

На правах рукописи

**Яковлев Максим Яковлевич**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗИНОКОРДА  
ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре вычислительной механики механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор **Левин Владимир Анатольевич**

Официальные оппоненты:

**Лурье Сергей Альбертович** – доктор технических наук, профессор, Институт прикладной механики РАН, главный научный сотрудник

**Кудинов Алексей Никифорович** – доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственной университет, зав. кафедрой математического моделирования

Ведущая организация: Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН

Защита состоится 19 марта 2015 года в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН по адресу 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, <http://keldysh.ru/council/3/>

Автореферат разослан \_\_\_\_\_

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук Змитренко Николай Васильевич

## **Общая характеристика работы**

В диссертационной работе осуществлена модификация методики оценки эффективных механических характеристик композитных материалов для случая конечных деформаций применительно к резинокорду, разработан алгоритм численного решения задачи расчета эффективных характеристик и выполнена реализация алгоритма в виде программного модуля. С помощью программного модуля были проведены численные эксперименты, анализ результатов которых приведён в работе.

Особенности используемой методики оценки эффективных свойств резинокорда: учёт анизотропии резинокорда и слабосжимаемости резины, проведение моделирования при конечных деформациях и получение эффективных определяющих соотношений в нелинейной форме.

В диссертационной работе сформулирована постановка задачи расчета эффективных характеристик и модифицирована математическая модель эффективного материала. Постановка задачи основывается на соотношениях механики деформируемого твёрдого тела для случая конечных деформаций. Рассмотрен алгоритм численного решения поставленной задачи с помощью метода конечных элементов. Описаны особенности реализации этого алгоритма на языке программирования C++. Проведены численные эксперименты, некоторые результаты которых приведены в работе. Исследовано влияние на эффективные механические свойства резинокордного композита геометрической конфигурации резинокорда (шага нитей корда в слое, угла между нитями в разных слоях), а также механических свойств резины и корда. Анализ результатов показал необходимость учёта конечности деформаций при численной оценке эффективных свойств резинокорда.

При модификации методики учитываются слабосжимаемость и высокоэластичность резины, а также конечность деформаций. Эффективные механические свойства резинокорда вычисляются в нелинейной форме.

Резинокорд представляет собой конструкцию, образованную несколькими наложенными друг на друга слоями обрезиненных нитей корда (используется текстильный корд и металлокорд) – то есть слоями резины, каждый из которых армирован нитями корда. В каждом слое нити корда расположены параллельно, с постоянным шагом. В соседних слоях нити могут располагаться под углом друг к другу. Таким образом, резинокорд является композитным материалом. Модуль упругости нитей корда больше, чем модуль упругости резины, на 2-4 порядка – вследствие этого резинокордный композит является анизотропным материалом. В состав резинокорда входит резина – высокоэластичный слабосжимаемый материал. Всё это необходимо учитывать при численном моделировании его эффективных свойств.

**Актуальность** численной оценки эффективных механических характеристик резинокорда при конечных деформациях обусловлена его использованием при производстве пневматических шин (а также приводных ремней, транспортёрных лент, шлангов высокого давления, рукавов, уплотнительных манжет, резиновых гусениц, резинокордных дорожных покрытий и настилов). Из резинокорда изготавливаются такие детали шины, как каркас и брекер. Каркас является силовой основой шины. Брекер расположен между каркасом и протектором, предназначен для усиления каркаса и смягчения ударных нагрузок на каркас. Резинокордные детали обеспечивают шине сочетание высокой прочности и высокой эластичности. Свойства стенки шины во многом определяются геометрией резинокорда и механическими свойствами резины и корда. В процессе эксплуатации шины каркас и брекер испытывают со стороны дорожного покрытия нагрузки, вызывающие в резинокорде конечные деформации – поэтому актуальным является вычисление эффективных упругих характеристик резинокорда в нелинейном виде.

В процессе проведения трёхмерного численного моделирования шины как единой конструкции необходимо отдельно описывать резиновую матрицу и каждую нить корда в области пятна контакта шины с поверхностью – т.е. в

геометрической модели должны быть «прорисованы» все нити корда. Это связано с тем, что именно в области пятна контакта достигаются максимальные значения напряжений в резине (между нитями корда) – которые влияют на ресурс шины (количество оборотов колеса, которое шина выдерживает до разрушения). Зависимость количества выдерживаемых циклов нагрузки от максимальных напряжений определяется с помощью кривой Веллера, которая строится для каждого типа резины на основе экспериментальных данных. Поэтому при прочностном анализе необходимо вычислять эти максимальные напряжения в резине в пятне контакта с поверхностью.

