствием искусственной вязкости в областях разрывных решений, таких как ударные волны, но, как уже было объяснено ранее, искусственная вязкость в области границы раздела прореагировавшей и непрореагировавшей смеси намного меньше молекулярной вязкости.

В третьем столбце рис. 4.21 представлена последовательность полей температуры в случае $\mathrm{Re_a} = 120\,000$ при максимальном уровне разрешения $j_{\max} = 10$. Как видно из рисунка, длина волн неустойчивости вдоль границ раздела горячего и холодного газа уменьшилась при увеличении числа Рейнольдса, что явно видно на кадрах, соответствующих промежутку времени $7.5 \leqslant t \leqslant 12$. В момент времени $t = 14$ длины волн неустойчивости становятся сравнимы, и эволюция решения в области границы прореагировавшей и непрореагировавшей смеси практически не отличается от случая $\mathrm{Re_a} = 60\,000$. Также отметим, что крупномасштабные газодинамические структуры для разных чисел Рейнольдса при том же самом разрешении практически не отличаются друг от друга.

На рис. 4.22 приведена зависимость суммарного тепловыделения в случае решения уравнений Навье—Стокса. Как видно из рисунка, время формирования детонации слегка меняется с увеличением разрешения в случае $\mathrm{Re_a} = 60\,000$, что соответствует результатам, приведённым на рис. 4.21. Отличие во времени формирования детонации связано с присутствием локализованной искусственной вязкости, которая существенно меньше в случае более высокого разрешения. Также отметим, что в случае максимального разрешения $j_{\max} = 10$ время формирования детонации практически не меняется при увеличении числа Рейнольдса. Таким образом, доминирующим механизмом потребления горючего является процесс самовозгорания с предварительным подогревом смеси газов в результате прохождения ударных волн, что полностью соответствует случаю решения уравнений Эйлера.

4.4 Применение пространственно-временного адаптивного вейвлетного коллокационного метода

В этом разделе продемонстрирована эффективность ST-AWCM на примере решения задачи слияния двух вихрей при $\mathrm{Re} = 1\,000$ [292] и двумерной затухающей турбулентности для чисел Рейнольдса в диапазоне $1\,260 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 40\,400$ [309]. Результаты, обсуждаемые в этом разделе, основаны на материалах статей автора [292; 309].

4.4.1 Двумерная задача слияния вихрей

ST-AWCM применён для решения двумерных уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости в переменных скорость-завихренность

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \omega = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in \Omega_\mathrm{s} \times [0,T] \tag{4.60}$$

со скоростью, определённой по закону Био-Савара

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \times \omega(\mathbf{y},t)\, \mathrm{d}\mathbf{y}, \quad t \in [0,T] \tag{4.61}$$

с интегралом, взятым по всей пространственной области [58]. При вычислении интеграла (4.61) использовался быстрый многопольный метод (FMM) Грингарда и Рохлина [44; 107], обобщённый для вычисления поля скоростей во всей пространственно-временной области.

Начальные условия соответствуют двум одинаковым Гауссовым вихрям с завихренностями, заданными выражением (4.7) с теми же параметрами, что и в подразделе 4.1.1. Численные результаты получены для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \Gamma/\nu = 1\,000$, величина которого достаточно велика для появления нитевидных областей завихренности.

Задача решена в пространственно-временной области $\Omega_{\text{s-t}} = \Omega_{\text{s}} \times [0{,}40]$, где $\Omega_{\text{s}} = [-2{,}5, 2{,}5] \times [-2{,}5, 2{,}5]$ — пространственная дважды периодическая область. Аналогично другим случаям, рассмотренным в разделе 3.2, на границе области, соответствующей конечному моменту времени, использовалось эволюционное условие. Задача решена в последовательности пространственно-временных подобластей с временным интервалом $\Delta T = 0.4$, применяя метод инвертирования области, описанный в подразделе 3.2.3. Эффективность ST-AWCM продемонстрирована сравнением с результатами решения этой же задачи, используя AWCM с маршевым интегрированием по времени, описанный в подразделе 4.1.1.

Результаты вычислений

Одним из основных свойств пространственно-временной вейвлетной адаптации сетки является локально равномерное сгущение и разрежение сетки, подразумевающее сохранение пропорций ячеек сетки по всем направлениям на всех уровнях разрешения. Для улучшения сжатия пространственно-временной сетки первоначальная грубая сетка выбрана со следующим соотношением сторон ячеек сетки $\Delta t/\Delta x \sim \min(|\mathbf{u}|^{-1})$, где $\mathbf{u}$ — поле скоростей. Это условие типа CFL [59] не является необходимым для сходимости метода и выбрано чисто из соображений минимизации размера смежной области. Несоблюдение вышеупомянутого соотношения размеров элементов ячейки сетки приводит к неоптимальности пространственно-временной смежной области и увеличению количества гло-

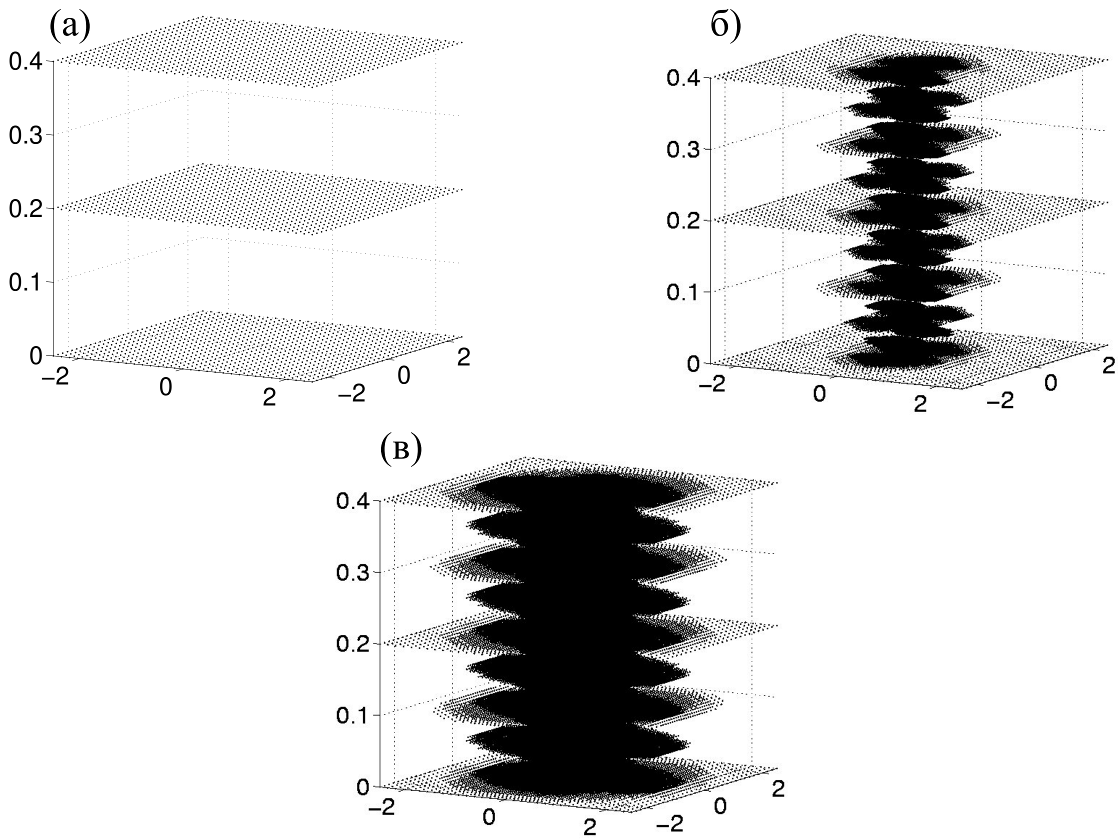


Рисунок 4.23 — Пространственно-временная адаптация сетки для разных подобластей: (а) первоначальная неадаптивная сетка в подобласти $t \in [0{,}0.4]$, (б) адаптивная сетка в подобласти $t \in [0{,}0.4]$, (в) адаптивная сетка для решения задачи в подобласти $t \in [36.6{,}40]$.

бальных итераций сеточной адаптации. Более того, условие типа CFL является физически обоснованным для конвективно-доминирующих течений.

Начальная неадаптивная пространственно-временная сетка размерностью $32 \times 32 \times 2$ на самом грубом уровне разрешения показана на рис. 4.23а. Максимальное эффективное разрешение в любой из подобластей размера $[-2.5{,}2.5] \times [-2.5{,}2.5] \times [0{,}0.4]$ соответствует $256 \times 256 \times 16$ и $j_{\max} = 3$. Значение вейвлетного порогового параметра — $\varepsilon = 10^{-5}$. Пространственно-временные адаптивные сетки показаны на рис. 4.23б-в для первой и последней подобластей.

Задача слияния вихрей существенно отличается от уравнений Бюргерса, описанных в разделе 3.3, главным образом необходимостью пространственно-временного разрешения полей скорости и завихренности. При итеративном пространственно-временном решении уравнения (4.60) поле скоростей вычисляется с применением FMM на каждой стадии V-цикла многоуровневого

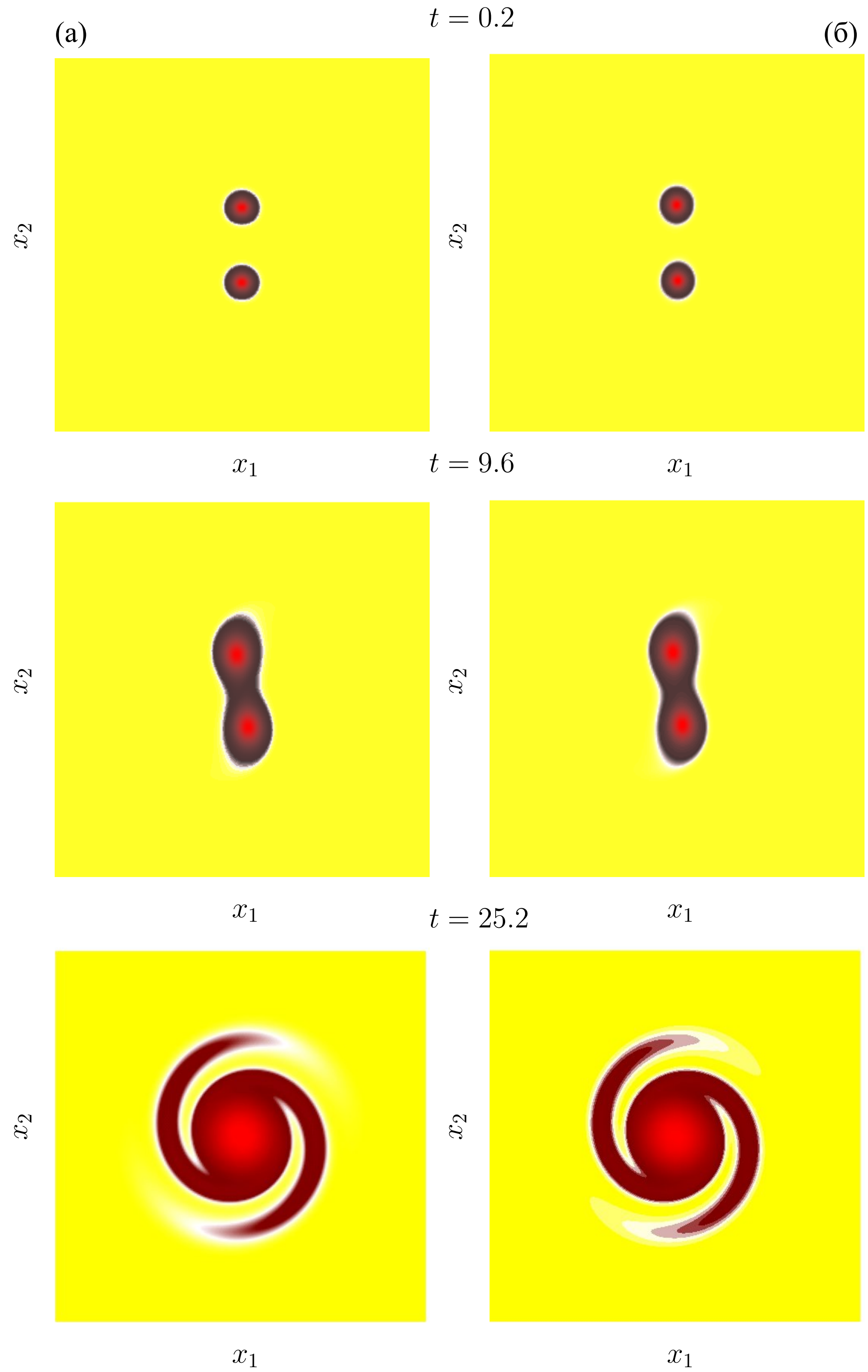


Рисунок 4.24 — Слияние вихрей при $\mathrm{Re} = 1\,000$, поле завихренности в три разные моменты времени $t = 0.2,\ 9.6,\ 25.2$: (а) ST-AWCM решение, (б) AWCM решение, использующее метод интегрирования по времени в подпространстве Крылова [80].

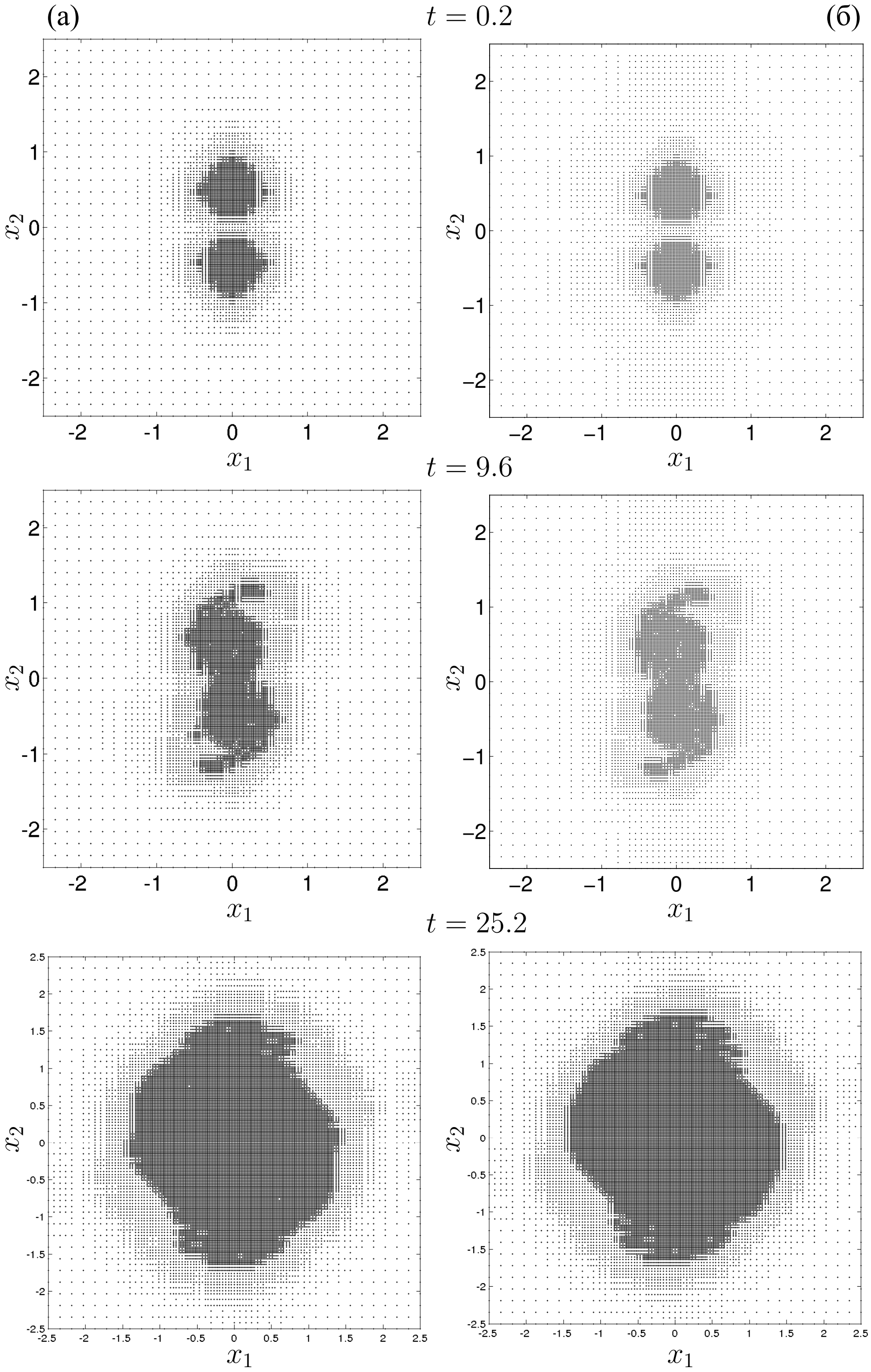


Рисунок 4.25 — Слияние вихрей при $\mathrm{Re} = 1\,000$, срез адаптивной сетки в три разных момента времени $t = 0.2$, 9.6, 25.2: (а) ST-AWCM решение, (б) AWCM решение, использующее метод интегрирования по времени в подпространстве Крылова [80].

вейвлетного метода полной аппроксимации, описанного в подразделе 3.2.1. Отметим, что адаптация пространственно-временной сетки в глобальном цикле производится после сходимости локальных W-FAS итераций.

Для сравнения результатов, полученных ST-AWCM, использовались результаты маршевых AWCM с двумя различными методами интегрирования во времени на основе метода Кранка—Николсона [61] и метода интегрирования по времени в подпространстве Крылова [80]. Несмотря на то, что все методы используют сеточную адаптацию, глобальная ошибка пространственно-временного метода ограничена вейвлетным порогом ε, в то время как в маршевых методах контролируется только локальная ошибка интегрирования во времени. Для получения результатов со сравнимой погрешностью использовался адаптивный шаг по времени для контроля локальной ошибки интегрирования во времени, обеспечивающий глобальную ошибку во времени $O(\varepsilon) = 10^{-5}$. Следует подчеркнуть, что с уменьшением порогового значения ε количество шагов интегрирования увеличивается. Поле завихренности в три разные моменты времени $t = 0.2,\ 9.6,\ 25.2$ для ST-AWCM и маршевых AWCM, а также соответствующие адаптивные сетки/срезы пространственно-временной сетки приведены на рисунках 4.24 и 4.25. Отметим сходство адаптивных сеток, несмотря на существенную разницу вычислительных методов.

Сравнение вычислительной сложности и стоимости

Одной из основных задач адаптивного пространственно-временного метода является уменьшение вычислительных затрат при сохранении точности вычислений. Количественная оценка стоимости вычислений для ST-AWCM и маршевых AWCM приведена в таблице 4.1, где представлены данные суммарного количества пространственно-временных мод (узлов сетки), суммарное процессорное время, минимальный и максимальный шаг интегрирования по времени для каждого из методов. Количество значимых вейвлетов $\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$ (независимо от размерности) описывает общую вычислительную сложность адаптивных вейвлетных методов. Из таблицы 4.1 видно, что количество узлов, используемых пространственно-временным адаптивным методом, соответственно в 7 и 18 раз меньше, чем для методов Кранка—Николсона и Крылова. Сокращение вычислительного времени

	ST-AWCM	AWCM (К-Н)	AWCM (К)
$\mathcal{N}_\mathrm{S}$	25 041 353	174 823 834	455 960 480
Соотношение числа узлов	1	7	18
Вычислительное время t_CPU (с)	6.4×10^4	1.5×10^5	2.5×10^5
Соотношение времён t_CPU	1	2.3	3.9
Δt_min	2.35×10^{-2}	1.2×10^{-5}	4.8×10^{-5}
Δt_max	2.0×10^{-1}	3.5×10^{-2}	6.3×10^{-3}
Количество шагов по времени	$\leqslant 1600$	14 234	27 115

Таблица 4.1 — Сравнение вычислительной стоимости ST-AWCM и маршевых AWCM на основе метода Кранка—Николсона [61] (AWCM (К-Н)) и метода интегрирования по времени в подпространстве Крылова [80] (AWCM (К)).

не настолько значительно, хотя и существенно: ST-AWCM примерно в два раза быстрее маршевого AWCM на основе метода Кранка—Николсона и в четыре раза быстрее маршевого AWCM на основе метода Крылова, что демонстрирует дополнительную стоимость ST-AWCM, связанную с итеративным алгоритмом. Следует отметить намного меньший минимальный шаг по времени, используемый адаптивными маршевыми AWCM из-за контроля локальной ошибки интегрирования по времени. Из таблицы 4.1 видно, что минимальный шаг по времени в ST-AWCM на три порядка больше, чем в маршевых AWCM. Обратим внимание, что в маршевых методах минимальный шаг по времени применяется глобально во всей пространственной области, в то время как в пространственно-временном методе — только локально.

Для демонстрации эффективности пространственно-временной адаптации введём величину $R_i(t) = \mathcal{N}_{\mathrm{S}i}(t)/\mathcal{N}_{\mathrm{S}0}(t)$, измеряющую отношение вычислительных сложностей алгоритмов в пространственно-временных подобластях $[t^p, t^p + 0.4]$, $p = 0, \dots 100, t^0 = 0$, где $\mathcal{N}_i(t)$ $(i = 0,1,2)$ — общее количество значимых узлов адаптивной сетки, а $i = 0,1,2$ соответствует ST-AWCM, маршевому AWCM на основе метода Кранка—Николсона и маршевому AWCM на основе метода Крылова. На рис. 4.26 приведены кривые $R_1(t)$ и $R_2(t)$, показывающие вычислительную сложность маршевых AWCM по отношению к ST-AWCM. Интересно отметить, что вычислительная сложность AWCM на основе метода Кранка—Николсона монотонно уменьшается, в то время как для маршевого AWCM на основе метода Крылова зависимость не монотонна и достигает максимального значения примерно в момент времени $t = 20$, после чего

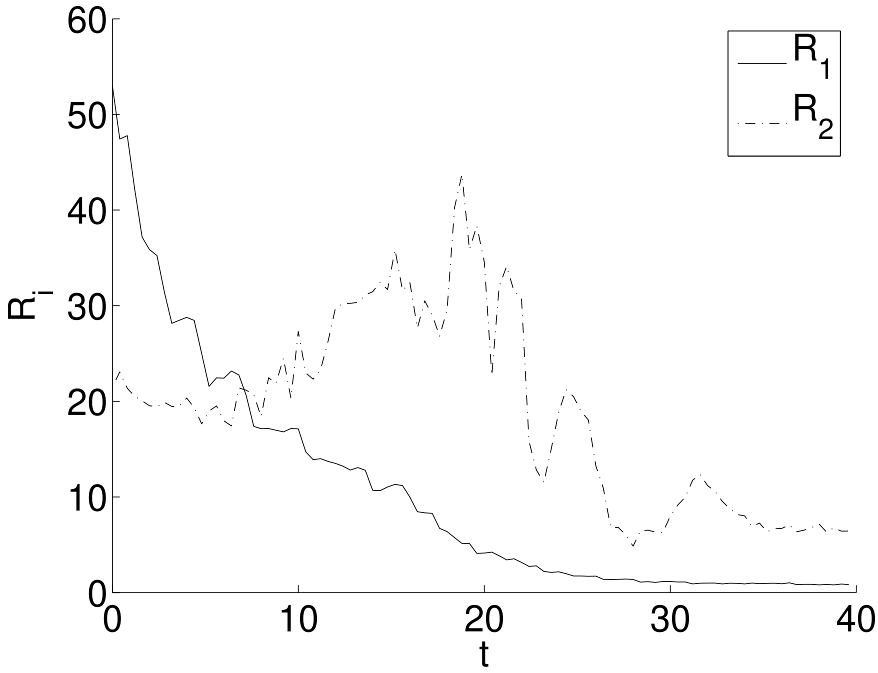


Рисунок 4.26 — Зависимость от времени относительных вычислительных сложностей алгоритмов в пространственно-временных подобластях для задачи слияния вихрей по отношению к ST-AWCM: $R_1(t)$ — относительная вычислительная сложность маршевого AWCM на основе метода Кранка—Николсона, а $R_2(t)$ — относительная вычислительная сложность маршевого AWCM на основе метода Крылова.

начинает убывать. Одним из возможных объяснений такого поведения является более точный контроль ошибки в методе Крылова [80], отслеживающий локальные вихревые структуры, в то время как шаг по времени в методе Кранка—Николсона просто отслеживает процесс диффузии завихренности. На конечной стадии сливания вихрей завихренность рассеивается без возникновения новых локализованных вихревых структур.

Основная причина большего суммарного числа степеней свободы в маршевых AWCM по сравнению с ST-AWCM заключается в отсутствии возможности эффективного использования пространственно-временной перемежаемости решения, что приводит к меньшему глобальному шагу по времени для контроля глобальной ошибки интегрирования во времени. Отметим, что при применении постоянного, не меняющегося в пространстве шага по времени, общее количество пространственно-временных степеней свободы для всех вышеупомянутых методов было бы примерно одинаковым. Таким образом, рис. 4.26 демонстрирует потенциал адаптивных пространственно-временных методов для задач с явно выраженной перемежаемостью. В таких задачах сокращение числа степеней свободы достигается с помощью вейвлетного сжатия в направлении координаты и автоматически регулирует локальный шаг по времени в зависимости от локального временного масштаба течения. В адаптивном маршевом методе шаг по времени определяется как минимальный шаг во всей пространственной области, что приводит к неэффективному интегрированию во времени в медленно меняющейся области течения.

4.4.2 Зависимость количества пространственно-временных степеней свободы двумерной турбулентности от числа Рейнольдса

Результаты, обсуждаемые в этом подразделе, основаны на материалах статьи автора [309]. Математическое и численное моделирование турбулентности осложнено необходимостью описания большого непрерывного диапазона пространственно-временных масштабов, например, от нескольких миллиметров до сотен километров в атмосферных течениях, при этом диапазон активных масштабов турбулентных течений увеличивается с возрастанием числа Рейнольдса, как $\mathrm{Re}^{1/2}$ и $\mathrm{Re}^{3/4}$ в случаях двумерной и трёхмерной турбулентности, что сильно усложняет численное моделирование течений при больших числах Рейнольдса. Более того, локальные структуры течений распределены неравномерно как в пространстве, так и во времени, приводя к сильной перемежаемости турбулентных течений.

С математической точки зрения решение уравнений в частных производных эквивалентно решению системы обычных дифференциальных уравнений бесконечной размерности. Однако Фояс и Проди [87] предположили, что в любой момент времени решение уравнений Навье—Стокса однозначно определяется конечным числом пространственных мод. Эта гипотеза была уточнена в работах [57; 88] и доказана Фризом и Робинсоном [93] в случае вынужденной двумерной турбулентности с периодическими граничными условиями. Эти результаты недавно были обобщены в работе [97] для случая трёхмерного обтекания тел, где было показано, что течения однозначно определены скоростью в конечном множестве точек в окрестности тела.

Конечность размерности турбулентности можно объяснить с точки зрения размерности аттрактора, числа мод/собственных функций или числа узлов, необходимых для однозначного определения течения. В работе [57] приведена следующая оценка верхней границы числа мод Фурье $\mathcal{N}_\mathrm{S}$, необходимых для описания вынужденной двумерной турбулентности с периодическими граничными условиями

$$\mathcal{N}_\mathrm{S} \sim \mathrm{Gr}^{2/3}(1+\log(\mathrm{Gr}))^{1/3} \approx \mathrm{Gr}^{2/3}, \tag{4.62}$$

где Gr — обобщённое число Грасгофа с асимптотикой $O(\mathrm{Re}^2)$ при $\mathrm{Gr} \to \infty$ [71], что эквивалентно оценке $\mathcal{N}_\mathrm{S} \sim \mathrm{Re}^{4/3}$, которая существенно превышает общепринятую оценку $\mathcal{N}_\mathrm{S} \sim \mathrm{Re}$, основанную на минимальном масштабе $l_\eta \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$). Подчеркнём, что эквивалентная оценка пространственно-временных степеней свободы $\mathcal{N}_\mathrm{S} \sim \mathrm{Re}^{3/2}$ предполагает масштаб времени $\Delta t \approx 1/l_\eta$ и временной шаг $\Delta t \approx 1/l_\eta$). Результаты численных экспериментов, представленные в этом подразделе, подтверждают экспоненциальную оценку зависимости пространственно-временных степеней свободы $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от числа Рейнольдса

$$\mathcal{N}_\mathrm{S} \sim \mathrm{Re}^{\alpha}, \tag{4.63}$$

где α — экспонента масштабирования. Отметим, что под числом степеней свободы подразумевается количество вычислительных степеней свободы, отличающихся от чисто математических степеней свободы из-за конечной величины вейвлетного порога, используемой при вычислениях. Обратим внимание, что применяя двумерный аналог β-модели [92], можно показать, что число степеней свободы двумерной турбулентности должно масштабироваться следующим образом:

$$\mathcal{N}_\mathrm{S} \sim \mathrm{Re}^{\frac{3D_F}{D_F+4}}, \tag{4.64}$$

где D_F — фрактальная размерность активной области турбулентного течения. Таким образом, численная оценка экспоненты масштабирования α в уравнении (4.63) может быть использована одновременно с уравнением (4.64) для оценки фрактальной размерности, а, следовательно, и перемежаемости активных областей турбулентных течений, характерной для значений $D_F < 2$ и $\alpha < 1$.

Как было замечено в работе [258], для определения активных мод турбулентного течения необходим метод, определяющий и отслеживающий эти моды. С вычислительной точки зрения число активных мод может быть оценено количеством значимых пространственных и пространственно-временных узлов сетки,

Вычисления	Re	Разрешение	Δx	λ	Re_λ
I	1 260	192×192	3.3×10^{-2}	1.1×10^{-1}	138
II	2 530	192×192	3.3×10^{-2}	8.3×10^{-2}	195
III	5 050	192×192	3.3×10^{-2}	5.9×10^{-2}	275
IV	10 100	256×256	2.5×10^{-2}	4.1×10^{-2}	389
V	20 200	384×384	1.6×10^{-2}	2.9×10^{-2}	551
VI	40 400	512×512	1.2×10^{-2}	2.0×10^{-2}	779

Таблица 4.2 — Параметры для сравнительных псевдоспектральных прямых численных вычислений двумерной турбулентности. Первоначальный интегральный масштаб длины соответствует $L \approx 1.09$, а начальная интенсивность турбулентных флуктуаций — $U \approx 4.65$. Re_λ — число Рейнольдса на основе начального масштаба Тейлора $\lambda = \sqrt{E/E_\omega}$, где E — кинетическая энергия, а E_ω — энстрофия.

необходимых для численного моделирования течения с заданным пороговым значением. Таким образом, количество узлов адаптивной сетки может использовано для оценки степеней свободы, необходимых для описания турбулентного течения, а экспонента масштабирования α может быть оценена по результатам серии вычислений с разным числом Рейнольдса.

Формулировка задачи

Начальные условия, аппроксимирующие развитую двумерную турбулентность с заданным спектром энергии $E(k) = g_2 k^4/(g_1 + k^2)^{7/2} \exp(-k^2/k^2_{\max})$, определены в пространстве Фурье и имеют следующий вид

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k},0) = \frac{(-k_2,k_1)}{|\mathbf{k}|}\sqrt{\frac{E(k)}{2\pi|\mathbf{k}|}}\exp(\mathrm{i}2\pi\varphi), \tag{4.65}$$

где φ — случайная фаза. Обратим внимание на асимптотически экспоненциальное затухание спектра для больших волновых чисел, полиномиальный спектр $E(k) \sim k^4$ для малых, и $E(k) \sim k^{-3}$ — для промежуточных. Начальные условия (4.65) $\hat{\mathbf{u}}$ гарантируют соленоидальность поля скоростей. Отметим, что спектр энергии аналогичен экспериментально измеренному спектру $k^{-3.3}$ для двумерной

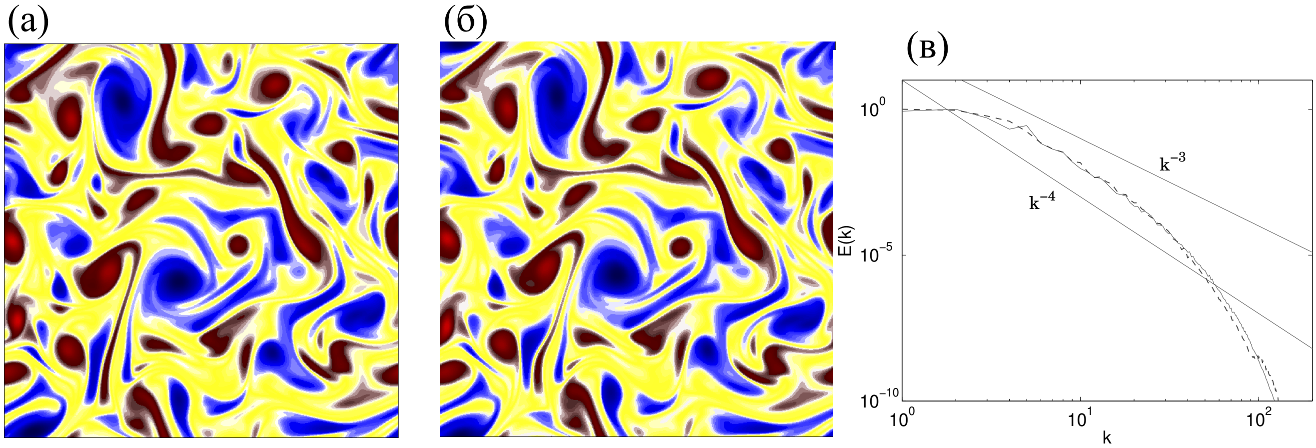


Рисунок 4.27 — Двумерная турбулентность в момент времени $t = 126$ и $\mathrm{Re} = 40\,400$: (а) поле завихренности, полученное с использованием в среднем $7\,895$ пространственных вейвлетных мод (общее количество узлов пространственно-временной сетки в промежуток времени $t \in [123.8{,}128.0]$, поделенное на количество временных уровней), (б) поле завихренности, полученное с использованием $263\,169$ Фурье-мод в псевдоспектральном методе, (в) спектр энергии полученный: ST-AWCM (- - - -) и псевдоспектральным (——) методами.

турбулентности в плёнках [166]. Константы g_1 и g_2 выбраны таким образом, чтобы амплитуда флуктуаций скорости была $U = 4.65$, а начальный интегральный масштаб длины равен $L = 1.09$. При определении начальных условий выражение (4.65) преобразовано в физическое пространство. Параметры численного моделирования перечислены в таблице 4.2.

Вычисления выполнены в пространственно-временной области $\Omega_{\text{s-t}} = \Omega_{\text{s}} \times [0{,}128]$, при этом пространственная область $\Omega_{\text{s}} = [0{,}2\pi] \times [0{,}2\pi]$ дважды периодична, а время $t \in [0{,}128]$ нормализовано на первоначальное время обращения вихря $\tau = L/U$. Как описано в подразделе 3.3.2, для минимизации используемой памяти компьютера задача разбита на подзадачи в пространственно-временных срезах $512 \times 512 \times 16$ в направлении координаты времени. На самом грубом уровне разрешения пространственно-временная сетка соответствует разрешению $m_{x_1} \times m_{x_2} \times m_t = 64 \times 64 \times 2$. Адаптивная сетка на максимальном уровне разрешения имеет эффективное разрешение $512 \times 512 \times 16$. Минимальный размер сеточных элементов на самом высоком уровне разрешения соответствует $\Delta x \approx 1.2 \times 10^{-2}$ и $\Delta t \approx 2.6 \times 10^{-1}$. Подчеркнём, что характерный масштаб времени для задачи двумерной турбулентности не зависит от числа Рейнольдса [65]. Численные результаты получены для порогового зна-

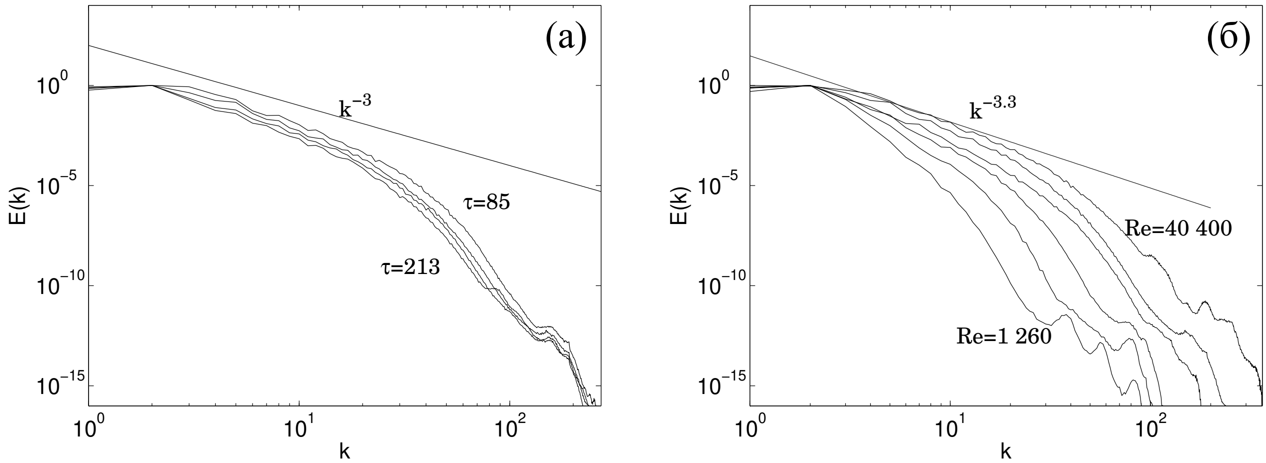


Рисунок 4.28 — Спектр энергии: (а) в моменты времени $t = 85, 128, 170, 213$ для $\mathrm{Re} = 20\,200$ по сравнению с начальным k^{-3} спектром, (б) в момент времени $t = 126$ для $\mathrm{Re} = 1\,260,\ 2\,530,\ 5\,050,\ 10\,100,\ 20\,200,\ 40\,400$ по сравнению с экспериментальным спектром $k^{-3.3}$.

чения $\varepsilon = 10^{-4}$, которое достаточно мало, чтобы охарактеризовать ST-AWCM вычисления как прямое численное моделирование.

Результаты ST-AWCM вычислений сравнимы с результатами прямого численного моделирования на основе псевдоспектрального метода [136; 245]. Для заданных чисел Рейнольдса минимально необходимое разрешение определено сравнением спектра энергии при увеличении максимального разрешения. Как уже отмечалось выше, масштаб Колмогорова для двумерной турбулентности асимптотически зависит от числа Рейнольдса, как $O(\mathrm{Re}^{-1/2})$, что означает, что размер ячейки сетки должен быть $\Delta x \ll L\mathrm{Re}^{-1/2}$, где L — интегральный масштаб длины двумерной турбулентности.

Результаты вычислений

Для подтверждения правильности вычислений результаты ST-AWCM вычислений для $\mathrm{Re} = 40\,400$ сравнены с результатами псевдоспектральных прямых численных вычислений. На рис. 4.27а-б приведены поля завихренности в момент времени $t = 126$, полученные ST-AWCM и псевдоспектральным методами. Как видно из рисунка, результаты вычислений практически не отличаются как

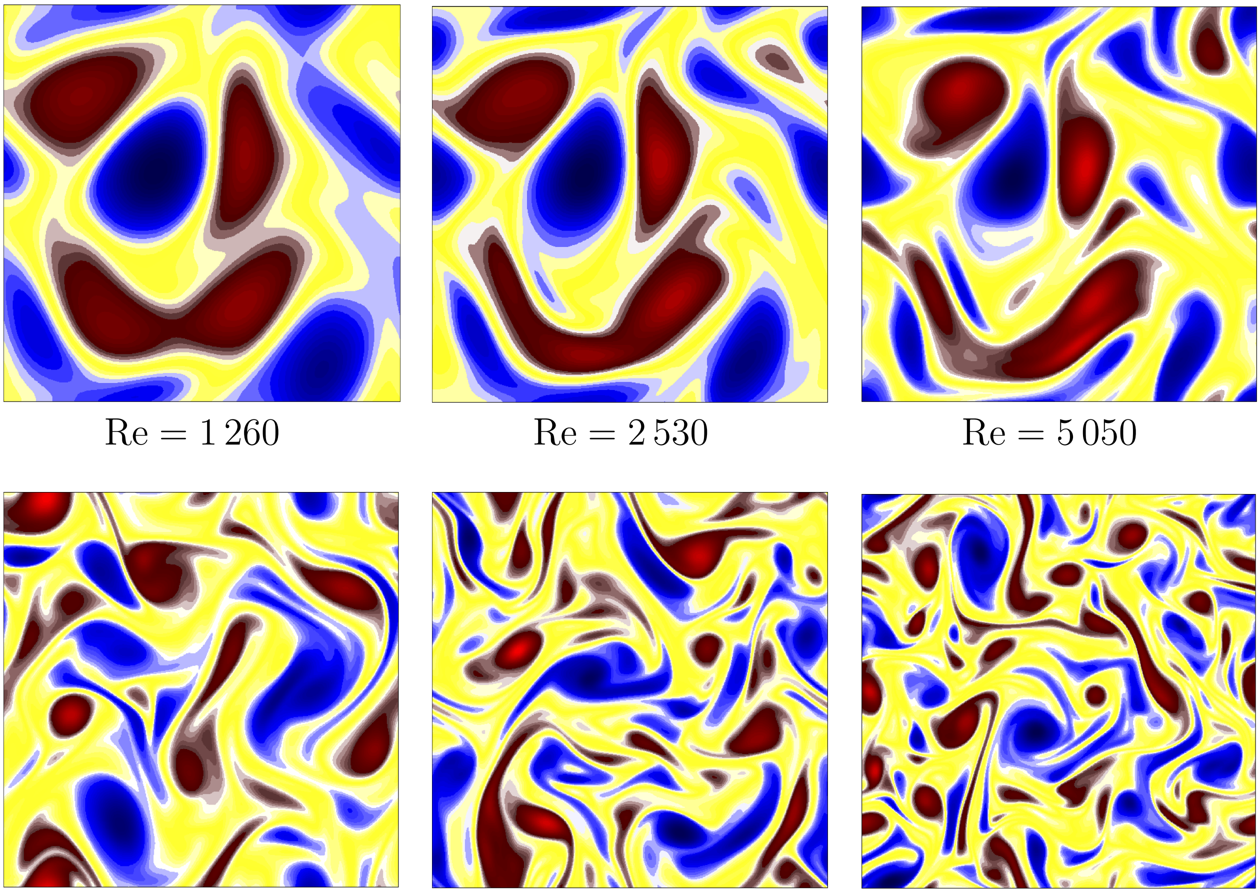


Рисунок 4.29 — Поле завихренности в момент времени $t = 126$ для разных чисел Рейнольдса.

в физическом пространстве, так и спектром энергии, приведённом на рис. 4.27в, несмотря на то, что ST-AWCM при $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ использовал в среднем в 33 раза меньше степеней свободы, чем псевдоспектральный метод. Таким образом, результаты, приведённые на рис. 4.27, подтверждают эквивалентность ST-AWCM результатов с результатами псевдоспектральных прямых численных вычислений, при этом, ST-AWCM использует существенно меньшее число вычислительных мод.

Эволюция во времени спектра энергии при фиксированном числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 20\,200$ показана на рис. 4.28а, из которого видно довольно слабое изменение спектра в промежуток времени $t \in [85{,}213]$. Зависимость спектра энергии от числа Рейнольдса для момента времени $t = 126$ приведена на рис. 4.28б. Из рисунка видно, что с увеличением числа Рейнольдса возрастает степенной диапазон спектра с одновременным уменьшением наклона. Результаты, приведённые на рис. 4.28, иллюстрируют разрешение всех активных масштабов двумерной турбулентности. Зависимость характерного размера когерентных вих-

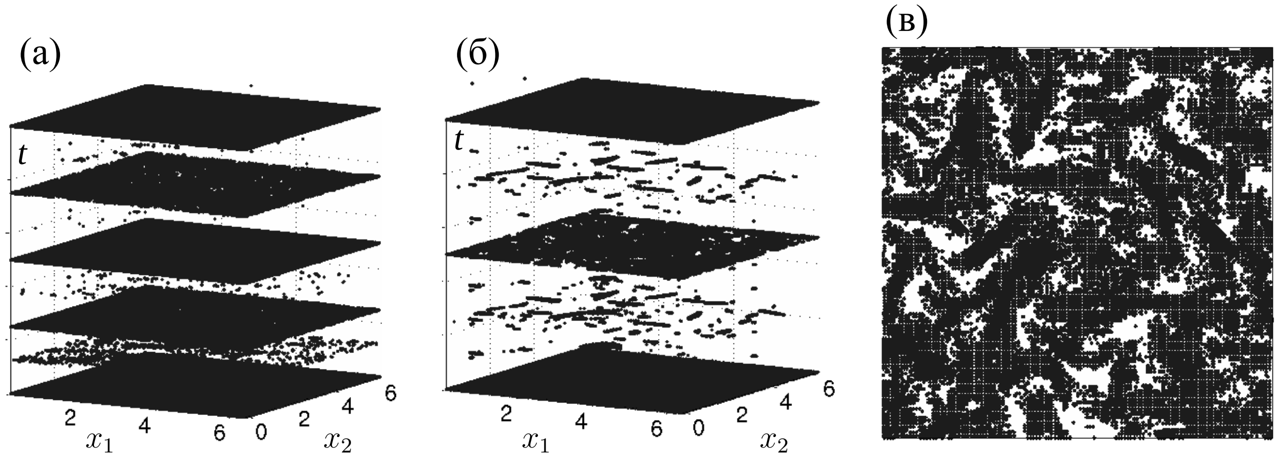


Рисунок 4.30 — Адаптивная пространственно-временная сетка для $\mathrm{Re} = 40\,400$: (а) в первом временном подпространстве $t \in [0{,}2.1]$, (б) в конечном временном подпространстве $t \in [123.8{,}126]$, (в) временной срез сетки, соответствующий моменту времени $t = 126$.

ревых структур от числа Рейнольдса продемонстрирована на рис. 4.29, где также видно заметное увеличение количества локализованных структур завихренности при увеличении числа Рейнольдса. Отметим, что с увеличением локализации вихревых структур усиливается перемежаемость, которая, как будет показано ниже, существенно уменьшает общее количество степеней свободы по сравнению с оценкой $O(\mathrm{Re}^{3/2})$, основанной на равномерной сетке.

Адаптивная пространственно-временная сетка в первом и последнем подпространствах решения и временной срез адаптивной сетки показаны на рис. 4.30 для порогового значения $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$. Результаты рис. 4.30 демонстрируют способность метода адаптировать сетку как в пространстве, так и во времени. Из рис. 4.30а-б видно, что применение минимального шага по времени ограничено областями, в которых присутствуют мелкомасштабные вихревые структуры. Сравнение сеток на рис. 4.30а-б демонстрирует, как динамика развития двумерной турбулентности увеличивает перемежаемость по сравнению с полем скоростей со схожим спектром энергии и случайной фазой, используемой в начальных условиях.

На рис. 4.31а показана зависимость количества пространственно-временных степеней свободы от числа Рейнольдса на интервале времени $107 \leqslant t \leqslant 128$. На рисунке также для сравнения приведена экспоненциальная зависимость (4.63) с оценённым экспоненциальным коэффициентом $\alpha \approx 0.9$, значительно меньшем, чем обычная оценка $3/2$, подчёркивающая важность

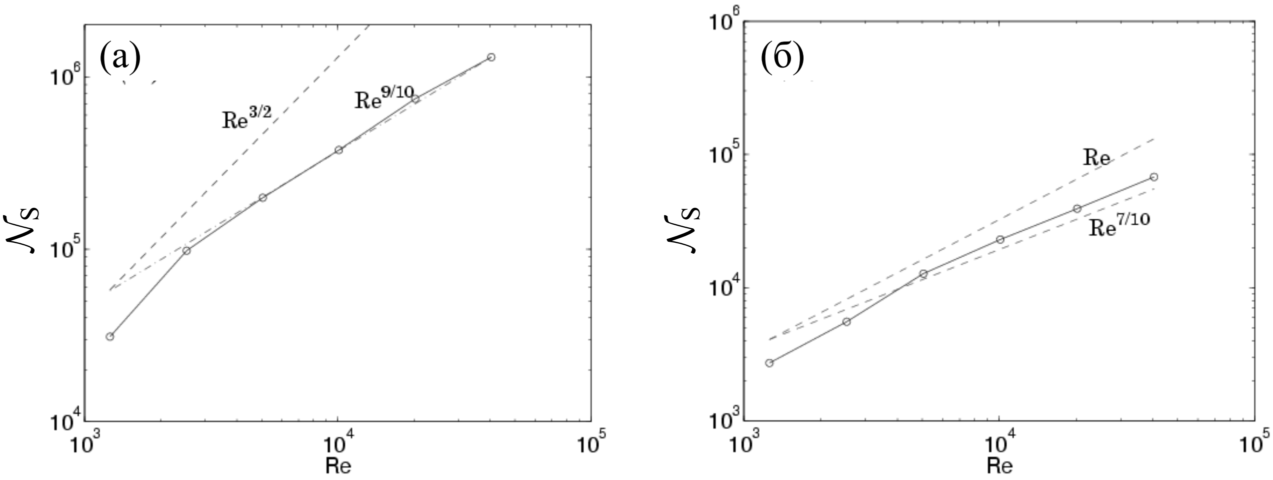


Рисунок 4.31 — Зависимость количества степеней свободы $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ от числа Рейнольдса Re и сравнение полученной экспоненциальной зависимости с общепринятой оценкой без учёта перемежаемости: (а) пространственно-временной случай, (б) пространственный случай.

перемежаемости. Обратим внимание, что численные результаты на интервале $107 \leqslant t \leqslant 128$ демонстрируют примерную константность экспоненциального коэффициента в исследуемом интервале времени, что предполагает сходство результатов для затухающей турбулентности по сравнению со стационарной вынужденной турбулентностью, по крайней мере, для переходного периода. Как уже обсуждалось ранее и показано на рисунке 4.30, временная перемежаемость доминирует над пространственной.

Важно отметить различие минимальных физических и вычислительных масштабов времени. Двумерная турбулентность качественно отличается от трехмерной независимостью минимального масштаба времени от числа Рейнольдса, в то время как в трехмерной турбулентности минимальный масштаб времени уменьшается, как $\mathrm{Re}^{-1/2}$ [65]. Однако минимальный вычислительный масштаб времени обратно пропорционален минимальному пространственному масштабу, то есть $\Delta t \sim 1/l_{\min}$, что приводит к общепринятой оценке числа пространственно-временных степеней свободы $O(\mathrm{Re}^{3/2})$ в двумерном случае и $O(\mathrm{Re}^3)$ в трёхмерном.

На рис. 4.31б приведена зависимость осреднённого количества пространственных степеней свободы для временного интервала $40 \leqslant t \leqslant 128$ для маршевого AWCM с экспонентой масштабирования $\alpha \approx 0.7$, что меньше оценки $\alpha = 1$, не использующей турбулентную перемежаемость. Таким образом, двумерная турбулентность в действительности перемежаема как в пространстве, так и во времени. Полученная сильная перемежаемость двумерной турбулентности отличается от равномерного представления двумерной турбулентности. Также отметим малоизученность временной перемежаемости двумерной турбулентности.

В заключении отметим, что пространственная фрактальная размерность затухающей двумерной турбулентности, полученная на основе β-модели (4.64), равна $D_F \approx 1.2$. Простое расширение β-модели приводит к оценке временной фрактальной размерности $D_t \approx 0.3$. Подчеркнём, что, несмотря на то, что вышеприведённые оценки фрактальных размерностей пространства и времени основаны на предположении, что размер активной области течения уменьшается, как степень масштаба длины l, полученные фрактальные размерности обеспечивают качественную оценку перемежаемости турбулентного течения.

Глава 5. Методы штрафных функций для задач сложной геометрии

5.1 Методы погруженных границ

Эффективное численное моделирование течений в сложной геометрии, особенно с движущимися элементами или деформируемыми поверхностями, представляет собой довольно сложную задачу. Сложная геометрия течений определяется соответствующими граничными условиями на поверхности твёрдых тел. В настоящий момент существует два основных подхода моделирования сложной геометрии: на основе согласованных с границей расчетных сеток [168; 233] и методы погруженных границ [172; 189]. В общепринятом подходе на основе согласованных с границей структурированных и неструктурированных расчетных сеток узлы вычислительной сетки совпадают с границами твёрдого тела, что позволяет напрямую задавать граничные условия в узлах сетки. Основной сложностью применения согласованных с границей сеток является дороговизна их построения, контроль качества вычислительных сеток и невозможность использования декартовой сетки. Построение расчётных сеток, согласованных с границей, сильно усложняется для геометрии с движущимися или деформируемыми границами, так как требуют непрерывной адаптации, построения новой сетки и интерполяции решения со старой сетки на новую [172].

Метод *погруженных границ* позволяет избежать затрат и сложностей, связанных с построением согласованных с границей сеток и даёт возможность численного моделирования на структурированных декартовых сетках посредством введения в уравнения дополнительных членов (сил), обеспечивающих выполнение граничных условий на границе твёрдых тел без позиционирования узлов сетки на границе обтекаемых объектов. Отметим, что метод погруженных границ может быть применён как к дифференциальной (непрерывной), так и к дискретизированной системе уравнений. Однако несмотря на то, что дискретная форма метода погруженных границ позволяет прямую манипуляцию дискретизированных уравнений, дискретные подходы трудно обобщаются ввиду прямой зависимости от численных методов [172]. Начиная с работ Пескина [188; 190], в которых метод погруженных границ использовался для изучения течений в окрестностях каналов сердца, в настоящий момент разработаны многочисленные разновидности метода погруженных границ. Метод Пескина [188] основан на решении уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости с дополнительными локализованными силами в уравнении момента, моделирующими эластичную среду. В случае твёрдых тел в подходе, предложенном Пескиным, в качестве эластичной среды использовались жесткие пружины [144]. Метод Пескина был обобщён в работах [105; 211] с помощью сил обратной связи, моделирующих твёрдое тело. Отличительной особенностью всех вышеупомянутых подходов является сильное увеличение жесткости задачи, ограничивающее применение явных методов. Более того, использование метода погруженных границ с неадаптивными сетками ограничивает их применение для течений с большими числами Рейнольдса. Пожалуй, самыми большими недостатками дискретных методов погруженных границ являются отсутствие математических доказательств их сходимости и сложность контроля ошибки аппроксимации граничных условий.

В настоящий момент разработано много разновидностей метода погруженных границ для вязких течений несжимаемой жидкости, основанных на применении внешних сил для определения граничных условий на погруженных границах, например, метод на основе декартовых сеток [19; 48; 196; 261] и методы, использующие вспомогательные ячейки [237], в которых напрямую задаются граничные условия в области погруженных границ.

Методы *штрафных функций* (МШФ) представляют отдельный подкласс дифференциальных методов погруженных границ, в которых эффект присутствия твёрдых тел достигается посредством введения дополнительных членов в дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию течения жидкости или газа, после чего модифицированные уравнения дискретизируются и решаются с помощью соответствующего вычислительного метода. Одним из таких методов является метод штрафных функций Бринкмана (МШФБ) [5], первоначально предложенный Аркуисом и Калтагироном [7] для моделирования вязких течений несжимаемой жидкости. Основная идея МШФБ заключается в использовании физически мотивированных штрафных функций, моделирующих твердое тело как пористую среду с малой, приближающейся к нулю, проницаемостью. Принципиальное преимущество метода штрафных функций Бринкмана по сравнению с другими известными методами погруженных границ заключается в возможности аналитической оценки и активного контроля ошибки решения пенализированных уравнений посредством изменения значений параметров штрафных функций [5].

Более того, в работах [5; 38; 85] было доказано, что решение пенализированных уравнений сходится к решению уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости в пределе штрафного параметра, стремящегося к нулю. Ввиду простоты, лёгкости и общности применения, а также малой вычислительной стоимости, метод штрафных функций Бринкмана подходит для численного моделирования течений сложной геометрии, включая течения с движущимися и деформируемыми границами. Начиная с работы [4], МШФБ был обобщён и применён в контексте разнообразных численных методов, таких как псевдоспектральные методы [81; 123; 141; 184], методы конечных элементов [199], методы конечных объёмов [262—264] и вейвлетные методы [132; 212; 253], включая работы автора [293; 294; 298; 310—315; 331].

В отечественной литературе получило развитие независимое параллельное направление исследований дифференциального подкласса метода погруженных границ, широко известного как метод *фиктивных областей* (МФО) [271], основная идея которого заключается в решении приближенной задачи не в исходной сложной области Ω_f, а в более простой области Ω, включающей $\Omega_f \subset \Omega$. Вспомогательная задача в фиктивной (комплементарной) области $\Omega_p = \Omega \backslash \Omega_f$ формулируется таким образом, чтобы в ней присутствовал малый параметр η, определяющий величину разрыва коэффициентов уравнений на границе области $\partial\Omega_p$, и имела место сходимость приближенного решения параметризированной задачи к точному решению в области Ω_f при $\eta \to 0$. Детальный обзор литературы по истории развития и применению метода фиктивных областей можно найти в монографии Вабищевича [271]. Отметим, что метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам математически идентичен методу штрафных функций Бринкмана, и в западной литературе названия этих методов используются взаимозаменяемо [4; 138; 199], с более частым употреблением термина «метод *штрафных функций*», несмотря на историческое первенство названия «метод *фиктивных областей*». Ввиду математической эквивалентности двух подходов и для простоты обсуждения, в данной диссертации все дифференциальные подклассы метода погруженных границ классифицируются как метод штрафных функций.

Материалы, обсуждаемые в этой главе, основаны на работах автора [293; 294; 310—315; 331] и организованы следующим образом. Метод штрафных функций Бринкмана для уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости описан в разделе 5.2. Результаты вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования обтекания стационарного и подвижного цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100$ и стационарного цилиндра при $\mathrm{Re} = 3{,}000$ с совместным использованием метода штрафных функций Бринкмана и адаптивного вейвлетного коллокационного метода описаны в этом же разделе. Обобщение метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования дозвуковых течений сжимаемого вязкого газа, основанное на физически обоснованной математической модели течений сжимаемого газа через пористую среду, представлено в разделе 5.3, где также приведён асимптотический анализ амплитудной и фазовой ошибок при отражении от поверхности тела, моделируемого обобщённым методом штрафных функций Бринкмана. Применение обобщённого метода штрафных функций Бринкмана совместно с AWCM для моделирования дозвукового обтекания тел сжимаемым вязким газом продемонстрировано на примерах тестовых задач прямого отражения одномерного акустического импульса от плоской поверхности и рассеяния акустической волны стационарным цилиндром. В разделе также приведены результаты проверки сходимости решения, подтверждающие соответствие численных результатов с асимптотической оценкой ошибки в случаях разрешённого и неразрешённого пограничного слоя.

