

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

**ЯКОВЛЕВ МАКСИМ ЯКОВЛЕВИЧ**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗИНОКОРДА  
ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

05.13.18 Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор ф.- м. н,  
профессор В.А. Левин

Москва 2014

## Оглавление

Оглавление .....	2
Введение .....	4
Глава 1. Основные соотношения нелинейной теории упругости .....	18
1.1. Основные термины и обозначения нелинейной теории упругости.....	18
1.2. Кинематика .....	19
1.3. Уравнения движения и граничные условия .....	26
1.4. Определяющие соотношения .....	28
Глава 2. Метод и алгоритм численной оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов при конечных деформациях .....	30
2.1. Постановка задачи и методика решения .....	30
2.2. Алгоритм, реализующий методику.....	33
2.3. Программная реализация решения .....	44
Глава 3. Проверка корректности результатов (верификация) .....	46
3.1. Проверка корректности результатов счёта для однородного материала .....	46
3.2. Сравнение численных результатов для однослойного резинокорда с аналитическими формулами .....	47
3.3. Сравнение численных результатов для двухслойного резинокорда с аналитическими формулами .....	53
3.4. Проверка сеточной сходимости .....	56
3.5. Выводы по результатам тестирования.....	58
Глава 4. Результаты численной оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов при конечных деформациях .....	59
4.1. Зависимость эффективных свойств однослойного резинокорда от упругих свойств корда .....	59

4.2. Зависимость эффективных свойств однослойного резинокорда от упругих свойств резины .....	63
4.3. Зависимость эффективных свойств однослойного резинокорда от шага нитей корда .....	68
4.4. Зависимость эффективных свойств двухслойного резинокорда от угла наклона нитей корда .....	72
4.5. Выводы по результатам расчётов.....	78
Заключение .....	79
Основные результаты и выводы диссертационной работы .....	79
Публикации по теме диссертации. ....	80
Список литературы .....	85
Приложение 1. Файл GetPiolKirchHoff3D.cpp .....	96
Приложение 2. Файл GetModuleRubberCord3D.cpp .....	112

## **Введение**

### **Общая характеристика работы**

В диссертационной работе рассматриваются модификация методики оценки эффективных механических характеристик композитных материалов для случая конечных деформаций применительно к резинокорду, алгоритм численного решения поставленной задачи и реализация алгоритма в виде программного модуля. С помощью программного модуля были проведены численные эксперименты, анализ результатов которых приведён в работе.

Особенности используемой методики оценки эффективных свойств резинокорда: учёт анизотропии резинокорда, слабосжимаемости резины, проведение моделирования при конечных деформациях и получение эффективных определяющих соотношений в нелинейной форме.

В диссертационной работе описаны постановка задачи и математическая модель эффективного материала. Задача основывается на соотношениях механики деформируемого твёрдого тела для случая конечных деформаций. Рассмотрен алгоритм численного решения поставленной задачи с помощью метода конечных элементов. Описаны особенности реализации этого алгоритма на языке программирования C++. Проведено большое количество численных экспериментов, некоторые результаты которых приведены в работе. Исследовано влияние на эффективные механические свойства резинокордного композита геометрической конфигурации резинокорда (шага нитей корда в слое, угла между нитями в разных слоях), а также механических свойств резины и корда. Анализ результатов показывает необходимость учёта конечности деформаций при численной оценке эффективных свойств резинокорда.

Целью работы являются модификация методики оценки эффективных механических характеристик неоднородного материала при конечных деформациях

применительно к резинокорду и разработка на основе модифицированной методики алгоритма и программного модуля.

В модификации методики учитываются слабосжимаемость и высокоэластичность резины [8], а также конечность деформаций. Эффективные механические свойства резинокорда вычисляются в нелинейной форме.

Резинокорд представляет собой конструкцию, образованную несколькими наложенными друг на друга слоями обрезиненных нитей корда (используется текстильный корд и металлокорд) – то есть слоями резины, каждый из которых армирован нитями корда. В каждом слое нити корда расположены параллельно, с постоянным шагом. В соседних слоях нити могут располагаться под углом друг к другу. Таким образом, резинокорд является композитным материалом. Модуль упругости нитей корда больше, чем модуль упругости резины, на 2-4 порядка – вследствие этого резинокордный композит является анизотропным материалом.

Резинокорд используется при производстве пневматических шин. Из него изготавливаются такие детали шины, как каркас и брекер. Каркас является силовой частью шины. Брекер расположен между каркасом и протектором, предназначен для усиления каркаса и смягчения ударных нагрузок на каркас. Резинокордные детали обеспечивают шине высокую прочность и эластичность. Свойства стенки шины во многом определяются геометрией резинокорда и механическими свойствами резины и корда. В процессе эксплуатации шины каркас и брекер испытывают со стороны дорожного покрытия нагрузки, вызывающие в резинокорде конечные деформации.

### **Обзор литературы по исследованию эффективных механических характеристик неоднородных материалов.**

Осреднение механических свойств неоднородных материалов вызывает интерес с середины прошлого века. Теоретические принципы такого осреднения описаны в [72] – в частности, подробно разъясняется понятие представительного

объёма. В работах того времени изучались эффективные свойства композиционных материалов в линейном виде, пригодные для описания поведения композитов при малых деформациях.

Для композитов с относительно небольшим объёмным содержанием наполнителя в матрице действует двусторонняя оценка Хашина-Штрикмана [70, 71], дающая минимальные и максимальные значения для модуля объёмного сжатия и модуля сдвига композиционного материала (при известной концентрации наполнителя и модулях наполнителя и матрицы). Метод Мори-Танака [79] представляет собой применение условий Хашина-Штрикмана к дисперсно армированному материалу с непрерывной матрицей, в котором частицы наполнителя упорядочены и имеют сферическую форму. В книге [22] приводятся аналитические формулы для оценки эффективных упругих характеристик дисперсно армированных, волокнистых и слоистых композитов, а также рассматриваются пластические и вязкоупругие эффекты и эффективные термические свойства композитов. В книге [42] описываются методы осреднения не только упругих слоистых и волокнистых композитов, но и пластических и вязкоупругих, а также техника осреднения в динамических задачах.

В наше время является более актуальной проблема оценки эффективных механических свойств неоднородных материалов в нелинейном виде – с помощью которых можно описать поведение композита при конечных деформациях. В работе [61] изучаются упругие и пластические свойства материала, содержащего распределённые микродефекты с различной ориентацией в пространстве. В статьях [88, 89] оцениваются эффективные упругие свойства твёрдых тел, содержащих полости разной формы и разной ориентации в пространстве. В [84] для построения эффективных вязкоупругих определяющих соотношений материала с периодической структурой используется метод конечных элементов, с помощью которого решается двумерная задача теории упругости для представительного объёма, после чего результаты осредняются. В статьях [82, 83] описывается применение вариационного принципа для оценки эффективных характеристик многокомпо-

нентных композитов в виде плотности энергии деформации. В [85] приводится метод оценки эффективных характеристик композитных материалов в нелинейном виде, берущий за основу принцип Хашина-Штрикмана [70, 71]. В работе [59] описывается метод построения нелинейных термовязкоупругих эффективных определяющих соотношений для композитов периодической структуры с резиноподобной матрицей. В [73] описано применение методов теории вероятностей для оценки эффективных механических характеристик композитов нерегулярной структуры. В [75] приводится метод, пригодный для оценки как упругих свойств, так и тепло- и электропроводности дисперсно армированных материалов (в статье сравнивается влияние различных параметров армирующих частиц на эффективные упругие свойства и эффективную тепло- и электропроводность). В работе [67] осреднение упругих свойств неоднородного материала проводится при непериодических граничных условиях с учётом геометрической нелинейности, практическая реализация осуществляется с помощью метода конечных элементов (в двумерном случае). В [66] данный подход распространяется на многомасштабный случай. В статье [78] приводится сравнение различных методов для осреднения свойств как линейных вязкоупругих, так и нелинейных вязкопластических композиционных материалов. В [87] оцениваются эффективные свойства и возникновение микродефектов в тканых композитах, с использованием метода конечных элементов. В [51] определяются некоторые эффективные модули резинокордного слоя: жёсткость при изгибе и жёсткость бокового сжатия.

### **Обзор литературы по исследованию свойств резинокорда**

В первых работах по исследованию свойств резинокордных конструкций [4, 25] делался ряд упрощающих предположений. Напряжённо-деформированное состояние резинокорда считалось плоским. Деформации и резины, и корда предполагались малыми, свойства обоих материалов описывались законом Гука. Механические характеристики резинокорда при этом вычислялись одним из двух методов. В первом методе связь напряжений и деформаций записывались отдельно

для резины и корда, с учётом неоднородности конструкции. Второй способ – представление резинокорда однородным анизотропным материалом. При этом осреднённые механические свойства исходного неоднородного и модельного анизотропного материала совпадают.

В работе [25] находятся уравнения, связывающие напряжения в корде и резине с анизотропными осреднёнными свойствами однородного материала. Корд представляет собой нити конечного диаметра – того же порядка, что и расстояние между нитями. В расчётах не учитывается концентрация напряжений в резине вблизи нитей корда. Деформации, относящиеся к резинокорду в целом, вычисляются путём осреднения деформаций корда и резины, учитывая совместность перемещений. В работе получены линейные соотношения, связывающие деформации резинокордного композита в целом с механическими характеристиками резины и корда, а также с параметрами геометрической структуры резинокорда.

После этого рассматривается двуслойная система: в реальных конструкциях слои резинокорда часто работают попарно. При этом используется предположение, что напряжённо-деформированные состояния слоёв независимы, а общие напряжения двух слоёв складываются из напряжений каждого слоя (слои различаются лишь углом ориентации нитей корда). Это предположение справедливо только для малых деформаций, так как деформация одного слоя приводит к повороту нитей корда – а это вызовет касательные напряжения между слоями, что не учитывается описанной схемой.

Использованные в [25] идеи используются в большинстве более поздних работ, о которых пойдёт речь в обзоре литературы. Ещё раз сформулируем эти допущения:

- 1) деформации как корда, так и резины являются малыми;
- 2) зависимости напряжений от деформаций описываются линейным законом;
- 3) сдвиговая жёсткость нитей корда принимается равной сдвиговой жёсткости резины;

- 4) модуль корда на растяжение существенно выше модуля Юнга резины;
- 5) напряжения двухслойной системы складываются из напряжений каждого слоя без учета взаимодействия слоев;
- 6) напряжённо-деформированное состояние резины между нитями корда принимается однородным без учета концентрации напряжений вблизи нитей корда;
- 7) не рассматриваются повороты нитей корда при растяжении резино-кордного слоя.

Работа [74] в основном посвящена описанию свойств однонаправленных резинокордных слоёв. В ней используются все вышеперечисленные идеи (1-7). Рассматриваются теории максимальных напряжений, максимальных деформаций и их функций для пластиков, армированных жёсткими нитями. Деформации предполагаются малыми, поэтому возможно применять линейную теорию. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие теорию.

В [90], кроме свойств одного слоя резинокорда, также описываются свойства резинокордных композитов, включающих в себя до четырёх слоёв. Обращается внимание на возникновение сдвиговых напряжений в тонкой прослойке резины между резинокордными слоями. Указаны причины этого явления: при однородном растяжении резинокордного слоя его прямоугольный элемент (образованный нитями корда) переходит в параллелограмм. Угол между сторонами параллелограмма зависит от угла между нитями корда и направлением растяжения в первоначальном состоянии (т.е. до растяжения) и величиной удлинения. В работе приведено большое количество графиков, иллюстрирующих зависимости эффективных свойств однослойного и двухслойного резинокорда в зависимости от параметров конструкции.

Укажем ещё несколько работ по механике многослойных анизотропных резинокордных композитов. В США работами на эту тематику занимался Кларк (статьи [62, 63, 64] и сборник [65] под его редакцией), в Великобритании – Гук

[68, 69], в Японии – Акасака [60]. В СССР в этот же период работами по механике резинокордных композитов занимался Бидерман с сотрудниками [4, 25]. Результаты их работ были обобщены в монографии [3]. В этой книге используются допущения, указанные выше в пунктах 1-7.

В дальнейшем развитие механики шин и резинокордных композитов пошло не по пути учёта физической нелинейности резины и корда. В основном осуществлялось совершенствование расчётных схем, позволяющих учитывать геометрическую нелинейность при расчёте напряжённо-деформированного состояния конструкции пневматической шины, усложнявшейся с течением времени [5]. Вследствие интенсивного развития компьютерной техники быстрое развитие получили расчётные методы механики многослойных анизотропных оболочек [1, 15], метод конечных элементов [45, 80] и метод прямого решения систем дифференциальных уравнений, описывающих деформирование шины [43]. Также решались вязкоупругая [2] и термовязкоупругая [81] задачи – тоже в линейной постановке. В 90-е годы появились работы по учёту физической нелинейности при моделировании упругого и вязкоупругого материала [19, 24, 86].

В работе [17] с помощью экспериментов показано, что модули упругости корда при малых деформациях отличаются от модулей корда при разрыве в четыре раза и более. Был проведён расчёт напряжённо-деформированного состояния шины с учётом физической нелинейности корда, который позволил, в частности, на 25% уточнить силу сопротивления качению. Но резина при этом расчёте моделировалась линейным материалом.

В статье [6] получены зависимости напряжений от деформаций для невулканизированных однослойных и симметричных двуслойных резинокордных образцов, в которых используется металлокорд. Нити корда моделируются нерастяжимыми, с прямоугольным сечением. Однако в этой статье уравнения основываются на линейном законе деформирования.

Статья [48] посвящена вопросу построения матрицы упругости резинокордных слоёв. С использованием модели ортотропного слоистого композита расчи-

таны модули упругости в разных направлениях. И резина, и корд моделируются линейными материалами. Полное решение задачи получено численным путём.

В работе [23] приводится способ экспериментального определения элементов матрицы жёсткости ортотропного резинокордного композита, состоящего из нескольких слоёв, нити корда в которых расположены в двух направлениях. Образцами для испытаний являются вырезанные из такого резинокорда кубы, стороны которых направлены определённым образом по отношению к нитям корда. В процессе эксперимента образцы подвергаются растяжению, сжатию, сдвигу. В данной работе материал резины и корда также считается физически линейным (в процессе испытаний определяются упругие константы, не зависящие от величины деформации).

В работе [40] представлен аналитический расчёт упругого деформирования двуслойного резинокордного композита. Рассматриваемый образец включает пять слоёв: два резинокордных и три резиновых. При этом в резинокордных слоях не учитываются частота нитей и т.п. – эти слои моделируются однородным анизотропным материалом. Решается уравнение равновесия для геометрически линейного случая (когда угол между нитями корда в разных слоях не меняется) и для нелинейного (когда угол меняется). На основе решения получена зависимость растягивающей нагрузки от удлинения образца. Полученное решение хорошо сходится с экспериментом для диапазона углов, характерных для брекерных пневматических шин.

В работе [49] в методе конечных элементов применялась нелинейная модель резины (пятиконстантный материал). При расчёте упругих характеристик, напряжённого состояния и полей температур резинокордных оболочек использовалась матрица упругости материала, зависящая от достигнутого уровня деформаций конечного элемента. Свойства резины в сложном напряжённо-деформированном состоянии описывались следующим способом: в полученном уравнении для одноосного растяжения одноосное удлинение заменялось интен-

сивностью деформаций. Было получено хорошее совпадение результатов расчёта и экспериментальных данных как для упругой, так и для термоупругой задачи.

В работе [41] решена нелинейная вязкоупругая задача деформирования резинового амортизатора, армированного малорастяжимыми нитями, направленными в двух направлениях. Нелинейные упругие свойства описываются двухпараметрическим степенным потенциалом. В результате решения получены все характеристики амортизатора в зависимости от расположения нитей, а также от упругих и вязкоупругих свойств резины.

Анализ численного геометрически нелинейного решения оболочечной резинокордной пневматической конструкции проведен в работе [19]. Рассмотрены напряжения двухслойной резинокордной торообразной оболочки в геометрически линейной и нелинейной постановках. Использован вариант метода конечных элементов, описанный в [20]. Оболочка имеет характеристики, близкие к шинным материалам, и нагружается внутренним давлением. Расчеты показали, что различия между решениями линейной и нелинейной задач существенны для сдвиговых напряжений. В монографии [18] обобщены многолетние исследования школы В.В. Киричевского в области использования метода конечных элементов в механике эластомеров.

### **Актуальность темы исследования**

Актуальность численной оценки эффективных механических характеристик резинокорда определяется актуальностью инженерных прочностных расчётов шины в целом, как единой конструкции. Из резинокорда изготавливаются такие детали шины, как каркас и бреккер. Резинокорд является анизотропным армированным композитным материалом, в состав которого входит резина – слабосжимаемый материал. Это необходимо учитывать при численном моделировании.

В процессе проведения трёхмерного численного моделирования шины как единой конструкции необходимо отдельно описывать резиновую матрицу и каждую нить корда в области пятна контакта шины с поверхностью – т.е. в геометри-

ческой модели должны быть «прорисованы» все нити корда. Это связано с тем, что именно в области пятна контакта достигаются максимальные значения напряжений в резине (между нитями корда) – которые влияют на ресурс шины (количество оборотов колеса, которое шина выдерживает до разрушения). Зависимость количества выдерживаемых циклов нагрузки от максимальных напряжений определяется с помощью кривой Веллера, которая строится для каждого типа резины на основе экспериментальных данных. Поэтому при прочностном анализе необходимо вычислять эти максимальные напряжения в резине в пятне контакта с поверхностью.

Во всей остальной части шины напряжения в резине намного меньше, чем в пятне контакта – поэтому они не оказывают существенного влияния на ресурс шины. Вычислять эти напряжения вне пятна контакта нет необходимости. Вследствие этого не требуется моделировать каждую нить корда – можно моделировать резинокорд однородным материалом, механические свойства которого совпадают с исходным (неоднородным) резинокордом. Такой однородный материал, который ведёт себя при нагружении так же, как резинокорд, называется эффективным (осреднённым) материалом, а его механические свойства – эффективными свойствами.

Чтобы моделировать резинокорд эффективным материалом при трёхмерном прочностном численном моделировании шины, необходимо сначала вычислить эффективные механические свойства резинокорда. При этом, поскольку шина подвергается конечным деформациям – эффективные свойства необходимо вычислять также для конечных деформаций, в нелинейной форме; и при вычислении эффективных свойств важно моделировать резину и корд нелинейно-упругими материалами. Важными особенностями резинокорда являются слабосжимаемость резины и анизотропия, которые тоже необходимо учитывать при вычислении эффективных свойств. Это и определяет актуальность темы диссертационной работы.

## **Цель работы**

Целью диссертационной работы является:

- модификация математической модели резинокордного композита и методики оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов применительно к резинокордным композитам, с внесением в математическую модель соотношений, учитывающих конечность деформаций и слабосжимаемость резины;
- разработка на основе модифицированной методики алгоритма численной оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях;
- разработка на основе алгоритма программного модуля для оценки эффективных свойств резинокорда при конечных деформациях;
- проведение с помощью программного модуля численных экспериментов с целью выявления влияния на эффективные свойства резинокорда его внутренней структуры и механических свойств резины и корда, анализ их результатов.

## **Научная новизна**

Модифицирована математическая модель резинокордного композита и методика оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов для случая резинокордных композитов; в математическую модель внесены соотношения, учитывающие конечность деформаций и слабосжимаемость резины.

Разработан алгоритм численной оценки эффективных механических свойств резинокорда, разработан программный модуль на основе алгоритма, получены результаты численных экспериментов.

## **Достоверность результатов**

Достоверность полученных результатов основывается на корректной математической постановке задачи, использовании апробированных соотношений механики деформируемого твёрдого тела, применении общепризнанных численных методов (метод конечных элементов). Полученные в работе результаты согласуются с аналитическими решениями для случая малых деформаций, приведёнными в книгах Р. Кристенсена [22] и В.Л. Бидермана [3]. При оценке эффективных свойств однородного материала Мурнагана при конечных деформациях наблюдается полное совпадение полученных эффективных упругих коэффициентов с константами Мурнагана исходного материала. Также наблюдается сеточная сходимость при измельчении конечноэлементной сетки.

## **Практическая значимость**

Разработанные методика и алгоритм оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов могут быть использованы при инженерных прочностных расчётах шины как единой конструкции для получения эффективных свойств резинокорда и последующего описания с их помощью свойств резинокорда в составе шины.

Разработан программный модуль для численной оценки эффективных механических свойств резинокорда с учётом его анизотропии, слабосжимаемости резины, при конечных деформациях. Программный модуль может также использоваться для оценки эффективных свойств других анизотропных композитных материалов.

С помощью программного модуля проведён ряд численных экспериментов, получены результаты, позволяющие судить о зависимости эффективных характеристик резинокорда от свойств резины и корда, от шага нитей корда, от угла закроя нитей корда в многослойных резинокордных деталях.

## **Положения, выносимые на защиту**

Модификация математической модели резинокордного композита и методики оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов для случая конечных деформаций, с внесением в математическую модель соотношений, учитывающих конечность деформаций и слабосжимаемость резины.

Алгоритм численной оценки эффективных свойств резинокорда при конечных деформациях.

Программный модуль на языке C++, реализующий алгоритм.

Результаты численных экспериментов, анализ которых показал влияние на эффективные механические характеристики резинокорда таких параметров, как механические свойства резины и корда, шаг нитей корда (количество нитей на 10 см) в слое резинокорда, угол закрытия нитей корда (для нескольких слоёв резинокорда).

## **Апробация работы**

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научно-технических конференциях: «Ломоносовские чтения» в 2006-2013 годах (г. Москва) [7, 9, 12, 27, 34, 35, 55, 57]; «Современные проблемы математики, механики, информатики» в 2005, 2008-2013 годах (г. Тула) [10, 13, 32, 33, 52, 54, 56]; «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии» в 2011 году (г. Тула) [36, 39]; на XIX, XXI, XXII, XXIII и XXIV симпозиумах «Проблемы шин и резинокордных композитов» в 2008, 2010-2013 годах (г. Москва) [11, 31]; на X Всемирном конгрессе по вычислительной механике в 2012 году (г. Сан-Паулу, Бразилия) [93].

Результаты диссертационной работы были использованы при выполнении работ по гранту РФФИ №11-08-01284, госконтракту № p/13991 от 02 декабря 2010 г. по программе «Участник Молодёжного Научно-Инновационного Конкурса» («У.М.Н.И.К.»), по госконтракту №07.514.12.4021 (Министерство образования и науки Российской Федерации).

На программный модуль получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ за № 2013611396 от 9 января 2013 года.

## **Публикации**

Основные результаты диссертации представлены в 25 публикациях, в том числе трёх из перечня рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций:

1. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита // Каучук и резина, №4, 2010. – С. 22-25.
2. Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинкордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. №17, 2012. – С. 29-40.
3. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинкордных композитов для случая двухслойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, №2, 2013. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>

## **Структура и объём работы**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложения и списка использованных источников из 94 наименований. Работа изложена на 126 страницах машинописного текста, содержит 41 рисунок.

## Глава 1. Основные соотношения нелинейной теории упругости

В данной главе приведём основные соотношения нелинейной теории упругости, которые нам потребуются в дальнейшем при описании методики оценки эффективных свойств резинокордных композитов. Будем использовать термины и обозначения, применяемые в [26, 28, 29]. Более подробно соотношения нелинейной теории упругости описаны в параграфе 2.1 книги [28].

### 1.1. Основные термины и обозначения нелинейной теории упругости

Приведём основные обозначения [26, 28, 29], которые будем использовать в описании алгоритма вычисления эффективных свойств резинокорда.

$r, R$  – радиус-вектор частицы в начальном и текущем состояниях;

$u = R - r$  – вектор перемещений;

$\xi^i$  – материальные координаты частицы;

$x^i$  – пространственные координаты частицы;

$e^i$  – базисные векторы системы отсчёта;

${}^0\vartheta_i = \frac{\partial r}{\partial \xi^i}, \vartheta_i = \frac{\partial R}{\partial \xi^i}$  – базисные векторы в начальном и текущем состояниях;

${}^0\nabla = \vartheta_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \nabla = \vartheta_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$  – операторы градиента в начальном и текущем состоя-

нии;

$I$  – единичный тензор;

$\Psi = {}^0\nabla R = I + {}^0\nabla u = (\nabla r)^{-1} = (I - \nabla u)^{-1}$  – аффино́р деформаций;

${}^0E = \frac{1}{2}(\Psi \cdot \Psi^* - I) = \frac{1}{2}({}^0\nabla u + u {}^0\nabla + {}^0\nabla u \cdot u {}^0\nabla)$  – тензор деформаций Грина;

$E = \frac{1}{2}(I - \Psi^{-1} \cdot \Psi^{*-1}) = \frac{1}{2}(\nabla u + u \nabla - \nabla u \cdot u \nabla)$  – тензор деформаций Альманзи;

$G = \Psi \cdot \Psi^* = I + 2{}^0E$  – мера деформаций Коши-Грина;

$F = \Psi^* \cdot \Psi = (I - 2E)^{-1}$  – мера деформаций Фингера;

$\Delta = \det \Psi - 1$  – относительное изменение объёма;

$*$  – знак транспонирования;

$:$  – знак двойной скалярной свёртки;

$\sigma$  – тензор истинных напряжений;

$\mathfrak{R} = (1 + \Delta)\Psi^{*-1} \cdot \sigma$  – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

$\overset{0}{\Sigma} = (1 + \Delta)\Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}$  – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

$V_0, V$  – представительный объём в начальном и в текущем состояниях;

$\Gamma_0, \Gamma$  – граница объёма в начальном и текущем состояниях;

$\overset{0}{N}, N$  – нормаль к границе в начальном и текущем состояниях.

## 1.2. Кинематика

Для описания движения сплошной среды используются два подхода. В подходе Лагранжа фиксируют координаты частиц  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  в некоторый момент времени  $t^0$  (в дальнейшем будем называть его начальным), и все величины, характеризующие движение среды, рассматривают как функцию этих координат (называемых также материальными или «вмороженными» [37, 38, 46, 47] координатами). Частица среды однозначно определяется по набору координат  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . При использовании подхода Эйлера рассматривают все величины как функцию координат частиц в текущий момент времени - пространственных координат  $(x^1, x^2, x^3)$ . Подход Лагранжа также называется материальным, а подход Эйлера – пространственным [37, 38, 46, 47]. Суть в том, что при описании движения сплошной среды с использованием подхода Лагранжа следят за движением каждой материальной частицей среды, имеющей в начальный момент времени координаты  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  – а при использовании подхода Эйлера следят за движением среды в каждой фиксированной точке пространства с координатами  $(x^1, x^2, x^3)$ , через которую в разные моменты времени проходят разные частицы.

Пусть  $r$  - радиус-вектор, соответствующий положению некоторой материальной частицы в начальный момент времени (в начальном состоянии), а  $R$  - радиус-вектор той же самой частицы в произвольный момент времени  $t$  (в текущем состоянии). Зависимость

$$R = R(r, t) \text{ или } x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), i = 1, 2, 3 \quad (1.2.1)$$

описывает движение сплошной среды [28, 29]. Эта зависимость считается непрерывной и взаимно-однозначной в области  $V$ , занимаемой телом, в любой момент времени  $t$ . В силу взаимной однозначности зависимости (1.2.1) существует обратная зависимость:

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), i = 1, 2, 3 \quad (1.2.2)$$

Любое движение деформируемого твердого тела может быть представлено в виде суперпозиции жёсткого движения и деформации [28, 29]. Жёсткое движение – такое, при котором расстояние между двумя любыми частицами тела остаётся неизменным. Жёсткое движение описывается соотношением:

$$R = R_0 + (r - r_0) \cdot O \quad (1.2.3)$$

где  $O$  - ортогональный тензор, один и тот же для всех частиц среды, а  $r_0$  и  $R_0$  - радиус-векторы некоторой фиксированной частицы среды в начальном и текущем состояниях. Деформация, в свою очередь – такое движение твёрдого тела, при котором изменяются расстояния между его частицами.

Зачастую нет необходимости рассматривать деформацию твёрдого тела как непрерывный процесс. Достаточно рассматривать начальное (недеформированное) и текущее (деформированное) состояние тела. В таких случаях текущее состояние называем конечным [26, 28, 29].

Векторы основного базиса [28, 29], направленные по касательным к соответствующим координатным осям, в начальном состоянии определяются из следующего соотношения:

$${}^0 \mathfrak{a}_i = \frac{\partial r}{\partial \xi^i} \quad (1.2.4)$$

Векторы взаимного базиса [28, 29] в начальном состоянии обозначаются через  $\overset{0}{e}^i$ . Для них справедливы соотношения

$$\overset{0}{e}_i \cdot \overset{0}{e}^i = \delta_{ij} \quad (1.2.5)$$

Векторы  $e_i$  основного базиса пространственной системы координат  $x^i$  (системы отсчета) можно определить по формуле

$$e_i = \frac{\partial R}{\partial x^i} \quad (1.2.6)$$

Соответствующие векторы взаимного базиса будем обозначать через  $e^i$ . Для них справедливы соотношения  $e_i \cdot e^i = \delta_{ij}$ . Если  $(x^1, x^2, x^3)$  - прямоугольная декартова система координат, то  $e_i = e^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Зачастую считают (хотя это и не обязательно) [28, 29], что в начальном состоянии материальная система координат совпадает с пространственной, т.е. в качестве материальных координат каждой частицы выбирают ее пространственные координаты в начальном состоянии. В этом случае  $\overset{0}{e}_i = e_i$ ,  $\xi^i(x^1, x^2, x^3, t_0) = x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (здесь  $t_0$  – начальный момент времени). Такой подход удобно применять в случаях, когда форма тела и граничные условия заданы в начальной конфигурации.

В процессе деформации координатные линии системы координат  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  деформируются вместе со сплошной средой [37, 38, 46, 47]. Вместе с ними при движении среды изменяют свое направление и векторы основного базиса системы координат  $\xi^i$ , направленные по касательным к этим линиям. В дальнейшем будем называть их векторами основного базиса в текущем (конечном) состоянии, или векторами «вмороженного» базиса. Они определяются следующим образом:

$$e_i = \frac{\partial R}{\partial \xi^i} \quad (1.2.7)$$

Векторы взаимного базиса в текущем состоянии обозначаются символами  $e^i$ . Для них справедливы соотношения

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon^i = \delta_{ij} \quad (1.2.8)$$

Они также меняют свое направление при движении среды.

При решении задач, в которых форма тела и граничные условия заданы в текущем (конечном) состоянии, удобно считать, что материальные координаты совпадают с пространственными в текущем (конечном) состоянии. В этом случае  $\varepsilon_i = e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Обозначим через  $M$  и  $M'$  две бесконечно близкие частицы сплошной среды. Пусть вектор  $dr$  соединяет эти частицы в начальном состоянии, а вектор  $dR$  - в текущем (конечном) состоянии. Тогда с учетом (1.2.4) и (1.2.7) получаем следующие соотношения [28, 29]:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi^i} \partial \xi^i = \overset{0}{\varepsilon}_i \partial \xi^i, dR = \frac{\partial R}{\partial \xi^i} \partial \xi^i = \varepsilon_i \partial \xi^i \quad (1.2.9)$$

Умножаем скалярно первое из этих соотношений на  $\overset{0}{\varepsilon}^j$ , а второе на  $\varepsilon^j$ , и с учетом (1.2.5), (1.2.8) получаем

$$d\xi^j = \overset{0}{\varepsilon}^j \cdot dr = \varepsilon^j \cdot dR \quad (1.2.10)$$

Рассмотрим некоторую скалярную величину  $\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . Дифференциал  $d\varphi$ , характеризующий приращение этой величины при переходе из частицы  $M$  в частицу  $M'$ , с учетом (1.2.10) можно записать в виде [37]

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} d\xi^i = \left( \overset{0}{\varepsilon}^i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \right) \cdot dr = \left( \varepsilon^i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \right) \cdot dR \quad (1.2.11)$$

Назовём вектор  $\overset{0}{\varepsilon}^i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}$  градиентом [28, 29] скаляра  $\varphi$  в координатах начального состояния, а вектор  $\varepsilon^i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}$  - градиентом скаляра  $\varphi$  в координатах текущего состояния. Будем использовать следующие обозначения:

$$\overset{0}{\nabla} \varphi = \overset{0}{\varepsilon}^i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}, \nabla \varphi = \varepsilon^i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \quad (1.2.12)$$

Пользуясь (1.2.12), определим оператор градиента в координатах начального состояния  $\overset{0}{\nabla}$  и оператор градиента в координатах текущего состояния  $\nabla$  следующими формулами:

$$\overset{0}{\nabla} = \overset{0}{\vartheta}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \nabla = \vartheta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (1.2.13)$$

Учитывая введённые обозначения, перепишем (1.2.11) в виде

$$d\varphi = \overset{0}{\nabla} \varphi \cdot dr = \nabla \varphi \cdot dR \quad (1.2.14)$$

Векторы  $dr$  и  $dR$  в (1.2.14) не зависят от базиса, поэтому операторы  $\overset{0}{\nabla}$  и  $\nabla$  инвариантны, т.е. не зависят от выбора координатного базиса начального и текущего состояния соответственно [28, 29].