Во всей остальной части шины напряжения в резине намного меньше, чем в пятне контакта – поэтому они не оказывают существенного влияния на ресурс шины. Вычислять эти напряжения вне пятна контакта с высокой точностью нет необходимости. Вследствие этого не требуется моделировать каждую нить корда – можно моделировать резинокорд однородным материалом, механические свойства которого совпадают с исходным (неоднородным) резинокордом. Такой однородный материал, который ведёт себя при нагружении так же, как резинокорд, называется эффективным (осреднённым) материалом, а его механические свойства – эффективными свойствами.

Чтобы моделировать резинокорд эффективным материалом при трёхмерном прочностном численном моделировании шины, необходимо сначала вычислить эффективные механические свойства резинокорда. При этом, поскольку шина подвергается конечным деформациям – эффективные свойства необходимо вычислять также для конечных деформаций, в нелинейной форме; и при вычислении эффективных свойств важно моделировать резину и корд нелинейно-упругими материалами. Важными особенностями резинокорда являются слабосжимаемость резины и анизотропия, которые тоже необходимо учитывать при вычислении эффективных свойств. Это и определяет актуальность темы диссертационной работы.

Вопросом оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов учёные занимаются с середины XX столетия. В то время была актуальной задача вычисления эффективных свойств в линейном виде (при малых деформациях) с помощью аналитических формул. Этим занимались, в частности, Р. Хилл, Ц. Хашин, Ш. Штрикман, Т. Мори, К. Танака, Р. Кристенсен, Б.Е. Победря. В последние два десятилетия, в связи с развитием механики деформируемого твёрдого тела и вычислительной техники, актуальность приобрела задача численной оценки эффективных характеристик неоднородных материалов в нелинейном виде (с учётом конечности деформаций). Этому вопросу посвящены исследования Р. Смита, П. Понте Кастанеды, Д. Тэлбота, Дж. Фиша, С.В. Шешенина и других учёных. В данных работах при оценке эффективных свойств учитываются нелинейная пластичность, нелинейная вязкоупругость, нелинейная термоупругость и т.п. – упругое же поведение исследуемого материала, как правило, предполагается линейным (описывается модулем Юнга и коэффициентом Пуассона). Методика оценки эффективных модулей упругости неоднородных материалов с учётом физической и геометрической нелинейности была описана в работах В.А. Левина, В.В. Лохина и К.М. Зингермана. В данной работе эта методика была взята за основу и модифицирована применительно к резинокордным композитам, после чего на её основе были разработаны алгоритм и программный модуль для численной оценки эффективных свойств резинокорда.

**Целью** диссертационной работы является:

- модификация математической модели резинокордного композита и методики оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов применительно к резинокордным композитам, с внесением в математическую модель соотношений, учитывающих конечность деформаций и слабосжимаемость резины;

- разработка на основе модифицированной методики алгоритма численной оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях;
- разработка на основе алгоритма программного модуля для оценки эффективных свойств резинокорда при конечных деформациях;
- проведение с помощью программного модуля численных экспериментов с целью выявления влияния на эффективные свойства резинокорда его внутренней структуры и механических свойств резины и корда, анализ их результатов.

**Научная новизна.** Модифицирована математическая модель резинокордного композита и методика оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов для случая резинокордных композитов; в математическую модель внесены соотношения, учитывающие конечность деформаций и слабосжимаемость резины.

Разработан алгоритм численной оценки эффективных механических свойств резинокорда, разработан программный модуль на основе алгоритма, получены результаты численных экспериментов, дана оценка нелинейных эффектов.

**Достоверность полученных результатов** основывается на корректной математической постановке задачи, использовании апробированных соотношений механики деформируемого твёрдого тела, применении общепризнанных численных методов (метод конечных элементов). Полученные в работе результаты согласуются с аналитическими решениями для случая малых деформаций, приведённым в работах Р. Кристенсена и В.Л. Бидермана. При оценке эффективных свойств однородного материала Мурнагана при конечных деформациях наблюдается полное совпадение полученных эффективных упругих коэффициентов с константами Мурнагана исходного материала. Также наблюдается сеточная сходимость при «измельчении» конечноэлементной сетки.