Обобщённый метод штрафных функций Бринкмана для сжимаемого газа, несмотря на возможность контроля ошибки численного решения изменением величин штрафных параметров, обладает существенным недостатком, связанным с отсутствием возможности налагать общие граничные условия. Расширение метода штрафных функций, использующее характеристические штрафные функции, снимающее ограничения метода штрафных функций Бринкмана и позволяющее задавать общие однородные и неоднородные граничные условия Неймана и Робена, обсуждено в разделе 5.4. Разработанный метод характеристических штрафных функций (МХШФ) довольно гибок и применим для решения как параболических, так и гиперболических систем уравнений, при этом сохраняет возможность контролировать ошибку численного решения пенализированных уравнений через значения параметров штрафных функций. Применение метода характеристических штрафных функций для численного моделирования сжимаемых вязких и невязких течений подробно описано в разделах 5.4 и 5.5. Отметим, что в этой главе совместное применение метода штрафных функций и адаптивного вейвлетного коллокационного метода ограничено простыми тестовыми задачами. Приложение объединённых AWCM/МШФ для численного моделирования более сложных течений обсуждено в главе 6.

Важно отметить, что методы штрафных функций, разработанные автором и описанные в этой главе, хорошо подходят для совместного применения с методами сеточной адаптации [113]. Так как методы штрафных функций обычно не используют согласованную с границами сетку, то для правильного определения геометрии вблизи границ, как правило, требуется высокое разрешение, обусловленное наличием пограничного слоя. Сеточная адаптация позволяет разрешать геометрию тела с заданной точностью без чрезмерного разрешения вдали от границы и минимизировать количество узлов сетки внутри объекта сложной геометрии, необходимых для определения граничных условий, что особенно важно для геометрических объектов, заполняющих большую часть вычислительной области. Таким образом, использование метода штрафных функций расширяет область применения адаптивных вейвлетных коллокационных методов для решения задач со сложной геометрией. Способность вейвлетных методов адаптировать расчётную сетку на контрольные переменные позволяет адаптацию сетки на дополнительные переменные, определяющие геометрию задачи, при этом динамическая вейвлетная адаптация сетки позволяет моделирование не только стационарных объектов, но и движущихся объектов и объектов с деформируемой границей.

5.2 Метод штрафных функций Бринкмана для уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

5.2.1 Формулировка метода

Рассмотрим задачу обтекания множества объектов O_m вязкой несжимаемой жидкостью, описываемую уравнениями Навье—Стокса (4.1)–(4.2). Предположим, что задача решается в прямоугольной области $\Omega_\mathrm{s} = [L_{x_1\mathrm{l}}, L_{x_1\mathrm{h}}] \times [L_{x_2\mathrm{l}}, L_{x_2\mathrm{h}}] \times [L_{x_3\mathrm{l}}, L_{x_3\mathrm{h}}] \in R^3$, содержащей все тела O_m. Скорость жидкости на поверхности тел удовлетворяет условию прилипания

$$\mathbf{u} + \mathbf{U} = \mathbf{U}_o \text{ на } \partial\Omega_m,\ \forall m, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{U}_o$ — скорость тел O_m, а Ω_m — область пространства, занимаемого телом O_m. Отметим, что при вращении или изменении формы тел для общности формулировки $\mathbf{U}_o = \mathbf{U}_o(\mathbf{x}, t)$ представляет собой поле скоростей, изменяющееся в пространстве и времени, а в случае только поступательного движения тел поле скоростей равномерно внутри каждой области $\Omega_m \subset \Omega_\mathrm{s}$. Для неявного определения условия прилипания (5.1) на границе тел в работе [5] предложено использовать уравнения Навье—Стокса (4.1)–(4.2), пенализированных штрафными функциями и принимающих следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\eta}{\partial t} + (\mathbf{u}_\eta + \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta + \nabla P_\eta = \nu \Delta \mathbf{u}_\eta - \frac{1}{\eta} \chi(\mathbf{x},t)(\mathbf{u}_\eta + \mathbf{U} - \mathbf{U}_o), \tag{5.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\eta = 0, \tag{5.3}$$

где $0 < \eta \ll 1$ — параметр штрафной функции или, для простоты, штрафной параметр, а χ — маркировочная штрафная функция, определённая как

$$\chi(\mathbf{x},t) = \begin{cases} 1 \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega_m \ \forall m, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{5.4}$$

Отметим, что уравнения (5.2)–(5.3) определены во всей области Ω_s, а член уравнения (5.2), выделенный синим цветом, представляет собой штрафную функцию, определённую внутри тел O_m. В работах [5; 85] было показано, что решение пенализированных уравнений (5.2)–(5.3) сходится к решению уравнений Навье—Стокса (4.1)–(4.2) с граничными условиями (5.1) при $\eta \to 0$. Более точная оценка ошибки решения пенализированных уравнений была приведена в работе [38], где показано, что ошибка решения ограничена как

$$||\mathbf{u} - \mathbf{u}_\eta||_2 \leqslant C\eta^{1/2}||\mathbf{u}||_2. \tag{5.5}$$

Важно отметить, что так как η — произвольный регулируемый параметр, не зависящий от пространственной или временной дискретизации уравнений, то при достаточном сеточном разрешении в пристеночной области граничные условия могут быть неявно заданы с любой степенью точности, априорно определяемой значением штрафного параметра η. *Аналитическая сходимость* и возможность *контроля ошибки* решения являются основным отличительным свойством метода штрафных функций Бринкмана по сравнению с другими методами погруженных границ.

Другим преимуществом метода штрафных функций Бринкмана является возможность вычисления суммарной гидродинамической силы $\mathbf{F}_m$, воздействующей на тело O_m, используя интегрирование по пространству штрафной функции,

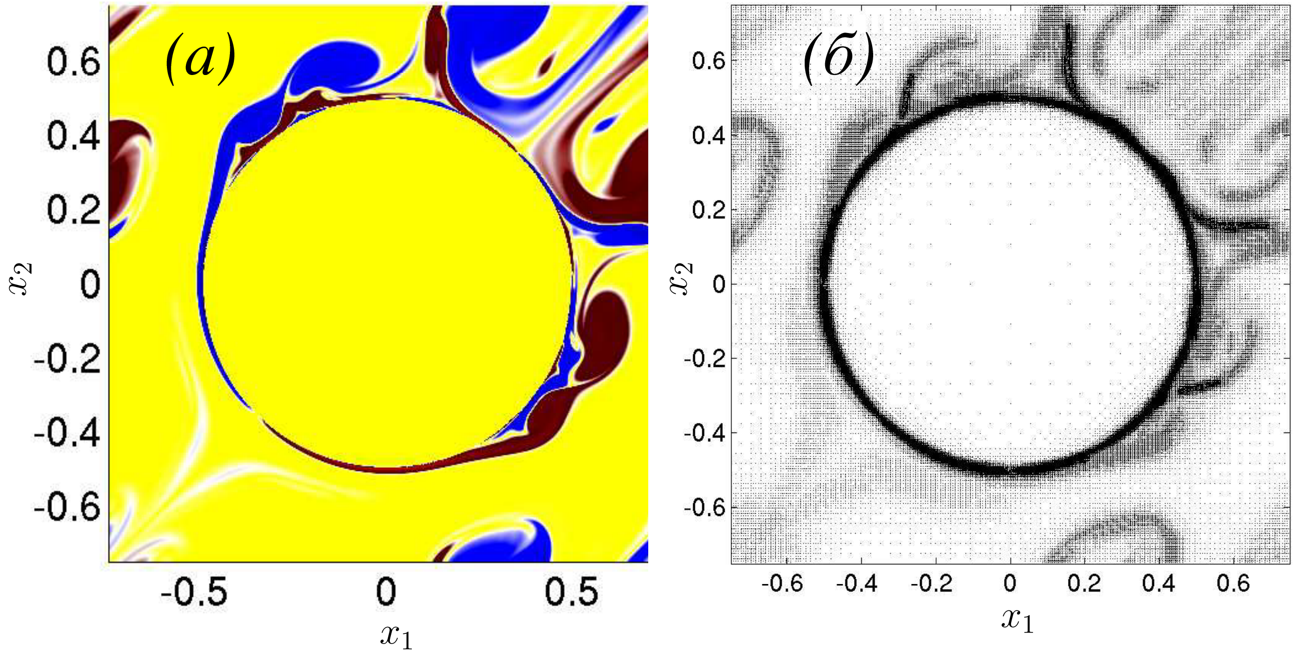


Рисунок 5.1 — Двумерное обтекание массива цилиндров для $\mathrm{Re} = 10^4$ в момент времени $t = 3.5$: (а) поле завихренности, (б) адаптивная сетка.

занимаемой этим телом

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{\eta} \int_{\Omega_m} (\mathbf{u} + \mathbf{U} - \mathbf{U}_o)\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{5.6}$$

Таким образом, вычисление подъёмной силы и лобового сопротивления тел и, при необходимости, соответствующих моментов сил, действующих на тело, довольно просто, вычислительно эффективно, и не требует интегрирования вдоль поверхности тела. Это свойство особенно полезно при решении задач о взаимодействии жидкости с подвижными объектами (телами), движущимися под влиянием этих сил и требующих вычисления гидродинамических сил при решении уравнений движения тел.

Несмотря на гибкость и простоту, метод штрафных функций Бринкмана имеет несколько недостатков. Во-первых присутствие большого множителя $1/\eta$ в штрафном члене уравнения 5.2 приводит к увеличению жесткости задач, что, однако, в связи с диагональной природой штрафного члена не представляет трудности при использовании неявных методов интегрирования во времени. Вторым существенным недостатком метода штрафных функций Бринкмана является существование тонкого пограничного слоя $O\left((\nu\eta)^{1/2}\right)$ вдоль внутренней границы тела, требующего разрешения. Этот, часто цитируемый недостаток, присущий большинству методов погруженных границ, приводит к дополнительным вычислительным затратам, связанным с уменьшением толщины пограничного слоя, требующего численного разрешения. Однако этот недостаток приводит с существенному увеличению вычислительных затрат только при использовании неадаптивных структурированных или зональных сеток [172]. Применение адаптивных вейвлетных методов уменьшает дополнительные затраты до минимума, так как дополнительные затраты пропорциональны объёмной доли тонкого пограничного слоя вдоль поверхности, объём которого мал по сравнению с объёмом всей вычислительной области. Степень разреженности вычислительной сетки внутри тела проиллюстрирована на рис. 5.1 б. Следует отметить, что при применении адаптивных вейвлетных методов общая ошибка численного решения может априорно контролироваться вейвлетным порогом ε и штрафным параметром η, обеспечивая оптимальное сжатие решения и необходимое сеточное разрешение пристеночного слоя.

5.2.2 Метод интегрирования во времени и решение уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу взаимодействия несжимаемой вязкой жидкости с подвижным телом, описываемую следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\eta} \chi(\mathbf{x}_o)(\mathbf{u} + \mathbf{U} - \mathbf{U}_o), \tag{5.7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{5.8}$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}_o}{dt^2} + b \frac{d\mathbf{x}_o}{dt} + k\mathbf{x}_o = \mathbf{F}(t), \tag{5.9}$$

где уравнения (5.7)–(5.8) представляют собой пенализированные уравнения Навье—Стокса (5.2)–(5.3) с опущенным для простоты индексом η и уравнением движения центра массы тела $\mathbf{x}_o$, описываемое уравнением затухающего гармонического осциллятора при воздействии гидродинамических сил $\mathbf{F}$, вычисленных, используя выражение (5.6). Уравнение движения тела решено с помощью метода Адамса—Башфорта второго порядка [16].

По аналогии с адаптивным вейвлетным коллокационным методом для решения уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, описанного в разделе 4.1, рассмотрим случай применения простейшего метода интегрирования по времени. Как и в разделе 4.1, метод интегрирования во времени основан на методе расщепления, в котором промежуточное несоленоидальное поле скоростей, получаемое после первого шага интегрирования (шага прогноза), корректируется, используя метод проекции давления, гарантирующего соленоидальность поля скоростей после шага коррекции. Для вычисления поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t_{n+1}) \equiv \mathbf{u}^{n+1}$ в момент времени t_{n+1} при заданных с предыдущего шага по времени давлении P^n и скорости $\mathbf{u}^n$, вначале решается пенализированное уравнение Навье—Стокса (5.7)–(5.8) с фиксированным давлением P^n

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{u}_* \equiv \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\eta}\chi(\mathbf{x}_o)\right)\mathbf{u}_* + (\mathbf{u}_n + \mathbf{U})\cdot\nabla\mathbf{u}_* + \nu\Delta\mathbf{u}_* = \\ = \frac{\mathbf{u}_n}{\Delta t} - \frac{1}{\eta}\chi(\mathbf{x}_o)(\mathbf{u}_* + \mathbf{U} - \mathbf{U}_o),\end{aligned} \tag{5.10}$$

где $\mathbf{u}_*$ — промежуточное несоленоидальное поле скоростей, а $\mathcal{L}$ — линейный оператор. Отметим применение неявной схемы для дискретизации во времени оператора Лапласа и штрафной функции уравнения (5.7) и полу-неявной схемы для дискретизации конвективных членов. Аналогично методу, описанному в разделе 4.1, линейная система (5.10) решается с помощью метода сопряженных градиентов BI-CGSTAB [240]. Обратим внимание, что коррекционный шаг не меняет поле завихренности $\omega_{n+1} = \omega_* = \nabla\times\mathbf{u}_*$, поэтому для уменьшения ошибки, вызванной сглаживанием решения около границы поверхности при проекции поля скорости $\mathbf{u}_*$, гидродинамические силы вычисляются, используя промежуточную скорость $\mathbf{u}_*$ в уравнении (5.6).

Следует отметить, что наличие оператора Лапласа в уравнении (5.7) подразумевает дифференцируемость $\mathbf{u}_*$, несмотря на разрывную природу штрафной функции [135]. Отметим, что при решении пенализированной системы (5.7)–(5.9), не применяя метод расщепления, дивергенция источникового члена, необходимого для решения уравнения Пуассона для давления, формально приводит к появлению особенности на границе области. Таким образом, метод расщепления является естественным выбором при использовании метода штрафных функций Бринкмана.

Шаг коррекции скорости $\mathbf{u}_*$ в методе расщепления при решении пенализированных уравнений (5.7)–(5.8) абсолютно идентичен методу, описанному в разделе 4.1, и основан на проекции давления (4.4), где давление P^{n+1} получается из решения уравнения Пуассона (4.5). Отметим, что, как и в разделе 4.1, оператор Лапласа дискретизирован как последовательность операторов дивергенции и градиента с противоположной асимметрией шаблонов, что позволяет избежать неустойчивости решения, связанной с четно-нечетным размежеванием

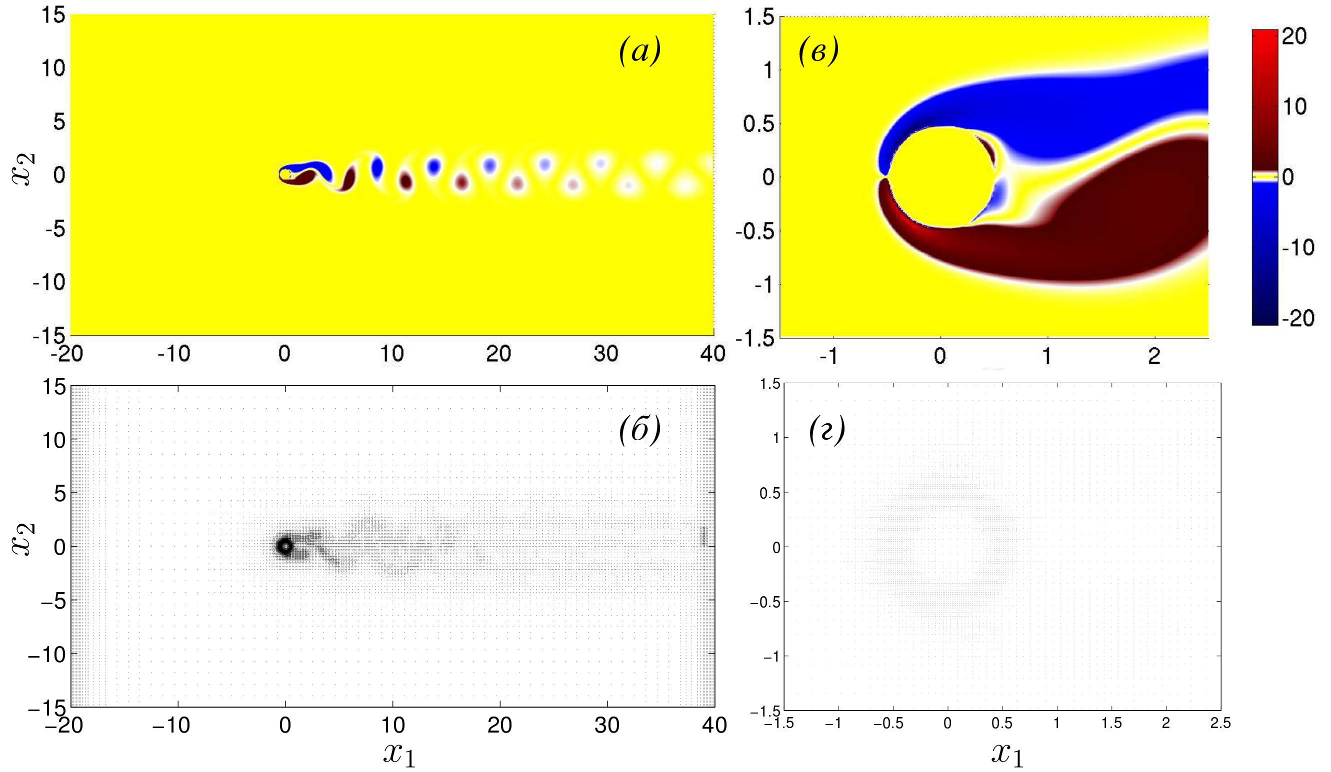


Рисунок 5.2 — Двумерное обтекание стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$ в момент времени $t = 150$: (а) завихренность, (б) адаптивная сетка, (в) завихренность в увеличенной области вблизи цилиндра и (г) адаптивная сетка в увеличенной области вблизи цилиндра.

узлов. Уравнение Пуассона (4.5), как и в разделе 4.1, решается с помощью многоуровневого вейвлетного коллокационного эллиптического решателя, описанного в подразделе 1.4.2.

5.2.3 Обтекание стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$

Рассмотрим двумерную задачу обтекания несжимаемой вязкой жидкостью стационарного цилиндра диаметра $D = 1$ в вычислительной области $\Omega_s = [-20{,}40] \times [-15{,}15]$ при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100$. Большой размер области позволяет применение периодических граничных условий в вертикальном направлении. В качестве граничных условий на вертикальных границах используются условия Робена $\partial\mathbf{u}/\partial x = \mathbf{u}$ на левой границе и $\partial\mathbf{u}/\partial x = -\mathbf{u}$ — на правой.

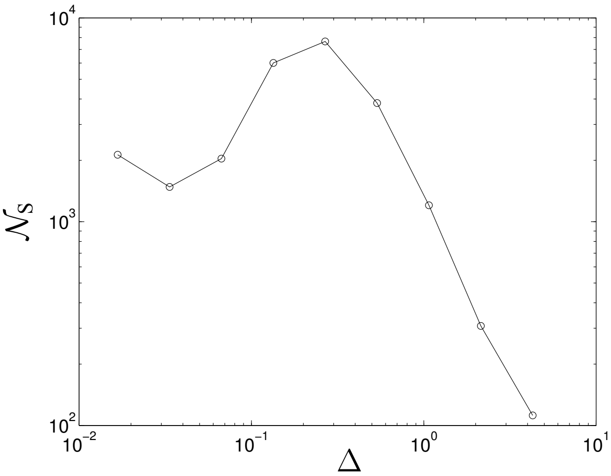


Рисунок 5.3 — Распределение количества узлов адаптивной сетки в зависимости от локального сеточного разрешения Δ для задачи двумерного обтекания стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$. Сеточное разрешение: $\Delta = \min(L_{x_1}, L_{x_2})/(14 \times 2^{j-1})$, где j — локальный уровень разрешения.

Для уменьшения численной неустойчивости на вертикальных границах применяется тонкая область единичной толщины с постоянным сеточным разрешением λ, соответствующим масштабу Тейлора, при максимальном сеточном разрешении $\Delta_{\min} = \lambda/6$ и эффективном сеточном разрешении $3\,584 \times 1\,792$. В качестве начальных условий используется $\mathbf{u} = 0$, что соответствует мгновенному началу движения жидкости в момент времени $t = 0$. Размер шага по времени выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось условие $CFL = 1$.

Завихренность и соответствующая адаптивная вычислительная сетка в момент времени $t = 150$ при установившейся вихревой дорожке Кармана приведены на рис. 5.2. Из рисунка видно, как адаптивная вычислительная сетка отслеживает область сильной завихренности. Также отметим свободное прохождение вихревых структур через правую границу без искажения и отражения. В правом столбце рис. 5.2 показана увеличенная область вблизи цилиндра для завихренности и адаптивной вычислительной сетки, на которой видно присутствие узлов сетки внутри цилиндра и быстрое разрежение сетки вдали от границы цилиндра. Распределение узлов адаптивной сетки в зависимости от локального сеточного разрешения приведено на рис. 5.3, из которого видно, что максимальное количество узлов приходится на уровень, соответствующий масштабу Тейлора $\lambda = O(Re^{-1/2})$, наиболее динамически важному масштабу течения.

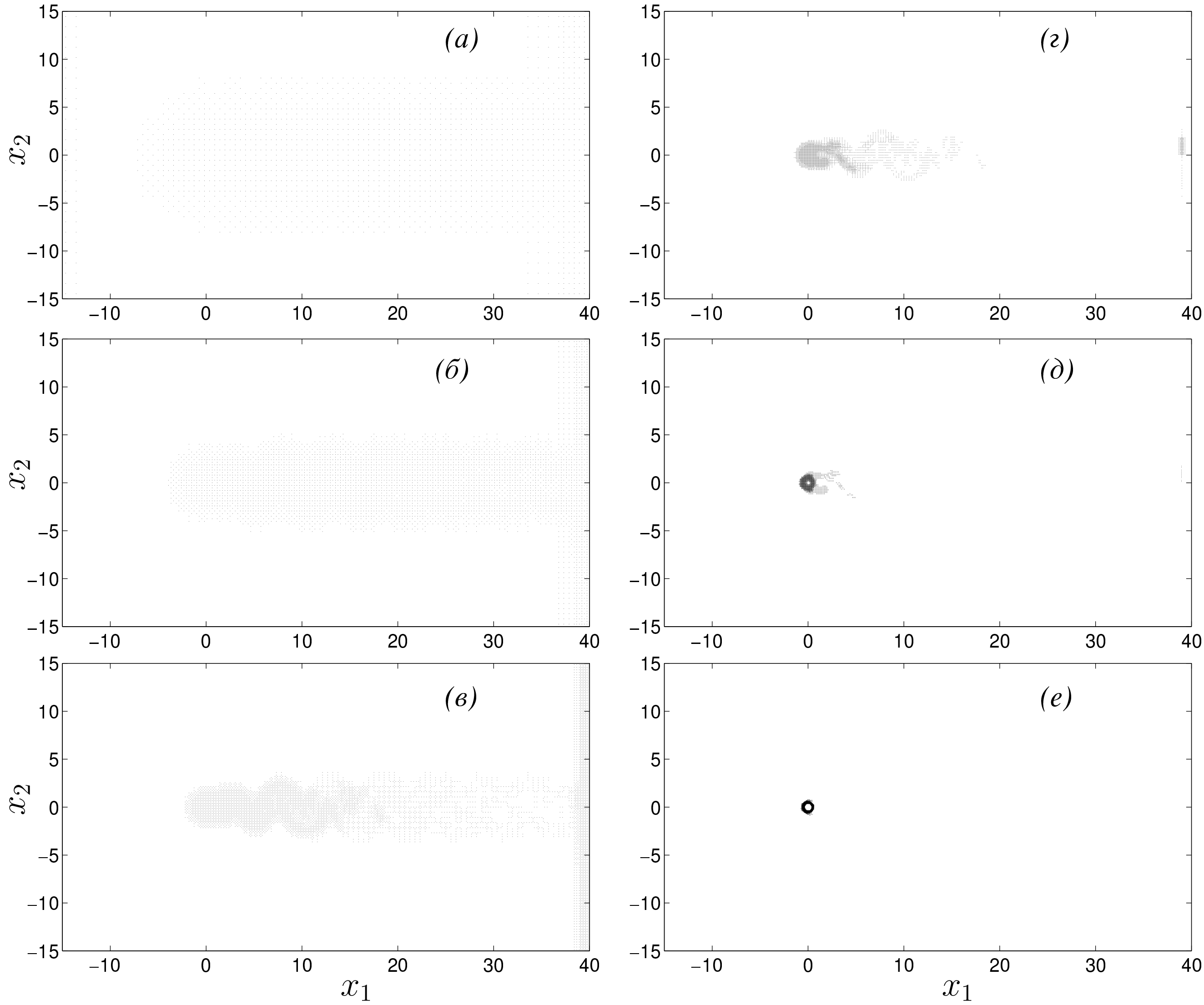


Рисунок 5.4 — Узлы адаптивной сетки, соответствующие разным уровням разрешения j: (а) $\mathcal{N}_S{}^4 = 2\,224$, (б) $\mathcal{N}_S{}^5 = 4\,836$, (в) $\mathcal{N}_S{}^6 = 7\,794$, (г) $\mathcal{N}_S{}^7 = 2\,977$, (д) $\mathcal{N}_S{}^8 = 1\,810$, (е) $\mathcal{N}_S{}^9 = 2\,261$.

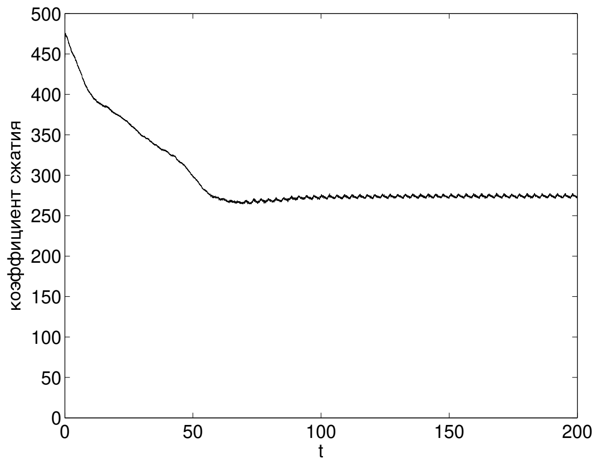


Рисунок 5.5 — Эволюция во времени коэффициента сжатия при двумерном обтекании стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$.

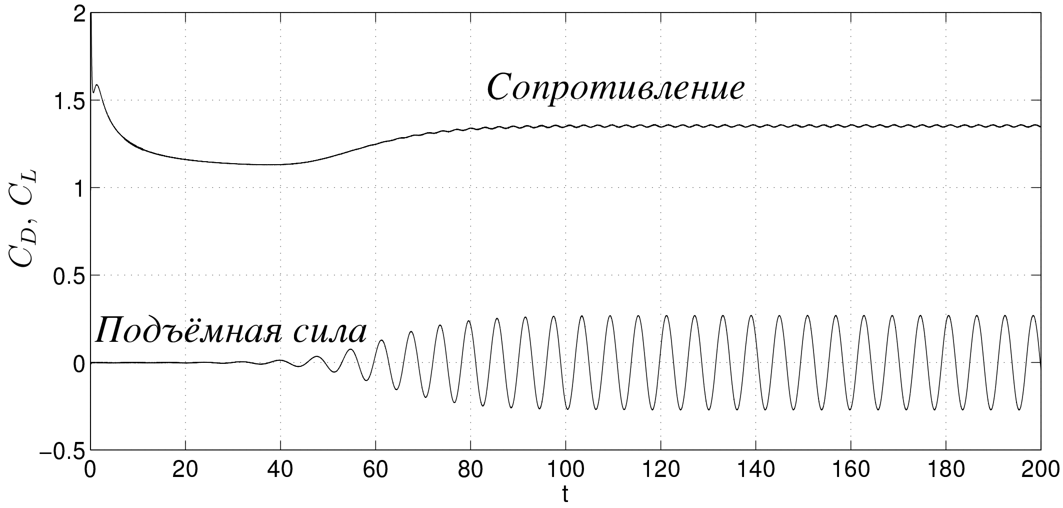


Рисунок 5.6 — Эволюция во времени коэффициентов подъёмной силы и сопротивления для задачи двумерного обтекания стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$.

Для большего понимания вейвлетной сеточной адаптации и распределения узлов по пространству и масштабам на рис. 5.4 приведены значимые узлы адаптивной сетки, соответствующие разным уровням разрешения. Из рисунка видно, что максимальное разрешение необходимо только в непосредственной близости с границей цилиндра, при этом сеточное разрешение плавно уменьшается с диффузией завихренности вниз по течению. Зависимость коэффициента сжатия сетки от времени показана на рис. 5.5, из которого видно, что сеточное сжатие уменьшается при формировании дорожки Кармана до квазистационарного уровня, объяснимое формированием вихревых структур в переходном режиме. Следует отметить, что вычислительная стоимость адаптивного вейвлетного коллокационного метода, нормированного на количество узлов адаптивной сетки, примерно в 4 раза медленнее спектрального метода, используемого в работе [135], так что коэффициент сжатия 270 представляет собой примерно 68-ми кратное ускорение по сравнению со спектральным методом.

Эволюция коэффициентов подъёмной силы и лобового сопротивления при обтекании стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$ представлена на рис. 5.6. Отметим, что при достижении квазистационарного режима обтекания, средний коэффициент сопротивления равен $C_D = 1.35$, амплитуда коэффициента подъёмной силы равна $C_L = 0.27$, а число Струхаля — $\mathrm{St} = 0.168$. Эти значения близки к результатам вычислений, использующих метод вихрей [218] $C_D = 1.33$, $C_L = 0.3$, $St = 0.167$, и немного отличаются от результатов вычислений на основе метода конечных объёмов [187] $C_D = 1.25$, $C_L = 0.37$, $\mathrm{St} = 0.164$ и экспериментально полученного $\mathrm{St} = 0.164$ [251]. Таким образом, результаты вычислений гидродинамических сил и частоты образования вихрей находятся в согласии с ранее полученными экспериментальными и численными результатами.

5.2.4 Обтекание подвижного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$

Рассмотрим случай подвижного цилиндра, приведённого в движение под действием гидродинамических сил, движение которого описывается уравнением гармонического осциллятора (5.9) с нулевым коэффициентом демпфирования $b = 0$, безразмерным коэффициентом упругости $k^* = k/(1/2\rho U^2) = 8.74$ и массой $m^* = m/(1/2\rho D^2) - \pi/2 = 5$, где $\pi/2$ — нормализованная присоединенная масса, связанная с объёмом жидкости, вытесненной цилиндром. Параметры задачи соответствуют параметрам, использованным в работе [218]. Результаты вычислений, описанных в этом подразделе, демонстрируют гибкость совместного применения AWCM и метода штрафных функций Бринкмана, в котором движение цилиндра может быть описано изменением положения маркировочной штрафной функции χ без использования неинерциальной системы отсчёта или пересчёта расчётной сетки, согласованной с поверхностью цилиндра.

Поле завихренности и соответствующая адаптивная сетка в момент, когда цилиндр находится в самом верхнем положении, показаны на рис. 5.7. Обратим внимание, что, как и в случае стационарного цилиндра, адаптивная сетка отслеживает границу цилиндра и вихревые структуры. Эволюция во времени коэффициентов сопротивления и подъёмной силы, а также вертикального смещения цилиндра приведены на рис. 5.8. Амплитуда колебаний цилиндра $A = 0.42$, коэффициент подъёмной силы $C_L = 0.81$ и число Струхаля $\mathrm{St} = 0.189$ близки к значениям, полученным методом вихрей $A = 0.57$, $C_L = 0.83$ и $\mathrm{St} = 0.194$ [218], в то время как коэффициент сопротивления $C_D = 1.74$ намного меньше коэффициента $C_D = 2.26$, опубликованного в работе [218], что связано с возможным несоответствием определения силы сопротивления в случае подвижного цилиндра.

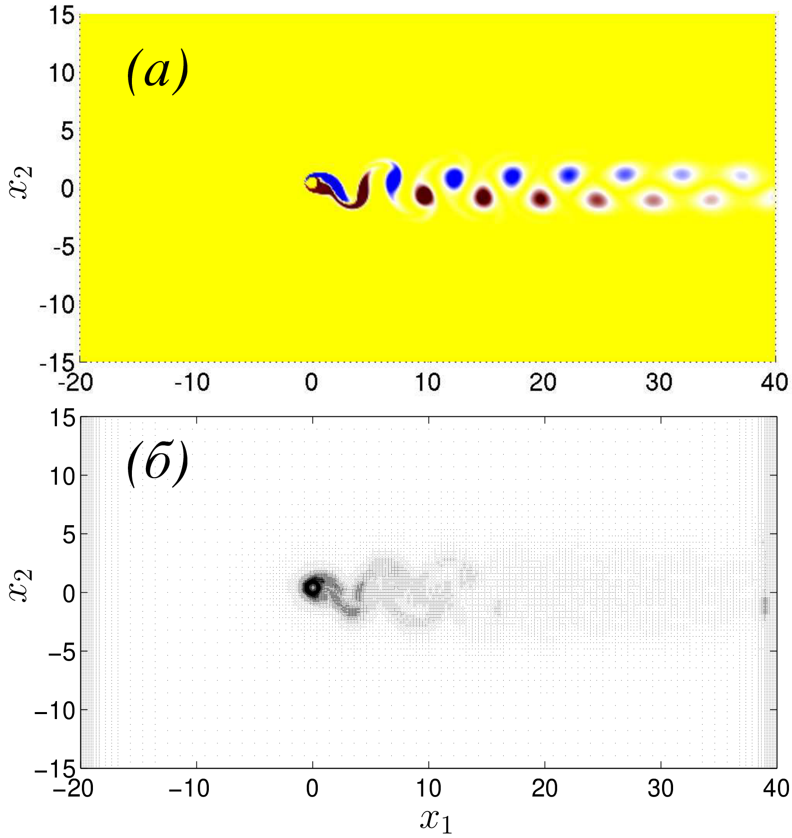


Рисунок 5.7 — Двумерное обтекание подвижного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$ в момент времени $t = 131$: (а) завихренность, (б) адаптивная сетка.

Следует отметить, что применение метода штрафных функций Бринкмана позволяет моделирование более сложных задач взаимодействия жидкости и твёрдых тел, включающих движение нескольких тел, а также вращение и изменение формы.

5.2.5 Обтекание стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 3\,000$

В качестве последней тестовой задачи этого подраздела, демонстрирующей способность метода моделировать течения с сингулярными начальными условиями и разрешать области сильных градиентов решения, рассмотрим обтекание стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при мгновенном начале движения жидкости и числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 3\,000$. Поскольку основной

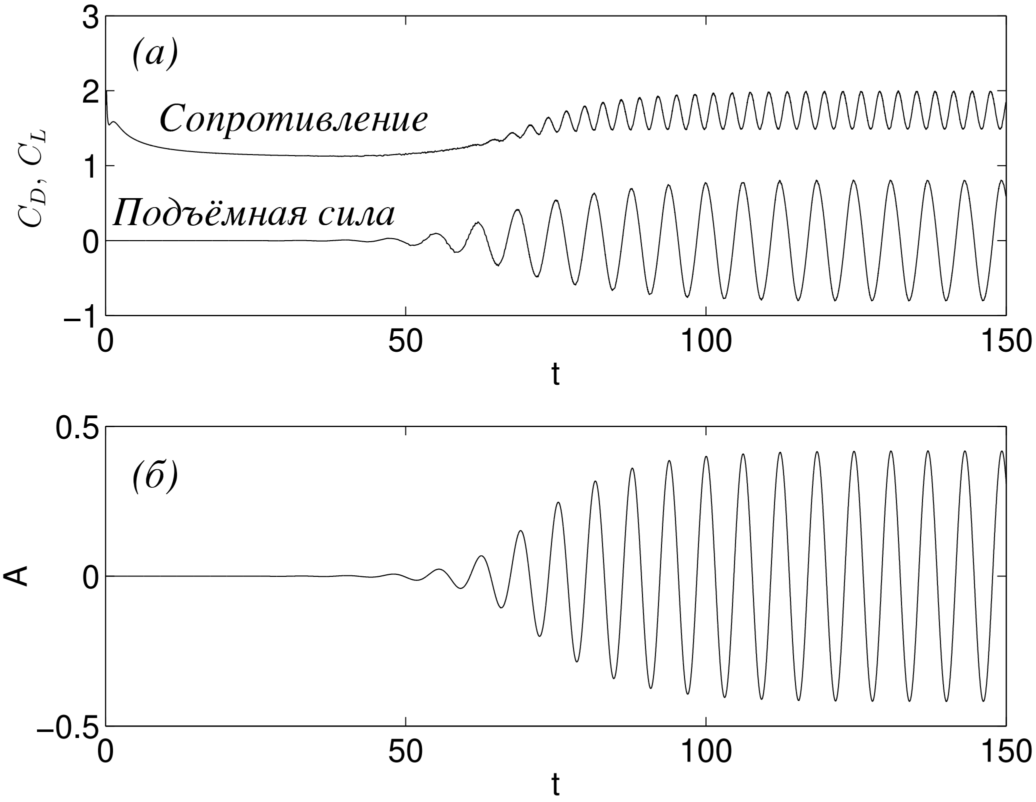


Рисунок 5.8 — Эволюция во времени (а) коэффициентов сопротивления и подъёмной силы, (б) вертикального смещения цилиндра для задачи двумерного обтекания подвижного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 100$.

интерес данной задачи заключается в получении точного решения на разных стадиях развития течения, задача решена в большой области $[-10{,}10] \times [-10{,}10]$ с дважды периодическими граничными условиями, с эффективным сеточным разрешением $6\,144 \times 6\,144$, соответствующим $\lambda/5.6$, и постоянным шагом по времени $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$, обеспечивающим соблюдение условия $CFL \leqslant 1$.

Поле завихренности, приведённое на Рис 5.9, эквивалентно рисунку 21 работы [142] и демонстрирует разрешение мелких структур завихренности. Как и в предыдущих примерах, адаптивная сетка отслеживает вихревые структуры и границу цилиндра. Зависимость коэффициента сопротивления от времени и сравнение с аналитическим асимптотическим решением [15] для начальной стадии развития течения и результатами вычислений с помощью метода вихрей [142] приведены на рис. 5.10. Как видно из рисунка, решения практически совпадают и полностью отслеживают асимптотику $O(t^{-1/2})$ начальной стадии сингулярного решения. Совпадение решения с методом вихрей подтверждает точность совместного метода штрафных функций и адаптивного вейвлетного коллокационного метода. Отметим, что в отличие от метода вихрей, моделирующего эволюцию

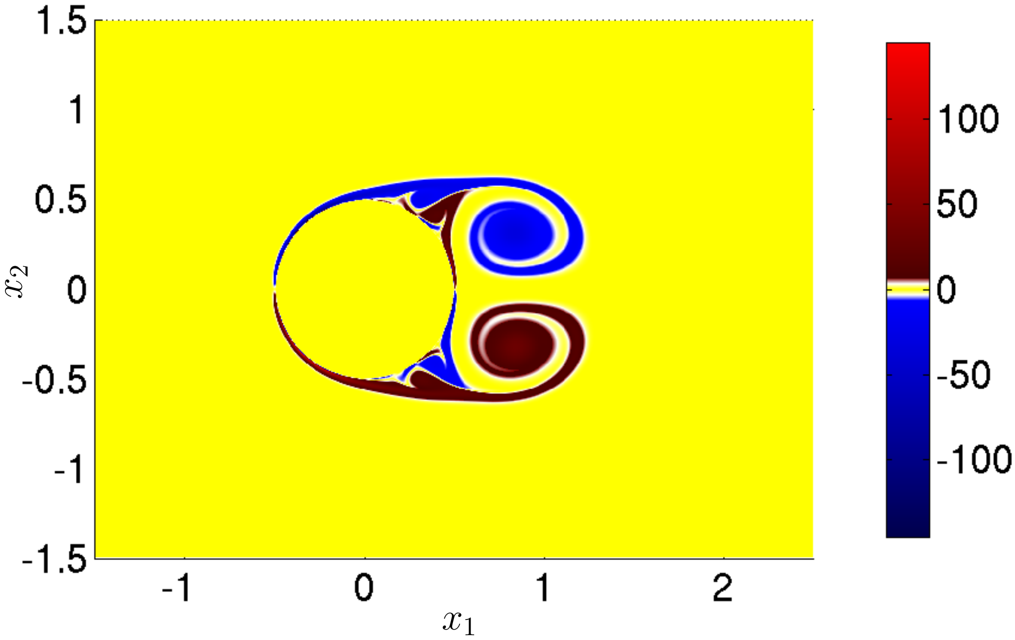


Рисунок 5.9 — Поле завихренности в момент времени $t = 3.0$ для задачи обтекания стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при мгновенном начале движения жидкости и $\mathrm{Re} = 3\,000$.

завихренности, совместный AWCM/МШФБ решает уравнения Навье—Стокса в формулировке скорость-давление. Стоит заметить, что в работе [142] отмечалось, что в большинстве ранее опубликованных исследований не удалось точно предсказать асимптотику начальной стадии развития течения и замедление роста коэффициента сопротивления в промежутке времени $1 \leqslant t \leqslant 2$.

Интересно сравнить количество вычислительных степеней свободы (узлов сетки или числа дискретных вихрей), используемых вейвлетным методом и методом вихрей. В момент времени $t = 3.0$ AWCM использовал 4.3×10^4 адаптивных узлов сетки с коэффициентом сжатия $\mathcal{C} = 880$ по сравнению с 3.8×10^5 дискретных вихрей, то есть почти в 9 раз меньше, чем в методе вихрей. Таким образом, вейвлетный адаптивный коллокационный метод, интегрированный с методом штрафных функций Бринкмана, более эффективен с точки зрения представления решения с минимальным числом степеней свободы, хотя следует отметить, что вычислительная стоимость, нормированная на количество узлов/дискретных вихрей, в методе вихрей меньше по сравнению с AWCM.

Обратим внимание, что применение метода штрафных функций Бринкмана в формулировке уравнения Гельмгольца для моделирования течений в сложной геометрии при больших числах Рейнольдса приводит к неточным результатам. Так, результаты численных экспериментов показали, что в задаче обтекания ста-

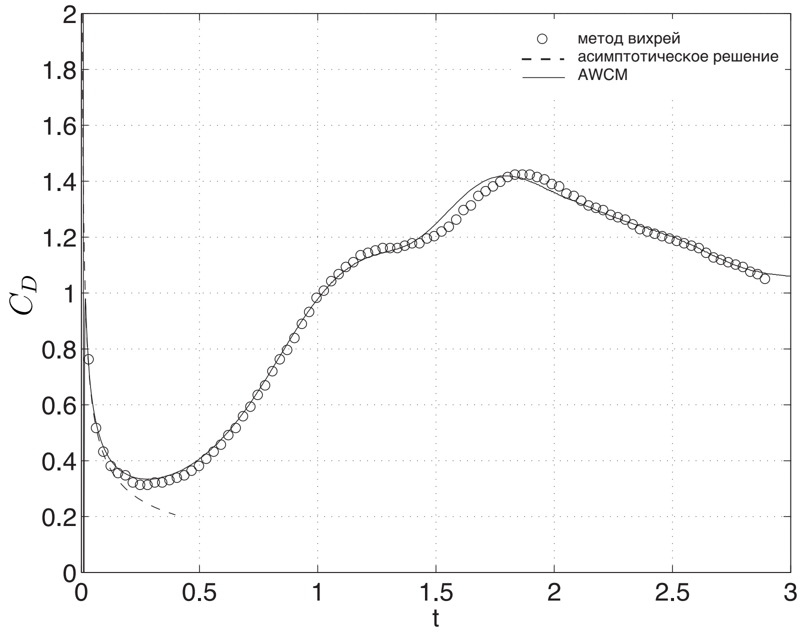


Рисунок 5.10 — Зависимость от времени коэффициента сопротивления для задачи обтекания стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при мгновенном начале движения жидкости и $\mathrm{Re} = 3\,000$, полученная с применением AWCM, интегрированного с методом штрафных функций Бринкмана (——), асимптотического решения [15] (- - - -) и метода вихрей [142] ($\circ$).

ционарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при мгновенном начале движения жидкости и $\mathrm{Re} = 3\,000$ ошибка решения пенализированного уравнения Гельмгольца достигает 50% в момент времени $t = 0.1$ по сравнению с результатами точного решения уравнений Навье—Стокса, приведённого на рис. 5.10. Также обратим внимание, что применение метода штрафных функций Бринкмана в формулировке переменных скорость-давление приводит к более точным результатам при моделировании подвижных тел с использованием разрывной маркировочной штрафной функции, в то время как метод штрафных функций Бринкмана в формулировке завихренности приводит к неточным результатам и требует сглаживания маркировочной штрафной функции, вызванного необходимостью дифференцирования штрафной функции при решении уравнений эволюции завихренности. Следует также подчеркнуть, что коэффициент сжатия при решении уравнений Гельмгольца обычно на $20-30\%$ выше, чем при решении уравнений Навье—Стокса в формулировке переменных скорость-давление. Таким образом, при численном моделировании течений сложной геометрии при больших числах Рейнольдса рекомендуется использовать формулировку в переменных скорость-давление, что также подтверждается результатами рис. 5.11, на котором приведено сравнение

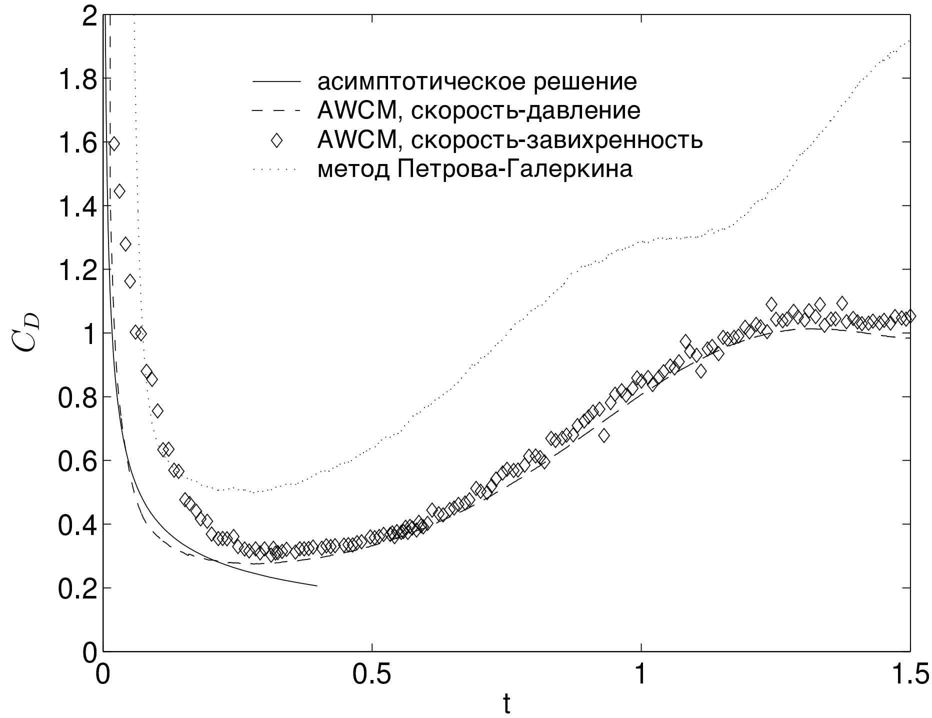


Рисунок 5.11 — Зависимость от времени коэффициента сопротивления для задачи обтекания стационарного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при мгновенном начале движения жидкости и $\mathrm{Re} = 3\,000$, полученная с применением AWCM в формулировке переменных скорость-давление (----) и скорость-завихренность ($\diamond$), а также вейвлетного метода Петрова—Галеркина в переменных скорость-завихренность [212] (·······). Асимптотическое решение [15] (——) приведено для сравнения.

результатов вычислений AWCM в формулировке переменных скорость-давление и скорость-завихренность [331] и вейвлетного метода Петрова—Галеркина [212] для решения пенализированных уравнений завихренности. Интересно заострить внимание на двух аспектах численного решения — относительной эффективности и точности формулировки в переменных скорость-давление по сравнению с формулировкой в переменных скорость-завихренность. Для более точного сравнения с результатами, опубликованными в работе [212], использовалась меньшая вычислительная область $\Omega_\mathrm{s} = [-2{,}2] \times [-2{,}2]$ с дважды периодическими граничными условиями на адаптивной сетке с эффективным разрешением 512×512, соответствующим $\lambda/2.4$. Оба решения получены с помощью AWCM, но в разных формулировках.

В момент времени $t = 3$ AWCM в формулировке переменных скорость-давление использует 2.5×10^4 узлов адаптивной сетки по сравнению с 2.1×10^4 в вейвлетном методе Петрова—Галеркина [212], то есть на 20% больше, что подтверждает незначительное падение коэффициента сжатия в формулировке переменных скорость-давление. Отметим существенное отличие решения в формулировке переменных скорость-завихренность по сравнению с асимптотическим решением [15], а также разницу между решениями на основе методов AWCM и Петрова—Галеркина, возникшую в результате применения постоянного шага по времени в работе [212] и адаптивного метода интегрирования в AWCM.

5.3 Метод штрафных функций Бринкмана для уравнений Навье—Стокса для сжимаемого газа

Разнообразные методы погруженных границ, некоторые из которых описаны в разделе 5.1, в основном разработаны для несжимаемой жидкости. Одной из первых попыток разработать метод погруженных границ для сжимаемого газа была предпринята в работе [103], в которой для моделирования граничных условий модифицировались дискретизированные уравнения вблизи границ тела. Однако в формулировке работы [103] не учитываются отражение от поверхности препятствия и прохождение акустических волн через границу газа и тела, что может привести к существенной ошибке, особенно при наличии ударных волн. Метод несогласованного импеданса, разработанный для моделирования распространения и отражения акустических волн от поверхностей сложной геометрии без использования сетки, согласованной с поверхностью тела, был предложен в работе [47], однако его применение ограничено линеаризованными задачами акустики со стационарным осреднённым полем скоростей [3; 47; 145]. Метод несогласованного импеданса обобщён в работе [54] для нестационарных неоднородных течений, однако метод обладает существенными недостатками, связанными с потерей точности и устойчивости решения вблизи границы твёрдого тела. Принцип работы метода заключается в применении большего характеристического импеданса внутри твёрдых тел, что приводит к отражению акустических волн от поверхности тела. Так, например, в случае, когда безразмерная плотность твёрдого тела — $\rho_s = 30$, а плотность сжимаемой жидкости/газа — $\rho_f = 1$, то относительная ошибка амплитуды отраженной волны $O\left(\frac{2\rho_f}{\rho_s+\rho_f}\right)$ составляет примерно 6.5%, а относительная ошибка энергии отраженной волны $O\left(\frac{4\rho_f\rho_s}{(\rho_s+\rho_f)^2}\right)$ составляет примерно 12.5%. Существенным недостатком метода несогласованного импеданса является отсутствие механизма определения условия прилипания и более общих граничных условий.

В этом разделе обсуждается обобщение метода штрафных функций Бринкмана для течений сжимаемого газа, базирующееся на физически обоснованной математической модели течения сжимаемой жидкости/газа через пористую среду. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работах автора [314; 315]. В обобщённой формулировке метода штрафных функций Бринкмана в дополнение к штрафной функции в уравнении сохранения импульса также пенализированы уравнения сохранения массы и энергии, при этом уравнение неразрывности модифицируется с соблюдением физики течения в пористой среде. В результате в обобщённом методе штрафных функций Бринкмана пенализированная область ведёт себя как среда с большим акустическим импедансом, приводящим к незначительному проникновению волн. Более того, как и в случае несжимаемой жидкости, ошибка решения пенализированных уравнений может контролироваться значениями параметров штрафных функций.

Как и в случае с несжимаемой жидкостью, обобщённый метод штрафных функций Бринкмана может быть применён совместно с любым численным методом, включая методы, не использующие согласованные с границей сетки, при этом обобщённый метод может применяться только в областях изменения геометрии без изменения базовой вычислительной сетки. Однако как уже отмечалось в разделе 5.1, эффективное применение метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования течений с большими числами Рейнольдса подразумевает использование вычислительных подходов с динамической сеточной адаптацией, таких как адаптивный вейвлетный коллокационный метод, описанный в разделе 1.5.

5.3.1 Краткий обзор уравнений движения жидкости/газа в пористой среде

Как обсуждалось в предыдущем разделе, при использовании метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости твёрдые тела моделируется как пористая среда, при этом граничные условия на поверхности твёрдого тела задаются неявно с помощью штрафных функций и автоматически выполняются при одновременном решении уравнений Навье—Стокса в жидкости и пенализированных уравнений Навье—Стокса в штрафной области. Ввиду неявной зависимости граничных условий от штрафных функций, обобщение метода штрафных функций Бринкмана для течений сжимаемого газа не так очевидно, как кажется с первого взгляда. Например, простое включение штрафных функций в уравнение сохранения энергии не достаточно, так как нефизичное прохождение волн через препятствие приводит к большой потере массы и энергии отраженных волн [314]. Ошибочность такого расширения метода штрафных функций Бринкмана заключается в использовании физически несогласованных штрафных функций, автоматически не гарантирующих правильное отражение волн. Таким образом, для автоматического выполнения граничных условий и физически правильного отражения волн обобщение метода штрафных функций Бринкмана должно быть основано на физически состоятельной модели течения сжимаемого газа через пористую среду. Прежде чем обсуждать обобщение метода штрафных функций Бринкмана для моделирования обтекания твёрдых тел сжимаемым вязким газом, кратко обсудим физику и уравнения, описывающие течение сжимаемого газа в пористой среде. Более детальное обсуждение физики течений сжимаемого газа в пористой среде может быть найдено в книгах [131; 176; 191].

Некоторые важные свойства течений в пористой среде

Пористая среда представляет собой твердую матрицу с соединёнными между собой порами, заполненными жидкостью или газом, протекающими через пористый материал. Пористая среда может быть охарактеризована характерным размером пор d, макроскопическим масштабом длины L, пористостью φ и проницаемостью K. Отметим отличие пористости и проницаемости, соответственно измеряющих объёмную долю сообщающихся пор и проводимость твёрдой матрицы, пропорциональной φd^2. Также обратим внимание на различие между скоростью жидкости или газа $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и скоростью просачивания $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, также известной как скорость Дарси, связанных между собой соотношением Дюпюи-Форхгеймера [176]:

$$\mathbf{v} = \varphi \mathbf{u}. \tag{5.11}$$

Ввиду малости величины пористости $\varphi \ll 1$, величина скорости просачивания $\mathbf{v}$ существенно меньше величины скорости $\mathbf{u}$.

Уравнение неразрывности

Для пористых сред уравнение неразрывности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right), \tag{5.12}$$

где ρ — плотность внедрённой жидкости или газа, а пористость является функцией координаты, то есть $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$.

Закон Дарси, уравнение Бринкмана и его расширения

Модели, описывающие сохранение импульса в пористой среде, довольно разнообразны. Самой простой моделью является закон Дарси [62]:

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\mu}\nabla p, \tag{5.13}$$

в котором μ — динамическая вязкость, а p — внутреннее давление жидкости или газа. Закон Дарси предполагает баланс между градиентом давления, приводящим к просачиванию жидкости/газа, и вязким сопротивлением, препятствующим движению жидкости/газа. Для решения более сложных задач, требующих выполнения условия прилипания, закон Дарси может быть обобщён введением диффузионного члена и записан в виде уравнения Бринкмана [29; 30]

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\mathbf{v} + \mu\nabla^2\mathbf{v}, \tag{5.14}$$

в котором присутствуют два вязких члена.

Для рассмотрения нестационарных задач сжимаемой жидкости были предложены обобщения закона Дарси [254]

$$\rho\left[\varphi^{-1}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\varphi^{-1}\mathbf{v}\cdot\nabla)(\varphi^{-1}\mathbf{v})\right] = -\nabla p - \frac{\mu}{K}\mathbf{v} \tag{5.15}$$

и уравнений Бринкмана [120; 238]

$$\rho\left[\varphi^{-1}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\varphi^{-1}\mathbf{v}\cdot\nabla)(\varphi^{-1}\mathbf{v})\right]=-\nabla p-\frac{\mu}{K}\mathbf{v}+\mu\nabla^2\mathbf{v}. \tag{5.16}$$

Оба расширения могут быть выведены с применением метода усреднения по объёму [131; 238]. Отметим, что с учётом уравнения неразрывности (5.12), уравнения (5.15) и (5.16) могу быть записаны в следующем виде:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}=-\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\varphi^{-1}v_iv_j\right)-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\mu}{K}v_i, \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}=-\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\varphi^{-1}v_iv_j\right)-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\mu}{K}v_i+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}. \tag{5.18}$$

Следует обратить внимание, что все вышеупомянутые уравнения являются моделями пористой среды. В работе [17] была отмечена нефизичность включения конвективного члена $(\varphi^{-1}\mathbf{v}\cdot\nabla)(\varphi^{-1}\mathbf{v})$ из-за повышения порядка уравнения и и несогласованности с граничными условиями проскальзывания. В работе [176] было предложено не использовать конвективный член при численном моделировании течений в пористой среде. Следует также обратить внимание, что следствием уравнений (5.17) и (5.18) является экспоненциальное $\exp\left[-\frac{\varphi\nu t}{K}\right]$ затухание решения во времени, что приводит к слабому влиянию нестационарных и конвективных членов на решение задачи. Для применения уравнений пористой среды в контексте обощения метода штрафных функций Бринкмана, уравнение (5.18) может быть упрощено и модифицировано для большего подобия уравнениям Навье—Стокса для сжимаемого газа. Такое упрощение допустимо, так как штрафная функция приводит к затуханию импульса внутри пористой среды, при этом обеспечивая автоматическое выполнение условия прилипания на границе раздела.

Уравнение сохранения энергии

Уравнение сохранения энергии в пористой среде может быть записано как

$$\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(e+p)\,v_j\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)-\frac{h}{\varphi}(T-T_0), \tag{5.19}$$

где последний член в правой части уравнения описывает теплообмен между матрицей и жидкостью/газом, e — полная энергия, h — коэффициент теплопередачи и T_0 — температура твёрдой матрицы.

