

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша Российской академии наук

На правах рукописи

Зенюк Дмитрий Алексеевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В
ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н.
Ю. Н. Орлов

Москва — 2016

Оглавление

Введение	3
1 Дробное исчисление и дифференциальные уравнения с дробными производными	7
1.1 Интегральные и дифференциальные операторы дробного порядка	7
1.2 Дифференциальные уравнения с дробными производными	20
1.3 Представление функций распределения дробными интегралами Римана — Лиувилля	24
1.4 Основные результаты главы 1	32
2 Некоторые модели случайных блужданий	33
2.1 Случайные блуждания на фрактальных множествах	33
2.2 Случайные блуждания, ассоциированные с уравнением дробной диффузии . .	42
2.3 Основные результаты главы 2	54
3 Задача оценки параметров по наблюдаемой траектории временного ряда	55
3.1 Метод оценки параметров	55
3.2 Результаты вычислений	61
3.3 Основные результаты главы 3	66
Заключение	67
Приложение. Некоторые специальные функции	68
Литература	70

Введение

Анализ сложных динамических процессов, представленных временными рядами, является важнейшей частью многих прикладных исследований (см., например, [1–4]). Для многих сложных систем (как, например, для финансовых рынков) анализ порождаемых ими временных рядов является, по сути, единственным подходом, позволяющим провести адекватное исследование. В настоящее время одной из наиболее актуальных задач в этой области является развитие адекватных методов статистического анализа нестационарных временных рядов. Эти методы должны существенно отличаться от приемов работы со стационарными случайными процессами, нашедших широкое применение в инженерно-технических приложениях [1].

На сегодняшний день существует несколько подходов к проблеме анализа нестационарных рядов: интегрированные модели авторегрессии и скользящего среднего [1], авторегрессионные модели с условной гетероскедастичностью [3]; методы сингулярного спектрального анализа [5]; самообучающиеся нейронные сети [6]. Также используются методы имитации повторных выборочных совокупностей (техника *bootstrap* и подобные ей), которые позволяют построить некоторый набор траекторий временного ряда и исследовать их стандартными статистическими методами.

В некоторых случаях нестационарный временной ряд может быть приведен к стационарному с помощью определенного преобразования. Так, по крайней мере два класса нестационарных процессов гарантированно могут быть приведены к стационарному виду с помощью взятия конечных разностей: это процессы с детерминированным полиномиальным трендом и интегрированные процессы с нестационарной дисперсией. Если в первом случае источником нестационарности является изменяющийся со временем тренд, то для второго типа процессов нестационарность обусловлена непостоянством дисперсии. Хорошо известны методы оценки параметров таких моделей (см., например, [1]). При этом, вообще говоря, методы анализа этих процессов отличаются друг от друга (статистическое различение этих рядов возможно с помощью тестов единичного корня Дики — Фуллера, Филлипса — Перрона и некоторых других методов); известно, что применение методов выделения тренда к процессам с нестационарной дисперсией приводит к неоправданному появлению мнимых трендов. Можно построить и другие искусственные примеры временных рядов, которые могут быть приведены к стационарному виду с помощью некоторого, возможно нелинейного, преобразования. В ряде случаев применение такой техники — приведения к стационарному временному ряду — оправдано, однако если именно нестационарные эффекты представляют основной интерес с точки зрения интерпретации полученных результатов, такое преобразование временного ряда может оказаться некорректным.

Другой подход к проблеме — использование техники *bootstrap*. Преимущества таких методов вполне понятны: возможность получить некоторую совокупность выборочных траекторий временного ряда позволяет строить состоятельные оценки распределений каждого сечения и с их помощью выполнять дальнейший анализ временного ряда. На сегодняшний день известно несколько различных методов *bootstrap* [7], как параметрических (т.е. предполагающих известную функциональную форму распределение сечений временного ряда), так и непараметрических. Следует подчеркнуть, что применение этих процедур строго обоснова-

но только для стационарных временных рядов, и асимптотические критерии, гарантирующие увеличение точности статистических выводов с увеличением объема выборочной совокупности, в общем случае не справедливы. Отметим также, что некоторые популярные методы bootstrap вообще не могут быть применены к нестационарным временным рядам, поскольку существенно искажают зависимость характеристик подлежащего стохастического процесса от времени.