**Практическая значимость.** Разработанные методика и алгоритм оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов могут быть использованы при инженерных прочностных расчётах шины как единой конструкции для получения эффективных свойств резинокорда и последующего описания с их помощью механических свойств резинокордных деталей шины.

Разработан программный модуль для численной оценки эффективных механических свойств резинокорда с учётом его анизотропии, слабосжимаемости резины, при конечных деформациях. Программный модуль может также использоваться для оценки эффективных свойств других анизотропных композитных материалов.

С помощью программного модуля проведён ряд численных экспериментов, получены результаты, позволяющие судить о зависимости эффективных характеристик резинокорда от свойств резины и корда, от шага нитей корда, от угла закроя нитей корда в многослойных резинокордных деталях.

#### **Положения, выносимые на защиту**

Модификация математической модели резинокордного композита и методики оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов для случая конечных деформаций, с внесением в математическую модель соотношений, учитывающих конечность деформаций и слабосжимаемость резины.

Алгоритм численной оценки эффективных свойств резинокорда при конечных деформациях.

Программный модуль на языке C++, реализующий алгоритм.

Результаты численных экспериментов, анализ которых показал влияние на эффективные механические характеристики резинокорда таких параметров, как механические свойства резины и корда, шаг нитей корда (количество нитей на 10 см) в слое резинокорда, угол закроя нитей корда (для нескольких слоёв резинокорда).

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы

докладывались и обсуждались на следующих научно-технических конференциях: «Ломоносовские чтения» в 2006-2013 годах (г. Москва); «Современные проблемы математики, механики, информатики» в 2005, 2008-2013 годах (г. Тула); «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии» в 2011 году (г. Тула); на XIX, XXI, XXII, XXIII и XXIV симпозиумах «Проблемы шин и резинокордных композитов» в 2008, 2010-2013 годах (г. Москва); на X Всемирном конгрессе по вычислительной механике в 2012 году (г. Сан-Паулу, Бразилия).

Результаты диссертационной работы были использованы при выполнении работ по гранту РФФИ №11-08-01284, госконтракту № р/13991 от 02 декабря 2010 г. по программе «Участник Молодёжного Научно-Инновационного Конкурса» («У.М.Н.И.К.»), по госконтракту №07.514.12.4021 (Министерство образования и науки Российской Федерации).

На программный модуль получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ за № 2013611396 от 9 января 2013 года.

На основе полученных результатов разработан программный модуль для российской промышленной системы для прочностного инженерного анализа САЕ «Фидесис».

**Публикации.** Основные результаты диссертации представлены в 25 работах, три из которых – в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы из 94 наименований и приложения. Работа изложена на 126 страницах машинописного текста, содержит 41 рисунок.

## **Содержание работы**

**Во введении** приведено краткое содержание диссертации, описано понятие резинокордного материала, дан обзор литературы по исследованию эффективных

механических характеристик неоднородных материалов в общем случае и по исследованию свойств резинокорда. Обоснована актуальность темы исследования. Сформулированы цели и задачи работы. Обоснованы новизна, достоверность и практическая значимость полученных результатов.

**В первой главе** изложены основные соотношения нелинейной теории упругости. Приводятся основные определения и обозначения, используемые в работе в дальнейшем<sup>1</sup>:

$r, R$  – радиус-вектор частицы в начальном и текущем состояниях;

$u = R - r$  – вектор перемещений;

$\xi^i$  – материальные координаты частицы;

$x^i$  – пространственные координаты частицы;

$e^i$  – базисные векторы системы отсчёта;

$\overset{0}{\partial}_i = \frac{\partial r}{\partial \xi^i}$ ,  $\partial_i = \frac{\partial R}{\partial \xi^i}$  – базисные векторы в начальном и текущем состояниях;

$\overset{0}{\nabla} = \overset{0}{\partial}_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ ,  $\nabla = \partial_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$  – операторы градиента в начальном и текущем

состоянии;

$I$  – единичный тензор;

$\Psi = \overset{0}{\nabla} R = I + \overset{0}{\nabla} u = (\nabla r)^{-1} = (I - \nabla u)^{-1}$  – аффинор деформаций;