5.3.2 Метод штрафных функций Бринкмана для течений сжимаемого газа

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса для сжимаемого химически инертного газа (4.9)–(4.13). Предположим, что задача решается в прямоугольной области $\Omega_{\mathrm{s}} = [L_{x_1\mathrm{l}}, L_{x_1\mathrm{h}}] \times [L_{x_2\mathrm{l}}, L_{x_2\mathrm{h}}] \times [L_{x_3\mathrm{l}}, L_{x_3\mathrm{h}}] \in R^3$, содержащей все тела O_m, на границе которых выполняются условия прилипания и изотермичности, заданные как

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U}_o \\ T &= T_o \end{aligned}\right\} \text{ on } \partial\Omega_m,\ \forall m, \tag{5.20}$$

где $\mathbf{U}_o$ и T_o — соответственно скорость и температура тел. Условие прилипания и температура на поверхности тела O_m могут быть заданы в неявном виде, следуя методологии, предложенной в работе [5] путем добавления штрафных функций в уравнения сохранения импульса и энергии. Однако как уже упоминалось, добавление этих штрафных функций не достаточно из-за нефизичного прохождения волн через препятствия. Для физически правильного прохождения и отражения волн от границы препятствий необходимо модифицировать уравнение сохранения массы таким образом, чтобы внутри тела уравнение сводилось к уравнениям сохранения массы в пористой среде. Таким образом, обезразмеренные пенализированные уравнения Навье—Стокса для сжимаемого газа могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[1 + \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)\chi\right]\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re_a}}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\chi}{\eta}(u_i - U_{oi}), \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(e+p)\,u_j\right] + \frac{1}{\mathrm{Re_a}}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \tau_{ij}) \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Re_a}\mathrm{Pr}(\gamma - 1)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) - \frac{\chi}{\eta_T}(T - T_o), \end{aligned} \tag{5.23}$$

где

$$
\begin{aligned}
p &= \rho T/\gamma, \\
\tau_{ij} &= \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \\
e &= \frac{1}{2}\rho u_i u_i + \frac{p}{\gamma - 1},
\end{aligned}
$$

φ — пористость, $\eta = \alpha\varphi$ — нормализованная вязкая проницаемость, $\eta_T = \alpha_T\varphi$ — нормализованная термопроницаемость, $\mathrm{Re_a} = \frac{\rho_0 c_0 L}{\mu_0}$ — акустическое число Рейнольдса, $\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$ — число Прандтля, $\mathbf{U}_o$ и T_o — нормализованные скорость и температура тела, а члены уравнений (5.21)–(5.23), выделенные синим цветом, представляют собой штрафные функции, определённые внутри тел O_m. Подчеркнём, что в последующем анализе предполагается малость параметров φ, η и η_T, то есть предполагается выполнение следующих неравенств: $0 < \varphi \ll 1$, $0 < \eta \ll 1$ и $0 < \eta_T \ll 1$. Переменные скорости, координат, времени, энергии, плотности, давления, вязкости, теплопроводности и температуры соответственно обезразмерены на характерные величины скорости звука в базовом состоянии c_0, длины L, времени L/c_0, энергии c_0^2, плотности ρ_0, давления $p_0 = \rho_0 R T_0$, вязкости μ_0, теплопроводности $\mu_0 c_{p_0}$ и температуры базового состояния T_0. Обратим внимание, что уравнения (5.21)–(5.23) заданы во всей области Ω_s, а крайние члены правой части уравнений (5.22) и (5.23) представляют собой штрафные функции для скорости и температуры внутри тела.

Отметим, что пенализированные уравнения Навье—Стокса для сжимаемого газа (5.21)–(5.23) могут быть использованы для моделирования обтекания тел сложной геометрии. В подразделах 5.3.3 и 5.3.5 приведён асимптотический анализ амплитудной и фазовой ошибок в случае отражения акустической волны малой амплитуды от поверхности твёрдого тела, моделируемой с помощью обобщённого метода штрафных функций Бринкмана для сжимаемого газа. Принимая во внимание физичность штрафных функций и линейную зависимость асимптотического разложения от амплитуды акустической волны, оценки ошибок применимы и в общем случае дозвуковых течений. Стоит подчеркнуть, что обобщённый метод штрафных функций Бринкмана не применим в случае набегающей ударной волны, для которого предложен новый метод характеристических штрафных функций, описанный в разделе 5.4.

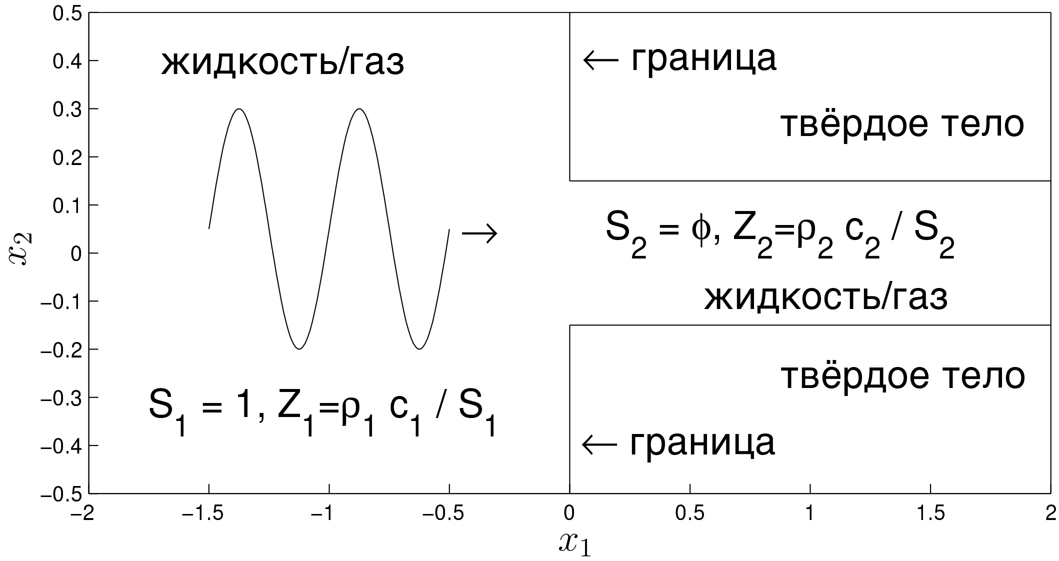


Рисунок 5.12 — Одномерная модель прохождения акустической волны через пористую среду, граничащую с газом/жидкостью.

5.3.3 Оценка амплитудной ошибки

Рассмотрим отражение плоской акустической волны от поверхности, разделяющей две среды, с точки зрения теории акустики [20]. Прохождение одномерной волны через пористую среду, граничащую с газом/жидкостью, может быть смоделировано как внезапное изменение площади эффективного сечения, схематически показанного на рис. 5.12. Из теории акустики коэффициент отражения $\mathcal{R}$ определяется как

$$\mathcal{R} \equiv \frac{p^{\text{in}}}{p^{\text{ref}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \tag{5.24}$$

где p^{in} — акустическое давление набегающей волны, $p^{\text{ ref}}$ — акустическое давление отраженной волны, а Z_1 и Z_2 — акустические импедансы двух сред, определённых как отношение осреднённого по поверхности акустического давления к объёмной скорости движения жидкости/газа

$$Z = \rho c/S, \tag{5.25}$$

где ρ — плотность жидкости/газа, c — скорость звука, а S — площадь эффективного сечения.

Из выражения 5.24 видно, что для полного отражения волны, акустический импеданс отражающей поверхности/тела должен быть намного больше акустического импеданса газа/жидкости, что и является основополагающим принципом в методе несогласованного импеданса [47]. Для простоты анализа рассмотрим пористую среду как набор параллельных трубок внутри твёрдой матрицы. В этом случае, предположив, что скорость звука и плотность жидкости/газа в обоих средах совпадают, коэффициент отражения (5.24) может быть записан в виде

$$\mathcal{R} = \frac{1-\varphi}{1+\varphi} \approx 1 - 2\varphi, \tag{5.26}$$

из чего вытекает $O(\varphi)$ порядок амплитудной ошибки отраженной волны, что согласуется с результатами асимптотического анализа, приведённого в следующем подразделе. Таким образом, при внезапном изменении площади эффективного сечения между жидкостью/газом и пористой средой, пористая среда ведёт себя как среда с высоким импедансом $Z = \rho c/\varphi$, что приводит к незначительному прохождению акустической волны через пористую среду.

5.3.4 Скорость звука в пористой среде

Рассмотрим распространение одномерной акустической волны через пористую среду в пределе малой пористости $0 \ll \varphi \ll 1$. Для простоты рассмотрим одномерные уравнения Эйлера для консервативных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \tag{5.27}$$

где $\mathbf{U} = \{\rho \;\; \rho u \;\; e\}^T$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{A}$ — матрица Якоби, в одномерном случае принимающая следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi^{-1} & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ -\gamma u e \rho^{-1} + (\gamma-1)u^3 & \gamma e \rho^{-1} - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

где

$$e = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1}. \tag{5.29}$$

Отметим, что $e\rho^{-1}$ в матрице Якоби (5.28) для удобства может быть записан как

$$\frac{e}{\rho} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}, \tag{5.30}$$

где величина c определена как $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$.

Для определения скорости звука в обоих средах определим собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{A}$ из решения характеристического уравнения

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0, \tag{5.31}$$

которое сводится к решению кубического уравнения

$$\begin{aligned}-(\lambda - u)^3 + \left[c^2 + \frac{u^2}{2}(\varphi^{-1} - 1)(\gamma - 3)\right](\lambda - u)\\ - c^2 u(\varphi^{-1} - 1) + \frac{u^3}{2}(\varphi^{-1} - 1)(\gamma - 1) = 0.\end{aligned} \tag{5.32}$$

В случае газа, то есть при $\varphi = 1$, решением кубического уравнения (5.32) являются u, $u - c$ и $u + c$, что подразумевает скорость звука c, определённую ранее. В случае пористой среды выражения для собственных значений довольно сложны, хотя могут быть найдены, например, с помощью метода Кардано. Однако в силу сильного демпфирования в пористой среде, описанной в подразделе 5.3.5, $u \sim O(\alpha\varphi)$, где $0 < \alpha, \varphi \ll 1$. Таким образом, пренебрегая членами более высокого порядка φ, могут быть найдены следующие собственные значения u, $u - c$ и $u + c$, что в пределе малой пористости подразумевает такую же скорость звука в пористой среде, что и в газе.

5.3.5 Асимптотический анализ амплитудной и фазовой ошибок

Одномерная задача распространения волны с амплитудой порядка ε_a через пористую среду, граничащую с газом/жидкостью, схематически изображена на рис. 5.13. Отметим, что задача распространения волны проанализирована в пределе малых значений пористости и проницаемости, а значит может быть использована для рассмотрения акустических волн большой амплитуды, то есть $\varepsilon_a = O(1)$, что подразумевает возможность применения оценки ошибок в общем случае дозвуковых течений. Однако для вывода асимптотического решения во всей области рассмотрим задачу в пределе малой амплитуды набегающей волны.

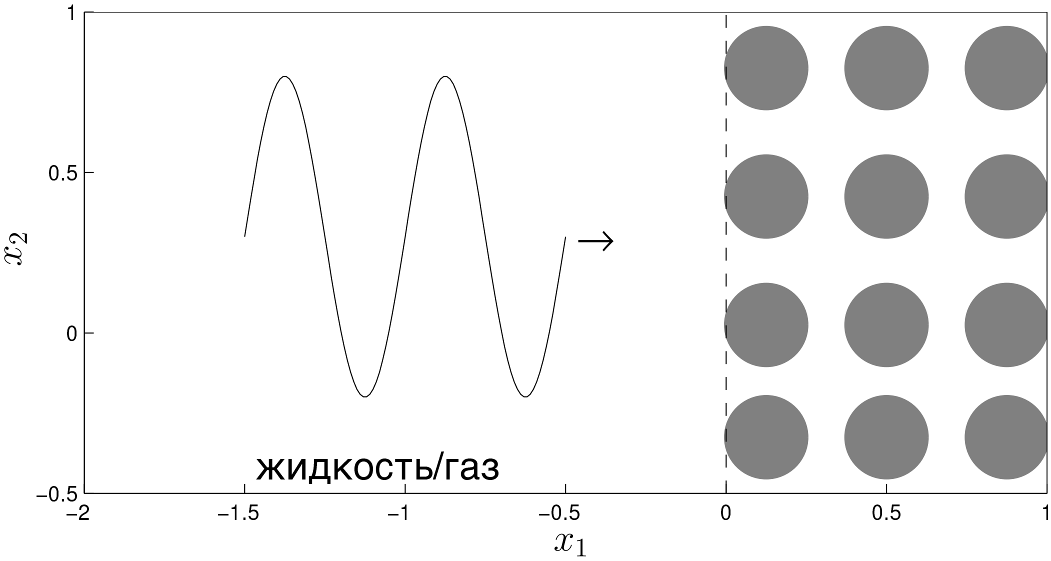


Рисунок 5.13 — Прохождение одномерной акустической волны через пористую среду, граничащую с газом/жидкостью.

5.3.6 Асимптотический анализ в области газа

В пределе малых возмущений $\varepsilon_a \ll 1$ решение задачи в области газа может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_f(x,t) &= 1 + \varepsilon_a \rho'_f + \ldots, \quad u_f(x,t) = \varepsilon_a u'_f + \ldots, \\ p_f(x,t) &= \frac{1}{\gamma} + \varepsilon_a p'_f + \ldots, \quad T_f(x,t) = 1 + \varepsilon_a T'_f + \ldots \end{aligned} \tag{5.33}$$

где для простоты показаны только ведущие члены разложения. Подставляя разложение (5.33) в уравнения (5.21)–(5.23) и уравнение состояния, получаем классические уравнения распространения акустических волн [20]

$$\frac{\partial^2 p'_f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'_f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u'_f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u'_f}{\partial x^2} \tag{5.34}$$

и изоэнтропические соотношения

$$\rho'_f = p'_f, \quad T'_f = (\gamma - 1) p'_f. \tag{5.35}$$

5.3.7 Асимптотический анализ в пористой области

Асимптотическое решение в пористой области может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{p}}(x,t) &= 1+\varepsilon_{\mathrm{a}}\rho'_{\mathrm{p}}+\ldots, \quad u_{\mathrm{p}}(x,t)=\varepsilon_{\mathrm{a}}\eta u'_{\mathrm{p}}+\ldots,\\ p_{\mathrm{p}}(x,t) &= \tfrac{1}{\gamma}+\varepsilon_{\mathrm{a}}p'_{\mathrm{p}}+\ldots, \quad T_{\mathrm{p}}(x,t)=1+\varepsilon_{\mathrm{a}}\eta_T T'_{\mathrm{p}}+\ldots, \end{aligned} \tag{5.36}$$

где ведущие члены разложения u_{p} и T_{p} отличны от ведущих членов разложения (5.33) из-за сильного демпфирования, вызванного штрафными функциями в уравнениях сохранения импульса и энергии. Подставляя разложение (5.36) в уравнения (5.21)–(5.23) и уравнение состояния, получаем следующую дифференциально-алгебраическую систему уравнений:

$$\rho'_{\mathrm{p}}=\gamma p'_{\mathrm{p}}, \quad \frac{\partial p'_{\mathrm{p}}}{\partial t}+(\gamma-1)T'_{\mathrm{p}}=0, \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial \rho'_{\mathrm{p}}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u'_{\mathrm{p}}}{\partial}=0, \quad \frac{\partial p'_{\mathrm{p}}}{\partial x}+u'_{\mathrm{p}}=0, \tag{5.38}$$

где $\alpha=\eta/\varphi$. Система уравнений (5.37) и (5.38) может быть записана в виде системы параболических уравнений

$$\frac{\partial p'_{\mathrm{p}}}{\partial t}=\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial^2 p'_{\mathrm{p}}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u'_{\mathrm{p}}}{\partial t}=\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial^2 u'_{\mathrm{p}}}{\partial x^2}. \tag{5.39}$$

Таким образом, в отличие от волновых уравнений, описывающих распространение волн в газе, распространение возмущений в пористой среде определяется диффузионными процессами. Отметим, что малость температурного возмущения по сравнению с возмущениями плотности и давления приводит к соотношению $\rho'_{\mathrm{p}}=\gamma p'_{\mathrm{p}}$. Система уравнений (5.39) может быть решена, используя комплексные функции с гармоническими граничными условиями [277].

5.3.8 Асимптотический анализ в пограничном слое границы раздела

Асимптотическое разложение (5.36) применимо в пористой среде вдали от границы раздела газа и пористой среды, однако вблизи границы раздела внутри пористой области уравнения (5.35) и (5.37) для возмущений плотности и давления несовместимы из-за существенно отличных характерных масштабов длины и величины возмущения температуры, что приводит к возникновению пограничного слоя внутри пористой области, необходимого для сращивания решений в областях газа и пористой среды. Отметим, что возмущения ρ, p и T в области газа одного порядка $O(\varepsilon_{\mathrm{a}})$ и требование сращивания решений на границе газа и пористой среды приводит к следующему асимптотическому разложению в пограничном слое пористой среды:

$$\begin{aligned} \rho_b(x,t) &= 1+\varepsilon_{\mathrm{a}}\rho_b'+\ldots, \quad u_b(x,t)=\varepsilon_{\mathrm{a}}\eta u_b'+\ldots, \\ p_b(x,t) &= \tfrac{1}{\gamma}+\varepsilon_{\mathrm{a}}p_b'+\ldots, \quad T_b(x,t)=1+\varepsilon_{\mathrm{a}}T_b'+\ldots. \end{aligned} \tag{5.40}$$

После подстановки разложения (5.40) в уравнения (5.21)–(5.23) и уравнение состояния, система уравнений внутри пограничного слоя принимает вид

$$\frac{\partial \rho_b'}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial u_b'}{\partial x}, \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial p_b'}{\partial x} = -u_b', \tag{5.42}$$

$$\frac{\partial p_b'}{\partial t} = -\frac{1}{\eta_T}(\gamma-1)T_b', \tag{5.43}$$

$$\gamma p_b' = \rho_b' + T_b'. \tag{5.44}$$

Отметим, что одинаковый порядок возмущений ρ_b', p_b' и производных по времени $\frac{\partial\rho_b'}{\partial t}$ и $\frac{\partial p_b'}{\partial t}$ подразумевает тот же порядок членов $\alpha\frac{\partial^2 p_b'}{\partial x^2}$ и $\frac{1}{\eta_T}(\gamma-1)T_b'$, из чего вытекает, что толщина пограничного слоя $O\left(\delta\right)$, где $\delta=\left(\alpha\eta_T\right)^{1/2}$.

Следует отметить, что уравнения (5.41)–(5.44) являются аппроксимацией уравнений (5.21)–(5.23) внутри пограничного слоя. Малая толщина пограничного слоя $O\left(\left(\alpha\eta_T\right)^{1/2}\right)$ накладывает сильное ограничение на размер сетки вблизи границы газа при условии полного разрешения пограничного слоя. Однако ослабление требования разрешения пограничного слоя не приводит к потере аппроксимации решения, а, как будет показано в последующем анализе, только увеличивает ошибку решения от $O\left(\alpha^{1/2}\varphi\right)$ в случае полного разрешения до $O\left(\left(\eta/\eta_T\right)^{1/4}\varphi^{3/4}\right)$ в случае неразрешённого пограничного слоя. Таким образом, обе оценки ошибки сходимости решения пенализированных уравнений $\alpha^{1/2}\varphi$ и $\left(\eta/\eta_T\right)^{1/4}\varphi^{3/4}$ должны быть достаточно малы, чтобы гарантировать точность численного решения. Также для удовлетворения условий прилипания и изотермичности демпфирование решения внутри пористой среды должно быть достаточно быстрым, по сравнению с масштабом времени внешнего течения, что подразумевает малость величин $\alpha\varphi$ и $\alpha_T\varphi$. В частности, при применении обобщённого метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования турбулентных течений при больших числах Рейнольдса с довольно большим разбросом масштабов времени, величины этих двух демпфирующих коэффициентов должны быть достаточно малы, чтобы не влиять на динамически важные структуры турбулентного течения. Выполнение этих требований может быть использовано для выбора значений параметров штрафных функций. Результаты численных экспериментов, подтверждающие вышеприведённые асимптотические режимы сходимости, приведены в подразделе 5.3.12 для двух случаев $\alpha = \alpha_T = 10^{-2}$ и $\alpha = \varphi$, $\alpha_T = (\gamma - 1)$.

5.3.9 Сходимость решения пенализированных уравнений в случае разрешённого пограничного слоя

В случае разрешения пограничного слоя система уравнений (5.41)–(5.44) может быть сведена к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{1}{\eta_T}(\gamma - 1)\left(\gamma\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \tag{5.45}$$

где переменная f символически представляет любую из переменных ρ_b', p_b', T_b' или u_b'. Уравнение (5.45) представляет собой волновое уравнение с сильным демпфированием, которое описывает решение пенализированных уравнений в пограничном слое.

Так как любая гладкая набегающая волна может быть представлена как суперпозиция гармонических волн, то без потери общности рассмотрим случай набегающей гармонической акустической волны единичной амплитуды. При неполном отражении от границы штрафной области с учётом амплитудной и фазовой ошибок отражённой волны [20] решение, представляющее суперпозицию набегающей и отражённых волн, принимает вид

$$\begin{aligned} u_f'(x=0,t) &= [1 - A\,\exp(i\theta)]\,\exp(i\omega t), \\ p_f'(x=0,t) &= [1 + A\,\exp(i\theta)]\,\exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Амплитудная и фазовые ошибки решения (5.46) могут быть записаны в следующем виде:

$$A = 1 + \alpha\varphi A_1, \quad \theta = \alpha\varphi\theta_1, \tag{5.47}$$

где $\alpha\varphi A_1 \ll 1$ и $\alpha\varphi\theta_1 \ll 1$. В случае отсутствия ударных волн, поля скорости и давления непрерывны во всей области решения. На границе раздела $x = 0$ выполняются граничные условия $u_f = u_b$ и $p_f = p_b$, то есть $u'_f = \alpha\varphi u'_b$ и $p'_f = p'_b$, что приводит к следующим граничным условиям для ведущих членов асимптотического разложения:

$$u'_b(x = 0, t) \approx -(A_1 + i\theta_1)\ \exp(i\omega t), \tag{5.48}$$

$$p'_b(x = 0, t) \approx 2\ \exp(i\omega t). \tag{5.49}$$

Двумя другими граничными условиями для u'_b и p'_b при $x \to \infty$ являются условия ограниченности решений.

В случае гармонических граничных условий решение уравнения (5.45) может быть записано в виде

$$f(x, t) = g(x) \exp(i\omega t). \tag{5.50}$$

Подставляя выражение (5.50) в уравнение (5.45), получим

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \left[i\frac{\omega\gamma}{\alpha} - \frac{\omega^2\eta_T}{\alpha(\gamma - 1)} \right] g, \tag{5.51}$$

для которого общее решение может быть записано как

$$g(x) = C \exp(\lambda_1 x) + D \exp(\lambda_2 x), \tag{5.52}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \pm \left[i\frac{\omega\gamma}{\alpha} - \frac{\omega^2\eta_T}{\alpha(\gamma - 1)} \right]^{1/2} = \pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\gamma\omega}{\alpha}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{\omega\eta_T}{\gamma(\gamma - 1)} i \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.53}$$

Для достаточно малых значений $\eta_T \ll \gamma(\gamma - 1)/\omega$ выражение (5.53) может быть записано в упрощённом виде

$$\lambda_{1,2} \approx \pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\gamma\omega}{\alpha}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\omega\eta_T}{\gamma(\gamma - 1)} i \right]. \tag{5.54}$$

Выражение (5.54) может быть упрощено при сохранении только ведущих членов разложения

$$\lambda_{1,2} \approx \pm(1+i)\left(\frac{\gamma\omega}{2\alpha}\right)^{1/2}. \tag{5.55}$$

Таким образом, ведущие члены разложения решений u'_b и p'_b с учётом граничных условий принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u'_b(x,t) &= -(A_1 + i\theta_1)\ \exp\left[-(1+i)\left(\tfrac{\gamma\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} x + i\omega t\right], \\ p'_b(x,t) &= 2\ \exp\left[-(1+i)\left(\tfrac{\gamma\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} x + i\omega t\right]. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Подставляя решение (5.56) в уравнение (5.42), получаем следующее решение:

$$A_1 = \theta_1 = -\left(2\gamma\omega/\alpha\right)^{1/2}, \tag{5.57}$$

из которого следует, что амплитудная и фазовые ошибки решения пенализированной системы уравнений могут быть записаны как

$$\alpha\varphi A_1 = \alpha\varphi\theta_1 = -\left(2\gamma\omega\alpha\right)^{1/2}\varphi = -\left(2\gamma\omega\right)^{1/2}(\eta\varphi)^{1/2}, \tag{5.58}$$

подразумевая, что $\alpha\varphi A_1 = \alpha\varphi\theta_1 \ll 1$.

Таким образом, как видно из решения (5.58), порядок амплитудной и фазовой ошибок может быть оценен как $O\left(\alpha^{1/2}\varphi\right)$, из чего вытекает, что пористость φ должна быть достаточно мала, чтобы гарантировать точность решения.

5.3.10 Сходимость решения пенализированных уравнений в случае неразрешённого пограничного слоя

В случае неразрешённого пограничного слоя, система уравнений (5.41)–(5.44) не может точно описать численное решение, что означает, что члены уравнения, содержащие пространственные производные, должны быть подкорректированы для правильной аппроксимации внешнего разложения. Для этого введём следующую замену переменных $x = \delta X$, где $\delta = (\alpha\eta_T)^{1/2}$ — толщина пограничного слоя. Замена переменной x на X в уравнениях (5.41)–(5.44) приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial\rho'_b}{\partial t} = -\alpha\frac{1}{\delta}\frac{\partial u'_b}{\partial X}, \tag{5.59}$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial p'_b}{\partial X} = -u'_b, \tag{5.60}$$

$$\frac{\partial p_b'}{\partial t} = -\frac{1}{\eta_T}(\gamma - 1)T_b', \tag{5.61}$$

$$\gamma p_b' = \rho_b' + T_b'. \tag{5.62}$$

В случае разрешения пограничного слоя для переменной u_b', переменная $\frac{\partial u_b'}{\partial X} = O(1)$, из чего следует, что внутри пограничного слоя $\frac{\partial u_b'}{\partial x} = O(\delta^{-1})$. В случае неразрешённого пограничного слоя $\frac{\partial u_b'}{\partial x} = O(1)$, из чего следует, что $\frac{\partial u_b'}{\partial X} = O(\delta)$. Однако в силу того, что пограничный слой разделяет решения внутри пористой среды и области газа, в случае неразрешённого пограничного слоя внешнее решение внутри пористой среды должно быть согласовано с условием на границе раздела с газом, что подразумевает $\frac{\partial u_b'}{\partial X} = O(1)$. Таким образом, для имитации численного дифференцирования $\frac{\partial u_b'}{\partial x}$ в случае неразрешённого пограничного слоя член $\frac{1}{\delta}\frac{\partial u_b'}{\partial X}$ должен быть заменён на $\frac{\partial u_b'}{\partial X}$, что приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho_b'}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial u_b'}{\partial X}, \tag{5.63}$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial p_b'}{\partial X} = -u_b', \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial p_b'}{\partial t} = -\frac{1}{\eta_T}(\gamma - 1)T_b', \tag{5.65}$$

$$\gamma p_b' = \rho_b' + T_b', \tag{5.66}$$

которая может быть сведена к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{1}{\eta_T}(\gamma - 1)\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\alpha}{\eta_T}\right)^{1/2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right], \tag{5.67}$$

где переменная f символически представляет любую из переменных ρ_b', p_b', T_b' и u_b'. Как и в предыдущем случае, уравнение (5.67) представляет собой волновое уравнение с сильным демпфированием, которое описывает численное решение исходных уравнений в случае неразрешённого пограничного слоя.

Решения в области газа и в пористой среде могут быть получены аналогично анализу, приведённому в подразделе 5.3.9. В случае гармонической набегающей акустической волны граничные условия на границе $X = 0$ для ведущих членов асимптотического разложения принимают вид

$$\begin{aligned} u_b'(X=0,t) &\approx -(A_1 + i\theta_1)\,\exp(i\omega t), \\ p_b'(X=0,t) &\approx 2\,\exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{5.68}$$

Внешними граничными условиями в пористой среде для u_b' и p_b' при $X \to \infty$ являются условия ограниченности решений. Как и в предыдущем подразделе, общее решение уравнения (5.67) для гармонических граничных условий может быть записано как

$$f(X,t) = C\exp(\lambda_1 X + i\omega t) + D\exp(\lambda_2 X + i\omega t), \tag{5.69}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \pm(1+i)\left(\frac{\gamma\omega}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\eta_T}{\alpha}\right)^{1/4} \tag{5.70}$$

для существенно малых значений параметра $\eta_T \ll \gamma(\gamma-1)/\omega$. Таким образом, ведущие члены разложения решений u_b' и p_b' с учётом граничных условий в случае неразрешённого пограничного слоя принимают вид

$$\begin{aligned} u_b'(X,t) &= -(A_1 + i\theta_1)\ \exp\left[-(1+i)\left(\tfrac{\gamma\omega}{2}\right)^{1/2}\left(\tfrac{\eta_T}{\alpha}\right)^{1/4} X + i\omega t\right], \\ p_b'(X,t) &= 2\ \exp\left[-(1+i)\left(\tfrac{\gamma\omega}{2}\right)^{1/2}\left(\tfrac{\eta_T}{\alpha}\right)^{1/4} X + i\omega t\right]. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Подставляя решение (5.71) в уравнение (5.64), получаем следующее решение:

$$A_1 = \theta_1 = -\left(2\gamma\omega\right)^{1/2}\left(\alpha^3\eta_T\right)^{-1/4}, \tag{5.72}$$

из которого следует, что амплитудная и фазовые ошибки решения пенализированной системы уравнений могут быть записаны как

$$\alpha\varphi A_1 = \alpha\varphi\theta_1 = -\left(2\gamma\omega\right)^{1/2}\left(\alpha/\eta_T\right)^{1/4}\varphi = -\left(2\gamma\omega\right)^{1/2}\left(\eta/\eta_T\right)^{1/4}\varphi^{3/4}, \tag{5.73}$$

подразумевая, что $\alpha\varphi A_1 = \alpha\varphi\theta_1 \ll 1$.

Таким образом, как видно из решения (5.73), порядок амплитудной и фазовой ошибок — $O\left(\left(\eta/\eta_T\right)^{1/4}\varphi^{3/4}\right)$. Выражение (5.73) может быть использовано в качестве оценки ошибки численного решения в случае недостаточного численного разрешения пограничного слоя. Как и в предыдущем случае, пористость φ должна быть достаточно мала, чтобы гарантировать точность численного решения.

5.3.11 Внешнее решение в пористой среде

Начнём обсуждение решения внутри пористой среды для случая неразрешённого пограничного слоя, для которого решение уравнения (5.71) для пограничного слоя, переписанное для переменной x, принимает вид

$$\begin{aligned} u_b'(x,t) &= -(A_1 + i\theta_1)\ \exp\left[-(1+i)\left(\tfrac{\gamma\omega}{2}\right)^{1/2}\left(\alpha^3\eta_T\right)^{-1/4} x + i\omega t\right], \\ p_b'(x,t) &= 2\ \exp\left[-(1+i)\left(\tfrac{\gamma\omega}{2}\right)^{1/2}\left(\alpha^3\eta_T\right)^{-1/4} x + i\omega t\right]. \end{aligned} \tag{5.74}$$

В силу малости $\varphi \ll 1$ и неразрывности решения на границе, граничные условия в пористой среде могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{p}}'\left(x,t\right)\big|_{x=2-0} &= -(A_1 + i\theta_1)\ \exp(i\omega t), \\ p_{\mathrm{p}}'\left(x,t\right)\big|_{x=0} &= 2\ \exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{5.75}$$

Двумя другими граничными условиями для u_b' и p_b' при $x \to \infty$ являются условия ограниченности решений. Для задачи с гармоническими граничными условиями решение внутри пористой среды может быть получено из уравнения (5.56) со значениями A_1 и θ_1, полученными из уравнения (5.72) для случая неразрешённого пограничного слоя.

Для случая разрешённого пограничного слоя внешнее решение в пористой среде аналогично, но со значениями коэффициентов A_1 и θ_1, полученными из уравнения (5.57).

5.3.12 Результаты вычислений

Для оценки точности аппроксимации граничных условий при использовании обобщённого метода штрафных функций Бринкмана для течений сжимаемого газа рассмотрим отражение и прохождение одномерного акустического импульса, набегающего на границу с пористой средой. Эта задача является хорошим тестом для проверки амплитудной и фазовой ошибок решения пенализированных уравнений. Во второй задаче рассматривается рассеяние цилиндром акустической волны, порождённой локализованным акустическим источником. Эта задача была рассмотрена в качестве тестовой задачи на конференции по

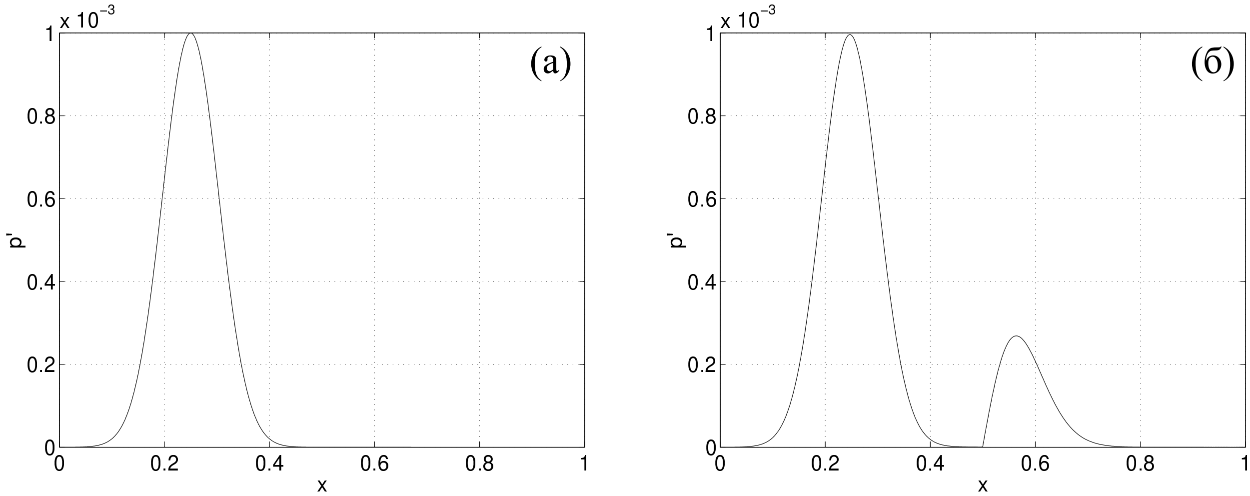


Рисунок 5.14 — Набегающий и отраженный одномерный акустический импульс в моменты времени: (а) $t = 0.0$, (б) $t = 0.5$ для $\varphi = 10^{-3}$.

вычислительной акустике [215]. В отличие от большинства методов, использованных для решения тестовых задач конференции и основанных на решении уравнений Эйлера, при решении второй тестовой задачи применялся обобщённый метод штрафных функций Бринкмана на основе уравнений Навье—Стокса для сжимаемого газа с акустическим числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_a = 5 \times 10^5$. Численные результаты сравнены с точными аналитическими решениями для уравнений Эйлера.

Тестовая задача I: прямое отражение одномерного акустического импульса

Численные решения первой тестовой задачи для двух моментов времени приведены на рис. 5.14. Задача решена в вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [0, 1]$ с границей $x = 0.5$, разделяющей пористую среду $\Omega_\mathrm{p} = [0.5, 1]$ от области газа $\Omega_\mathrm{f} = [0, 0.5]$. В качестве начальных условий взяты локализованные возмущения плотности, скорости и давления в виде функции Гаусса с амплитудой $\varepsilon_\mathrm{a} = 10^{-3}$ на фоне равномерно распределённого поля

$$\rho' = u' = p' = \varepsilon_\mathrm{a}\ \exp\left[-\ln(2)\,\frac{(x-0.25)^2}{0.004}\right]. \qquad (5.76)$$

Решение задачи представляет собой акустический импульс, распространяющийся слева направо к границе с пористой средой. Соответствующие начальные условия

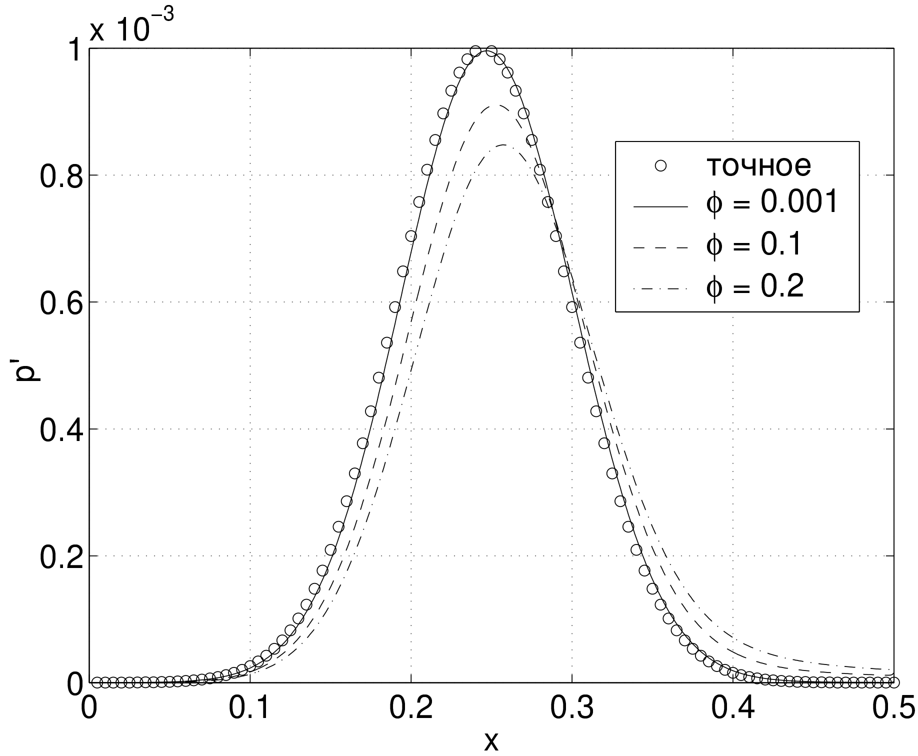


Рисунок 5.15 — Сравнение численных решений отраженного акустического импульса с точным аналитическим решением для разных величин пористости φ.

принимают следующий вид:

$$\rho = 1 + \rho',\ u_1 = u',\ e = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{p'}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u')^2. \tag{5.77}$$

Численные эксперименты для проверки точности и сходимости обобщённого метода штрафных функций Бринкмана проведены для двух случаев, упомянутых в подразделе 5.3.8.

На рис. 5.14а показан первоначальный акустический импульс для возмущения давления. В силу симметричности импульса, решение, показанное на рис. 5.14а, также является аналитическим решением отраженного импульса в момент времени $t = 0.5$. При применении обобщённого метода штрафных функций Бринкмана для моделирования отражения акустического импульса от поверхности твёрдого тела набегающий импульс отражается от границы раздела со штрафной областью с небольшой потерей массы и энергии, связанной частичным проникновением импульса в пористую среду. На рис. 5.14б показан отраженный импульс для возмущения давления в момент времени $t = 0.5$ для пористости $\varphi = 10^{-3}$. Обратим внимание, что распространение отраженного импульса в газе $x < 0.5$ описывается волновым уравнением, в то время как распространение

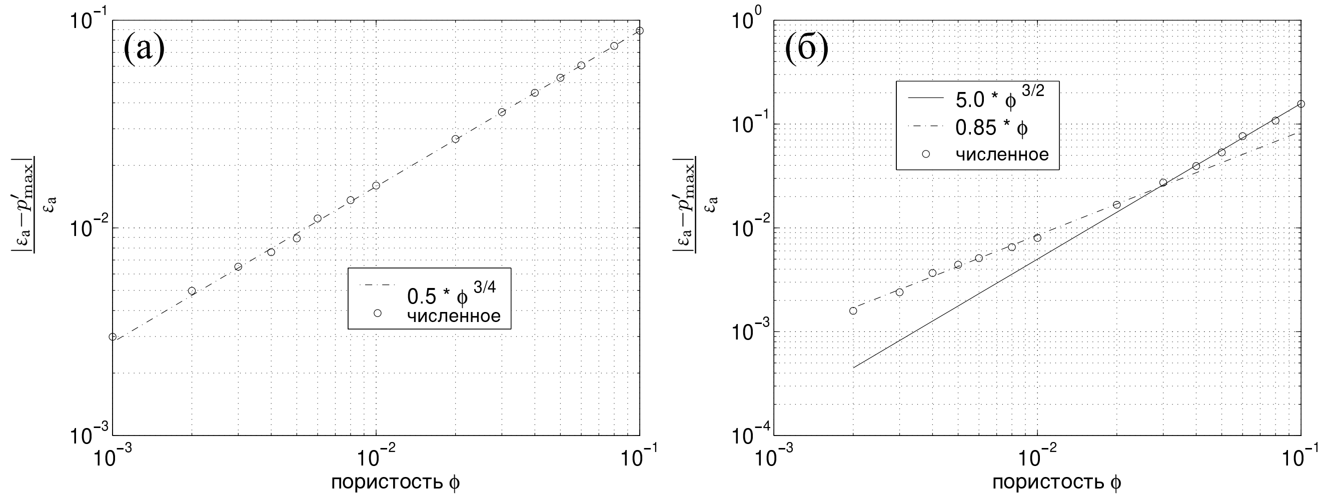
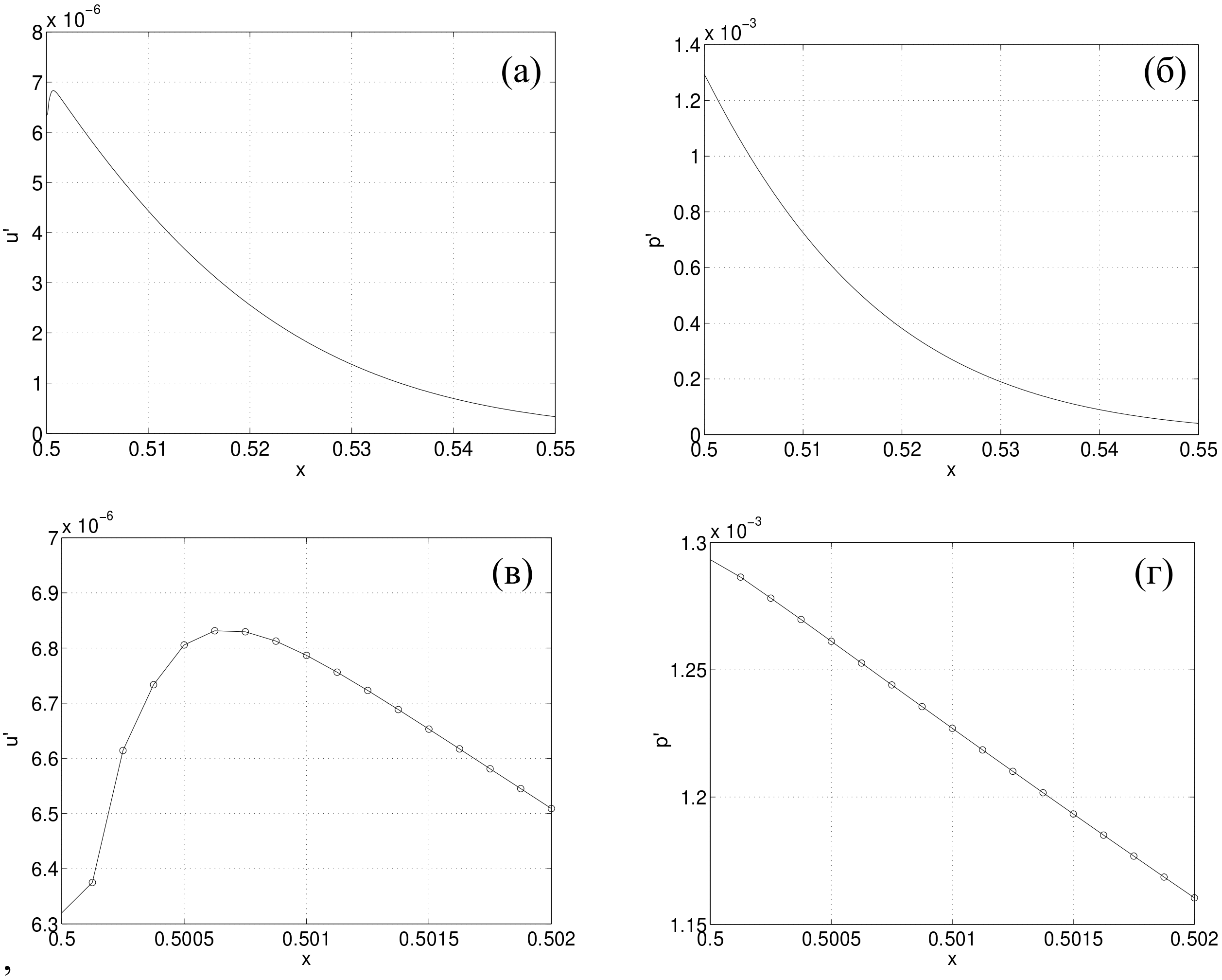


Рисунок 5.16 — Сходимость численного решения при прямом отражении одномерного акустического импульса для: (а) $\alpha = \alpha_T = 10^{-2}$, (б) $\alpha = \varphi$, $\alpha_T = (\gamma - 1)$.

импульса в пористой среде описывается диффузионным уравнением. Интересно отметить большую амплитуду проникшего в пористую среду акустического сигнала. Однако так как газ занимает только $\varphi \ll 1$ от общей объёмной доли пористой среды, то эффективная амплитуда проникшего в пористую среду импульса соответствует амплитуде импульса, помноженной на пористость φ. Таким образом, как видно из рис. 5.14б, при пористости $\varphi \ll 1$ ошибка отраженного импульса мала.

Как было показано в асимптотическом анализе, амплитудная и фазовая ошибки отраженного импульса определяются величиной пористости φ. На рис. 5.15 приведено решение отраженного импульса для разных величин пористости. Из рисунка видно уменьшение амплитудной и фазовой ошибок от 15.2%, 8.9% до 0.3% при уменьшении пористости φ от $\varphi = 0.2$, $\varphi = 0.1$ до $\varphi = 10^{-3}$.

Одним из важных аспектов обобщённого метода штрафных функций Бринкмана является возможность активного контроля ошибки численного решения посредством изменения параметров штрафных функций φ, η и η_T до уровней, обеспечивающих желаемый порядок ошибки. Эффективность обобщённого метода штрафных функций Бринкмана продемонстрирована на рис. 5.16, где приведены результаты сходимости относительной амплитудной ошибки отраженного импульса, определённой как $|\varepsilon_a - p'_{max}|/\varepsilon_a$, где p'_{max} — величина возмущения давления на гребне волны, а $\varepsilon_a = 10^{-3}$ — точное значение амплитуды набегающего импульса.



,

Рисунок 5.17 — Численное решение в пористой среде внутри штрафной области: (а) возмущение скорости, (б) возмущение давления и в пограничном слое: (в) возмущение скорости, (г) возмущение давления.

Результаты сходимости решения при фиксированных значениях $\alpha = 10^{-2}$ и $\alpha_T = 10^{-2}$ приведены на рис. 5.16а. Отметим, что в вычислениях использовалось минимальное разрешение $\Delta_x = 10^{-3}$ для всех значений пористости $\varphi \leqslant 10^{-1}$. При таком разрешении толщина пограничного слоя для выбранных значений α и α_T меньше, чем 3×10^{-3}. Таким образом, при максимальном разрешении на область пограничного слоя приходится не больше двух узлов, что не достаточно для разрешения пограничного слоя. Как видно из рис. 5.16а, амплитудная ошибка сходится как $O(\varphi^{3/4})$, что соответствует аналитической сходимости для неразрешённого пограничного слоя.

Результаты сходимости решения для случая $\alpha = \varphi$, $\alpha_T = 0.4$ приведены на рис. 5.16б. Из асимптотического анализа, приведённого в подразделах 5.3.9 и 5.3.10, следует, что для вышеупомянутых значений α и α_T ожидаемая сходимость $O\left(\alpha^{1/2}\varphi\right) = O(\varphi^{3/2})$ в случае разрешённого пограничного слоя и $O\left((\eta/\eta_T)^{1/4}\varphi^{3/4}\right) = O(\varphi)$ в случае неразрешённого пограничного слоя. Для проверки сходимости во всём диапазоне $\varphi < 10^{-1}$ использовалась адаптивная сетка с эффективным разрешением $\Delta x = 1.25 \times 10^{-4}$ на максимальном уровне разрешения. В этом случае пограничный слой разрешен для больших значений φ. Как и ожидалось, на рис. 5.16б видно, что ошибка решения монотонно убывает с уменьшением значения пористости и становится меньше 1% при $\varphi < 10^{-2}$. Следует отметить, что из-за выбора параметров α и α_T скорость сходимости отличается от ранее рассмотренного случая. Из рис. 5.16б видно, что ошибка решения сходится как $O(\varphi^{3/2})$ для $\varphi > 2 \times 10^{-2}$, так и $O(\varphi)$ для $\varphi < 2 \times 10^{-2}$, подтверждая аналитически предсказанную сходимость для случаев разрешённого и неразрешённого пограничного слоя.

На рис. 5.17 показаны распределения возмущений скорости и давления внутри штрафной области и пограничном слое для $\varphi = 10^{-2}$ в момент столкновения набегающего акустического импульса с границей пористой среды в момент времени $t = 0.2$, соответствующие случаю неразрешённого пограничного слоя. Решения на рис. 5.17а-б демонстрируют гладкость численного решения и характерный масштаб $O(1)$ внешнего решения. Из рис. 5.17а-б очевидно существование пограничного слоя для возмущения скорости. Отметим, что при толщине пограничного слоя порядка 5×10^{-4} и максимальном сеточном разрешении $\Delta_x = 1.25 \times 10^{-4}$, на пограничный слой приходится четыре узла, что не достаточно для разрешения пограничного слоя. Однако результаты вычислений в случае неразрешённого пограничного слоя демонстрируют гладкость решения, хоть и уменьшая скорость сходимости.

Тестовая задача II: рассеяние акустической волны цилиндром

В качестве двумерной тестовой задачи рассмотрим рассеяние акустической волны цилиндром радиуса $r = 0.5$, расположенного в начале координат. Задача решена в прямоугольной вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [-5, 9] \times [-5, 5]$ с началь-

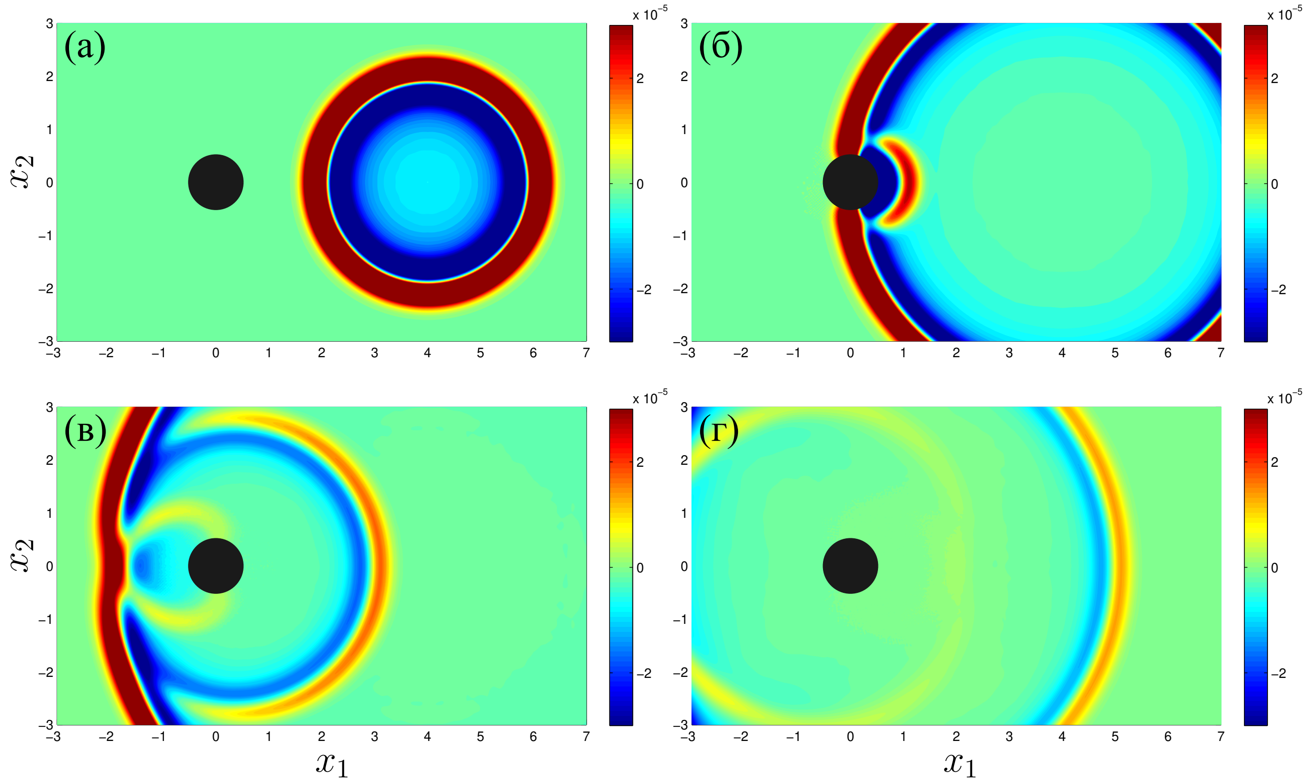


Рисунок 5.18 — Возмущение давления для задачи рассеяния акустической волны цилиндром в моменты времени: (а) $t = 2.0$, (б) $t = 4.0$, (в) $t = 6.0$ и (г) $t = 8.0$.

ными условиями

$$\rho = 1 + p',\ e = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{p'}{\gamma-1},\ u_1 = 0,\ u_2 = 0, \tag{5.78}$$

где p' — локализованное возмущение давления, заданное функцией Гаусса

$$p' = \varepsilon_{\text{a}}\ \exp\left[-\ln(2)\ \left(\frac{(x-4)^2+y^2}{0.04}\right)\right] \tag{5.79}$$

с амплитудой $\varepsilon_{\text{a}} = 10^{-3}$.

Численное решение получено для $\varphi = 0.02$, $\alpha = 5 \times 10^{-2}$ и $\alpha_T = 5 \times 10^{-2}$ с неотражающими граничными условиями Фрейнда [91]. Численное решение тестовой задачи приведено на рис. 5.18. Отметим, что для удобства сравнения решений для всех моментов времени использовался один и тот же масштаб.

Начальное локализованное возмущение приводит к формированию цилиндрической акустической волны, радиально распространяющейся от источника, что показано на рис. 5.18а. При достижении поверхности цилиндра волна отражается от поверхности цилиндра и распространяется от цилиндра по направлению к границам вычислительной области, что видно на рис. 5.18б-г. Третья волна формируется за цилиндром при столкновении двух волн, огибающих цилиндр, что

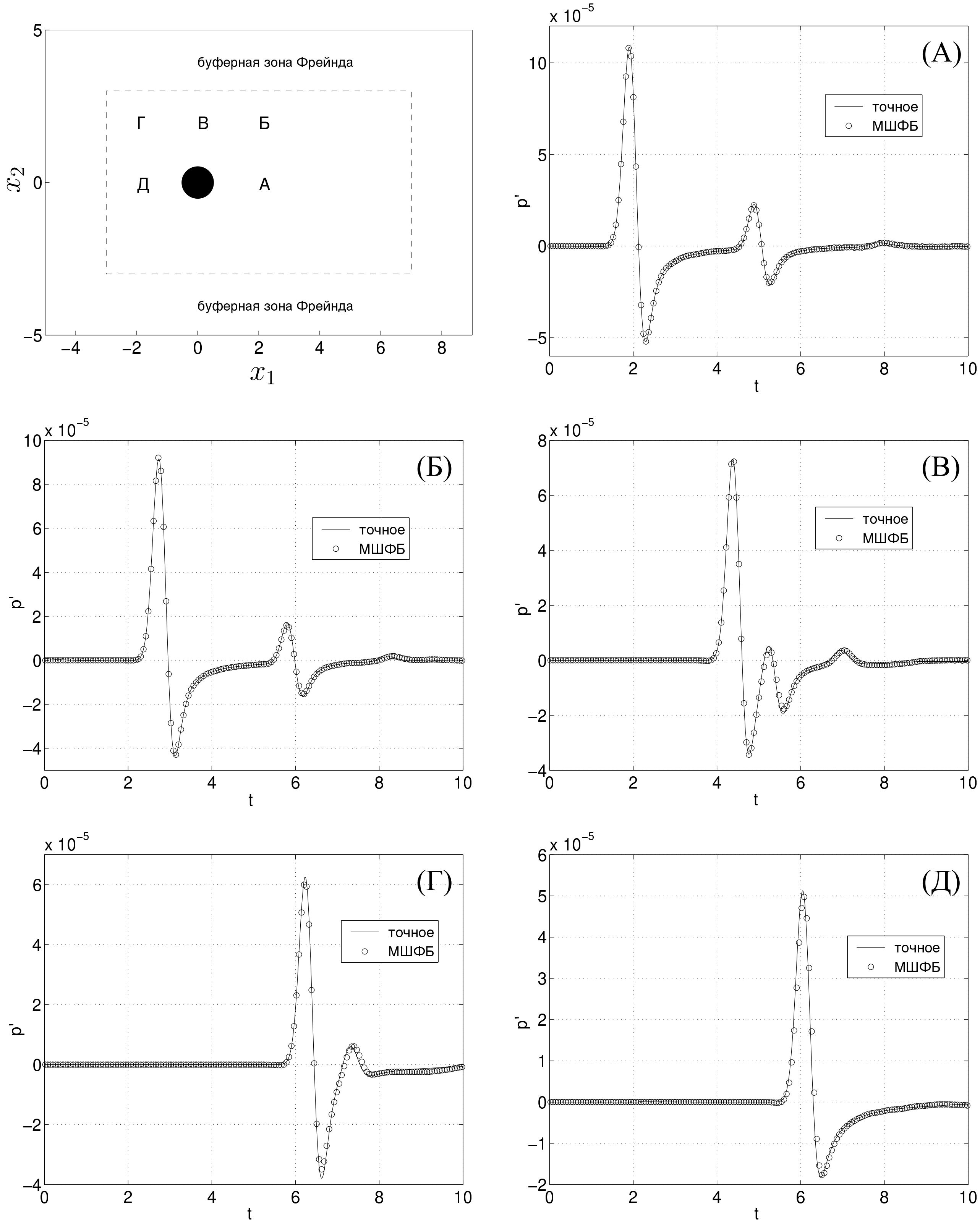


Рисунок 5.19 — Задача рассеяния акустической волны цилиндром: вычислительная область с пятью точками наблюдения (А–Д) и сравнение результатов вычисления с аналитическим решением в этих точках.

явно видно на рис. 5.18в. Следует отметить, что ошибка решения второй и третьей отраженных волн полностью зависит от обобщённого метода штрафных функций Бринкмана, используемого для аппроксимации цилиндра, и является хорошим тестом эффективности метода.

Для проверки точности метода проведено сравнение численного и аналитического решений в пяти точках наблюдения А–Д. Эволюция во времени численного и аналитического решений в этих точках приведена на рис. 5.19. Из рисунка видно существование трёх волн, достигающих точки А–Д в разные моменты времени. Следует отметить очень хорошее совпадение численного и аналитического решений во всех точках наблюдения, подтверждающее незначительность амплитудной и фазовой ошибок.