Операторы  $\overset{0}{\nabla}$  и  $\nabla$  можно применить не только к скалярным, но и к векторным или тензорным величинам.

Рассмотрим тензор

$$\Psi = \overset{0}{\nabla} R = \overset{0}{\vartheta}^i \frac{\partial R}{\partial \xi^i} = \overset{0}{\vartheta}^i \vartheta_i \quad (1.2.15)$$

Используя терминологию [26, 28, 29], будем называть тензор  $\Psi$  аффином деформаций. Это тензор известен в литературе также под названиями тензора дисторсии, градиента вектора места [37], градиента движения. Поскольку зависимость (1.2.1) взаимно однозначна,  $\det \Psi \neq 0$ .

Из (1.2.3) следует, что при жестком движении

$$\Psi = 0 \quad (1.2.16)$$

Аффином деформаций и тензор

$$\Phi = \nabla r = \vartheta^i \frac{\partial r}{\partial \xi^i} = \vartheta^i \overset{0}{\vartheta}_i \quad (1.2.17)$$

взаимно обратны [28, 29]:

$$\Psi \cdot \Phi = \overset{0}{\vartheta}^i \vartheta_i \cdot \vartheta^j \overset{0}{\vartheta}_j = \overset{0}{\vartheta}^i \delta_{ij} \overset{0}{\vartheta}_j = \overset{0}{\vartheta}^i \overset{0}{\vartheta}_j = I$$

здесь  $I$  - единичный тензор. Итак,

$$\Phi = \Psi^{-1}, \text{ т.е. } \overset{0}{\nabla} R = (\nabla r)^{-1} \quad (1.2.18)$$

Из (1.2.9), (1.2.10), (1.2.15) следует:

$$dR = \vartheta_i d\xi^i = \vartheta_i \overset{0}{\vartheta} \cdot dr = \Psi^* \cdot dr = dr \cdot \Psi \quad (1.2.19)$$

Обозначим через  $ds$  и  $dS$  длины векторов  $dr$  и  $dR$  соответственно. Тогда  $ds^2 = dr \cdot dr$ ,  $dS^2 = dR \cdot dR$ , и с учетом (1.2.19) можно записать

$$dS^2 = dr \cdot \Psi \cdot \Psi^* \cdot dr = dr \cdot G \cdot dr \quad (1.2.20)$$

Тензор

$$G = \Psi \cdot \Psi^* \quad (1.2.21)$$

в правой части (1.2.20) называется мерой деформации Коши-Грина [37].

Из (1.2.21), (1.2.16) следует, что при жестком движении  $G = O \cdot O^* = I$ . Следовательно, тензор  $G$  при любом жестком движении остаётся неизменным. Вместе с тем, как видно из (1.2.16), аффино́р деформации зависит от жесткого движения и поэтому не может быть использован в качестве меры деформации.

Тензор  $G$  симметричен, т.е.  $G = G^*$ . Также он является положительно определённым [37].

В качестве тензорных характеристик деформации можно использовать и функции тензора  $G$ : например, тензор деформаций Грина  $\overset{0}{E}$ , определяемый следующей формулой:

$$\overset{0}{E} = \frac{1}{2}(G - I) = \frac{1}{2}(\Psi \cdot \Psi^* - I) \quad (1.2.22)$$

При жестком движении  $\overset{0}{E} = 0$ .

Обозначим через

$$u = R - r \quad (1.2.23)$$

вектор перемещений из начального в текущее состояние. Из (1.2.23), (1.2.15) и (1.2.18) следует, что

$$\Psi = \overset{0}{\nabla} r + \overset{0}{\nabla} u = I + \overset{0}{\nabla} u, \quad \Phi = \left( I + \overset{0}{\nabla} u \right)^{-1} \quad (1.2.24)$$

Подставив выражение (1.2.24) в формулу (1.2.22), выразим тензор деформаций Грина через градиент вектора перемещений в координатах начального состояния:

$$\overset{0}{E} = \frac{1}{2} \left( \overset{0}{\nabla} u + u \overset{0}{\nabla} + \overset{0}{\nabla} u \cdot u \overset{0}{\nabla} \right), \quad (1.2.25)$$

где  $u \overset{0}{\nabla} = \left( \overset{0}{\nabla} u \right)^*$ .

Пусть, как и ранее, вектор  $dr$  соединяет две бесконечно близкие частицы среды  $M$  и  $M'$  в начальном состоянии, а вектор  $dR$  соединяет эти же частицы в текущем (конечном) состоянии. Выразим длину  $ds$  вектора  $dr$  через вектор  $dR$ . Для этого запишем равенство (1.2.19) в виде

$$dr = \Psi^{*-1} \cdot dR = dR \cdot \Psi^{-1}$$

Тогда

$$ds^2 = dr \cdot dr = dR \cdot \Psi^{-1} \cdot \Psi^{*-1} \cdot dR = dR \cdot g \cdot dR \quad (1.2.26)$$

Здесь тензор

$$g = \Psi^{-1} \cdot \Psi^{*-1} \quad (1.2.27)$$

называется мерой деформации Альманзи [37]. Он является положительно определённым и симметричным. При жестком движении  $g = I$ .

В качестве тензорных характеристик деформации используются и функции тензора  $g$ . В том числе тензорная мера Фингера [37]

$$F = g^{-1} = \Psi^* \cdot \Psi \quad (1.2.28)$$

и тензор деформации Альманзи [37]

$$E = \frac{1}{2}(I - g) = \frac{1}{2}(I - \Psi^{-1} \cdot \Psi^{*-1}) \quad (1.2.29)$$

Из (1.2.22) и (1.2.29) следует, что

$$E = \Psi^{-1} \cdot \overset{0}{E} \cdot \Psi^{*-1} \quad (1.2.30)$$

С учётом соотношений (1.2.17), (1.2.23), (1.2.29) выразим тензор  $\Phi = \Psi^{-1}$ , аффино́р деформации  $\Psi$  и тензор деформаций Альманзи  $E$  через градиент вектора перемещений в координатах текущего состояния [28, 29]:

$$\Phi = \nabla R - \nabla u = I - \nabla u, \quad \Psi = \Phi^{-1} = (I - \nabla u)^{-1} \quad (1.2.31)$$

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + u\nabla - \nabla u \cdot u\nabla) \quad (1.2.32)$$

здесь  $u\nabla = (\nabla u)^*$ .

Пусть  $dv$  - некоторый элементарный объем сплошной среды в начальном состоянии, и пусть при движении среды он переходит в элементарный объем  $dV$ .

Тогда

$$\frac{dV}{dv} = 1 + \Delta = \det \Psi \quad (1.2.33)$$

здесь  $\Delta$  - относительное изменение объема [28, 29]. Материал, для которого  $\Delta \equiv 0$ , называется несжимаемым.

### 1.3. Уравнения движения и граничные условия

Напряженное состояние в точке твёрдого тела в текущем (конечном) состоянии характеризуется тензором истинных напряжений  $\sigma$  (тензором напряжений Коши) [26]. Зная тензор напряжений, вектор напряжений на площадке с внешней нормалью  $N$ , заданной в текущем состоянии, можно определить по формуле [46, 47]

$$P_N = N \cdot \sigma. \quad (1.3.1)$$

В классической механике сплошных сред, не учитывающей моментных напряжений, тензор истинных напряжений является симметричным [38].

Уравнения движения в координатах текущего состояния имеют вид

$$\nabla \cdot \sigma + \rho f = \rho a, \quad (1.3.2)$$

где  $f$  - вектор массовых сил в текущем состоянии,  $\rho$  - плотность частицы тела в этом состоянии,  $a$  - ускорение [28, 29].

При условии сохранения массы элементарных объемов плотность  $\rho$  связана с плотностью частицы тела в начальном состоянии  $\rho_0$  соотношением

$$\rho = (1 + \Delta)^{-1} \rho_0. \quad (1.3.3)$$

В статической или квазистатической постановке задач (т.е. пренебрегая динамическими эффектами) уравнения движения переходят в уравнения равновесия [28, 29]

$$\nabla \cdot \sigma + \rho f = 0 \quad (1.3.4)$$

Если на границе  $\Gamma$  тела в текущем состоянии задана следящая нагрузка – давление  $P$ , то граничные условия могут быть записаны в виде [46, 47]

$$N \cdot \sigma|_{\Gamma} = -PN \quad (1.3.5)$$

здесь  $N$  - нормаль к  $\Gamma$ .

Уравнение равновесия и граничные условия могут быть записаны в координатах начального состояния. Уравнение равновесия в координатах начального состояния имеет вид [37]

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathfrak{R} + \rho_0 f = 0 \quad (1.3.6)$$

Здесь  $\mathfrak{R}$  - первый (несимметричный) тензор напряжений Пиолы:

$$\mathfrak{R} = (1 + \Delta)\Psi^{*-1} \cdot \sigma \quad (1.3.7)$$

Граничные условия (1.3.5) в координатах начального состояния могут быть приведены к виду

$$n \cdot \mathfrak{R}|_{\gamma} = -P(1 + \Delta)n \cdot \Psi^{*-1} \quad (1.3.8)$$

Здесь  $\gamma$  - граница тела в начальном состоянии, которая в текущем состоянии переходит в границу  $\Gamma$ ;  $n$  - нормаль к  $\gamma$ .

Существуют и другие виды тензоров напряжений. Второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа  $\overset{0}{\Sigma}$  определяется следующим образом:

$$\overset{0}{\Sigma} = \mathfrak{R} \cdot \Psi^{-1} = (1 + \Delta)\Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1} \quad (1.3.9)$$

Этот тензор симметричен, поэтому его в ряде случаев более удобно использовать, чем первый тензор напряжений Пиолы [46, 47].

Уравнения равновесия (1.3.6) и граничные условия (1.3.8) с учетом (1.3.9) можно переписать в виде

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left( \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right) + \rho_0 f = 0 \quad (1.3.10)$$

$$n \cdot \overset{0}{\Sigma} \Big|_{\gamma} = -P(1 + \Delta)n \cdot \Psi^{*-1} \cdot \Psi^{-1} \quad (1.3.11)$$

Тензоры  $\mathfrak{K}$  и  $\overset{0}{\Sigma}$  применяются в качестве вспомогательных величин при постановке и решении задач [28, 29].

#### 1.4. Определяющие соотношения

В механике деформируемого твердого тела термином «определяющие (иногда физические, конституционные) соотношения» называют зависимость между напряжениями и деформациями [28, 29]. Например, это может быть зависимость между каким-либо из тензоров напряжений, рассмотренных в предыдущем параграфе, и тензором деформации (либо тензорной мерой деформации), которые соответствуют данному тензору напряжений. Эта зависимость описывает механические свойства материала.

Для упругого материала предполагается наличие упругого потенциала [37]. Если существует потенциал  $W$ , то соответствующие ему определяющие соотношения могут быть записаны в базисе начального состояния в виде

$$\overset{0}{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial E} \quad (1.4.1)$$

для упругого сжимаемого материала или в виде

$$\overset{0}{\Sigma} = -p \left( I + 2 \overset{0}{E} \right) + \frac{\partial W}{\partial E} \quad (1.4.2)$$

для упругого несжимаемого материала [37].

В базисе текущего состояния для изотропного упругого материала эти формулы могут быть записаны следующим образом:

$$\sigma = (1 + \Delta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial E} \cdot (I - 2E) \quad (1.4.3)$$

$$\sigma = -pI + \frac{\partial W}{\partial E} \cdot (I - 2E) \quad (1.4.4)$$

Формула (1.4.3) справедлива для сжимаемого, а (1.4.4) - для несжимаемого упругого материала [37].

Для изотропного упругого материала потенциал  $W$  является функцией инвариантов соответствующего тензора деформаций. Примером является потенциал Мурнагана [37]. Для потенциала Мурнагана определяющие соотношения, записанные в базисе начального состояния, имеют вид

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda(\overset{0}{E} : I)I + 2G\overset{0}{E} + 3C_3(\overset{0}{E} : I)^2I + C_4(E^2 : I)I + 2C_4(\overset{0}{E} : I)\overset{0}{E} + 3C_5\overset{0}{E}^2 \quad (1.4.5)$$

В работе мы будем использовать материал Мурнагана для описания механических свойств корда. Свойства резины будут описываться определяющими соотношениями Муни-Ривлина, учитывающим слабосжимаемость резины [37]:

$$\overset{0}{\Sigma} = 2(\varphi_0I + \varphi_1G + \varphi_2G^2) \quad (1.4.6)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{C_1}{\sqrt[3]{I_3}} + \frac{I_1C_2}{I_3^{2/3}} + I_2 \left( -\frac{C_1I_1}{3I_3^{4/3}} - \frac{2C_2I_2}{3I_3^{5/3}} + \frac{D_1}{2\sqrt{I_2}} \right),$$

$$\varphi_1 = -\frac{C_2}{I_3^{2/3}} - I_1 \left( -\frac{C_1I_1}{3I_3^{4/3}} - \frac{2C_2I_2}{3I_3^{5/3}} + \frac{D_1}{2\sqrt{I_2}} \right),$$

$$\varphi_2 = -\frac{C_1I_1}{3I_3^{4/3}} - \frac{2C_2I_2}{3I_3^{5/3}} + \frac{D_1}{2\sqrt{I_2}},$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2,$$

$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – главные удлинения.

Слагаемые, содержащие  $D_1$ , добавлены в формулы для учёта сжимаемости резины.

## Глава 2. Метод и алгоритм численной оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов при конечных деформациях

### 2.1. Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим представительный объём, заполненный резинокордным композитом. **Эффективным (осреднённым) материалом** мы назовём однородный материал, удовлетворяющий условию: если этим материалом заполнить представительный объём, то средние напряжения по объёму в исходном и эффективном материале будут равны при одинаковых перемещениях граней [26, 30, 76, 77].

Опишем способ построения эффективных определяющих соотношений для резинокордного материала с использованием приведённых выше определений. Обозначения и основные соотношения приводятся в соответствии с их изложением в работах [26, 30, 76, 77].

Для представительного объёма  $V_0$ , выделенного в начальном состоянии (до деформации) решаем определённое количество последовательностей краевых задач теории упругости [29, 46, 47, 50]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2.1.1)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\Gamma_0} = r \cdot (\psi^e - I) \quad (2.1.2)$$

Механические свойства корда могут описываться законом Гука или определяющими соотношениями Мурнагана [37]:

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda \overset{0}{(E : I)} + 2G \overset{0}{E} + 3C_3 \overset{0}{(E : I)^2} I + C_4 \overset{0}{(E^2 : I)} I + 2C_4 \overset{0}{(E : I)} \overset{0}{E} + 3C_5 \overset{0}{E^2} \quad (2.1.3)$$

Свойства резины описываются потенциалом Муни-Ривлина [37].

Каждая последовательность решаемых задач соответствует определённому виду тензора деформаций Грина  $\overset{0}{E}^e$  эффективного материала (и определённому

виду аффинора  $\psi^e$  в граничных условиях). В свою очередь, разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации. Могут быть решены следующие последовательности задач [16, 26]:

- 1)  $\overset{0}{E}_{11} = q$  – растяжение или сжатие вдоль оси  $X$ ;
- 2)  $\overset{0}{E}_{22} = q$  – растяжение или сжатие вдоль оси  $Y$ ;
- 3)  $\overset{0}{E}_{33} = q$  – растяжение или сжатие вдоль оси  $Z$ ;
- 4)  $\overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$  – сдвиг в плоскости  $XY$ ;
- 5)  $\overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$  – сдвиг в плоскости  $XZ$ ;
- 6)  $\overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$  – сдвиг в плоскости  $YZ$ ;
- 7)  $\overset{0}{E}_{11} = \overset{0}{E}_{22} = q$  – композиция растяжений или сжатий вдоль двух осей:  $X$  и  $Y$ ;
- 8)  $\overset{0}{E}_{11} = \overset{0}{E}_{33} = q$  – композиция растяжений или сжатий вдоль двух осей:  $X$  и  $Z$ ;
- 9)  $\overset{0}{E}_{11} = \overset{0}{E}_{22} = \overset{0}{E}_{33} = q$  – всестороннее растяжение или сжатие;
- 10)  $\overset{0}{E}_{11} = q, \overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $X$  и сдвига в плоскости  $XY$ ;
- 11)  $\overset{0}{E}_{22} = q, \overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $Y$  и сдвига в плоскости  $XY$ ;
- 12)  $\overset{0}{E}_{33} = q, \overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $Z$  и сдвига в плоскости  $XY$ ;
- 13)  $\overset{0}{E}_{11} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $X$  и сдвига в плоскости  $XZ$ ;
- 14)  $\overset{0}{E}_{22} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $Y$  и сдвига в плоскости  $XZ$ ;
- 15)  $\overset{0}{E}_{33} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $Z$  и сдвига в плоскости  $XZ$ ;
- 16)  $\overset{0}{E}_{11} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $X$  и сдвига в плоскости  $YZ$ ;

- 17)  $\overset{0}{E}_{22} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $Y$  и сдвига в плоскости  $YZ$ ;
- 18)  $\overset{0}{E}_{33} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$  – композиция растяжения или сжатия вдоль оси  $Z$  и сдвига в плоскости  $YZ$ ;
- 19)  $\overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$  – композиция сдвигов в плоскостях  $XY$  и  $XZ$ ;
- 20)  $\overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$  – композиция сдвигов в плоскостях  $XY$  и  $YZ$ ;
- 21)  $\overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$  – композиция сдвигов в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ ;

где  $q$  – величина деформации.

Решая каждую из задач каждой последовательности, находим поле тензора напряжений  $\sigma$ . Зная его, вычисляем тензор напряжений  $\sigma^e$  эффективного материала с помощью осреднения по объёму [26]:

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} N \cdot \sigma R d\Gamma \quad (2.1.4)$$

Последнее равенство в (2.1.4) получено с использованием формулы Гаусса-Остроградского и того, что

$$\nabla \cdot (\sigma R) = (\nabla \cdot \sigma) R + \sigma (\nabla \cdot R)^* = (\nabla \cdot \sigma) R + \sigma \cdot I = \sigma \quad (2.1.5)$$

Зная аффиноры деформаций (который был нами задан) и тензор истинных напряжений, мы можем вычислить тензор деформаций Грина и второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа эффективного материала:

$$\overset{0}{E}^e = \frac{1}{2} (\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \quad (2.1.6)$$

$$\overset{0}{\Sigma}^e = (\det \Psi^e) (\Psi^e)^{* -1} \cdot \sigma^e \cdot (\Psi^e)^{-1} \quad (2.1.7)$$

Для каждой последовательности задач (т.е. для каждого типа нагружения), используя метод наименьших квадратов, найдём зависимость тензора Пиолы-Кирхгофа от величины нагружения  $q$  в следующем виде:

$$\overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = \alpha_{ij}^0 q + \alpha_{ij}^1 q^2 \quad (2.1.8)$$

Эффективные определяющие соотношения будем искать в виде нелинейной зависимости тензора Пиолы-Кирхгофа  $\Sigma^e$  от тензора Грина  $E^e$  :

$$\Sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^0 E_{kl}^e + C_{ijklmn}^1 E_{kl}^e E_{mn}^e \quad (2.1.9)$$

Отметим, что задача нахождения эффективных определяющих соотношений резинокорда в линейном виде существенно проще, чем в нелинейном [53]. Для этого не требуется решать 21 последовательность задач [16] – достаточно решить шесть первых последовательностей [53, 58] из списка. Если в нелинейном случае каждая последовательность должна содержать три-четыре или более задачи (т.е. для каждого типа нагружения – три-четыре или более величины нагружения) – то в линейном случае достаточно одной задачи: нет необходимости использовать метод наименьших квадратов, поскольку (2.1.8) примет вид

$$\sigma_{ij}^e = \alpha_{ij} q \quad (2.1.10)$$

А эффективные свойства в этом случае будем искать в виде линейной зависимости тензора истинных напряжений  $\sigma^e$  от тензора Грина  $E^e$ , т.е. (2.1.9) примет вид

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^0 E_{kl}^e \quad (2.1.11)$$

## 2.2. Алгоритм, реализующий методику

На практике удобнее задавать не аффиноор деформаций эффективного материала, а тензор деформаций Грина – и, зная его, вычислять аффиноор из формулы (2.1.6). Поскольку аффиноор – несимметричный тензор второго ранга, определить его однозначно из симметричного тензора Грина не получится. Поэтому мы задаём его верхнетреугольным – тогда шесть его компонент однозначно определяются по шести независимым компонентам тензора Грина.

Вычислив аффиноор, мы прикладываем к модели граничные условия (2.1.2), решаем краевую задачу теории упругости и находим  $\sigma$ . С помощью осреднения по формуле (2.1.4) вычисляем эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ , далее из (2.1.7)

находим тензор Пиолы-Кирхгофа  $\Sigma^0$ . Затем для каждой последовательности задач строится зависимость компонент тензора Пиолы-Кирхгофа от величины деформации  $q$ . Эти зависимости аппроксимируются выражениями (2.1.8) [16]. Коэффициенты  $\alpha_{ij}^0$  и  $\alpha_{ij}^1$  определяются с использованием метода наименьших квадратов. Коэффициенты  $C_{ijkl}^0$  из (2.1.9) определяются через коэффициенты  $\alpha_{ij}^0$ , а коэффициенты  $C_{ijklmn}^1$  - через  $\alpha_{ij}^1$ , вычисленные для соответствующей последовательности задач – для этого необходимо решить систему из 21 линейного алгебраического уравнения.

Обратим внимание на то, что тензор Грина, к примеру, для первой из описанных в параграфе 2.1 последовательностей выглядит следующим образом:

$$E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть мы растягиваем модель по оси  $X$ , не давая ей при этом сжаться по осям  $Y$  и  $Z$ . И если при этом уровень деформаций  $q$  составит 10-20% и более – на столько же изменится объём модели резинокорда. Но резина является слабосжимаемым материалом, а при расчётах зачастую моделируется определяющими соотношениями, предполагающими абсолютную несжимаемость. Следовательно, при моделировании такого типа нагружения сильно (на несколько десятков процентов) изменится объём корда – т.е. корд будет подвергаться большим деформациям. Поскольку модули упругости корда на несколько порядков превышают модули упругости резины, в реальном резинокорде нити корда не испытывают больших деформаций. Поэтому нагружение указанного типа не является физическим для случая конечных деформаций. Для вычисления эффективных свойств резинокорда было решено модифицировать схему нагружения.

Модифицированные последовательности задач имеют следующий вид (для каждой последовательности приведён вид тензоров деформаций Грина и формулы для тензоров Пиолы-Кирхгофа):

$$\begin{aligned}
 1) \quad E^e &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -aq & 0 \\ 0 & 0 & -bq \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij11}^0 - aC_{ij22}^0 - bC_{ij33}^0)q + \\
 & (C_{ij1111}^1 - 2aC_{ij1122}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + a^2C_{ij2222}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + b^2C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(1)} q + \alpha_{ij}^{(1)} q^2 \\
 2) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & -cq \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij22}^0 - cC_{ij33}^0)q + (C_{ij2222}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + c^2C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(2)} q + \alpha_{ij}^{(2)} q^2 \\
 3) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dq & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (-dC_{ij22}^0 + C_{ij33}^0)q + (d^2C_{ij2222}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(3)} q + \alpha_{ij}^{(3)} q^2 \\
 4) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij12}^0 + C_{ij21}^0)q + 4C_{ij1212}^1 q^2 = \alpha_{ij}^{(4)} q + \alpha_{ij}^{(4)} q^2 \\
 5) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij13}^0 + C_{ij31}^0)q + 4C_{ij1313}^1 q^2 = \alpha_{ij}^{(5)} q + \alpha_{ij}^{(5)} q^2 \\
 6) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij23}^0 + C_{ij32}^0)q + 4C_{ij2323}^1 q^2 = \alpha_{ij}^{(6)} q + \alpha_{ij}^{(6)} q^2 \\
 E^e &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)q & 0 \\ 0 & 0 & -(b+c)q \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij11}^0 + (1-a)C_{ij22}^0 - (b+c)C_{ij33}^0)q + \\
 7) \quad & (C_{ij1111}^1 + 2(1-a)C_{ij1122}^1 - 2(b+c)C_{ij1133}^1 + (1-a^2)C_{ij2222}^1 - 2(1-a)(b+c)C_{ij2233}^1 + \\
 & (b+c)^2 C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(7)} q + \alpha_{ij}^{(7)} q^2
 \end{aligned}$$

$${}^0 E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -(a+d)q & 0 \\ 0 & 0 & (1-b)q \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij11}^0 - (a+d)C_{ij22}^0 + (1-b)C_{ij33}^0)q +$$

$$8) (C_{ij1111}^1 - 2(a+d)C_{ij1122}^1 + 2(1-b)C_{ij1133}^1 + (a+d)^2 C_{ij2222}^1 + 2(a+d)(1-b)C_{ij2233}^1 + (1-b)^2 C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(8)0} q + \alpha_{ij}^{(8)1} q^2$$

$${}^0 E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & (1-a-d)q & 0 \\ 0 & 0 & (1-b-c)q \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij11}^0 + (1-a-d)C_{ij22}^0 + (1-b-c)C_{ij33}^0)q +$$

$$9) (C_{ij1111}^1 + 2(1-a-d)C_{ij1122}^1 + 2(1-b-c)C_{ij1133}^1 + (1-a-d)^2 C_{ij2222}^1 + 2(1-a-d)(1-b-c)C_{ij2233}^1 + (1-b-c)^2 C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(9)0} q + \alpha_{ij}^{(9)1} q^2$$

$${}^0 E^e = \begin{pmatrix} q & q & 0 \\ q & -aq & 0 \\ 0 & 0 & -bq \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij11}^0 - aC_{ij22}^0 - bC_{ij33}^0 + 2C_{ij12}^0)q +$$

$$10) (C_{ij1111}^1 + 4C_{ij1112}^1 - 2aC_{ij1122}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + 4C_{ij1212}^1 - 4aC_{ij1222}^1 - 4bC_{ij1233}^1 + a^2 C_{ij2222}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + b^2 C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(10)0} q + \alpha_{ij}^{(10)1} q^2$$

$$11) {}^0 E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & q & 0 \\ 0 & 0 & -cq \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij22}^0 - cC_{ij33}^0 + 2C_{ij12}^0)q +$$

$$(4C_{ij1212}^1 + 4C_{ij1222}^1 - 4cC_{ij1233}^1 + C_{ij2222}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + c^2 C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(11)0} q + \alpha_{ij}^{(11)1} q^2$$

$$12) {}^0 E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & -dq & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (-dC_{ij22}^0 + C_{ij33}^0 + 2C_{ij12}^0)q +$$

$$(4C_{ij1212}^1 - 4dC_{ij1222}^1 + 4C_{ij1233}^1 + d^2 C_{ij2222}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + C_{ij3333}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(12)0} q + \alpha_{ij}^{(12)1} q^2$$

$$\overset{0}{E}^e = \begin{pmatrix} q & 0 & q \\ 0 & -aq & 0 \\ q & 0 & -bq \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = (C_{ij11}^0 - aC_{ij22}^0 - bC_{ij33}^0 + 2C_{ij13}^0)q +$$

$$13) (C_{ij1111}^1 + 4C_{ij1113}^1 - 2aC_{ij1122}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + 4C_{ij1313}^1 - 4aC_{ij1322}^1 - 4bC_{ij1333}^1 + a^2C_{ij2222}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + b^2C_{ij3333}^1)q^2 = \overset{(13)}{\alpha}_{ij}^0 q + \overset{(13)}{\alpha}_{ij}^1 q^2$$

$$14) \overset{0}{E}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \\ q & 0 & -cq \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = (C_{ij22}^0 - cC_{ij33}^0 + 2C_{ij13}^0)q +$$

$$(4C_{ij1313}^1 + 4C_{ij1322}^1 - 4cC_{ij1333}^1 + C_{ij2222}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + c^2C_{ij3333}^1)q^2 = \overset{(14)}{\alpha}_{ij}^0 q + \overset{(14)}{\alpha}_{ij}^1 q^2$$

$$15) \overset{0}{E}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & -dq & 0 \\ q & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = (-dC_{ij22}^0 + C_{ij33}^0 + 2C_{ij13}^0)q +$$

$$(4C_{ij1312}^1 - 4dC_{ij1322}^1 + 4C_{ij1333}^1 + d^2C_{ij2222}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + C_{ij3333}^1)q^2 = \overset{(15)}{\alpha}_{ij}^0 q + \overset{(15)}{\alpha}_{ij}^1 q^2$$

$$\overset{0}{E}^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -aq & q \\ 0 & q & -bq \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = (C_{ij11}^0 - aC_{ij22}^0 - bC_{ij33}^0 + 2C_{ij23}^0)q +$$

$$16) (C_{ij1111}^1 - 2aC_{ij1122}^1 + 4C_{ij1123}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + a^2C_{ij2222}^1 - 4aC_{ij2223}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + 4C_{ij2323}^1 - 4bC_{ij2333}^1 + b^2C_{ij3333}^1)q^2 = \overset{(16)}{\alpha}_{ij}^0 q + \overset{(16)}{\alpha}_{ij}^1 q^2$$

$$17) \overset{0}{E}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & q \\ 0 & q & -cq \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = (C_{ij22}^0 - cC_{ij33}^0 + 2C_{ij23}^0)q +$$

$$(C_{ij2222}^1 + 4C_{ij2223}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + 4C_{ij2323}^1 - 4cC_{ij2333}^1 + c^2C_{ij3333}^1)q^2 = \overset{(17)}{\alpha}_{ij}^0 q + \overset{(17)}{\alpha}_{ij}^1 q^2$$

$$18) \overset{0}{E}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dq & q \\ 0 & q & q \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{0}{\Sigma}_{ij}^e = (-dC_{ij22}^0 + C_{ij33}^0 + 2C_{ij23}^0)q +$$

$$(d^2C_{ij2222}^1 - 4dC_{ij2223}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + 4C_{ij2323}^1 + 4C_{ij2333}^1 + C_{ij3333}^1)q^2 = \overset{(18)}{\alpha}_{ij}^0 q + \overset{(18)}{\alpha}_{ij}^1 q^2$$

$$19) \quad E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & q \\ q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (2C_{ij12}^0 + 2C_{ij13}^0)q + (4C_{ij1212}^1 + 8C_{ij1213}^1 + 4C_{ij1313}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(19)0} q + \alpha_{ij}^{(19)1} q^2$$

$$20) \quad E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (2C_{ij12}^0 + 2C_{ij23}^0)q + (4C_{ij1212}^1 + 8C_{ij1223}^1 + 4C_{ij2323}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(20)0} q + \alpha_{ij}^{(20)1} q^2$$

$$21) \quad E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & q \\ q & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (2C_{ij13}^0 + 2C_{ij23}^0)q + (4C_{ij1313}^1 + 8C_{ij1323}^1 + 4C_{ij2323}^1)q^2 = \alpha_{ij}^{(21)0} q + \alpha_{ij}^{(21)1} q^2$$

В приведённых выражениях  $a, b, c, d$  – заданные коэффициенты. Их физический смысл следующий:

- 1) при растяжении вдоль оси  $X$  на 1% представительный объём сжимается вдоль оси  $Y$  на  $a\%$  и вдоль оси  $Z$  на  $b\%$ ;
  - 2) при растяжении вдоль оси  $Y$  на 1% представительный объём сжимается вдоль оси  $Z$  на  $c\%$ ;
- при растяжении вдоль оси  $Z$  на 1% представительный объём сжимается на  $d\%$  вдоль оси  $Y$ .