$\overset{0}{E} = \frac{1}{2}(\Psi \cdot \Psi^* - I) = \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla} u + u \overset{0}{\nabla} + \overset{0}{\nabla} u \cdot u \overset{0}{\nabla})$  – тензор деформаций Грина;

$E = \frac{1}{2}(I - \Psi^{-1} \cdot \Psi^{*-1}) = \frac{1}{2}(\nabla u + u \nabla - \nabla u \cdot u \nabla)$  – тензор деформаций Альманзи;

$G = \Psi \cdot \Psi^* = I + 2 \overset{0}{E}$  – мера деформаций Коши-Грина;

---

<sup>1</sup> В главе используются обозначения и основные соотношения из книг:

1. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.
3. Левин В. А., Зингерман К. М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. – М., Физматлит, 2002. – 272 с.
4. Левин В. А., Калинин В. В., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В. А. Левина. – М., Физматлит, 2007. – 392 с.

$F = \Psi^* \cdot \Psi = (I - 2E)^{-1}$  – мера деформаций Фингера;

$\Delta = \det \Psi - 1$  – относительное изменение объёма;

$*$  – знак транспонирования;

$:$  – знак двойной скалярной свёртки;

$\sigma$  – тензор истинных напряжений;

$\mathfrak{R} = (1 + \Delta)\Psi^{*-1} \cdot \sigma$  – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

$\overset{0}{\Sigma} = (1 + \Delta)\Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}$  – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

$V_0, V$  – представительный объём в начальном и в текущем состояниях;

$\Gamma_0, \Gamma$  – граница объёма в начальном и текущем состояниях;

$\overset{0}{N}, N$  – нормаль к границе в начальном и текущем состояниях.

Описана постановка краевой задачи нелинейной теории упругости: уравнения движения, граничные условия. Приведены используемые в работе определяющие соотношения Мурнагана (с помощью которых описываются механические свойства корда) и Муни-Ривлина (используемые для моделирования резины).

**Во второй главе** приводится определение эффективного материала для композита как однородного материала, удовлетворяющего условию: если этим материалом заполнить представительный объём и исходным композитным материалом заполнить такой же объём, то средние напряжения по объёму в исходном композитном и эффективном однородном материале будут равны при одинаковых перемещениях граней. Эффективными (осреднёнными) механическими свойствами композита называются механические свойства этого эффективного материала.

Приводится алгоритм численной оценки эффективных свойств резинокорда, суть которого в следующем. Для представительного объёма решается определённое количество последовательностей краевых задач теории упругости

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ или } \overset{0}{\nabla} \cdot \mathfrak{R} = 0$$

с граничными условиями

$$u|_{\Gamma_0} = r(\psi^e - I)$$

Каждая последовательность задач соответствует определённому типу деформации (растяжения/сжатия вдоль одной из координатных осей, сдвиги в одной из координатных плоскостей, а также суперпозиции растяжений/сжатий с растяжениями/сжатиями, растяжений/сжатий со сдвигами, сдвигов со сдвигами). В свою очередь, разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации.

Для каждой задачи задаётся тип и величина деформации (т.е. по сути задаётся осреднённый тензор деформаций Грина для представительного объёма). В результате решения каждой задачи получается поле распределения тензора истинных напряжений. Тензор истинных напряжений осредняется по объёму, по нему для каждой задачи вычисляется второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа. Эффективные свойства резинокорда оцениваются в виде зависимости осреднённого тензора Пиолы-Кирхгофа от осреднённого тензора Грина (коэффициенты которой вычисляются с использованием метода наименьших квадратов):

$$\overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = C_{ijkl}^0 \overset{0}{E}_{kl}^e + C_{ijklmn}^1 \overset{0}{E}_{kl}^e \overset{0}{E}_{mn}^e$$

Также кратко описаны сходство и отличие алгоритма для оценки эффективных свойств в линейном виде (при малых деформациях) от вышеуказанного алгоритма.

Далее во второй главе описаны особенности реализации алгоритма оценки эффективных свойств резинокорда. Описана модификация типов прикладываемой в рамках алгоритма нагрузки, учитывающая слабую сжимаемость резины: при растяжении/сжатии представительного объёма в одном направлении задаётся сжатие/растяжение его в другом направлении (других направлениях) – с расчётом, чтобы объём модели не менялся (или практически не менялся).