5.4 Метод характеристических штрафных функций для течений вязкого сжимаемого газа

Методы штрафных функций Бринкмана, описанные в разделах 5.2 и 5.3, несмотря на возможность контроля ошибки численного решения через изменения значений параметров штрафных функций, обладают двумя существенными недостатками: отсутствием возможности задавать общие граничные условия и неправильным отражением ударных волн от поверхности твёрдого тела, моделируемого пористой средой. В этом разделе представлен метод характеристических штрафных функций (МХШФ), снимающий вышеупомянутые ограничения для течений вязкого сжимаемого газа. Обобщение метода для течений невязкого сжимаемого газа обсуждено в разделе 5.5. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работах автора [293; 294].

Как уже отмечалось раньше, методы штрафных функций Бринкмана и его расширение для сжимаемого газа ограничены задачами с изотермическими граничными условиями и условием прилипания. В этом разделе описано расширение метода штрафных функций, основанное на штрафных функциях гиперболического типа, обеспечивающих возможность накладывать общие однородные и неоднородные граничные условия Неймана и Робена. Метод характеристических штрафных функций довольно гибок и применим для решения как параболических, так и гиперболических уравнений, при этом, как и в МШФБ, МХШФ даёт возможность контролировать ошибку численного решения пенализированных уравнений через штрафные параметры. Следует отметить, что, аналогично МШФБ, МХШФ хорошо подходит для совместного использования с методами сеточной адаптации. Так как в методах штрафных функций обычно не используют согласованную с границами сетку, то для правильного определения геометрии вблизи границ требуется высокое разрешение. Применение сеточной адаптации позволяет разрешать геометрию с заданной точностью без чрезмерного разрешения структур решения и минимизировать количество узлов сетки внутри объекта сложной геометрии, необходимых для определения граничных условий. Таким образом, использование метода характеристических штрафных функций расширяет область применения AWCM для решения задач в сложной геометрии с общими граничными условиями, при этом динамическая вейвлетная адаптация позволяет моделирование не только стационарных тел, но и объектов с движущимися или деформируемыми границами.

5.4.1 Формулировка метода характеристических штрафных функций

Определение граничных условий Дирихле, Неймана и Робена в методе характеристических штрафных функций достигается посредством добавления штрафных функций в эволюционные уравнения. Рассмотрим задачу в области Ω_s, содержащую тела O_m и описываемую эволюционными уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{RHS} \tag{5.80}$$

гиперболического или параболического типа. Маркировочная штрафная функция $\chi(\mathbf{x},t)$, заданная уравнением (5.4), описывает геометрию препятствий и разделяет область Ω_s на физическую подобласть и штрафные подобласти, определённые геометрией тел O_m.

Граничные условия Дирихле накладываются аналогично методу штрафных функций Бринкмана, описанного в разделах 5.2 и 5.3. В методе характеристических штрафных функций граничные условия Дирихле

$$u(\mathbf{x},t)\big|_{\partial\Omega_m} = u_0(\mathbf{x},t) \tag{5.81}$$

на границе области $\partial\Omega_m(\mathbf{x},t)$ задаются добавлением штрафных функций в уравнение (5.80)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi)\times \mathrm{RHS} - \chi\left(\frac{1}{\eta_b}\left(u - u_0(\mathbf{x},t)\right) - \nu_n \Delta u\right), \tag{5.82}$$

где оператор Δ обозначает оператор Лапласа. Как уже отмечалось в разделе 5.1, ошибка решения пенализированного уравнения (5.82) определяется штрафным параметром $\eta_b \to 0$, контролирующим масштаб времени обратной связи штрафной функции. Заметим, что в случаях движущихся и деформируемых препятствий граничные условия (5.81) на подвижной границе определяются зависящей от времени маркировочной штрафной функцией $\chi(\mathbf{x},t)$, не меняя вид пенализированного уравнения (5.82).

Следует также отметить, что в отличие от метода штрафных функций Бринкмана, в котором штрафная функция просто добавляется к правой части уравнения (5.80), не меняя его вид и, тем самым, оставляя возможность влияния членов уравнения на ошибку определения граничных условий, в методе характеристических штрафных функций для полного устранения возможности такого влияния правая часть уравнения (5.80) полностью обнуляется в штрафной области и заменяется штрафными функциями (5.82). Это даёт возможность согласованного контроля ошибки определения граничных условий, независимо от физики задачи и формы уравнений (5.80).

Устранение членов правой части уравнения (5.80) внутри тел O_m в формулировке (5.82) приводит к необходимости введения искусственной вязкости ν_n, устраняющей возможность возникновения разрывных на границе решений. Применение искусственной вязкости придает методу гибкость и общность, поскольку величина ν_n может быть задана в зависимости от используемого численного метода. Также отметим, что в силу отсутствия требования непрерывности потоков через границу тела, диффузионный член не записан в дивергентной форме, что обеспечивает непрерывность первой производной решения. Поскольку искусственная вязкость влияет на ошибку решения, величина ν_n должна быть минимальной, при этом достаточной для обеспечения устойчивости численного метода. Для устойчивости численного решения диффузионный масштаб длины $O\left((\eta_b\nu_n)^{1/2}\right)$ внутри штрафной области, определяемый искусственной вязкостью и масштабом времени штрафной функции, должен быть достаточно разрешен. Таким образом, при максимальном сеточном разрешении Δ_x коэффициент искусственной вязкости должен быть $\nu_n \geqslant O(\Delta_x^2/\eta_b)$.

Граничные условия Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial \Omega_m} = q(\mathbf{x},t) \tag{5.83}$$

могут быть заданы введением характеристической штрафной функции для производной u по направлению нормали $\mathbf{n}$, ориентированной внутрь тела, где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = n_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Отметим, что в методе характеристических штрафных функций вектор нормали $\mathbf{n}$ к границе области тел определён во всей штрафной области, а не только на её границе. Таким образом, граничное условие Неймана (5.83) может быть задано следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS} - \frac{\chi}{\eta_c}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - q(\mathbf{x},t)\right), \tag{5.84}$$

где уравнение внутри области принимает гиперболический вид с характеристиками, направленными внутрь области Ω_m, в результате чего решение от границы области распространяется вдоль характеристик, направленных внутрь области с пространственным возрастанием или затуханием в зависимости от величины потока q, задающего желаемые неоднородные граничные условия Неймана (5.84). Внутринаправленные характеристики также гарантируют нераспространение внутреннего решения за пределы области Ω_m, так как внешнее решение связано с решением внутри области только условием (5.84) на границе области $\partial\Omega_m$. Так как уравнение (5.80) может быть гиперболическим, как в случае течений сжимаемого невязкого газа или жидкости, удаление членов правой части уравнения (5.80) обеспечивает внутринаправленность характеристик в штрафной области.

Граничные условия Робена, записанные в виде

$$\left.\left(a(\mathbf{x},t)u + b(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right|_{\partial \Omega_m} = g(\mathbf{x},t), \tag{5.85}$$

для $b > 0$ могут быть заданы аналогичным образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS} - \frac{\chi}{\eta_c}\left(a(\mathbf{x},t)u + b(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g(\mathbf{x},t)\right), \tag{5.86}$$

где уравнение (5.86) внутри штрафной области принимает гиперболический вид с характеристиками, направленными внутрь области. Таким образом, граничные условия Неймана (5.83) являются частным случаем граничных условий Робена (5.85) для $a = 0$. Следует обратить внимание на условие позитивности коэффициента b, обеспечивающее внутринаправленность характеристик.

Из пенализированных уравнений (5.84) и (5.86) вытекает, что в стационарном случае решение внутри области на границе тела сходится к граничным условиям (5.83) и (5.85). Так как масштаб времени характеристических штрафных функций определяется величиной параметра η_c, то выбор значения $\eta_c \ll 1$ приводит к квазистационарному решению уравнений (5.84) и (5.86) внутри тела O_m на масштабе времени внешней задачи, что гарантирует правильность определения желаемых граничных условий на поверхности тела. В пределе $\eta_c \to 0$ увеличение несоразмерности масштабов времени внешней и внутренней задач приводит к асимптотической сходимости решения пенализированных уравнений (5.84) и (5.86). Однако уменьшение ошибки решения путём уменьшения параметра η_c увеличивает жесткость задачи из-за увеличения характеристической скорости $O(1/\eta_c)$ в уравнениях (5.84) и (5.86), что, как и в случае метода штрафных функций Бринкмана, приводит к необходимости использования неявных методов интегрирования во времени.

Интересно отметить, что граничные условия Дирихле (5.81), Неймана (5.83) и Робена (5.85) могут быть записаны в более общей операторной форме как

$$\mathcal{L}u|_{\partial\Omega_m} = \mathrm{Target}, \tag{5.87}$$

предполагающей общую форму пенализированных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi)\,\mathrm{RHS} - \frac{\chi}{\eta}\left(\mathcal{L}u - \mathrm{Target}\right). \tag{5.88}$$

Однако важно подчеркнуть, что, несмотря на сходство операторной формы штрафных функций в уравнении (5.88) для граничных условий Дирихле, Неймана и Робена, механизмы, лежащие в основе определения граничных условий — различны. Для краевых задач Дирихле механизм действия штрафной функции основан на простой обратной связи, которая на масштабе времени η принудительным образом приводит решение внутри штрафной области к желаемому значению. Для граничных условий Неймана и Робена решение на масштабе времени η переносится с границы области вдоль внутринаправленных характеристик. В обоих случаях выбор $\eta \ll 1$ контролирует масштаб времени релаксации решения уравнения (5.88) внутри области Ω_m до квазистационарного на масштабе времени внешней задачи, налагая желаемые граничные условия на поверхности тела. Следует отметить, что метод характеристических штрафных функций предполагает возможность определения вектора нормали во всей штрафной области. Для простой геометрии вектор нормали может быть задан аналитически. Для более сложной геометрии вектор нормали может быть определён из функции расстояния или функции изоповерхности, определяющей геометрию тела [216].

5.4.2 Двухслойный метод характеристических штрафных функций

В некоторых случаях гиперболичность пенализированных уравнений (5.84) и (5.86) и неоднозначность вектора нормали в области сближения или пересечения характеристик могут привести к несовместимости и возникновению разрывных решений внутри области тела. Например, определяя вектор нормали внутри тела O_m как градиент функции расстояния $d(\mathbf{x},t)$ до поверхности тела,

$$\mathbf{n} = \nabla d, \tag{5.89}$$

легко показать, что характеристики в уравнениях (5.84) и (5.86) пересекаются в области, где функция $d(\mathbf{x},t)$ не дифференцируема. Такая ситуация наблюдается в точках, равноудалённых от нескольких точек поверхности.

Для устранения этой трудности могут быть применены локальные дифференциальные схемы, применение которых позволяет исключить области пересекающихся характеристик. Для некоторых методов, таких как AWCM или спектральный метод, в которых производные определяются во всех узлах сетки, вышеупомянутая трудность может быть устранена введением тонкого внутреннего слоя вдоль границы тела O_m, схематически обозначенного на рис. 5.20 маркировочной штрафной функцией χ_{h}, внутри которого применяется метод характеристических штрафных функций. При этом толщина слоя должна быть достаточна для поддержания шаблона схемы дифференцирования для внешних точек в непосредственной близости от границы тела. Во внутренней подобласти вне тонкого слоя χ_{h}, схематически обозначенной на рис. 5.20 маркировочной штрафной функцией χ_{d}, может быть применено обычное уравнение диффузии, обеспечивающее гладкость решения во всей вычислительной области. При двухслойном подходе пенализированное уравнение (5.88) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi)\,\mathrm{RHS} - \frac{\chi_{\mathrm{h}}}{\eta}\left(\mathcal{L}u - \mathrm{Target}\right) + \chi_{\mathrm{d}}\nu_n \Delta u. \tag{5.90}$$

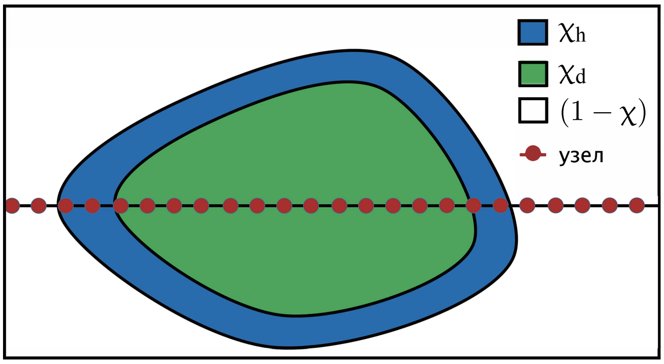


Рисунок 5.20 — Вычислительные подобласти в двухслойном методе характеристических штрафных функций: гиперболическая χ_h и диффузионная χ_d внутренние подобласти, внешняя подобласть $(1-\chi)$.

Заметим, что в случае граничных условий Дирихле штрафная функция Бринкмана применяется во всей области маркировочной штрафной функции χ. Также обратим внимание, что маркировочные штрафные функции χ_h и χ_d ортогональны, то есть $\chi = \chi_h + \chi_d$.

Следует отметить, что в отличие от диффузии, применяемой для стабилизации граничных условий Дирихле (5.82), диффузионный оператор должен быть дискретизирован в дивергентной форме, поддерживающей непрерывность потоков внутри области Ω_m. Также отметим, что на границе гиперболической и диффузионной подобластей могут возникнуть разрывные производные. Для избежания искусственных осцилляций на границе χ_h и χ_d областей шаблон, используемый для дифференцирования функции внутри гиперболической подобласти, не должен пересекать границу диффузионной области, что может быть достигнуто применением в гиперболической области противопоточных схем с несимметричным шаблоном, скошенным в направлении против ветра. Заметим, что гиперболичность уравнений и внутринаправленность характеристик в гиперболической области предотвращают влияние решения в диффузионной области на граничные условия и внешнее решение. Также следует отметить, что применение в тонком гиперболическом слое противопоточных схем более низкого порядка увеличивает устойчивость неявных схем и даёт возможность вычислений с шагом по времени, продиктованным внешней задачей.

Все вышеупомянутые особенности применения двухслойной штрафной области подчеркивают необходимость обнуления членов правой части уравнения (5.80) внутри области Ω_m в пенализированных уравнениях (5.82), (5.84), (5.86), (5.88) и (5.90) для обеспечения внутринаправленности характеристик, независимо от уравнений, используемых во внешней области. Более того, присутствие физических связей внутри области Ω_m может привести к возникновению нефизичных структур, загрязняющих граничные условия, особенно в случаях применения штрафных функций смешанного типа для граничных условий Дирихле, Неймана и Робена.

5.4.3 Метод характеристических штрафных функций для уравнений Навье—Стокса

Основными достоинствами метода характеристических штрафных функций являются его общность применения и возможность накладывать общие граничные условия. Умышленно сформулированный в общем виде метод характеристических штрафных функций может быть использован для численного моделирования разнообразных физических систем и решения эволюционных гиперболических и параболических систем уравнений, включая моделирование течений сжимаемой и несжимаемой жидкости/газа. В данном подразделе описано применение метода характеристических штрафных функций для численного моделирования обтекания тел сложной геометрии сжимаемым вязким газом.

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса для сжимаемого газа (4.9)–(4.13), для удобства записанных в безразмерном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \tag{5.91}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re_a}}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{5.92}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(E+p)\,u_j\right] + \frac{1}{\mathrm{Re_a}}\frac{\partial(u_i\tau_{ij})}{\partial x_j} + \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\mathrm{Re_a Pr}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial x_j}\right), \tag{5.93}$$

где

$$p = \frac{\rho T}{\gamma}, \tag{5.94}$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \tag{5.95}$$

$$\mu = \frac{1+S_\mu}{T+S_\mu}\left(T\right)^{3/2}, \tag{5.96}$$

$$E = \frac{1}{2}\rho u_i u_i + \frac{p}{\gamma-1}, \tag{5.97}$$

Re_a — акустическое число Рейнольдса, а Pr — число Прандтля. В качестве масштаба длины выбран характерный размер тела L. Скорость $\mathbf{u}$ обезразмерена на скорость звука c_0 в базовом состоянии, обозначенном индексом «0», время — на L/c_0, удельная энергия — на c_0^2, плотность, давление, температура, вязкость, и теплопроводность — соответственно на ρ_0, $\rho_0 c_0^2$, T_0, μ_0 и $\mu_0 c_{p_0}$. Температурная зависимость вязкости описывается уравнением Сазерленда (5.96) с константой S_μ, нормализованной на T_0.

Для тестовых задач, описанных в этом подразделе, рассмотрены граничные условия прилипания, адиабатичности и с заданным потоком тепла. Граничные условия и пенализированные уравнения Навье—Стокса, накладывающие эти граничные условия, принимают следующий вид:

$$u_i\big|_{\partial\Omega_m} = u_{0i}, \tag{5.98}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_m} = -q, \tag{5.99}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = (1-\chi)\times \mathrm{RHS}_{u_i} - \chi\left(\frac{1}{\eta_b}\left(u_i - u_{0i}\right) - \nu_n \Delta u_i\right), \tag{5.100}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (1-\chi)\times \mathrm{RHS}_T - \frac{\chi}{\eta_c}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + q\right), \tag{5.101}$$

где нижний индекс в RHS используется для обозначения соответствующих уравнений, а $u_{0i} = u_{0i}(\mathbf{x},t)$ и $q = q(\mathbf{x},t)$ записаны для общего случая движущегося или деформируемого тела и неоднородного потока тепла.

Для определения граничных условий (5.98)–(5.99) для уравнений (5.91)–(5.93) необходимо определить согласованные штрафные функции для консервативных переменных ρ, ρu и E. Обратим внимание на отсутствие граничных условий для плотности, что усложняет применение метода штрафных функций. Как было показано в разделе 5.3, использование уравнения неразрывности в штрафной области недостаточно и приводит к неприемлемой ошибке. Таким образом, при применении метода характеристических штрафных функций для решения уравнений Навье—Стокса для сжимаемого газа необходимо определить дополнительные, физически обоснованные пенализированные уравнения для плотности, которые правильно отражают физику задачи без накладывания дополнительных ограничений на внешнее течение.

В настоящий момент разработано два подхода определения штрафных функций для уравнения неразрывности, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. В подходе, основанном на физических моделях, как в случае метода штрафных функций Бринкмана, описанного в разделе 5.3, штрафные функции имитируют физику задачи и главным образом накладывают граничные условия. Альтернативный подход на основе пассивных характеристических эволюционных условий отличается общностью, но требует решения дополнительного уравнения.

Пассивное эволюционное условие основано на методе характеристических штрафных функций для граничных условий Неймана (5.84). В силу внутринаправленности характеристик, решение на границе тела определяется физикой задачи со значением производной по нормали, налагаемой характеристической штрафной функцией внутри области Ω_m. При использовании неоднородных граничных условий Неймана для плотности ρ с заданным значением производной по направлению нормали уравнение для эволюции плотности внутри штрафной области не зависит от физики течения. Значение производной по направлению нормали может быть определено введением дополнительного эволюционного уравнения, использующего внутринаправленность характеристик для экстраполяции производной плотности по направлению нормали от границы тела внутрь области Ω_m

$$\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial t} = -\frac{\chi}{\eta_c}\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial \mathbf{n}}, \tag{5.102}$$

где

$$\Phi_\rho = (1-\chi)\,\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} + \chi \Phi_\rho. \tag{5.103}$$

Определение Φ_ρ во всей вычислительной области Ω_s и динамическое переопределение Φ_ρ во внешней области течения обеспечивает необходимое граничное условие для ρ для гиперболического уравнения (5.102), которое решается только внутри подобласти Ω_m. Таким образом, производные плотности по направлению нормали определяются физикой задачи во внешней области тела, то есть уравнением неразрывности, и экстраполируются внутрь тела O_m путем интегрирования уравнения (5.102), что делает Φ_ρ полностью пассивной переменной по отношению к физическому решению. В свою очередь, дополнительная переменная Φ_ρ

позволяет записать следующее пенализированное уравнение для плотности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_\rho - \frac{\chi}{\eta_c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_\rho\right). \tag{5.104}$$

Отметим, что, поскольку решения для плотности и производной плотности по направлению нормали распространяются вдоль характеристик внутрь области, то обе величины определяются физикой течения.

Согласованные пенализированные уравнения для эволюции консервативных переменных ρ, ρu и E могут быть определены из уравнений (5.91)–(5.93) и уравнений состояния (5.94)–(5.97), используя следующие соотношения:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}, \tag{5.105}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{p}{(\gamma-1)T}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{5.106}$$

Подстановка производных по времени (5.100), (5.101) и (5.104) в уравнения (5.105) и (5.106) приводит к следующей системе пенализированных уравнений Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_\rho - \frac{\chi}{\eta_c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_\rho\right), \tag{5.107}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i} - \chi\left[\frac{u_i}{\eta_c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_\rho\right) + \frac{\rho\,(u_i - u_{0i})}{\eta_b} - \rho \nu_n \Delta u_i\right], \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_E &- \frac{\chi}{\eta_c}\left[\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}} - u_j \frac{\partial \rho u_j}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\rho q}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{E\Phi_\rho}{\rho}\right] \\ &- \chi \rho u_j\left[\frac{(u_j - u_{0j})}{\eta_b} - \nu_n \Delta u_j\right],\end{aligned} \tag{5.109}$$

где члены уравнений RHS_ρ, $\mathrm{RHS}_{\rho u_i}$ и RHS_E в уравнениях (5.107)–(5.109) соответствуют правой части уравнений (5.91)–(5.93).

Как было отмечено в подразделе 5.4.2, при применении метода характеристических штрафных функций для решения задач сложной геометрии не рекомендуется использовать характеристическую штрафную функцию во всей внутренней подобласти из-за неоднозначности вектора нормали в области сближения или пересечения характеристик, а также из-за дополнительной вычислительной стоимости и снижения устойчивости/точности решения гиперболических пенализированных уравнений вдали от границ. Одним из способов устранения вышеупомянутых трудностей является двухслойный метод характеристических штрафных функций, описанный в подразделе 5.4.2, в котором характеристические штрафные функции присутствуют в гиперболическом слое χ_{h}, диффузионные члены — в диффузионной подобласти χ_{d}, а штрафные функции Бринкмана — во всей штрафной области χ, при этом подобласти χ_{h} и χ_{d} не пересекаются, то есть $\chi = \chi_{\mathrm{h}} + \chi_{\mathrm{d}}$. Схематическая иллюстрация двухслойной штрафной области приведена на рис. 5.20. Уравнения (5.107)–(5.109) в двухслойной постановке принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho} - \frac{\chi_{\mathrm{h}}}{\eta_c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_{\rho}\right) + \chi_{\mathrm{d}}\nu_n \Delta\rho, \tag{5.110}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i} - \frac{\chi_{\mathrm{h}} u_i}{\eta_c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_{\rho}\right) - \chi\rho\left[\frac{(u_i - u_{0i})}{\eta_b} - \nu_n \Delta u_i\right], \tag{5.111}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{E} &- \frac{\chi_{\mathrm{h}}}{\eta_c}\left[\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}} - u_j\frac{\partial \rho u_j}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\rho q}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{E\Phi_{\rho}}{\rho}\right] \\ &- \chi_{\mathrm{h}}\rho u_j\left[\frac{(u_j - u_{0j})}{\eta_b} - \nu_n \Delta u_j\right] + \chi_{\mathrm{d}}\nu_n\Delta E.\end{aligned} \tag{5.112}$$

Альтернативный подход в методе штрафных функций для плотности, использующий физику течения жидкости или газа, устраняет необходимость в дополнительных уравнениях. Из уравнения сохранения импульса (5.92), предполагая пренебрежимо малую ошибку аппроксимации условия прилипания, производная по направлению нормали полного напряжения на границе тела равна нулю. Так как штрафная функция действует во всей области Ω_m, а не только на поверхности тела, применение нормальной компоненты напряжения в качестве третьего граничного условия не корректно из-за присутствия искусственной вязкости. Однако для течений с пренебрежимо малым градиентом нормальной компоненты тензора напряжений, то есть

$$O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_a}\frac{\partial n_k \tau_{nn}}{\partial x_k}\right) \ll 1, \tag{5.113}$$

производная нормальной компоненты тензора напряжений по направлению нормали может быть аппроксимирована как

$$\left.\frac{\partial n_k \sigma_{nn}}{\partial x_k}\right|_{\Omega_m} \approx \left.\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Omega_m} \approx 0. \tag{5.114}$$

Условие (5.114) является хорошей аппроксимацией граничных условий в случае безотрывного пограничного слоя и для линейных акустических задач. Из уравнения (5.114) и уравнения состояния (5.94) может быть получено граничное условие для температуры (5.99). Следует отметить, что в силу того, что граничное условие

(5.99) исходит из физики течения, несоблюдение вышеупомянутых предположений приведёт к большой ошибке решения и возможным осцилляциям решения, что проблематично для адаптивных методов.

Некоторые течения, обсуждаемые в этом подразделе, например, обтекание стационарного адиабатического цилиндра, хорошо подходят для использования аппроксимации (5.114). Обратим внимание, что условие прилипания в случае стационарного тела может быть записано как $\rho u_{0i} = 0$, что даёт возможность применения штрафной функции Бринкмана непосредственно для импульса вместо скорости (5.98). Используя условие (5.114) в качестве третьего граничного условия, пенализированные уравнения Навье—Стокса (5.105)–(5.106) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho} - \frac{\chi}{\eta_c}\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} \tag{5.115}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i} - \chi\left[\frac{1}{\eta_b}\rho u_i - \nu_n \Delta \rho u_i\right] \tag{5.116}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{E} - \chi\left[\frac{1}{\eta_c}\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}} - \frac{u_j}{\eta_c}\frac{\partial \rho u_j}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\rho u_j u_j}{\eta_b} - u_j \nu_n \Delta \rho u_j\right]. \tag{5.117}$$

Эта система пенализированных уравнений проще, чем (5.107)–(5.109), и не требует решения дополнительного уравнения для вычисления Φ_ρ. Однако следует отметить, что пенализированные уравнения (5.115)–(5.117) применимы только при безотрывном обтекании стационарных адиабатических тел.

5.4.4 Асимптотическая оценка сходимости метода характеристических штрафных функций

Как и в случае метода штрафных функций Бринкмана, для оценки сходимости пенализированных уравнений Навье—Стокса рассмотрим асимптотическую сходимость метода характеристических штрафных функций для задачи прямого отражения одномерного акустического импульса малой амплитуды $\varepsilon_a \ll 1$ от плоской поверхности. Асимптотические разложения решения для малых параметров $\eta_b \ll 1$ и $\eta_c \ll 1$ для режимов $\eta_b \ll \eta_c$ и $\eta_b \gg \eta_c$ идентичны и могут быть записаны в общем виде как

$$
\begin{aligned}
\rho_\mathrm{f}(x,t) &= 1+\varepsilon_\mathrm{a}\rho'_{0\mathrm{f}}+\varepsilon_\mathrm{a}\eta\rho'_{1f}+\ldots, & u_\mathrm{f}(x,t) &= \varepsilon_\mathrm{a}u'_{0\mathrm{f}}+\varepsilon_\mathrm{a}\eta u'_{1f}+\ldots,\\
p_\mathrm{f}(x,t) &= \tfrac{1}{\gamma}+\varepsilon_\mathrm{a}p'_{0\mathrm{f}}+\varepsilon_\mathrm{a}\eta p'_{1f}+\ldots, & T_\mathrm{f}(x,t) &= 1+\varepsilon_\mathrm{a}T'_{0\mathrm{f}}+\varepsilon_\mathrm{a}\eta T'_{1f}+\ldots,
\end{aligned}
\tag{5.118}
$$

где $\eta = \max(\eta_b,\eta_c) \ll 1$. Разложение (5.118) применимо как во внешней области течения, так и в гиперболической штрафной области. Во внешней области, где $\chi = 0$, подстановка разложения (5.118) в систему уравнений (5.115)–(5.117) приводит к акустическим волновым уравнениям

$$
\frac{\partial u'_\mathrm{f}}{\partial t}+\frac{\partial p'_\mathrm{f}}{\partial x}=0, \tag{5.119}
$$

$$
\frac{\partial p'_\mathrm{f}}{\partial t}+\frac{\partial u'_\mathrm{f}}{\partial x}=0, \tag{5.120}
$$

как для первого, так и второго порядка возмущений, соответственно обозначенных в разложении (5.118) индексами «0» и «1». Отметим, что в пределе большого числа Рейнольдса, когда $1/\mathrm{Re}_a \ll \eta$, вязкими членами уравнений можно пренебречь. Кроме того, в силу изоэнтропичности течения, выполняется соотношение $p'_\mathrm{f} = \gamma\rho'_\mathrm{f}$. Другими словами, система (5.119)–(5.120) представляет собой обычные линейные акустические уравнения, описывающие распространение в газе возмущений малой амплитуды.

Для гиперболической штрафной подобласти, где $\chi = 1$, подстановка разложения (5.118) в систему уравнений (5.115)–(5.117) приводит к следующим уравнениям для ведущих членов разложения:

$$
\frac{\partial u'_\mathrm{p}}{\partial t}+\frac{1}{\eta_b}u'_\mathrm{p}-\nu_n\frac{\partial^2 u'_\mathrm{p}}{\partial x^2}=0, \tag{5.121}
$$

$$
\frac{\partial p'_\mathrm{p}}{\partial t}+\frac{1}{\eta_c}\frac{\partial p'_\mathrm{p}}{\partial n}=0, \tag{5.122}
$$

где индексом p обозначено решение в штрафной области. Отметим, что в случае $\chi = 1$ также выполняется условие изоэнтропичности $p'_\mathrm{f} = \gamma\rho'_\mathrm{f}$.

Уравнение (5.122) представляет собой гиперболическое уравнение с внутринаправленными характеристиками. Сильное демпфирование скорости штрафной функцией Бринкмана приближает решение уравнения (5.121) к удовлетворению условия прилипания на масштабе времени η_b, в то время как граничные условия Неймана накладываются на конвективном масштабе времени η_c. Для устранения чрезмерной задержки фазы отраженного импульса диффузионный масштаб времени η_b должен быть меньше конвективного масштаба времени η_c, то есть $\eta_b < \eta_c$.

Для получения асимптотической оценки сходимости рассмотрим случай $\eta_b,\eta_c \to 0$. Система уравнений (5.119)–(5.120) и (5.121)–(5.122) решается в одномерных подобластях $x < 0$ для течения в газе и $x \geqslant 0$ в штрафной области с границей твёрдого тела $x = 0$.

Решение задачи в области $x < -t$ не представляет интерес, так как соответствует решению набегающего акустического импульса, поэтому ограничимся решением задачи в области $-t < x$, то есть после отражения импульса от поверхности тела. Решение Д'Аламбера в области $-t < x < 0$ с заданными начальными условиями $(u_0'(x), p_0'(x))$ и граничными условиями $(u_1'(t), p_1'(t))$ на границе с твёрдым телом принимает следующий вид:

$$u_{\text{f}}'(x,t) = \frac{1}{2}u_0'(x-t) + \frac{1}{2}p_0'(x-t) + \frac{1}{2}u_1'(x+t) - \frac{1}{2}p_1'(x+t), \quad (5.123)$$

$$p_{\text{f}}'(x,t) = \frac{1}{2}u_0'(x-t) + \frac{1}{2}p_0'(x-t) - \frac{1}{2}u_1'(x+t) + \frac{1}{2}p_1'(x+t). \quad (5.124)$$

Отметим, что решение Д'Аламбера (5.123)–(5.124) в области газа применимо как для возмущений первого, так и второго порядка.

Решение в штрафной области может быть определено независимо для каждой переменной. Решение для первого порядка возмущения давления p_{p}' может быть записано как распространение возмущения вдоль характеристики с характеристической скоростью $\lambda = \frac{1}{\eta_c}$

$$p_{\text{p}}'(x,t) = p_1'(t - \eta_c x). \quad (5.125)$$

Решение для первого порядка возмущения скорости u_{p}' может быть получено с использованием следующего преобразования:

$$w'(x,t) = e^{-\frac{t}{\eta_b}}(u'(x,t) - u'(0,t)), \quad (5.126)$$

приводящего уравнение (5.121) к виду уравнения теплопроводности. Предполагая неразрывность решения и первой производной во всей области, решение $w'(x,t)$ может быть записано в явном виде [36]. Рассмотрим решение задачи на акустическом масштабе времени, то есть $O(1)$. В этом случае квазистационарное решение краевой задачи (5.121) может быть записано в виде

$$u_{\text{p}}'(x,t) = \eta_b u^*(t) \exp\left(\frac{x}{\sqrt{\eta_b \nu_n}}\right), \quad (5.127)$$

где $u^*(t) = (\nu_n\eta_b)^{-1}\, u'_{\mathrm{p}}\big|_{x=0}$.

Условие непрерывности и гладкости решения на границе между решением (5.119), (5.120) в области газа и решением (5.125), (5.127) в штрафной области приводит к следующему виду ведущего члена разложения ошибки решения отраженного импульса, то есть в области $-t < x < 0$

$$E = -\frac{1}{1-2\eta_c}\left[\eta_c\left(u'_0(-x-t) + p'_0(-x-t)\right) + \frac{\sqrt{\nu_n\eta_b}}{2}\int_0^{x+t} u^*(\xi)d\xi + \cdots\right], \tag{5.128}$$

как для p'_{f}, так и для u'_{f}. Из оценки (5.128) видно, что ошибка решения пенализированных уравнений, накладывающих граничное условие Наймана на давление p'_{f}, находится в фазе с отраженным импульсом, в то время как условие прилипания, наложенное на скорость штрафной функцией Бринкмана, вносит вклад как в амплитудную, так и в фазовую ошибки. Таким образом, суммарная ошибка решения пенализированных уравнений $O(\eta_c,\eta_b^{1/2})$ подтверждает тот факт, что при оптимальном выборе параметров η_b и η_c, параметр штрафной функции Бринкмана η_b должен быть меньше характеристического штрафного параметра η_c.

5.4.5 Результаты вычислений

Для проверки точности метода характеристических штрафных функций рассмотрим ряд тестовых задач. Первой обсудим одномерную параболическую задачу с тремя видами граничных условий, наложенных с помощью характеристических штрафных функций. Для численного подтверждения асимптотических оценок сходимости решения пенализированных уравнений, приведённых в подразделе 5.4.4, рассмотрена задача отражения акустического импульса от плоской поверхности. В качестве третьей тестовой задачи решена задача стационарного обтекания цилиндра вязким газом для малых чисел Рейнольдса и Маха. Приложение метода характеристических штрафных функций для численного моделирования более сложных течений вязкой сжимаемой жидкости со сложной геометрией обсуждено в главе 6.

Тестовая задача I: одномерная параболическая задача

Рассмотрим одномерную краевую параболическую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.129}$$

в области $\Omega_\mathrm{s} = [-0.25, 0.015625]$ со штрафной областью $\Omega_\mathrm{p} = [0, 0.015625]$ и граничными условиями, неявно заданными с помощью метода характеристических штрафных функций. Пенализированные уравнения для граничных условий Дирихле, Неймана и Робена

$$u = u_0, \tag{5.130}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q, \tag{5.131}$$

$$au + b\frac{\partial u}{\partial n} = g \tag{5.132}$$

принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi)\,\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\eta_b}\,(u - U_0) + \chi\nu_n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.133}$$

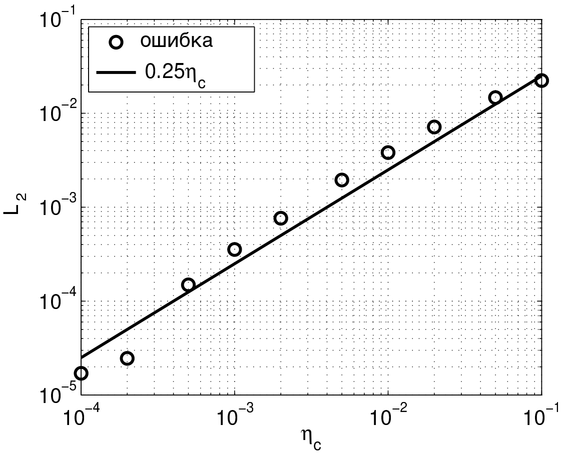
$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi)\,\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\eta_c}\left(\frac{\partial u}{\partial n} - q\right), \tag{5.134}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-\chi)\,\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\eta_c}\left(au + b\frac{\partial u}{\partial n} - g\right). \tag{5.135}$$

Пенализированное параболическое уравнение (5.133) для течения Стокса, соответствующее граничным условиям Дирихле (5.130), было решено аналитически в работе [135], поэтому в этом подразделе ограничимся рассмотрением пенализированных уравнений (5.134)–(5.135) и характеристических штрафных функций для определения граничных условий Неймана (5.131) и Робена (5.132).

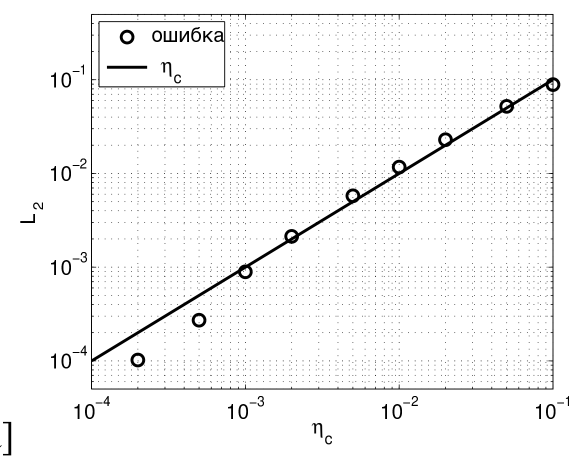
Численное решение получено для однородного граничного условия Неймана $\partial u/\partial x = 0$ и неоднородного граничного условия Робена $u + 2\partial u/\partial x = 5$ на границе $x = 0$. В качестве начального условия возьмём импульсную ступенчатую функцию высотой $\delta u = 1$ со скачком на границе области $x = 0$. Численное решение получено с применением AWCM на адаптивной сетке с эффективным разрешением $1\,089$. Ошибка решения определена как отклонение от численного решения с точными граничными условиями для коэффициентов диффузии $\kappa = 0.5$ для граничных условий Неймана и $\kappa = 1$ для граничных условий Робена.

[граничное условие Нейма-



на]

[граничное условие Робе-



на]

Рисунок 5.21 — Осреднённая по времени L_2-ошибка решения пенализированных параболических уравнений (5.134) и (5.135) как функция штрафного параметра η_c для граничных условий Неймана (5.131) и Робена (5.132).

Напомним, что решение пенализированного параболического уравнения (5.133), соответствующее граничным условиям Дирихле (5.130), сходится как $O\left(\eta_b^{1/2}\right)$ [310]. На рис. 5.21 приведены кривые сходимости пенализированных решений в зависимости от штрафного параметра η_c для граничных условий Неймана (5.131) и Робена (5.132). Как и ожидалось, решение в обоих случаях сходится как $O(\eta_c)$, что фундаментально отличается от сходимости в случае штрафной функции Бринкмана для граничного условия Дирихле (5.130). Отметим, что штрафной параметр η_c представляет собой масштаб времени в штрафной области. Более медленная сходимость метода штрафных функций Бринкмана объясняется диффузионной природой пенализации и формированием пограничного слоя внутри штрафной области в непосредственной близости от границы.

Тестовая задача II: прямое отражение одномерного акустического импульса

Для подтверждения асимптотической сходимости, предсказанной в подразделе 5.4.4, рассмотрим задачу прямого отражения набегающего на стенку акустического импульса малой амплитуды. Численное решение пенализированных уравнений Навье—Стокса (5.117)–(5.115) получено в области $\Omega_s = [-0.65, 0.25]$ с

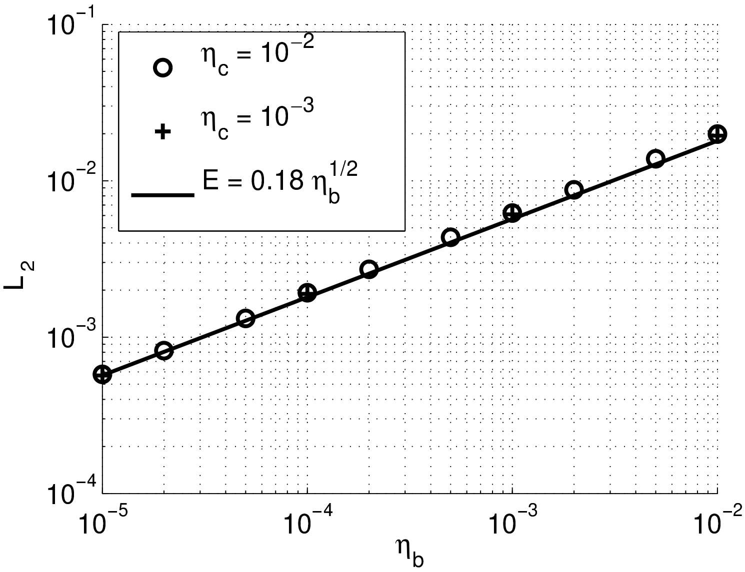


Рисунок 5.22 — L_2-ошибка отраженного акустического импульса как функция штрафного параметра η_b для двух фиксированных значений $\eta_c = 10^{-2}$ и 10^{-3}.

границей раздела $x = 0$, разделяющей область газа $\Omega_\mathrm{f} = [-0.65, 0)$ от штрафной области $\Omega_\mathrm{p} = [0, 0.25]$. В качестве начальных граничных условий взяты локализованные плотность, скорость и давление, заданные как

$$\rho' = u' = p' = 10^{-3}\left(\frac{x+0.25}{0.2} - 1\right)^4 \left(\frac{x+0.25}{0.2} + 1\right)^4. \qquad (5.136)$$

Высокий полиномиальный порядок обеспечивает непрерывность функции и её первой и второй производных, что, в свою очередь, обеспечивает неразрывность потоков. Задача решена в пределе невязкого газа с числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_a = 10^8$ на адаптивной сетке с максимальным эффективным разрешением $235\,930$. Для правильной оценки сходимости для большого диапазона значений штрафного параметра η_b в вычислительных экспериментах применялась искусственная вязкость в методе штрафных функций Бринкмана $\nu_n = 20\Delta_x$. На границе твёрдого тела использовались условия прилипания и адиабатичности. Ввиду малости вязкости, граничное условие $\partial P/\partial x = 0$ является хорошим приближением и даёт возможность использовать упрощенную форму пенализированных уравнений Навье—Стокса (5.117)–(5.115).

Асимптотическая сходимость отраженного импульса для $\eta_b \in [10^{-5}, 10^{-2}]$ при фиксированных значениях $\eta_c = 10^{-2}$ и $\eta_c = 10^{-3}$ показана на рис. 5.22. Как и ожидалось, при фиксированном значении η_c ошибка решения сходится как $O(\eta_b^{1/2})$. Из асимптотического анализа ошибки решения (5.128) виден локализованный характер ошибки решения. На гребне импульса аналитически предска-

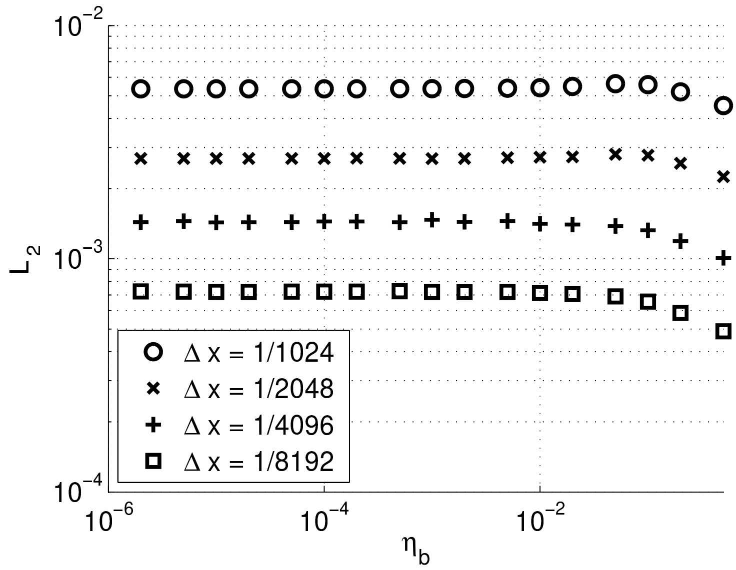


Рисунок 5.23 — L_2-ошибка отраженного акустического импульса как функция η_b для параметризированной искусственной вязкости $\nu_n = \alpha^2\Delta_x^2/\eta_b$, демонстрирующая доминирующее влияние сеточного разрешения Δ_x на ошибку решения и нечувствительность решения к значениям штрафного параметра η_b.

занная ошибка решения соответствует $O(\eta_c)$. Кроме того, из выражения (5.128) видно, что доминирующим фактором ошибки является фазовая задержка, вызванная приближенным выполнением условия прилипания даже для $\eta_b = 10^{-5}$. Таким образом, хорошая сходимость решения наблюдается уже при умеренных значениях η_c, что существенно, так как уменьшает жесткость и вычислительную стоимость задачи, связанную с жесткостью характеристических штрафных функций при уменьшении величины параметра η_c.

Для демонстрации влияния сеточного разрешения на ошибку решения при полном разрешении диффузионных эффектов рассмотрим случай параметризированной искусственной вязкости, зависящей от сеточного разрешения и определённой как

$$\nu_n = \frac{\alpha^2\Delta_x^2}{\eta_b}, \tag{5.137}$$

где α — количество узлов сетки на диффузионную длину. Результаты численных экспериментов показали, что $\alpha = O(1)$ гарантирует неосцилирующее решение при использовании AWCM. Как показано на рис. 5.23, при фиксированных значениях η_c и Δ_x ошибка решения отраженного импульса не зависит от параметра η_b. Нечувствительность ошибки решения к η_b объясняется пропорциональным увеличением искусственной вязкости при уменьшении η_b, обеспечивающей сходимость решения порядка $O(\Delta_x)$. Результаты рис. 5.23 хорошо согласуются с результатами асимптотического анализа (5.128), предсказывающими ошибку решения порядка $O\left((\nu_n\eta_b)^{1/2}\right)$. При значении ν_n, определённом согласно выражению (5.137), ошибка решения оценивается как $O(\alpha\Delta_x)$. Поскольку параметр α определяет минимальный диффузионный масштаб, применение искусственной вязкости (5.137) минимизирует ошибку, при этом обеспечивает устойчивость решения. Обратим внимание на нечувствительность ошибки решения даже в случае очень малых значений η_b, существенно меньших, чем масштаб времени течения, что ещё раз подчёркивает доминирующее влияние сеточного разрешения на ошибку решения.

Тестовая задача III: обтекание твёрдого тела при малых числах Маха

Для демонстрации применения метода характеристических штрафных функций для численного моделирования течений сложной геометрии рассмотрим задачу обтекания цилиндра вязким газом для малых чисел Рейнольдса и Маха. Для малых чисел Рейнольдса, $\mathrm{Re} \leqslant 40$, поведение пограничного слоя в следе цилиндра при стационарном обтекании хорошо изучено как экспериментально, так и численно [60; 67; 68; 89; 150; 236]. В силу отрыва пограничного слоя от поверхности цилиндра, приближение $\partial P/\partial \mathbf{n} \approx 0$ не работает в области отрыва, что делает невозможным использование упрощённой формы пенализированных уравнений (5.115)–(5.117) и вызывает необходимость применения более общей формулировки (5.107)–(5.109) для уравнения неразрывности.

Для численного моделирования обтекания цилиндра рассмотрим случай течения слабо-сжимаемого газа при числах Маха $\mathrm{Ma} = 0.03$ и Рейнольдса $\mathrm{Re} = 40$. Задача обтекания цилиндра радиуса $r = 0.5$ $(D = 1.0)$, находящегося в начале координат, решена в области $\Omega_\mathrm{s} = [-5{,}10] \times [-5{,}5]$ для штрафных параметров $\eta_b = 5\times10^{-3}, \eta_c = 10^{-2}$ и искусственной вязкости, определённой в соответствии с выражением (5.137), так что ошибка решения пенализированных уравнений определяется максимальным разрешением адаптивной сетки. Численные результаты получены для четырёх разрешений $\Delta_x = 1/256, 1/512, 1/1024$ и $1/2048$. Для оцен-

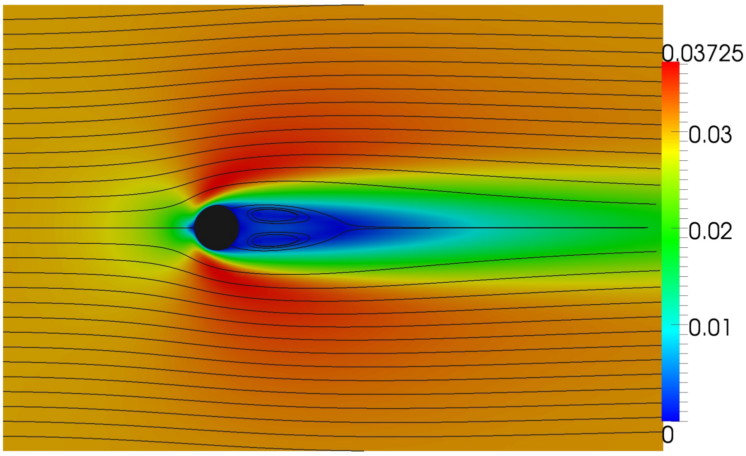


Рисунок 5.24 — Величина скорости и линии тока для задачи стационарного обтекания цилиндра при $\mathrm{Re} = 40$ и $\mathrm{Ma} = 0.03$.

ки ошибки решения определены точка отрыва пограничного слоя θ, длина области рециркуляции L и коэффициент сопротивления C_D.

Поле величины скорости и линии тока течения при установившемся обтекании цилиндра приведены на рис. 5.24. Сравнение результатов вычислений совместного AWCM и метода характеристических штрафных функций с ранее полученными экспериментальными и численными результатами приведено в таблице 5.1. Как видно из таблицы, при увеличении разрешения решение сходится и хорошо согласуется с опубликованными результатами [60; 67; 68; 89; 150; 236]. Следует отметить, что при недостаточном разрешении ошибка, связанная с приблизительной природой условия прилипания, накладываемая штрафной функцией Бринкмана, приводит к ошибке, связанной с задержкой отрыва пограничного слоя, уменьшая, тем самым, коэффициент сопротивления. При увеличении разрешения, размер внутреннего пограничного слоя и ошибка аппроксимации условия прилипания уменьшаются. Заметим, что зависимость ошибки решения от точности аппроксимации условия прилипания, а также высокая точность результатов для сравнительно больших значений параметра η_c, подтверждают доминирующее влияние граничных условий Дирихле, неявно накладываемых штрафной функцией Бринкмана.

	Θ	L	C_D
Экспериментальные результаты			
Кутансо и Буард [60]	53.8°	2.11^*	$--$
Триттон [236]	$--$	$--$	1.54
Результаты двумерных вычислений			
Линник и Фазель [150]	$--$	2.28	1.54
Деннис и Чанг [68]	53.8°	2.35	1.52
Форнберг [89]	55.6°	2.24	1.50
де Туллио и соавторы [67]	53.7°	2.23	1.49
Результаты вычислений			
$\Delta_x = \frac{1}{256}$	$\mathbf{51.6^\circ}$	$\mathbf{2.31}$	$\mathbf{1.47}$
$\Delta_x = \frac{1}{512}$	$\mathbf{52.8^\circ}$	$\mathbf{2.31}$	$\mathbf{1.48}$
$\Delta_x = \frac{1}{1024}$	$\mathbf{53.7^\circ}$	$\mathbf{2.30}$	$\mathbf{1.48}$
$\Delta_x = \frac{1}{2048}$	$\mathbf{53.6^\circ}$	$\mathbf{2.28}$	$\mathbf{1.51}$

Таблица 5.1 — Результаты вычислений обтекания цилиндра слабо-сжимаемым газом при числах Маха $\mathrm{Ma} = 0.03$ и Рейнольдса $\mathrm{Re} = 40$: точка отрыва Θ, длина области рециркуляции L и коэффициент сопротивления C_D.

5.5 Метод характеристических штрафных функций для течений невязкого сжимаемого газа

Для численного моделирования дозвукового обтекания тел сложной геометрии сжимаемым вязким газом могут быть использованы как метод штрафных функций Бринкмана, так и метод характеристических штрафных функций, описанные соответственно в разделах 5.3 и 5.4. В случае сверхзвуковых течений метод штрафных функций Бринкмана приводит к ошибочному отражению ударных волн из-за возникновения больших градиентов давления внутри штрафной области и последующего плавного уменьшения давления в результате просачивания в пористой среде. Неспособность метода штрафных функций Бринкмана моделировать сверхзвуковое обтекание тел сложной геометрии приводит к необходимости разработки более общих методов штрафных функций, применимых для обтекания тел сжимаемым газом во всех скоростных режимах, а также способных накладывать общие однородные и неоднородные граничные условия Неймана и Робена, как, например, метод характеристических штрафных функций, описанный в разделе 5.4 и сформулированный для решения параболических уравнений и уравнений Навье—Стокса для сжимаемого газа. В настоящем разделе описано расширение метода характеристических штрафных функций для решения уравнений Эйлера для сжимаемого невязкого газа для стационарных и движущихся объектов, а также объектов с деформируемой границей. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работе автора [294].

5.5.1 Метод характеристических штрафных функций для уравнений Эйлера

При численном решении уравнений Эйлера для сжимаемого газа большинство вычислительных методов накладывают следующие граничные условия либо в явном, либо в неявном виде [234]:

$$u_i^n\big|_{\partial\Omega_m} = U_{oi}^n \qquad \text{(условие непротекания)}, \tag{5.138}$$

$$\left.\frac{\partial u_i^\tau}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_m} = 0 \qquad \text{(отсутствие касательного напряжения)}, \tag{5.139}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_m} = -\kappa^\tau\rho\|\mathbf{u}^\tau - \mathbf{U}_o^\tau\|^2 \qquad \text{(условие безотрывного течения)}, \tag{5.140}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_m} = 0 \qquad \text{(адиабатическое условие)}, \tag{5.141}$$

где $\mathbf{U}$ — скорость тела, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{U}_o$ — скорость газа по отношению к твёрдому телу, надстрочные индексы $(\cdot)^n$ и $(\cdot)^\tau$ соответственно обозначают нормальную и тангенциальную компоненты вектора скорости, $\|\hat{\mathbf{u}}^\tau\|^2 = \hat{u}_j^\tau\hat{u}_j^\tau$, κ^τ — кривизна поверхности вдоль линии тока в системе отсчёта, связанной с телом. Следует отметить, что, несмотря на то, что условие непротекания является единственным математически строгим граничным условием для уравнений Эйлера, другие вышеперечисленные граничные условия вытекают из внешних асимптотических условий вязкого пограничного слоя. Не входя в полемику по поводу обоснованности этих предположений, отметим, что граничные условия (5.138)–(5.141) могут быть использованы в методе характеристических штрафных функций и принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{u_i^n} - \frac{\chi}{\eta_b}\hat{u}_i, \tag{5.142}$$

$$\frac{\partial u_i^\tau}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{u_i^\tau} - \frac{\chi}{\eta_c}\frac{\partial u_i^\tau}{\partial \mathbf{n}}, \tag{5.143}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{p} - \frac{\chi}{\eta_c}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + \kappa^\tau \rho \|\hat{\mathbf{u}}^\tau\|^2\right), \tag{5.144}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{T} - \frac{\chi}{\eta_c}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}. \tag{5.145}$$

Обратим внимание, что, как и в разделе 5.4, в уравнениях (5.142)–(5.145) используются два различных параметра η_b и η_c соответственно для штрафных функций Бринкмана и характеристических штрафных функций. Следует также отметить, что уравнения (5.142)–(5.145) определены во всей области, что подразумевает существование вектора нормали, нормальной $\mathbf{u}^n$ и тангенциальной $\mathbf{u}^\tau$ компонент скорости и кривизны поверхности κ^τ внутри штрафной области, определённых как $\mathbf{u}^n = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n}$, $\mathbf{u}^\tau = \mathbf{u} - \mathbf{u}^n$, $\hat{\mathbf{u}}^n = (\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{u}})\mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{u}}_o^\tau = \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^n$, $\boldsymbol{\tau} = \frac{\hat{\mathbf{u}}^\tau}{\|\hat{\mathbf{u}}^\tau\|}$, $\kappa^\tau = -\boldsymbol{\tau}\cdot\big((\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\,\mathbf{n}\big)$. Подстановка определения кривизны κ^τ в уравнение для давления приводит к более простой форме

$$\kappa^\tau \rho \|\hat{\mathbf{u}}^\tau\|^2 = -\rho\hat{\mathbf{u}}^\tau \cdot \big((\hat{\mathbf{u}}^\tau\cdot\nabla)\,\mathbf{n}\big) = -\rho\hat{u}_j^\tau \hat{u}_k^\tau \frac{\partial n_k}{\partial x_j}. \tag{5.146}$$

Как отмечалось в разделе 5.4, при применении метода характеристических штрафных функций для численного моделирования задач сложной геометрии рекомендуется использовать двухслойную формулировку с тонкой характеристической штрафной зоной χ_h, определённой в подразделе 5.4.2. Пенализированные уравнения (5.142)–(5.145), записанные для консервативных переменных, в двухслойной постановке принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho} - \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\partial \rho}{\partial n}}_{\text{МХШФ}} + \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\rho^2 \hat{u}_j^\tau \hat{u}_k^\tau}{p}\frac{\partial n_k}{\partial x_j}}_{\text{неконсервативный}} + \underbrace{\chi_\mathrm{d}\nu_\mathrm{n}\Delta\rho}_{\text{сглаживающий}}, \tag{5.147}$$

$$\frac{\partial \rho u_i^n}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i^n} - \underbrace{\frac{\chi}{\eta_b}\rho\hat{u}_i^n}_{\text{МШФБ}} + \underbrace{\chi\rho\nu_\mathrm{n}\Delta u_i^n}_{\text{диффузионный}}, \tag{5.148}$$

$$\frac{\partial \rho u_i^\tau}{\partial t} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i^\tau} - \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\partial \rho u_i^\tau}{\partial n}}_{\text{МХШФ}} + \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\rho^2 u_i^\tau \hat{u}_j^\tau \hat{u}_k^\tau}{p}\frac{\partial n_k}{\partial x_j}}_{\text{неконсервативный}} + \underbrace{\chi_\mathrm{d}\rho\nu_\mathrm{n}\Delta u_i^\tau}_{\text{сглаживающий}}, \tag{5.149}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (1-\chi)\times \mathrm{RHS}_E - \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\partial E}{\partial n}}_{\text{МХШФ}} + \underbrace{\chi_\mathrm{d}\nu_\mathrm{n}\Delta E}_{\text{сглаживающий}}$$
$$+ \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\rho\hat{u}_j^\tau\hat{u}_k^\tau}{\gamma-1}\frac{\partial n_k}{\partial x_j} + \frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}u_j^n\frac{\partial\rho u_j^n}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_b}\rho u_j^n\hat{u}_j^n + \chi_\mathrm{h}\rho u_j^n\nu_\mathrm{n}\Delta u_j^n}_{\text{неконсервативный}}. \tag{5.150}$$

Заметим, что при решении пенализированных уравнений Эйлера (5.147)–(5.150) эволюционные уравнения для нормальной и тангенциальной компонент импульса объединяются в одно эволюционное уравнение как

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} = \frac{\partial\rho u_i^n}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i^\tau}{\partial t}, \tag{5.151}$$

что позволяет одновременно задавать граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент скорости.