Еще один возможный подход к проблеме анализа нестационарных временных рядов опирается на использование нейронных сетей (подробный обзор и библиографию можно найти в [6, 8]). Основным достоинством этих методов считается их гибкость и применимость к весьма широкому классу задач. Такие модели конструируются адаптивно, подстраиваясь под конкретные особенности наблюдаемого временного ряда, что особенно важно в случаях, когда нет надежного теоретического обоснования для выбора модели временного ряда. При этом нет необходимости использовать какие-либо априорные предположения о форме функций распределения или механизмах, порождающих временной ряд. Основной трудностью при применении моделей такого рода является подбор оптимальных параметров и стратегии обучения нейронной сети. Кроме того, в основе таких моделей зачастую лежит та же схема авторегрессии, а значит, они наследуют те же недостатки.

В работе [9] был предложен оригинальный подход к проблеме анализа нестационарных временных рядов, опирающийся на формализм кинетических уравнений, описывающих эволюцию конечномерных эмпирических функций распределения, соответствующих наблюдаемому временному ряду. Подробно были исследованы ограничения применения этого метода, оптимальный выбор классовых интервалов для построения рассматриваемых эмпирических функций распределения, оптимальный выбор объема данных, подвергаемого анализу (с помощью т.н. горизонтных статистик), описана иерархия прогностических моделей для временных рядов и общие методы оценки параметров этих моделей. В частности, метод прогнозирования значений временного ряда, основанный на использовании уравнения адвекции — диффузии (Фоккера — Планка) был применен для анализа динамики различных финансовых и сырьевых рынков [10].

В последние десятилетия неослабевающий интерес привлекают разнообразные приложения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка (см., например, [11]). В 40-е гг. А. Н. Герасимовым [12], Г. Скотт-Блэрмом [13] и Ю. Н. Работновым [14] были проведены обширные исследования свойств вязкоупругих материалов, в ходе которых было продемонстрировано, что в волокнистых полимерах механическое напряжение может быть представлено в виде дробной производной Римана — Лиувилля от деформации, причем дробный показатель определяется реальными физическими свойствами этих материалов. В середине 20 в. Ф. Маинарди и М. Капуто (см. [15] и цитированную там литературу) показали, что использование дифференциальных уравнений с дробными производными для построения моделей термовязкоупругости более адекватно из физических соображений и позволяет более точно воспроизводить экспериментально наблюдаемые данные. Аппарат уравнений с дробными производными активно применяется для исследования аномальных диффузионных процессов, характеризующихся сильной пространственной нелокальностью и наличием эффекта памяти. Это направление исследований получило развитие в работах Р. Метцлера [16–18], Р. Хильфера [19, 20], И. Подлюбногo [21], Р. Горенфло [22, 23], А. А. Килбаса [24] и др.

В рамках изучения аномальной диффузии, в частности, было показано, что фундаментальные решения задачи Коши для определенного уравнения с производными дробного порядка по временному и пространственному переменным представляют собой плотности распределения случайных величин. В связи с этим представляется вполне естественной попытка соединить упомянутый выше кинетический подход с идеями дробного анализа. Актуальность такого исследования объясняется тем, что использование богатого арсенала методов дроб-

ного исчисления позволит существенно обобщить кинетический метод и предложить новые методы статистического анализа нестационарных временных рядов и оценки параметров стохастических моделей, порождающих их.

Основными целями и задачами работы являются:

- 1° исследование вопроса о представлении функций распределения случайных величин интегралами дробного порядка;
- 2° построение и обоснование эволюционной модели нестационарного временного ряда, а также метода оценки параметров этой модели по наблюдаемым выборочным траекториям;
- 3° программная реализация разработанных методов численного анализа временных рядов и применение этих методов к реальным временным рядам;
- 4° построение алгоритма случайного блуждания на детерминированных фрактальных множествах.