В завершение второй главы отдельно сказано о граничных условиях, прикладываемых к представительному объёму, и обоснована необходимость использования периодических граничных условий при оценке эффективных механических свойств резинокорда и других подобных материалов. Также в конце главы кратко описан разработанный программный модуль (вошедший в состав CAE FIDESYS), реализующий алгоритм.

**Третья глава** посвящена сравнению численных результатов, полученных с помощью разработанного программного модуля, с аналитическими формулами (верификации). Из определения эффективных свойств напрямую следует, что эффективными механическими свойствами однородного материала являются механические свойства этого материала. Выполнение этого условия проверялось для материала Гука в линейном случае и для материала Мурнагана в нелинейном. Для нескольких наборов констант было получено точное совпадение исходных и эффективных свойств.

Далее для линейных эффективных свойств однослойного резинокорда проверялось совпадение с аналитическими формулами для такого типа материала: правилом смесей и формулами для волокнистого материала из книги Р. Кристенсена «Введение в механику композитов»<sup>1</sup>. Данные аналитические формулы наиболее точны для объёмных концентраций корда до 20%. В этом диапазоне численные результаты хорошо совпадают с аналитическими – для формул из книги Кристенсена (которые более сложны и более точны по сравнению с правилом смесей) погрешность укладывается в 5%.

Эффективные свойства двухслойного резинокорда при использовании линейной связи между напряжениями и деформациями для эффективного материала, полученные численным путём, сравнивались с аналитическими

---

<sup>1</sup> Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М., «Мир», 1982. – 334 с.

формулами из книги В.Л. Бидермана «Автомобильные шины»<sup>1</sup>. Полученные результаты совпадают с точностью до 5%. Пример приведён на рис. 1, на котором построены графики коэффициента  $C_{1122}$ , полученного численно (штриховая синяя линия) и аналитически (сплошная красная линия).



Рис. 1. Сравнение численных и аналитических результатов для двуслойного резинокорда

Для нелинейных эффективных свойств резинокорда также проводилась проверка наличия сеточной сходимости при уменьшении характерного размера конечного элемента («измельчения» сетки).

**В четвёртой главе** исследуются результаты численной оценки эффективных характеристик резинокорда при конечных деформациях. Приводятся зависимости свойств резинокорда от четырёх параметров.

**Задача №1.** Изучается зависимость эффективных упругих модулей однослойного резинокорда от упругих свойств корда. Упругие константы Мурнагана для резинокорда варьируются в пределах двух порядков, при этом

<sup>1</sup> Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.

свойства резины и геометрия образца остаются неизменными. Ось  $X$  направлена вдоль нитей корда, ось  $Y$  – перпендикулярно им в плоскости резинокордного слоя.

**Задача №2.** Изучается зависимость эффективных упругих модулей однослойного резинокорда от упругих свойств резины. Упругие константы Муни-Ривлина варьируются в 8 раз, при этом свойства корда и геометрия представительного объёма не меняются. Ось  $X$  направлена вдоль нитей корда, ось  $Y$  – перпендикулярно им в плоскости резинокордного слоя.

Полученные зависимости дают следующие результаты. Поведение резинокорда при одноосном растяжении вдоль нитей корда (за которое отвечает эффективный коэффициент  $C_{1111}^0$ ) практически полностью определяется свойствами корда и не зависит от свойств резины; поведение резинокорда при деформации поперёк нитей корда (коэффициент  $C_{2222}^0$ ) практически полностью определяется свойствами резины и не зависит от свойств корда – для линейного случая этот факт известен и из теоретических рассуждений, и из эксперимента. Проведённые расчёты показали, что и нелинейность резинокорда при деформации вдоль нитей корда определяется свойствами корда (коэффициент  $C_{111111}^1$ , выражающий эту зависимость, прямо пропорционален упругим модулям корда) и не зависит от свойств резины, а нелинейность резинокорда при деформации поперёк нитей корда практически полностью определяется свойствами резины (коэффициент  $C_{222222}^1$ , отвечающий за эту зависимость, прямо пропорционален модулям резины) и не зависит от свойств корда. Кроме того, коэффициенты  $C_{1212}^0$  и  $C_{121212}^1$ , определяющие поведение резинокорда при сдвиговых деформациях, нелинейно зависят как от свойств корда, так и от свойств резины.