Следует подчеркнуть, что как и в случае вязкой жидкости, рассмотренном в разделе 5.4, пенализированные уравнения Эйлера используют искусственную вязкость $\nu_\mathrm{n} = \alpha^2\Delta^2/\eta_b$ с $\alpha = O(1)$ для явного контроля толщины внутреннего пограничного слоя в штрафной области и для гарантии сопоставимости диффузионного масштаба времени с η_b.

5.5.2 Метод характеристических штрафных функций для уравнений Навье—Стокса

Пенализированные уравнения Эйлера (5.147)–(5.150) являются обобщённой формой уравнений Навье—Стокса (5.107)–(5.109). Отметим, что, переопределив $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}^\tau = 0$ и $\mathbf{U}_o^n = \mathbf{U}_o$, уравнения (5.147)–(5.150) также применимы к уравнениям Навье—Стокса для безотрывных течений и адиабатических стенок. Другими словами, в вязком случае из-за выполнения условия прилипания для всех компонент скорости, вместо условия непротекания для нормальной компоненты скорости, можно пренебречь тангенциальной компонентой скорости. При решении уравнений Навье—Стокса с ненулевым потоком тепла на поверхности тела адиабатические граничные условия (5.99) могут быть заменены на

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -q, \tag{5.152}$$

где q — нормализованный поток тепла, который либо задан, либо зависит от температуры стенки. Соответствующее пенализированное уравнение (5.145) может быть изменено в соответствии с процедурой (5.90), описанной в разделе 5.4.

5.5.3 Обобщение метода характеристических штрафных функций на случай подвижных/деформируемых тел

При решении задач сложной геометрии с подвижными/деформируемыми границами важно, чтобы уравнения и граничные условия оставались инвариантными в движущейся системе отсчета, то есть формулировка задачи должна удовлетворять условиям инвариантности Галилея. Следует отметить, что в то время как граничные условия (5.138)–(5.141) удовлетворяют условиям инвариантности Галилея, пенализированные уравнения (5.147)–(5.150) — не инвариантны. Для выполнения условия инвариантности Галилея пенализированные уравнения (5.147)–(5.150) должны быть переписаны в системе отсчёта движущегося тела, после чего преобразованы к уравнениям в неподвижной системе отсчёта, что может быть достигнуто добавлением конвективного члена Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + U_j^o \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{5.153}$$

приводящего пенализированные уравнения (5.142)–(5.145) и (5.147)–(5.150) для естественных (неконсервативных) и консервативных переменных к следующему виду:

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{u_i^n} - \frac{\chi}{\eta_b} \hat{u}_i \tag{5.154}$$

$$\frac{\partial u_i^\tau}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial u_i^\tau}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{u_i^\tau} - \frac{\chi}{\eta_c} \frac{\partial u_i^\tau}{\partial \mathbf{n}}, \tag{5.155}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial p}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_p - \frac{\chi}{\eta_c} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + \kappa^\tau \rho \|\hat{\mathbf{u}}^\tau\|^2 \right), \tag{5.156}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial T}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_T - \frac{\chi}{\eta_c} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}. \tag{5.157}$$

и

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_\rho - \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\partial \rho}{\partial n}}_{\text{МХШФ}} + \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\rho^2 \hat{u}_j^\tau \hat{u}_k^\tau}{p}\frac{\partial n_k}{\partial x_j}}_{\text{неконсервативный}} + \underbrace{\chi_\mathrm{d} \nu_\mathrm{n} \Delta \rho}_{\text{сглаживающий}} , \tag{5.158}$$

$$\frac{\partial \rho u_i^n}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial \rho u_i^n}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i^n} - \underbrace{\frac{\chi}{\eta_b}\rho \hat{u}_i^n}_{\text{МШФБ}} + \underbrace{\chi \rho \nu_\mathrm{n} \Delta u_i^n}_{\text{диффузионный}} , \tag{5.159}$$

$$\frac{\partial \rho u_i^\tau}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial \rho u_i^\tau}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_{\rho u_i^\tau} - \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\partial \rho u_i^\tau}{\partial n}}_{\text{МХШФ}} + \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\rho^2 u_i^\tau \hat{u}_j^\tau \hat{u}_k^\tau}{p}\frac{\partial n_k}{\partial x_j}}_{\text{неконсервативный}} + \underbrace{\chi_\mathrm{d} \rho \nu_\mathrm{n} \Delta u_i^\tau}_{\text{сглаживающий}}, \tag{5.160}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \chi U_j^o \frac{\partial E}{\partial x_j} = (1-\chi) \times \mathrm{RHS}_E - \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\partial E}{\partial n}}_{\text{МХШФ}} + \underbrace{\chi_\mathrm{d} \nu_\mathrm{n} \Delta E}_{\text{сглаживающий}} \\ + \underbrace{\frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c}\frac{\rho \hat{u}_j^\tau \hat{u}_k^\tau}{\gamma - 1}\frac{\partial n_k}{\partial x_j} + \frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_c} u_j^n \frac{\partial \rho u_j^n}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\chi_\mathrm{h}}{\eta_b}\rho u_j^n \hat{u}_j^n + \chi_\mathrm{h} \rho u_j^n \nu_\mathrm{n} \Delta u_j^n}_{\text{неконсервативный}} . \end{aligned} \tag{5.161}$$

Отметим, что в формулировке метода характеристических штрафных функций для вязкого сжимаемого газа, описанного в разделе 5.4, не использовался конвективный член Лагранжа, при этом отсутствие этого члена не влияло на точность результатов, что объясняется наличием условия прилипания и плавным изменением решения в области границы тела. Также обратим внимание, что условие прилипания накладывалось штрафной функцией Бринкмана, обеспечивающей корректировку решения внутри штрафной области на масштабе времени η_b. В случае уравнений Эйлера ситуация отличается кардинальным образом, так как изменения тангенциальной составляющей скорости могут быть существенными, если решение внутри штрафной области не переносится вместе с препятствием. Результаты численных экспериментов подтверждают улучшение точности и ускорение сходимости метода штрафных функций в формулировке (5.158)–(5.161) для уравнений Навье—Стокса при применении конвективных членов Лагранжа. Одним словом, формулировка, включающая конвективные члены Лагранжа, предпочтительна как для пенализированных уравнений Навье—Стокса, так и Эйлера. Подчеркнём, что из-за локальности воздействия штрафных функций уравнения (5.158)–(5.161) применимы не только при поступательном движении

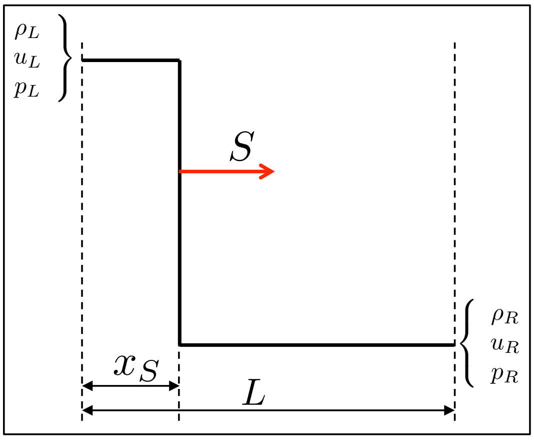


Рисунок 5.25 — Схематическая диаграмма задачи прямого отражения ударной волны от плоской поверхности.

тел, но и для вращающихся и деформируемых тел. Для задач с деформацией и вращением тел скорость тела должна быть определена во всей штрафной области либо аналитически, либо посредством решения дополнительных уравнений, описывающих движение и деформацию тела. Выполнение условия инвариантности Галилея при сверхзвуковом обтекании стационарного и движущегося цилиндра невязким сжимаемым газом продемонстрировано в разделе 6.7.

5.5.4 Результаты вычислений

В этом подразделе обсудим применение метода характеристических штрафных функций для численного моделирования сверхзвукового обтекания тел сложной геометрии. В качестве тестовых задач рассмотрим прямое отражение одномерной ударной волны от плоской поверхности и сверхзвуковое обтекание клина с формированием присоединенного косого скачка уплотнения или отсоединённой ударной волны. В обоих случаях использован метод характеристических штрафных функций, интегрированный с адаптивным вейвлетным коллокационным методом для гиперболических задач, описанном в разделе 1.6. Применение метода характеристических штрафных функций для более сложных задач обтекания стационарных и движущихся тел обсуждено в главе 6.

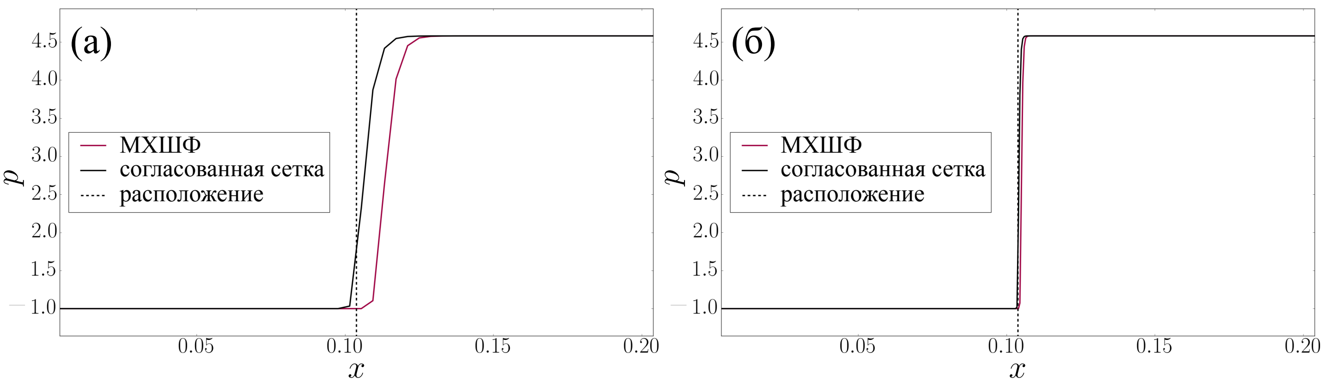


Рисунок 5.26 — Решение тестовой задачи прямого отражения одномерной ударной волны от плоской поверхности для $\eta_c = 10^{-3}$ и $\eta_b = 10^{-5}$: (а) низкое сеточное разрешение 513 и (б) высокое сеточное разрешение $2\,049$. Для сравнения приведено численное решение с точным граничным условием на согласованной с границей сетке и теоретическое расположение ударной волны.

Тестовая задача I: прямое отражение одномерной ударной волны

Рассмотрим одномерную тестовую задачу прямого отражения одномерной ударной волны от поверхности твёрдого тела в вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [-1, 1.5]$ со штрафной областью $\Omega_\mathrm{p} = [1, 1.5]$ и начальным расположением ударной волны в $x_0 = 0$. Начальные условия схематически показаны на рис. 5.25, где $\rho_L = 1$, $u_L = 1.5$ и $p_L = 1$, а значения ρ_R и p_R впереди набегающей ударной волны выбраны согласно условиям Ренкина—Гюгонио, соответствующим $u_R = 0$. Задача решена для последовательности равномерных неадаптивных сеток с разрешением $\Delta_x = 2^{-9}$, 2^{-10}, 2^{-11} и 2^{-12}.

Решение задачи для отраженной ударной волны для штрафных параметров $\eta_c = 10^{-3}$ и $\eta_b = 10^{-5}$ представлено на рис. 5.26 для грубого (513) и высокого $(2\,049)$ сеточного разрешения. Из рисунка видно существование фазовой ошибки, уменьшающейся с увеличением разрешения. Следует отметить, что толщина ударной волны определяется размером сетки Δ_x и штрафными параметрами η_c и η_b, влияющими на масштаб времени отражения ударной волны от стенки и фазовой задержки. При скорости распространения ударной волны S и конечной толщине волны Δ_x характерный масштаб времени отражения соответствует $\tau_\mathrm{swr} = \frac{S}{\Delta_x}$, в то время как масштаб времени установления решения в результате воздействия штрафной функции — $\tau_\eta = \max(\eta_b,\eta_c)$. Принимая во внимание порядок $O(\eta_b^{1/2},\eta_c)$ суммарной ошибки решения при совместном использовании

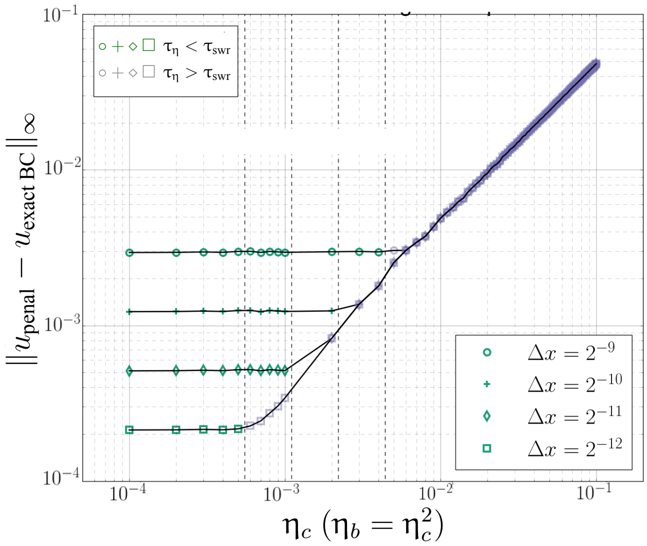
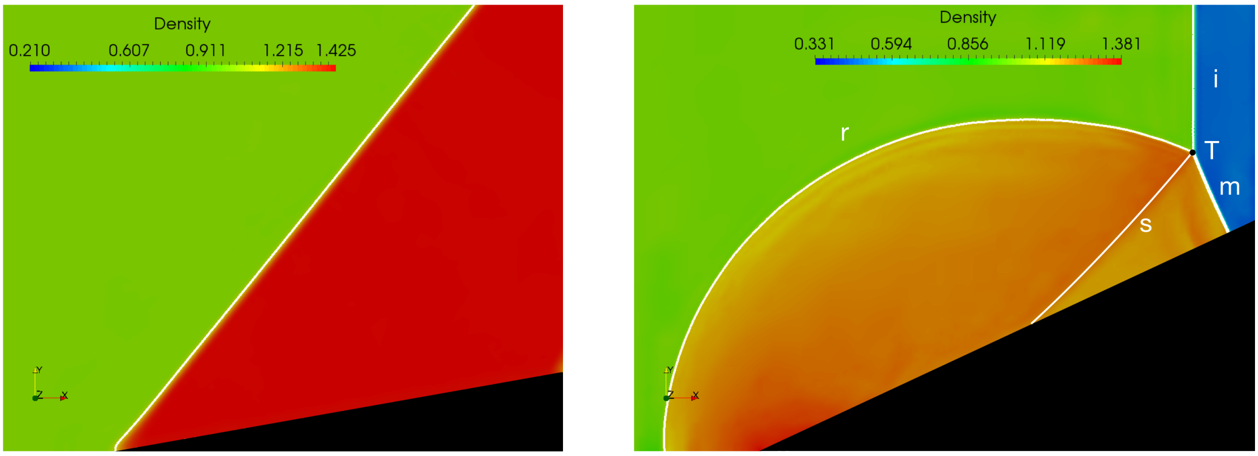


Рисунок 5.27 — Зависимость сходимости решения от сеточного разрешения для задачи прямого отражения ударной волны от плоской поверхности.

штрафных функций Бринкмана и характеристических штрафных функций, численное решение получено для $\eta_b = \eta_c^2$. Результаты проверки сходимости решения от параметра $\eta_c \in \left[10^{-4}, 10^{-1}\right]$ для четырёх различных разрешений представлены на рис. 5.27. Из рисунка видна линейная зависимость ошибки решения от штрафного параметра η_c в случае, когда $\tau_\eta > \tau_{\text{swr}}$. В случае $\tau_\eta < \tau_{\text{swr}}$, доминирующей ошибкой является ошибка дискретизации, связанная с конечной толщиной ударной волны.

Тестовая задача II: сверхзвуковое обтекание клина

В качестве второй тестовой задачи рассмотрим задачу сверхзвукового обтекания клина невязким сжимаемым газом в случаях докритического и сверхкритического значений угла клина с формированием присоединенного косого скачка уплотнения и отсоединённой ударной волны, в которой геометрия клина моделировалась пенализированными уравнениями Эйлера (5.147)–(5.150). Значения скорости, плотности и давления для набегающей ударной волны соответствуют первой тестовой задаче, то есть $u_L = 1.5$, $p_L = 1$, $\rho_L = 1$, а состояние газа ρ_R, p_R впереди набегающей ударной волны выбрано согласно условиям Ренкина—Гюгонио, соответствующим $u_R = 0$. Задача решена в вычислительной



(а) докритическое обтекание, $\theta = 10^\circ$ (б) сверхкритическое обтекание, $\theta = 25^\circ$

Рисунок 5.28 — Сверхзвуковое обтекание клина невязким сжимаемым газом. Обозначения: **i** — набегающая ударная волна, **r** — отраженная ударная волна, **m** — ствол Маха, **s** — контактный разрыв, **T** — тройная точка, где встречаются все три линии разрыва.

области $\Omega_s = [-0.5, 1.5] \times [0.0, 4.0]$ с вершиной клина, расположенной в точке $\mathbf{x}_0 = (0.28{,}0.0)$. Пенализированные уравнения Эйлера (5.147)–(5.150) решены с помощью AWCM для гиперболических задач на адаптивной сетке с эффективным разрешением $513 \times 1\,025$. На левой границе использовались граничные условия Дирихле, соответствующие состоянию газа после ударной волны, на верхней границе и части нижней границы, на участке до клина — условия симметрии $u_2 = 0$, на части правой границы вне области клина — характеристические условия вытекания, а на границе клина и вычислительной области — диффузионные граничные условия.

В случае докритического сверхзвукового обтекания клина угол присоединенного косого скачка уплотнения определяется из следующего соотношения [284]:

$$\operatorname{tg}\theta = 2\operatorname{ctg}\beta\frac{\mathrm{Ma}\ \sin^2\beta - 1}{\mathrm{Ma}^2\,(\gamma + \cos 2\beta) + 2}, \tag{5.162}$$

где θ — угол клина, β — угол косого скачка уплотнения и Ma — число Маха набегающей ударной волны. В рассмотренном случае теоретическое значение критического угла клина соответствует $\theta_{\text{crit}} \approx 15^\circ$.

В докритическом случае сверхзвуковое обтекание клина с углом $\theta = 10^\circ$ невязким сжимаемым газом приводит к формированию присоединенного косого скачка уплотнения с углом отклонения $\beta \approx 51^\circ$, обозначенного на рис. 5.28а бежевой линией. Структура отсоединённой ударной волны при сверхкритическом сверхзвуковом обтекании клина с углом $\theta = 25^\circ$ приведена на рис. 5.28б. Отметим, что структура дугообразной ударной волны соответствует ранее опубликованным результатам [234].

Глава 6. Применения адаптивного вейвлетного коллокационного метода для численного моделирования течений сложной геометрии

В данной главе рассмотрены приложения разработанных автором методов штрафных функций, расширяющих область применения адаптивного вейвлетного коллокационного метода и позволяющих моделировать течения со сложной геометрией. Материалы, обсуждаемые в этой главе, основаны на работах автора [293; 294; 298; 302; 310] и организованы следующим образом. Применение метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования обтекания периодического массива цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью и масштабирование вычислительной сложности от числа Рейнольдса обсуждено в разделе 6.1. Применение метода штрафных функций Бринкмана для вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования (WA-DNS) и вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей (WA-LES) соответственно рассмотрено в разделах 6.2 и 6.3. Следует отметить, что подход иерархического вейвлетного вихреразрешающего моделирования турбулентных течений [297; 304—306; 317], кратко описанный в разделах 6.2 и 6.3, не является предметом обсуждения данной диссертации, а примеры применения метода штрафных функций в контексте WA-DNS и WA-LES приведены для демонстрации общности подхода. Кроме того, в разделе 6.3 кратко описывается обобщение AWCM для варьирующегося в пространстве и времени вейвлетного порога, расширяющее возможности адаптивного вейвлетного коллокационного метода контролировать сеточное разрешение не только из соображений контроля ошибки численного решения, но и с точки зрения управления модельным (турбулентным) разрешением, измеряемым соотношением моделируемой подсеточной диссипации и разрешённой вязкой диссипации.

Применение метода характеристических штрафных функций для моделирования дозвукового обтекания стационарного и движущегося цилиндров сжимаемым вязким газом обсуждено соответственно в разделах 6.4 и 6.5. Сверхзвуковое обтекание одного или нескольких тел невязким сжимаемым газом описано в разделе 6.6. Выполнение условия инвариантности Галилея при моделировании сверхзвукового обтекания стационарных и движущихся тел продемонстрировано в разделе 6.7.

6.1 Обтекание периодического массива цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью

В этом разделе рассмотрим совместное применение адаптивного вейвлетного коллокационного метода и метода штрафных функций Бринкмана для численного моделирования обтекания периодического массива цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью при мгновенном начале движения жидкости для чисел Рейнольдса в диапазоне $3 \times 10^1 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10^5$. Для моделирования массива цилиндров, как, например, в случае теплообменника, рассмотрим течение в одной периодической ячейке с разносом цилиндров $P/D = 1.5$. Число Рейнольдса определено как $\mathrm{Re} = UD/\nu$, где $U = |\mathbf{U}|$ — величина скорости наложенного среднего потока под углом $45°$. Для полного разрешения пограничного слоя максимальное сеточное разрешение задано как функция числа Рейнольдса $\Delta x_{\min} = \mathrm{Re}^{-1/2}/6$, что соответствует шести ячейкам максимального уровня разрешения на один масштаб Тейлора $\lambda = \mathrm{Re}^{-1/2}$. Отметим, что максимальное разрешение установлено из соображений минимизации вычислительной стоимости и ограничения разрешения внутреннего пограничного слоя при применении штрафной функции Бринкмана, однако на практике локальное необходимое сеточное разрешение определяется вейвлетным порогом ε, как описано в главе 1.

Для изучения зависимости количества степеней свободы (числа значимых узлов адаптивной сетки) $\mathcal{N}_{\mathrm{S}}$ от числа Рейнольдса проведена серия вычислений для чисел Рейнольдса в диапазоне $3 \times 10^1 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10^5$ от момента мгновенного начала движения жидкости до момента полного формирования пограничного слоя и возникновения вихревых структур. Пример поля завихренности и соответствующей адаптивной вычислительной сетки для $\mathrm{Re} = 10^4$ приведён на рис. 5.1, где четко видна область высокого разрешения в пограничном слое толщиной $\lambda \approx \mathrm{Re}^{-1/2} \approx 0.01$. Для L_∞-ошибки порядка $O(10^{-4})$ требуется только $66\,862$ узлов адаптивной сетки из максимально возможного 869×869, что соответствует коэффициенту сжатия 12. Следует отметить присутствие узлов сетки во внутренней (штрафной) области цилиндра и быстрого разрежения сетки вдали от границы цилиндра вне тонкого слоя толщиной 0.05, что подчёркивает важность применения адаптивного метода для численного моделирования течений сложной геометрии с помощью метода штрафных функций.

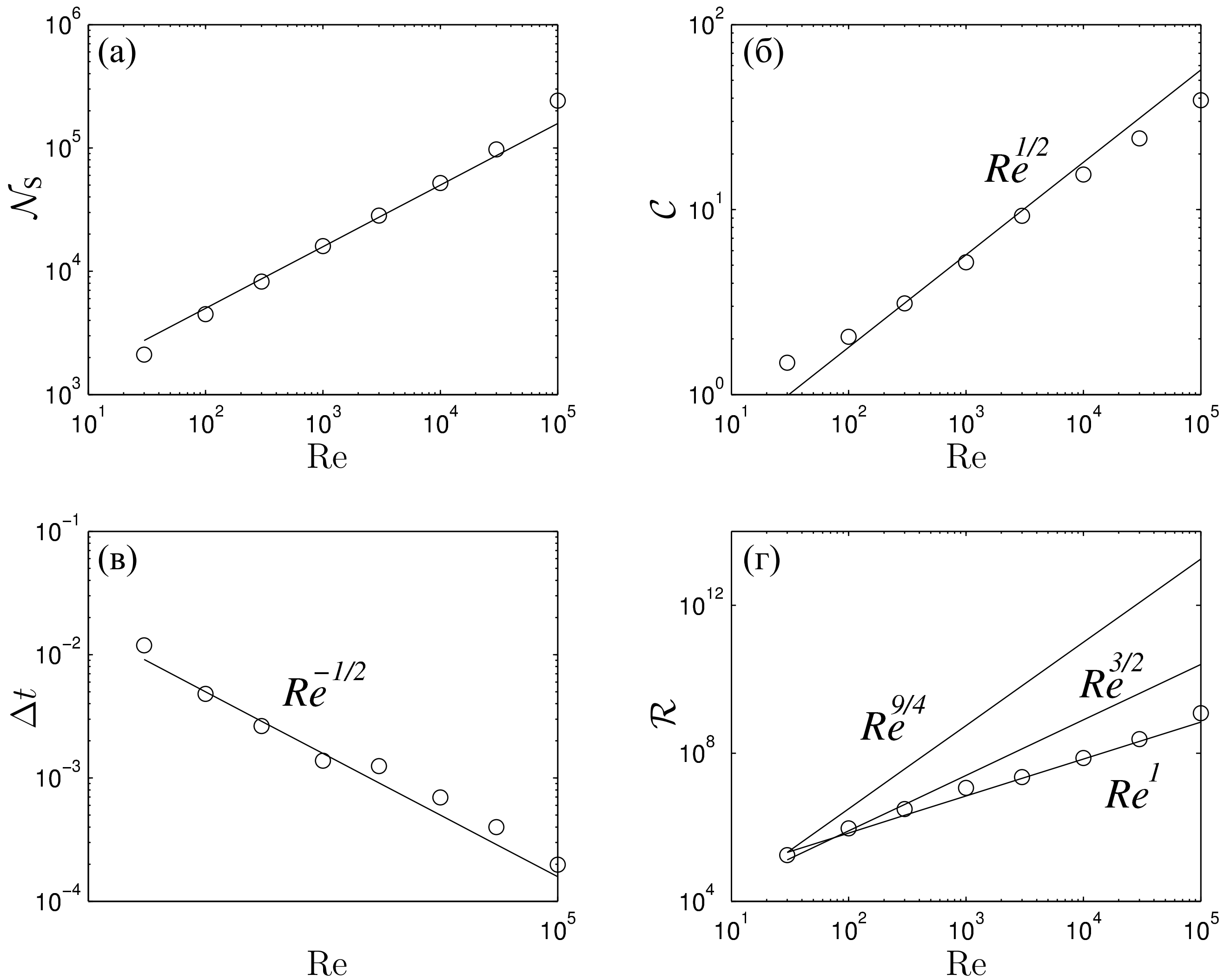


Рисунок 6.1 — Масштабирование вычислительной сложности от числа Рейнольдса для задачи обтекания периодического массива цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью: (а) число значимых узлов сетки $\mathcal{N}_\mathrm{S}$, (б) коэффициент сжатия $\mathcal{C}$, (в) шаг интегрирования по времени Δt, (г) сравнение вычислительной сложности $\mathcal{R}$ с классическими оценками, основанными на масштабе Колмогорова $\eta = \mathrm{Re}^{-3/4}$ (что в двумерном случае даёт оценку $\mathrm{Re}^{9/4}$) и масштабе Тейлора λ (что в двумерном случае даёт оценку $\mathrm{Re}^{3/2}$).

В работе [84] утверждалось, что эффективность прямого численного моделирования турбулентных течений с помощью вейвлетных адаптивных методов должна повышаться с увеличением числа Рейнольдса за счет увеличения пространственной перемежаемости. Результаты численного моделирования, приведённые на рис. 6.1, подтверждают это утверждение. Из рисунка видно, что количество значимых узлов $\mathcal{N}_\mathrm{S}$ адаптивной сетки и коэффициент сжатия $\mathcal{C}$ масштабируются как $\lambda \propto \mathrm{Re}^{1/2}$, в то время как из рис. 6.1г видно, что общая вычислительная сложность масштабируется как Re. Важно отметить, что вычислительная стоимость $\mathcal{R}$, измеряемая как суммарное число пространственно-временных степеней свободы, возрастает намного медленнее, чем классическая оценка $\mathrm{Re}^{9/4}$ для двумерной турбулентности, основанная на масштабе Колмогорова, или $\mathrm{Re}^{3/2}$, основанная на масштабе Тейлора. Также важно отметить, что экспоненциальная зависимость вычислительной стоимости от числа Рейнольдса покрывает диапазон в четыре порядка.

6.2 Вейвлетное адаптивное прямое численное моделирование обтекания квадратного цилиндра несжимаемой жидкостью

Численное моделирование обтекания тупых тел с нестационарным отрывом представляет собой довольно сложную задачу, имеющую как прикладную, так и фундаментальную важность. Даже для тел двумерной геометрии переход от двумерного течения к трёхмерному наблюдается при достаточно малых числах Рейнольдса, а сила, воздействующая на обтекаемое тело, очень сильно зависит от динамики развития вихревых структур в переходном режиме [217]. Устойчивость двумерного следа цилиндра с квадратным поперечным сечением была предметом обширных теоретических, экспериментальных и численных исследований [156; 179; 201; 210; 224]. Исследования показали, что при обтекании цилиндра с квадратным поперечным сечением след неустойчив по отношению к двум основным поперечным возмущениям, так называемым модам A и B, по структуре похожим на моды возмущений, наблюдаемым при обтекании цилиндра с круглым сечением [252]. Длины волн поперечных возмущений соответственно составляют примерно 5.2 и 1.2 поперечных сечений [156; 201], а критические числа Рейнольдса для мод A и B — соответственно $\mathrm{Re}_{\text{crit A}} \approx 160$ и $\mathrm{Re}_{\text{crit B}} \approx 190$.

Для численного моделирования переходного режима отрывного обтекания квадратного цилиндра и правильного представления поперечных возмущений размер вычислительной области в поперечном направлении должен быть достаточно велик. Кроме того, сеточное разрешение вблизи поверхности твёрдого тела и области следа должно быть достаточно высоким для разрешения пограничного слоя и вихревых структур течения. Таким образом, прямое численное моделирование нестационарного обтекания квадратного цилиндра довольно затруднено даже для малых сверхкритических чисел Рейнольдса. Более того, сложность численного моделирования обтекания квадратного цилиндра усложняется многообразием физических механизмов и режимов течения, взаимодействующих друг с другом. Так, например, пограничный слой, отделяющийся от кромки цилиндра, имеет сходство с течением слоя смешения, а также с рециркуляционными и отрывными течениями [158].

Способность вейвлетного многомасштабного анализа идентифицировать энергосодержащие локализованные структуры решения и контролировать степень разрешения этих структур с помощью порогового параметра легла в основу *иерархического вейвлетного вихреразрешающего моделирования* [297; 304—306; 317], основанного на адаптивном вейвлетном коллокационном методе и состоящего из вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования (WA-DNS) [298; 310], метода когерентных вихрей (CVS) [84], вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей (WA-LES) [297; 302; 306; 317], вейвлетного адаптивного «задержанного» метода отсоединённых вихрей (WA-DDES) [305] и вейвлетного адаптивного моделирования на основе нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса (WA-URANS) [299; 304]. Подход иерархического вейвлетного вихреразрешающего моделирования основан на многомасштабном вейвлетном разложении (1.13) и вейвлетном пороговом сжатии (1.44), описанных соответственно в разделе 1.1 и позволяющих разложение поля скорости и завихренности на значимые энергосодержащие (разрешённые) $\overline{\mathbf{u}}^{>\varepsilon}$ и незначимые малоэнергетические (неразрешённые) $\mathbf{u}'$ составляющие, то есть $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}^{>\varepsilon} + \mathbf{u}'$, где $\overline{\mathbf{u}}^{>\varepsilon}$ поле скоростей, полученное в результате покомпонентного применения вейвлетного порогового фильтра

$$\overline{u}_i^{>\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{L}^1} c_{\mathbf{l}}^1 \varphi_{\mathbf{l}}^1(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{\mu=1}^{2^3-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}\,\in\,\mathcal{K}^{\mu,j} \\ |d_{\mathbf{k}}^{\mu,j}|\,>\,\varepsilon\|u_i\|}} d_{\mathbf{k}}^{\mu,j} \psi_{\mathbf{k}}^{\mu,j}(\mathbf{x}), \tag{6.1}$$

который является слегка модифицированной формой уравнения (1.44). Величина вейвлетного порога ε контролирует степень разрешения течения и определяет уровень «неразрешённого» (остаточного) поля, то есть определяет уровень физического разрешения иерархической модели турбулентности. Для очень низких пороговых значений влиянием отфильтрованных структур течения можно полностью пренебречь, что приводит к подходу WA-DNS. Для несколько более высоких уровней ε влияние неразрешённого поля скорости может быть аппроксимировано белым шумом Гаусса, который обычно не моделируется, что приводит к подходу

CVS [84]. Использование более высоких вейвлетных пороговых значений приводит к необходимости моделирования влияния неразрешённых «подсеточных» структур на динамику энергосодержащих структур течения, что приводит к семейству WA-LES методов [300; 303; 306; 330], разрешающих и отслеживающих на околооптимальной адаптивной сетке динамически важные вихревые структуры. Дальнейшая интеграция WA-LES подхода с моделями на основе нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса приводит к семейству WA-DDES [305] и WA-URANS [299; 304] методов. Основное преимущество иерархического вейвлетного вихреразрешающего моделирования заключается в возможности плавного, физически обоснованного перехода между различными режимами моделирования: от WA-DNS к CVS и WA-LES с возможным переходом к моделям WA-DDES и WA-URANS. Следует отметить, что адаптивный гибридный подход с сосуществующими и активно взаимодействующими WA-LES и WA-URANS моделями и математически обоснованным переходом между ними еще не полностью разработан и является областью активных исследований [304; 305].

Как уже отмечалось, иерархическое вейвлетное вихреразрешающее моделирование не является предметом обсуждения данной диссертации и упоминается в данном разделе для демонстрации широкого спектра применения методов штрафных функций и возможности использования AWCM для моделирования турбулентных течений. В этом разделе метод штрафных функций Бринкмана применён для вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования обтекания квадратного цилиндра несжимаемым вязким газом. Материалы этого раздела основаны на работе автора [298]. Применение метода штрафных функций Бринкмана в контексте вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей рассмотрено в разделе 6.3.

6.2.1 Формулировка задачи

Как уже обсуждалось выше, выбор ε в уравнении (6.1) определяет относительный энергетический уровень разрешения вихревых структур и, следовательно, контролирует степень влияния неразрешённого остаточного поля. В случае WA-DNS, очень низкое значение вейвлетного порога позволяет полностью пренебречь этим влиянием и моделировать обтекание квадратного цилиндра на основе пенализированных уравнений Навье—Стокса (5.7) и (5.8), в которых $\mathbf{u} \cong \overline{\mathbf{u}}^{>\varepsilon}$, а эффект присутствия твёрдого тела достигается с помощью метода штрафных функций Бринкмана, описанного в разделе 5.2.

Рассмотрим применение метода штрафных функций Бринкмана, интегрированного с адаптивным вейвлетным коллокационным методом, для моделирования обтекания цилиндра с квадратным поперечным сечением равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости. В качестве характерного масштаба скорости и длины возьмём соответственно величину скорости набегающего потока U и длину стороны квадратного сечения L. Безразмерная форма пенализированных уравнений для скорости возмущения $\overline{\mathbf{u}}^{>\varepsilon}$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial t} + \left(\overline{u}_j^{>\varepsilon} + U_j\right) \frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}^{>\varepsilon}}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\chi_\mathrm{s}}{\bar{\eta}} \left(\overline{u}_i^{>\varepsilon} + U_i\right) , \tag{6.2}$$

где $\mathrm{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса, а $\bar{\eta} = \eta\, U/L$ — безразмерный параметр штрафной функции Бринкмана. Следует отметить присутствие пограничного слоя толщиной $O\left((\bar{\eta}/\mathrm{Re})^{1/2}\right)$ внутри штрафной области в непосредственной близости с поверхностью цилиндра.

Задача рассмотрена в декартовой системе координат с осями x_1 и x_3 соответственно в направлении скорости набегающего потока и поперечном направлении. Задача решена в вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [x_\mathrm{in}, x_\mathrm{out}] \times [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$, где a и b — размер области в вертикальном и поперечном направлениях. Область квадратного цилиндра определена как $\Omega_\mathrm{p} = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [-b/2, b/2]$. Размер области в вертикальном направлении определяет параметр блокирования $\beta = 1/a$. Сеточное разрешение на уровне $1 \leqslant j \leqslant j_{\max}$ определено как $\Delta_{x_1}^j = \Delta_{x_2}^j = \delta_j$ и $\Delta_{x_3}^j = 2\delta_j$, где $\delta_j = 2^{-j+1}$.

Пенализированные уравнения сохранения импульса (6.2) решаются в области Ω_s со следующими граничными условиями для скорости возмущения $\overline{u}_i^{>\varepsilon}$ на границе $x_1 = x_\mathrm{in}$:

$$\overline{u}_i^{>\varepsilon}|_{x_1 = x_\mathrm{in}} = 0 , \tag{6.3}$$

конвективным условием на границе $x_1 = x_\mathrm{out}$:

$$\frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial t} + \left(\overline{u}_1^{>\varepsilon} + U_1\right) \frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_1} = 0, \tag{6.4}$$

условиями непротекания для вертикальной компоненты скорости и проскальзывания для тангенциальных компонент скорости на горизонтальных границах $x_2 = \pm a/2$:

$$\left.\frac{\partial \overline{u}_1^{>\varepsilon}}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = \left.\overline{u}_2^{>\varepsilon}\right|_{x_2=\pm a/2} = \left.\frac{\partial \overline{u}_3^{>\varepsilon}}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = 0 \tag{6.5}$$

и периодическими граничными условиями в поперечном направлении $x_3 = \pm b/2$. Коэффициенты сопротивления C_D и подъёмной силы C_L, подсчитанные согласно выражению (5.6), соответственно принимают следующий вид:

$$C_D(t) = \frac{2}{\bar{\eta} b} \int_{\Omega_s} (\overline{u}_1^{>\varepsilon} + U_1)\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,, \tag{6.6}$$

и

$$C_L(t) = \frac{2}{\bar{\eta} b} \int_{\Omega_s} \overline{u}_2^{>\varepsilon}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{6.7}$$

6.2.2 Результаты вычислений

Вейвлетное адаптивное прямое численное моделирование обтекания квадратного цилиндра при сверхкритическом числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 200$ проведено в области $\Omega_s = [-6, 18] \times [-9, 9] \times [-3, 3]$, соответствующей $x_{\text{in}} = -6$, $x_{\text{out}} = 18$, $a = 18$ и $b = 6$. Для решения задачи применялся параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод, описанный в главе 2. Для интегрирования по времени применялся линеаризованный метод Кранка—Николсона [61] с адаптивным шагом по времени. Соотношение a и b выбрано как компромисс между необходимостью моделирования существенного числа вторичных вихревых структур в поперечном направлении и желанием минимизировать вычислительные ресурсы. Следует отметить, что, как было показано в работе [224], при больших числах Рейнольдса использование большего размера в поперечном направлении практически не влияет на конечные результаты. Задача решена для мгновенного начала движения жидкости, $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ и штрафного параметра $\bar{\eta} = 10^{-3}$ до достижения квазипериодического режима срыва вихрей. Отметим, что численные результаты получены для полностью невозмущённого набегающего потока и естественного перехода в трёхмерный режим обтекания, инициированного незначительной численной ошибкой.

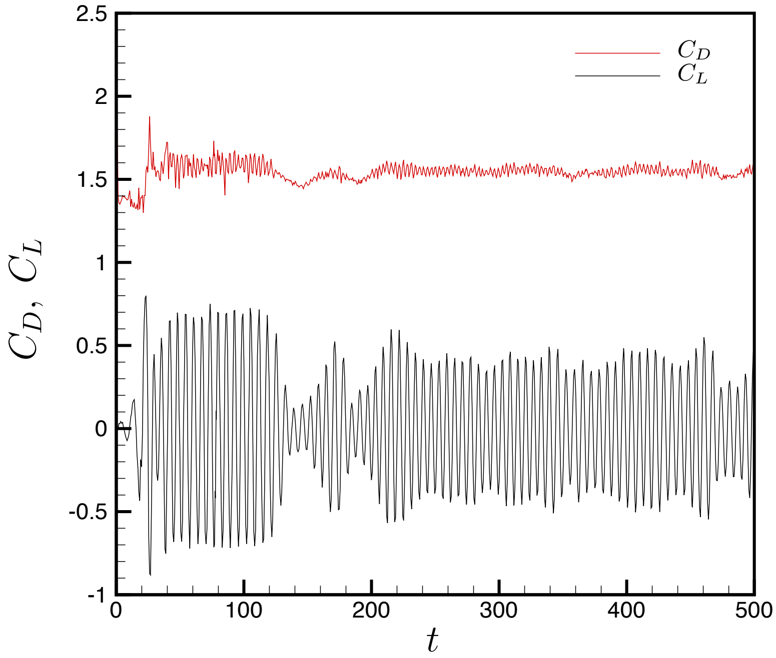


Рисунок 6.2 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: эволюция во времени поперечно осреднённых коэффициентов сопротивления и подъёмной силы.

WA-DNS вычисления обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью проведены на адаптивной вычислительной сетке с семью уровнями разрешения и минимальным разрешением $\delta_{\min} = 1/64$. В отличие от опубликованных работ, использующих неадаптивные, согласованные с границей сетки, результаты, представленные в этом подразделе, получены с применением адаптивной сетки с локальным разрешением, динамически зависящем от структур течения. Следует отметить, что максимальное сеточное разрешение достаточно для разрешения пограничного слоя в жидкости, но не достаточно для полного разрешения пограничного слоя внутри штрафной области. Однако на практике [132] полное разрешение внутреннего пограничного слоя не оправдано, так как приемлемая точность может быть достигнута при его частичном разрешении.

Эволюция во времени поперечно осреднённых коэффициентов сопротивления (6.6) и подъёмной силы (6.7) показана на рис. 6.2, из которого виден переходный период от мгновенного начала движения жидкости к развитому (осциллирующему) режиму течения. Соответствующие спектры поперечно осреднённых коэффициентов сопротивления и подъёмной силы приведены на рис. 6.3, из которого легко определить частоту срыва вихря f_0 и соответствующее число Струхаля $\mathrm{St} = f_0 L/U = 0.158$. Следует отметить пики коэффициента сопро-

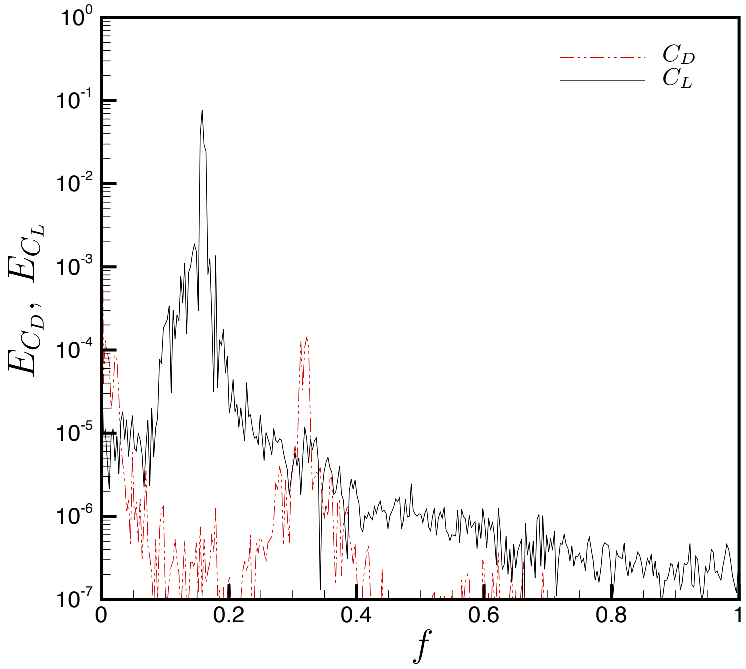


Рисунок 6.3 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: спектр мощности поперечно осредненных коэффициентов сопротивления и подъёмной силы.

тивления при нулевой, удвоенной $2f_0$ и учетверённой $4f_0$ частотах срыва вихря. Также отметим присутствие низкочастотной модуляции, явно наблюдаемой как на рис. 6.2, так и на рис. 6.3, возникающей из-за дислокации вихря и проявляющейся хаотически в пространстве и времени. Заметим, что в момент дислокации величины коэффициентов C_D и C_L существенно уменьшаются в полном соответствии с результатами работы [252].

Результаты WA-DNS вычислений приведены в таблице 6.1, из которой видно соответствие осреднённых по времени коэффициентов сопротивления $\overline{C}_D$ и подъёмной силы $|\overline{C}_L| = 0.07$, среднеквадратичных отклонений $C'_D = 0.034$ и $C'_L = 0.366$, и числа Струхаля St с ранее опубликованными экспериментальными данными [156] и результатами неадаптивных вычислений [201; 209]. Следует обратить внимание на расхождение с результатами работы [224], связанное с низким порядком точности метода конечных объёмов и недостаточным поперечным разрешением, используемым в работе [224].

Сложность динамики течения для переходного числа Рейнольдса видна из рис. 6.4, на котором показана вертикальная составляющая завихренности в трёх разных плоскостях сечения ($x_3 = -2.8, 0$ и 2.8) и соответствующие срезы адаптивной сетки в два разных момента времени, соответствующих фазам уменьшения и возрастания гидродинамических сил. Поперечная и продольная компоненты

случай	$\overline{C}_D$	C'_D	C'_L	St
WA-DNS	1.57	0.034	0.366	0.158
[201]	1.64	–	–	0.157
[209]	1.67	0.026	0.305	0.163
[224]	1.39	0.032	0.210	0.157
[156]	–	–	–	0.159

Таблица 6.1 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: сравнение результатов с ранее опубликованными экспериментальными и расчётными данными.

завихренности для плоскостей сечения $x_2 = -1, 0$ и 1 и $x_1 = 2.5, 5.5, 8.5$ и 11.5 вместе со срезами адаптивной сетки соответственно приведены на рис. 6.5 и 6.6. Отметим осциллирующее решение как в продольном, так и в поперечном направлениях. Результаты, приведённые на рис. 6.4-6.6, соответствуют ранее опубликованным результатам [209; 224]. Следует обратить внимание на срезы адаптивной сетки, демонстрирующие способность AWCM разрешать и отслеживать локализованные вихревые структуры.

Для более наглядной визуализации трёхмерности течения на рис. 6.7 показаны основные вихревые структуры, идентифицированные изоповерхностями на основе Q-критерия [121], основанного на втором инварианте тензора градиента скорости $Q \equiv 1/2(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})$, где Ω_{ij} и S_{ij} — соответственно тензоры скорости вращения и скорости деформации. Как было показано в работах [66; 76], Q-критерий особенно нагляден в случае отрывных течений. Отметим, что вихревые структуры, показанные на серии изображений на рис. 6.7 соответствуют четырём моментам времени с интервалом в четверть периода срыва вихря. Обратим внимание на изоповерхности $Q = 0.1$ и $Q = 0.3$, наглядно визуализирующие вихревые структуры. На рис. 6.7 также приведена адаптивная сетка с узлами, окрашенными в цвет, соответствующий уровню разрешения каждого из узлов.

Из серии рисунков 6.4-6.7 видно, что динамика течения определяется вихревыми структурами, срывающимися с цилиндра и конвектируемыми вниз по течению с последующей генерацией вторичных вихревых структур в следе цилиндра. Фаза возрастания гидродинамических сил характеризуется присутствием больших поперечных вихревых структур, которые периодически разрушаются,

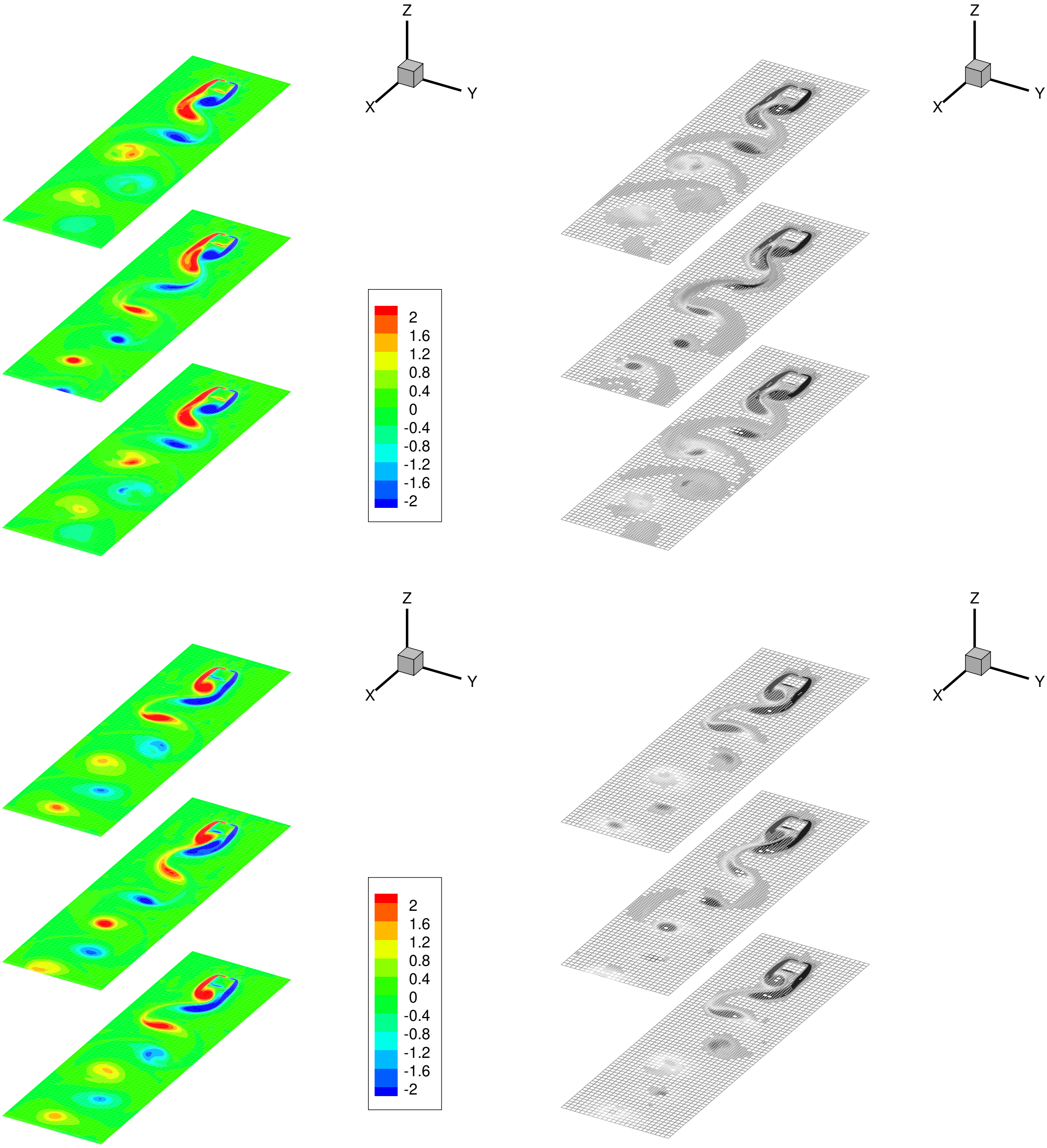


Рисунок 6.4 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: вертикальная составляющая завихренности ω_3 и срезы адаптивной сетки в области $-2 < x_1 < 17$, $-3 < x_2 < 3$ в плоскостях сечения $x_3 = -2.8, 0$ и 2.8 в два разных момента времени, соответствующих фазам уменьшения и возрастания гидродинамических сил.

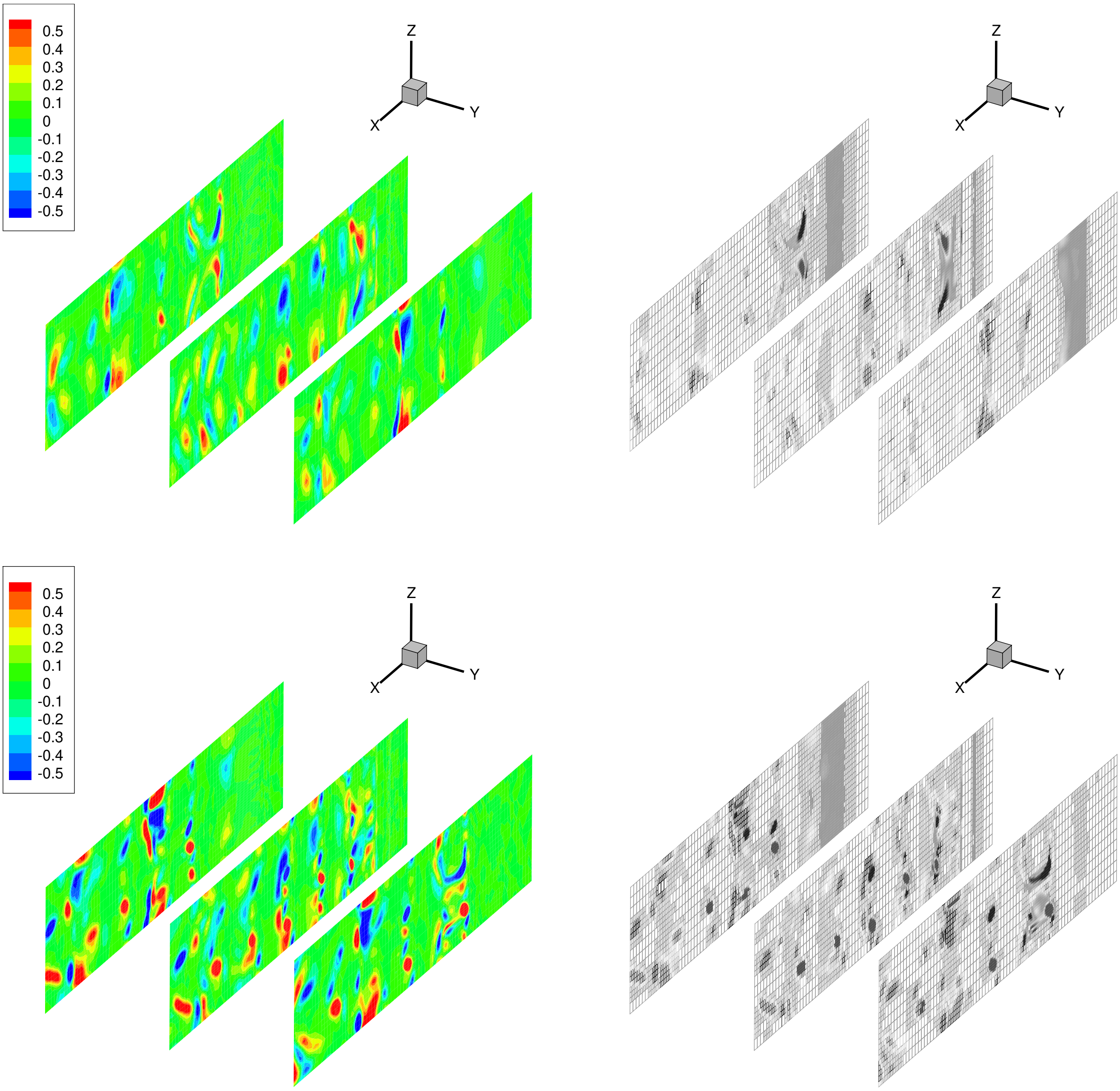


Рисунок 6.5 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: поперечная составляющая завихренности ω_2 и срезы адаптивной сетки в области $-2 < x_1 < 17$, $-3 < x_3 < 3$ в плоскостях сечения $x_2 = -1, 0$ и 1 в два разных момента времени, соответствующих фазам уменьшения и возрастания гидродинамических сил.

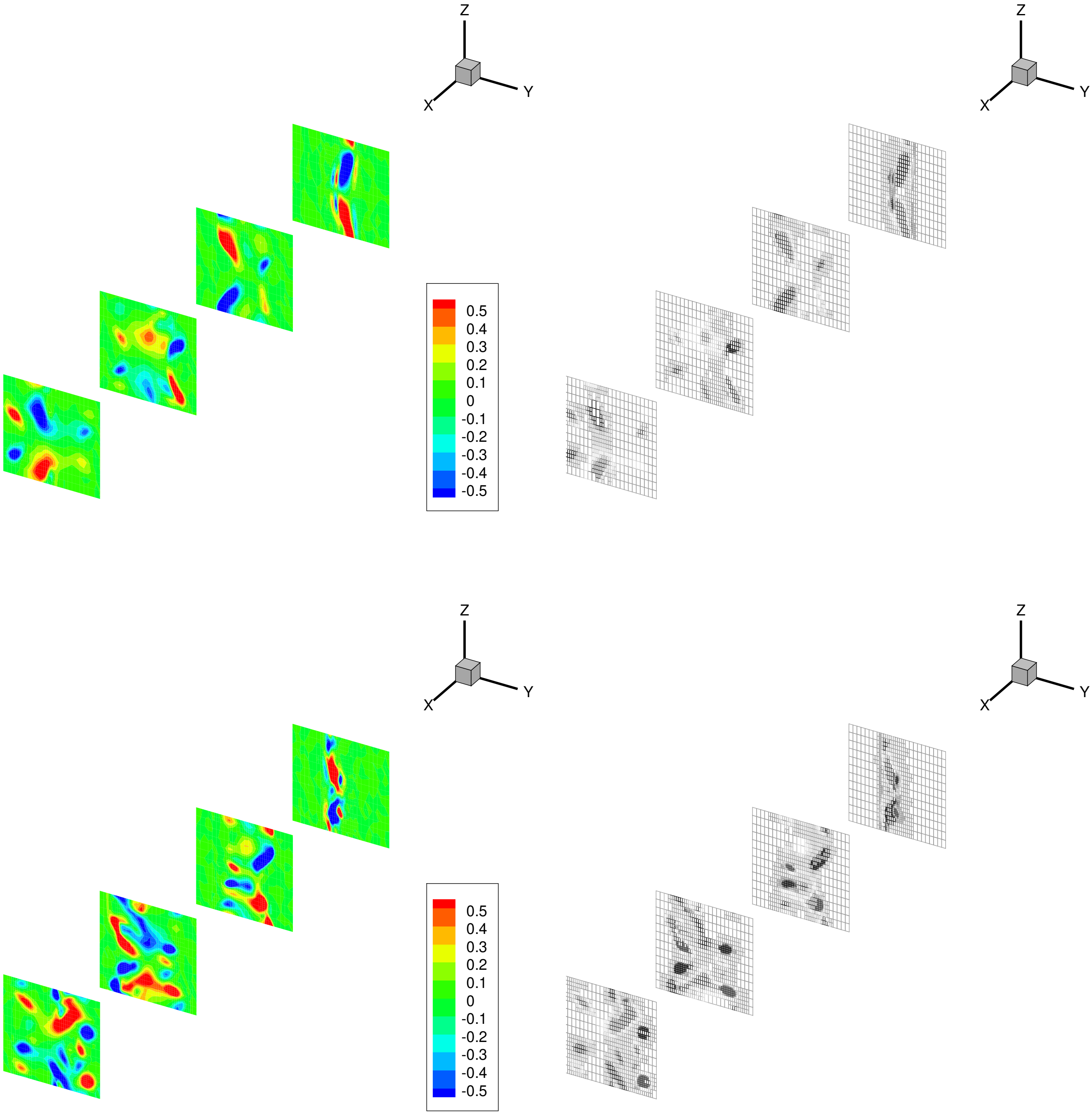


Рисунок 6.6 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: продольная составляющая завихренности ω_1 и срезы адаптивной сетки в области $-3 < x_2 < 3$, $-3 < x_3 < 3$ в плоскостях сечения $x_1 = 2.5, 5.5, 8.5$ и 11.5 в два разных момента времени, соответствующих фазам уменьшения и возрастания гидродинамических сил.