К основным методам исследования, в первую очередь, относятся общие методы статистического анализа временных рядов, методы классического и дробного анализа, аналитические и численные методы анализа уравнений с дробными производными, а также аппарат теории случайных процессов. Помимо этого, в рамках задачи построения случайного блуждания на фрактальных множествах использовался метод итерированных сжимающих отображений.

В настоящей работе впервые исследован вопрос о представлении функций распределения случайных величин односторонними дробными интегралами Римана — Лиувилля. С помощью аппарата классического и дробного анализа получены простые достаточные условия, накладываемые на дробные аналоги функций плотности, и новые свойства последних, которые существенно отличаются от привычных свойств обычных функций плотности.

Разработаны новый подход к определению случайного блуждания на детерминированных фрактальных множествах в терминах случайных последовательностей и численная схема, позволяющая получать выборочные траектории этого случайного блуждания. Опираясь на результаты Дж. Хатчинсона и М. Барнсли [25, 26] о системах итерированных сжимающих отображений, было показано, что развитый метод может быть применен к весьма широкому классу регулярных фрактальных множеств.

Предложена модель эволюции эмпирических квантилей функции распределения временного ряда, использующая производные дробного порядка, накладывающая минимальные ограничения на характеристики (в частности, на асимптотическое поведение распределения и существование моментов) этого временного ряда. Описана общая схема оценки параметров этой модели. На основе программной реализации разработанных вычислительных методов проведено исследование нескольких нестационарных временных рядов.

Развитые в работе методы, примыкая к классическим техникам статистического анализа, предоставляют новый инструмент для изучения различных систем, эволюция которых описывается временными рядами, и позволяют исследовать широкий класс практически важных задач. Численные схемы, предложенные в работе и реализованные в виде исполняемого кода, могут лечь в основу программных комплексов, предназначенных для автоматического анализа временных рядов.

Результаты, изложенные в работе, докладывались и обсуждались на семинаре по математической физике Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН под руководством Ю. Н. Орлова, а также на следующих конференциях: «Математическое моделирование и вычислительная физика», Дубна, 2013; «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Долгопрудный, 2013; «Синергетика в общественных и естественных науках», Тверь, 2015. Результаты исследования

представлены в четырех печатных работах, из которых две опубликованы в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук. Все основные результаты диссертационного исследования, выносимые на защиту, получены лично автором. Постановка задачи и результаты расчетов обсуждались с научным руководителем работы Ю. Н. Орловым. Достоверность изложенных в работе результатов подтверждается использованием строгих математических доказательств и рассуждений и апробированных в научной практике методов численного анализа.

На защиту выносятся:

- 1° модель нестационарного временного ряда, основанная на уравнении эволюции квантилей его выборочной функции распределения, удовлетворяющей уравнению типа адвекции — диффузии с дробными производными;
- 2° алгоритм построения случайного блуждания на детерминированных фрактальных множествах и его численная реализация;
- 3° программная реализация процедуры оценки параметров эволюционной модели по наблюдаемому временному ряду.

Глава 1

Дробное исчисление и дифференциальные уравнения с дробными производными

1.1 Интегральные и дифференциальные операторы дробного порядка

Изучение интегралов и производных нецелого порядка имеет богатую и продолжительную историю: первое упоминание о возможности рассматривать дифференциалы и производные порядка $1/2$ встречается в письмах Лейбница к Лопиталю (1695 г.) и Уоллису (1697 г.). Фрагментарные упоминания об этом вопросе содержатся также в работах Эйлера (1738 г.), Лапласа (1812 г.), Лакруа (1820 г.) и Фурье (1822 г.). Полноценная теория дробного исчисления и некоторые ее приложения были последовательно описаны в серии работ Лиувилля (1832–1837 гг.), хотя некоторые полученные там результаты были не совсем строгими с современной точки зрения. К концу 19 в. на основе конструкции, предложенной Лиувиллем, и более поздней работы Римана (1874 г.) были получены результаты, считающиеся сегодня в теории дробного исчисления классическими. Более подробные ретроспективные обзоры исследований в этой области можно найти, например, в [27–30]. Вопросам дробного исчисления и его приложениям к различным инженерным и естественнонаучным задачам посвящена обширная библиография: не претендуя на полноту, отметим здесь работы [22, 27–29, 31].