**Задача №3.** Изучается зависимость эффективных модулей однослойного резинокорда от шага нитей корда – т.е. от частоты расположения нитей корда в слое. Шаг нитей варьируется в пределах от 50 до 100 нитей на 10 см. Свойства резины и корда остаются неизменными. Ось  $X$  направлена вдоль нитей корда, ось  $Y$  – перпендикулярно им в плоскости резинокордного слоя.

Характер полученных зависимостей примерно одинаков для всех эффективных коэффициентов (как линейных  $C_{ijkl}^0$ , так и нелинейных  $C_{ijklmn}^1$ ): все они при увеличении частоты нитей растут по модулю, причём нелинейно (чем больше нитей на 10 см, тем выше и скорость роста). При этом при увеличении шага с 50 до 100 нитей на 10 см жёсткость резинокорда в направлении нитей корда увеличивается в два раза, а в направлении поперёк нитей – примерно на 20%.

**Задача №4.** Изучается зависимость эффективных модулей двуслойного резинокорда от угла наклона нитей корда – т.е. угла между нитями в слоях и осью  $X$ . Угол варьируется в пределах от 10 до 80 градусов. Свойства резины и корда, шаг нитей, толщина слоя остаются постоянными.

Расчёты показывают, что коэффициент  $C_{1111}^0$ , определяющий жёсткость такого резинокорда при деформации вдоль оси  $X$ , монотонно убывает при увеличении угла. Коэффициент  $C_{111111}^1$ , определяющий нелинейность резинокорда при деформации в этом направлении, также монотонно убывает по модулю. Коэффициенты  $C_{2222}^0$  и  $C_{222222}^1$ , отвечающие за жёсткость и нелинейность при деформации вдоль оси  $Y$ , монотонно возрастают по модулю при увеличении угла. Для линейного коэффициента  $C_{1212}^0$ , отвечающего за поведение резинокорда при сдвиге в плоскости  $XY$ , график симметричен (с точностью до 5%) и имеет максимум в районе угла 45 градусов. Такой же вид имеет график для коэффициента  $C_{1122}^0$ . Графики же для нелинейных коэффициентов  $C_{111122}^1$ ,  $C_{111212}^1$ ,  $C_{112222}^1$  хотя и имеют максимум по модулю в районе угла 45 градусов – тем не менее, их графики несимметричны.

В конце главы отмечено (на основе аналитического расчёта с помощью полученных эффективных коэффициентов), что учёт нелинейных эффектов для одной из конфигураций двуслойного резинокорда при деформации 5% даёт поправку 20% в полученных напряжениях – т.е. резинокорд является существенно нелинейным материалом.

**В заключении** приводятся основные результаты и выводы диссертационной работы:

Модифицирована математическая модель резинокордного композита с учетом конечности деформаций и слабосжимаемости резины. Модифицирована методика оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов применительно к резинокордным композитам.

На основе модифицированной методики и математической модели разработан алгоритм для численной оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях.

На основе алгоритма разработан программный модуль на языке C++, позволяющий проводить оценку эффективных свойств резинокорда при конечных деформациях.

Проведены численные эксперименты, анализ результатов которых показал влияние на эффективные свойства резинокордного композита упругих характеристик резины и корда, а также внутренней структуры резинокорда (шага и угла закроя нитей корда).

Разработанный программный модуль (при промышленной реализации) может быть использован при прочностном расчёте пневматической шины как единой конструкции.

### **Публикации по теме диссертации**

- 1. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокомпозита // Каучук и резина, №4, 2010, с. 22-25.**
- 2. Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского**

государственного университета. Серия: Прикладная математика №17, 2012, с. 29-40.

3. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала // Инженерный вестник Дона, №2, 2013. – <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>
4. Левин В. А., Ильин И. А., Кукушкин А. В., Агапов Н. А., Яковлев М. Я. Моделирование развития зоны предразрушения в телах из упругого или вязкоупругого материала с помощью пакета ABAQUS // Тезисы докладов VI Международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», 22-26 ноября 2005 года, Тула, с. 226-227.
5. Левин В. А., Вершинин А. В., Пекарь Г.Е., Саяхова Л. Ф., Труфен К. Н., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. Использование нелокального критерия прочности в задачах многократного наложения больших деформаций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2006, с. 45.
6. Левин В. А., Пекарь Г. Е., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. Плоская задача об образовании полости произвольной формы в нагруженном теле из нелинейно-упругого материала. Конечные деформации // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2007, с. 206.
7. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. К построению модели взаимодействия микровключений в эластомерах // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2008, с. 116.
8. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. Расчет поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита при конечных деформациях с помощью МКЭ // Сборник докладов 19 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 13-17 октября 2008 г., с. 112-119.

9. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филипенко Е.В., Яковлев М.Я. Напряжения и деформации в матрице между частицами наполнителя в резине // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", 17-21 ноября 2008 года, Тула, с. 165-168.
10. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Яковлев М.Я. Об эффекте Пейна в эластомерных нанокompозитах. Результаты численного эксперимента // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2009, с. 44.
11. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Яковлев М.Я. Результаты численных экспериментов, подтверждающих экспериментально наблюдаемый эффект Пейна (для шарообразных и эллипсоидальных включений) // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», 23-27 ноября 2009 года, Тула, с. 148-150.
12. Яковлев М.Я., Левин В.А. К численному решению задачи прочности для тонкостенных конструкций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2010, с. 126.
13. Яковлев М.Я. Сравнение универсальных прочностных САЕ-систем FIDESYS и ANSYS на примере решения контактной задачи термоупругости // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", 22-26 ноября 2010 года, Тула, с. 222-224.
14. Яковлев М.Я. Вариант модификации оценки эффективных характеристик резинокорда с учетом конечности деформаций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносов», Москва, МГУ, 2011.
15. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Об определении эффективных свойств резинокорда в случае конечных деформаций с помощью системы для инженерного прочностного анализа САЕ FIDESYS // Материалы

- международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвящённой 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Тула, 19-23 сентября 2011 года, с. 146.
16. Лохин В.В., Зингерман К.М., Прокопенко А.С., Яковлев М.Я., Цукров И. Об оценке механических эффективных характеристик наноструктурированных материалов с использованием САЕ Fidesys // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», Тула, 3-7 октября 2011 года, с. 225-226.
17. Морозов Е.М., Яковлев М.Я., Прокопенко А.С. О моделировании вязкого роста дефекта (трещины) в теле с конечными деформациями с использованием САЕ Fidesys. – Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», Тула, 3-7 октября 2011 года, с. 233-234.
18. Левин В.А., Зингерман К.М., Гамлицкий Ю.А., Яковлев М.Я., Прокопенко А.С. Об алгоритме оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях // Сборник докладов 22 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 17-21 октября 2011 года, с. 9-15.
19. Левин В.А., Яковлев М.Я. Об оценке эффективных характеристик резинокорда с учётом закроя нитей корда с использованием САЕ «ФИДЕСИС» // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2012». Москва, апрель 2012 г., с. 110-111.
20. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Терпяков А.А., Яковлев М.Я. Вариант расчёта НДС резинокорда с учётом угла наклона нитей корда // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2012». Москва, апрель 2012 г., с. 44-45.
21. Zingerman K.M., Levin V.A., Yakovlev M.Ya., Prokopenko A.V., Terpyakov A.A. Computation of effective elastic characteristics of porous and composite materials using the FIDESYS CAE-system. 10-th Word Congress on

Computational Mechanics. 8-13 July 2012. Sao Paulo. Brazil. Book of Abstracts. 19531. P. 290.

22. Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Расчёт эффективных характеристик нелинейно-упругих композитов при конечных деформациях // Материалы IX Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», 15-22 сентября 2012 года, Казань, с. 168-172.
23. Яковлев М.Я. О разработке программного модуля для вычисления эффективных механических характеристик анизотропных композитов для САЕ «ФИДЕСИС» // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» Тула, 17-21 сентября 2012 года, с. 275-276.
24. Яковлев М.Я., Зингерман К.М., Левин В.А. О разработке программного модуля САЕ «ФИДЕСИС» для оценки эффективных механических характеристик многослойного резинокорда при конечных деформациях // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2013». Москва, апрель 2013 г., с. 153.
25. Яковлев М.Я., Левин В.А. К численному решению задачи о кручении балки, изготовленной из анизотропного композитного материала, с использованием САЕ FIDESYS // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвящённой 90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова. Тула, 16-20 сентября 2013 года, с. 526-528.