Учитывая симметричность тензора деформаций Грина, примем  $C_{ijkl}^0 = C_{ijlk}^0$ .

Тогда нам достаточно найти следующие коэффициенты  $C_{ijkl}^0$ :

$$\begin{array}{ccc} C_{ij11}^0 & C_{ij22}^0 & C_{ij33}^0 \\ C_{ij12}^0 & C_{ij23}^0 & \\ C_{ij13}^0 & & \end{array}$$

Эти шесть коэффициентов вычисляются из результатов первых шести последовательностей задач. Для этого решается система из шести линейных алгебраических уравнений. Формулы для коэффициентов выглядят следующим образом.

$$1) \quad C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)0} + a \alpha_{ij}^{(2)0} + (ac + b) \frac{d \alpha_{ij}^{(2)0} + \alpha_{ij}^{(3)0}}{1 - cd}$$

$$2) C_{ij22} = \frac{\alpha_{ij}^{(2)0} + c\alpha_{ij}^{(3)0}}{1 - cd}$$

$$3) C_{ij33} = \frac{d\alpha_{ij}^{(2)0} + \alpha_{ij}^{(3)0}}{1 - cd}$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{\alpha_{ij}^{(4)0}}{2}$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{\alpha_{ij}^{(5)0}}{2}$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{\alpha_{ij}^{(6)0}}{2}$$

Учитывая симметричность тензора деформаций Грина и вид эффективных определяющих соотношений (2.1.9), примем  $C_{ijklmn}^1 = C_{ijlkmn}^1$ ,  $C_{ijklmn}^1 = C_{ijklnm}^1$ ,

$C_{ijklmn}^1 = C_{ijmnlk}^1$ . Тогда нам достаточно найти следующие коэффициенты  $C_{ijklmn}^1$ :

$$\begin{array}{cccccc} C_{ij1111}^1 & C_{ij1212}^1 & C_{ij1313}^1 & C_{ij2222}^1 & C_{ij2323}^1 & C_{ij3333}^1 \\ C_{ij1112}^1 & C_{ij1213}^1 & C_{ij1322}^1 & C_{ij2223}^1 & C_{ij2333}^1 & \\ C_{ij1113}^1 & C_{ij1222}^1 & C_{ij1323}^1 & C_{ij2233}^1 & & \\ C_{ij1122}^1 & C_{ij1223}^1 & C_{ij1333}^1 & & & \\ C_{ij1123}^1 & C_{ij1233}^1 & & & & \\ C_{ij1133}^1 & & & & & \end{array}$$

Этот 21 коэффициент вычисляется с помощью решения системы из 21 линейного алгебраического уравнения:

$$1) C_{ij1111}^1 - 2aC_{ij1122}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + a^2C_{ij2222}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + b^2C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(1)1}$$

$$2) C_{ij2222}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + c^2C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(2)1}$$

$$3) d^2C_{ij2222}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(3)1}$$

$$4) 4C_{ij1212}^1 = \alpha_{ij}^{(4)1}$$

- 5)  $4C_{ij1313}^1 = \alpha_{ij}^{(5)}$
- 6)  $4C_{ij2323}^1 = \alpha_{ij}^{(6)}$
- 7)  $C_{ij1111}^1 + 2(1-a)C_{ij1122}^1 - 2(b+c)C_{ij1133}^1 + (1-a^2)C_{ij2222}^1 - 2(1-a)(b+c)C_{ij2233}^1 + (b+c)^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(7)}$
- 8)  $C_{ij1111}^1 - 2(a+d)C_{ij1122}^1 + 2(1-b)C_{ij1133}^1 + (a+d)^2 C_{ij2222}^1 + 2(a+d)(1-b)C_{ij2233}^1 + (1-b)^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(8)}$
- 9)  $C_{ij1111}^1 + 2(1-a-d)C_{ij1122}^1 + 2(1-b-c)C_{ij1133}^1 + (1-a-d)^2 C_{ij2222}^1 + 2(1-a-d)(1-b-c)C_{ij2233}^1 + (1-b-c)^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(9)}$
- 10)  $C_{ij1111}^1 + 4C_{ij1112}^1 - 2aC_{ij1122}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + 4C_{ij1212}^1 - 4aC_{ij1222}^1 - 4bC_{ij1233}^1 + a^2 C_{ij2222}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + b^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(10)}$
- 11)  $4C_{ij1212}^1 + 4C_{ij1222}^1 - 4cC_{ij1233}^1 + C_{ij2222}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + c^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(11)}$
- 12)  $4C_{ij1212}^1 - 4dC_{ij1222}^1 + 4C_{ij1233}^1 + d^2 C_{ij2222}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(12)}$
- 13)  $C_{ij1111}^1 + 4C_{ij1113}^1 - 2aC_{ij1122}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + 4C_{ij1313}^1 - 4aC_{ij1322}^1 - 4bC_{ij1333}^1 + a^2 C_{ij2222}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + b^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(13)}$
- 14)  $4C_{ij1313}^1 + 4C_{ij1322}^1 - 4cC_{ij1333}^1 + C_{ij2222}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + c^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(14)}$
- 15)  $4C_{ij1312}^1 - 4dC_{ij1322}^1 + 4C_{ij1333}^1 + d^2 C_{ij2222}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(15)}$
- 16)  $C_{ij1111}^1 - 2aC_{ij1122}^1 + 4C_{ij1123}^1 - 2bC_{ij1133}^1 + a^2 C_{ij2222}^1 - 4aC_{ij2223}^1 + 2abC_{ij2233}^1 + 4C_{ij2323}^1 - 4bC_{ij2333}^1 + b^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(16)}$
- 17)  $C_{ij2222}^1 + 4C_{ij2223}^1 - 2cC_{ij2233}^1 + 4C_{ij2323}^1 - 4cC_{ij2333}^1 + c^2 C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(17)}$
- 18)  $d^2 C_{ij2222}^1 - 4dC_{ij2223}^1 - 2dC_{ij2233}^1 + 4C_{ij2323}^1 + 4C_{ij2333}^1 + C_{ij3333}^1 = \alpha_{ij}^{(18)}$
- 19)  $4C_{ij1212}^1 + 8C_{ij1213}^1 + 4C_{ij1313}^1 = \alpha_{ij}^{(19)}$
- 20)  $4C_{ij1212}^1 + 8C_{ij1223}^1 + 4C_{ij2323}^1 = \alpha_{ij}^{(20)}$
- 21)  $4C_{ij1313}^1 + 8C_{ij1323}^1 + 4C_{ij2323}^1 = \alpha_{ij}^{(21)}$

Выражения для коэффициентов  $C_{ijklmn}^1$  находим в такой последовательности.

Из уравнений (4-6) сразу вычисляем:

$$C_{ij1212}^1 = \frac{1}{4} \alpha_{ij}^{(4)},$$

$$C_{ij1313}^1 = \frac{1}{4} \alpha_{ij}^{(5)},$$

$$C_{ij2323}^1 = \frac{1}{4} \alpha_{ij}^{(6)}$$

Зная их, из уравнений (19-21) находим:

$$C_{ij1213}^1 = \frac{1}{8} \alpha_{ij}^{(19)} - \frac{1}{2} C_{ij1212}^1 - \frac{1}{2} C_{ij1313}^1,$$

$$C_{ij1223}^1 = \frac{1}{8} \alpha_{ij}^{(20)} - \frac{1}{2} C_{ij1212}^1 - \frac{1}{2} C_{ij2323}^1,$$

$$C_{ij1323}^1 = \frac{1}{8} \alpha_{ij}^{(21)} - \frac{1}{2} C_{ij1313}^1 - \frac{1}{2} C_{ij2323}^1$$

Решая систему из уравнений (1-3, 7-9), получаем:

$$C_{ij2222}^1 = \frac{\alpha_3 c^2 + (\alpha_1 - \alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9)c + \alpha_2}{(1 - cd)^2}$$

$$C_{ij2233}^1 = \frac{1}{2} \frac{(cd + 1)(\alpha_1 - \alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9) + 2c\alpha_3 + 2d\alpha_2}{(1 - cd)^2}$$

$$C_{ij3333}^1 = \frac{\alpha_2 d^2 + (\alpha_1 - \alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9)d + \alpha_3}{(1 - cd)^2}$$

$$C_{ij1122}^1 = \frac{1}{2} \frac{(2acd + cd^2 - 2a + 1)C_{ij2222}^1 + (2bcd - 2cd - 2b - 2c)C_{ij2233}^1 + (1 + c)(cC_{ij3333}^1 + \alpha_1) - c\alpha_8 - \alpha_7}{cd - 1}$$

$$C_{ij1133}^1 = \frac{1}{2} \frac{(2bcd + c^2 d - 2b + 1)C_{ij3333}^1 + (2acd - 2cd - 2a - 2d)C_{ij2233}^1 + (1 + d)(dC_{ij2222}^1 + \alpha_1) - d\alpha_7 - \alpha_8}{cd - 1}$$

$$C_{ij1111}^1 = \alpha_1 + 2aC_{ij1122}^1 + 2bC_{ij1133}^1 - a^2C_{ij2222}^1 - 2abC_{ij2233}^1 - b^2C_{ij3333}^1$$

Из уравнений (10-12) мы найдём:

$$C_{ij1222}^1 = \frac{1}{4} \frac{(4c + 4)C_{ij1212}^1 + (cd^2 + 1)C_{ij2222}^1 - (2cd + 2c)C_{ij2233}^1 + (c^2 + c)C_{ij3333}^1 - c\alpha_{12} - \alpha_{11}}{cd - 1}$$

$$C_{ij1233}^1 = \frac{1}{4} \frac{(4d + 4)C_{ij1212}^1 + (c^2 d + 1)C_{ij3333}^1 - (2cd + 2d)C_{ij2233}^1 + (d^2 + d)C_{ij2222}^1 - d\alpha_{11} - \alpha_{12}}{cd - 1}$$

$$C_{ij1112}^1 = \frac{1}{4}\alpha_{10} - \frac{1}{4}C_{ij1111}^1 + \frac{1}{2}aC_{ij1122}^1 + \frac{1}{2}bC_{ij1133}^1 - C_{ij1212}^1 + aC_{ij1222}^1 + bC_{ij1233}^1 - \frac{1}{4}a^2C_{ij2222}^1 - \frac{1}{2}abC_{ij2233}^1 - \frac{1}{4}b^2C_{ij3333}^1$$

Из (13-15):

$$C_{ij1322}^1 = \frac{1}{4} \frac{(4c+4)C_{ij1313}^1 + (cd^2+1)C_{ij2222}^1 - (2cd+2c)C_{ij2233}^1 + (c^2+c)C_{ij3333}^1 - c\alpha_{15} - \alpha_{14}}{cd-1}$$

$$C_{ij1333}^1 = \frac{1}{4} \frac{(4d+4)C_{ij1313}^1 + (c^2d+1)C_{ij3333}^1 - (2cd+2d)C_{ij2233}^1 + (d^2+d)C_{ij2222}^1 - d\alpha_{14} - \alpha_{15}}{cd-1}$$

$$C_{ij1113}^1 = \frac{1}{4}\alpha_{13} - \frac{1}{4}C_{ij1111}^1 + \frac{1}{2}aC_{ij1122}^1 + \frac{1}{2}bC_{ij1133}^1 - C_{ij1313}^1 + aC_{ij1322}^1 + bC_{ij1333}^1 - \frac{1}{4}a^2C_{ij2222}^1 - \frac{1}{2}abC_{ij2233}^1 - \frac{1}{4}b^2C_{ij3333}^1$$

Из (16-18):

$$C_{ij2223}^1 = \frac{1}{4} \frac{(4c+4)C_{ij2323}^1 + (cd^2+1)C_{ij2222}^1 - (2cd+2c)C_{ij2233}^1 + (c^2+c)C_{ij3333}^1 - c\alpha_{18} - \alpha_{17}}{cd-1}$$

$$C_{ij2333}^1 = \frac{1}{4} \frac{(4d+4)C_{ij2323}^1 + (c^2d+1)C_{ij3333}^1 - (2cd+2d)C_{ij2233}^1 + (d^2+d)C_{ij2222}^1 - d\alpha_{17} - \alpha_{18}}{cd-1}$$

$$C_{ij1123}^1 = \frac{1}{4}\alpha_{16} - \frac{1}{4}C_{ij1111}^1 + \frac{1}{2}aC_{ij1122}^1 + \frac{1}{2}bC_{ij1133}^1 - C_{ij2323}^1 + aC_{ij2223}^1 + bC_{ij2333}^1 - \frac{1}{4}a^2C_{ij2222}^1 - \frac{1}{2}abC_{ij2233}^1 - \frac{1}{4}b^2C_{ij3333}^1$$

В завершение параграфа следует отдельно сказать о приложении к представительному объёму граничных условий. Граничные условия в виде (2.1.2) означают, что перемещения каждой точки на границе представительного объёма во всех трёх направлениях жёстко определены – т.е. граница деформируется равномерно. Если мы возьмём представительный объём для однослойного резинокорда, в котором нити корда направлены вдоль оси  $X$ , и приложим граничные условия (2.1.2) для случая растяжения вдоль оси  $Y$  – результат деформации будет как на рис. 1. На рисунке нити корда (более жёсткие) изображены белым цветом, резина (более мягкая) – чёрным. Видно, что вблизи границы растяжение корда столь же велико, сколь и у резины – что не физично. Это показывает, что граничные условия (2.1.2) плохо подходят для вычисления эффективных свойств композитных материалов типа резинокорда – в которых армирующие волокна выходят на поверхность представительного объёма.

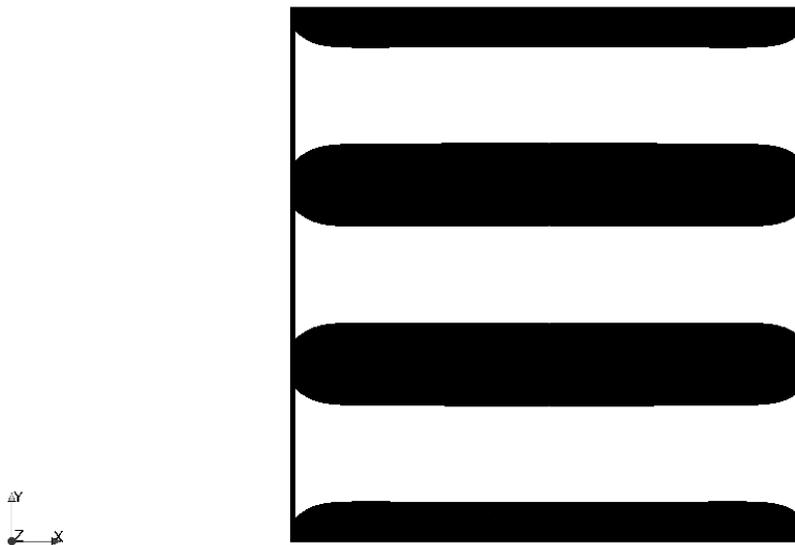


Рис. 1. Результат приложения неперодических граничных условий при растяжении представительного объёма вдоль оси  $Y$ .

Поэтому при оценке эффективных свойств резинокорда мы использовали периодические граничные условия. Представительный объём занимал область  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-c \leq z \leq c$ . Периодические граничные условия задавались следующим образом:

– при растяжении вдоль оси  $X$

$$\begin{aligned}
 u(a, y, z) &= u(-a, y, z) + \delta \\
 u(x, b, z) &= u(x, -b, z) \\
 u(x, y, c) &= u(x, y, -c) \\
 v(a, y, z) &= v(-a, y, z) \\
 v(x, b, z) &= v(x, -b, z) \\
 v(x, y, c) &= v(x, y, -c) \\
 w(a, y, z) &= w(-a, y, z) \\
 w(x, b, z) &= w(x, -b, z) \\
 w(x, y, c) &= w(x, y, -c)
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

– при сдвиге в плоскости  $XY$

$$\begin{aligned}
 u(a, y, z) &= u(-a, y, z) \\
 u(x, b, z) &= u(x, -b, z) + \delta \\
 u(x, y, c) &= u(x, y, -c) \\
 v(a, y, z) &= v(-a, y, z) \\
 v(x, b, z) &= v(x, -b, z) \\
 v(x, y, c) &= v(x, y, -c) \\
 w(a, y, z) &= w(-a, y, z) \\
 w(x, b, z) &= w(x, -b, z) \\
 w(x, y, c) &= w(x, y, -c)
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

При остальных растяжениях граничные условия задавались аналогично (2.2.1), при сдвигах – аналогично (2.2.2). Все приведённые в работе расчёты эффективных характеристик проводились с использованием периодических граничных условий.

### 2.3. Программная реализация решения

Данный алгоритм реализован в программном модуле САЕ «Фидесис» [94] с использованием метода конечных элементов [44, 91, 92]. Реализованы следующие шаги алгоритма:

- импорт модели представительного объёма и конечноэлементной сетки в формате \*.k; подготовка сетки к расчёту (построение массива граней элементов в случае его отсутствия; проверка правильности нумерации узлов в элементе; определение размеров модели; нумерация граней модели);
- задание типа и констант материала для резины и корда;
- задание количества шагов по деформациям (т.е. количества задач в каждой последовательности) и типов деформаций (количества последовательностей);
- решение краевой задачи теории упругости для каждой задачи каждой последовательности (задание граничных условий через аффинор деформаций, вычисляемый по тензору Грина; нахождение напряжённо-деформированного состояния в представительном объёме; вывод полученных полей напряжений и перемещений в файл формата \*.vtk);
- осреднение тензора напряжений Грина для каждой посчитанной задачи с использованием формулы (2.1.4); вычисление тензора Пиолы-Кирхгофа эффективного материала по формуле (2.1.7);
- вычисление коэффициентов  $\alpha_{ij}^0$ ,  $\alpha_{ij}^1$ ,  $C_{ijkl}^0$ ,  $C_{ijklmn}^1$ ; вывод коэффициентов  $C_{ijkl}^0$  и  $C_{ijklmn}^1$  в текстовый файл.

Программный модуль включает в себя две основные функции:

- 1) **GetPiolKirchHoff3D** в качестве входных данных принимает тип и величину деформации. В этой функции осуществляется приложение к представительному объёму граничных условий, задание свойств материалов, численное решение полученной краевой задачи теории упругости (с помощью расчётных ядер САЕ «Фидесис»), осреднение полученного поля напряжений. Функция возвращает осреднённый второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа. Программный код функции приведён в приложении 1.
- 2) **GetModuleRubberCord3D** в цикле запускает необходимое количество раз первую функцию с соответствующими входными данными и на каждой итерации сохраняет тензор Пиолы-Кирхгофа. После завершения цикла в функции с помощью метода наименьших квадратов вычисляются коэффициенты  $\alpha_{ij}^0$ ,  $\alpha_{ij}^1$ , а затем из решения системы линейных алгебраических уравнений – коэффициенты  $C_{ijkl}^0$  и  $C_{ijklmn}^1$ , которые выводятся в файл. Программный код функции приведён в приложении 2.

## Глава 3. Проверка корректности результатов (верификация)

### 3.1. Проверка корректности результатов счёта для однородного материала

Из определения эффективных свойств напрямую следует, что результатом оценки эффективных свойств однородного материала должны являться свойства этого материала. Если заполнить представительный объём материалом Гука с константами  $\lambda$  и  $G$  и посчитать его эффективные свойства в рамках линейной теории упругости, то для полученных коэффициентов  $C_{1122}$  и  $C_{1212}$  из (2.1.11) должны выполняться следующие равенства:

$$C_{1122} = \lambda, \quad C_{1212} = G \quad (3.1.1)$$

Если заполнить представительный объём материалом Мурнагана (11) и посчитать эффективные свойства с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности, то равенства, аналогичные (3.1.1), должны выполняться для коэффициентов  $C_{ijkl}^0$  из (2.1.9). Кроме того, для нелинейных коэффициентов должны выполняться следующие равенства (это следует из самих определяющих соотношений Мурнагана):

$$\begin{cases} 3C_3^e + 3C_4^e + 3C_5^e = C_{111111}^1 \\ 3C_3^e + C_4^e = C_{112222}^1 \\ 2C_4^e + 3C_5^e = 4C_{11212}^1 = 4C_{121112}^1 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Поскольку и определяющие соотношения Мурнагана, и эффективные определяющие соотношения в форме (2.1.9) представляют собой квадратичную зависимость тензора Пиолы-Кирхгофа от тензора Грина – приведённые равенства (3.1.1) и (3.1.2) должны выполняться в точности. Для тестирования было выбрано три типа материалов:

- сталь ( $\lambda = 1,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,806 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_3 = -0,32 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_4 = -2,3 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_5 = -2,68 \cdot 10^{11}$  Па);
- медь ( $\lambda = 1,07 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,477 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_3 = -0,93 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_4 = 1,71 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_5 = -5,31 \cdot 10^{11}$  Па);
- оргстекло ( $\lambda = 0,39 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,186 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_3 = -0,013 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_4 = -0,07 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_5 = 0,063 \cdot 10^{11}$  Па).

Для всех трёх равенства (3.1.1) и (3.1.2) выполнялись в точности.

Ниже приведено сравнение эффективных свойств однослойного и двуслойного резинокорда, полученных численным и аналитическим путём, для линейного случая. В нелинейном случае другого тестирования, кроме расчётов для сплошного материала Мурнагана и проверки выполнения (3.1.2), не проводилось.

### ***3.2. Сравнение численных результатов для однослойного резинокорда с аналитическими формулами***

Эффективные свойства для одного слоя резинокорда (см. рис. 2) в линейном виде можно определить аналитически.

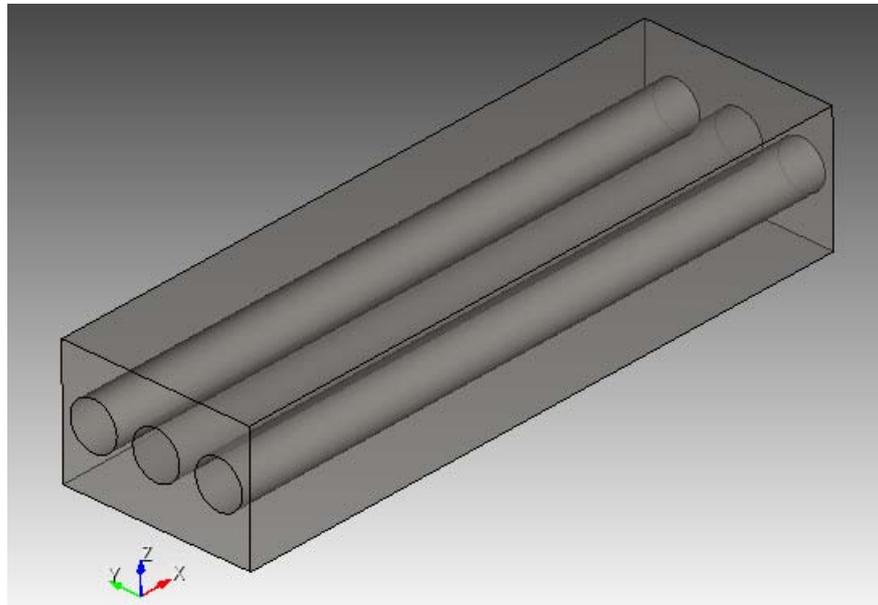


Рис. 2. Однослойный резинокорд

Ось  $X$  направлена вдоль нитей корда, ось  $Y$  – перпендикулярно ей в плоскости волокон, ось  $Z$  – перпендикулярно плоскости волокон. Обозначим  $\gamma_c$ ,  $\gamma_f$  – объ-

ёмные концентрации корда и резины соответственно;  $E_c$ ,  $E_r$  – модули Юнга корда и резины;  $\nu_r$ ,  $\nu_c$  – коэффициенты Пуассона. В соответствии с правилом смесей [42] эффективный материал получается ортотропным со следующими константами:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c \gamma_c + E_r \gamma_r \\
 \frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_3} &= \frac{\gamma_c}{E_c} + \frac{\gamma_r}{E_r} - \gamma_c \gamma_r \frac{\left( \frac{\nu_r}{E_r} - \frac{\nu_c}{E_c} \right)^2}{\frac{\gamma_c}{E_r} + \frac{\gamma_r}{E_c}} \\
 \nu_{12} = \nu_{13} &= \gamma_r \nu_r + \gamma_c \nu_c \\
 \nu_{23} = \nu_{32} &= \nu_r \\
 \nu_{21} = \nu_{31} &= \nu_{13} \frac{E_3}{E_1} \\
 G_{12} = G_{13} &= \frac{G_r}{\gamma_r} \\
 \frac{1}{G_{23}} &= \frac{\gamma_c}{G_c} + \frac{\gamma_r}{G_r}
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Формулы из книги Кристенсена [22] для слоя, армированного волокнами, представляют собой несколько более сложные (и более точные) соотношения для эффективных свойств резинокорда. Здесь  $G_c$ ,  $G_r$  – модули сдвига корда и резины соответственно;  $K_c$ ,  $K_r$  – модули объёмного сжатия корда и резины;  $K_{23}$  – модуль объёмного сжатия резинокорда при плоской деформации в плоскости, перпендикулярной волокнам.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c \gamma_c + E_r \gamma_r + \frac{4\gamma_c \gamma_r (\nu_c - \nu_r)^2 G_r}{\gamma_r \frac{G_r}{K_c + \frac{1}{3}G_c} + \gamma_c \frac{G_r}{K_r + \frac{1}{3}G_r} + 1} \\
 \nu_{12} = \nu_{13} &= \gamma_r \nu_r + \gamma_c \nu_c - \frac{4\gamma_c \gamma_r (\nu_c - \nu_r) \left( \frac{G_r}{K_r + \frac{1}{3}G_r} - \frac{G_r}{K_c + \frac{1}{3}G_c} \right)}{\gamma_r \frac{G_r}{K_c + \frac{1}{3}G_c} + \gamma_c \frac{G_r}{K_r + \frac{1}{3}G_r} + 1}
 \end{aligned}$$

$$K_{23} = K_r + \frac{G_r}{3} + \frac{\gamma_c}{\frac{1}{K_c - K_r + \frac{1}{3}(G_c - G_r)} + \frac{\gamma_r}{K_r + \frac{4}{3}G_r}}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_r \frac{(1 + \gamma_c)G_c + (1 - \gamma_r)G_r}{(1 - \gamma_c)G_c + (1 + \gamma_r)G_r}$$

$$G_{23} = G_r \left( 1 + \frac{\gamma_c}{\frac{G_r}{G_c - G_r} + \left( K_r + \frac{7}{3}G_r \right) \left( 2K_r + \frac{8}{3}G_r \right)} \right)$$

$$E_2 = E_3 = \frac{4G_{23}K_{23}}{K_{23} + G_{23} + \frac{4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}}{E_1}}$$

$$\nu_{23} = \nu_{32} = \frac{K_{23} - G_{23} - \frac{4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}}{E_1}}{K_{23} + G_{23} + \frac{4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}}{E_1}}$$

$$\nu_{21} = \nu_{31} = \frac{4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}}{E_1(K_{23} + G_{23}) + 4\nu_{12}^2 G_{23}K_{23}}$$

Получив аналитически константы ортотропного эффективного материала, вычисляем константы  $C_{ijkl}$  по следующим формулам:

$$C_1 = 1/E_1 \quad C_2 = 1/E_2 \quad C_3 = 1/E_3$$

$$C_{12} = -\nu_{12}/E_1 \quad C_{21} = -\nu_{21}/E_2$$

$$C_{13} = -\nu_{13}/E_1 \quad C_{31} = -\nu_{31}/E_3$$

$$C_{23} = -\nu_{23}/E_2 \quad C_{32} = -\nu_{32}/E_3$$

$$D = C_1 C_2 C_3 - C_1 C_{23}^2 - C_3 C_{12}^2 + 2C_{12} C_{13} C_{23} - C_2 C_{13}^2$$

$$C_{1111} = \frac{C_2 C_3 - C_{23}^2}{D}$$

$$C_{2222} = \frac{C_1 C_3 - C_{13}^2}{D}$$

$$C_{1111} = \frac{C_1 C_2 - C_{12}^2}{D}$$

$$C_{1122} = \frac{-C_{12} C_3 + C_{13} C_{23}}{D} \quad C_{2211} = C_{1122}$$

$$C_{1133} = \frac{C_{12}C_{23} - C_{13}C_{21}}{D} \quad C_{3311} = C_{1133}$$

$$C_{2233} = \frac{-C_{11}C_{23} + C_{12}C_{13}}{D} \quad C_{3322} = C_{2233}$$

$$C_{1212} = 2G_{12} \quad C_{1313} = 2G_{13} \quad C_{2323} = 2G_{23}$$

После чего сравниваем их с константами  $C_{ijkl}$ , полученными численно. Ниже приводятся графики такого сравнения. В расчётах модуль Юнга корда был равен 2000 МПа, коэффициент Пуассона 0,25; модуль Юнга резины 2 МПа, коэффициент Пуассона 0,4; объёмная концентрация корда варьировалась в пределах от 10 до 70%. Штриховая синяя линия на графиках соответствует численному решению, сплошная красная – правилу смесей, штрихпунктирная зелёная – формулам Кристенсена.