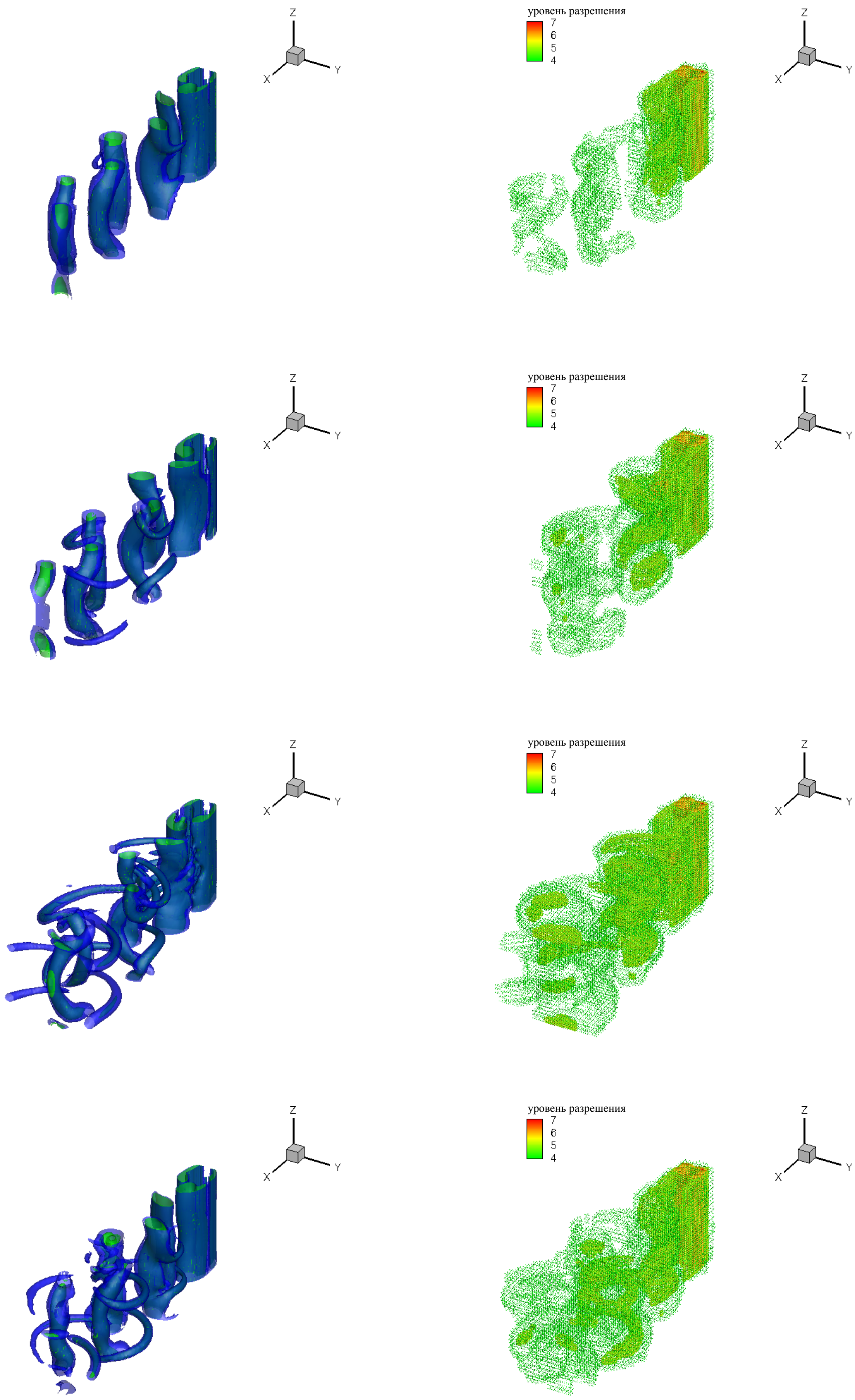


Рисунок 6.7 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: основные вихревые структуры в области $[-2{,}17] \times [-3{,}3] \times [-3{,}3]$, идентифицированные изоповерхностями $Q = 0.1$ (синие) и 0.3 (зеленые), и узлы адаптивной сетки на уровнях разрешения $4 \leqslant j \leqslant 7$ в четыре момента времени с интервалом в четверть периода срыва вихря.

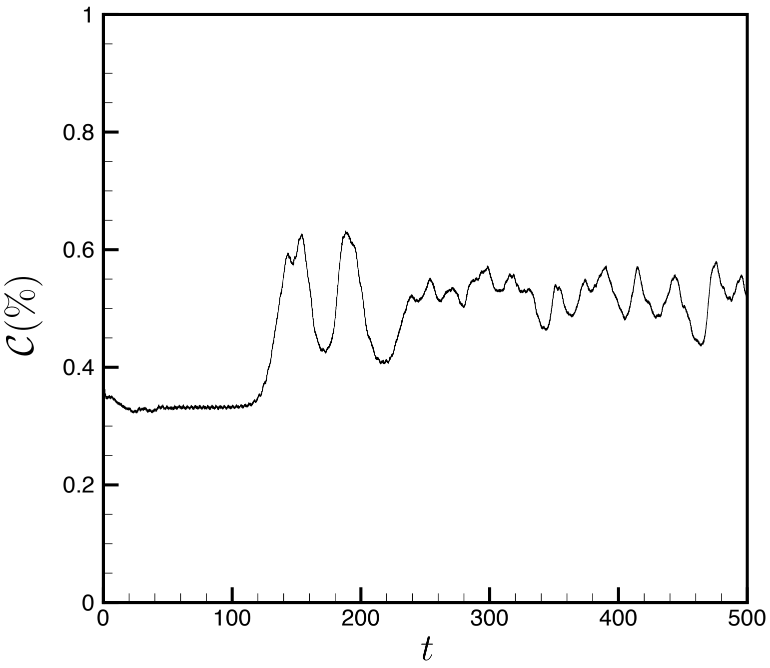


Рисунок 6.8 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$: эволюция во времени коэффициента сжатия $\mathcal{C}$ адаптивной сетки.

приводя к фазе уменьшения гидродинамических сил с характерным присутствием сложных вторичных вихревых структур. Из рисунков также видно, что адаптивная сетка динамически отслеживает вихревые структуры, как первичные, так и вторичные.

Интересно заметить, что количество и пространственное распределение узлов адаптивной сетки отслеживает эволюцию течения. В фазе возрастания гидродинамических сил довольно простая структура течения приводит к уменьшению числа узлов адаптивной сетки, в то время как в фазе уменьшения гидродинамических сил наличие сложных трёхмерных вторичных вихревых структур приводит к увеличению числа узлов сетки, вызванному необходимостью разрешения всех этих структур. Эволюция во времени коэффициента сжатия $\mathcal{C}$, измеряющего процент значимых узлов сетки, приведена на рис. 6.8, из которого видна периодичность изменения числа узлов адаптивной сетки после достижения развитого режима течения. Также следует отметить низкий процент (менее 0.7%) значимых узлов сетки, используемых при вычислениях.

Для демонстрации сходимости вейвлетного адаптивного коллокационного метода, интегрированного с методом штрафных функций Бринкмана, проведена серия вычислений для разных значений порога ε, сеточного разрешения $\delta_{\min}$ и соответствующего максимального уровня $j_{\max}$, а также штрафного параметра $\bar{\eta}$.

случай	ε	$\delta_{\min}$	$\bar{\eta}$	$\overline{C}_D$	C'_D	$\lvert\overline{C}_L\rvert$	C'_L	St
I	5×10^{-3}	2^{-6}	1×10^{-3}	1.57	0.034	0.007	0.366	0.158
II	1×10^{-3}	2^{-6}	1×10^{-3}	1.60	0.030	0.040	0.368	0.159
III	5×10^{-3}	2^{-7}	1×10^{-3}	1.61	0.033	0.017	0.364	0.159
IV	5×10^{-3}	2^{-6}	5×10^{-4}	1.52	0.064	0.003	0.361	0.158
V	1×10^{-3}	2^{-6}	5×10^{-4}	1.56	0.034	0.028	0.368	0.159

Таблица 6.2 — Результаты WA-DNS вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 200$ для разных значений вейвлетного порога ε, минимального сеточного разрешения $\delta_{\min}$ и штрафного параметра $\bar{\eta}$.

В качестве начальных условий использовано WA-DNS решение при достижении развитого режима с $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ и $j_{\max} = 7$ (случай I). Результаты вычислений, осредненные по пяти периодам срыва вихря, приведены в таблице 6.2, из которой видна сходимость результатов при увеличении точности вычислений (уменьшении вейвлетного порога ε) и увеличении разрешения (уменьшении $\delta_{\min}$).

Влияние штрафного параметра $\bar{\eta}$ продемонстрировано в таблице 6.2 двумя дополнительными вычислениями с меньшим значением $\bar{\eta} = 5 \times 10^{-4}$ (случаи IV и V). Следует заметить, что при фиксированных значениях вейвлетного порога ε и уровня максимального разрешения $j_{\max}$, коэффициент сжатия адаптивной сетки практически не меняется при уменьшении величины штрафного параметра $\bar{\eta}$, что не удивительно, так как в области границы тела сеточное разрешение уже максимально. Как было показано в разделе 5.2, ошибка решения пенализированных уравнений уменьшается при уменьшении значения штрафного параметра $\bar{\eta}$. Однако на практике из-за наличия пограничного слоя внутри штрафной области, толщина которой пропорциональна $\bar{\eta}^{1/2}$, для поддержания желаемого уровня ошибки решения величина вейвлетного порога должна быть уменьшена при уменьшении величины штрафного параметра. Уменьшение $\bar{\eta}$ без уменьшения ε приводит к ухудшению результатов, например, к существенной недооценке коэффициента сопротивления, как в случае IV. Также следует отметить нечувствительность частоты срыва вихря, представленной числом Струхаля St, к изменениям вышеперечисленных параметров.

6.3 Численное моделирование обтекания квадратного цилиндра несжимаемой жидкостью с помощью вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, численное моделирование обтекания тупых тел с нестационарным отрывом представляет собой довольно сложную и вычислительно затратную задачу даже для сравнительно малых чисел Рейнольдса [157]. При увеличении числа Рейнольдса прямое численное моделирование, даже с использованием вейвлетной адаптации, описанной в разделе 6.2, становится непозволительно дорогостоящим уже при относительно низких числах Рейнольдса. С другой стороны, отрывные течения представляют собой класс задач, трудных для моделирования на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса (RANS), главным образом из-за их неспособности правильно моделировать нестационарные характеристики отрывного течения.

С ростом вычислительных мощностей появилась возможность применения метода крупных вихрей (LES) для моделирования турбулентных течений. LES метод позволяет моделирование нестационарных трехмерных течений с меньшими вычислительными затратами, чем при прямом решении уравнений Навье—Стокса. Метод крупных вихрей, в свою очередь, подразделяется на два подкласса - LES методы с пристеночным разрешением и LES методы с пристеночным моделированием, в которых вязкое напряжение соответственно либо разрешается, либо аппроксимируется с помощью модели турбулентности. Заметим, что первый подход является более точным, но вычислительно более дорогостоящим из-за необходимости выполнения условия прилипания, требующего более высокого пристеночного разрешения и ограничивающего область применения метода умеренными числами Рейнольдса. Для разрешения этой проблемы были предложены многочисленные гибридные RANS/LES подходы либо с зональным разделением методов [104; 256; 257], либо с плавным переходом от одного подхода к другому [96; 225]. Кроме того, как было отмечено в работе [243], применение сеточной адаптации увеличивает эффективность подходов, позволяя использовать пространственно-временную перемежаемость турбулентности и проводить вычисления с высоким разрешением только в областях, продиктованных решением.

В этом разделе приведён пример применения вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей (WA-LES) для моделирования обтекания квадратного цилиндра. Материалы этого раздела основаны на работе автора [302]. В отличие от классического неадаптивного метода крупных вихрей, в котором разделение между крупными (разрешёнными) и подсеточными (неразрешёнными) структурами происходит заранее посредством определения сеточного разрешения, WA-LES метод основан на способности вейвлетного многомасштабного анализа идентифицировать энергосодержащие локализованные структуры решения во всей области течения, включая пристеночную область. Как и в классическом LES методе, в вейвлетном адаптивном методе крупных вихрей необходимо моделировать влияние неразрешённых (отфильтрованных) структур [306]. На практике как WA-DNS, так и WA-LES методы используют адаптивный вейвлетный коллокационный метод, описанный в разделе 1.5. Вейвлетная сеточная адаптация позволяет разрешать и отслеживать на динамически адаптивной сетке энергосодержащие/динамически важные вихревые структуры. Как уже отмечалось, общность применения вейвлетной адаптации объединяет WA-DNS, CVS и WA-LES методы в единый подход иерархического вейвлетного вихреразрешающего моделирования [297].

Помимо демонстрации применения метода штрафных функций в контексте WA-LES метода, в этом разделе также обсуждается расширение AWCM с варьирующимся в пространстве и времени вейвлетным порогом $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ [316; 318]. Ослабление требования использования однородного во всей вычислительной области порога позволяет варьировать ε, исходя из математических или физических критериев, что, в свою очередь, даёт возможность контролировать ошибку, локальное сеточное разрешение, а в случае вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей — модельное разрешение турбулентности, измеряемое соотношением моделируемой подсеточной диссипации и разрешённой вязкой диссипации. Возможность активного контроля модельного разрешения повышает эффективность WA-LES метода и позволяет более эффективное использование пространственно-временной перемежаемости [316].

6.3.1 Вейвлетный адаптивный метод крупных вихрей

Как уже отмечалось в разделе 6.2, более высокое значение ε в вейвлетном пороговом фильтре (6.1), используемом в вейвлетном адаптивном методе крупных вихрей, приводит к необходимости моделирования влияния неразрешённых (подсеточных) структур на динамику энергосодержащих структур течения [306]. Следует подчеркнуть, что применение вейвлетного порогового фильтра (6.1) в WA-LES может быть интерпретировано с энергетической точки зрения. В частности, вейвлетное разложение (6.1) подразумевает введение масштаба скорости или эквивалентного масштаба кинетической энергии остаточного (отфильтрованного) поля $\varepsilon^2 k$ по отношению к кинетической энергии разрешённого поля скоростей $k = \frac{1}{2} u_i u_i$. Кроме того, в силу однозначного соответствия между коэффициентами вейвлетного разложения (6.1) и узлами адаптивной сетки, вейвлетная проекция (6.1) может быть интерпретирована как неоднородный в пространстве низкочастотный фильтр с характерным локальным масштабом $\Delta(\mathbf{x},t)$, который может быть вычислен, исходя из локального сеточного разрешения, что подразумевает локальное разрешение динамически важных вихревых структур. Интересно отметить, что аналогия с локальным низкочастотным фильтром позволяет рассмотреть вейвлетный адаптивный метод крупных вихрей как расширение классического LES метода с изменяемым в пространстве и времени низкочастотным фильтром, заранее не определённым, а зависящим от эволюции течения.

Пенализированные уравнения WA-LES метода принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_i} = 0\,, \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial \overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial t} + \left(\overline{u}_j^{>\varepsilon} + U_j\right) \frac{\partial \overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}^{>\varepsilon}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\chi_s}{\eta} \left(\overline{u}_i^{>\varepsilon} + U_i\right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\,, \tag{6.9}$$

где $\overline{(\cdot)}^{>\varepsilon}$ — оператор вейвлетного порогового проектирования (6.1), а $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j}^{>\varepsilon} - \overline{u}_i^{>\varepsilon}\overline{u}_j^{>\varepsilon}$ — тензор подсеточного напряжения, который необходимо моделировать. Следует подчеркнуть, что оператор проектирования в обозначении давления $\overline{P}^{>\varepsilon}$ не подразумевает вейвлетное проектирование, а используется только для согласованности обозначения с другими членами уравнения. Давление в уравнении (6.9), как и в случае уравнений Навье—Стокса, является множителем Лагранжа, обеспечивающим выполнение условия несжимаемости. Также отметим, что, как и в случае традиционных неадаптивных LES методов с пространственно-неравномерной шириной фильтра, операторы вейвлетного порогового фильтрования и численного дифференцирования коммутируют с ошибкой, зависящей от порядка вейвлетной интерполяции и существенно уменьшающейся при применении смежной области, описанной в подразделе 1.3.4.

6.3.2 Кинетическая модель турбулентности

За последнее время автором был разработан ряд моделей турбулентности для вейвлетного адаптивного метода крупных вихрей [300; 301; 330]. В данном подразделе рассмотрим модель замыкания на основе турбулентной вязкости [222]

$$\tau_{ij}^{*} \cong -2\nu_t \overline{S_{ij}}^{>\varepsilon}\ , \tag{6.10}$$

где τ_{ij}^{*} — девиаторная составляющая тензора напряжений, $\overline{S}_{ij}^{>\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\overline{\widetilde{u}}_j^{>\varepsilon}}{\partial x_i}\right)$ — разрешённый тензор скорости деформации, ν_t — турбулентная вязкость, заданная как

$$\nu_t(\mathbf{x},t) = C_\nu \Delta k_{\text{sgs}}^{1/2}\ , \tag{6.11}$$

Δ — локальный масштаб вейвлетного фильтра, C_ν — безразмерный параметр, а k_{sgs} — кинетическая энергия подсеточной турбулентности, определённая как

$$k_{\text{sgs}} = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}^{>\varepsilon} - \frac{1}{2}\overline{u}_i^{>\varepsilon}\overline{u}_i^{>\varepsilon}\ . \tag{6.12}$$

Система уравнений (6.8)-(6.9) замыкается моделью турбулентности (6.10) совместно с дополнительным пенализированным уравнением для эволюции k_{sgs}

$$\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial t} + (\overline{u}_j^{>\varepsilon} + U_j)\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_t)\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_j}\right] - \varepsilon_{\text{sgs}} + \Pi - \frac{2\chi_{\text{s}}}{\eta}k_{\text{sgs}}\ , \tag{6.13}$$

в котором $\Pi = -\tau_{ij}\frac{\partial\overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j} \equiv -\tau_{ij}\overline{S}_{ij}^{>\varepsilon}$ представляет собой подсеточную диссипацию, которая с учётом уравнения (6.10) может быть оценена как $\Pi \cong \nu_t|\overline{S}^{>\varepsilon}|^2$, где $|\overline{S}^{>\varepsilon}| = \left(2\overline{S}_{ij}^{>\varepsilon}\overline{S}_{ij}^{>\varepsilon}\right)^{1/2}$ — характерная величина скорости разрешённой деформации, а скорость диссипации подсеточной кинетической энергии ε_{sgs}, определённой как

$$\varepsilon_{\text{sgs}} = \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}^{>\varepsilon} - \frac{\partial\overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{\widetilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j}\right)\ , \tag{6.14}$$

может быть оценена как

$$\varepsilon_{\text{sgs}}(\mathbf{x},t) \cong C_\varepsilon k_{\text{sgs}}^{3/2}/\Delta\ , \tag{6.15}$$

где C_ε — вторая безразмерная константа. Следует отметить, что пенализированное уравнение (6.13) аппроксимирует граничные условия $k_{\text{sgs}} = 0$ на границе твёрдого тела посредством штрафной функции Бринкмана. Таким образом, вышеописанная модель включает в себя два параметра C_ν и C_ε, которые могут либо быть заданы как константы, либо определены динамически [102]. Детали динамической процедуры определения значений параметров могут быть найдены в работе [302].

6.3.3 Неоднородный вейвлетный порог

В этом подразделе описано обобщение адаптивного вейвлетного коллокационного метода с варьирующимся в пространстве и времени вейвлетным порогом $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ [316; 318]. При рассмотрении вейвлетного порогового фильтра, заданного выражением (6.1), видно, что вейвлетный порог не обязательно должен быть константой, а может варьироваться в пространстве. Пространственно неоднородный порог может быть использован для формирования физически обоснованной связи между локальным сеточным разрешением и турбулентной моделью, обеспечивающей желаемую точность численного моделирования. Основная идея заключается в непрерывном подстраивании порогового поля $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ для контроля модельного разрешения и обеспечения физически обоснованной обратной связи, влияющей на эволюцию $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ в пространстве и времени. В то же время пороговое поле должно быть достаточно гладким, чтобы не приводить к появлению нефизичных мелкомасштабных структур в поле скорости.

Для обеспечения гладкости порогового поля может быть использовано экспоненциально взвешенное усреднение по времени вдоль траектории движения частицы жидкости, заданное как

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} \varepsilon(\mathbf{x}(t'), t')\, dt', \tag{6.16}$$

где τ_ε — время релаксации. Дифференцируя уравнение (6.16) по времени, получаем следующее эволюционное уравнение для осреднённого порогового поля:

$$\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial t} + (\overline{u}_i^{>\varepsilon} + U_i)\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial x_i} = f_\varepsilon(\mathbf{x},t)\ , \tag{6.17}$$

где

$$f_\varepsilon(\mathbf{x},t) = \frac{\mathcal{I}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{I}_\varepsilon} - 1\right) \tag{6.18}$$

и $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x},t)$ — поле порогового значения. Источниковый член $f_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ правой части уравнения (6.17) может быть интерпретирован как обратная связь, влияющая на развитие порогового поля так, что разность $(\varepsilon - \mathcal{I}_\varepsilon)$ асимптотически стремится к нулю.

В данном подразделе обратная связь $f_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ использует физический механизм связи, поддерживающий желаемое модельное разрешение турбулентности $\mathcal{R}$, измеряемое соотношением моделируемой подсеточной диссипации Π и разрешённой вязкой диссипации $D = \nu|\overline{S}^{>\varepsilon}|^2$

$$\mathcal{R}(\mathbf{x},t) = \frac{\Pi}{D}. \tag{6.19}$$

Величина модельного разрешения $\mathcal{R}$ отражает степень разрешения энергосодержащих структур турбулентности при моделировании влияния неразрешённых (подсеточных) структур. При использовании модели (6.10) переменная модельного разрешения $\mathcal{R}$ может быть выражена как отношение турбулентной и молекулярной вязкостей $\mathcal{R} = \nu_t/\nu$. В работе автора [307] было показано, что величина модельного разрешения турбулентности увеличивается при увеличении вейвлетного порога и пропорциональна ε^2. Таким образом, механизм передачи энергии между разрешёнными и неразрешёнными структурами течения напрямую зависит от значения ε в уравнении (6.1) и может быть использован для контроля модельного разрешения $\mathcal{R}$ при отклонении его значения от желаемого значения $\mathcal{R}_{\text{goal}}$.

Исходя из уравнения (6.17) и квадратичной зависимости моделируемой диссипации от вейвлетного порога ε, подразумевающей выполнение соотношения $\mathcal{R}_{\text{goal}}/\mathcal{R} \sim \varepsilon^2/\mathcal{I}_\varepsilon^2$, обратная связь $f_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ в уравнении (6.17) может быть определена как

$$f_\varepsilon(\mathbf{x},t) = \frac{\mathcal{I}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{R}_{\text{goal}}}{\mathcal{R}}} - 1\right) \tag{6.20}$$

для областей с прямым каскадом энергии, то есть $\mathcal{R} > 0$. Обратная связь (6.20) обеспечивает взаимодействие между локальным сеточным разрешением, контролируемым вейвлетным порогом, и модельным разрешением. В областях течения с низким модельным разрешением, где $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\text{goal}}$, негативная обратная связь

($f_\varepsilon < 0$) уменьшает пороговое значение, что приводит к локальному сгущению сетки с последующим увеличением разрешённой вязкой диссипации и уменьшением подсеточной диссипации. В областях течения с избыточным модельным разрешением, где $0 < \mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{goal}}$, положительная обратная связь ($f_\varepsilon > 0$) увеличивает значение вейвлетного порога, что приводит к локальному разрежению сетки с последующим уменьшением разрешённой вязкой диссипации и увеличением подсеточной диссипации.

Следует подчеркнуть важность времени релаксации τ_ε, от которого зависит насколько быстро вейвлетный порог подстраивается к локальным изменениям в поле течения. Как было показано в работе автора [297], физически обоснованным выбором является масштаб времени, связанный с характерной скоростью деформации $\tau_\varepsilon(\mathbf{x},t) = |\overline{S}^{>\varepsilon}|^{-1}$, что приводит к следующему виду обратной связи:

$$f_\varepsilon(\mathbf{x},t) = \frac{\mathcal{H}(\Pi)}{\sqrt{\nu}\sqrt{\mathcal{R}}}\left(\sqrt{\mathcal{R}_{\text{goal}}}\sqrt{D} - \sqrt{\Pi}\,\right)\mathcal{I}_\varepsilon\,, \tag{6.21}$$

где функция Хевисайда $\mathcal{H}(\cdot)$ обеспечивает обнуление обратной связи в областях обратного каскада энергии. Следует отметить, что механизм обратной связи (6.21) предполагает позитивность подсеточной диссипации Π и теряет смысл в случае обратного каскада. Для улучшения обусловленности обратной связи в ламинарной и переходных областях течения, а также учитывая, что в области турбулентного течения переменная $\mathcal{R}$ приближается к желаемой величине, переменную $\mathcal{R}$ в выражении (6.21) можно заменить на $\mathcal{R}_{\text{goal}}$, что приводит к следующему определению обратной связи:

$$f_\varepsilon^T(\mathbf{x},t) = \frac{\mathcal{H}(\Pi)}{\sqrt{\nu}\sqrt{\mathcal{R}_{\text{goal}}}}\left(\sqrt{\mathcal{R}_{\text{goal}}}\sqrt{D} - \sqrt{\Pi}\,\right)\mathcal{I}_\varepsilon\,, \tag{6.22}$$

где верхний индекс T подчёркивает, что механизм обратной связи (6.22) применим в областях турбулентного течения.

Ввиду гиперболичности уравнения (6.17), для избежания возникновения мелкомасштабных структур при решении уравнения (6.17) с источниковым членом обратной связи (6.22) целесообразно добавить диффузионный член, что приводит к следующей формулировке уравнения эволюции осреднённого порогового поля:

$$\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial t} + (\overline{u}_i^{>\varepsilon} + U_i)\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\nu + \nu_\varepsilon)\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial x_i}\right] + f_\varepsilon\,, \tag{6.23}$$

где $f_\varepsilon = f_\varepsilon^T(\mathbf{x},t)$. Диффузионный коэффициент ν_ε может быть определён из соображений сопоставимости диффузионного масштаба времени Δ^2/ν_ε с локальным масштабом времени релаксации $|\overline{S}^{>\varepsilon}|^{-1}$, что приводит к классической модели Смагоринского [222]

$$\nu_\varepsilon(\mathbf{x},t) = C_{\nu_\varepsilon}\Delta^2|\overline{S}^{>\varepsilon}|, \tag{6.24}$$

где C_{ν_ε} — безразмерный коэффициент порядка единицы [316].

Следует отметить, что метод с варьирующимся в пространстве и времени вейвлетным порогом не зависит от модели турбулентности. Кроме того, AWCM с неоднородным порогом может быть обобщён для решения параболических и гиперболических уравнений с обратной связью, контролирующей относительную ошибку или другие характеристики решения.

При численном моделировании обтекания тел необходимо расширить механизм обратной связи (6.22), используемой для контроля вейвлетного порога и гарантирующей возможность применения метода во всей области течения. В областях ламинарного течения, вдали от обтекаемого тела, величины вязкой и подсеточной диссипаций малы, что практически отключает механизм обратной связи (6.22). Для минимизации вычислительной стоимости в этих областях имеет смысл использовать максимально допустимое значение вейвлетного порога, которое, как правило, определено заданной вычислительной точностью и может быть достигнуто с помощью дополнительного механизма обратной связи, определённого как

$$f_\varepsilon^L(\mathbf{x},t) = \max\left(\frac{U}{H} - A,0\right)\mathcal{I}_\varepsilon, \tag{6.25}$$

где H — характерный размер тела, A представляет собой норму тензора градиента скорости $\overline{A}_{ij}^{>\varepsilon} = \overline{S}_{ij}^{>\varepsilon} + \overline{\Omega}_{ij}^{>\varepsilon}$, а $\overline{\Omega}_{ij}^{>\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{\tilde{u}}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_j} - \frac{\partial\overline{\tilde{u}}_j^{>\varepsilon}}{\partial x_i}\right)$ - тензор разрешённой скорости вращения. Верхний индекс L подчёркивает, что механизм обратной связи (6.25) применим в ламинарной области течения. Следует отметить, что f_ε^L применим в области невозмущённого течения, где $A < U/H$, и полностью отключается в пристеночной области и в области следа.

Также следует отметить противоположность предельного поведения механизма обратной связи (6.22) в пристеночной области, характеризующейся существенной вязкой диссипацией на фоне исчезающей пристеночной диссипации. Такое поведение влечёт к росту вейвлетного порога, что нежелательно, так как использование больших пороговых значений приводит к существенному увеличению ошибки. Поэтому механизм обратной связи (6.22) должен быть отключён в пристеночной области и заменён альтернативным механизмом, обеспечивающим уменьшение порогового значения в пристеночной области до минимально допустимого, как, например, механизм, основанный на турбулентной интенсивности, измеряемой соотношением подсеточной кинетической энергии и кинетической энергии набегающего потока. В областях течения с турбулентной интенсивностью ниже заданного уровня, скажем $k_{\rm sgs} < \alpha U^2/2$, при $\alpha \ll 1$ механизм обратной связи (6.22) может быть заменён на

$$f_\varepsilon^W(\mathbf{x},t) = -\frac{U}{H}\mathcal{H}\left(A - \frac{U}{H}\right)\mathcal{I}_\varepsilon\,. \tag{6.26}$$

Отметим, что функция Хевисайда в уравнении (6.26) обеспечивает отключение обратной связи f_ε^W в области набегающего потока, где $A < U/H$ и не влияет на обратную связь (6.25). Отметим, что верхний индекс W подчёркивает, что механизм обратной связи (6.26) применим в пристеночной области течения и в области следа.

Объединение всех вышеприведённых механизмов обратной связи приводит к составной обратной связи

$$f_\varepsilon(\mathbf{x},t) = \mathcal{H}\left(k_{\rm sgs} - \alpha\frac{U^2}{2}\right)f_\varepsilon^T + f_\varepsilon^L + \mathcal{H}\left(\alpha\frac{U^2}{2} - k_{\rm sgs}\right)f_\varepsilon^W\,, \tag{6.27}$$

применимой во всём поле течения.

При применении метода штрафных функций уравнение (6.23) с составной обратной связью 6.27 может быть записано в следующем пенализированном виде:

$$\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial t} + (\overline{u}_i^{>\varepsilon} + U_i)\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial x_i} = (1-\chi_{\rm s})\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\nu+\nu_\varepsilon)\frac{\partial \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial x_i}\right] + f_\varepsilon\right\} + \chi_{\rm s}\mathcal{D}\frac{\partial^2 \mathcal{I}_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_i}\,. \tag{6.28}$$

Отметим, что уравнение (6.28) определено во всей вычислительной области, а внутри штрафной области $\Omega_{\rm p}$ решается диффузионное уравнение с искусственной вязкостью $\mathcal{D} > \delta^2/\eta$, обеспечивающей непрерывность и гладкость порогового поля внутри штрафной области. Следует подчеркнуть, что при выводе экспоненциально осреднённого порогового поля $\mathcal{I}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ использовалось неосреднённое пороговое поле $\varepsilon(\mathbf{x},t)$. Однако в WA-LES методе вейвлетный порог основан на экспоненциально осреднённом пороговое поле $\mathcal{I}_\varepsilon$, поэтому для удобства обсуждения результатов WA-LES вычислений в подразделе 6.3.4 будет использоваться переменная ε вместо $\mathcal{I}_\varepsilon$.

6.3.4 Результаты вычислений

Рассмотрим применение метода штрафных функций Бринкмана для моделирования обтекания квадратного цилиндра при сверхкритическом числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = UH/\nu = 2\,000$ с полным переходом к турбулентному течению [157; 158]. Задача решена в трёхмерной области в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$ с x_1-координатой в направлении набегающего потока и x_3-координаты в поперечном направлении. Вычислительная и штрафная области соответственно определены как $\Omega_\mathrm{s} = [x_\mathrm{in},x_\mathrm{out}] \times [-a/2,a/2] \times [-b/2,b/2]$ и $\Omega_\mathrm{p} = [-H/2,H/2] \times [-H/2,H/2] \times [-b/2,b/2]$, где a и b — размеры области в вертикальном и поперечном направлениях. Параметр блокировки течения определён как $\beta = H/a$. Численное решение получено для $a = 16H$, $b = 4H$, $x_\mathrm{in} = -6H$ и $x_\mathrm{out} = 18H$.

Система пенализированных WA-LES уравнений (6.8), (6.9) совместно с модельным уравнением для кинетической энергии подсеточной турбулентности (6.13) и уравнением эволюции порогового поля (6.28) решена в области Ω_s со следующими граничными условиями для скорости возмущения $\overline{u}_i^{>\varepsilon}$, кинетической энергии подсеточной турбулентности k_sgs и вейвлетного порога ε на границе $x_1 = x_\mathrm{in}$

$$\overline{u}_i^{>\varepsilon}\big|_{x_1=x_\mathrm{in}} = 0\,, \quad k_\mathrm{sgs}\big|_{x_1=x_\mathrm{in}} = k_0 = 10^{-8}U^2\,, \quad \varepsilon\big|_{x_1=x_\mathrm{in}} = \varepsilon_0 = 0.2\,, \tag{6.29}$$

конвективными условиями на границе $x_1 = x_\mathrm{out}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial t} &+ (\overline{u}_1^{>\varepsilon} + U_1)\,\frac{\partial \overline{u}_i^{>\varepsilon}}{\partial x_1} = 0,\\ \frac{\partial k_\mathrm{sgs}}{\partial t} &+ (\overline{u}_1^{>\varepsilon} + U_1)\,\frac{\partial k_\mathrm{sgs}}{\partial x_1} = 0,\\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &+ (\overline{u}_1^{>\varepsilon} + U_1)\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \tag{6.30}$$

условиями непротекания для вертикальной компоненты скорости и проскальзывания для тангенциальных компонент скорости, кинетической энергии подсеточной турбулентности и порогового поля на горизонтальных границах $x_2 = \pm a/2$

$$\left.\frac{\partial \overline{u}_1^{>\varepsilon}}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = \left.\overline{u}_2^{>\varepsilon}\right|_{x_2=\pm a/2} = \left.\frac{\partial \overline{u}_3^{>\varepsilon}}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = \left.\frac{\partial k_\mathrm{sgs}}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = 0 \tag{6.31}$$

и периодическими граничными условиями в поперечном направлении $x_3 = \pm b/2$. Условие прилипания на границе твёрдого тела накладывается штрафной функцией Бринкмана с $\bar{\eta} = \eta U/H = 5 \times 10^{-4}$.

Для решения задачи применялся параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод, описанный в главе 2. Для интегрирования по времени применялся линеаризованный метод Кранка—Николсона [61] с адаптивным шагом по времени. Сеточное разрешение на уровне $1 \leqslant j \leqslant j_{\max}$ определено как $\Delta^j_{x_1} = \Delta^j_{x_2} = \delta_j$ и $\Delta^j_{x_3} = 2\delta_j$, где $\delta_j/H = 2^{-j+1}$. Следует отметить, что сеточное разрешение в плоскости (x_1,x_2) сопоставимо с аналогичными исследованиями на основе классического неадаптивного метода крупных вихрей [31; 223], а разрешение в поперечном направлении x_3 намного превосходит разрешение, применяемое в этих работах, так как разрешение $\Delta_{x_3}/H = 2/9$, используемое в работе [31], недостаточно. Также отметим, что в отличие от LES исследований, WA-LES метод использует адаптивную вычислительную сетку с числом узлов, не превышающим 1% максимально возможного количества узлов.

Как обсуждалось в предыдущем разделе, максимальное сеточное разрешение $\delta_8/H = 1/128$ достаточно для полного разрешения пограничного слоя $O\left(\mathrm{Re}^{-1/2}\right)$, но недостаточно для разрешения пограничного слоя внутри штрафной области $O\left((\bar{\eta}/\mathrm{Re})^{1/2}\right)$ [38]. Однако как уже отмечалось в разделе 6.2, на практике полное разрешение пограничного слоя внутри штрафной области не оправдано, так как приемлемая точность может быть достигнута при частичном разрешении внутреннего пограничного слоя. Как и в предыдущем разделе, коэффициенты сопротивления и подъёмной силы могут быть получены, соответственно используя уравнения (6.6) и (6.7).

Как и в случае вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования обтекания квадратного цилиндра, описанного в разделе 6.2, численные результаты получены для полностью невозмущённого набегающего потока с естественным переходом от нулевых начальных условий $\overline{\mathbf{u}}^{>\varepsilon} = 0$ к развитому трёхмерному режиму течения с квазипериодическим срывом вихрей. Эволюция во времени поперечно осреднённых коэффициентов сопротивления и подъёмной силы для примерно четырёх циклов срыва вихрей приведена на рис. 6.9. WA-LES результаты получены при решении пенализированных уравнений (6.8) и (6.9) совместно с модельным уравнением для кинетической энергии подсеточной турбулентности (6.13) и уравнением эволюции порогового поля (6.28). Значения вейвлетного порога ограничены диапазоном $0.01 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.2$ с нижней и

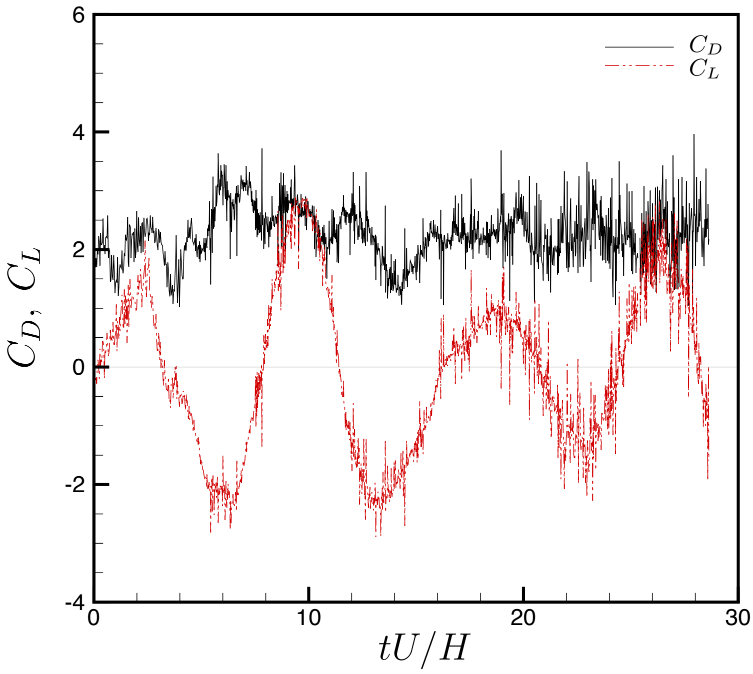


Рисунок 6.9 — Результаты WA-LES вычислений обтекания квадратного цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при $\mathrm{Re} = 2\,000$: эволюция во времени поперечно осреднённых коэффициентов сопротивления и подъёмной силы.

верхней границами, соответствующими CVS и WA-LES режимам. В качестве начальных условий взято WA-LES решение с равномерным вейвлетным порогом $\varepsilon = 0.11$, который использовался в качестве начального условия для пороговой переменной. Для сглаживания пороговой переменной применялась искусственная вязкость (6.24) с коэффициентом $C_{\nu_\varepsilon} = 0.1$, экспериментально определённом в работе автора [316].

При решении эволюционного уравнения для пороговой переменной (6.28) использовалась составная обратная связь (6.27) с модельным разрешением $\mathcal{R}_{\text{goal}} = 0.1$ и параметром переключения разных механизмов обратной связи $\alpha = 0.001$. Механизм работы обратной связи продемонстрирован на рис. 6.10, на котором показаны срезы трёх полей обратной связи $\mathcal{H}\left(k_{\text{sgs}} - \alpha\frac{U^2}{2}\right) f_\varepsilon^T$, f_ε^L и $\mathcal{H}\left(\alpha\frac{U^2}{2} - k_{\text{sgs}}\right) f_\varepsilon^W$, а также составной обратной связи f_ε, определённой согласно уравнению (6.27). Из рисунка видно, что обратная связь f_ε^T, регулирующая модельное разрешение турбулентности, активна только в турбулентной области течения и отключена в ламинарной области, в которой доминирует обратная связь f_ε^L, обеспечивающая разрежение вычислительной адаптивной сетки. Обратная связь f_ε^W, активная в пристеночной области течения и в следе за цилиндром, обеспечивает локальное сгущение адаптивной сетки. Как видно из рисунка,

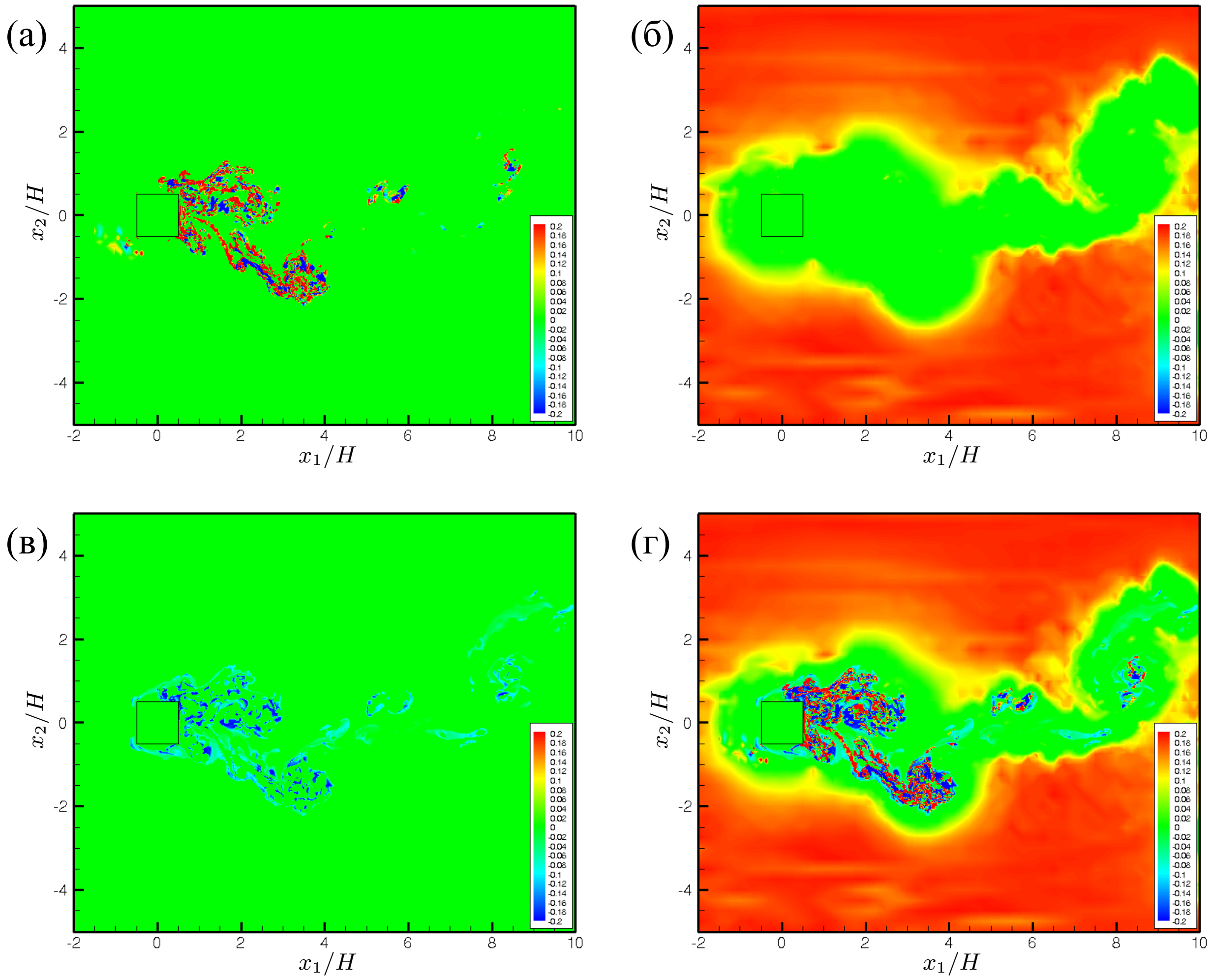


Рисунок 6.10 — Срезы источниковых членов обратной связи в плоскости $x_3/H = 0$: (а) $\mathcal{H}\left(k_{\text{sgs}} - \alpha\frac{U^2}{2}\right) f_\varepsilon^T$, (б) f_ε^L, (в) $\mathcal{H}\left(\alpha\frac{U^2}{2} - k_{\text{sgs}}\right) f_\varepsilon^W$, (г) составная обратная связь f_ε, определённая согласно (6.27).

механизм обратной связи полностью отключён внутри штрафной области, где изменение пороговой переменной достигается диффузионным механизмом согласно уравнению (6.28).

Неоднородность порогового поля продемонстрирована на рис. 6.11, где показаны срезы ε в разных плоскостях сечения. Как и ожидалось, значение пороговой переменной вдали от тела достигает максимально допустимого значения $\varepsilon = 0.2$. В турбулентном следе за цилиндром пороговое поле адаптируется к локальным структурам течения, поддерживая желаемое модельное разрешение. Также отметим, что в пристеночной области величина пороговой переменной достигает минимально допустимого значения $\varepsilon = 0.01$, что демонстрирует эффективность составной обратной связи, регулирующей величину вейвлетного порога.

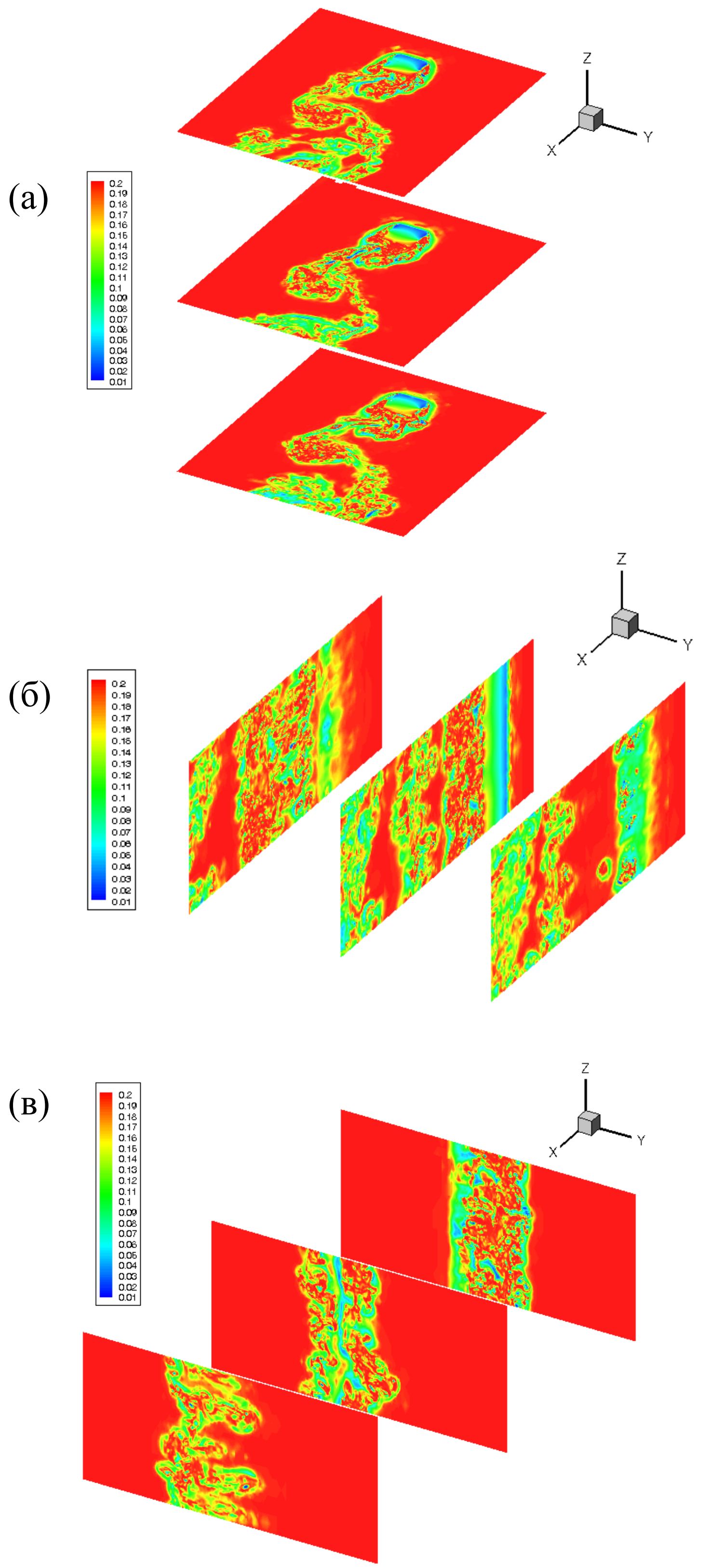


Рисунок 6.11 — Срезы пороговой переменной ε ($0.01 < \varepsilon < 0.2$) в плоскостях: (а) $x_3/H = -1.5, 0$ и 1.5 в области $-2 < x_1/H < 7$, $-4 < x_2/H < 4$, (б) $x_2/H = -1, 0$ и 1 в области $-2 < x_1/H < 7$, $-2 < x_3/H < 2$, (в) $x_1/H = 1, 2$ и 3 в области $-4 < x_2/H < 4$, $-2 < x_3/H < 2$.

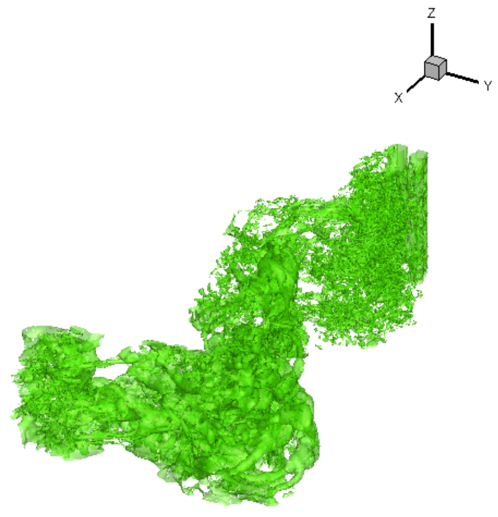


Рисунок 6.12 — Изоповерхность порогового поля $\varepsilon = 0.12$ в области $-1 < x_1/H < 15$, $-5 < x_2/H < 5$, $-2 < x_3/H < 2$.

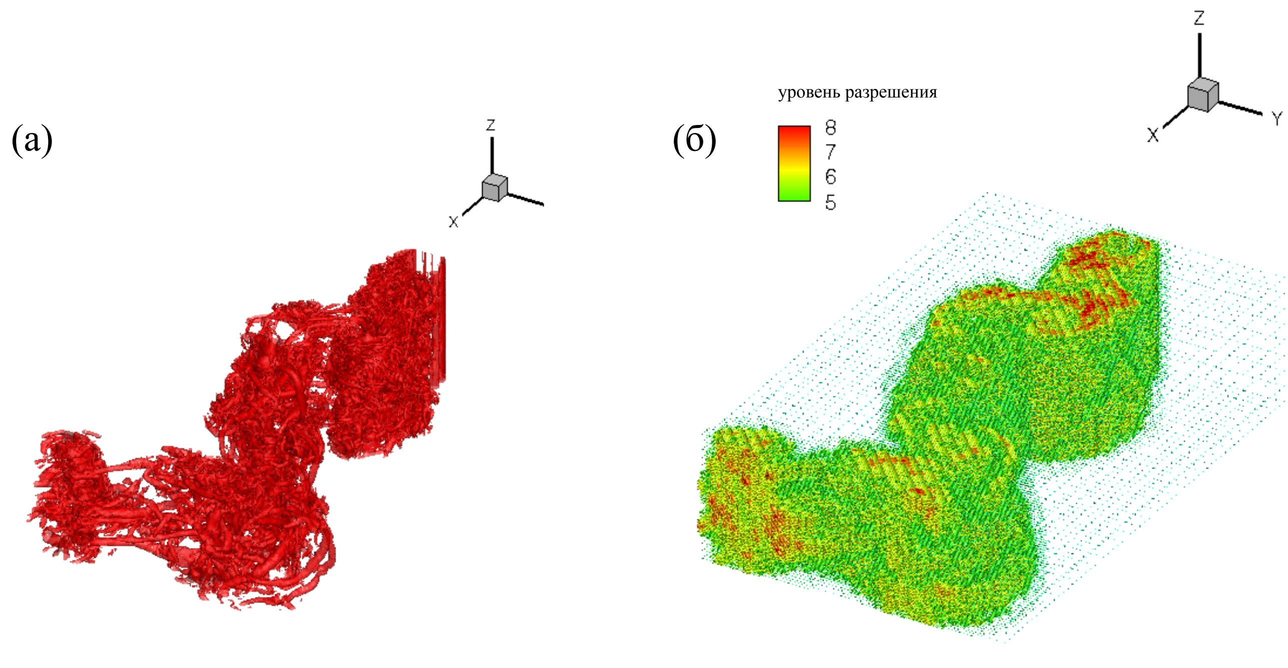


Рисунок 6.13 — (а) Основные вихревые структуры в следе за цилиндром, идентифицированные изоповерхностью $Q = 0.3U^2/H^2$ и (б) узлы адаптивной сетки на уровнях разрешения $5 \leqslant j \leqslant 8$ в области $-1 < x_1/H < 15$, $-5 < x_2/H < 5$, $-2 < x_3/H < 2$.

данные	b/H	$\beta(\%)$	Re	$\overline{C}_D$	C'_D	C'_L	St
WA-LES	4	6.25	2 000	2.07	0.49	0.86	0.131
[78]	6	13	14 000	–	–	–	0.139
[158]	9.75	7	21 400	2.1	–	–	0.132
[223]	4	6.4	22 000	2.32	0.20	1.54	0.132
[31]	4	7.69	2 000	2.6	–	–	0.132

Таблица 6.3 — Сравнение результатов WA-LES вычислений с экспериментальными [78; 158] и численными [31; 223] данными.

Трехмерные структуры порогового поля, соответствующие изоповерхности $\varepsilon = 0.12$, изображены на рис. 6.12. Важно отметить, что структуры порогового поля отражают соответствующие вихревые структуры, приведённые на рис. 6.13а, на котором изображены изоповерхности второго инварианта тензора градиента скорости $Q = \frac{1}{4}\left(|\overline{\Omega}^{>\varepsilon}|^2 - |\overline{S}^{>\varepsilon}|^2\right) = 0.3U^2/H^2$, где $|\overline{S}^{>\varepsilon}| = \left(2\overline{S}_{ij}^{>\varepsilon}\overline{S}_{ij}^{>\varepsilon}\right)^{1/2}$ и $|\overline{\Omega}^{>\varepsilon}| = \left(2\overline{\Omega}_{ij}^{>\varepsilon}\overline{\Omega}_{ij}^{>\varepsilon}\right)^{1/2}$ — соответственно модули тензоров скорости деформации и скорости вращения [121]. Узлы адаптивной сетки в тот же самый момент времени показаны на рис. 6.13б, где для большей наглядности узлы сетки окрашены соответственно уровню разрешения. Способность WA-LES метода адаптировать локальное сеточное разрешение и пороговый параметр к локализованным структурам решения продемонстрирована на рис. 6.12 и 6.13, из которых видно, что узлы сетки, соответствующие самому высокому уровню разрешения, наблюдаются только в области больших градиентов или мелкомасштабных структур решения.

Результаты WA-LES вычислений подтверждены сравнением с результатами экспериментальных [78; 157; 158] и численных [31; 223] исследований со сравнимыми числами Рейнольдса. Результаты сравнения осреднённого во времени коэффициента сопротивления $\overline{C}_D$, величины квадратичных отклонений коэффициентов сопротивления C'_D и подъёмной силы C'_L, числа Струхаля St и Рейнольдса Re, соотношение сторон b/H и параметр блокирования β приведены в таблице 6.3. Из таблицы видно, что результаты WA-LES вычислений находятся в соответствии с ранее опубликованными данными, за исключением работы [31], в который завышен коэффициент сопротивления из-за недостаточного поперечного разрешения.

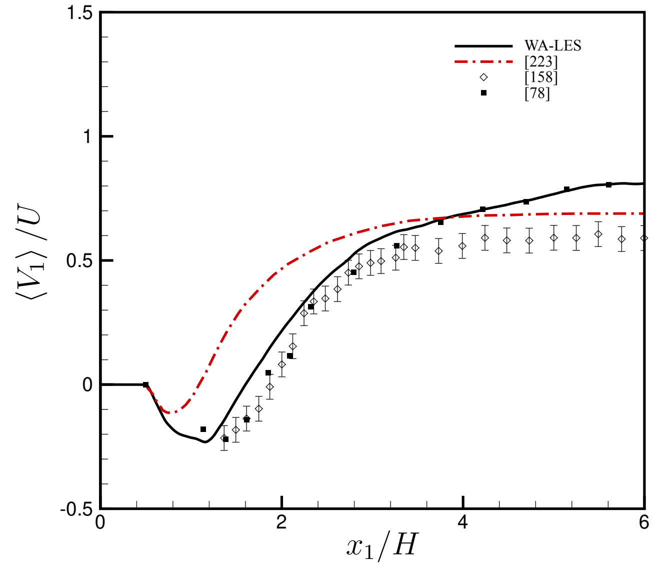


Рисунок 6.14 — Продольный профиль осреднённой продольной компоненты скорости в следе за цилиндром ($0 < x_1/H < 6$) вдоль центральной линии $x_2 = 0$ в сравнении с экспериментальными [78; 158] и численными [223] результатами.

Более детальное сравнение профилей осреднённых во времени и поперечном направлении компонент скорости $\langle V_1 \rangle$ и $\langle V_2 \rangle$ ($V_i = U_i + \overline{u}_i^{>\varepsilon}$) приведено на рисунках 6.14-6.16. На рис. 6.14 представлен профиль осреднённой продольной скорости в следе цилиндра ($0 < x_1/H < 6$) вдоль центральной линии $x_2 = 0$. На рис. 6.15 изображен профиль осреднённой продольной компоненты скорости в области отрыва пограничного слоя на верхней стороне цилиндра ($0.5 < x_2/H < 1.5$) вдоль центральной линии $x_1 = 0$. Как видно из рисунков, профили скоростей сопоставимы с ранее опубликованными численными результатами для того же числа Рейнольдса [31]. Профили осреднённых продольной и поперечных компонент скорости вдоль оси $x_1/H = 1$ показаны на рис. 6.16.

Нормальные компоненты разрешённого турбулентного напряжения, представленные как среднеквадратичные отклонения $u_{\text{rms}} = \langle u'u' \rangle^{1/2}$ и $v_{\text{rms}} = \langle v'v' \rangle^{1/2}$ продольных u' и поперечных v' флуктуаций скорости относительно осреднённых компонент, изображены на рисунках 6.17-6.19 как среднеквадратичные профили вдоль разных осей. На рис. 6.19, помимо среднеквадратичных отклонений, приведён также профиль разрешённого касательного турбулентного напряжения $\langle u'v' \rangle$. Результаты, представленные на рисунках 6.17-6.19, находятся в соответствии с ранее опубликованными экспериментальными и численными результатами.

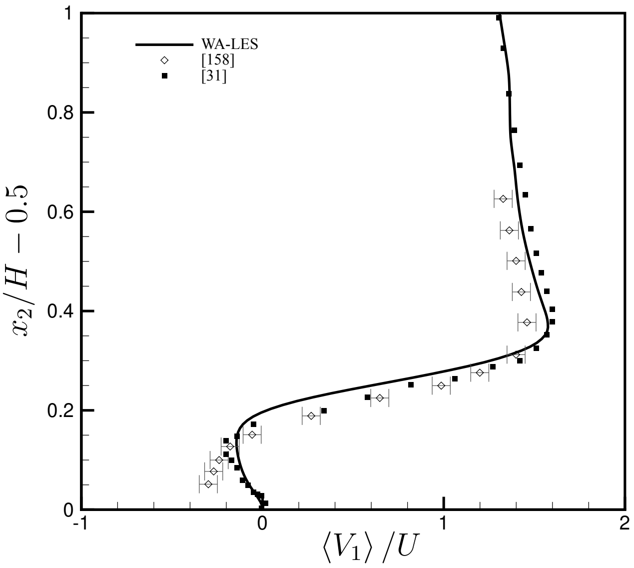


Рисунок 6.15 — Поперечный профиль осреднённой продольной компоненты скорости в области отрыва пограничного слоя на верхней стороне цилиндра ($0.5 < x_2/H < 1.5$) вдоль центральной линии $x_1 = 0$ в сравнении с экспериментальными [158] и численными [31] результатами.

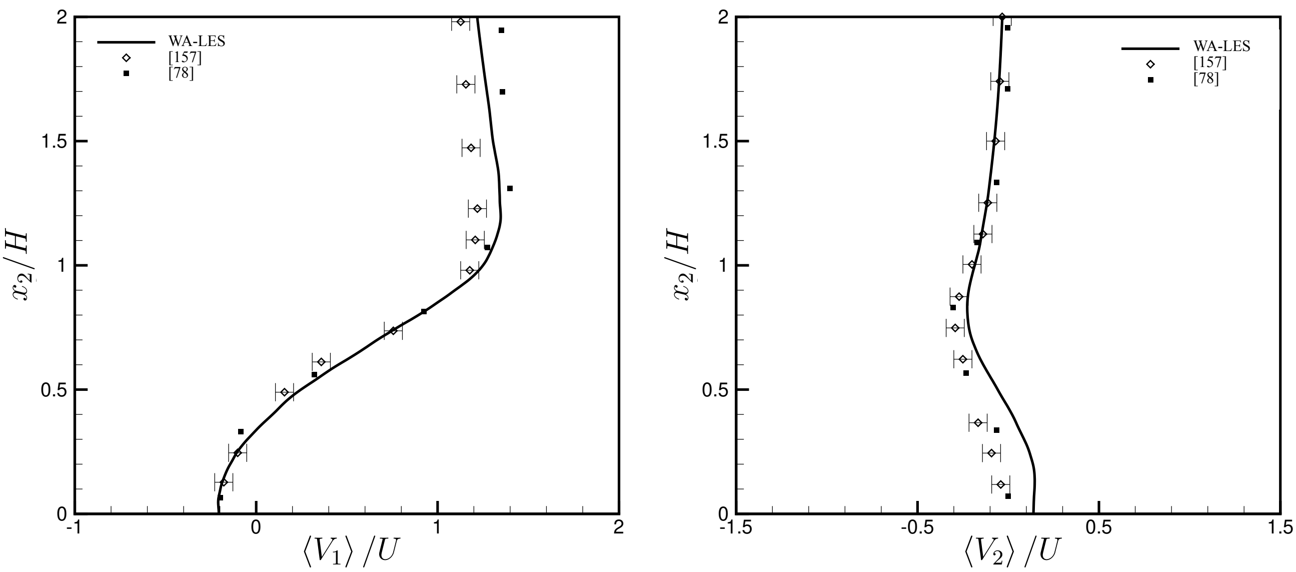


Рисунок 6.16 — Поперечный профиль осреднённых продольной и поперечной компонент скорости в следе за цилиндром ($0 < x_2/H < 2$) вдоль линии $x_1/H = 1$ в сравнении с экспериментальными результатами [78; 157].

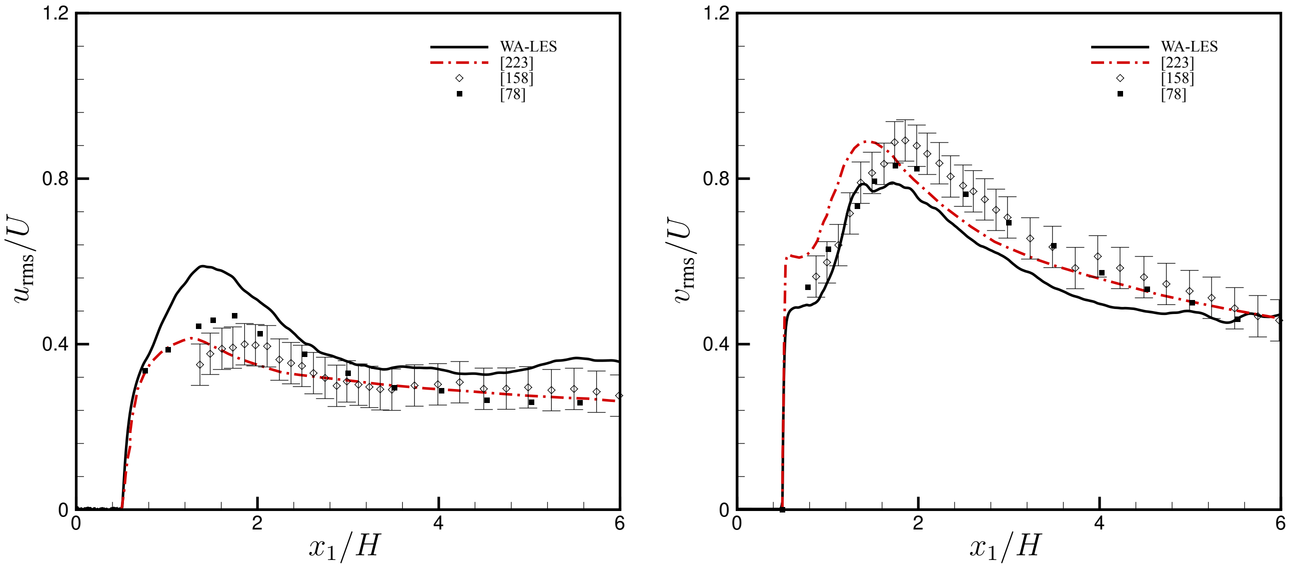


Рисунок 6.17 — Продольные профили среднеквадратичных отклонений $u_{\rm rms}$ и $v_{\rm rms}$ в следе за цилиндром ($0 < x_1/H < 6$) вдоль центральной линии $x_2 = 0$ в сравнении с экспериментальными [78; 158] и численными [223] результатами.

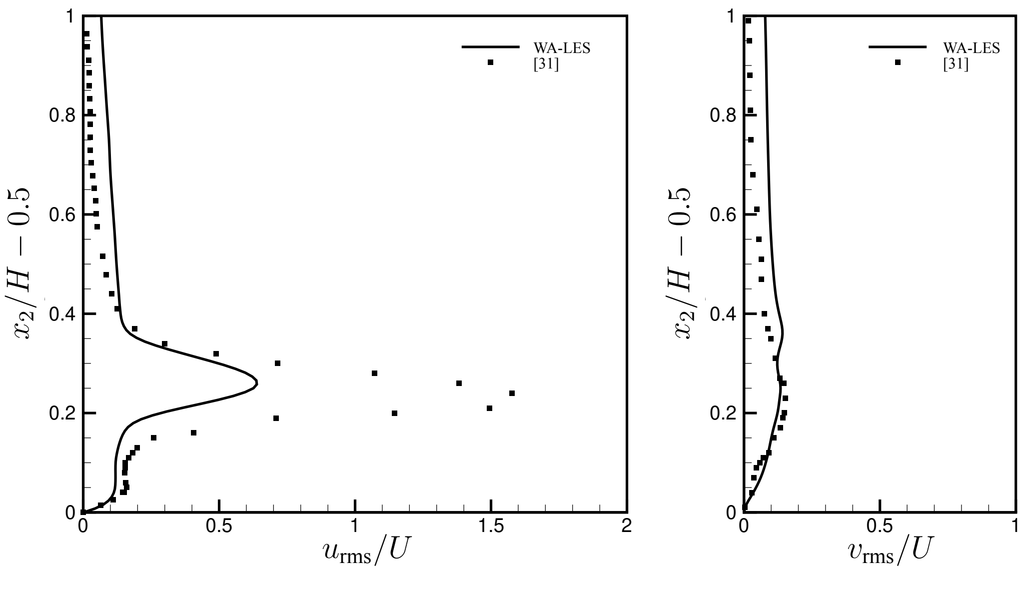


Рисунок 6.18 — Поперечные профили среднеквадратичных отклонений $u_{\rm rms}$ и $v_{\rm rms}$ в области отрыва пограничного слоя на верхней стороне цилиндра ($0.5 < x_2/H < 1.5$) вдоль центральной линии $x_1 = 0$ в сравнении с численными результатами [31].

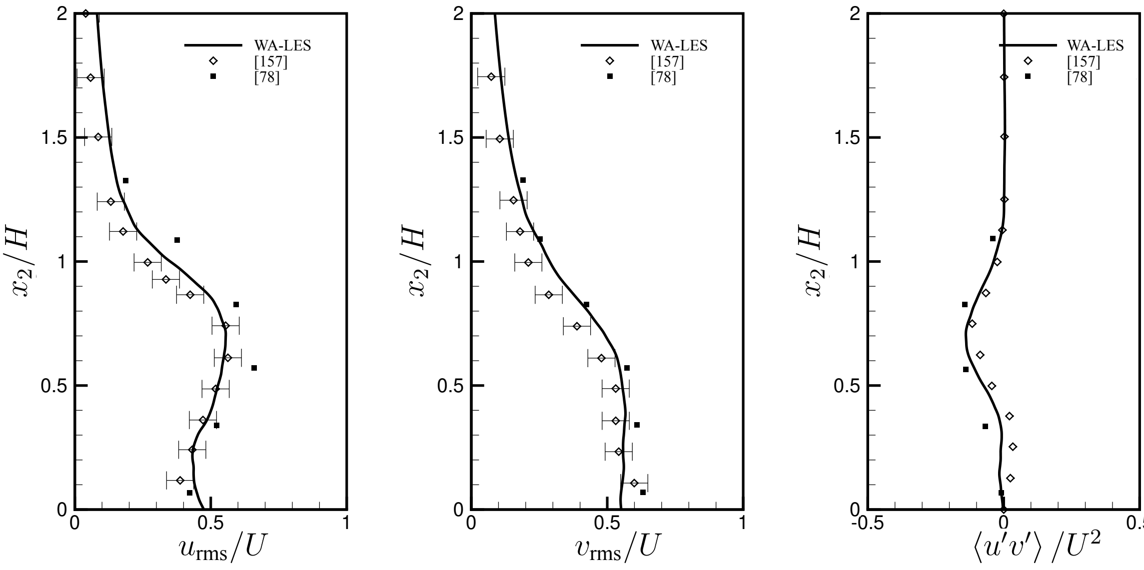


Рисунок 6.19 — Поперечные профили среднеквадратичных отклонений u_{rms}, v_{rms} и разрешённого касательного турбулентного напряжения $\langle u'v' \rangle$ в следе за цилиндром ($0 < x_2/H < 2$) вдоль линии $x_1/H = 1$ в сравнении с экспериментальными результатами [78; 157].

6.4 Обтекание стационарного цилиндра сжимаемым вязким газом

В данном разделе рассмотрено применение метода характеристических штрафных функций для вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования нестационарного ламинарного двумерного обтекания цилиндра диаметра $D = 1$ при числах Маха $\mathrm{Ma} = 0.2$ и Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1\,000$. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работе автора [293]. Задача решена в вычислительной области $\Omega_{\mathrm{s}} = [-5{,}10] \times [-5{,}5]$ со штрафными параметрами $\eta_b = 5 \times 10^{-3}$ и $\eta_c = 10^{-2}$. Уравнение неразрывности пенализировано согласно эволюционному уравнению (5.104). Задача решена для адиабатического цилиндра $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\big|_{r=0.5} = 0$ и для подогреваемого цилиндра с постоянным потоком тепла $q = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\big|_{r=0.5} = 1.5$.

Поля величины скорости и завихренности при обтекании адиабатического цилиндра показаны на рис. 6.20, где также приведены поля температуры для адиабатического и подогреваемого цилиндров. Следует отметить, что в случае подогреваемого цилиндра постоянный поток тепла приводит к небольшому $O(0.1)$ повышению температуры в непосредственной близости с поверхностью цилиндра. В отличие от ранее опубликованных результатов [246], предсказывающих

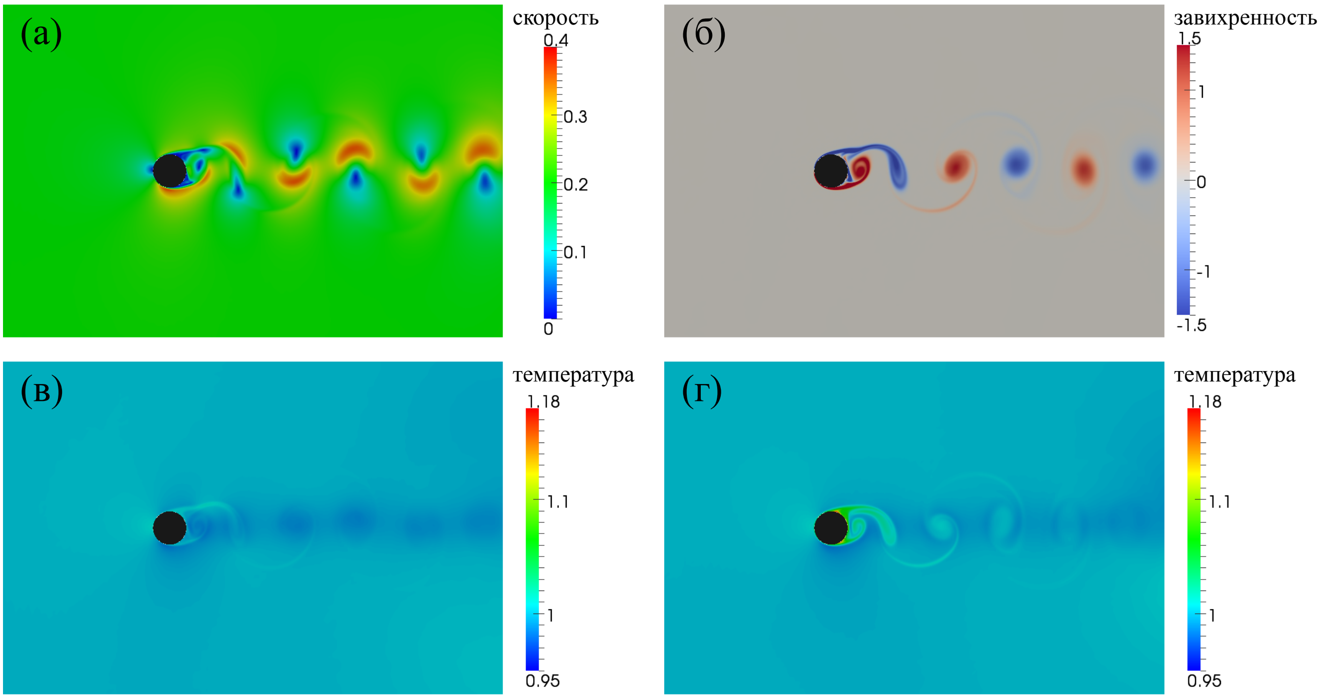


Рисунок 6.20 — Поля величины скорости (а) и завихренности (б) для задачи обтекания адиабатического цилиндра диаметра $D = 1$ при $\mathrm{Ma} = 0.2$ и $\mathrm{Re} = 1\,000$. Поля температуры в случае адиабатического (в) и подогреваемого (г) цилиндров.

уменьшение частоты срыва вихрей в случае подогреваемого цилиндра, число Струхаля $\mathrm{St} = 0.245$ в обоих случаях практически не изменилось. Более того, как было показано в работе [27], при ламинарном обтекании цилиндра частота срыва вихрей малочувствительна к числу Рейнольдса. Таким образом, наблюдаемое увеличение температуры и соответствующее увеличение вязкости недостаточны для того, чтобы существенно уменьшить локальное число Рейнольдса и повлиять на периодичность следа. Эффект подогрева проявляется лишь в изменении поля температуры, для наглядности приведённого на рис. 6.21, на котором показан профиль температуры в радиальном направлении $\theta = \pi/4$, отсчитанном от задней кромки цилиндра. На рисунке также продемонстрирована правильность граничных условий Неймана $q = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{r=0.5} = 1.5$, наложенных с помощью характеристических штрафных функций.

Зависимость от времени коэффициентов сопротивления C_D и подъёмной силы C_L для адиабатического и подогреваемого цилиндров представлена на рис. 6.22, где также для сравнения приведены ранее опубликованные результаты вычислений [27] с немного меньшей частотой срыва вихрей, соответствующей

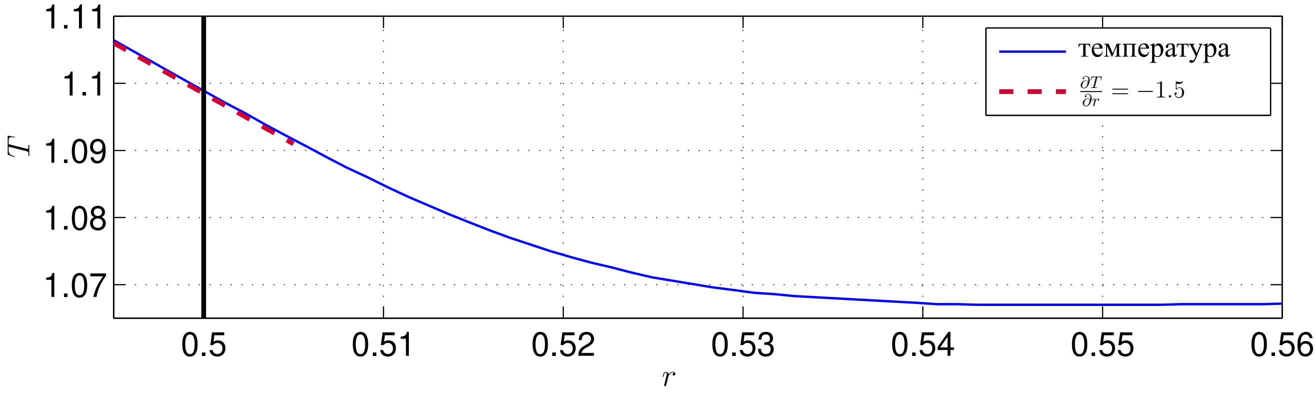


Рисунок 6.21 — Профиль температуры в радиальном направлении $\theta = \pi/4$, отсчитанном от задней кромки цилиндра. Граничные условия $q = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\big|_{r=0.5} = 1.5$ продемонстрированы пунктирной линией.

меньшему числу Струхаля $\mathrm{St} = 0.238$ по сравнению с $\mathrm{St} = 0.245$, полученным при WA-DNS вычислениях.

6.5 Обтекание движущегося цилиндра сжимаемым вязким газом

В данном разделе рассмотрено применение метода характеристических штрафных функций для вейвлетного адаптивного прямого численного моделирования нестационарного ламинарного двумерного обтекания стационарного и движущегося цилиндров при мгновенном начале относительного движения. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работе автора [293]. Для сравнения рассмотрим обтекание цилиндра в неподвижной и движущейся системах координат. В обоих случаях параметры течения соответствуют числам Маха $\mathrm{Ma} = 0.1$ и Рейнольдса $\mathrm{Re} = 185$ с диаметром цилиндра $D = 1$ и одинаковой величиной относительной скорости движения цилиндра и набегающего потока. Численные результаты получены в вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [-7, 12] \times [-7, 7]$ в случае стационарного цилиндра и в $\Omega_\mathrm{s} = [-22, 7] \times [-7, 7]$ — в случае движущегося цилиндра. В обоих случаях задачи решены с эффективным сеточным разрешением $\Delta x = \Delta y = 1/512$ и штрафными параметрами $\eta_b = 10^{-2}$ и $\eta_c = 10^{-1}$.

В случае движущегося цилиндра, скорость набегающего потока и скорость цилиндра соответствуют $U_\infty/2$, где U_∞ — скорость набегающего потока в случае

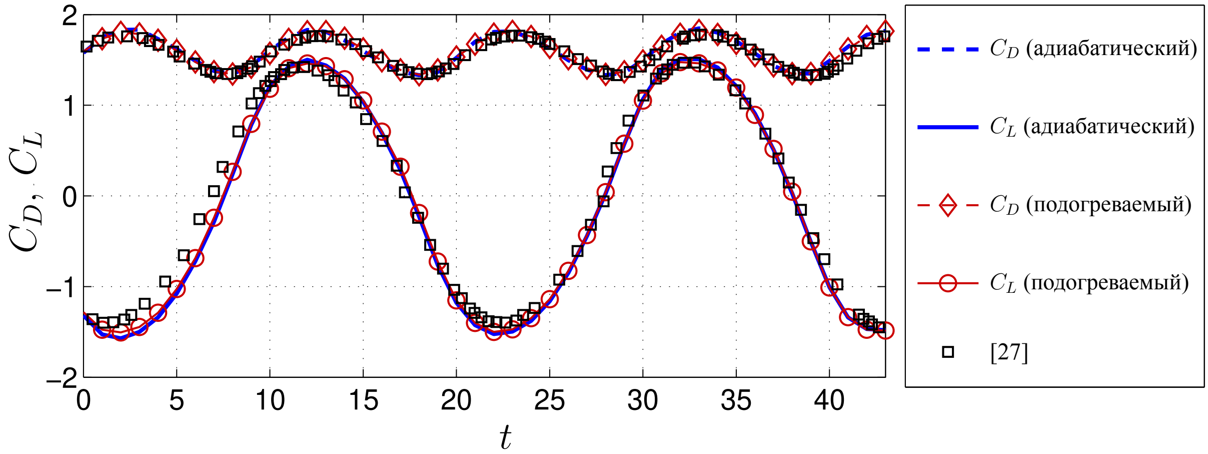


Рисунок 6.22 — Коэффициенты сопротивления C_D и подъёмной силы C_L при обтекании адиабатического и подогреваемого цилиндров в сравнении с ранее полученными численными результатами [27].

стационарного цилиндра. На рис. 6.23 приведена эволюция во времени коэффициентов сопротивления C_D и подъёмной силы C_L для стационарного и движущегося цилиндров. Из рисунка видно соответствие результатов WA-DNS вычислений в неподвижной и движущейся системах координат.

6.6 Сверхзвуковое обтекание стационарных тупых тел сжимаемым невязким газом

Рассмотрим применение метода характеристических штрафных функций, описанного в разделах 5.4 и 5.5, для моделирования сверхзвукового обтекания тупых стационарных тел невязким сжимаемым газом. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работе автора [294]. В качестве примера рассмотрим взаимодействие набегающей ударной волны с одним цилиндром и массивом цилиндров с такими же параметрами ударной волны, как в подразделе 5.5.4, а именно, $u_L = 1.5$, $p_L = 1$, $\rho_L = 1$ и $u_R = 0$ с ρ_R и p_R впереди набегающей ударной волны, выбранным согласно условиям Ренкина—Гюгонио. В случае одного цилиндра задача решена в вычислительной области $\Omega_s = [-1, 3] \times [-2, 2]$ с цилиндром радиусом $r = 0.25$, расположенном в центре координат $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

На левой границе использовались граничные условия Дирихле, соответствующие состоянию газа после ударной волны, на верхней и нижней границах —

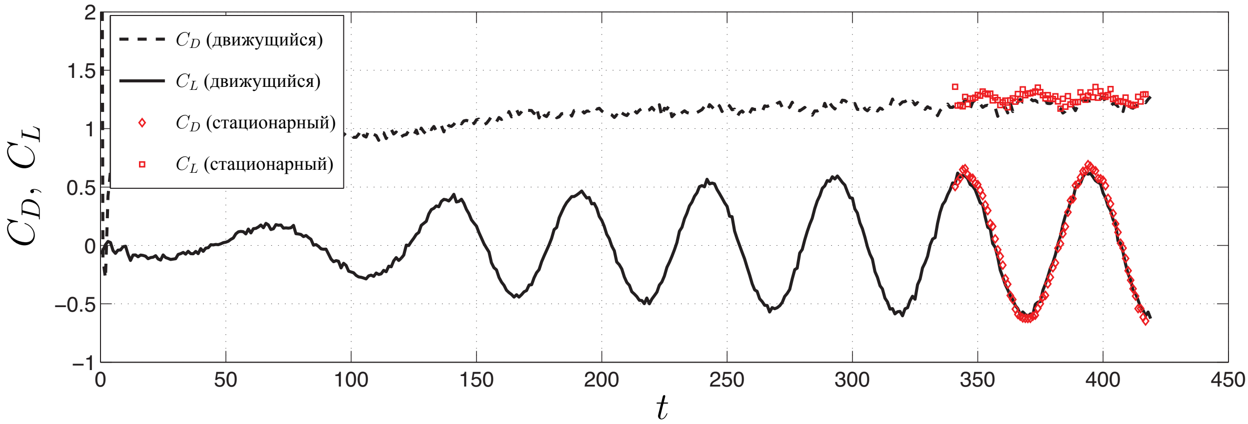


Рисунок 6.23 — Коэффициенты сопротивления C_D и подъёмной силы C_L для задачи обтекания движущегося цилиндра при мгновенном начале относительного движения. Результаты WA-DNS вычислений обтекания стационарного цилиндра после установления квазипериодического режима срыва вихрей приведены для сравнения.

условие симметрии $u_2 = 0$, а на правой границе — характеристические условия вытекания. Задача обтекания массива произвольно расположенных цилиндров радиуса $r = 0.5$ решена в вертикально периодической вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [-4, 4] \times [-4, 4]$. Граничные условия на левой и правой границах области эквиваленты граничным условиям для случая одного цилиндра. Для решения обоих задач применён адаптивный вейвлетный коллокационный метод для гиперболических систем уравнений, описанный в разделе 1.6, с эффективным разрешением сетки $1\,025 \times 1\,025$ и восемью уровнями разрешения.

Для моделирования обтекания тупых тел решались пенализированные уравнения Эйлера (5.147)–(5.150). Поля плотности и давления при обтекании цилиндра в конце вычислений показаны на рис. 6.24а-б. Соответствующая адаптивная вычислительная сетка, окрашенная в соответствии с полем давления, и численное шлирен-изображение поля плотности приведены на рис. 6.24в-г. Результаты вычислений находятся в соответствии с результатами, опубликованными в работах [21; 32; 42; 43; 133].

Результаты численного моделирования сверхзвукового обтекания массива произвольно расположенных цилиндров с помощью AWCM, интегрированного с методом характеристических штрафных функций, представлены на рис. 6.25, где показаны численное шлирен-изображение поля плотности в момент прохождения ударной волны и соответствующая адаптивная вычислительная сетка, окрашенная в соответствии с полем давления. Этот пример наглядно иллюстри-

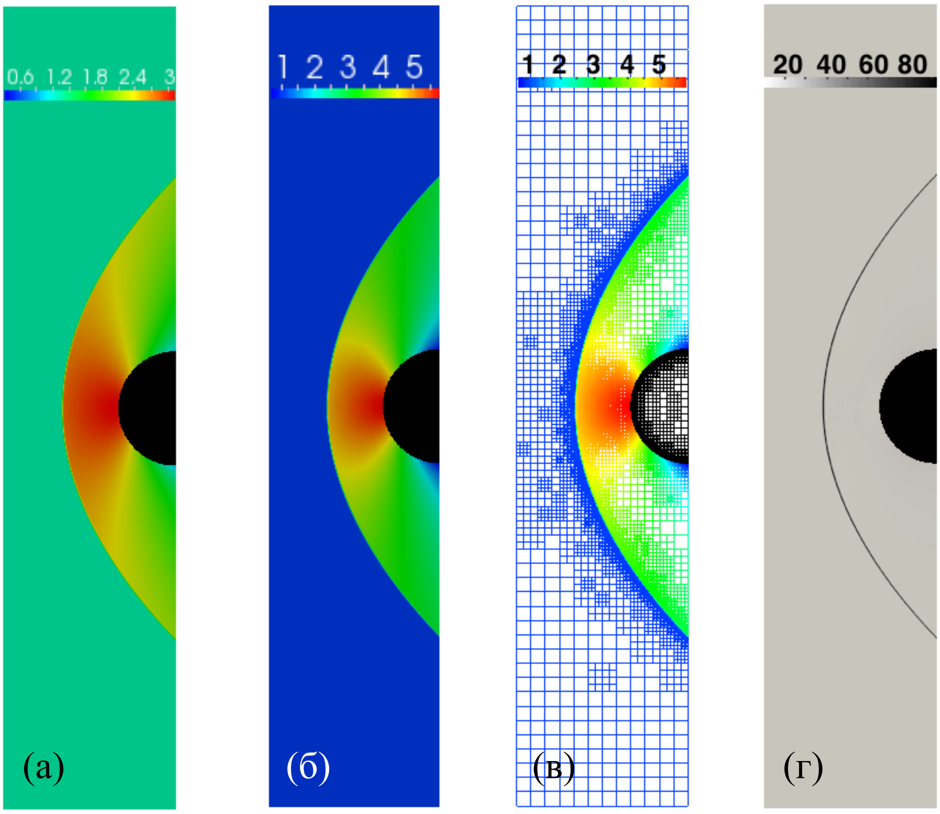


Рисунок 6.24 — Сверхзвуковое обтекание цилиндра сжимаемым невязким газом: (а) поле плотности, (б) поле давления, (в) адаптивная вычислительная сетка, окрашенная в соответствии с полем давления, и (г) численное шлирен-изображение поля плотности.

рует способность метода характеристических штрафных функций эффективно представлять сложную геометрию течения, а также подчеркивает важность применения метода штрафных функций в сочетании с сеточной адаптацией. Как видно из рисунка, AWCM позволяет эффективно разрешать границы твердого тела и структуры ударных волн с автоматической адаптацией, отслеживающей локальные структуры течения.

6.7 Сверхзвуковое обтекание движущихся тел сжимаемым невязким газом

В данном разделе рассмотрено применение расширения Лагранжа для метода характеристических штрафных функций, описанное в подразделе 5.5.3. Материалы, обсуждаемые в этом разделе, основаны на работе автора [294]. Для демонстрации выполнения условия инвариантности Галилея при числен-

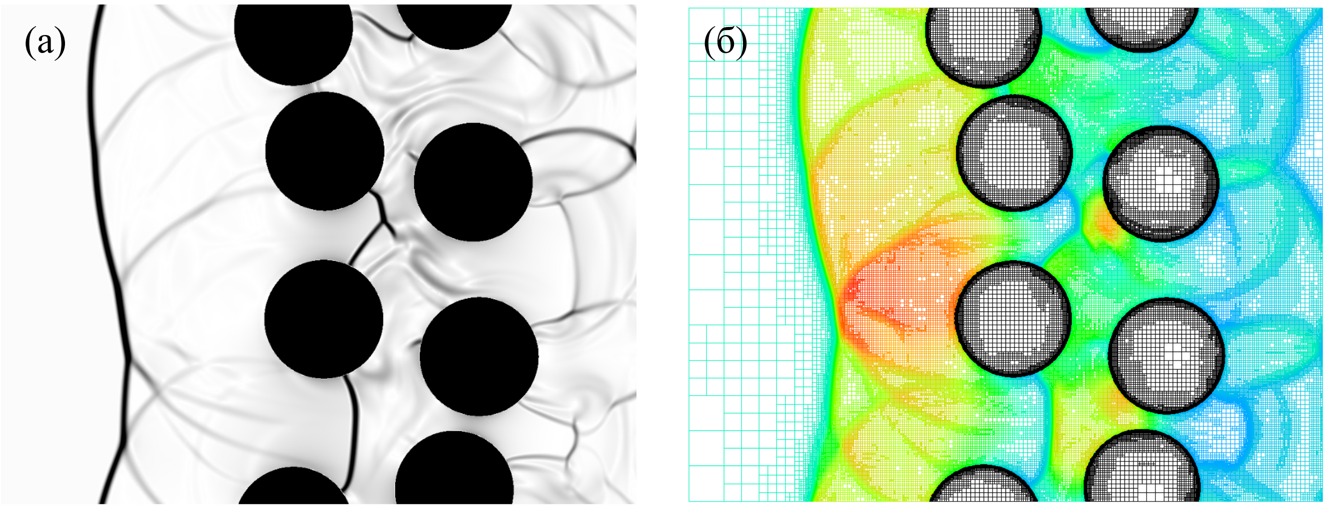


Рисунок 6.25 — Сверхзвуковое обтекание массива произвольно расположенных цилиндров: (а) численное шлирен-изображение поля плотности и (б) адаптивная вычислительная сетка, окрашенная в соответствии с полем давления.

ном моделировании сверхзвукового обтекания стационарных и движущихся тел рассмотрим две задачи. В первой задаче рассмотрим стационарный поток газа, движущийся с числом Маха $\mathrm{Ma} = 1.5$ и набегающий на стационарный цилиндр радиуса $r = 0.2$, во второй — цилиндр того же радиуса, движущийся в стационарном газе с числом Маха $\mathrm{Ma} = 1.5$ в противоположном направлении. В обоих случаях использовались пенализированные уравнения Эйлера (5.158)–(5.161) с конвективными членами Лагранжа. Обе задачи решены в вычислительной области $\Omega_\mathrm{s} = [0,6] \times [0,2]$ при мгновенном начале относительного движения. На левой границе использовались условия Дирихле, соответствующие невозмущённому состоянию газа, на правой границе — характеристические условия вытекания, а на верхней и нижней границах — условия симметрии $u_2 = 0$. На рис. 6.26а показаны начальные условия для плотности, давления, адаптивной сетки и расположения цилиндров в обоих случаях. Для обеих задач вычисления производились до достижения движущимся цилиндром расположения стационарного цилиндра.

Сравнение результатов вычислений для стационарного и движущегося цилиндров приведено на рис. 6.26б, из которого видна эквивалентность решений и соответствующих адаптивных сеток с небольшими различиями, вызванными вторичными структурами неустойчивости. Следует отметить важность выполнения условия инвариантности Галилея при численном моделировании, так как математическая и физическая эквивалентность численных решений в инерциальных системах отсчёта в методе характеристических функций достигается

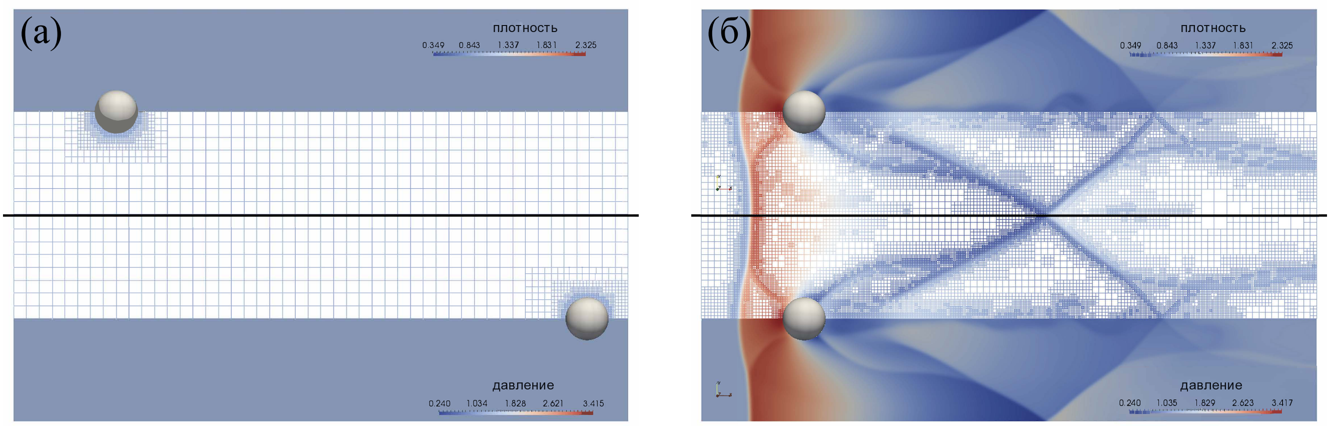


Рисунок 6.26 — Поле плотности и адаптивная сетка, окрашенная в соответствии с полем давления, для задачи сверхзвукового обтекания стационарного (верхняя половина рисунка) и движущегося (нижняя половина рисунка) цилиндров в (а) начальный и (б) конечный моменты времени.

только при применении конвективных членов Лагранжа. Также отметим, что численное решение обтекания движущегося цилиндра невязким сжимаемым газом, использующее метод характеристических штрафных функций без расширения Лагранжа, приводит к существенной ошибке и потере аппроксимации граничных условий.

Заключение

Диссертация посвящена разработке новых классов эффективных многомасштабных адаптивных вычислительных методов на основе вейвлетов второго поколения для численного моделирования задач математической физики в простой и сложной геометрии со способностью задавать произвольные граничные условия, с теоретической априорной оценкой и активным контролем ошибки решения, с автоматической динамической адаптацией вычислительной сетки и демонстрации возможностей разработанных методов для решения широкого спектра задач механики жидкости и газа, включающих течения несжимаемой/сжимаемой, вязкой/невязкой, химически инертной/реагирующей жидкости/газа во всех скоростных режимах.

Перечислим основные результаты диссертации:

1. Для эффективного численного решения параболических, эллиптических и гиперболических систем уравнений разработан принципиально новый класс коллокационных методов на основе вейвлетов второго поколения, способных выделять, разрешать и отслеживать локальные структуры решения на адаптивных вычислительных сетках с активным контролем ошибки решения. При этом разработаны следующие ключевые компоненты:
   - адаптивное быстрое $O(N)$ вейвлетное преобразование второго поколения, включающее процедуру проверки восстановления функции, обеспечивающую принудительное включение узлов-предков, необходимых для рекурсивного вейвлетного преобразования на адаптивной сетке;
   - алгоритм быстрого $O(N)$ вычисления производных на адаптивной сетке, использующий интерполяционные свойства вейвлетов и многоуровневую конечно-разностную аппроксимацию производных на фиксированных шаблонах с фантомными узлами.

   Теоретически полученные аналитические оценки асимптотической сходимости разработанных методов подтверждены результатами численных экспериментов по решению тестовых задач с известными аналитическими решениями.

2. Адаптивный вейвлетный коллокационный метод обобщён для параллель-

ных вычислений. Для обобщённого метода продемонстрированы «вычислительная сложность», параллельная масштабируемость и эффективность распараллеливания по сравнению с теоретически возможной эффективностью параллелизации.

3. Для параболических задач с высокой перемежаемостью разработан принципиально новый пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод, позволяющий получить решение с одновременной адаптацией сетки в пространстве и времени. Эффективность пространственно-временной адаптации и способность активного контроля глобальной ошибки интегрирования во времени продемонстрированы на примере тестовых задач с известными аналитическими решениями.

4. Для расширения области применения адаптивного вейвлетного коллокационного метода при решении задач со сложной геометрией, включая подвижные и деформируемые границы, разработан класс методов штрафных функций, позволяющих задавать однородные и неоднородные граничные условия Дирихле, Неймана и Робена на границе областей сложной геометрии с возможностью оценки и активного контроля ошибки решения через изменение параметров штрафных функций. Получены теоретические оценки асимптотической сходимости разработанных методов. Теоретически предсказанные оценки асимптотической сходимости подтверждены численными экспериментами по решению тестовых задач с известными аналитическими или численными решениями. Продемонстрирована эффективность методов штрафных функций при совместном использовании с сеточной адаптацией, позволяющей локальное разрешение сложной геометрии с заданной точностью без чрезмерного разрешения вдали от границ. Общность формулировки и возможность накладывать произвольные граничные условия на стационарных и подвижных границах, по функциональности, гибкости и простоте применения близкая к определению аналитических граничных условий, проиллюстрированы на примере ряда задач механики жидкости и газа, включающих течения вязкой несжимаемой жидкости, вязкого и невязкого газа в дозвуковых и сверхзвуковых режимах.

5. Продемонстрированы возможности применения и эффективность адаптивного вейвлетного коллокационного метода для численного моделирования

широкого спектра задач механики жидкости и газа, включающих течения вязкой несжимаемой жидкости, вязкого и невязкого сжимаемого газа, а также дозвуковые и сверхзвуковые, инертные и химически реагирующие, ламинарные, переходные и турбулентные течения. Метод продемонстрирован для численного решения уравнений Эйлера и Навье—Стокса для несжимаемой жидкости и сжимаемого реагирующего и инертного газа как в простой, так и в сложной геометрии с применением разработанных методов штрафных функций. Результаты вычислений подтверждены сравнением с опубликованными результатами экспериментальных и вычислительных исследований.

Результаты диссертации имеют как теоретическую, так и практическую значимость. Адаптивный вейвлетный коллокационный метод является новым перспективным направлением вычислительной математики, дальнейшее развитие которого будет способствовать прогрессу в области адаптивных вычислительных технологий, потребность в которых с увеличением применения компьютерных вычислений для проектирования сложных инженерных систем постоянно возрастает. Из перспективных направлений дальнейшего развития темы диссертации перечислим следующие, работа над которыми уже начата:

1. **Адаптивный анизотропный вейвлетный коллокационный метод** является расширением адаптивного вейвлетного коллокационного метода, включающим метод преобразования координат (также известного как метод перераспределения узлов) и позволяющим, помимо измельчения/огрубления сетки, адаптировать сеточную анизотропию. Потенциальной выгодой такого расширения является существенное уменьшение сеточных узлов с оптимальным представлением анизотропии решения. Концепция одновременной адаптации сеточного разрешения и сеточной анизотропии была недавно предложена автором диссертации и продемонстрирована в рамках адаптивного подхода с использованием вейвлетной адаптации [295], который включает использование аналитических координатных преобразований. Важно отметить, что, помимо более эффективного использования вычислительных ресурсов, адаптивный анизотропный вейвлетный подход сохраняет основные достоинства AWCM, а именно априорный контроль ошибки решения и полностью автоматизированный процесс сеточной адаптации.

2. **Пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод**, описанный в диссертации, продемонстрировал потенциальные возможности и эффективность пространственно-временной сеточной адаптации. Однако для решения прикладных инженерных и научных задач необходимы более эффективные итерационные алгоритмы с возможным использованием каузальности решения. Интересным также является расширение метода для гиперболических задач, с возможным отслеживанием пространственно-временной поверхности разрыва. Следует также отметить потребность разработки быстрых алгоритмов извлечения данных меньшей размерности, чем размерность пространственно-временной области, необходимых для визуализации решения.
3. **Многообластной адаптивный вейвлетный коллокационный метод.** AWCM, описанный в диссертации, предполагает одну вычислительную область. Многообещающим является расширение AWCM и вейвлетного адаптивного преобразования для случая нескольких областей, граничащих друг с другом с возможной обобщённой кусочной периодичностью.
4. **Иерархическое адаптивное вихреразрешающее моделирование турбулентных течений.** Возможность систематического контроля ошибки решения и сеточного разрешения адаптивного вейвлетного коллокационного метода открывает перспективы разработки принципиально новой философии численного моделирования, основанной на осознании необходимости тесной интеграции математического моделирования, адаптивных численных методов и алгоритмов генерации вычислительной сетки для более гибкого учёта физики задачи, минимизации требуемых вычислительных ресурсов, повышения качества и эффективности численного моделирования и степени прогнозирования физических свойств моделируемых систем.

В заключение автор выражает глубокую признательность Н.-К. Р. Кевлахану, Г. Де Стефано и М. Ю. Хуссаини за многолетнее плодотворное сотрудничество и ученикам Д. Голдштейну, К. Лиу, Дж. Регелу, А. Везолайнену, С. Рекинджер, С. Дж. Рекинджеру, А. Неджамалайери, Э. Браун—Димкоски и Н. Касимову за неоценимую помощь в воплощении и развитии адаптивного вейвлетного коллокационного метода, методов штрафных функций и применении разработанных методов для численного решения задач механики жидкости и газа.

Список сокращений

МФО метод фиктивных областей

МХШФ метод характеристических штрафных функций

МШФ метод штрафных функций

МШФБ метод штрафных функций Бринкмана

AUSM Advection Upstream Splitting Method, метод расщепления вектора потока

AWCM Adaptive Wavelet Collocation Method, адаптивный вейвлетный коллокационный метод

AWESUMM Adaptive Wavelet Environment for in Silico Universal Multiscale Modeling, адаптивная вейвлетная среда для универсального многомасштабного численного моделирования

BI-CGSTAB Bi-Conjugate Gradient Stabilized method, стабилизированный метод бисопряжённых градиентов

CFL Courant, Friedrichs, and Lewy condition, условие Куранта, Фридрихса и Леви

CVS Coherent Vortex Simulations, метод когерентных вихрей

DDES Delayed Detached Eddy Simulation, «задержанный» метод моделирования отсоединенных вихрей

DIRK diagonally implicit Runge-Kutta method, диагонально неявный метод Рунге—Кутта

DNS Direct Numerical Simulations, прямое численное моделирование

ENO Essentially Nonoscillatory Scheme, существенно-неосциллирующиая схема

ERK explicit Runge-Kutta method, явный метод Рунге—Кутта

FAS Full Approximation Scheme, метод полной аппроксимации

FMM Fast Multipole Method, быстрый многопольный метод

HLLC Harten, Lax, van Leer contact Riemann solver, модифицированный Хартеном, Лаксом и ван Лиром решатель Римана

GMRES Generalized Minimal Residual method, обобщённый метод минимальных невязок

IMEX Implicit-explicit, неявные—явные

LES Large Eddy Simulations, метод крупных вихрей

MUSCL Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws, монотонная противопоточная схема для законов сохранения

P-AWCM Parallel Adaptive Wavelet Collocation Method, параллельный адаптивный вейвлетный коллокационный метод

RANS Reynolds Averaged Navier-Stokes, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье—Стокса

RCP reconstruction check procedure, процедура проверки восстановления функции

ST-AWCM Space-Time Adaptive Wavelet Collocation Method, пространственно-временной адаптивный вейвлетный коллокационный метод

TVD total variation diminishing, условие невозрастания полной вариации

WA-DDES Wavelet-based Adaptive Delayed Detached Eddy Simulation, вейвлетный адаптивный «задержанный» метод моделирования отсоединенных вихрей

WA-DNS Wavelet-based Adaptive Direct Numerical Simulations, вейвлетное адаптивное прямое численное моделирование

WA-LES Wavelet-based Adaptive Large Eddy Simulations, вейвлетный адаптивный метод крупных вихрей

WA-URANS Wavelet-Based Adaptive Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes, вейвлетное адаптивное моделирование на основе нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса

WENO Weighted Essentially Nonoscillatory Scheme, взвешенная существенно-неосциллирующая схема

W-FAS Wavelet-based Full Approximation Scheme, вейвлетный метод полной аппроксимации

Список литературы

1. *Abarzhi*, *S. I.* New type of the interface evolution in the Richtmyer-Meshkov instability / S. I. Abarzhi, M. Herrmann // Center for Turbulence Research Annual Research Briefs. — NASA-Ames, Stanford University, 2003. — P. 173—183.
2. *Aechtner*, *M.* A conservative adaptive wavelet method for the shallow-water equations on the sphere / M. Aechtner, N. K. R. Kevlahan, T. Dubos // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2015. — July. — Vol. 141, 690A. — P. 1712—1726.
3. *Agarwal*, *A.* Direct simulation of acoustic scattering by a rotorcraft fuselage / A. Agarwal, P. J. Morris // AIAA Paper No. 2000-2030. — 2000.
4. *Angot*, *P.* Analysis of singular perturbations on the Brinkman problem for fictitious domain models of viscous flows / P. Angot // Mathematical Methods in the Applied Science. — 1999. — Vol. 22. — P. 1395—1412.
5. *Angot*, *P.* A penalization method to take into account obstacles in viscous flows / P. Angot, C. H. Bruneau, P. Fabrie // Numerische Mathematik. — 1999. — Vol. 81. — P. 497—520.
6. *Anuchina*, *N. N.* Numerical simulations of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instability using MAH-3 code / N. N. Anuchina, V. I. Volkov, V. A. Gordeychuk, N. S. Eskov, O. S. Ilyutina, O. M. Kozyrev // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2004. — July. — Vol. 168, 1—2, SI. — P. 11—20.
7. *Arquis*, *E.* Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle / E. Arquis, J. P. Caltagirone // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series II. — 1984. — Vol. 299. — P. 1—4.
8. *Ascher*, *U. M.* Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations / U. M. Ascher, S. J. Ruuth, R. J. Spiteri // Applied Numerical Mathematics. — 1997. — Vol. 25. — P. 151—167.
9. *Babuska*, *I.* A posterriori error estimates for finite element methods / I. Babuska, W. C. Rheinboldt // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1978. — Vol. 12. — P. 1597—1615.

10. *Babuska*, *I.* Error estimates for adaptive finite element computations / I. Babuska, W. C. Rheinboldt // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1978. — Vol. 15. — P. 736—754.

11. *Bacry*, *E.* A wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equation / E. Bacry, S. Mallat, G. Papanicolaou // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 1992. — Vol. 26, no. 7. — P. 793—834.

12. *Bagabir*, *A.* Mach number effects on shock-bubble interaction / A. Bagabir, D. Drikakis // Shock waves. — 2001. — Sept. — Vol. 11, no. 3. — P. 209—218.

13. *Bank*, *R. E.* A multi-level iterative method for nonlinear elliptic equations / R. E. Bank // Elliptic problem solvers / ed. by M. H. Schultz. — New York : Academic Press, 1981. — P. 1—16.

14. *Bank*, *R. E.* Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations / R. E. Bank, A. Weiser // Mathematics of Computation. — 1985. — Vol. 44, no. 170. — P. 283—301.

15. *Bar-Lev*, *M.* Initial flow field over an impulsively started circular cylinder / M. Bar-Lev, H. T. Yang // Journal of Fluid Mechanics. — 1975. — Vol. 72. — P. 625—647.

16. *Bashforth*, *F.* An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid, with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops / F. Bashforth, J. C. Adams. — Cambridge : Cambridge University Press, 1883.

17. *Beck*, *J. L.* Convection in a box of porous material saturated with fluid / J. L. Beck // Physics of Fluids. — 1972. — Vol. 15. — P. 1377—1383.

18. *Becker*, *R.* Adaptive error control for multigrid finite element methods / R. Becker, C. Johnson, R. Rannacher // Computing. — 1995. — Vol. 55. — P. 271—288.

19. *Berger*, *M. J.* Aspects (and aspect ratios) of cartesian mesh methods / M. J. Berger, M. J. Aftosmis // Proc. 16th Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn. — 1998.

20. *Blackstock*, *D. T.* Fundamentals of physical acoustics / D. T. Blackstock. — John Willey, Sons, Inc., 2000.

21. *Boiron*, *O.* A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles / O. Boiron, G. Chiavassa, R. Donat // Computers & Fluids. — 2009. — Mar. — Vol. 38, no. 3. — P. 703—714.

22. *Boman*, *E.* Zoltan home page / E. Boman, K. Devine, L. A. Fisk, R. Heaphy, B. Hendrickson, V. Leung, C. Vaughan, U. Catalyurek, D. Bozdag, W. Mitchell. — 1999.

23. *Boman*, *E.* Zoltan 3.0: parallel partitioning, load-balancing, and data management services; User's guide / E. Boman, K. Devine, L. A. Fisk, R. Heaphy, B. Hendrickson, C. V, U. Catalyurek, D. Bozdag, W. Mitchell, J. Teresco ; Sandia National Laboratories. — Albuquerque, NM, 2007.

24. *Boman*, *E.* Zoltan 3.0: parallel partitioning, load-balancing, and data management services; Developer's guide / E. Boman, K. Devine, L. A. Fisk, R. Heaphy, B. Hendrickson, C. Vaughan, U. Catalyurek, D. Bozdag, W. Mitchell, J. Teresco ; Sandia National Laboratories. — Albuquerque, NM, 2007.

25. *Brandt*, *A.* Multi–level adaptive solutions to boundary–value problems / A. Brandt // Mathematics of Computation. — 1977. — Vol. 31. — P. 333—390.

26. *Brandt*, *A.* Multi–level adaptive techniques (MLAT) for partial differential equations: Ideas and software / A. Brandt // Mathematical Software III. — 1977. — P. 273—314. — (ICASE report 77–20).

27. *Brentner*, *K. S.* Computation of sound generated by flow over a circular cylinder: an acoustic analogy approach / K. S. Brentner, J. S. Cox, C. L. Rumsey, B. A. Younis // Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems / ed. by C. Tam, J. Hardin. — NASA. 06/1997. — P. 289—295.

28. *Briggs*, *W. I.* A multigrid tutorial / W. I. Briggs, V. E. Henson, S. F. McCormick. — 2nd. — Philadelphia : SIAM, 1999.

29. *Brinkman*, *H. C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles / H. C. Brinkman // Applied Scientific Research. — 1947. — Vol. A1. — P. 27—34.

30. *Brinkman*, *H. C.* On the permeability of media consisting of closely packed porous particles / H. C. Brinkman // Applied Scientific Research. — 1947. — Vol. A1. — P. 81—86.

31. *Brun*, *C.* Coherent structures and their frequency signature in the separated shear layer on the sides of a square cylinder / C. Brun, S. Aubrun, T. Goossens, P. Ravier // Flow, Turbulence and Combustion. — 2008. — Vol. 81. — P. 97—114.

32. *Bryson*, *A. E.* Difraction of strong shocks by cones, cylinders, and spheres / A. E. Bryson, R. W. F. Gross // Journal of Fluid Mechanics. — 1960. — Vol. 10, no. 1. — P. 1—22.

33. *Burger*, *R.* Adaptive multiresolution WENO schemes for multi-species kinematic flow models / R. Burger, A. Kodakevicius // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 224. — P. 1190—1222.

34. *Burgers*, *J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence / J. M. Burgers // Advances in Applied Mechanics. — 1948. — Vol. 1. — P. 171—1948.

35. *Cai*, *W.* Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear PDEs / W. Cai, J. Z. Wang // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1996. — Vol. 33. — P. 937—970.

36. *Cannon*, *J. R.* The one-dimensional heat equation / J. R. Cannon. — Addison-Wesley, 1984.

37. *Canuto*, *C.* Spectral methods in fluid dynamics / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. — Springer Series in Computational Physics, 1987.

38. *Carbou*, *G.* Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow / G. Carbou, P. Fabrie // Advances in Difference Equations. — 2003. — Vol. 8. — P. 1453—1480.

39. *Catalyurek*, *U. V.* Hypergraph-based dynamic load balancing for adaptive scientific computations / U. V. Catalyurek, E. G. Boman, K. D. Devine, D. Bozdag, R. T. Heaphy, L. A. Riesen // Proc. of 21st International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'07). — IEEE, 2007.

40. *Chandrasekhar*, *S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability / S. Chandrasekhar. — New York: Dover, 1981. — P. 428—477.

41. *Charton*, *P.* A pseudo-wavelet scheme for the two-dimensional Navier-Stokes equation / P. Charton, V. Perrier // Computational and Applied Mathematics. — 1996. — Vol. 15, no. 2. — P. 139—160.

42. *Chaudhuri*, *A.* On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions / A. Chaudhuri, A. Hadjadj, A. Chinnayya // Journal of Computational Physics. — 2011. — Dec. — Vol. 230. — P. 1731—1748.

43. *Chaudhuri*, *A.* Computational study of shock-wave interaction with solid obstacles using immersed boundary methods / A. Chaudhuri, A. Hadjadj, O. Sadot, E. Glazer // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2012. — Vol. 89, no. 8. — P. 975—990.

44. *Cheng*, *H.* A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions / H. Cheng, L. Greengard, V. Rokhlin // Journal of Computational Physics. — 1999. — Vol. 155. — P. 468—498.

45. *Chiavassa*, *G.* Multiresolution-based adaptive schemes for hyperbolic conservation laws / G. Chiavassa, R. Donat, S. Muller // Adaptive Mesh Refinement: Theory and Applications. Vol. 41 / ed. by T. Plewa, T. Linde, V. G. Weiss. — Springer-Verlag, 2003. — P. 137—159. — (Lecture Notes in Computational Science and Engineering).

46. *Chiavassa*, *G.* On the effective construction of compactly supported wavelets satisfying homogeneous boundary conditions on the interval / G. Chiavassa, J. Liandrat // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1997. — Vol. 4. — P. 62—73.

47. *Chung*, *C.* Acoustic scattering from two- and three-dimensional bodies / C. Chung, P. J. Morris // Journal of Computational Acoustics. — 1998. — Vol. 6. — P. 357—375.

48. *Clarke*, *D. K.* Euler calculations for multielement airfoils using cartesian grids / D. K. Clarke, M. D. Salas, H. A. Hassen // AIAA Journal. — 1986. — Vol. 24(3). — P. 353—358.

49. *Clarke*, *J. F.* On the evolution of plane detonations / J. F. Clarke, D. R. Kassoy, N. E. Meharzi, N. Riley, R. Vasantha // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1990. — Vol. 429. — P. 259—283.

50. *Clarke*, *J. F.* On the direct initiation of a plane detonation wave / J. F. Clarke, D. R. Kassoy, N. Riley // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1986. — Vol. 408. — P. 129—148.

51. *Cohen*, *A.* Non-separable bidimensional wavelet bases / A. Cohen, I. Daubechies // Revista Matematica Iberoamericana. — 1993. — Vol. 9. — P. 51—137.