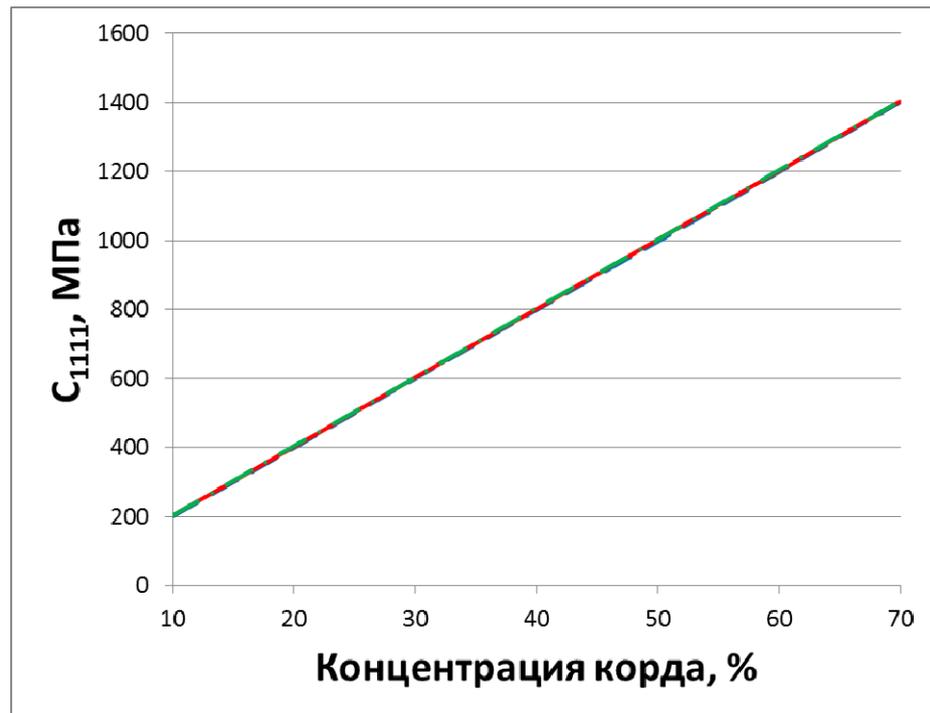


Рис. 3. Зависимость коэффициента  $C_{1111}$  от объёмной концентрации корда

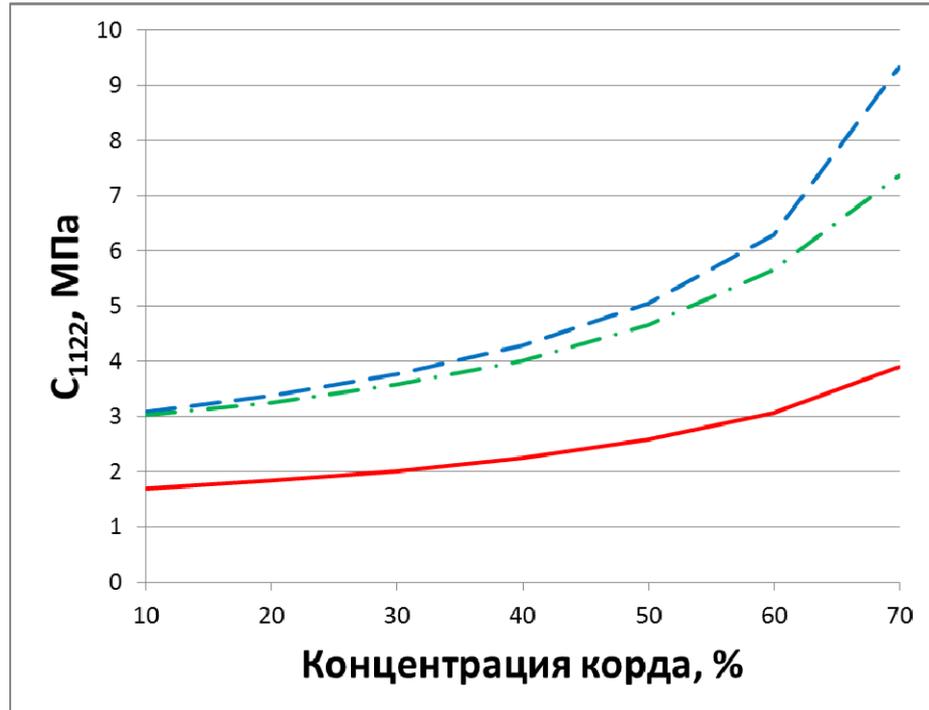


Рис. 4. Зависимость коэффициента  $C_{1122}$  от объёмной концентрации корда

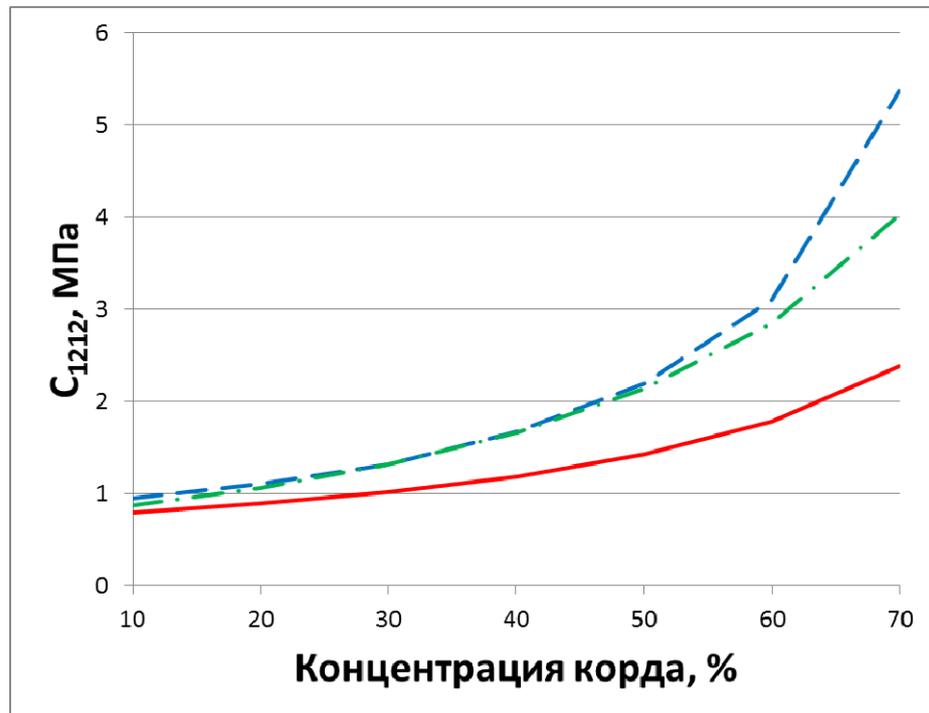


Рис. 5. Зависимость коэффициента  $C_{1212}$  от объёмной концентрации корда

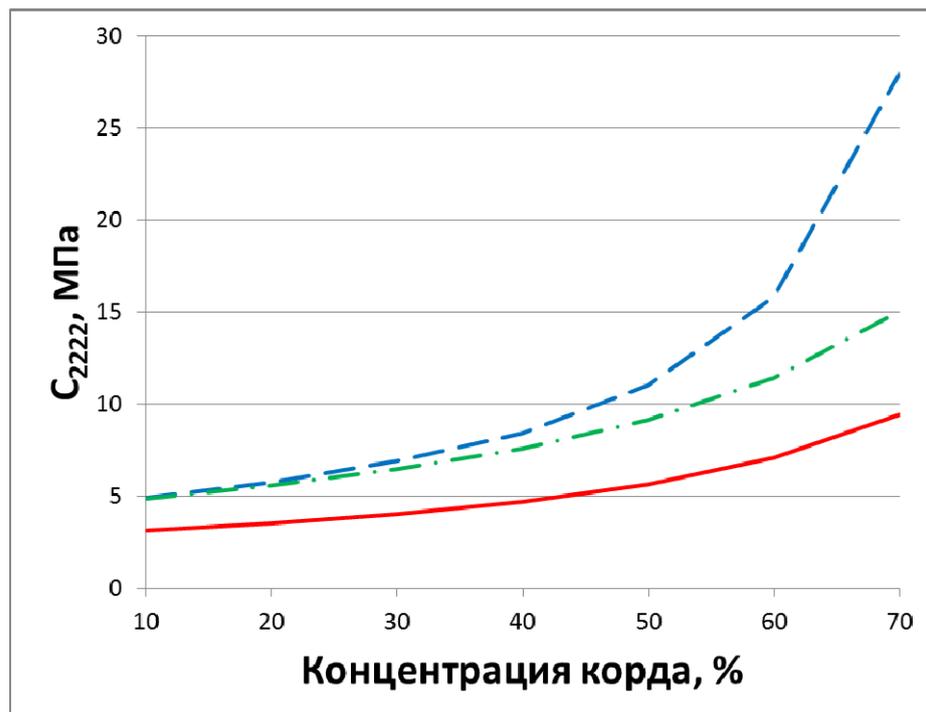


Рис. 6. Зависимость коэффициента  $C_{2222}$  от объемной концентрации корда

Как видно из графика для коэффициента  $C_{1111}$  (рис. 3), численное и аналитические решения совпадают для этого коэффициента при любой объемной концентрации корда. Для остальных коэффициентов графики имеют примерно одинаковый характер. При концентрациях корда порядка 10-20% (это диапазон, в котором применимы аналитические формулы) численное решение совпадает с формулами Кристенсена с хорошей точностью (в пределах 5%), а при увеличении концентрации точность совпадения ухудшается. Точность совпадения результатов с правилом смесей меньше (сами эти формулы менее точны по сравнению с формулами Кристенсена) – и точно так же относительная ошибка увеличивается при увеличении концентрации корда.

Из тестовых расчётов можно сделать вывод, что численные результаты хорошо совпадают с аналитическими (особенно с формулами Кристенсена) в диапазоне концентраций корда 10-20%, для которого эти формулы наиболее подходят.

### 3.3. Сравнение численных результатов для двуслойного резинокорда с аналитическими формулами

Нередко используется многослойный резинокорд, в котором направление нитей корда чередуется от слоя к слою. На рис. 7 для примера представлен двуслойный резинокорд.

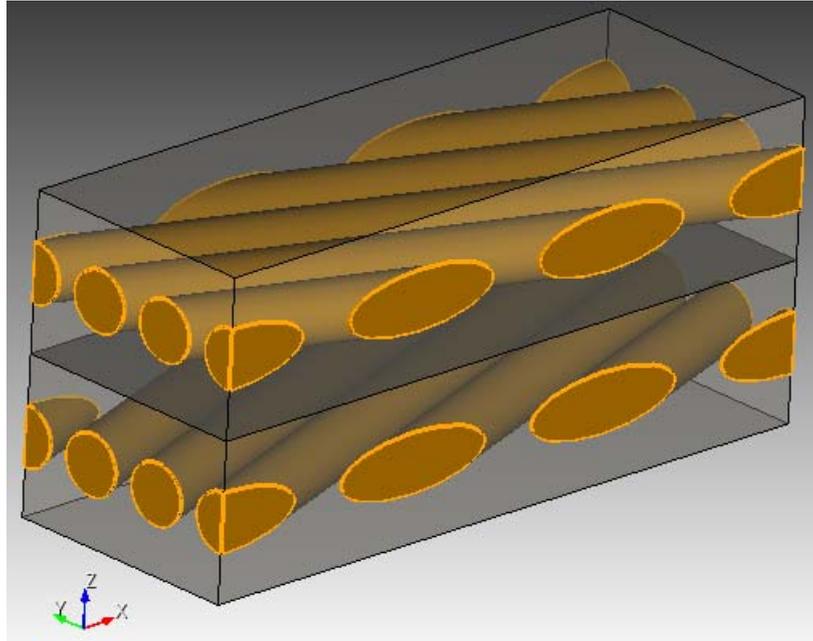


Рис. 7. Двуслойный резинокорд

Формулы для оценки эффективных свойств такого материала приводятся в книге [3]:

$$C_{1111} = \frac{4G_r h_{add} (\sin^4 \beta + \cos^4 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta)}{h} + \frac{\pi d^2 i E_c \sin^4 \beta}{4th}$$

$$C_{1122} = -\frac{4G_r h_{add} (\sin^4 \beta + \cos^4 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta)}{h} + \frac{\pi d^2 i E_c \cos^2 \beta \sin^2 \beta}{4th}$$

$$C_{2222} = \frac{4G_r h_{add} (\sin^4 \beta + \cos^4 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta)}{h} + \frac{\pi d^2 i E_c \cos^4 \beta}{4th}$$

$$C_{1212} = \frac{\pi d^2 i E_c \cos^2 \beta \sin^2 \beta}{4th}$$

$$\text{где } h_{add} = h + nd \left( \frac{t}{d} \left( \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{t}\right)^2}} \arctan \sqrt{\frac{t+d}{t-d}} - \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right),$$

$h$  – полная толщина резинокорда,  
 $n$  – количество слоёв,  
 $d$  – диаметр нити корда,  
 $t$  – шаг нитей корда (т.е. расстояние между осями соседних нитей),  
 $\beta$  – угол между нитями корда в слое и осью X,  
 $E_c$  – модуль Юнга корда,  
 $G_r$  – модуль сдвига резины.

Проводилось сравнение эффективных свойств двуслойного резинокорда, посчитанных численно и аналитически с помощью указанных формул, для угла  $\beta$  от 10 до 80 градусов. Толщина резинокорда составляла 4 мм (по 2 мм на каждый слой), диаметр нити корда 0,75 мм, шаг нитей – 1 мм. Модуль Юнга корда 50000 МПа, коэффициент Пуассона 0,34; модуль Юнга резины 2 МПа, коэффициент Пуассона 0,49. Ниже приведены графики, на которых штриховая синяя линия соответствует численному решению, сплошная красная – аналитическому с помощью формул из книги Бидермана [3].

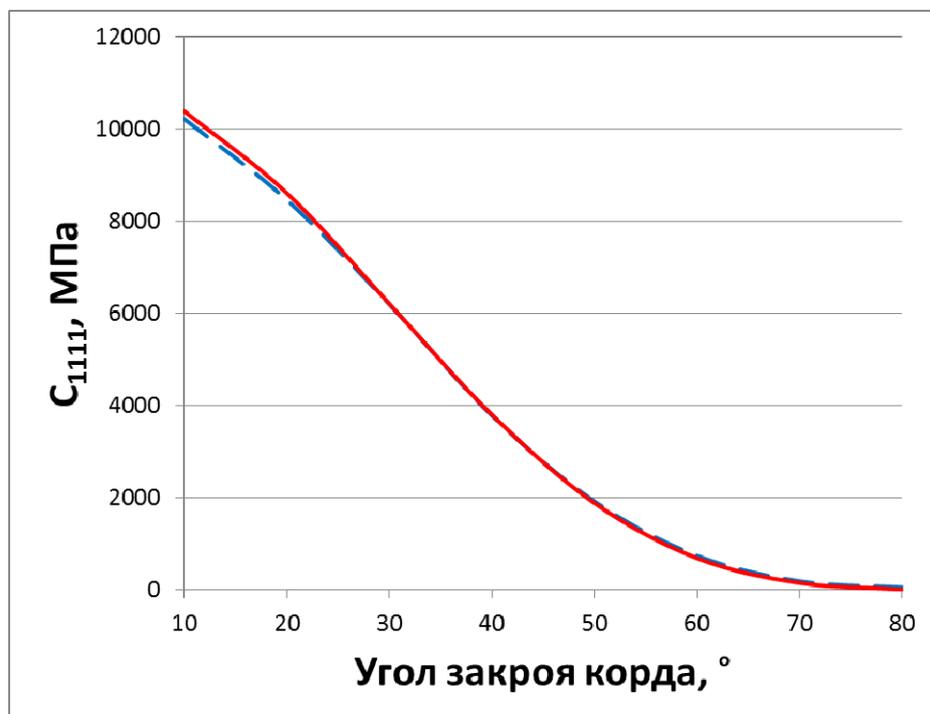


Рис. 8. Зависимость коэффициента  $C_{1111}$  от угла наклона нитей корда

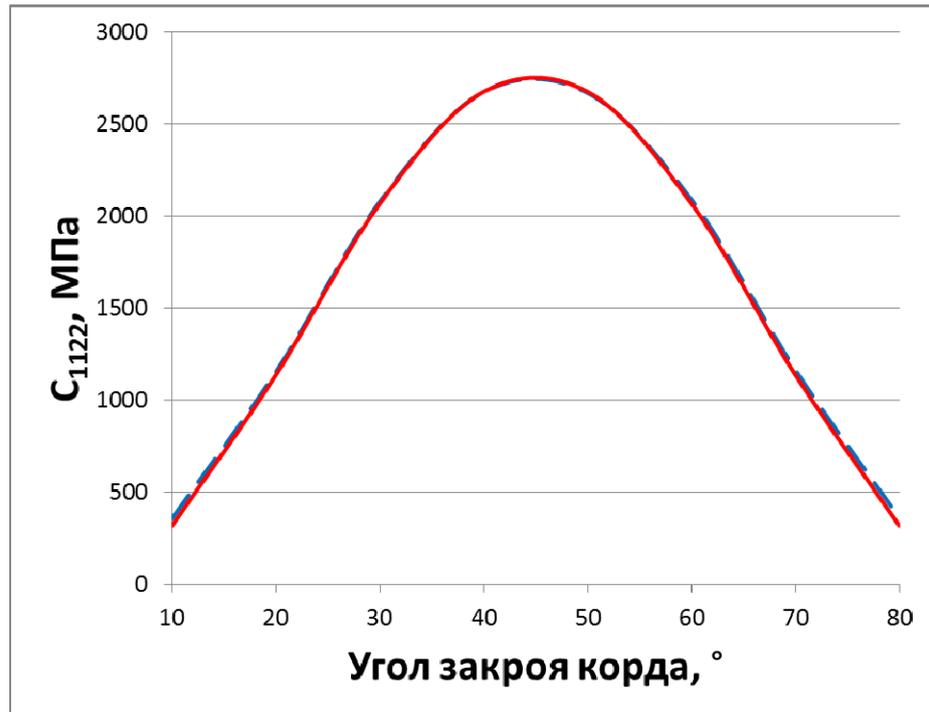


Рис. 9. Зависимость коэффициента  $C_{1122}$  от угла наклона нитей корда

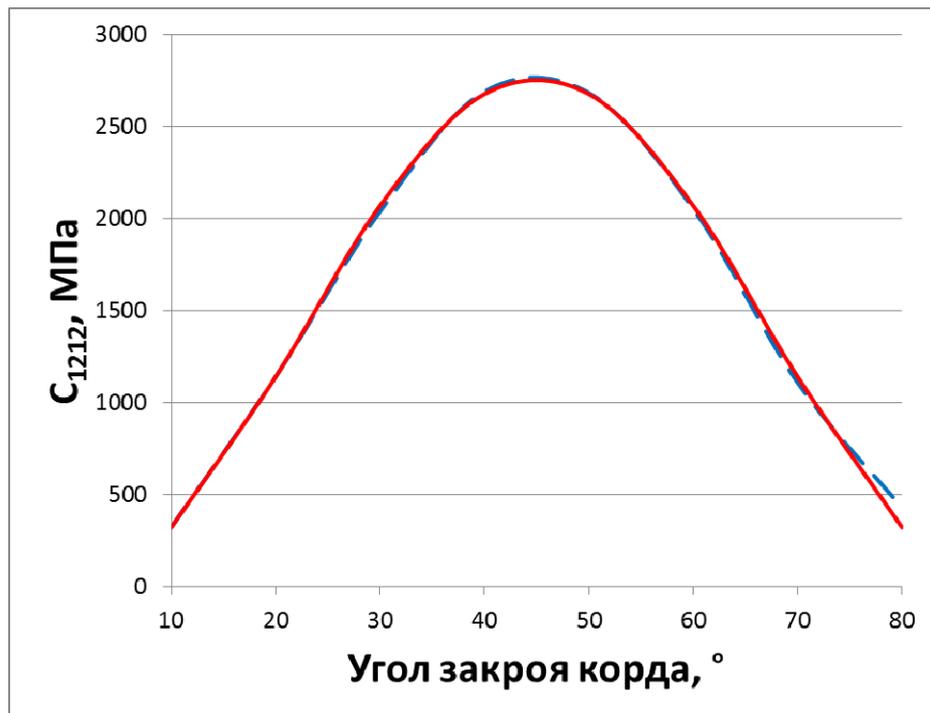


Рис. 10. Зависимость коэффициента  $C_{1212}$  от угла наклона нитей корда

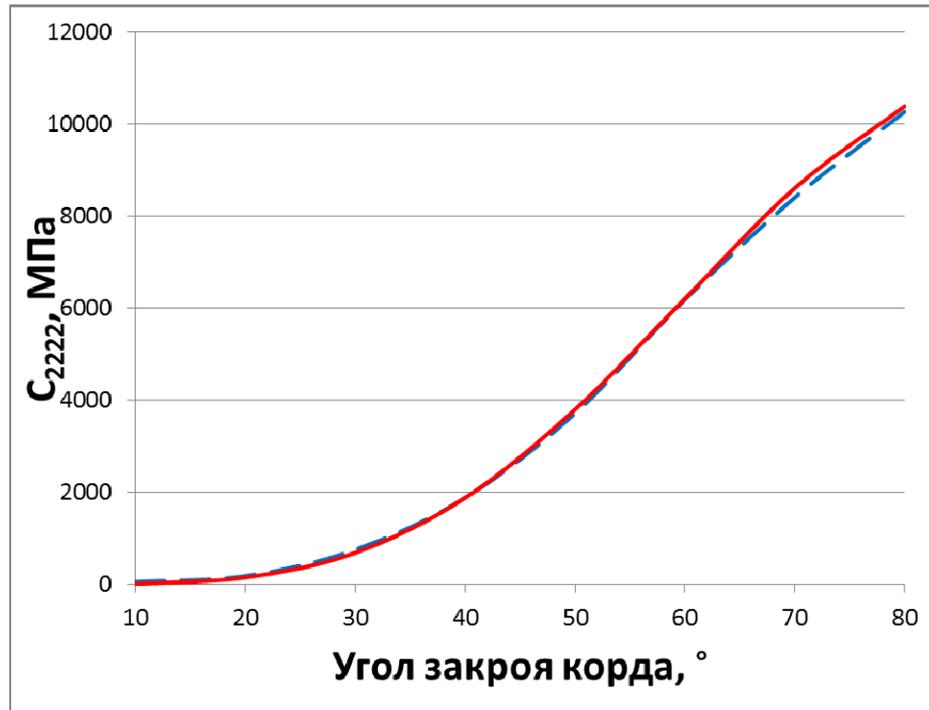


Рис. 11. Зависимость коэффициента  $C_{2222}$  от угла наклона нитей корда

Из графиков видно, что численное и аналитическое решения совпадают достаточно хорошо – с точностью в пределах 5%. Для коэффициента  $C_{2222}$  графики для численного и аналитического решения получаются симметричными графикам для  $C_{1111}$  – это соответствует формулам. А для коэффициента  $C_{1212}$  практически совпадают с графиками для  $C_{1122}$  – это также соответствует формулам, поскольку модуль сдвига резины намного меньше, чем модуль Юнга корда.

### 3.4. Проверка сеточной сходимости

Дополнительно для тестирования корректности счёта программного модуля в нелинейном случае проверялась сеточная сходимость при измельчении конечноэлементной сетки. Рассматривался двуслойный резинокорд с углом закроя корда 30 градусов. Свойства резины описывались потенциалом Муни-Ривлина с константами  $C_1 = -0,05709$  МПа,  $C_2 = 1,05046$  МПа [14],  $D = (C_1 + C_2) / (1 - 2 \cdot 0,49)$ . Корд моделировался материалом Мурнагана с константами  $\lambda = 1,1 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 0,806 \cdot 10^5$  МПа,  $C_3 = -0,32 \cdot 10^5$  МПа,  $C_4 = -2,3 \cdot 10^5$  МПа,  $C_5 = -2,68 \cdot 10^5$  МПа (константы соответствуют стали [29]). Толщина слоя составляла 2 мм, диаметр нити 0,75 мм, шаг – 50 нитей на 10 см. Максимальный размер конечного элемента ва-

ривался от 2 мм до 0,125 мм. Ниже приведены графики, иллюстрирующие наличие сеточной сходимости для коэффициентов  $C_{1122}^0$  и  $C_{222222}^1$ .

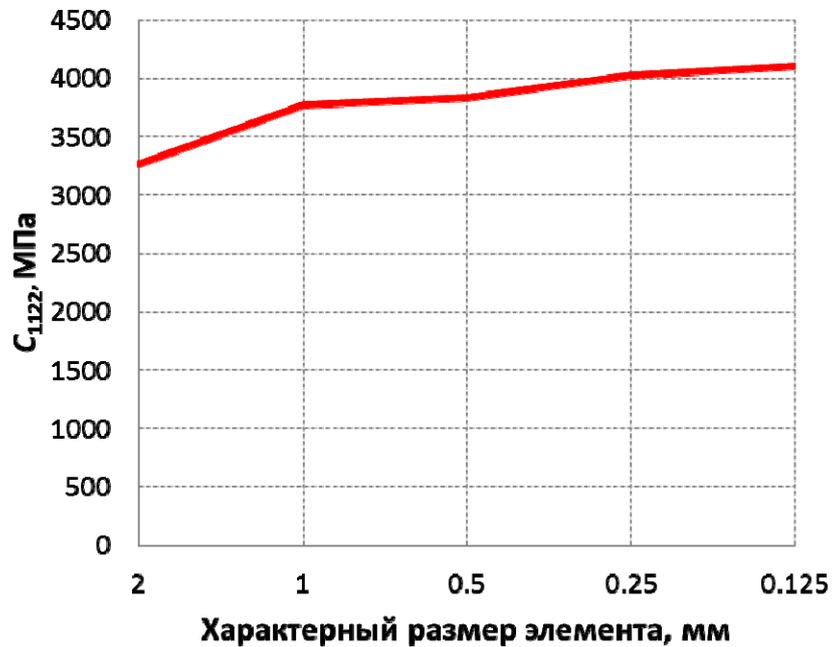


Рис. 12. Сеточная сходимость для коэффициента  $C_{1122}^0$ .

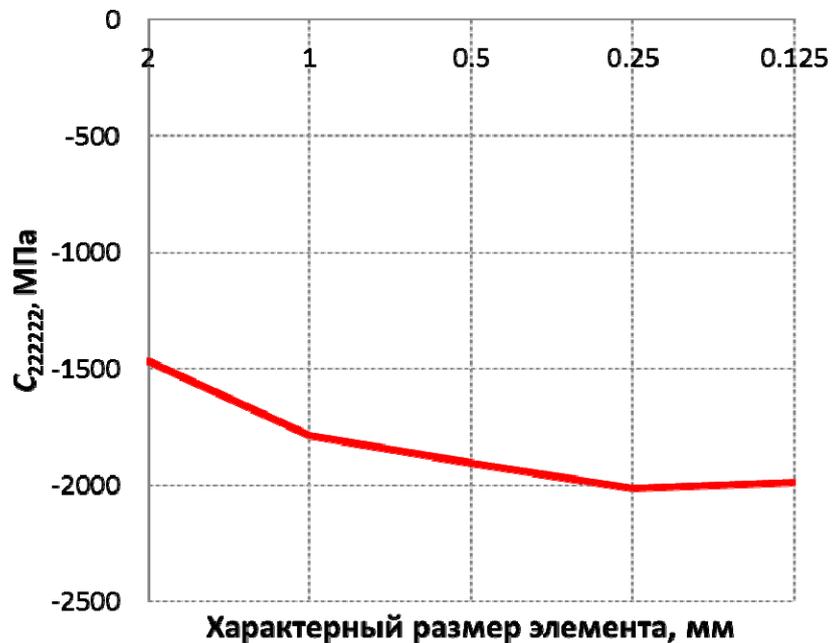


Рис. 13. Сеточная сходимость для коэффициента  $C_{222222}^1$ .

Для остальных эффективных коэффициентов  $C_{ijkl}^0$  и  $C_{ijklmn}^1$  сеточная сходимость также присутствует, что позволяет сделать вывод о корректности счёта программного модуля.

### ***3.5. Выводы по результатам тестирования***

Проведённое сравнение численных результатов с аналитическими формулами в линейном случае показало хорошее совпадение (погрешность около 5%), что позволяет сделать вывод о достоверности результатов, полученных с помощью разработанного программного модуля в линейном случае.

В нелинейном случае такое сравнение не проводилось, т.к. аналогичных аналитических формул для эффективных свойств в литературе нет. Однако тестирование работы программного модуля в нелинейном случае на представительном объёме, заполненном однородным материалом Мурнагана, показало точное совпадение полученных эффективных свойств со свойствами однородного материала. Также при измельчении конечноэлементной сетки в нелинейном случае наблюдается сеточная сходимость. Кроме того, логика алгоритма и схема работы программного модуля в нелинейном случае во многом совпадает с логикой алгоритма и схемой работы программного модуля в линейном случае. Поэтому можно сделать вывод, что и в нелинейном случае модуль выдаёт достоверные результаты.

## Глава 4. Результаты численной оценки эффективных механических характеристик резинокордных композитов при конечных деформациях

### *4.1. Зависимость эффективных свойств однослойного резинокорда от упругих свойств корда*

Исследовалась зависимость эффективных свойств резинокорда от упругих свойств корда, при неизменных свойствах резины. Свойства резины описывались потенциалом Муни-Ривлина с константами  $C_1 = -0,05709$  МПа,  $C_2 = 1,05046$  МПа [14],  $D = (C_1 + C_2)/(1 - 2 \cdot 0,49)$ . Свойства корда описывались определяющими соотношениями Мурнагана с константами  $\lambda/G = 1,36816$ ,  $C_3/G = -0,398$ ,  $C_4/G = -2,8607$ ,  $C_5/G = -3,3333$ , а константа  $G$  менялась в диапазоне от  $0,806 \cdot 10^3$  МПа до  $0,806 \cdot 10^5$  МПа (последнее значение соответствует стали [29]). Физический смысл варьирования упругих модулей корда в таких пределах заключается в том, что в резинокордных конструкциях используется как металлокорд, так и текстильный корд – жёсткость которых различается как раз примерно на два порядка.

Толщина слоя составляла 2 мм, диаметр нити корда 0,75 мм, шаг нитей – 2 мм. Нити корда направлены вдоль оси X. Приводятся графики зависимости коэффициентов  $C_{1111}^0$  и  $C_{1212}^0$  от упругих свойств корда. Графики построены в логарифмической шкале.

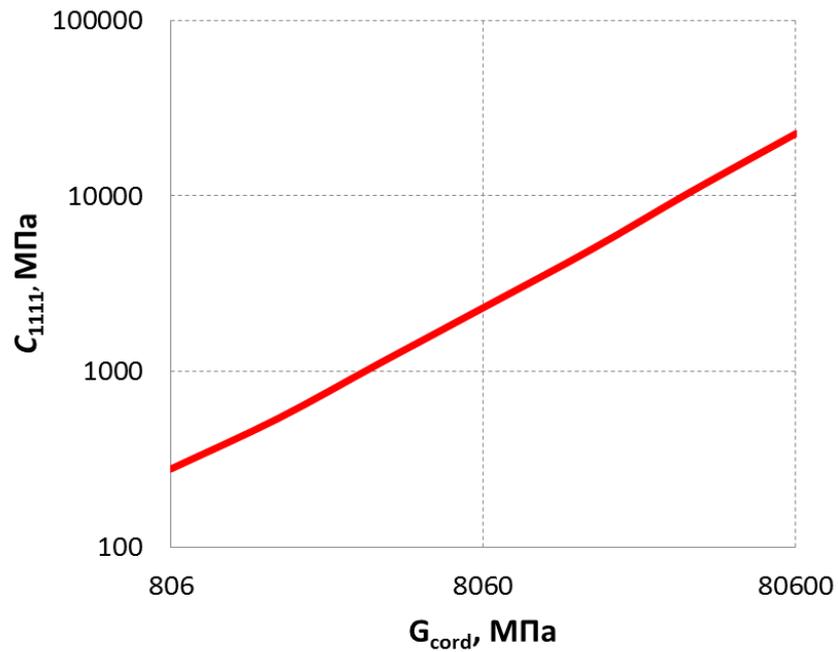


Рис. 14. Зависимость коэффициента  $C_{1111}^0$  резинокорда от упругих модулей корда

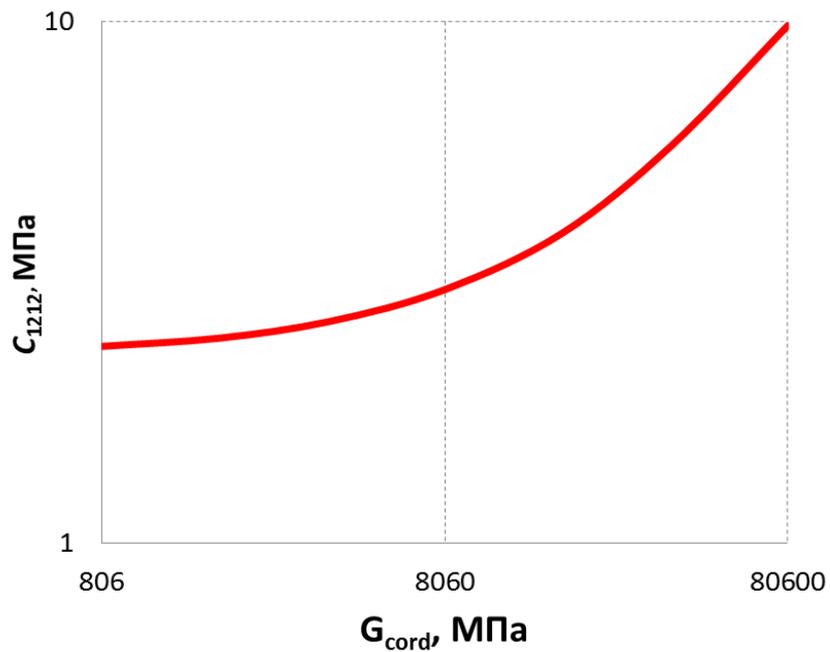


Рис. 15. Зависимость коэффициента  $C_{1212}^0$  резинокорда от упругих модулей корда

Как видно из графиков, зависимость коэффициента  $C_{1111}^0$  от упругих свойств корда (рис. 14) является строго линейной – и при изменении констант, описывающих корд, на два порядка,  $C_{1111}^0$  тоже меняется на два порядка (т.е. наблюдается прямая пропорциональность  $C_{1111}^0$  упругим модулям корда). В аналогичной за-

зависимости для коэффициента  $C_{1212}^0$  (рис. 15) проявляется некоторая нелинейность. Коэффициенты  $C_{1122}^0$  и  $C_{2222}^0$  при изменении констант корда на два порядка менялись менее чем на 1% – т.е. они практически не зависят от свойств корда.

Обратим внимание на зависимость от упругих свойств корда нелинейных коэффициентов  $C_{ijklmn}^1$ .

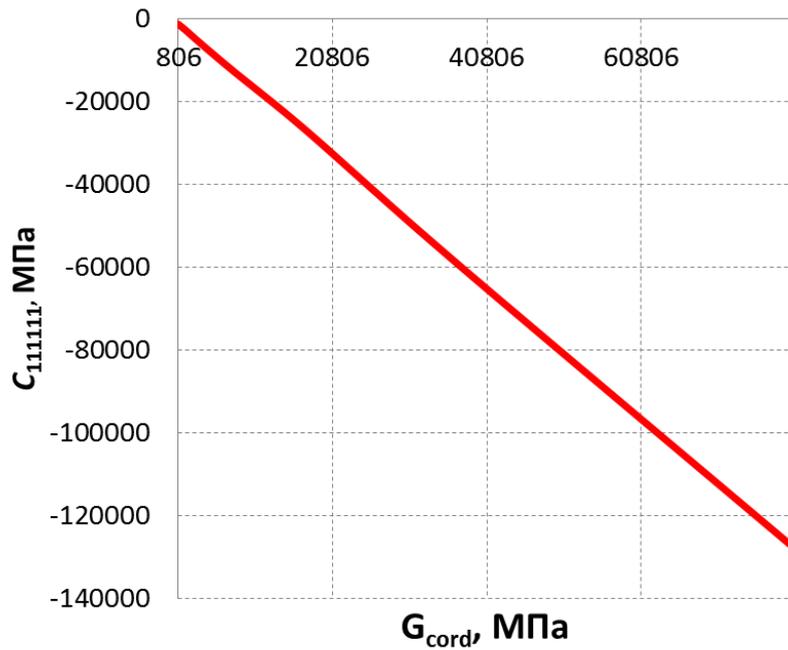


Рис. 16. Зависимость коэффициента  $C_{11111}^1$  резинокорда от упругих модулей корда

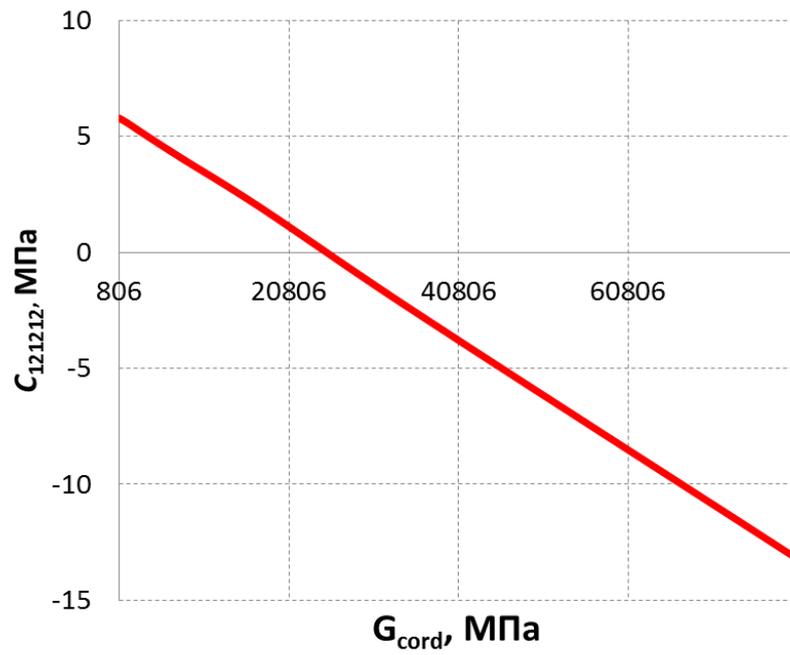


Рис. 17. Зависимость коэффициента  $C_{1212}^1$  резинокорда от упругих модулей корда

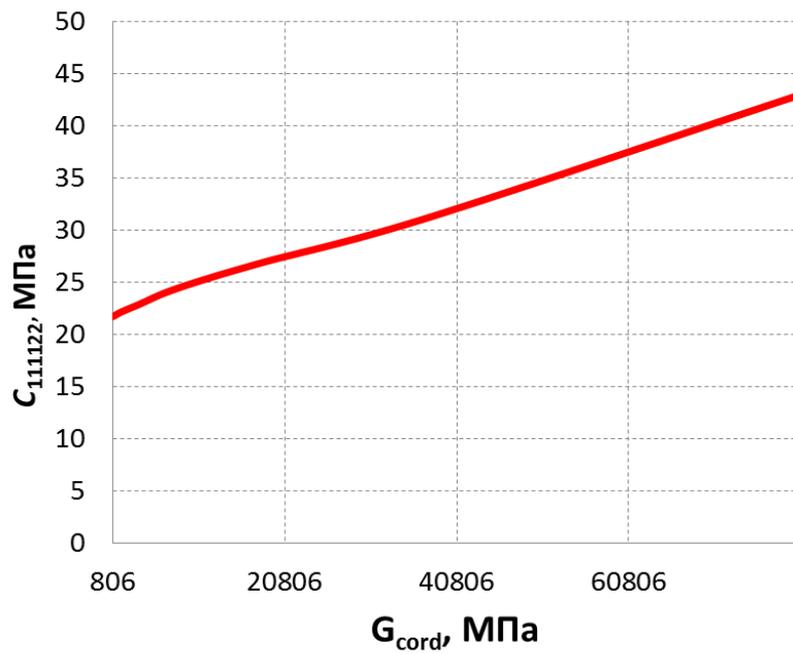


Рис. 18. Зависимость коэффициента  $C_{1112}^1$  резинокорда от упругих модулей корда

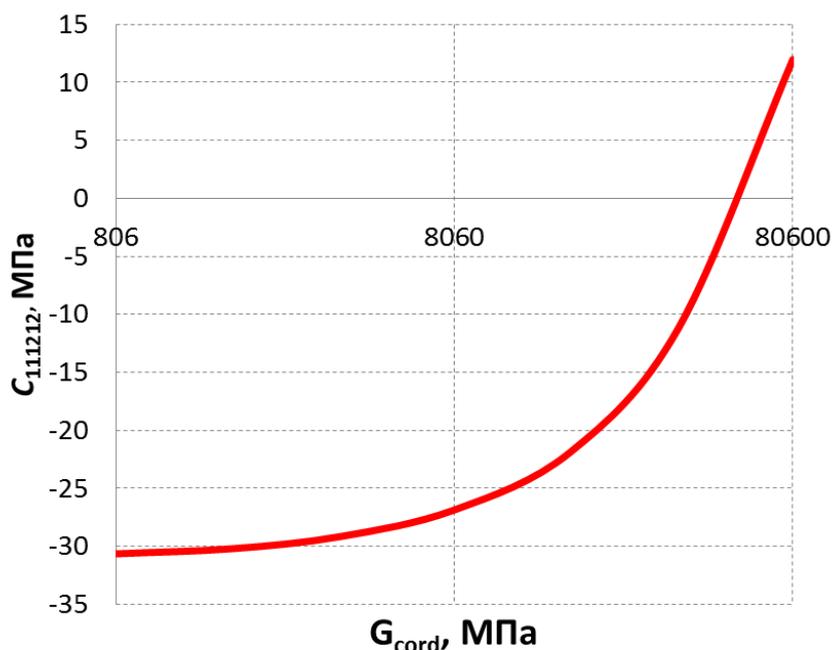


Рис. 19. Зависимость коэффициента  $C_{1112}^1$  резинокорда от упругих модулей корда

Коэффициент  $C_{1111}^1$ , как и линейный коэффициент  $C_{111}^0$ , находится в прямо пропорциональной зависимости от упругих модулей корда (рис. 16). Коэффициенты  $C_{1212}^1$  (рис. 17) и  $C_{1112}^1$  (рис. 18) зависят от модулей корда практически линейно – при этом первый линейно уменьшается, второй линейно растёт. Аналогичная зависимость у коэффициента  $C_{11222}^{(1)}$ . Коэффициент  $C_{1112}^1$  зависит от свойств корда нелинейно (рис. 19). Коэффициент  $C_{22222}^1$  при варьировании модулей корда в 100 раз меняется не более чем на 5%.

#### **4.2. Зависимость эффективных свойств однослойного резинокорда от упругих свойств резины**

Также, в свою очередь, исследовалась зависимость эффективных свойств резинокорда от свойств резины, при неизменных свойствах корда. Свойства корда описывались определяющими соотношениями Мурнагана с константами  $\lambda = 1,1 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 0,806 \cdot 10^5$  МПа,  $C_3 = -0,32 \cdot 10^5$  МПа,  $C_4 = -2,3 \cdot 10^5$  МПа,  $C_5 = -2,68 \cdot 10^5$  МПа (константы соответствуют стали [29]). Свойства резины описывались потенциалом Муни-Ривлина. Константа  $C_1$  резины варьировалась в пределах

от  $-0,05709$  до  $-0,45672$  МПа, константа  $C_2$  – от  $1,05046$  до  $8,40368$  МПа (обе константы увеличивались в одно и то же число раз от 1 до 8 – это число и откладывалось вдоль оси абсцисс). Константа  $D$  равнялась  $(C_1+C_2)/(1-2\cdot 0,49)$ . Физический смысл такого изменения свойств резины заключается в том, что при изготовлении резинокорда используются резины разной жёсткости.

Как и в предыдущей задаче, толщина слоя составляла 2 мм, диаметр нити корда 0,75 мм, шаг нитей – 2 мм. Нити корда направлены вдоль оси X. Приводятся графики зависимости коэффициентов  $C_{2222}^0$ ,  $C_{1122}^0$  и  $C_{1212}^0$  от упругих свойств резины.



Рис. 20. Зависимость коэффициента  $C_{2222}^0$  резинокорда от упругих модулей резины



Рис. 21. Зависимость коэффициента  $C_{1122}^0$  резинокорда от упругих модулей резины

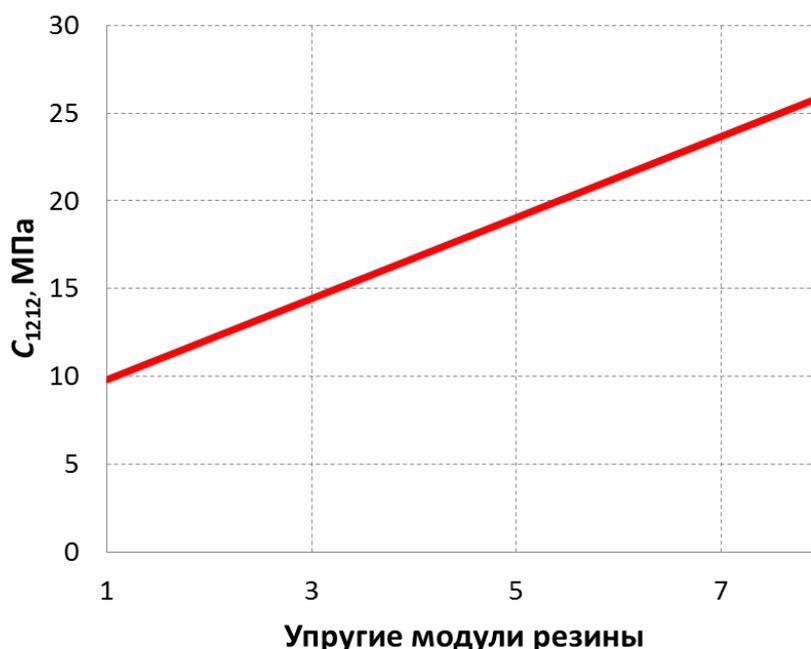


Рис. 22. Зависимость коэффициента  $C_{1212}^0$  резинокорда от упругих модулей резины

Графики показывают, что коэффициент  $C_{2222}^0$  прямо пропорционален упругим модулям резины (рис. 20). Такая же зависимость от свойств резины и у коэффициента  $C_{1122}^0$  (рис. 21). Коэффициент  $C_{1212}^0$  (рис. 22) зависит от свойств резины линейно. Коэффициент  $C_{1111}^0$  от свойств резины практически не зависит: при изменении модулей резины в 8 раз он меняется менее чем на 2%.

Приведём графики для нелинейных эффективных коэффициентов.

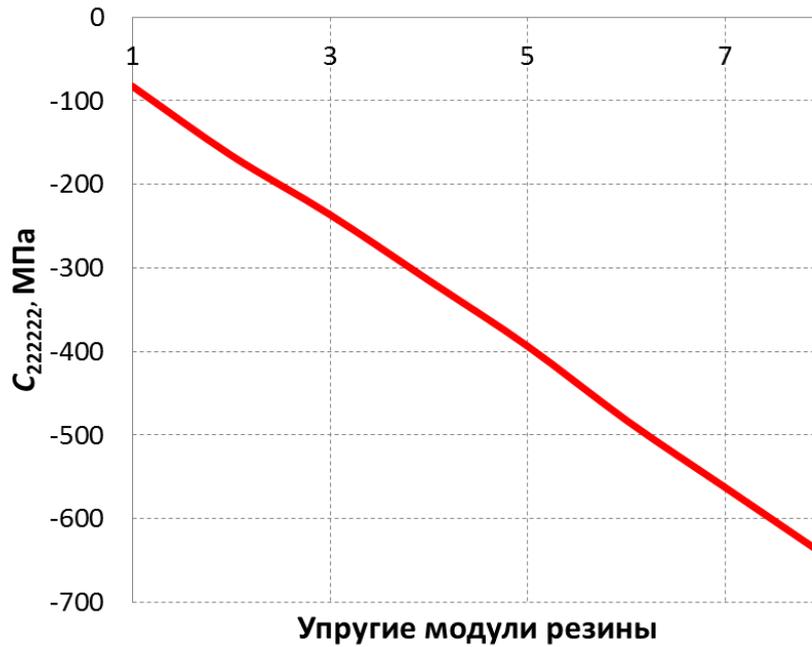


Рис. 23. Зависимость коэффициента  $C_{222222}^1$  резинокорда от упругих модулей резины



Рис. 24. Зависимость коэффициента  $C_{121212}^1$  резинокорда от упругих модулей резины

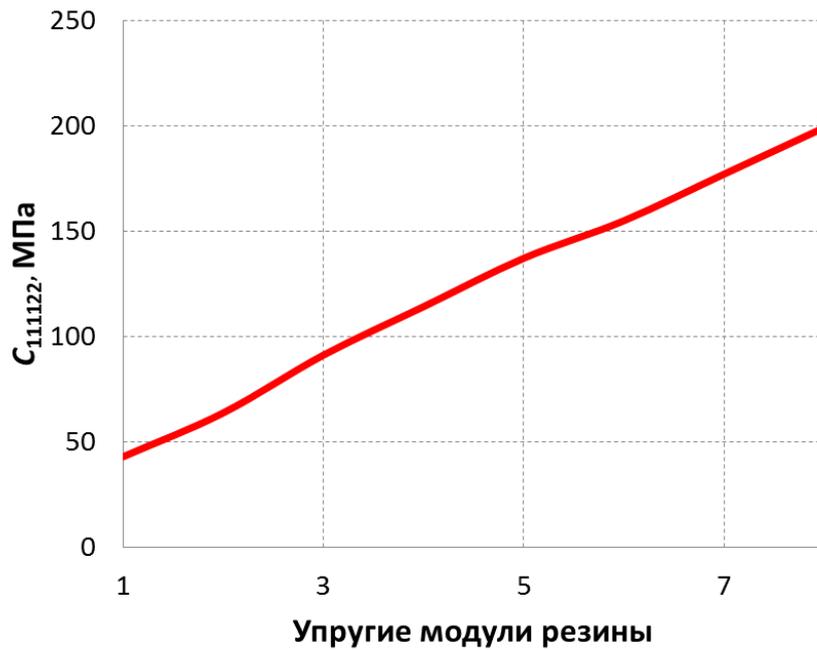


Рис. 25. Зависимость коэффициента  $C_{11122}^1$  резинокорда от упругих модулей резины

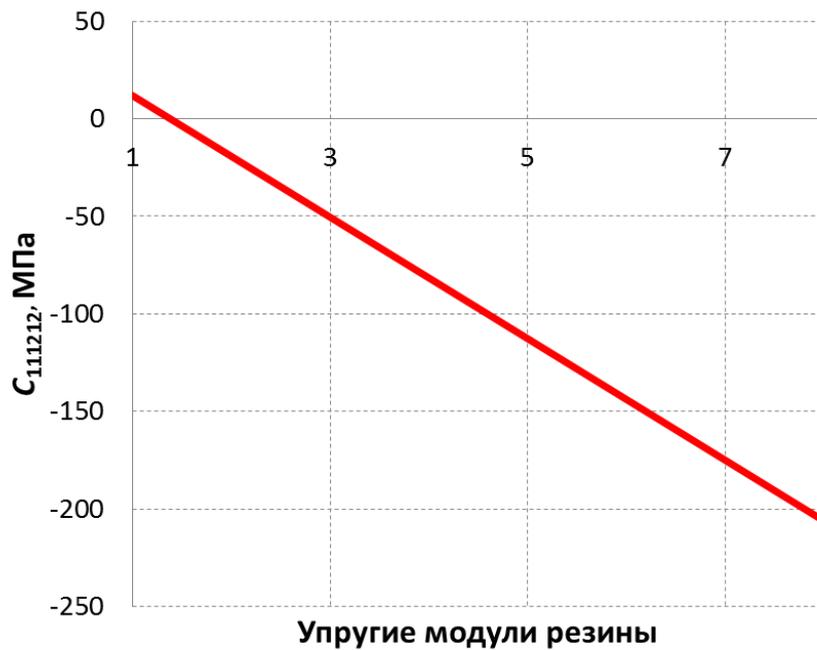


Рис. 26. Зависимость коэффициента  $C_{111212}^1$  резинокорда от упругих модулей резины

Коэффициент  $C_{22222}^1$  прямо пропорционален упругим модулям резины (рис. 23), коэффициент  $C_{111111}^1$  от свойств резины практически не зависит. Коэффициенты  $C_{121212}^1$  (рис. 24),  $C_{111122}^1$  (рис. 25),  $C_{111212}^1$  (рис. 26),  $C_{112222}^1$  и другие зависят от свойств резины линейно.

Из графиков видно, что коэффициент  $C_{1111}^0$ , определяющий поведение резинорда при деформации вдоль нитей корда, прямо пропорционален упругим модулям корда и не зависит от свойств резины. А коэффициент  $C_{2222}^0$ , отвечающий за поведение резинорда при деформации поперёк нитей корда – прямо пропорционален модулям резины и не зависит от свойств корда. Увеличение жёсткости корда вызывает увеличение жёсткости резинорда при деформации вдоль нитей и не влияет на его поведение при деформации поперёк них; а увеличение жёсткости резины вызывает увеличение жёсткости резинорда при деформации поперёк нитей и практически не влияет на его поведение при деформации вдоль нитей – этот факт был известен и из теоретических рассуждений, и из экспериментов.

Кроме этого, проведённые расчёты показывают, что коэффициент  $C_{111111}^1$  (отвечающий за нелинейность резинорда при деформации вдоль нитей) также прямо пропорционален модулям корда и практически не зависит от свойств резины – а  $C_{222222}^1$  (определяющий, в свою очередь, нелинейность резинорда при деформации поперёк нитей) прямо пропорционален модулям резины и не зависит от свойств корда. Т.е. можно сделать вывод, что и нелинейность резинорда при деформации вдоль нитей корда полностью определяется свойствами корда, а при деформации поперёк нитей – полностью определяется свойствами резины.

Также расчёты показали, что коэффициенты  $C_{1212}^0$  и  $C_{121212}^1$ , определяющие поведение однослойного резинорда при сдвиговых деформациях, зависят как от свойств корда, так и от свойств резины.

#### ***4.3. Зависимость эффективных свойств однослойного резинорда от шага нитей корда***

Изучалась зависимость эффективных свойств однослойного резинорда от шага нитей корда – т.е. от количества нитей на 10 см. Корд моделировался материалом Мурнагана с константами  $\lambda = 1,1 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 0,804 \cdot 10^5$  МПа,  $C_3 = -$

$0,32 \cdot 10^5$  МПа,  $C_4 = -2,3 \cdot 10^5$  МПа,  $C_5 = -2,68 \cdot 10^5$  МПа (соответствуют стали [29]). Свойства резины описывались потенциалом Муни-Ривлина с константами  $C_1 = -0,05709$  МПа,  $C_2 = 1,05046$  МПа [14],  $D = (C_1 + C_2)/(1 - 2 \cdot 0,49)$ . Толщина слоя резинокорда составляла 2 мм, диаметр нити корда 0,75 мм. Частота расположения нитей изменялась в пределах от 50 до 100 штук на 10 см.

Приведём графики для коэффициентов  $C_{ijkl}^0$  и  $C_{ijklmn}^1$ .

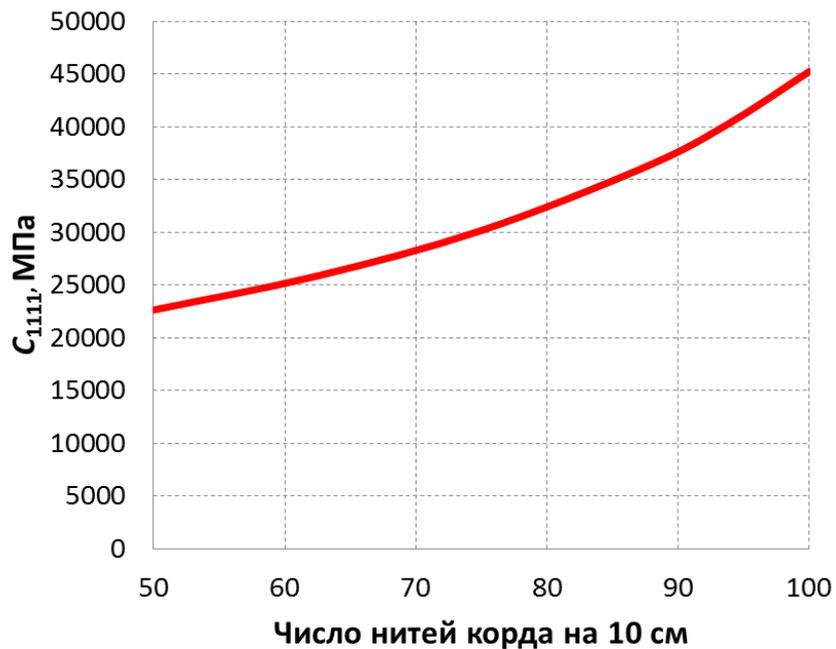


Рис. 27. Зависимость коэффициента  $C_{1111}^0$  резинокорда от частоты нитей корда

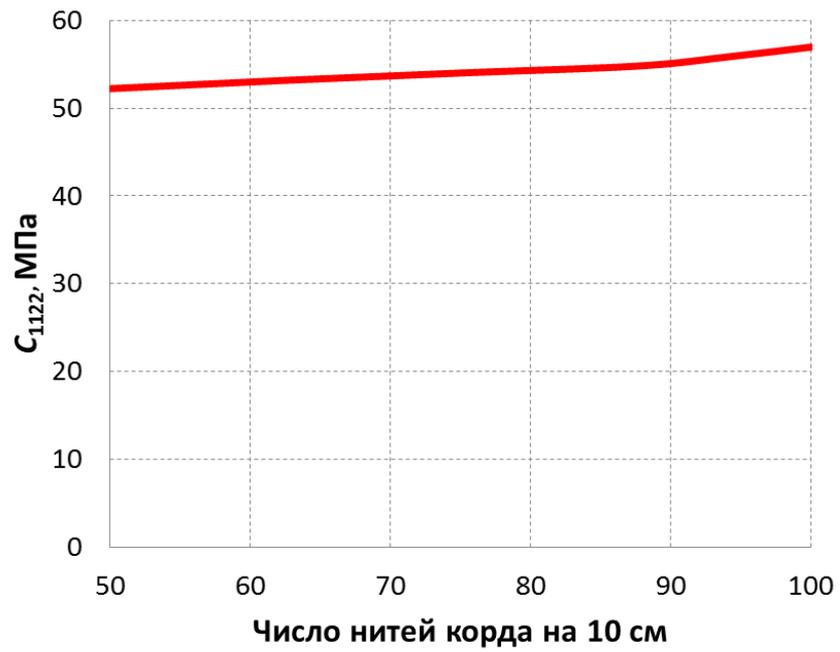


Рис. 28. Зависимость коэффициента  $C_{1122}^0$  резинокорда от частоты нитей корда

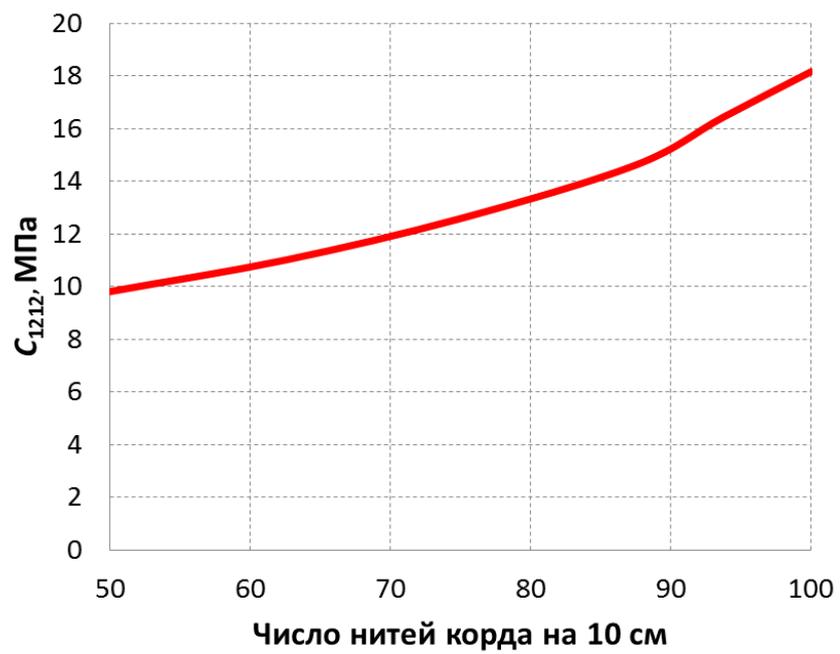


Рис. 29. Зависимость коэффициента  $C_{1212}^0$  резинокорда от частоты нитей корда

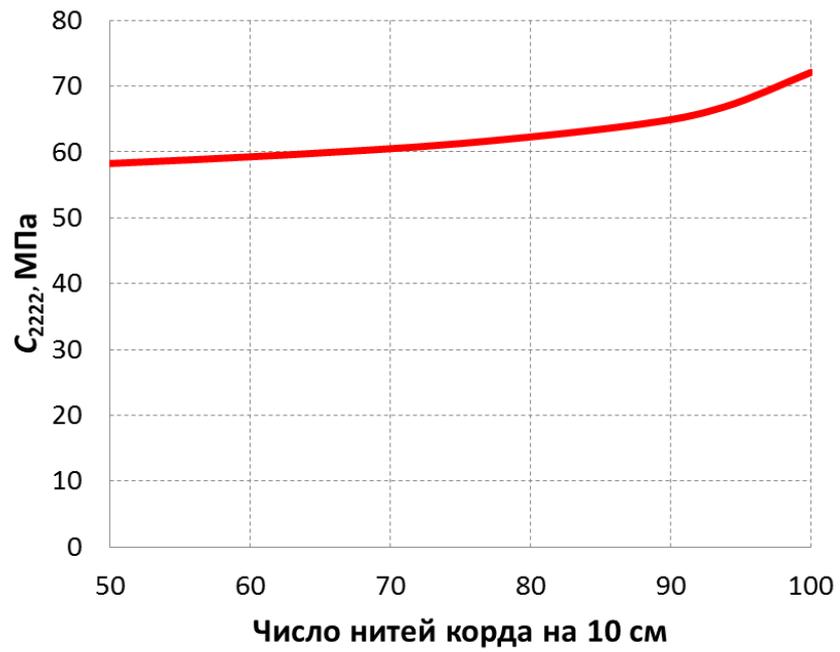


Рис. 30. Зависимость коэффициента  $C_{2222}^0$  резинокорда от частоты нитей корда

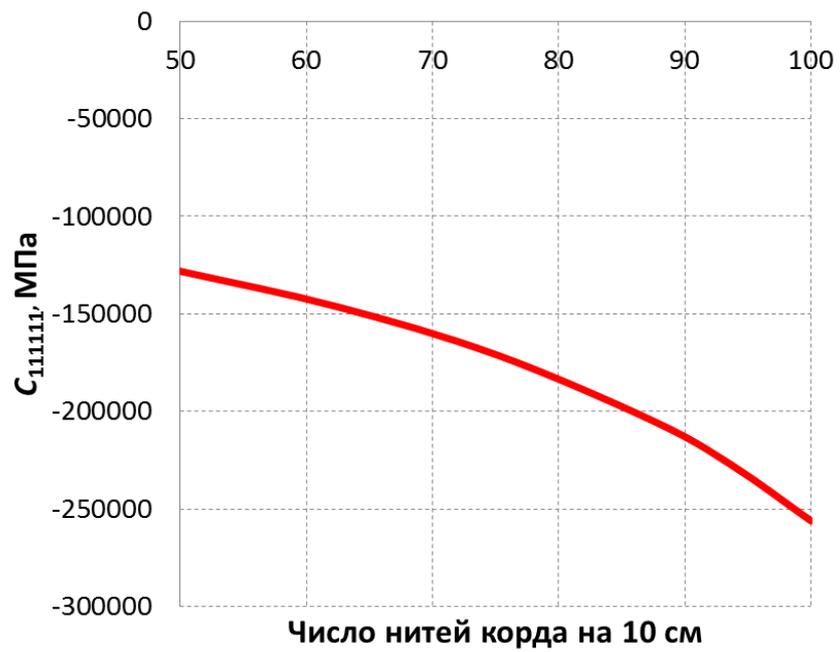


Рис. 31. Зависимость коэффициента  $C_{1111}^1$  резинокорда от частоты нитей корда

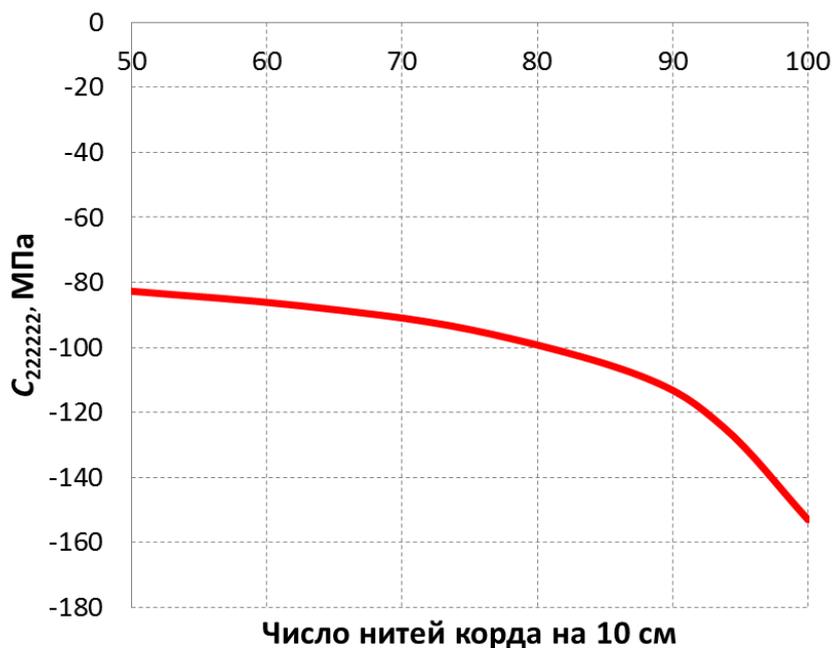


Рис. 32. Зависимость коэффициента  $C_{222222}^1$  резинокорда от частоты нитей корда

Характер зависимости как  $C_{ijkl}^0$ , так и  $C_{ijklmn}^1$  резинокорда от частоты нитей корда примерно одинаков: при увеличении частоты нитей коэффициенты растут по модулю, причём чем выше частота нитей – тем выше скорость роста. При этом  $C_{1111}^0$  (рис. 27) и  $C_{1212}^0$  (рис. 29) при увеличении частоты нитей с 50 до 100 штук на 10 см увеличиваются в два раза, а  $C_{1122}^0$  – менее чем на 10% (рис. 28).

#### 4.4. Зависимость эффективных свойств двухслойного резинокорда от угла наклона нитей корда

Кроме всего прочего, исследовалась зависимость эффективных свойств двухслойного резинокорда (Рис. 7) от угла наклона нитей корда в слоях по отношению к оси X (т.е. половины угла между направлениями нитей в соседних слоях). Корд моделировался материалом Мурнагана с константами  $\lambda = 1,1 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 0,806 \cdot 10^5$  МПа,  $C_3 = -0,32 \cdot 10^5$  МПа,  $C_4 = -2,3 \cdot 10^5$  МПа,  $C_5 = -2,68 \cdot 10^5$  МПа (соответствуют стали [29]). Свойства резины описывались потенциалом Муни-Ривлина с константами  $C_1 = -0,05709$  МПа,  $C_2 = 1,05046$  МПа [14],  $D = (C_1 + C_2) / (1 - 2 \cdot 0,49)$ .