52. *Cohen*, *A.* Wavelets on the interval and fast wavelet transforms / A. Cohen, I. Daubechies // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1993. — Vol. 1. — P. 54—81.

53. *Cohen*, *A.* Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws / A. Cohen, S. M. Kaber, S. Müller, M. Postel // Mathematics of Computation. — 2001. — Vol. 72. — P. 183—225.

54. *Cohen*, *R.* Towards the application of the impedance mismatch method to the expansion about incompressible flow acoustic equations / R. Cohen, A. Ooi, G. Iaccarono // Proceedings of the summer program 2006, Center for Turbulence Research. — 2006.

55. *Colella*, *P.* A direct Eulerian MUSCL scheme for gas-dynamics / P. Colella // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1985. — Vol. 6, no. 1. — P. 104—117.

56. *Colonius*, *T.* Modeling artifical boundary conditions for compressible flow / T. Colonius // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2004. — Vol. 36. — P. 315—345.

57. *Constantin*, *P.* On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence / P. Constantin, C. Foias, R. Temam // Physica D. — 1988. — Vol. 30, no. 3. — P. 284—296.

58. *Cottet*, *G. H.* Vortex methods: theory and practice / G. H. Cottet, P. D. Koumoutsakos. — Cambridge University press, 2000.

59. *Courant*, *R.* Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik / R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy // Mathematische Annalen. — 1928. — Vol. 100, no. 1. — P. 32—74.

60. *Coutanceau*, *M.* Experimental determination of the main features of viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow / M. Coutanceau, R. Bouard // Journal of Fluid Mechanics. — 1977. — Vol. 79. — P. 231—256.

61. *Crank*, *J.* A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type / J. Crank, P. Nicolson // Advances in Computational Mathematics. — 1996. — Dec. — Vol. 6, no. 1. — P. 207—226.

62. *Darcy*, *H. P. G.* Les fontaines publiques de la ville de dijon / H. P. G. Darcy // Victor Dalmont, Paris, 1856. — 1856.

63. *Daubechies*, *I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets / I. Daubechies // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1988. — Vol. 41. — P. 909—996.

64. *Daubechies*, *I.* Ten lectures on wavelets / I. Daubechies. — Philadelphia : SIAM, 1992. — (CBMS-NSF Series in Applied Mathematics ; 61).

65. *Davidson*, *P. A.* Turbulence: an introduction for scientists and engineers / P. A. Davidson. — Oxford University Press, 2004.

66. *De Stefano*, *G.* Analysis of 3D backward-facing step incompressible flows via a local average-based numerical procedure / G. De Stefano, F. M. Denaro, G. Riccardi // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1998. — Vol. 28. — P. 1073—1091.

67. *de Tullio*, *M. D.* An immersed boundary method for compressible flows using local grid refinement / M. D. de Tullio, P. De Palma, G. Iaccarino, G. Pascazio, M. Napolitano // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 225. — P. 2098—2117.

68. *Dennis*, *S. C. R.* Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 / S. C. R. Dennis, G. Z. Chang // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 42. — P. 471—489.

69. *Devine*, *K.* Zoltan data management services for parallel dynamic applications / K. Devine, E. Boman, R. Heaphy, B. Hendrickson, C. Vaughan // Computing in Science and Engineering. — 2002. — Vol. 4, no. 2. — P. 90—97.

70. *Devine*, *K. D.* Parallel hypergraph partitioning for scientific computing / K. D. Devine, E. G. Boman, R. T. Heaphy, R. H. Bisseling, U. V. CatalyureK //. — IEEE, 2006.

71. *Doering*, *C. R.* Energy dissipation in body-forced turbulence / C. R. Doering, C. Foias // Journal of Fluid Mechanics. — 2002. — Vol. 467. — P. 289—306.

72. *Dolling*, *D. S.* Fifty years of shock-wave/boundary-layer interaction research: What next? / D. S. Dolling // AIAA Journal. — 2001. — Aug. — Vol. 39, no. 8. — P. 1517—1531.

73. *Domingues*, *M. O.* Space-time adaptive multiresolution methods for hyperbolic conservation laws: Applications to compressible Euler equations / M. O. Domingues, S. M. Gomes, O. Roussel, K. Schneider // Applied Numerical Mathematics. — 2009. — Sept. — Vol. 59, 9, SI. — P. 2303—2321.

74. *Domingues*, *M. O.* An adaptive multiresolution scheme with local time stepping for evolutionary PDEs / M. O. Domingues, S. M. Gomes, O. Roussel, K. Schneider // Journal of Computational Physics. — 2008. — Apr. — Vol. 227, no. 8. — P. 3758—3780.

75. *Donoho*, *D. L.* Interpolating wavelet transforms : tech. rep. / D. L. Donoho ; Department of Statistics, Stanford University. — 1992. — No. 408.

76. *Dubief*, *Y.* On coherent-vortex identification in turbulence / Y. Dubief, F. Delcayre // Journal of Turbulence. — 2000. — Vol. 1. — P. 1—22.

77. *Duff*, *R. E.* Effects of diffusion on interface instability between gases / R. E. Duff, F. H. Harlow, C. W. Hirt // Physics of Fluids. — 1962. — Vol. 5. — P. 417—425.

78. *Durao*, *D. F. G.* Measurements of turbulent and periodic flows around a square cross-section cylinder / D. F. G. Durao, M. V. Heitor, J. C. F. Pereira // Experiments in Fluids. — 1988. — Vol. 6. — P. 298—304.

79. *Eckett*, *C. A.* The role of unsteadiness in direct initiation of gaseous detonations / C. A. Eckett, J. J. Quirk, J. E. Shepherd // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Oct. — Vol. 421. — P. 147—183.

80. *Edwards*, *W. S.* Krylov methods for the incompressible Navier–Stokes equations / W. S. Edwards, L. S. Tuckerman, R. A. Friesner, D. C. Sorensen // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 110. — P. 82—102.

81. *Engels*, *T.* FluSI: a novel parallel simulation tool for flapping insect flight using a Fourier method with volume penalization / T. Engels, D. Kolomenskiy, K. Schneider, J. Sesterhenn // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2016. — Vol. 38, no. 5. — S3—S24.

82. *Farge*, *M.* Wavelet transforms and their application to turbulence / M. Farge // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1992. — Vol. 24. — P. 395—457.

83. *Farge, M.* Transformee en ondelettes pour detecter et analyser les structures coherentes dans les ecoulements turbulents bidimensionnels / M. Farge, G. Rabreau // C. R. Academie des Sciences de Paris. — 1988. — Vol. 307, serie II. — P. 1479—1486.

84. *Farge, M.* Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis / M. Farge, K. Schneider, N. Kevlahan // Physics of Fluids. — 1999. — Vol. 11, no. 8. — P. 2187—2201.

85. *Feireisl, E.* Convergence of a Brinkman-type penalization for compressible fluid flows / E. Feireisl, J. Neustupa, S. Stebel // Journal of Differential Equations. — 2011. — Vol. 250. — P. 596—606.

86. *Fix, G.* Fourier analysis of finite element method in Ritz-Galerkin theory / G. Fix, G. Strang // Studies in Applied Mathematics. — 1969. — Vol. 48, no. 3. — P. 265.

87. *Foias, C.* Sur le comportement global des solution non stationnaires des équations de Navier–Stokes en dimension deux / C. Foias, G. Prodi // Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova. — 1967. — Vol. 39. — P. 1—34.

88. *Foias, C.* Determination of the solutions of the Navier–Stokes equations by a set of nodal values / C. Foias, R. Temam // Mathematics of Computation. — 1984. — Vol. 43, no. 167. — P. 117—133.

89. *Fornberg, B.* A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder / B. Fornberg // Journal of Fluid Mechanics. — 1980. — Vol. 98. — P. 819—855.

90. *Franco, J.* The 2D wavelet transform on emerging architectures: GPUs and multicores / J. Franco, G. Bernabe, J. Fernandez, M. Ujaldon // Journal of Real-Time Image Processing. — 2012. — Sept. — Vol. 7, 3, Part 3, SI. — P. 145—152.

91. *Freund, J. B.* Proposed inflow/outflow boundary condition for direct computation of aerodynamic sound / J. B. Freund // AIAA Journal, — 1997. — Vol. 35. — P. 740—742.

92. *Frisch, U.* A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence / U. Frisch, M. Nelkin, P. L. Sulem // Journal of Fluid Mechanics. — 1978. — Vol. 87. — P. 719—736.

93. *Friz, P. K.* Parametrising the attractor of the two-dimensional Navier–Stokes equations with a finite number of nodal values / P. K. Friz, J. C. Robinson // Physica D. — 2001. — Vol. 148. — P. 201—220.

94. *Fröhlich*, *J.* Numerical simulation of decaying turbulence in an adaptive wavelet basis / J. Fröhlich, K. Schneider // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1996. — Vol. 3. — P. 393—397.

95. *Fröhlich*, *J.* Computation of decaying turbulence in an adaptive wavelet basis / J. Fröhlich, K. Schneider // Physica D. — 1999. — Vol. 134. — P. 337—361.

96. *Fröhlich*, *J.* Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows / J. Fröhlich, D. von Terzi // Progress in Aerospace Sciences. — 2008. — Vol. 44, no. 5. — P. 349—377.

97. *Galdi*, *G. P.* Determining modes, nodes and volume elements for stationary solutions of the Navier–Stokes problem past a three-dimensional body / G. P. Galdi // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2006. — Vol. 180. — P. 97—126.

98. *Galiano*, *V.* GPU-based 3D lower tree wavelet video encoder / V. Galiano, O. Lopez-Granado, M. P. Malumbres, L. A. Drummond, H. Migallon // EURASIP J. Adv. Signal Process. — Gewerbestrasse 11, Cham, CH-6330, Switzerland, 2013.

99. *Galiano*, *V.* Parallel strategies for 2D discrete wavelet transform in shared memory systems and GPUs / V. Galiano, O. Lopez, M. P. Malumbres, H. Migallon // J. Supercomput. — 2013. — Apr. — Vol. 64, no. 1. — P. 4—16.

100. *Gamezo*, *V. N.* The influence of shock bifurcations on shock-flame interactions and DDT / V. N. Gamezo, A. M. Khokhlov, E. S. Oran // Combustion and Flame. — 2001. — Sept. — Vol. 126, no. 4. — P. 1810—1826.

101. *Garcia*, *A.* GPU-based 3D wavelet reconstruction with tileboarding / A. Garcia, H. W. Shen // Visual Comput. — 2005. — Sept. — Vol. 21, 8—10, SI. — P. 755—763.

102. *Germano*, *M.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model / M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W. H. Cabot // Physics of Fluids A. — 1991. — Vol. 3, no. 7. — P. 1760—1765.

103. *Ghias*, *R.* A non-body conformal grid method for simulation of compressible flows with complex immersed boundaries / R. Ghias, R. Mittal, T. S. Lund // AIAA Paper No. 2004-0080. — 2004.

104. *Girimaji*, *S. S.* Closure modeling in bridging regions of variable-resolution (VR) turbulence computations / S. S. Girimaji, S. Wallin // Journal of Turbulence. — 2013. — Vol. 14, no. 1. — P. 72—98.

105. *Goldstein*, *D.* Modeling a no-slip flow boundary with an external force field / D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich // Journal of Computational Physics. — 1993. — Vol. 105. — P. 354—366.

106. *Gonzalez*, *P.* Parallel computation of wavelet transforms using the lifting scheme / P. Gonzalez, J. C. Cabaleiro, T. F. Pena // Journal of supercomputing. — 2001. — Feb. — Vol. 18, no. 2. — P. 141—152.

107. *Greengard*, *L.* A fast algorithm for particle simulations / L. Greengard, V. Rokhlin // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 135. — P. 280—292.

108. *Griebel*, *M.* Adaptive wavelet solvers for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations / M. Griebel, F. Koster // Advances in Mathematical Fluid Mechanics / ed. by J. Malek, J. Necas, M. Rokyta. — Berlin, Germany : Springer-Verlag Berlin, 2000. — P. 67—118.

109. *Griebel*, *M.* Multiscale methods for the simulation of turbulent flows / M. Griebel, F. Koster // Numerical Flow Simulation III. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Vol. 82 / ed. by E. Hirschel. — Springer-Verlag, 2003. — P. 203—214.

110. *Grossmann*, *A.* Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape / A. Grossmann, J. Morlet // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1984. — Vol. 15, no. 4. — P. 723—736.

111. *Guermond*, *J. L.* Velocity-correction projection methods for incompressible flows / J. L. Guermond, J. Shen // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2003. — Vol. 41, no. 1. — P. 112—134.

112. *Hackbusch*, *W.* Multigrid methods and applications / W. Hackbusch. — New York : Springer-Verlag, 1985.

113. Handbook of grid generation / ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. — Boca Raton, London, New York : CRC Press, 1999.

114. *Harten*, *A.* Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. (Reprinted from Journal of Computational Physics, vol 71, pg 231, 1987) / A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 131, no. 1. — P. 3—47.

115. *Harten*, *A.* High-resolution schemes for hyperbolic conservation-laws / A. Harten // Journal of Computational Physics. — 1983. — Vol. 49. — P. 357—393.

116. *Harten*, *A.* Adaptive multiresolution schemes for shock computations / A. Harten // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 115. — P. 319—338.

117. *Harten*, *A.* On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation law / A. Harten, P. Lax, B. van Leer // SIAM Review. — 1983. — Vol. 25. — P. 35—61.

118. *Holmstrom*, *M.* Solving hyperbolic PDEs using interpolating wavelets / M. Holmstrom // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1999. — Vol. 21, no. 2. — P. 405—420.

119. *Holmstrom*, *M.* Adaptive wavelet methods for hyperbolic PDEs / M. Holmstrom, J. Walden // Journal of Scientific Computing. — 1998. — Vol. 13. — P. 19—49.

120. *Hsu*, *C. T.* Thermal dispersion in a porous medium / C. T. Hsu, P. Cheng // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1990. — Vol. 33. — P. 1587—1597.

121. *Hunt*, *J. C. R.* Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows / J. C. R. Hunt, A. Wray, P. Moin // Center for Turbulence Research Report. — 1988. — Vol. CTR—S88.

122. *Ivanov*, *M.* Hydrogen-oxygen flame acceleration and transition to detonation in channels with no-slip walls for a detailed chemical reaction model / M. Ivanov, A. Kiverin, M. Liberman // Physical Review E. — 2011. — May. — Vol. 83, no. 5. — P. 1—16.

123. *Jause-Labert*, *C.* Numerical validation of the volume penalization method in three-dimensional pseudo-spectral simulations / C. Jause-Labert, F. S. Godeferd, B. Favier // Computers and Fluids. — 2012. — Vol. 67. — P. 41—56.

124. *Jawerth*, *B.* An overview of wavelet-based multiresolution analyses / B. Jawerth, W. Sweldens // SIAM Review. — 1994. — Sept. — Vol. 36, no. 3. — P. 377—412.

125. *Kane*, *C.* Symplectic-energy-momentum preserving variational intgerator / C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz // Journal of Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 40.

126. *Kane*, *C.* Variational integrators and the newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical system / C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz, M. West // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 49. — P. 1295—1325.

127. *Karni*, *S.* Hybrid multifluid algorithms / S. Karni // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1996. — Sept. — Vol. 17, no. 5. — P. 1019—1039.

128. *Kassoy*, *D. R.* Detonation initiation on the microsecond time scale: DDTs / D. R. Kassoy, J. A. Kuehn, M. W. Nabity, J. F. Clarke // Combustion Theory and Modelling. — 2008. — Nov. — Vol. 12, no. 6. — P. 1009—1047.

129. *Kassoy*, *D. R.* The response of a compressible gas to extremely rapid transient, spatially resolved energy addition: an asymptotic formulation / D. R. Kassoy // Journal of Engineering Mathematics. — 2010. — Aug. — Vol. 68, no. 3/4. — P. 249—262.

130. *Kassoy*, *D. R.* Non-diffusive ignition of a gaseous reactive mixture following time-resolved, spatially distributed energy deposition / D. R. Kassoy // Combustion Theory and Modelling. — 2014. — Jan. — Vol. 18, no. 1. — P. 1—16.

131. *Kaviany*, *M.* Principles of heat transfer in porous media / M. Kaviany. — Springer-Verlag, 1991.

132. *Keetels*, *G. H.* Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible Navier-Stokes equations with volume-penalization: convergence of a dipole-wall collision / G. H. Keetels, U. D'Ortona, W. Kramer, H. J. H. Clercx, K. Schneider, G. J. F. Van Heijst // Journal of Computational Physics. — 2007. — Dec. — Vol. 227, no. 2. — P. 919—945.

133. *Kentzer*, *C. P.* Transonic flows past a circular cylinder / C. P. Kentzer // Journal of Computational Physics. — 1970. — Jan. — Vol. 6. — P. 168—182.

134. *Kessler*, *D. A.* Simulations of flame acceleration and deflagration-to-detonation transitions in methane–air systems / D. A. Kessler, V. N. Gamezo, E. S. Oran // Combustion and Flame. — 2010. — Nov. — Vol. 157, no. 11. — P. 2063—2077.

135. *Kevlahan*, *N. K. R.* Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkman Penalization / N. K. R. Kevlahan, J. M. Ghidaglia // European Journal of Mechanics B Fluids. — 2001. — Vol. 20, no. 3. — P. 333—350.

136. *Kevlahan*, *N. K. R.* Suppression of three-dimensional flow instabilities in tube bundles / N. K. R. Kevlahan, J. Wadsley. — 2005.

137. *Kevlahan*, *N. K. R.* WAVETRISK-1.0: an adaptive wavelet hydrostatic dynamical core / N. K. R. Kevlahan, T. Dubos // Geoscientific Model Development. — 2019. — Nov. — Vol. 12, no. 11. — P. 4901—4921.

138. *Khadra*, *K.* Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations / K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, J. P. Caltagirone // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2000. — Vol. 34. — P. 651—684.

139. *Khokhlov*, *A.* Numerical simulation of deflagration-to-detonation transition: the role of shock–flame interactions in turbulent flames / A. Khokhlov, E. Oran, G. Thomas // Combustion and Flame. — 1999. — Apr. — Vol. 117, no. 1/2. — P. 323—339.

140. *Khokhlov*, *A. M.* Numerical simulation of detonation initiation in a flame brush: the role of hot spots / A. M. Khokhlov, E. S. Oran // Combustion and Flame. — 1999. — Dec. — Vol. 119, no. 4. — P. 400—416.

141. *Kolomenskiy*, *D.* A Fourier spectral method for the Navier–Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles / D. Kolomenskiy, K. Schneider // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228, no. 16. — P. 5687—5709.

142. *Koumoutsakos*, *P.* High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods / P. Koumoutsakos, A. Leonard // Journal of Fluid Mechanics. — 1995. — Vol. 296. — P. 1—38.

143. *Kutil*, *R.* Parallel adaptive wavelet analysis / R. Kutil, A. Uhl // Future generation computer systems - the international journal of grid computing and escience. — 2001. — Sept. — Vol. 18, no. 1. — P. 97—106.

144. *Lai*, *M. C.* An immersed boundary method with formal second order accuracy and reduced numerical viscosity / M. C. Lai, C. S. Peskin // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 160. — P. 705—719.

145. *Laik*, *O. A.* Direct simulation of acoustic scattering by two- and three-dimensional bodies / O. A. Laik, P. J. Morris // Journal of Aircraft. — 2000. — Vol. 37. — P. 68—75.

146. *Laney*, *C. B.* Computational gasdynamics / C. B. Laney. — New York : Cambridge University Press, 1998.

147. *Lemarié*, *P. G.* Ondelettes et bases hilbertiennes / P. G. Lemarié, Y. Meyer // Revista Matematica Iberoamericana. — 1986. — Vol. 1/2. — P. 1—18.

148. *Lew*, *A.* Asynchronous variational integrators / A. Lew, J. E. Marsden, M. Ortiz, M. West // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2003. — Vol. 167. — P. 85—146.

149. *Liandrat*, *J.* Resolution of the 1D regularized Burgers equation using a spatial wavelet approximation : tech. rep. / J. Liandrat, P. Tchamitchian ; NASA Contractor Report 187480, ICASE Report 90-83, NASA Langley Research Center, Hampton VA 23665-5225. — 1990.

150. *Linnick*, *M. N.* A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains / M. N. Linnick, H. F. Fasel // Journal of Computational Physics. — 2005. — Vol. 204. — P. 157—192.

151. *Liou*, *M. S.* A sequel to AUSM: AUSM(+) / M. S. Liou // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 129, no. 2. — P. 364—382.

152. *Liou*, *M. S.* A new flux splitting scheme / M. S. Liou, C. J. Steffen // Journal of Computational Physics. — 1993. — Vol. 107, no. 1. — P. 23—39.

153. *Liu*, *X. D.* Weighted essentially nonoscillatory schemes / X. D. Liu, S. Osher, T. Chan // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 115, no. 1. — P. 200—212.

154. *Livescu*, *D.* Compressibility effects on the Rayleigh-Taylor instability growth between immiscible fluids / D. Livescu // Physics of Fluids. — 2004. — Vol. 16. — P. 118—127.

155. *Lundgren*, *T. S.* Linearly forced isotropic turbulence / T. S. Lundgren // Annual Research Briefs. — 2003. — P. 461—473.

156. *Luo*, *S. C.* Characteristics of square cylinder wake transition flows / S. C. Luo, Y. T. Chew, Y. T. Ng // Physics of Fluids. — 2003. — Vol. 15, no. 9. — P. 2549—2559.

157. *Lyn, D. A.* A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent flow near wake of a square cylinder / D. A. Lyn, S. Einav, W. Rodi, J. H. Park // Journal of Fluid Mechanics. — 1995. — Vol. 304. — P. 285—319.

158. *Lyn, D. A.* The flapping shear layer formed by flow separation from the forward of a square cylinder / D. A. Lyn, W. Rodi // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 267. — P. 353—376.

159. *Maday, Y.* Dynamic adaptivity using wavelets basis for the approximation of partial-differential equations / Y. Maday, V. Perrier, J. C. Ravel // Comptes Rendus Acad. Sci. Ser. I-Math. — 1991. — Feb. — Vol. 312, no. 5. — P. 405—410.

160. *Maday, Y.* Adaptativité par ondelettes: conditions aux limites et dimensions supérieures / Y. Maday, J. C. Ravel // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. — 1992. — Vol. 315. — P. 85—90.

161. *Mallat, S.* Multiresolution approximation and orthonormal wavelet basis of $L^2(I\!R)$ / S. Mallat // Transactions of the American Mathematical Society. — 1989. — Vol. 315. — P. 69—87.

162. *Mallat, S.* A wavelet tour of signal processing, third edition: the sparse way / S. Mallat. — 3rd. — Academic Press, Inc., 2008.

163. *Marino, F.* A parallel implementation of the 2-D discrete wavelet transform without interprocessor communications / F. Marino, V. Piuri, E. E. Swartzlander // IEEE transactions on signal processing. — 1999. — Nov. — Vol. 47, no. 11. — P. 3179—3184.

164. *Marsden, J. E.* The anisotropic Lagrangian averaged Euler and Navier-Stokes equations / J. E. Marsden, S. Shkoller // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2003. — Vol. 166. — P. 27—46.

165. *Marsden, J. E.* Discrete mechanics and variational integrators / J. E. Marsden, M. West // Acta Numerica. — 2001. — P. 357—514.

166. *Martin, B. K.* Spectra of decaying turbulence in a soap film / B. K. Martin, X. L. Wu, W. I. Goldburg, M. A. Rutgers // Physical Review Letters. — 1998. — Vol. 80, no. 18. — P. 3964—3967.

167. *Mastorakos, E.* Numerical simulations of autoignition in turbulent mixing flows / E. Mastorakos, T. A. Baritaud, T. J. Poinsot // Combustion and Flame. — 1997. — Vol. 109. — P. 198—223.

168. *Mavriplis*, *D. J.* Accurate multigrid solution of the Euler equations on unstructured and adaptive meshes / D. J. Mavriplis // AIAA Journal. — 1990. — Vol. 28. — P. 213—221.

169. *Mazaheri*, *K.* Diffusion and hydrodynamic instabilities in gaseous detonations / K. Mazaheri, Y. Mahmoudi, M. I. Radulescu // Combustion and Flame. — 2012. — June. — Vol. 159, no. 6. — P. 2138—2154.

170. *Meyer*, *Y.* Ondelettes et opérateurs / Y. Meyer. — Paris : Hermann, 1990.

171. *Meyer*, *Y.* Ondelettes sur l'intervalle / Y. Meyer // Revista Matematica Iberoamericana. — 1991. — Vol. 7, no. 2. — P. 115—133.

172. *Mittal*, *R.* Immersed boundary methods / R. Mittal, G. Iaccarino // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 37. — P. 239—261.

173. *Monasse*, *P.* Orthonormal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions / P. Monasse, V. Perrier // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1998. — July. — Vol. 29, no. 4. — P. 1040—1065.

174. *Muller*, *S.* Adaptive multiscale schemes for conversation laws. Vol. 27 / S. Muller. — Springer, 2003. — (Lecture Notes in Computational Science and Engineering).

175. *Müller*, *S.* Fully adaptive multiscale schemes for conservation laws employing locally varying time stepping / S. Müller, Y. Stiriba // Journal of Scientific Computing. — 2007. — Vol. 30, no. 3. — P. 493—531.

176. *Nield*, *D. A.* Convection in porous media / D. A. Nield, A. Bejan. — 2nd. — Springer, 1999.

177. *Nielsen*, *O. M.* Parallel performance of fast wavelet transforms / O. M. Nielsen, M. Hegland // International Journal of High Speed Computing. — 2000. — Mar. — Vol. 11, no. 1. — P. 55—74.

178. *Nithiarasu*, *P.* Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm / P. Nithiarasu, O. C. Zienkiewicz, B. V. K. S. Sai, K. Morgan, R. Codina, M. Vazquez // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1998. — Dec. — Vol. 28, no. 9. — P. 1325—1353.

179. *Okajima*, *A.* Strouhal numbers of rectangular cylinders / A. Okajima // Journal of Fluid Mechanics. — 1982. — Vol. 123. — P. 379—398.

180. *Oppenheim*, *A. K.* A parametric study of self-similar blast waves / A. K. Oppenheim, A. L. Kuhl, E. A. Lundstrom, M. M. Kamel // Journal of Fluid Mechanics. — 1972. — Vol. 52, no. 4. — P. 657—682.

181. *Oran*, *E. S.* Deflagrations, hot spots, and the transition to detonation / E. S. Oran, A. M. Khokhlov // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1999. — Dec. — Vol. 357, no. 1764. — P. 3539—3551.

182. *Oran*, *E. S.* Origins of the deflagration-to-detonation transition in gas-phase combustion / E. S. Oran, V. N. Gamezo // Combustion and Flame. — 2007. — Jan. — Vol. 148, no. 1/2. — P. 4—47.

183. *Paolucci*, *S.* WAMR: an adaptive wavelet method for the simulation of compressible reacting flow. Part II. The parallel algorithm / S. Paolucci, Z. J. Zikoski, T. Grenga // Journal of Computational Physics. — 2014. — Vol. 272. — P. 842—864.

184. *Pasquetti*, *R.* A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows / R. Pasquetti, R. Bwemba, L. Cousin // Applied Numerical Mathematics. — 2007. — Vol. 58. — P. 946—954.

185. *Peng*, *G. Z.* Vortex-accelerated secondary baroclinic vorticity deposition and late-intermediate time dynamics of a two-dimensional Richtmyer-Meshkov interface / G. Z. Peng, N. J. Zabusky, S. Zhang // Physics of Fluids. — 2003. — Dec. — Vol. 15, no. 12. — P. 3730—3744.

186. *Perrier*, *V.* Multiplication of short wavelet series using connection coefficients / V. Perrier, M. V. Wickerhauser // Advances in Wavelets / ed. by K.-S. Lau. — Springer-Verlag, Singapore, 1999. — P. 77—101.

187. *Persillon*, *H.* Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier–Stokes simulation / H. Persillon, M. Braza // Journal of Fluid Mechanics. — 1998. — Vol. 365. — P. 23—88.

188. *Peskin*, *C. S.* Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion / C. S. Peskin // Ph.D. Thesis, Albert Einstein College of Medicine, 1972. — 1972.

189. *Peskin*, *C. S.* The immersed boundary method / C. S. Peskin // Acta Numerica. — 2002. — P. 479—517.

190. *Peskin*, *C.* Numerical analysis of blood flow in the heart / C. Peskin // Journal of Computational Physics. — 1977. — Vol. 25, no. 3. — P. 220—252.

191. *Phillips*, *O. M.* Flow and reactions in permeable rocks / O. M. Phillips. — Cambridge University Press, 1991.

192. *Poinsot*, *T.* Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows / T. Poinsot, S. Lele // Journal of Computational Physics. — 1992. — Vol. 101. — P. 104—129.

193. *Powers*, *J.* Review of multiscale modeling of detonation / J. Powers // Journal of Propulsion and Power. — 2006. — Nov. — Vol. 22, no. 6. — P. 1217—1229.

194. *Press*, *W. H.* Numerical Recipes in C: the art of scientific computing / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997.

195. *Prosser*, *R.* On the use of wavelets in computational combustion / R. Prosser, R. S. Cant // Journal of Computational Physics. — 1998. — Vol. 147. — P. 337—361.

196. *Purvis*, *J. W.* Prediction of critical mach number for store configurations / J. W. Purvis, J. E. Burkhalter // AIAA Journal. — 1979. — Vol. 17(11). — P. 1170—1177.

197. *Radulescu*, *M. I.* The hydrodynamic structure of unstable cellular detonations / M. I. Radulescu, G. J. Sharpe, C. K. Law, J. H. S. Lee // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — May. — Vol. 580. — P. 31.

198. *Radulescu*, *M. I.* The ignition mechanism in irregular structure gaseous detonations / M. I. Radulescu, G. J. Sharpe, J. H. S. Lee, C. B. Kiyanda, A. J. Higgins, R. K. Hanson // Proceedings of the Combustion Institute. — 2005. — Jan. — Vol. 30, no. 2. — P. 1859—1867.

199. *Ramière*, *I.* A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions / I. Ramière, P. Angot, M. Belliard // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2007. — Vol. 196. — P. 766—781.

200. *Rastigejev*, *Y. A.* Wavelet-based adaptive multiresolution computation of viscous reactive flows / Y. A. Rastigejev, S. Paolucci // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2006. — Nov. — Vol. 52, no. 7. — P. 749—784.

201. *Robichaux*, *J.* Three-dimensional Floquet instability of the wake of square cylinder / J. Robichaux, S. Balachandar, S. P. Vanka // Physics of Fluids. — 1999. — Vol. 11. — P. 560—578.

202. *Roe*, *P. L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes / P. L. Roe // Journal of Computational Physics. — 1981. — Vol. 43, no. 2. — P. 357—372.

203. *Romick*, *C. M.* The effect of diffusion on the dynamics of unsteady detonations / C. M. Romick, T. D. Aslam, J. M. Powers // Journal of Fluid Mechanics. — 2012. — Apr. — Vol. 699. — P. 453—464.

204. *Rosales*, *C.* Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: physical space implementations and convergence properties / C. Rosales, C. Meneveau // Physics of Fluids. — 2005. — Vol. 17. — P. 1—8.

205. *Rossinelli*, *D.* Multicore/multi-GPU accelerated simulations of multiphase compressible flows using wavelet adapted grids / D. Rossinelli, B. Hejazialhosseini, D. G. Spampinato, P. Koumoutsakos // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2011. — Vol. 33, no. 2. — P. 512—540.

206. *Roy*, *G. D.* Pulse detonation propulsion: challenges, current status, and future perspective / G. D. Roy, S. M. Frolov, A. A. Borisov, D. W. Netzer // Progress in Energy and Combustion Science. — 2004. — Jan. — Vol. 30, no. 6. — P. 545—672.

207. *Ruetsch*, *G. R.* Effects of heat release on triple flames / G. R. Ruetsch, L. Vervisch, A. Liñán // Physics of Fluids. — 1995. — Vol. 7. — P. 1447—1454.

208. *Saad*, *Y.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M. H. Schultz // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1986. — Vol. 7, no. 3. — P. 856—869.

209. *Saha*, *A. K.* Three-dimensional study of flow past a square cylinder at low Reynolds numbers / A. K. Saha, G. Biswas, K. Muralidhar // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2003. — Vol. 24. — P. 54—66.

210. *Saha*, *A. K.* Experimental study of flow past a square cylinder at high Reynolds numbers / A. K. Saha, K. Muralidhar, G. Biswas // Exp. Fluids. — 2000. — Vol. 29. — P. 553—563.

211. *Saiki*, *E. M.* Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method / E. M. Saiki, S. Biringen // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 123. — P. 450—465.

212. *Schneider*, *K.* Adaptive wavelet simulation of a flow around an impulsively started cylinder using penalisation / K. Schneider, M. Farge // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2002. — Vol. 12. — P. 374—380.

213. *Schneider*, *K.* Comparison of an adaptive wavelet method and nonlinearly filtered pseudo-spectral methods for two dimensional turbulance / K. Schneider, N. K. R. Kevlahan, M. Farge // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 1997. — Vol. 9. — P. 191—206.

214. *Schröder*, *P.* Spherical wavelets: texture processing / P. Schröder, W. Sweldens // Rendering Techniques '95 / ed. by P. Hanrahan, W. Purgathofer. — Wien, New York : Springer Verlag, 08/1995. — P. 252—263.

215. Second computational aeroacoustics (CAA) workshop on benchmark problems / ed. by C. K. W. Tam, J. C. Hardin. — Langley Research Center, Hampton, VA : NASA Conference Publication 3352, 1997.

216. *Sethian*, *J. A.* Level set methods / J. A. Sethian. — Cambridge, England : Cambridge University Press, 1996.

217. *Sheard*, *G. J.* Cylinders with square cross-section: wake instabilities with incidence angle variation / G. J. Sheard, M. J. Fitzgerald, K. Ryan // Journal of Fluid Mechanics. — 2009. — Vol. 630. — P. 43—69.

218. *Shiels*, *D.* Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters / D. Shiels, A. Leonard, A. Roshko // Journal of Fluids and Structures. — 2001. — Vol. 15. — P. 3—21.

219. *Sidilkover*, *D.* A multigrid solver for the steady-state Navier-Stokes equations using the pressure-poisson formulation / D. Sidilkover, U. M. Ascher // Computational and Applied Mathematics. — 1995. — Vol. 14. — P. 21—35.

220. *Sileem*, *A. A.* Thermally initiated detonation through deflagration to detonation transition / A. A. Sileem, D. R. Kassoy, A. K. Hayashi // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1991. — Dec. — Vol. 435, no. 1895. — P. 459—482.

221. *Sjogreen*, *B.* Multiresolution wavelet based adaptive numerical dissipation control for shock-turbulence computation : tech. rep. / B. Sjogreen, H. C. Yee ; RIACS Technical Report TR01.01, NASA Ames Research Center. — 2000.

222. *Smagorinsky*, *J. S.* General circulation experiments with the primitive equations / J. S. Smagorinsky // Mon. Weather Rev. — 1963. — Vol. 91. — P. 99—164.

223. *Sohankar*, *A.* Large eddy simulation of flow past a square cylinder: comparison of different subgrid scale models / A. Sohankar, L. Davidson, C. Norberg // Journal of Fluids Engineering. — 2000. — Vol. 122. — P. 39—47.

224. *Sohankar*, *A.* Simulation of three-dimensional flow around a square cylinder at moderate Reynolds numbers / A. Sohankar, C. Norberg, L. Davidson // Physics of Fluids. — 1999. — Vol. 11. — P. 288—306.

225. *Spalart*, *P. R.* Detached-eddy simulation / P. R. Spalart // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2009. — Vol. 41. — P. 181—202.

226. *Stockie*, *J. M.* A moving mesh method for one-dimensional hyperbolic conservation laws / J. M. Stockie, J. A. Mackenzie, R. D. Russell // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2001. — Vol. 22, no. 5. — P. 1791—1813.

227. *Strang*, *G.* Wavelets and filter banks / G. Strang, T. Nguyen. — Wellesley, MA : Wellesley-Cambridge Press, 1996.

228. *Strengert*, *M.* Large volume visualization of compressed time-dependent datasets on GPU clusters / M. Strengert, M. Magallon, D. Weiskopf, S. Guthe, T. Ertl // Parallel Comput. — 2005. — Feb. — Vol. 31, no. 2. — P. 205—219.

229. *Sweby*, *P. K.* High-resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation-laws / P. K. Sweby // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1984. — Vol. 21, no. 5. — P. 995—1011.

230. *Sweldens*, *W.* The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets / W. Sweldens // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1996. — Vol. 3, no. 2. — P. 186—200.

231. *Sweldens*, *W.* The lifting scheme: a construction of second generation wavelets / W. Sweldens // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1998. — Vol. 29, no. 2. — P. 511—546.

232. *Tenllado*, *C.* Parallel implementation of the 2D discrete wavelet transform on Graphics Processing Units: Filter Bank versus Lifting / C. Tenllado, J. Setoain, M. Prieto, L. Pinuel, F. Tirado // IEEE transactions on parallel and distributed systems. — 2008. — Mar. — Vol. 19, no. 3. — P. 299—310.

233. *Thompson*, *J. F.* Boundary fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations – A review / J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin // Journal of Computational Physics. — 1982. — Vol. 47. — P. 1—108.

234. *Toro*, *E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics / E. F. Toro. — 3rd. — New York : Springer-Verlag, 2009.

235. *Tremblay*, *P.* Control of discretization error for time-continuous space-time FEM through mesh movement / P. Tremblay, Y. Bourgault, S. Tavoularis // Computational Fluid and Solid Mechanics 2003, Vols 1 and 2, Proceedings / ed. by K. Bathe. — 2003. — P. 2156—2159.

236. *Tritton*, *D. J.* Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers / D. J. Tritton // Journal of Fluid Mechanics. — 1959. — Vol. 6. — P. 547—567.

237. *Tseng*, *Y. H.* A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry / Y. H. Tseng, J. H. Ferziger // Journal of Computational Physics. — 2003. — Vol. 192. — P. 593—623.

238. *Vafai*, *K.* Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media / K. Vafai, C. L. Tien // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1981. — Vol. 24. — P. 195—203.

239. *van der Laan*, *W. J.* Accelerating wavelet lifting on graphics hardware using CUDA / W. J. van der Laan, A. C. Jalba, J. B. T. M. Roerdink // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. — 2011. — Jan. — Vol. 22, no. 1. — P. 132—146.

240. *van der Vorst*, *H. A.* BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. van der Vorst // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1992. — Vol. 13, no. 2. — P. 631—644.

241. *van Leer*, *B.* Towards ultimate conservative difference scheme. 2. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme / B. van Leer // Journal of Computational Physics. — 1974. — Vol. 14, no. 4. — P. 361—370.

242. *van Leer*, *B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to godunov's method / B. van Leer // Journal of Computational Physics. — 1979. — Vol. 32, no. 1. — P. 101—136.

243. *Vanella*, *M.* A direct-forcing embedded- method with adaptive mesh refinement for fluid-structure interaction problems / M. Vanella, P. Rabenold, E. Balaras // Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, no. 18. — P. 6427—6449.

244. *Verfurth*, *R.* A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques / R. Verfurth // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1994. — Vol. 50. — P. 67—83.

245. *Vincent*, *A.* The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence / A. Vincent, M. Meneguzzi // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 225. — P. 1—20.

246. *Wang*, *A. B.* On the relationship of effective Reynolds number and Strouhal number for the laminar vortex shedding of a heated circular cylinder / A. B. Wang, Z. Trávníček, K. C. Chia // Physics of Fluids. — 2000. — Vol. 12. — P. 1401—1410.

247. *Warren*, *G. P.* Grid convergence for adaptive methods / G. P. Warren, W. K. Anderson, J. L. Thomas, S. L. Krist // AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference. — 1991. — P. 729—741.

248. *Wendlandt*, *J. M.* Mechanical integrators derived from a discrete variational principle / J. M. Wendlandt, J. E. Marsden // Physica D. — 1997. — Vol. 106. — P. 223—246.

249. *Wesseling*, *P.* An introduction to multigrid methods / P. Wesseling. — Chichester : John Wiley & Sons, 1992.

250. *Williams*, *F. A.* Combustion Theory / F. A. Williams. — NY : Addison-Wesley, 1986.

251. *Williamson*, *C. H. K.* Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder / C. H. K. Williamson // Physics of Fluids. — 1988. — Vol. 31. — P. 2742.

252. *Williamson*, *C. H. K.* Vortex dynamics in the cylinder wake / C. H. K. Williamson // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1996. — Vol. 28. — P. 477—539.

253. *Wirasaet*, *D.* Adaptive wavelet method for incompressible flows in complex domains / D. Wirasaet, S. Paolucci // Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. — 2005. — July. — Vol. 127, no. 4. — P. 656—665.

254. *Wooding*, *R. A.* Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium / R. A. Wooding // Journal of Fluid Mechanics. — 1957. — Vol. 2. — P. 273—285.

255. *Woodward*, *P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks / P. Woodward, P. Colella // Journal of Computational Physics. — 1984. — Vol. 54. — P. 115—173.

256. *Xiao*, *H.* Coupling of solvers with non-conforming computational domains in a dual-mesh hybrid LES/RANS framework / H. Xiao, Y. Sakai, R. Henniger, M. Wild, P. Jenny // Computers & Fluids. — 2013. — Dec. — Vol. 88. — P. 653—662.

257. *Xiao*, *H.* A consistent dual-mesh framework for hybrid LES/RANS modeling / H. Xiao, P. Jenny // Journal of Computational Physics. — 2012. — Feb. — Vol. 231, no. 4. — P. 1848—1865.

258. *Yakhot*, *V.* Anomalous scaling of structure functions and dynamic constraints on turbulence simulations / V. Yakhot, K. R. Sreenivasan // Journal of Statistical Physics. — 2005. — Vol. 121, no. 5/6. — P. 823—841.

259. *Yamaleev*, *N. K.* On accuracy of adaptive grid methods for captured shocks / N. K. Yamaleev, M. H. Carpenter // Journal of Computational Physics. — 2002. — Vol. 181, no. 1. — P. 280—316.

260. *Yee*, *H. C.* Construction of explicit and implicit symmetrical TVD schemes and their applications / H. C. Yee // Journal of Computational Physics. — 1987. — Jan. — Vol. 68, no. 1. — P. 151—179.

261. *Zeeuw*, *D. D.* An adaptively refined cartesian mesh solver for the Euler equations / D. D. Zeeuw, K. G. Powell // Journal of Computational Physics. — 1993. — Vol. 104. — P. 56—68.

262. *Абалакин*, *И. В.* Моделирование нестационарного турбулентного течения вокруг цилиндра методом погруженных границ / И. В. Абалакин, А. П. Дубень, Н. С. Жданова, Т. К. Козубская // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 5. — С. 117—133.

263. *Абалакин*, *И. В.* Метод погруженных границ на деформируемых неструктурированных сетках для моделирования аэроакустики крылового профиля / И. В. Абалакин, А. П. Дубень, Н. С. Жданова, Т. К. Козубская, Л. Н. Кудрявцева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 12. — С. 2046—2059.

264. *Абалакин*, *И. В.* Метод погруженных границ для численного моделирования невязких сжимаемых течений / И. В. Абалакин, Н. С. Жданова, Т. К. Козубская // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 9. — С. 1462—1471.

265. *Аксенова*, *А. Е.* Численное моделирование свободно конвективной тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями / А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов // Препринт NSI-7-94 Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук. — Москва, 1994.

266. *Бахвалов*, *Н. С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. — Т. 5, № 5. — С. 861—883.

267. *Бугров*, *А. Н.* Метод фиктивных областей в уравнениях относительно функции тока для вязкой несжимаемой жидкости / А. Н. Бугров // Препринт Института математики Сибирского отделения академии наук СССР. — Новосибирск, 1977.

268. *Бугров*, *А. Н.* Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа / А. Н. Бугров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Т. II. — ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1978. — С. 24—35.

269. *Бугров*, *А. Н.* Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье-Стокса / А. Н. Бугров, Ш. С. Смагулов // Математические модели течений жидкости: Сборник научных трудов / Институт теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Академии наук СССР. — Новосибирск, 1978. — С. 79—90.

270. *Вабищевич*, *П. Н.* Численная реализация метода фиктивных областей для нестационарных уравнений Навье-Стокса / П. Н. Вабищевич // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. — 1985. — Т. 16, № 6. — С. 19—37.

271. *Вабищевич*, *П. Н.* Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П. Н. Вабищевич. — Издательство Московского университета, 1991.

272. *Вабищевич*, *П. Н.* Численное решение стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости / П. Н. Вабищевич, Т. Н. Вабищевич // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 5. — С. 852—860.

273. *Вабищевич*, *П. Н.* Численное решение стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости на основе метода фиктивных областей / П. Н. Вабищевич, Т. Н. Вабищевич // Вычислительная математика и математическое обеспечение ЭВМ. — Издательство Московского университета, 1985. — С. 255—262.

274. *Вабищевич*, *П. Н.* Численное решение сопряженных задач тепло- и массопереноса с учетом фазового перехода / П. Н. Вабищевич, О. П. Илиев // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 7. — С. 1127—1132.

275. *Василевский*, *Ю. В.* Адаптивный алгоритм построения квазиоптимальных сеток / Ю. В. Василевский, К. Н. Липников // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 9. — С. 1532—1551.

276. *Вишик*, *М. И.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи математических наук. — 1960. — Т. 15, № 4. — С. 27—95.

277. *Владимиров*, *В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — 5-е издание. — Наука, 1988.

278. *Гаранжа*, *В. А.* Управление метрическими свойствами пространственных отображений / В. А. Гаранжа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 6. — С. 818—829.

279. *Гаранжа*, *В. А.* Построение гибридных расчетных сеток Вороного. Алгоритмы и нерешенные проблемы / В. А. Гаранжа, Л. Н. Кудрявцева, В. О. Цветкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 12. — С. 2024—2044.

280. *Годунов*, *С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С. К. Годунов // Математический Сборник. — 1959. — Т. 47, № 89. — С. 271—306.

281. *Коновалов*, *А. Н.* Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учётом капиллярных сил / А. Н. Коновалов // Численные методы механики сплошной среды. — 1972. — Т. 3, № 5. — С. 52—67.

282. *Лебедев*, *В. И.* Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I / В. И. Лебедев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. — Т. 4, № 3. — С. 449—465.

283. *Лисейкин*, *В. Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток / В. Д. Лисейкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 3—41.

284. *Лойцянский*, *Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — Наука, 1978.

285. *Мызникова*, *Б. И.* Применение метода фиктивных областей для решения уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока и вихрь скорости / Б. И. Мызникова, Е. Л. Тарунин // Исследование тепловой конвекции и теплопередачи: Уральский научный центр академии наук СССР. — Свердловск, 1981. — С. 45—57.

286. *Орунханов*, *М. К.* Метод фиктивных областей для уравнения Навье-Стокса в терминах функции тока и вихря скоростей с неоднородными граничными условиями / М. К. Орунханов, Ш. С. Смагулов // Вычислительные технологии. Новосибирск: Сибирского отделения Российской академии наук. Т. 5. — Новосибирск, 2000. — С. 46—53.

287. *Саульев*, *В. К.* Об одном методе автоматизации решения краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах / В. К. Саульев // Доклады Академии Наук СССР. — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 497—500.

288. *Саульев*, *В. К.* О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислителных машинах методом фиктивных областей / В. К. Саульев // Сибирский математический журнал. — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 912—925.

289. *Смагулов*, *Ш.* Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье-Стокса / Ш. Смагулов // Препринт / Сибирского отделения академии наук СССР, Вычислительный центр. Т. 68. — Новосибирск, 1979.

290. *Федоренко*, *Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений / Р. П. Федоренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1961. — Т. 1, № 5. — С. 922—927.

291. *Федоренко*, *Р. П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса / Р. П. Федоренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. — Т. 4, № 3. — С. 559—564.

Публикации автора по теме диссертации

292. *Alam*, *J.* Simultaneous space–time adaptive wavelet solution of nonlinear partial differential equations / J. Alam, N. K. R. Kevlahan, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2006. — Vol. 214, no. 2. — P. 829—857.

293. *Brown-Dymkoski*, *E.* A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows / E. Brown-Dymkoski, N. Kasimov, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2014. — Vol. 262. — P. 344—357.

294. *Brown-Dymkoski*, *E.* Characteristic-based volume penalization method for arbitrary Mach flows around solid obstacles / E. Brown-Dymkoski, N. Kasimov, O. V. Vasilyev // Direct and Large-Eddy Simulation IX / ed. by J. Frohlich, H. Kuerten, B. Geurts, V. Armenio. — Springer, 2015. — P. 109—115. — (ERCOFTAC Series).

295. *Brown-Dymkoski*, *E.* Adaptive-anisotropic wavelet collocation method on general curvilinear coordinate systems / E. Brown-Dymkoski, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2017. — Vol. 333. — P. 414—426.

296. *De Stefano*, *G.* Stochastic coherent adaptive large eddy simulation of forced isotropic turbulence / G. De Stefano, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — Mar. — Vol. 646. — P. 453—470.

297. *De Stefano*, *G.* A fully adaptive wavelet-based approach to homogeneous turbulence simulation / G. De Stefano, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2012. — Vol. 695. — P. 149—172.

298. *De Stefano*, *G.* Wavelet-based adaptive simulations of three-dimensional flow past a square cylinder / G. De Stefano, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 748. — P. 433—456.

299. *De Stefano*, *G.* Wavelet-based adaptive unsteady RANS modeling of external flows / G. De Stefano, O. V. Vasilyev, E. Brown-Dymkoski // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Vol. 837. — P. 765—787.

300. *De Stefano*, *G.* Localized dynamic kinetic energy-based models for stochastic coherent adaptive large eddy simulation / G. De Stefano, O. V. Vasilyev, D. E. Goldstein // Physics of Fluids. — 2008. — Vol. 20, no. 4. — P. 045102.1—045102.14.

301. *De Stefano*, *G.* Wavelet-based adaptive large-eddy simulation of supersonic channel flow / G. De Stefano, E. Brown-Dymkoski, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2020. — Vol. 901. — A13.

302. *De Stefano*, *G.* Wall-resolved wavelet-based adaptive large-eddy simulation of bluff-body flows with variable thresholding / G. De Stefano, A. Nejadmalayeri, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Feb. — Vol. 788. — P. 303—336.

303. *De Stefano*, *G.* Wavelet-based adaptive large-eddy simulation with explicit filtering / G. De Stefano, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2013. — Vol. 238. — P. 240—254.

304. *Ge*, *X.* Wavelet-based adaptive unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations of wall-bounded compressible turbulent flows / X. Ge, O. V. Vasilyev, G. De Stefano, M. Hussaini // AIAA Journal. — 2020. — Apr. — Vol. 58, no. 4. — P. 529—1549.

305. *Ge*, *X.* Wavelet-based adaptive delayed detached eddy simulations for wall-bounded compressible turbulent flows / X. Ge, O. V. Vasilyev, M. Y. Hussaini // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 873. — P. 1116—1157.

306. *Goldstein*, *D. E.* Stochastic coherent adaptive large eddy simulation method / D. E. Goldstein, O. V. Vasilyev // Physics of Fluids. — 2004. — Vol. 16, no. 7. — P. 2497—2513.

307. *Goldstein*, *D. E.* CVS and SCALES simulation of 3D isotropic turbulences / D. E. Goldstein, O. V. Vasilyev, N. K. R. Kevlahan // Journal of Turbulence. — 2005. — Vol. 6, no. 37. — P. 1—20.

308. *Kassoy*, *D.* Detonation initiation on the microsecond time scale: comparative one and two dimensional DDT results obtained from adaptive wavelet collocation numerical methods / D. Kassoy, J. Regele, O. V. Vasilyev // AIAA Paper No. 2007-986. — 2007.

309. *Kevlahan*, *N. K. R.* Scaling of space-time modes with Reynolds number in two-dimensional turbulence / N. K. R. Kevlahan, J. M. Alam, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 570. — P. 217—226.

310. *Kevlahan*, *N. K. R.* An adaptive wavelet collocation method for fluid-structure interaction at high Reynolds numbers / N. K. R. Kevlahan, O. V. Vasilyev // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2005. — Vol. 26, no. 6. — P. 1894—1915.

311. *Kevlahan*, *N. K. R.* An adaptive wavelet method for turbulence in complex geometries / N. K. R. Kevlahan, O. V. Vasilyev, A. Cherhabili // 16th Imacs World Congress 2000, Proceedings, Lausanne - August 21-25, 2000. Vol. 411—439 / ed. by M. Deville, R. Owens. — IMACS, 2000.

312. *Kevlahan*, *N. K. R.* A three-dimensional adaptive wavelet method for fluid-structure interaction / N. K. R. Kevlahan, O. V. Vasilyev, D. E. Goldstein, A. Jay // Proceedings of Direct and Large-Eddy Simulation Workshop 5. — Technical University of Munich, Germany, 2003.

313. *Kevlahan*, *N. K.-R.* An adaptive wavelet method for fluid–structure interaction. / N. K.-R. Kevlahan, O. V. Vasilyev // Direct and Large-Eddy Simulation Workshop 4: University of Twente / ed. by B. J. Geurts, R. Friedrich, O. Métais. — Kluwer, 2001. — P. 253—260.

314. *Liu*, *Q.* Hybrid adaptive wavelet collocation – Brinkman penalization method for unsteady rans simulations of compressible flow around bluff bodies / Q. Liu, O. V. Vasilyev // AIAA Paper No. 2006-3206. — 2006.

315. *Liu*, *Q.* A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries / Q. Liu, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 227, no. 2. — P. 946—966.

316. *Nejadmalayeri*, *A.* Fully adaptive turbulence simulations based on Lagrangian spatio-temporally varying wavelet thresholding / A. Nejadmalayeri, A. Vezolainen, G. De Stefano, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 749. — P. 794—817.

317. *Nejadmalayeri*, *A.* Reynolds number scaling of coherent vortex simulation and stochastic coherent adaptive large eddy simulation / A. Nejadmalayeri, A. Vezolainen, O. V. Vasilyev // Physics of Fluids. — 2013. — Vol. 25. — P. 110823.

318. *Nejadmalayeri*, *A.* Spatially variable thresholding for stochastic coherent adaptive LES / A. Nejadmalayeri, O. V. Vasilyev, A. Vezolainen, G. De Stefano // Direct and Large-Eddy Simulation VIII. Vol. 15 / ed. by H. Kuerten, B. Geurts, V. Armenio, J. Frohlich. — Springer, 2011. — P. 95—100. — (ERCOFTAC Series).

319. *Nejadmalayeri*, *A.* Parallel adaptive wavelet collocation method for PDEs / A. Nejadmalayeri, A. Vezolainen, E. Brown-Dymkoski, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2015. — Vol. 298. — P. 237—253.

320. *Reckinger*, *S. J.* Adaptive wavelet collocation method simulations of Rayleigh–Taylor instability / S. J. Reckinger, D. Livescu, O. V. Vasilyev // Physica Scripta. — 2010. — Vol. T142, no. 014064. — P. 1—6.

321. *Reckinger*, *S. J.* Comprehensive numerical methodology for direct numerical simulations of compressible Rayleigh–Taylor instability / S. J. Reckinger, D. Livescu, O. V. Vasilyev // Journal of Computational Physics. — 2016. — Vol. 313. — P. 181—208.

322. *Regele*, *J.* Numerical modeling of acoustic timescale detonation initiation / J. Regele, D. Kassoy, O. V. Vasilyev // AIAA Paper No. 2008-1037. — 2008.

323. *Regele*, *J. D.* An adaptive wavelet-collocation method for shock computations / J. D. Regele, O. V. Vasilyev // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2009. — Vol. 23, no. 7. — P. 503—518.

324. *Regele*, *J.* Effects of high activation energies on acoustic timescale detonation initiation / J. Regele, D. R. Kassoy, O. V. Vasilyev // Combustion Theory and Modelling. — 2012. — Vol. 16, no. 14. — P. 650—678.

325. *Regele*, *J.* Indirect detonation initiation using acoustic timescale thermal power deposition / J. Regele, D. R. Kassoy, A. Vezolainen, O. V. Vasilyev // Physics of Fluids. — 2013. — Vol. 25. — P. 091113.

326. *Regele*, *J. D.* Evolution of detonation formation initiated by a spatially distributed, transient energy source / J. D. Regele, D. R. Kassoy, M. Aslani, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Sept. — Vol. 802. — P. 305—332.

327. *Schneider*, *K.* Wavelet methods in computational fluid dynamics / K. Schneider, O. V. Vasilyev // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2010. — Vol. 42. — P. 473—503.

328. *Vasilyev*, *O. V.* Solving multi-dimensional evolution problems with localized structures using second generation wavelets / O. V. Vasilyev // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2003. — Vol. 17, no. 2. — P. 151—168.

329. *Vasilyev*, *O. V.* Second generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations / O. V. Vasilyev, C. Bowman // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 165. — P. 660—693.

330. *Vasilyev*, *O. V.* Lagrangian dynamic SGS model for stochastic coherent adaptive large eddy simulation / O. V. Vasilyev, G. De Stefano, D. E. Goldstein, N. K. R. Kevlahan // Journal of Turbulence. — 2008. — Vol. 9, no. 11. — P. 1—14.

331. *Vasilyev*, *O. V.* Hybrid wavelet collocation - Brinkman penalization method for complex geometry flows / O. V. Vasilyev, N. K. R. Kevlahan // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2002. — Vol. 40. — P. 531—538.

332. *Vasilyev*, *O. V.* An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic problems / O. V. Vasilyev, N. K. R. Kevlahan // Journal of Computational Physics. — 2005. — Vol. 206, no. 2. — P. 412—431.

333. *Vasilyev*, *O. V.* A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain / O. V. Vasilyev, S. Paolucci // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 125. — P. 498—512.

334. *Vasilyev*, *O. V.* A fast adaptive wavelet collocation algorithm for multidimensional PDEs / O. V. Vasilyev, S. Paolucci // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 125. — P. 16—56.

335. *Vasilyev*, *O. V.* A multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain / O. V. Vasilyev, S. Paolucci, M. Sen // Journal of Computational Physics. — 1995. — Vol. 120. — P. 33—47.

336. *Vasilyev*, *O. V.* The solution of PDEs using wavelets / O. V. Vasilyev, D. A. Yuen, S. Paolucci // Computers in Physics. — 1997. — Vol. 11, no. 5. — P. 429—435.

337. *Vasilyev*, *O. V.* Adaptive wavelet environment for in silico universal multiscale modeling (AWESUMM) / O. V. Vasilyev, N. K.-R. Kevlahan, D. E. Goldstein, A. V. Vezolainen, J. Regele, A. Nejadmalayeri, S. Reckinger, E. Brown-Dymkoski, O. Rogozin. — 2019. — URL: http://gitlab.com/AWESUMM/wlt_git/wikis/home.

Список рисунков

Список алгоритмов

Список таблиц