Толщина слоя резинокорда составляла 2 мм, диаметр нити корда 0,75 мм, шаг нитей 2 мм (т.е. 50 нитей на 10 см). Угол наклона варьировался от 10 до 80 градусов.

Ниже приводятся графики зависимости линейных коэффициентов  $C_{ijkl}^0$  от угла.

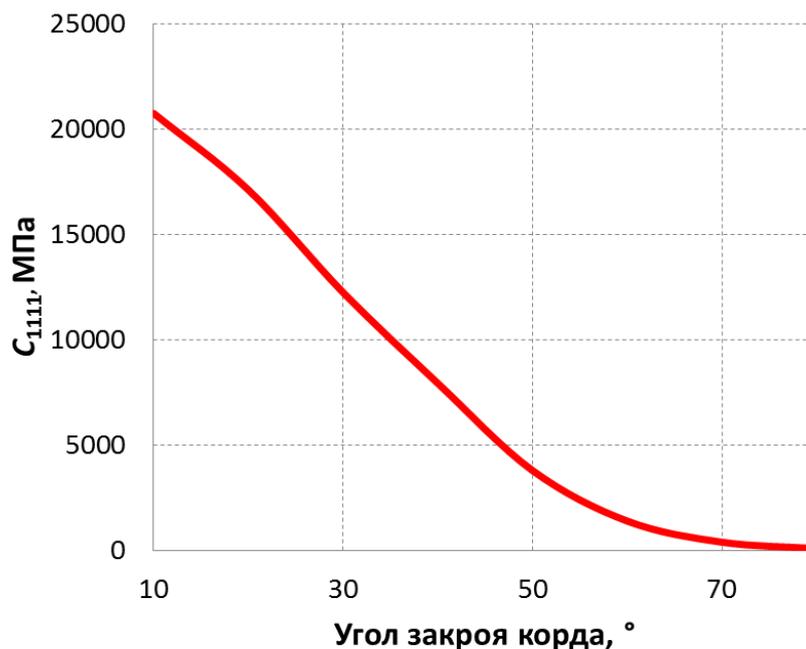


Рис. 33. Зависимость коэффициента  $C_{1111}^0$  резинокорда от угла наклона корда

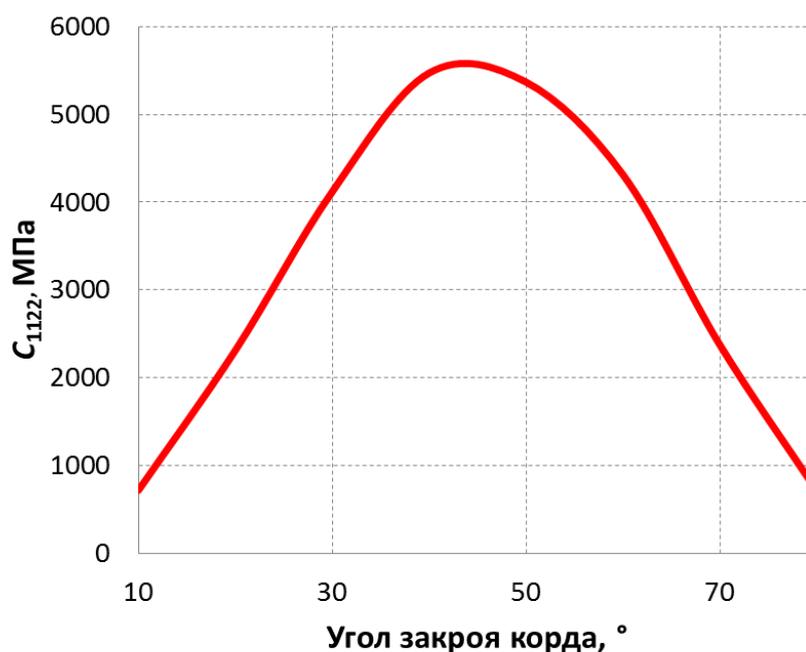


Рис. 34. Зависимость коэффициента  $C_{1122}^0$  резинокорда от угла наклона корда

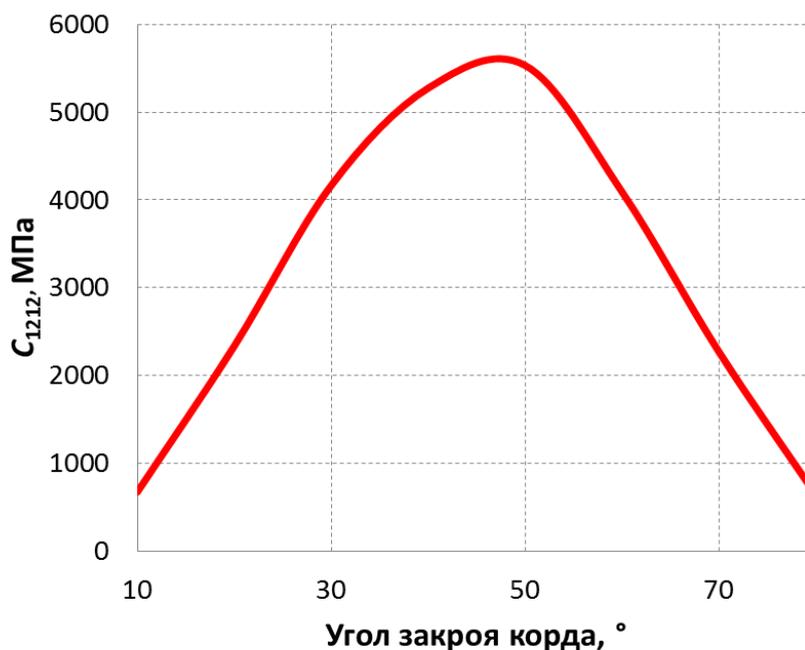


Рис. 35. Зависимость коэффициента  $C_{1212}^0$  резинокорда от угла наклона корда

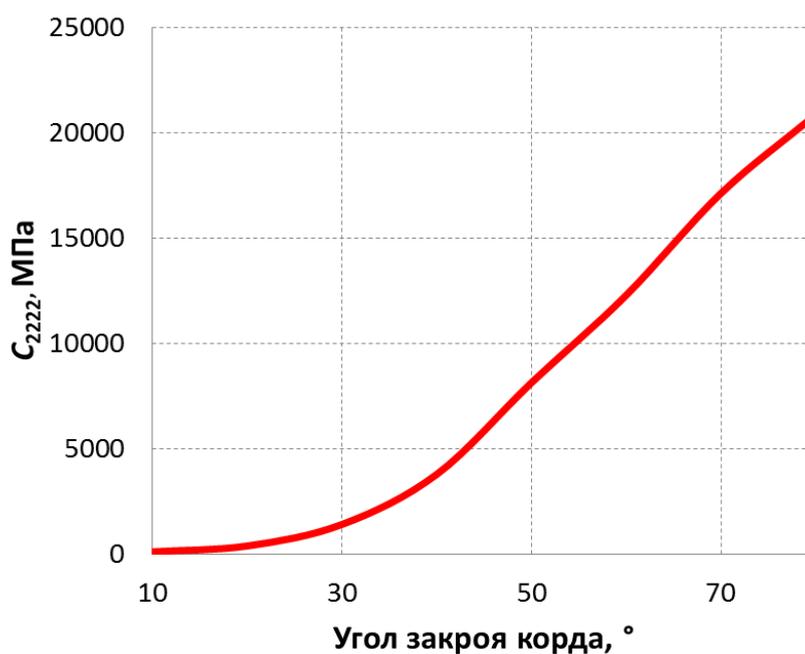


Рис. 36. Зависимость коэффициента  $C_{2222}^0$  резинокорда от угла наклона корда

Коэффициент  $C_{1111}^0$  с увеличением угла монотонно убывает (Рис. 33) почти на три порядка. Коэффициент  $C_{2222}^0$  так же монотонно возрастает, график для него (Рис. 36) симметричен графику для  $C_{1111}^0$ . График для  $C_{1212}^0$  симметричен (с точно-

стью до 5%) и имеет максимум в районе угла 45 градусов (Рис. 35). Такой же вид имеет график для  $C_{1122}^0$  (Рис. 34).

Дело в том, что если в индексах коэффициента  $C_{ijkl}^0$  для некоторого материала заменить единицы двойками, а двойки единицами – получим  $C_{ijkl}^0$  для того же самого материала, только в другой системе координат (повёрнутой на  $90^\circ$  относительно исходной). Соответственно, если в индексах  $C_{ijkl}^0$  для нашего двуслойного резинокорда с углом наклона корда  $\alpha$  заменить единицы на двойки – получим коэффициент  $C_{ijkl}^0$  для двуслойного резинокорда с углом  $90^\circ - \alpha$ . То есть, к примеру,  $C_{1122}^0$  для угла  $\alpha$  – это  $C_{2211}^0$  для угла  $90^\circ - \alpha$ . Но, как было упомянуто выше, для  $C_{ijkl}^0$  действует симметрия:  $C_{1122}^0 = C_{2211}^0$ . Таким образом,  $C_{1122}^0$  для углов  $\alpha$  и  $90^\circ - \alpha$  равны – отсюда и симметричность графика. Аналогично и для коэффициента  $C_{1212}^0$ . Аналогично графики для  $C_{1111}^0$  и  $C_{2222}^0$  симметричны друг другу.

Приведём также графики для нелинейных коэффициентов  $C_{ijklmn}^1$ .

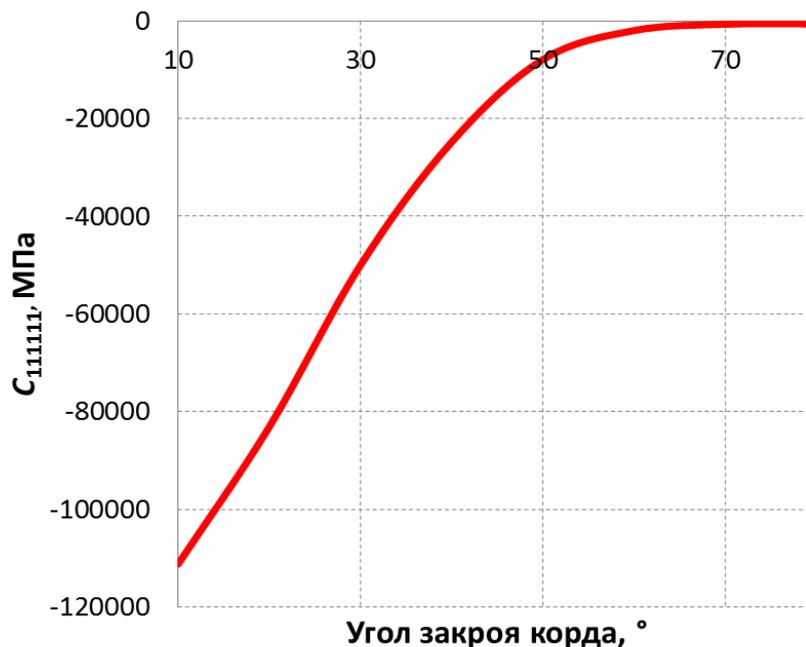


Рис. 37. Зависимость коэффициента  $C_{11111}^1$  резинокорда от угла наклона корда

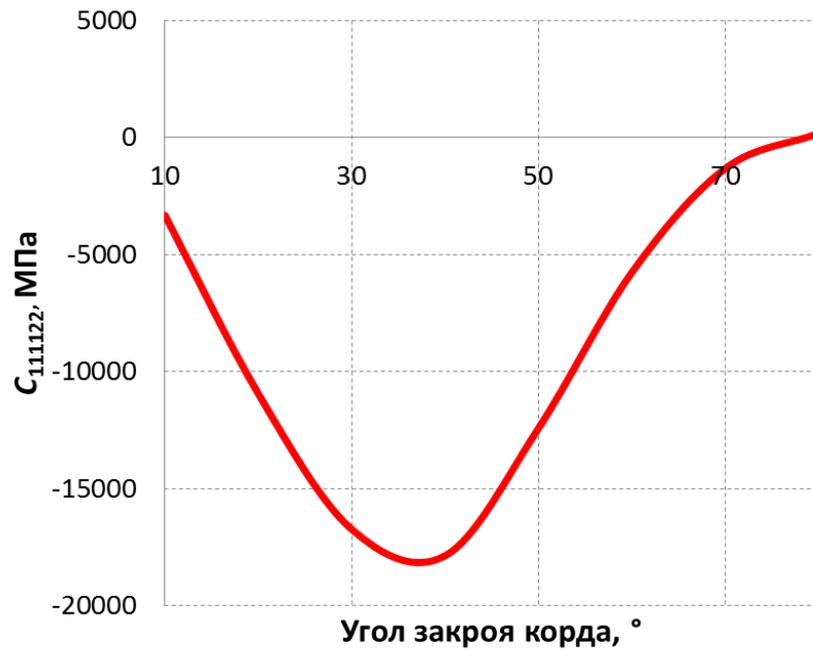


Рис. 38. Зависимость коэффициента  $C_{11122}^1$  резинокорда от угла наклона корда

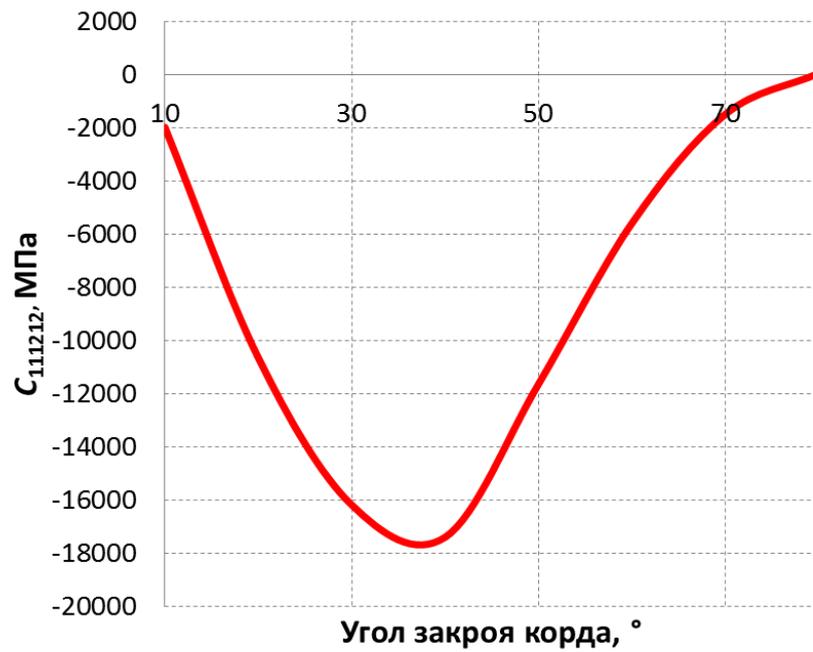


Рис. 39. Зависимость коэффициента  $C_{111212}^1$  резинокорда от угла наклона корда

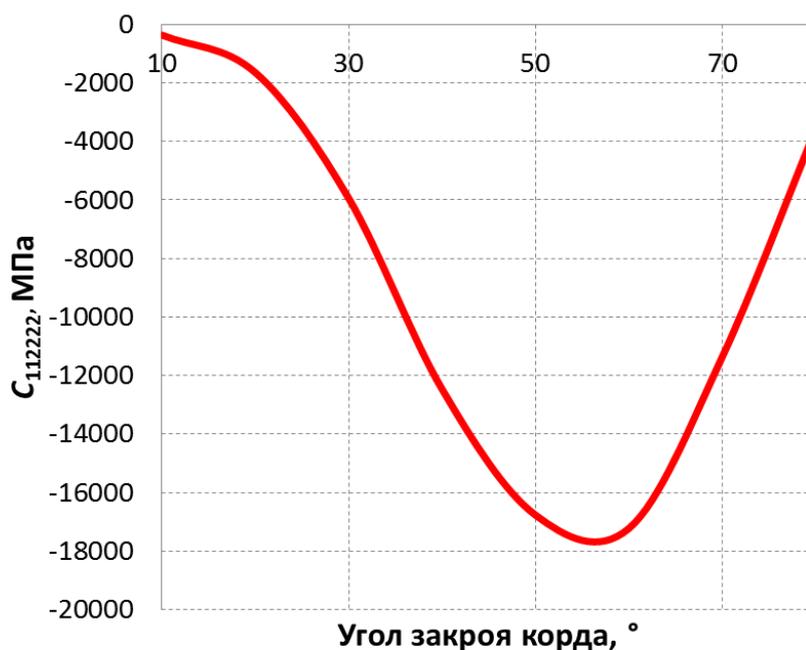


Рис. 40. Зависимость коэффициента  $C_{112222}^1$  резинокорда от угла наклона корда

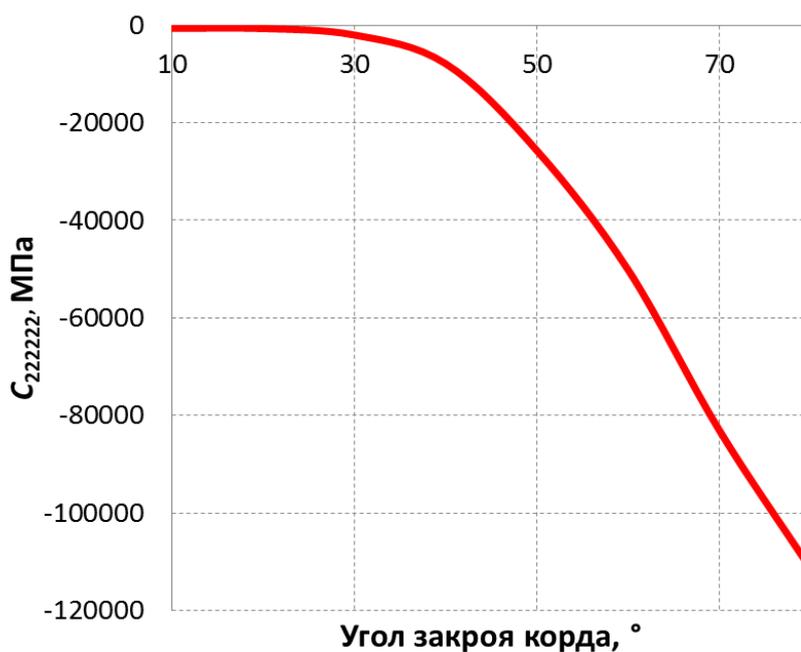


Рис. 41. Зависимость коэффициента  $C_{222222}^1$  резинокорда от угла наклона корда

Коэффициент  $C_{111111}^1$  с увеличением угла монотонно убывает по модулю (рис. 37). Коэффициент  $C_{222222}^1$  при этом аналогично возрастает по модулю (графики их опять-таки получаются симметричными друг другу – см. рис. 41). Графики коэффициентов  $C_{111122}^1$  (рис. 38),  $C_{111212}^1$  (рис. 39),  $C_{112222}^1$  (рис. 40), несимметричны. И

хотя максимум модуля этих коэффициентов также расположен в районе  $45^\circ$  – он смещён относительно этого значения в ту или иную сторону.

#### **4.5. Выводы по результатам расчётов**

Результаты расчётов эффективных свойств резинокордного композита показывают, что этот материал является существенно анизотропным и существенно нелинейным. При этом поведение резинокорда при деформации вдоль нитей корда определяется механическими свойствами корда, а при деформации поперёк нитей корда – свойствами резины (это соответствует теоретическим сведениям и экспериментальным данным). И нелинейность резинокорда при деформации вдоль нитей корда также определяется свойствами корда, а нелинейность при деформации поперёк нитей корда – свойствами резины. Увеличение частоты нитей корда (количества нитей на 10 см) вызывает нелинейный рост жёсткости резинокорда во всех направлениях.

Для полученных эффективных характеристик для случая двуслойного резинокорда с углом закроя 30% проводился аналитический расчёт: при заданных деформациях при известных  $C_{ijkl}^0$  и  $C_{ijklmn}^1$  напряжения вычислялись сначала по формуле (2.1.11) – т.е. без учёта нелинейности; а потом по формуле (2.1.9) с учётом нелинейности. При деформации 5% поправка от учёта нелинейности для напряжений составляла порядка 20%. Это указывает на необходимость учёта нелинейных эффектов при оценке эффективных свойств резинокордных композитов.

## Заключение

### *Основные результаты и выводы диссертационной работы*

Модифицирована математическая модель резинокордного композита с учетом конечности деформаций и слабосжимаемости резины. Модифицирована методика оценки эффективных механических характеристик неоднородных материалов применительно к резинокордным композитам.

На основе модифицированной методики и математической модели разработан алгоритм для численной оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях.

На основе алгоритма разработан программный модуль на языке C++, позволяющий проводить оценку эффективных свойств резинокорда при конечных деформациях.

Проведены численные эксперименты, анализ результатов которых показал влияние на эффективные свойства резинокордного композита упругих характеристик резины и корда, а также внутренней структуры резинокорда (шага и угла закроя нитей корда).

Разработанный программный модуль (при промышленной реализации) может быть использован при прочностном расчёте пневматической шины как единой конструкции.

## **Публикации по теме диссертации.**

- 1. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита // Каучук и резина, №4, 2010. – С. 22–25.**
- 2. Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. №17, 2012. – С. 29–40.**
- 3. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, №2, 2013. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>**
- 4. Левин В.А., Ильин И.А., Кукушкин А.В., Агапов Н.А., Яковлев М.Я. Моделирование развития зоны предразрушения в телах из упругого или вязкоупругого материала с помощью пакета ABAQUS // Тезисы докладов VI Международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», 22-26 ноября 2005 года, Тула. – С. 226–227.**
- 5. Левин В.А., Вершинин А.В., Пекарь Г.Е., Саяхова Л.Ф., Труфен К.Н., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. Использование нелокального критерия прочности в задачах многократного наложения больших деформаций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2006. – С. 45.**
- 6. Левин В.А., Пекарь Г.Е., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. Плоская задача об образовании полости произвольной формы в нагруженном теле из нелиней-**

- но-упругого материала. Конечные деформации // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2007. – С. 206.
7. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. К построению модели взаимодействия микровключений в эластомерах // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2008. – С. 116.
  8. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. Расчет поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита при конечных деформациях с помощью МКЭ // Сборник докладов 19 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 13-17 октября 2008 г. – С. 112–119.
  9. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филипенко Е.В., Яковлев М.Я. Напряжения и деформации в матрице между частицами наполнителя в резине // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", 17-21 ноября 2008 года, Тула. – С. 165–168.
  10. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Яковлев М.Я. Об эффекте Пейна в эластомерных нанокompозитах. Результаты численного эксперимента // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2009. – С. 44.
  11. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Яковлев М.Я. Результаты численных экспериментов, подтверждающих экспериментально наблюдаемый эффект Пейна (для шарообразных и эллипсоидальных включений) // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», 23-27 ноября 2009 года, Тула. – С. 148–150.
  12. Яковлев М.Я., Левин В.А. К численному решению задачи прочности для тонкостенных конструкций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2010. – С. 126.
  13. Яковлев М.Я. Сравнение универсальных прочностных САЕ-систем FIDESYS и ANSYS на примере решения контактной задачи термоупругости

- // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", 22-26 ноября 2010 года, Тула. – С. 222–224.
14. Яковлев М.Я. Вариант модификации оценки эффективных характеристик резинокорда с учетом конечности деформаций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносов», Москва, МГУ, 2011.
15. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Об определении эффективных свойств резинокорда в случае конечных деформаций с помощью системы для инженерного прочностного анализа CAE FIDESYS // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвящённой 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Тула, 19-23 сентября 2011 года. – С. 146.
16. Лохин В.В., Зингерман К.М., Прокопенко А.С., Яковлев М.Я., Цукров И. Об оценке механических эффективных характеристик наноструктурированных материалов с использованием CAE Fidesys // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», Тула, 3-7 октября 2011 года. – С. 225–226.
17. Морозов Е.М., Яковлев М.Я., Прокопенко А.С. О моделировании вязкого роста дефекта (трещины) в теле с конечными деформациями с использованием CAE Fidesys // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», Тула, 3-7 октября 2011 года. – С. 233–234.
18. Левин В.А., Зингерман К.М., Гамлицкий Ю.А., Яковлев М.Я., Прокопенко А.С. Об алгоритме оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях // Сборник докладов 22 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 17-21 октября 2011 года. – С. 9–15.
19. Левин В.А., Яковлев М.Я. Об оценке эффективных характеристик резинокорда с учётом закроя нитей корда с использованием CAE «ФИДЕСИС» //

- Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2012». Москва, апрель 2012 г. – С. 110–111.
20. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Терпяков А.А., Яковлев М.Я. Вариант расчёта НДС резинокорда с учётом угла наклона нитей корда // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2012». Москва, апрель 2012 г. – С. 44–45.
21. Zingerman K.M., Levin V.A., Yakovlev M.Ya., Prokopenko A.V., Terpyakov A.A. Computation of effective elastic characteristics of porous and composite materials using the FIDESYS CAE-system // 10-th Word Congress on Computational Mechanics. 8-13 July 2012. Sao Paulo. Brazil. Book of Abstracts. 19531. – P. 290.
22. Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Расчёт эффективных характеристик нелинейно-упругих композитов при конечных деформациях // Материалы IX Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», 15-22 сентября 2012 года, Казань. – С. 168–172.
23. Яковлев М.Я. О разработке программного модуля для вычисления эффективных механических характеристик анизотропных композитов для САЕ «ФИДЕСИС» // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» Тула, 17-21 сентября 2012 года. – С. 275–276.
24. Яковлев М.Я., Зингерман К.М., Левин В.А. О разработке программного модуля САЕ «ФИДЕСИС» для оценки эффективных механических характеристик многослойного резинокорда при конечных деформациях // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2013». Москва, апрель 2013 г. – С. 153.
25. Яковлев М.Я., Левин В.А. К численному решению задачи о кручении балки, изготовленной из анизотропного композитного материала, с использованием САЕ FIDESYS // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвящённой

90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова. Тула, 16-20 сентября 2013 года. – С. 526–528.

## Список литературы

1. Белкин А.Е. Разработка системы моделей и методов расчета напряженно-деформированного и теплового состояний автомобильных радиальных шин: дис. д-ра техн. наук: 01.02.06 / Белкин Александр Ефимович – М., 1998. – 284 с.
2. Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Динамический контакт шины как вязкоупругой оболочки с опорной поверхностью при стационарном качении // Вестник МГТУ. Серия "Машиностроение", 1997, №1. – С. 62–73.
3. Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
4. Бидерман В.Л., Лапин А.А. К определению характеристик резинокордовых оболочек. «Инженерный сборник», т. XIV, изд. АН СССР, 1953.
5. Бухин Б.Л. Математические методы в механике и конструировании шин // Сборник докладов VI симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов» – Москва, НИИШП, 9-13 октября, 1995 – С. 1–10.
6. Вещев А.А., Богданов В.Н., Проворов А.В., Гуцин Е.Н. О деформационных характеристиках металлокордного полотна, используемого в производстве шин // «Каучук и резина», 1987, № 1. – С. 27–29.
7. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Терпяков А.А., Яковлев М.Я. Вариант расчёта НДС резинокорда с учётом угла наклона нитей корда // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2012». Москва, апрель 2012 г. – С. 44–45.
8. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита // Каучук и резина, №4, 2010. – С. 22–25.

9. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. К построению модели взаимодействия микровключений в эластомерах // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2008. – С. 116.
10. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филипенко Е.В., Яковлев М.Я. Напряжения и деформации в матрице между частицами наполнителя в резине // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", 17-21 ноября 2008 года, Тула. – С. 165–168.
11. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филипенко Е. В., Яковлев М. Я. Расчет поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита при конечных деформациях с помощью МКЭ // Сборник докладов 19 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 13-17 октября 2008 г. – С. 112–119.
12. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Яковлев М.Я. Об эффекте Пейна в эластомерных нанокompозитах. Результаты численного эксперимента // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2009. – С. 44.
13. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Яковлев М.Я. Результаты численных экспериментов, подтверждающих экспериментально наблюдаемый эффект Пейна (для шарообразных и эллипсоидальных включений) // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», 23-27 ноября 2009 года, Тула. – С. 148–150.
14. Гамлицкий Ю.А., Мудрук В.И., Швачич М.В. Упругий потенциал наполненных резин. Теория и эксперимент // Сборник докладов 11 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 23-27 октября 2000 г., Москва. – С. 162–183.
15. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов, 1988, №2. – С. 287-298.

16. Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Расчёт эффективных характеристик нелинейно-упругих композитов при конечных деформациях // Материалы IX Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», 15-22 сентября 2012 года, Казань. – С. 168–172.

17. Кваша Э.Н., Погасий Н.А. Математическая модель шины, учитывающая физическую нелинейность корда // Сборник докладов пятого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов» 1993. – С. 97–103.

18. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – Киев: Наукова думка, 2002 г. – 655 с.

19. Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Карпушин А.Д. Анализ численного нелинейного решения оболочечной резинокордной пневматической конструкции // Сборник докладов 11 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов» – М.: 2000, т. 2. – С. 17–24.

20. Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Карпушин А.Д. Матрица жесткости пространственного конечного элемента для исследования конструкций из композиционных материалов // Вісник СУДУ – 1999, №3(18). – С. 109–116.

21. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. – Киев: «Будивельник», 1992. – 216 с.

22. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М., «Мир», 1982. – 334 с.

23. Кузнецов А.Л. Определение коэффициентов матрицы жесткости резинокордного композита с учетом разномодульности при растяжении-сжатии нитей // Сборник докладов шестого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: 1995. – С. 141–148.

24. Лазарев С.О., Полонский В.Л. Конечноэлементная система STAR для расчета и проектирования РТИ // Сборник докладов 10 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: 1999. – С. 153–156.

25. Лапин А.А. Плоская деформация резино-кордовой ткани // Расчеты на прочность в машиностроении. М.: МАШГИЗ, 1955. – С. 87–99.
26. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 224 с.
27. Левин В.А., Вершинин А.В., Пекарь Г.Е., Саяхова Л.Ф., Труфен К.Н., Филипенко Е.В., Яковлев М.Я. Использование нелокального критерия прочности в задачах многократного наложения больших деформаций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2006. – С. 45.
28. Левин В. А., Калинин В. В., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В. А. Левина. – М., Физматлит, 2007. – 392 с.
29. Левин В. А., Зингерман К. М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. – М., Физматлит, 2002. – 272 с.
30. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. – С. 482-487.
31. Левин В.А., Зингерман К.М., Гамлицкий Ю.А., Яковлев М.Я., Прокопенко А.С. Об алгоритме оценки эффективных механических свойств резинокорда при конечных деформациях // Сборник докладов 22 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов», 17-21 октября 2011 года. – С. 9–15.
32. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Об определении эффективных свойств резинокорда в случае конечных деформаций с помощью системы для инженерного прочностного анализа CAE FIDESYS // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвящённой 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Тула, 19-23 сентября 2011 года. – С. 146.
33. Левин В.А., Ильин И.А., Кукушкин А.В., Агапов Н.А., Яковлев М.Я. Моделирование развития зоны предразрушения в телах из упругого или вязкоуп-

ругого материала с помощью пакета ABAQUS // Тезисы докладов VI Международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», 22-26 ноября 2005 года, Тула. – С. 226–227.

34. Левин В.А., Пекарь Г.Е., Филипенко Е.В., Яковлев М.Я. Плоская задача об образовании полости произвольной формы в нагруженном теле из нелинейно-упругого материала. Конечные деформации // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2007. – С. 206.

35. Левин В.А., Яковлев М.Я. Об оценке эффективных характеристик резинокорда с учётом закроя нитей корда с использованием САЕ «ФИДЕСИС» // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2012». Москва, апрель 2012 г. – С. 110–111.

36. Лохин В.В., Зингерман К.М., Прокопенко А.С., Яковлев М.Я., Цукров И. Об оценке механических эффективных характеристик наноструктурированных материалов с использованием САЕ Fidesys // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», Тула, 3-7 октября 2011 года. – С. 225–226.

37. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.

38. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

39. Морозов Е.М., Яковлев М.Я., Прокопенко А.С. О моделировании вязкого роста дефекта (трещины) в теле с конечными деформациями с использованием САЕ Fidesys // Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», Тула, 3-7 октября 2011 года. – С. 233–234.

40. Мухин О.Н. Растяжение двухслойной резинокордной полосы // Сборник докладов 10 симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов» – М.: 1999. – С. 290–309.

41. Овчинникова Е.А., Черных К.Ф. Виброзащитные свойства резинового амортизатора, армированного малорастяжимыми волокнами // Сборник докладов

шестого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов» – М.: 1995. – С. 179–183.

42. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 335 с.

43. Победря Б.Е., Шешенин С.В. Трёхмерное моделирование напряженно-деформированного состояния пневматических шин // VIII симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов» - Москва, НИИШП - 20-24 октября 1997 – С. 320–325.

44. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. / Пер с англ. под ред. Б.Е. Победри – М.: Мир, 1979. – 376 с.

45. Соколов С.Л., Ненахов А.Б. Применение метода конечных элементов к решению задачи о нагружении радиальных шин локальной нагрузкой // Сборник докладов шестого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов» - М.: 1995. – С. 239–243.

46. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.

47. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. – М. Наука, 1994 – 528 с.

48. Трибельский И.А., Пиновский М.Л. К расчету бортовых зон резинокордных оболочек // Каучук и резина, 1985, № 4. – С. 30–33.

49. Трибельский И.А., Ердеев А.И., Абакумов Ю.В. Метод расчета нелинейных жесткостных характеристик, напряженного состояния и полей температур резинокордных оболочек высокоэластичных муфт // Сборник докладов третьего всесоюзного симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: 1991. – С. 87–94.

50. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 399 с.

51. Шешенин С.В., Демидович П.Н., Чистяков П.В., Бахметьев С.Г. Определяющее соотношение резинокорда при трёхмерном напряжённом состоянии //

Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. 2010. №3. – С. 32–35.

52. Яковлев М.Я. О разработке программного модуля для вычисления эффективных механических характеристик анизотропных композитов для САЕ «ФИДЕСИС» // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» Тула, 17-21 сентября 2012 года. – С. 275-276.

53. Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. №17, 2012. – С. 29–40.

54. Яковлев М.Я. Сравнение универсальных прочностных САЕ-систем FIDESYS и ANSYS на примере решения контактной задачи термоупругости // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", 22-26 ноября 2010 года, Тула. – С. 222–224.

55. Яковлев М.Я., Зингерман К.М., Левин В.А. О разработке программного модуля САЕ «ФИДЕСИС» для оценки эффективных механических характеристик многослойного резинокорда при конечных деформациях // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2013». Москва, апрель 2013 г. – С. 153.

56. Яковлев М.Я., Левин В.А. К численному решению задачи о кручении балки, изготовленной из анизотропного композитного материала, с использованием САЕ FIDESYS // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвящённой 90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова. Тула, 16-20 сентября 2013 года. – С. 526–528.

57. Яковлев М.Я., Левин В.А. К численному решению задачи прочности для тонкостенных конструкций // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2010. – С. 126.

58. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двух-слойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, №2, 2013. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>
59. Aboudi J. Micromechanics-based thermoviscoelastic constitutive equations for rubber-like matrix composites at finite strains // International Journal of Solids and Structures. 2004. V. 41. – P. 5611–5629.
60. Akasaka T. Various Reports and/or Bulletins of the Faculty of Science and Engineering (Chuo University, Tocyо, 1959-64).
61. Bruhns O. T., Schiesse P. A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids // European Journal of Mechanics A: Solids. 1996. V. 15, 3. – P. 367–396.
62. Clark S.K. A Review of Cord-Rubber Elastic Characteristics // Rubber Chemistry and Technology, V. 37, 1964. – P. 1365–1390.
63. Clark S.K. The Plane Elastic Characteristics of Cord-Rubber Laminates // Textile Research Journal, v. 33, 1963. – P. 295–313.
64. Clark S.K. Internal Characteristics of Orthotropic Laminates // Textile Research Journal, v. 33, 1963. – P. 935–953.
65. Clark S.K. Mechanics of Pneumatic Tires (2nd edition). – US Government Printing Office, Nr. 122, 1971. – 844 p.
66. Fish J. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. 2011. V. 55. – P. 215-231.
67. Fish J., Fan R. Mathematical homogenization of nonperiodic heterogeneous media subjected to large deformation transient loading // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 76. – P. 1044–1064.
68. Gough V.E. Stiffness of Cord and Rubber Constructions // Rubber Chemistry and Technology, v. 41, 1968. – P. 988.

69. Gough V.E. Die Streifigkeit von cordverstärkten Gummi-Konstruktionen // *Kautschuk und Gummi, Kunststoffe*, v. 20, 1967. – P. 469.
70. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1962. V. 10. – P. 335–342.
71. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. V. 11. – P. 127–140.
72. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. V. 11. – P. 357–372.
73. Hohe J., Becker W. A probabilistic approach to the numerical homogenization of irregular solid foams in the finite strain regime // *International Journal of Solids and Structures*. 2005. V. 42. – P. 3549–3569.
74. Jones R. M. *Mechanics of Composite Materials*. – Script a Book Company, Washington, 1975. – 355 p.
75. Kachanov M., Sevostianov I. On quantitative characterization of microstructures and effective properties // *International Journal of Solids and Structures*. 2005. V. 42. – P. 309-336.
76. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
77. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.
78. Mercier S., Molinari A., Berbenni S., Berveiller M. Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials // *Modeling and Simulation in Material Science and Engineering*. 2012. V. 20. 024004.
79. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metallurgica*. 1973. V. 21. – P. 571-574.

80. Nemeth T., Nandori F., Sarkozi L., Szabo T. Numerical strength analysis of rubber tire construction // VI симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов» - Москва, НИИШП - 9-13 октября - 1995 – С. 160–164.
81. Oden J.T., Lin T.L., Bass J.M. A Finite Element Analysis of the General Rolling Contact Problem for a Viscoelastic Rubber Cylinder // *Tire Science and Technology*, 1988, v. 16, N. 3. – P. 18–43.
82. Ponte Castañeda P., Nebozhyn M.V. Variational estimates of the self-consistent type for the effective behavior of some model nonlinear polycrystals // *Proceedings of the Royal Society A*. 1997. V. 453. – P. 2715–2724.
83. Ponte Castañeda P., Willis J. R. Variational second-order estimates for nonlinear composites // *Proceedings of the Royal Society A*. 1999. V. 455. – P. 1799–1811.
84. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998. V. 155, 1–2. – P. 181–192.
85. Talbot D.R. S., Willis J. R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite // *Proceedings of the Royal Society A*. 2004. V. 460. – P. 2705–2723.
86. Tsu-Wei Chou. *Microstructural Design of Fiber Composites*. – Cambridge University Press. 1999. – 569 p.
87. Tsukrov I., Bayraktar H., Giovinazzo M., Goering J., Gross T., Fruscello M., Martinsson L. Finite Element Modeling to Predict Cure-Induced Microcracking in Three-Dimensional Woven Composites // *International Journal of Fracture*. 2011. V. 172. – P. 209-216.
88. Tsukrov I., Kachanov M. Effective Moduli of an Anisotropic Material with Elliptical Holes of Arbitrary Orientational Distribution // *International Journal of Solids and Structures*. 2000. V. 37. – P. 5919-5941.

89. Tsukrov I., Novak J. Effective Elastic Properties of Solids with Defects of Irregular Shapes // International Journal of Solids and Structures. 2002. V. 39. – P. 1539-1555.
90. Walter J. D. Cord-Rubber Tire Composites: Theory And Applications // Rubber Chemistry and Technology. – 1978, V.51. – P. 524–576.
91. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. – Vol. 1. The finite element method. The basis, 2000. – 707 p.
92. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. – Vol. 2. The finite element method. Solid mechanics, 2000. – 479 p.
93. Zingerman K.M., Levin V.A., Yakovlev M.Ya., Prokopenko A.V., Terpyakov A.A. Computation of effective elastic characteristics of porous and composite materials using the FIDESYS CAE-system // 10-th Word Congress on Computational Mechanics. 8-13 July 2012. Sao Paulo. Brazil. Book of Abstracts. 19531. – P. 290.
94. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cae-fidesys.ru/>

## Приложение 1. Файл GetPiolKirchHoff3D.cpp

```

void GetPiolKirchHoff3D(double load, std::vector<double> &LoadType,
std::vector<double> &TensorPiolaKirgofa, int LType)
{
    // ВЫВОДИМ В КОНСОЛЬ ТИП И ВЕЛИЧИНУ НАГРУЗКИ
    switch (LType)
    {
        case 0: std::cout << "\nLOAD TYPE 1: uniaxial tension along X-
axis\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 1: std::cout << "\nLOAD TYPE 2: uniaxial tension along Y-
axis\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 2: std::cout << "\nLOAD TYPE 3: uniaxial tension along Z-
axis\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 3: std::cout << "\nLOAD TYPE 4: XY-stress\nLOAD VALUE " <<
load << "\n\n";
            break;
        case 4: std::cout << "\nLOAD TYPE 5: XZ-stress\nLOAD VALUE " <<
load << "\n\n";
            break;
        case 5: std::cout << "\nLOAD TYPE 6: YZ-stress\nLOAD VALUE " <<
load << "\n\n";
            break;
        case 6: std::cout << "\nLOAD TYPE 7: biaxial tension along X-
and Y-axes\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 7: std::cout << "\nLOAD TYPE 8: biaxial tension along X-
and Z-axes\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 8: std::cout << "\nLOAD TYPE 9: uniform tension (along all
axes)\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 9: std::cout << "\nLOAD TYPE 10: uniaxial tension along X-
axis plus XY-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 10: std::cout << "\nLOAD TYPE 11: uniaxial tension along
Y-axis plus XY-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 11: std::cout << "\nLOAD TYPE 12: uniaxial tension along
Z-axis plus XY-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 12: std::cout << "\nLOAD TYPE 13: uniaxial tension along
X-axis plus XZ-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
            break;
        case 13: std::cout << "\nLOAD TYPE 14: uniaxial tension along
Y-axis plus XZ-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
    }
}

```

```

        break;
    case 14: std::cout << "\nLOAD TYPE 15: uniaxial tension along
Z-axis plus XZ-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    case 15: std::cout << "\nLOAD TYPE 16: uniaxial tension along
X-axis plus YZ-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    case 16: std::cout << "\nLOAD TYPE 17: uniaxial tension along
Y-axis plus YZ-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    case 17: std::cout << "\nLOAD TYPE 18: uniaxial tension along
Z-axis plus YZ-shift\nLOAD VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    case 18: std::cout << "\nLOAD TYPE 19: XY- and XZ-shift\nLOAD
VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    case 19: std::cout << "\nLOAD TYPE 20: XY- and YZ-shift\nLOAD
VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    case 20: std::cout << "\nLOAD TYPE 21: XZ- and YZ-shift\nLOAD
VALUE " << load << "\n\n";
        break;
    default: std::cout << "\nERROR! Wrong load type!\n\n";
}

LARGE_KERNEL::Static3DKernel kernel;

boost::shared_ptr<LINEAR_SOLVER::SolverPro> solver(new
LINEAR_SOLVER::SolverPro);

// ***** Ядро ***** //

kernel.data["INTERMEDIATE"];
kernel.data["NEWTON_PRECISION"] = 1e-2;

// Количество шагов

solver->SetMethod(LINEAR_SOLVER::SolveOptions::MethodDirect);
//solver-
>SetPreconditionerType(LINEAR_SOLVER::SolveOptions::PreconditionerNo
);

//solver->SetCUSPGmres(false);
//solver->SetUseCuda(true);
//solver->SetSolverChoose(LINEAR_SOLVER::SolveOptions::CUSP);
//solver->SetStoppingCriteria(1e-2);
//solver->SetEpsilon(0);
solver->SetOutInfo(LINEAR_SOLVER::No);

```

```

kernel.SetSolver(solver);
kernel.SetActivityAndFactory(0, new Shared::ActivityFactory);

//kernel.data["COUNT_STEP_OF_SOLUTION"] = ceil(15000*load);

// ***** Геометрия
***** //

boost::shared_ptr<MESH::Mesh3D> mesh(new MESH::Mesh3D);

//KERNEL_TOOLS::KfileParser("rub_cord_3D_1_r_f200.k",
*mesh.get());
//KERNEL_TOOLS::KfileParser("rub_cord_3D_1_m2_3.k",
*mesh.get());
//KERNEL_TOOLS::KfileParser("rub_cord_3D_1_m_ref_small_.k",
*mesh.get());
KERNEL_TOOLS::KfileParser("rub_cord_3D_2_90.k", *mesh.get());

//KERNEL_TOOLS::KfileParserQuad("rk_mesh_quad.k", *mesh.get());
// имя k-файла с сеткой

kernel.mesh = mesh;

std::cout << "\nDone reading 3D mesh from K file\n";

//mesh->VtkoutText("mesh_test.vtk");
//std::cout << "\nDone exporting 3D mesh to VTU file\n\n";

MeshPrepare3D(*mesh.get());

mesh->VtkoutTextSurf("meshSurf.vtk");
std::cout << "\nDone exporting 3D mesh to VTK file\n";

// ***** СВОЙСТВА *****
//

//корд
double E1 = 3.3;
double nu1 = 0.25;

// корд - сталь 35
double factor_ = 1.0E0;

// сталь
double lambda_1 = 1.1E5; //*factor_;
double G_1 = 0.806E5; //*factor_;
double C3_1 = -0.32E5; //*factor_;

```

```

double C4_1 = -2.3E5; /*factor_ ;
double C5_1 = -2.68E5; /*factor_ ;

//резина
double C_treolar = 0.87745E6;
double E0 = 2.0;
double nu0 = 0.49;

// оргстекло
double lambda_0 = 0.39E5;
double G_0 = 0.186E5;
double C3_0 = -0.013E5;
double C4_0 = -0.07E5;
double C5_0 = 0.063E5;

// медь
double lambda_2 = 1.07E5;
double G_2 = 0.477E5;
double C3_2 = -0.93E5;
double C4_2 = 1.71E5;
double C5_2 = -5.31E5;

// резина
double E_1 = 2.3429*factor_ ;
double E_2 = -0.0018603*factor_ ;
double E_3 = 86.7162*factor_ ;
double E_4 = 1.5404*factor_ ;
double E_5 = 10.0;

double lambda1, G1, lambda0, G0;
lambda1 = E1*nu1/(1+nu1)/(1-2*nu1);
G1 = E1/2/(1+nu1);

lambda0 = E0*nu0/(1+nu0)/(1-2*nu0);
G0 = E0/2/(1+nu0);

//std::cout << "lambda = " << lambda1 << "\n" << "G = " << G1
<< "\n";

kernel.domains.resize(3);

// 0 - резина, 1 - корд
// 2 - резина, 1 - корд
// 0 - матрица, 1 - арматура

int RubberDomain = 2;
int CordDomain = 1;

kernel.domains[RubberDomain].name = "COM_GAMLITCKY_DROB_LIN";
kernel.domains[RubberDomain].coefs.resize(6, 0);

```

```

kernel.domains[RubberDomain].coefs[0] = E_1;
kernel.domains[RubberDomain].coefs[1] = E_2;
kernel.domains[RubberDomain].coefs[2] = E_3;
kernel.domains[RubberDomain].coefs[3] = E_4;
kernel.domains[RubberDomain].coefs[4] = E_5;
kernel.domains[RubberDomain].coefs[5] =
kernel.domains[RubberDomain].coefs[3];

kernel.domains[CordDomain].name = "MURNAGHAN";
kernel.domains[CordDomain].coefs.resize(5, 0);
kernel.domains[CordDomain].coefs[0] = lambda_1;
kernel.domains[CordDomain].coefs[1] = G_1;
kernel.domains[CordDomain].coefs[2] = C3_1;
kernel.domains[CordDomain].coefs[3] = C4_1;
kernel.domains[CordDomain].coefs[4] = C5_1;

/*kernel.domains[1].name = "TREOLAR";
kernel.domains[1].coefs.resize(1, 0);
kernel.domains[1].coefs[0] = 10.0*C_treolar;*/

/*kernel.domains[1].name = "HOOK";
kernel.domains[1].coefs.resize(2, 0);
kernel.domains[1].coefs[0] = E1;
kernel.domains[1].coefs[1] = nu1;*/

/*kernel.domains[2].name = "MURNAGHAN";
kernel.domains[2].coefs.resize(5, 0);
kernel.domains[2].coefs[0] = lambda_0;
kernel.domains[2].coefs[1] = G_0;
kernel.domains[2].coefs[2] = C3_0;
kernel.domains[2].coefs[3] = C4_0;
kernel.domains[2].coefs[4] = C5_0;*/

/*kernel.domains[0].name = "HOOK";
kernel.domains[0].coefs.resize(2, 0);
kernel.domains[0].coefs[0] = E0;
kernel.domains[0].coefs[1] = nu0;*/

//kernel.domains[0].name = "TREOLAR";
//kernel.domains[0].coefs.resize(1, 0);
//kernel.domains[0].coefs[0] = C_treolar;

kernel.elementOuts.clear();
kernel.nodeOuts.clear();

// ***** Определение типа нагрузки
***** //

// Вычисление тензора Пиолы-Кирхгофа для эффективного материала

```

```

std::vector<double> GreenTensor(9, 0);

//прибавление нагрузки
GreenTensor[0] += LoadType[0]*load;
GreenTensor[1] += LoadType[1]*load;
GreenTensor[2] += LoadType[2]*load;
GreenTensor[3] += LoadType[3]*load;
GreenTensor[4] += LoadType[4]*load;
GreenTensor[5] += LoadType[5]*load;
GreenTensor[6] += LoadType[6]*load;
GreenTensor[7] += LoadType[7]*load;
GreenTensor[8] += LoadType[8]*load;

//по тензору Грина вычисляется аффино́р деформации, в
предположении что он верхнетреугольный
std::vector<double> affinor(9,0);
affinor[8] = sqrt(2*GreenTensor[8] + 1); // \psi_33
affinor[5] = 2*GreenTensor[5]/affinor[8]; // \psi_23 = \psi_32
affinor[2] = 2*GreenTensor[2]/affinor[8]; // \psi_13 = \psi_31
affinor[4] = sqrt(2*GreenTensor[4] + 1 - affinor[5]*affinor[5]);
// \psi_22
affinor[1] = (2*GreenTensor[1] -
affinor[2]*affinor[5])/affinor[4]; // \psi_12 = \psi_21
affinor[0] = sqrt(2*GreenTensor[0] + 1 - affinor[2]*affinor[2] -
affinor[1]*affinor[1]); // \psi_11

/*for (int i = 0; i < 9; i++)
{
    //std::cout << "Green_" << i << " = " << GreenTensor[i] <<
"\n";
    std::cout << "affinor_" << i << " = " << affinor[i] <<
"\n";
}*/

kernel.nodeIns.clear();

//задание граничных перемещений
for(unsigned int w = 0; w <
dynamic_cast<MESH::Mesh3D*>(kernel.mesh.get())->points.size(); w++)
{
    MESH::Node3D &e =
dynamic_cast<MESH::Mesh3D*>(kernel.mesh.get())->points[w];
//проверка, является ли узел граничным
if(e.domain != -1)
{
    //std::cout << w << std::endl;
    continue;
}
}

```

```

GENERAL_KERNEL::NodeIn nodeIn(w);

    // умножаем радиус-вектор (вектор-строчку, не столбец - это
важно!) на аффиноор без единичного тензора
    nodeIn.data["U"] = e.x * (affinor[0] - 1) + e.y * affinor[3]
    + e.z * affinor[6];
    nodeIn.data["V"] = e.x * affinor[1]                + e.y *
(affinor[4] - 1) + e.z * affinor[7];
    nodeIn.data["W"] = e.x * affinor[2]                + e.y *
affinor[5]          + e.z * (affinor[8] - 1);

    kernel.nodeIns.push_back(nodeIn);
}

kernel.BeginSteps();
kernel.NextStep();
kernel.EndSteps();

if ( kernel.dataOuts.find("NEWTON_PRECISION")->second >
kernel.data.find("NEWTON_PRECISION")->second)
{
    std::cout << "Newton precision ERROR!!!\n";
    std::cout << "precision = " <<
kernel.dataOuts.find("NEWTON_PRECISION")->second << "\n";
    std::cout << "target precision = " <<
kernel.data.find("NEWTON_PRECISION")->second << "\n";
}

// вывод VTU-файлов с результатами
switch (LType)
{
case 0:
    KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX.vtu");
    break;
case 1:
    KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_YY.vtu");
    break;
case 2: KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_ZZ.vtu");
    break;
case 3: KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XY.vtu");
    break;
case 4: KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XZ.vtu");
    break;
case 5: KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_YZ.vtu");
    break;
case 6:
    KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX_YY.vtu");
    break;
}

```

```

    case 7:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX_ZZ.vtu");
        break;
    case 8:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX_YY_ZZ.vtu");
        break;
    case 9:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX_XY.vtu");
        break;
    case 10:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_YY_XY.vtu");
        break;
    case 11:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_ZZ_XY.vtu");
        break;
    case 12:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX_XZ.vtu");
        break;
    case 13:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_YY_XZ.vtu");
        break;
    case 14:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_ZZ_XZ.vtu");
        break;
    case 15:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XX_YZ.vtu");
        break;
    case 16:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_YY_YZ.vtu");
        break;
    case 17:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_ZZ_YZ.vtu");
        break;
    case 18:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XY_XZ.vtu");
        break;
    case 19:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XY_YZ.vtu");
        break;
    case 20:
KERNEL_TOOLS::OutputToVTK(kernel, "EffProps_3D_XZ_YZ.vtu");
        break;
    default: std::cout << "ERROR! Wrong load type!\n\n";
}

```

```

//Осреднение напряжений по площади и нахождение тензора Пиолы-
Кирхгофа

```

```

std::vector<double> SigmaAveraged(9,0);

```

```

    const GENERAL_KERNEL::GeneralKernel::DataField &stres3 =
kernel.ElementOutField("Stress");
    const GENERAL_KERNEL::GeneralKernel::DataField &disp3 =
kernel.NodeOutField("Displacement");
    //const GENERAL_KERNEL::GeneralKernel::DataField &strain3 =
kernel.ElementOutField("Strain");

    //пересчитываем площадь в конечном состоянии

    double V_mesh = 0;

    //MESH::Mesh3D *mesh =
dynamic_cast<MESH::Mesh3D*>(kernel.mesh.get());

    switch (mesh->elements[0].nodes.size())
    {
        // тетраэдральные элементы
    case 4:
        for(int i = 0; i < mesh->elements.size(); i++)
        {
            V_mesh += KERNEL_TOOLS::VolumeTetrahedron(mesh-
>points[mesh->elements[i].nodes[0]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[0]][0],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[0]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[0]][1],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[0]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[0]][2],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[1]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[1]][0],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[1]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[1]][1],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[1]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[1]][2],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[2]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[2]][0],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[2]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[2]][1],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[2]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[2]][2],

```

```

    mesh->points[mesh->elements[i].nodes[3]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[3]][0],

    mesh->points[mesh->elements[i].nodes[3]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[3]][1],

    mesh->points[mesh->elements[i].nodes[3]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[3]][2]);
    }
    break;

    // 10-узловые тетраэдральные элементы
    case 10:
        for(int i = 0; i < mesh->elements.size(); i++)
        {
            V_mesh += KERNEL_TOOLS::VolumeTetrahedron(mesh-
>points[mesh->elements[i].nodes[0]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[0]][0],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[0]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[0]][1],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[0]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[0]][2],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[1]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[1]][0],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[1]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[1]][1],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[1]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[1]][2],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[2]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[2]][0],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[2]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[2]][1],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[2]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[2]][2],

            mesh->points[mesh->elements[i].nodes[3]].x + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[3]][0],

```

```

    mesh->points[mesh->elements[i].nodes[3]].y + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[3]][1],

    mesh->points[mesh->elements[i].nodes[3]].z + disp3[mesh-
>elements[i].nodes[3]][2]);
    }
    break;
    default: std::cout << "Wrong element type!\nNumber of angles =
"<< mesh->elements[0].nodes.size() << "\nmust be 4 or 10\n";
    }

    //std::cout << "V_result = " << V_mesh << std::endl;

    //std::cout << "CNT = " <<
dynamic_cast<MESH::Mesh3D*>(kernel.mesh.get())->faces.size() <<
std::endl;

    //осреднение напряжений по области
    for(unsigned int e = 0; e <
dynamic_cast<MESH::Mesh3D*>(kernel.mesh.get())->faces.size(); e++)
    {

        MESH::Face &face_tmp =
dynamic_cast<MESH::Mesh3D*>(kernel.mesh.get())->faces[e];
        //проверка, является ли грань граничной

        if(face_tmp.Marker == -1)
        {
            //std::cout << "Not edge!\n";
            continue;
        }

        //координаты узлов ребра в конечном состоянии
        double X1 = mesh->points[face_tmp.nodes[0]].x +
disp3[face_tmp.nodes[0]][0];
        double X2 = mesh->points[face_tmp.nodes[1]].x +
disp3[face_tmp.nodes[1]][0];
        double X3 = mesh->points[face_tmp.nodes[2]].x +
disp3[face_tmp.nodes[2]][0];

        double Y1 = mesh->points[face_tmp.nodes[0]].y +
disp3[face_tmp.nodes[0]][1];
        double Y2 = mesh->points[face_tmp.nodes[1]].y +
disp3[face_tmp.nodes[1]][1];
        double Y3 = mesh->points[face_tmp.nodes[2]].y +
disp3[face_tmp.nodes[2]][1];

        double Z1 = mesh->points[face_tmp.nodes[0]].z +
disp3[face_tmp.nodes[0]][2];

```

```

        double Z2 = mesh->points[face_tmp.nodes[1]].z +
disp3[face_tmp.nodes[1]][2];
        double Z3 = mesh->points[face_tmp.nodes[2]].z +
disp3[face_tmp.nodes[2]][2];

//          //внешняя нормаль к грани (проверить в ту ли сторону
нормаль)

double nx = ((Y1-Y2)*(Z1-Z3) - (Z1-Z2)*(Y1-Y3));
double ny = ((Z1-Z2)*(X1-X3) - (X1-X2)*(Z1-Z3));
double nz = ((X1-X2)*(Y1-Y3) - (Y1-Y2)*(X1-X3));

// проверка, является ли нормаль внешней; если
является внутренней - разворачиваем
//делается через маркеры; наверно, лучше было бы
переделать через координаты узлов
if (face_tmp.Marker == 0)
{
    if (nx < 0)
    {
        nx = -nx;
        ny = -ny;
        nz = -nz;
    }
}
if (face_tmp.Marker == 1)
{
    if (nx > 0)
    {
        nx = -nx;
        ny = -ny;
        nz = -ny;
    }
}
if (face_tmp.Marker == 2)
{
    if (ny < 0)
    {
        nx = - nx;
        ny = - ny;
        nz = - nz;
    }
}
if (face_tmp.Marker == 3)
{
    if (ny > 0)
    {
        nx = -nx;
        ny = -ny;

```

```

        nz = -nz;
    }
}
if (face_tmp.Marker == 4)
{
    if (nz < 0)
    {
        nx = -nx;
        ny = -ny;
        nz = -nz;
    }
}
if (face_tmp.Marker == 5)
{
    if (nz > 0)
    {
        nx = -nx;
        ny = -ny;
        nz = -nz;
    }
}

//длина вектора нормали
double n_mod = sqrt(nx*nx + ny*ny + nz*nz);

// нормирование вектора нормали
nx /=n_mod;
ny /=n_mod;
nz /=n_mod;

//высчитываем коэффициент для перехода в интеграле
double E_m = (X1-X3)*(X1-X3) + (Y1-Y3)*(Y1-Y3) + (Z1-
Z3)*(Z1-Z3);
double G_m = (X1-X2)*(X1-X2) + (Y1-Y2)*(Y1-Y2) + (Z1-
Z2)*(Z1-Z2);
double F_m = (X2-X1)*(X3-X1) + (Y3-Y1)*(Y2-Y1) + (Z2-
Z1)*(Z3-Z1);
double k = sqrt(E_m*G_m - F_m*F_m)/6/V_mesh;

// Вывод отладочной информации
//std::cout << "Normal vector coordinates: " << nx <<
'\t' << ny << '\t' << nz << '\n';
//std::cout << "k = " << k << "\n";
//std::cout << "Number of face is " << e << std::endl;
//std::cout << "Summand is " << k *
(nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][0] +
ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][4]) * (X1 + X2 + X3) << std::endl;
//std::cout << "Sigma_xx is " <<
stres3[face_tmp.Elements[0]][0] << std::endl;

```

```

        //std::cout << "Sigma_xy is " <<
    stres3[face_tmp.Elements[0]][3] << std::endl;
        //std::cout << "Sigma_xz is " <<
    stres3[face_tmp.Elements[0]][4] << std::endl;
        //std::cout << "Coordinates sum is " << X1 + X2 + X3
    << std::endl << std::endl;

//          //осреднение тензора напряжений

        SigmaAveraged[0] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][0] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][4]) * (X1 + X2 + X3);
        SigmaAveraged[1] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][0] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][4]) * (Y1 + Y2 + Y3);
        SigmaAveraged[2] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][0] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][4]) * (Z1 + Z2 + Z3);

        SigmaAveraged[3] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][1] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][5]) * (X1 + X2 + X3);
        SigmaAveraged[4] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][1] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][5]) * (Y1 + Y2 + Y3);
        SigmaAveraged[5] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][3] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][1] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][5]) * (Z1 + Z2 + Z3);

        SigmaAveraged[6] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][4] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][5] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][2]) * (X1 + X2 + X3);
        SigmaAveraged[7] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][4] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][5] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][2]) * (Y1 + Y2 + Y3);
        SigmaAveraged[8] += k *
    (nx*stres3[face_tmp.Elements[0]][4] +
    ny*stres3[face_tmp.Elements[0]][5] +
    nz*stres3[face_tmp.Elements[0]][2]) * (Z1 + Z2 + Z3);

    }

```

```

/*std::cout << "\n Tensor istinnyh napryazheniy\n\n";

for (int k = 0; k < 3; k++)
{
    for (int l = 0; l < 3; l++)
    {
        std::cout << SigmaAveraged[k*3+l] << '\t';
    }
    std::cout << std::endl;
}*/

// вывод осреднённого тензора
//for (int i = 0; i < 9; i++)
//{
//    std::cout << "SigmaAV[" << i << "] = " <<
SigmaAveraged[i] << "\n";
//}

//делаем через буст
using namespace boost::numeric;
ublas::matrix<double>
boost_afinor(ublas::zero_matrix<double>(3,3));
boost_afinor(0,0) = affinor[0];
boost_afinor(0,1) = affinor[1];
boost_afinor(0,2) = affinor[2];
boost_afinor(1,0) = affinor[3];
boost_afinor(1,1) = affinor[4];
boost_afinor(1,2) = affinor[5];
boost_afinor(2,0) = affinor[6];
boost_afinor(2,1) = affinor[7];
boost_afinor(2,2) = affinor[8];
ublas::matrix<double>
boost_sigma(ublas::zero_matrix<double>(3,3));
boost_sigma(0,0) = SigmaAveraged[0];
boost_sigma(0,1) = SigmaAveraged[1];
boost_sigma(0,2) = SigmaAveraged[2];
boost_sigma(1,0) = SigmaAveraged[3];
boost_sigma(1,1) = SigmaAveraged[4];
boost_sigma(1,2) = SigmaAveraged[5];
boost_sigma(2,0) = SigmaAveraged[6];
boost_sigma(2,1) = SigmaAveraged[7];
boost_sigma(2,2) = SigmaAveraged[8];
ublas::matrix<double>
boost_PK(ublas::zero_matrix<double>(3,3));
ublas::matrix<double>
boost_afinor_inverse(ublas::zero_matrix<double>(3,3));
ublas::matrix<double>
boost_afinor_T(boost::numeric::ublas::trans(boost_afinor));
ublas::matrix<double>
boost_afinor_T_inverse(ublas::zero_matrix<double>(3,3));

```

```

    EFFECTIVE_PROPERTIES::InvertMatrix(boost_afinor,
boost_afinor_inverse);
    EFFECTIVE_PROPERTIES::InvertMatrix(boost_afinor_T,
boost_afinor_T_inverse);

    /*std::cout << "\nTest... boost_sigma\n";
for (int k = 0; k < 3; k++)
{
    for (int l = 0; l < 3; l++)
    {
        std::cout << boost_sigma(k,l) << '\t';
    }
    std::cout << std::endl;
}*/

    /*std::cout << "\nTest... boost_afinor_T_inverse\n";
for (int k = 0; k < 3; k++)
{
    for (int l = 0; l < 3; l++)
    {
        std::cout << boost_sigma(k,l) << '\t';
    }
    std::cout << std::endl;
}*/

    //буст афинор используется как темповая матрица
boost_afinor_T = prod (boost_afinor_T_inverse,
boost_sigma);

    /*std::cout << "\nTest... boost_afinor_T_inverse\n";
for (int k = 0; k < 3; k++)
{
    for (int l = 0; l < 3; l++)
    {
        std::cout << boost_afinor_T(k,l) << '\t';
    }
    std::cout << std::endl;
}*/

boost_PK = prod (boost_afinor_T,boost_afinor_inverse);

    /*std::cout << "\nTest... boost_PK\n";
for (int k = 0; k < 3; k++)
{
    for (int l = 0; l < 3; l++)
    {
        std::cout << boost_PK(k,l) << '\t';
    }
    std::cout << std::endl;
}*/

```

```

//TensorPiolaKirgofa.resize(9,0);
double detAfinor = affinor[0]*affinor[4]*affinor[8];
//std::cout << "Det = " << detAfinor << std::endl;
// когда аффиноры в степени -1 - на определитель аффинора
умножаем (при вычислении тензора Пиолы-Кирхгофа из т-ра ист. напр-й)
// когда аффиноры в степени 1 - на определитель аффинора
делим (при вычислении тензора истинных напр-й из т. П.-К.)

TensorPiolaKirgofa[0] = boost_PK(0,0)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[1] = boost_PK(0,1)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[2] = boost_PK(0,2)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[3] = boost_PK(1,0)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[4] = boost_PK(1,1)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[5] = boost_PK(1,2)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[6] = boost_PK(2,0)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[7] = boost_PK(2,1)*detAfinor;
TensorPiolaKirgofa[8] = boost_PK(2,2)*detAfinor;

}

```

## Приложение 2. Файл GetModuleRubberCord3D.cpp

```

void GetModuleRubberCord3D()
{
    //boost::shared_ptr<MESH::Mesh3D>
    mesh(dynamic_cast<MESH::Mesh3D *>(kernel.mesh.get()));

    int Load_Step_Number = 5;    // количество шагов по нагрузке -
    т.е. количество задач в каждой последовательности
    int Load_Type_Number = 21;    // количество типов нагрузки -
    т.е. количество последовательностей задач
    // для линейного случая достаточно шесть типов нагрузки, для
    нелинейного - 21 тип

    std::vector<double> LoadType(9);
    //для каждого типа нагрузки 9 уравнений

    std::vector<std::vector<double>> alfa_0(Load_Type_Number);
    std::vector<std::vector<double>> alfa_1(Load_Type_Number);

    //double V = 0;

    std::vector<double> load(Load_Step_Number);
    // последовательное увеличение нагрузки
    for(int i = 0; i < Load_Step_Number; i++)
    {
        load[i] = (i + 1)*0.04;
    }
}

```

```

        // здесь и задаётся величина нагрузки - деформация в
        процентах
    }

    std::vector<double> LoadTypeBlank(9*Load_Type_Number, 0);
    // LoadTypeBlank[i*9 + 3*j + k]: i - номер последовательности
    задач (i < Load_Type_Number),
    // j - номер строки в тензоре Грина, k - номер столбца

    // коэффициенты, учитывающие слабую сжимаемость резинокорда -
    алгоритм 1
    double alpha = 0.0,
           beta = 0.0,
           gamma = 0.0;

    // коэффициенты, учитывающие слабую сжимаемость резинокорда -
    алгоритм 2
    double a = 0.00,
           b = 0.00,
           c = 0.00,
           d = 0.00;
    double coff = 1 - c*d; // 1 - c*d - пригодится, на него много
    раз будем делить при вычислении эфф. коэф-тов

    /*if (Load_Type_Number == 6)
    {
        // растяжения
        LoadTypeBlank[0*9 + 3*0 + 0] = 1;      LoadTypeBlank[0*9 +
    3*1 + 1] = -a; LoadTypeBlank[0*9 + 3*2 + 2] = -b; // по оси X
        LoadTypeBlank[1*9 + 3*0 + 0] = 0.0;
        LoadTypeBlank[1*9 + 3*1 + 1] = 1; LoadTypeBlank[1*9 + 3*2 + 2]
    = -c; // по оси Y
        LoadTypeBlank[2*9 + 3*0 + 0] = 0.0;
        LoadTypeBlank[2*9 + 3*1 + 1] = -d; LoadTypeBlank[2*9 + 3*2 + 2]
    = 1; // по оси Z

        // сдвиги
        LoadTypeBlank[3*9 + 3*0 + 1] = 1; LoadTypeBlank[3*9 + 3*1 +
    0] = 1; // в плоскости XY
        LoadTypeBlank[4*9 + 3*0 + 2] = 1; LoadTypeBlank[4*9 + 3*2 +
    0] = 1; // в плоскости XZ
        LoadTypeBlank[5*9 + 3*1 + 2] = 1; LoadTypeBlank[5*9 + 3*2 +
    1] = 1; // в плоскости YZ
    }*/

    //Load_Type_Number - типов нагрузок, 9 - размерность тензоров
    (3 на 3), Load_Step_Number - величин нагрузок.
    //Если свойства линейные - надо всего 6 типов нагрузки. Больше
    2 величин нагрузки смысла делать нет

```

```

std::vector<std::vector<std::vector<double>>>>
TensorPiolaKirgofa(Load_Type_Number);

for(int i = 0; i < Load_Type_Number; i++)
{
    TensorPiolaKirgofa[i].resize(Load_Step_Number);
    for (int j = 0; j < Load_Step_Number; j++)
    {
        TensorPiolaKirgofa[i][j].resize(9);
    }
}

//C0_ijkl
std::vector<std::vector<double>>> C0(9);
// C1_ijklmn
std::vector<std::vector<double>>> C1(9);

switch (Load_Type_Number)
{
    // линейный случай
    case 6:
        {
            std::cout << "\nCalculation of the effective
properties of a LINEAR form\n\n";

            //Load_Type_Number - типов нагрузок, 9 -
размерность тензоров (3 на 3), Load_Step_Number - величин нагрузок.

            // растяжения
            LoadTypeBlank[0*9 + 3*0 + 0] = 1.0;
            LoadTypeBlank[0*9 + 3*1 + 1] = -a; LoadTypeBlank[0*9 + 3*2 + 2]
= -b; // по оси X
            LoadTypeBlank[1*9 + 3*0 + 0] = 0.0;
            LoadTypeBlank[1*9 + 3*1 + 1] = 1; LoadTypeBlank[1*9 + 3*2 + 2]
= -c; // по оси Y
            LoadTypeBlank[2*9 + 3*0 + 0] = 0.0;
            LoadTypeBlank[2*9 + 3*1 + 1] = -d; LoadTypeBlank[2*9 + 3*2 + 2]
= 1.0; // по оси Z

            // сдвиги
            LoadTypeBlank[3*9 + 3*0 + 1] = 1.0;
            LoadTypeBlank[3*9 + 3*1 + 0] = 1.0; // в плоскости XY
            LoadTypeBlank[4*9 + 3*0 + 2] = 1.0;
            LoadTypeBlank[4*9 + 3*2 + 0] = 1.0; // в плоскости XZ
            LoadTypeBlank[5*9 + 3*1 + 2] = 1.0;
            LoadTypeBlank[5*9 + 3*2 + 1] = 1.0; // в плоскости YZ

            //цикл по типу нагрузки (lt - load type)

```

```

for(int lt = 0; lt < Load_Type_Number; lt++) //
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
{
    for (int i = 0; i < 9; i++)
    {
        // цикл по номеру компоненты тензора
        LoadType[i] = LoadTypeBlank[i + lt*9];
    }

    //цикл по величине нагрузки (lv - load
value)
    for(int lv = 0; lv < Load_Step_Number; lv++)
    {
        //функция вычисляет тензор Пиола-
Киргофа
        //в качестве аргументов принимает
сетку, ядро, величину нагрузки, тип нагрузки (тензор Грина), площадь
сетки (это все хранится в ядре).
        GetPiolKirchHoff3D(load[lv], LoadType,
TensorPiolaKirgofa[lt][lv], lt);

        // for (int j = 0; j < 9; j++)
        // {
        //     std::cout <<
"TensorPiolyKirchHoffa_" << j << lt << lv << " = " <<
TensorPiolaKirgofa[lt][lv][j] << "\n";
        // }
    }

    //при поиске эфф. св-в в линейном виде достаточно
шести нагрузок
    for(int i = 0; i < Load_Type_Number; i++)
    {
        alfa_0[i].resize(9,0);
        //цикл по компонентам тензора
        for(int j = 0; j < 9; j++)
        {
            //цикл по величине нагрузки
            for(int k = 0; k < Load_Step_Number;
k++)
            {
                //Высчитывается среднее
арифмитическое
                alfa_0[i][j] +=
TensorPiolaKirgofa[i][k][j]/load[k];
            }
            alfa_0[i][j] =
alfa_0[i][j]/Load_Step_Number;

```

```

//std::cout << "alfa_0[" << i << "]"["
<< j << "] = " << alfa_0[i][j] << std::endl;
    }
}

//std::cout << "alfa_0[0][0] = " << alfa_0[0][0]
<< std::endl;

for(int i = 0; i < 9; i++)
{
    C0[i].resize(9);

    // вычисление линейных коэффициентов

    //C0[i][0] = alfa_0[0][i];          //
растяжение по оси X
    /*C0[i][0] = alfa_0[0][i] +
alfa*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 + gamma) -
2*alfa*(alfa_0[0][i]*beta +
alfa_0[1][i] + (alpha*beta - 1)*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 +
gamma))/(1 - gamma - 2*alfa*beta);*/
    C0[i][0] = alfa_0[0][i] + a*alfa_0[1][i] +
(a*c + b)*(alfa_0[2][i] + d*alfa_0[1][i])/coff;

    //C0[i][4] = alfa_0[1][i];          //
растяжение по оси Y
    /*C0[i][4] = (alfa_0[1][i] -
alfa_0[2][i])/(1 + gamma) +
(alpha_0[0][i]*beta + alfa_0[1][i] +
(alpha*beta - 1)*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 + gamma))/(1 -
gamma - 2*alfa*beta);*/
    C0[i][4] = alfa_0[1][i] + c*(alfa_0[2][i] +
d*alfa_0[1][i])/coff;

    //C0[i][8] = alfa_0[2][i];          //
растяжение по оси Z
    /*C0[i][8] = (alfa_0[0][i]*beta +
alfa_0[1][i] + (alpha*beta - 1)*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 +
gamma))/(1 - gamma - 2*alfa*beta);*/
    C0[i][8] = (alfa_0[2][i] +
d*alfa_0[1][i])/coff;

    C0[i][1] = alfa_0[3][i]/2.0; // сдвиг в
плоскости XY
    C0[i][3] = alfa_0[3][i]/2.0;

    C0[i][2] = alfa_0[4][i]/2.0; // сдвиг в
плоскости XZ
    C0[i][6] = alfa_0[4][i]/2.0;

```

```

C0[i][5] = alfa_0[5][i]/2.0; // сдвиг в
плоскости YZ
C0[i][7] = alfa_0[5][i]/2.0;

}

//std::cout << "Coefficients C_ijkl are
calculated. \n\n";

// вывод лин. коэф-тов C_ijkl в командную строку
и в файл
for (int i = 0; i < 3; i++)
{
    for (int j = 0; j < 3; j++)
    {
        for (int k = 0; k < 3; k++)
        {
            for (int l = 0; l < 3; l++)
            {
                std::cout << "C_" << i+1 <<
j+1 << k+1 << l+1 << " = " << C0[i*3+j][k*3+l] << '\n';
                //file << "C_" << i+1 << j+1
<< k+1 << l+1 << " = " << C0[i*3+j][k*3+l] << '\n';
            }
        }
    }
}

break;

// нелинейный случай
case 21:
{
    std::cout << "\nCalculation of the effective
properties of a NONLINEAR form\n\n";

    //Load_Type_Number - типов нагрузок, 9 - размерность
тензоров (3 на 3), Load_Step_Number - величин нагрузок
    // LoadTypeBlank[i*9 + 3*j + k] - i-тый тип нагрузки,
j-тый столбец, k-тая строка

    // растяжения
    LoadTypeBlank[0*9 + 3*0 + 0] = 1;
    LoadTypeBlank[0*9 + 3*1 + 1] = -a;    LoadTypeBlank[0*9 + 3*2
+ 2] = -b; // по оси X (1)
    LoadTypeBlank[1*9 + 3*0 + 0] = 0.0;
    LoadTypeBlank[1*9 + 3*1 + 1] = 1;    LoadTypeBlank[1*9 + 3*2
+ 2] = -c; // по оси Y (2)

```

```

LoadTypeBlank[2*9 + 3*0 + 0] = 0.0;
LoadTypeBlank[2*9 + 3*1 + 1] = -d;      LoadTypeBlank[2*9 + 3*2
+ 2] = 1; // по оси Z (3)

// сдвиги
LoadTypeBlank[3*9 + 3*0 + 1] = 1;
LoadTypeBlank[3*9 + 3*1 + 0] = 1; // в плоскости XY (4)
LoadTypeBlank[4*9 + 3*0 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[4*9 + 3*2 + 0] = 1; // в плоскости XZ (5)
LoadTypeBlank[5*9 + 3*1 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[5*9 + 3*2 + 1] = 1; // в плоскости YZ (6)

// суммы растяжений
LoadTypeBlank[6*9 + 3*0 + 0] = 1;
LoadTypeBlank[6*9 + 3*1 + 1] = 1-a;      LoadTypeBlank[6*9 +
3*2 + 2] = -b-c; // сумма (1) и (2)
LoadTypeBlank[7*9 + 3*0 + 0] = 1;
LoadTypeBlank[7*9 + 3*1 + 1] = -a-d;    LoadTypeBlank[7*9 + 3*2
+ 2] = 1-b; // сумма (1) и (3)
LoadTypeBlank[8*9 + 3*0 + 0] = 1;
LoadTypeBlank[8*9 + 3*1 + 1] = 1-a-d;   LoadTypeBlank[8*9 + 3*2
+ 2] = 1-b-c; // сумма (1), (2) и (3)

// суммы растяжений и сдвига (4)
LoadTypeBlank[9*9 + 3*0 + 0] = 1; LoadTypeBlank[9*9 +
3*1 + 1] = -a;      LoadTypeBlank[9*9 + 3*2 + 2] = -b;
LoadTypeBlank[9*9 + 3*0 + 1] = 1;      LoadTypeBlank[9*9 + 3*1 + 0] =
1;
LoadTypeBlank[10*9 + 3*0 + 0] = 0; LoadTypeBlank[10*9
+ 3*1 + 1] = 1;      LoadTypeBlank[10*9 + 3*2 + 2] = -c;
LoadTypeBlank[10*9 + 3*0 + 1] = 1;      LoadTypeBlank[10*9 + 3*1 + 0] =
1;
LoadTypeBlank[11*9 + 3*0 + 0] = 0; LoadTypeBlank[11*9
+ 3*1 + 1] = -d;      LoadTypeBlank[11*9 + 3*2 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[11*9 + 3*0 + 1] = 1;      LoadTypeBlank[11*9 + 3*1 + 0] =
1;

// суммы растяжений и сдвига (5)
LoadTypeBlank[12*9 + 3*0 + 0] = 1; LoadTypeBlank[12*9
+ 3*1 + 1] = -a;      LoadTypeBlank[12*9 + 3*2 + 2] = -b;
LoadTypeBlank[12*9 + 3*0 + 2] = 1;      LoadTypeBlank[12*9 + 3*2 + 0] =
1;
LoadTypeBlank[13*9 + 3*0 + 0] = 0; LoadTypeBlank[13*9
+ 3*1 + 1] = 1;      LoadTypeBlank[13*9 + 3*2 + 2] = -c;
LoadTypeBlank[13*9 + 3*0 + 2] = 1;      LoadTypeBlank[13*9 + 3*2 + 0] =
1;
LoadTypeBlank[14*9 + 3*0 + 0] = 0; LoadTypeBlank[14*9
+ 3*1 + 1] = -d;      LoadTypeBlank[14*9 + 3*2 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[14*9 + 3*0 + 2] = 1;      LoadTypeBlank[14*9 + 3*2 + 0] =
1;

```

```

// суммы растяжений и сдвига (6)
LoadTypeBlank[15*9 + 3*0 + 0] = 1; LoadTypeBlank[15*9
+ 3*1 + 1] = -a;      LoadTypeBlank[15*9 + 3*2 + 2] = -b;
LoadTypeBlank[15*9 + 3*1 + 2] = 1; LoadTypeBlank[15*9 + 3*2 + 1] =
1;

LoadTypeBlank[16*9 + 3*0 + 0] = 0; LoadTypeBlank[16*9
+ 3*1 + 1] = 1;      LoadTypeBlank[16*9 + 3*2 + 2] = -c;
LoadTypeBlank[16*9 + 3*1 + 2] = 1; LoadTypeBlank[16*9 + 3*2 + 1] =
1;

LoadTypeBlank[17*9 + 3*0 + 0] = 0; LoadTypeBlank[17*9
+ 3*1 + 1] = -d;      LoadTypeBlank[17*9 + 3*2 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[17*9 + 3*1 + 2] = 1; LoadTypeBlank[17*9 + 3*2 + 1] =
1;

// суммы сдвигов
LoadTypeBlank[18*9 + 3*0 + 1] = 1; LoadTypeBlank[18*9
+ 3*1 + 0] = 1;      LoadTypeBlank[18*9 + 3*0 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[18*9 + 3*2 + 0] = 1; // (4) и (5)
LoadTypeBlank[19*9 + 3*0 + 1] = 1; LoadTypeBlank[19*9
+ 3*1 + 0] = 1;      LoadTypeBlank[19*9 + 3*1 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[19*9 + 3*2 + 1] = 1; // (4) и (6)
LoadTypeBlank[20*9 + 3*0 + 2] = 1; LoadTypeBlank[20*9
+ 3*2 + 0] = 1;      LoadTypeBlank[20*9 + 3*1 + 2] = 1;
LoadTypeBlank[20*9 + 3*2 + 1] = 1; // (5) и (6)

//цикл по типу нагрузки (lt - load type)
#pragma omp parallel for

int rank;
int size;

MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &size);
MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &rank);

/*if(rank == 0){
    std::cout << "Press Enter " << std::endl;
    getchar();
}*/

MPI_Barrier (MPI_COMM_WORLD);

double *TPK = new
double[9*Load_Step_Number*Load_Type_Number/size]; // ЭТОТ МАССИВ -
для расчётов на MPI
double *TPK_root = new double
[9*Load_Step_Number*Load_Type_Number]; // В ЭТОТ МАССИВ БУДУТ
собираться данные со всех процессов

if (Load_Type_Number%size != 0)
{

```

```

        std::cout << "MPI error!\n";
        return;
    }

    //цикл по типу нагрузки (lt - load type)
    for(int lt = rank*Load_Type_Number/size; lt <
(rank+1)*Load_Type_Number/size; lt++) //
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    {
        for (int i = 0; i < 9; i++)
        {
            // цикл по номеру компоненты тензора
            LoadType[i] = LoadTypeBlank[i + lt*9];
        }

        //цикл по величине нагрузки (lv - load value)
        for(int lv = 0; lv < Load_Step_Number; lv++)
        {
            //функция вычисляет тензор Пиола-Киргофа
            //в качестве аргументов принимает сетку,
ядро, величину нагрузки, тип нагрузки (тензор Грина), площадь сетки
(это все хранится в ядре).
            GetPiolKirchHoff3D(load[lv], LoadType,
TensorPiolaKirgofa[lt][lv], lt);

            for (int j = 0; j < 9; j++)
            {
                TPK[Load_Step_Number*9*lt + 9*lv + j] =
TensorPiolaKirgofa[lt][lv][j];
            }
            // for (int j = 0; j < 9; j++)
            // {
            //     std::cout <<
"TensorPiolyKirchHoffa_" << j << lt << lv << " = " <<
TensorPiolaKirgofa[lt][lv][j] << "\n";
            // }
        }
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    MPI_Gather(TPK,
9*Load_Step_Number*Load_Type_Number/size, MPI_DOUBLE, TPK_root,
9*Load_Step_Number*Load_Type_Number/size, MPI_DOUBLE, 0,
MPI_COMM_WORLD);

    //delete TPK;

    MPI_Barrier (MPI_COMM_WORLD);

```

```

if (rank == 0)
{
    for (int lt = 0; lt < Load_Type_Number; lt ++)
    {
        for (int lv = 0; lv < Load_Step_Number;
lv++)
        {
            for (int j = 0; j < 9; j++)
            {
                TensorPiolaKirgofa[lt][lv][j] =
TPK_root[Load_Step_Number*9*lt + 9*lv + j];
            }
        }
        for (int i = 0; i < Load_Type_Number; i++)
        {
            //метод наименьших квадратов (если нагрузок
больше 2)
            LeastSquaresSystem3D(Load_Step_Number,
TensorPiolaKirgofa[i], alfa_0[i], alfa_1[i], load);
        }

        std::cout << "alfa_1[0][0] = " << alfa_1[0][0] <<
std::endl;

        for(int i = 0; i < 9; i++)
        {
            C0[i].resize(9);

            //C0[i][0] = alfa_0[0][i];           //
растяжение по оси X
            /*C0[i][0] = alfa_0[0][i] +
alpha*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 + gamma) -
2*alpha*(alfa_0[0][i]*beta +
alfa_0[1][i] + (alpha*beta - 1)*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 +
gamma))/(1 - gamma - 2*alpha*beta);*/
            C0[i][0] = alfa_0[0][i] + a*alfa_0[1][i] +
(a*c + b)*(alfa_0[2][i] + d*alfa_0[1][i])/coff;

            //C0[i][4] = alfa_0[1][i];           //
растяжение по оси Y
            /*C0[i][4] = (alfa_0[1][i] -
alfa_0[2][i])/(1 + gamma) +
(alfa_0[0][i]*beta + alfa_0[1][i] +
(alpha*beta - 1)*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i])/(1 + gamma))/(1 -
gamma - 2*alpha*beta);*/
            C0[i][4] = alfa_0[1][i] + c*(alfa_0[2][i] +
d*alfa_0[1][i])/coff;

            //C0[i][8] = alfa_0[2][i];           //
растяжение по оси Z

```

```

/*C0[i][8] = (alfa_0[0][i]*beta +
alfa_0[1][i] + (alpha*beta - 1)*(alfa_0[1][i] - alfa_0[2][i]))/(1 +
gamma))/(1 - gamma - 2*alpha*beta);*/
C0[i][8] = (alfa_0[2][i] +
d*alfa_0[1][i])/coff;

C0[i][1] = alfa_0[3][i]/2.0; // СДВИГ В
ПЛОСКОСТИ XY
C0[i][3] = alfa_0[3][i]/2.0;

C0[i][2] = alfa_0[4][i]/2.0; // СДВИГ В
ПЛОСКОСТИ XZ
C0[i][6] = alfa_0[4][i]/2.0;

C0[i][5] = alfa_0[5][i]/2.0; // СДВИГ В
ПЛОСКОСТИ YZ
C0[i][7] = alfa_0[5][i]/2.0;

C1[i].resize(21);

// ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

// C_ij1212
C1[i][6] = 0.25*alfa_1[3][i];

// C_ij1313
C1[i][11] = 0.25*alfa_1[4][i];

// C_ij2323
C1[i][18] = 0.25*alfa_1[5][i];

// C_ij1213
C1[i][7] = 0.125*alfa_1[18][i] -
0.5*C1[i][6] - 0.5*C1[i][11];

// C_ij1223
C1[i][9] = 0.125*alfa_1[19][i] -
0.5*C1[i][6] - 0.5*C1[i][18];

// C_ij1323
C1[i][13] = 0.125*alfa_1[20][i] -
0.5*C1[i][11] - 0.5*C1[i][18];

// C_ij2222
C1[i][15] = ( alfa_1[2][i]*c*c +
(alfa_1[0][i] - alfa_1[6][i] - alfa_1[7][i] + alfa_1[8][i])*c +
alfa_1[1][i] ) / (coff*coff);

// C_ij2233

```

```

C1[i][17] = 0.5 * ( (c*d+1)*(alfa_1[0][i] -
alfa_1[6][i] - alfa_1[7][i] + alfa_1[8][i]) + 2*c*alfa_1[2][i] +
2*d*alfa_1[1][i] ) / (coff*coff);

// C_ij3333
C1[i][20] = ( alfa_1[1][i]*d*d +
(alfa_1[0][i] - alfa_1[6][i] - alfa_1[7][i] + alfa_1[8][i])*d +
alfa_1[2][i] ) / (coff*coff);

// C_ij1122
C1[i][3] = ( (2*a*c*d + c*d*d - 2*a +
1)*C1[i][15] + (2*b*c*d - 2*c*d - 2*b - 2*c)*C1[i][17] +
(1+c)*(c*C1[i][20] + alfa_1[0][i]) - c*alfa_1[7][i] - alfa_1[6][i] )
/ (-2.0*coff);

// C_ij1133
C1[i][5] = ( (2*b*c*d + c*c*d - 2*b +
1)*C1[i][20] + (2*a*c*d - 2*c*d - 2*a - 2*d)*C1[i][17] +
(1+d)*(d*C1[i][15] + alfa_1[0][i]) - d*alfa_1[6][i] - alfa_1[7][i] )
/ (-2.0*coff);

// C_ij1111
C1[i][0] = alfa_1[0][i] + 2*a*C1[i][3] +
2*b*C1[i][5] - a*a*C1[i][15] - 2*a*b*C1[i][17] - b*b*C1[i][20];

// C_ij1222
C1[i][8] = ( (4*c + 4)*C1[i][6] + (c*d*d +
1)*C1[i][15] - 2*(c*d + c)*C1[i][17] + c*(1+c)*C1[i][20] -
c*alfa_1[11][i] - alfa_1[10][i] ) / (-4.0*coff);

// C_ij1233
C1[i][10] = ( (4*d + 4)*C1[i][6] + (c*c*d +
1)*C1[i][20] - 2*(c*d + d)*C1[i][17] + d*(1+d)*C1[i][15] -
d*alfa_1[10][i] - alfa_1[11][i] ) / (-4.0*coff);

// C_ij1112
C1[i][1] = 0.25*(alfa_1[9][i] - C1[i][0] -
a*a*C1[i][15] - b*b*C1[i][20]) + 0.5*(a*C1[i][3] + b*C1[i][5] -
a*b*C1[i][17]) + (-C1[i][6] + a*C1[i][8] + b*C1[i][10]);

// C_ij1322
C1[i][12] = ( (4*c + 4)*C1[i][11] + (c*d*d +
1)*C1[i][15] - 2*(c*d + c)*C1[i][17] + c*(1+c)*C1[i][20] -
c*alfa_1[14][i] - alfa_1[13][i] ) / (-4.0*coff);

// C_ij1333
C1[i][14] = ( (4*d + 4)*C1[i][11] + (c*c*d +
1)*C1[i][20] - 2*(c*d + d)*C1[i][17] + d*(1+d)*C1[i][15] -
d*alfa_1[13][i] - alfa_1[14][i] ) / (-4.0*coff);

// C_ij1113

```

```

        C1[i][2] = 0.25*(alfa_1[12][i] - C1[i][0] -
a*a*C1[i][15] - b*b*C1[i][20]) + 0.5*(a*C1[i][3] + b*C1[i][5] -
a*b*C1[i][17]) + (-C1[i][11] + a*C1[i][12] + b*C1[i][14]);

        // C_ij2223
        C1[i][16] = ( (4*c + 4)*C1[i][18] + (c*d*d +
1)*C1[i][15] - 2*(c*d + c)*C1[i][17] + c*(1+c)*C1[i][20] -
c*alfa_1[17][i] - alfa_1[16][i] ) / (-4.0*coff);

        // C_ij2333
        C1[i][19] = ( (4*d + 4)*C1[i][18] + (c*c*d +
1)*C1[i][20] - 2*(c*d + d)*C1[i][17] + d*(1+d)*C1[i][15] -
d*alfa_1[16][i] - alfa_1[17][i] ) / (-4.0*coff);

        // C_ij1123
        C1[i][4] = 0.25*(alfa_1[15][i] - C1[i][0] -
a*a*C1[i][15] - b*b*C1[i][20]) + 0.5*(a*C1[i][3] + b*C1[i][5] -
a*b*C1[i][17]) + (-C1[i][18] + a*C1[i][16] + b*C1[i][19]);
    }

    std::vector<std::string> C_names(21); // массив с
номераи коэффициентов

        C_names[0] = "1111";    C_names[6] = "1212";
    C_names[11] = "1313";    C_names[15] = "2222";    C_names[18] =
"2323";    C_names[20] = "3333";
        C_names[1] = "1112";    C_names[7] = "1213";
    C_names[12] = "1322";    C_names[16] = "2223";    C_names[19] =
"2333";
        C_names[2] = "1113";    C_names[8] = "1222";
    C_names[13] = "1323";    C_names[17] = "2233";
        C_names[3] = "1122";    C_names[9] = "1223";
    C_names[14] = "1333";
        C_names[4] = "1123";    C_names[10] = "1233";
    C_names[5] = "1133";

    std::vector<std::string> C_names_(21); // массив
с номераи коэффициентов

        C_names_[0] = "1,1,1,1"; C_names_[6] =
"1,2,1,2";
    C_names_[11] = "1,3,1,3";    C_names_[15] =
"2,2,2,2";
    C_names_[18] = "2,3,2,3";    C_names_[20] =
"3,3,3,3";
        C_names_[1] = "1,1,1,2"; C_names_[7] =
"1,2,1,3";
    C_names_[12] = "1,3,2,2";    C_names_[16] =
"2,2,2,3";
    C_names_[19] = "2,3,3,3";
        C_names_[2] = "1,1,1,3"; C_names_[8] =
"1,2,2,2";
    C_names_[13] = "1,3,2,3";    C_names_[17] =
"2,2,3,3";

```

```

C_names_[3] = "1,1,2,2"; C_names_[9] =
"1,2,2,3"; C_names_[14] = "1,3,3,3";
C_names_[4] = "1,1,2,3"; C_names_[10] =
"1,2,3,3";
C_names_[5] = "1,1,3,3";

//std::cout << "Coefficients C_ijkl are
calculated. \n\n";

// имя файла с линейными коэф-тами C_ijkl
string filename = "C_ijkl.txt";
std::ofstream file(filename.c_str(),
std::ofstream::out | std::ofstream::binary);

// вывод лин. коэф-тов C_ijkl в командную строку
и в файл
for (int i = 0; i < 3; i++)
{
    for (int j = 0; j < 3; j++)
    {
        for (int k = 0; k < 3; k++)
        {
            for (int l = 0; l < 3; l++)
            {
                std::cout << "C_" << i+1 <<
j+1 << k+1 << l+1 << " = " << C0[i*3+j][k*3+l] << '\n';
                file << "C0[" << i+1 << "," <<
j+1 << "," << k+1 << "," << l+1 << "]:= " << C0[i*3+j][k*3+l] <<
";\n";
            }
        }
    }
}

std::cout << std::endl;

// вывод квадратичных коэф-тов C_ijklmn в
командную строку и в файл
for (int i = 0; i < 3; i++)
{
    for (int j = 0; j < 3; j++)
    {
        for (int k = 0; k < 21; k++)
        {
            std::cout << "C_" << i+1 << j+1 <<
C_names[k] << " = " << C1[i*3 + j][k] << std::endl;
            file << "C1[" << i+1 << "," << j+1
<< "," << C_names_[k] << "]:= " << C1[i*3 + j][k] << "; \n";
        }
    }
}

```

```
        }
        //delete TPK_root;
    }
    break;
    default: std::cout << "Wrong number of load types!\nNumber of
load types is "<< Load_Type_Number << "\nMust be 6 for linear case
or 21 for nonlinear\n";
    }
}
}
```