Для описания основных свойств дробных операторов наряду с пространствами суммируемых с p -ой степенью функций $L_p(\Omega)$ необходимо ввести несколько дополнительных функциональных классов. Так, через $H^\beta[a, b]$ будем обозначать класс всех (в общем случае комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на $[a, b]$ условию Гельдера фиксированного порядка β :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\beta, \quad x_1, x_2 \in [a, b].$$

Нетрудно видеть, что этот класс представляет интерес лишь в случае $0 < \beta \leq 1$, поскольку при $\beta > 1$ он содержит только постоянные. Если Ω является неограниченным множеством, то под $H^\beta(\Omega)$ понимается класс функций, удовлетворяющих «глобальному» условию Гельдера

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K \frac{|x_1 - x_2|^\beta}{(1 + |x_1|)^\beta (1 + |x_2|)^\beta}.$$

В ряде случаев необходимо рассматривать несколько более широкий класс функций $H^{\beta,k}(\Omega)$, непрерывно дифференцируемых вплоть до m -го порядка и удовлетворяющих на Ω условию

Гельдера с логарифмическим множителем

$$|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| \leq A|h|^\sigma \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)^k,$$

$$|h| < \frac{1}{2}, \quad 0 < \sigma \leq 1, \quad \beta = m + \sigma, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{R}_+.$$

Класс абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций обозначим $AC[a, b]$. Известно (см. например, [32]), что $AC[a, b]$ совпадает с классом первообразных суммируемых функций, и всякая абсолютно непрерывная функция имеет почти всюду суммируемую производную. В дополнение к нему будем также рассматривать класс $AC^n[a, b]$, состоящий из функций, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ до порядка $n - 1$, так что $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$. Классу $AC^n[a, b]$ принадлежат те и только те функции, которые представимы в виде n -кратного интеграла Лебега с переменным верхним пределом [27]:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} \phi(\xi) d\xi + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

где $\phi \in L_1[a, b]$, а c_k — произвольные постоянные.

Дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ на конечном сегменте $[a, b]$ определяются выражениями

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\xi) (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi, \quad x > a, \quad (1.1)$$

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(\xi) (\xi-x)^{\alpha-1} d\xi, \quad x < b. \quad (1.2)$$

Первый из них называется левосторонним, второй — соответственно, правосторонним. Эти конструкции, очевидно, определены для функций $f \in L_1[a, b]$, существуя почти всюду на $[a, b]$. В подавляющем большинстве случаев результаты, полученные для левосторонних интегралов (и производных, которые будут определены ниже), остаются справедливыми и для правосторонних, поэтому далее в тексте будут в основном использоваться первые. В общем случае, свойства правосторонних операторов могут быть непосредственно получены из свойств левосторонних с помощью соотношений

$$R I_{a+}^\alpha = I_{b-}^\alpha R, \quad R I_{b-}^\alpha = I_{a+}^\alpha R, \quad (Rf)(x) = f(a+b-x).$$

Приведенные определения корректны также для комплексных α при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, в этом случае выражения в правых частях (1.1) и (1.2) являются голоморфными функциями переменного α в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Непосредственная подстановка $\alpha = i\theta$ при $\theta \neq 0$ в (1.1)–(1.2) приводит к расходящимся интегралам, поэтому дробные интегралы чисто мнимого порядка принято определять [27, 31] как

$$(I_{a+}^{i\theta} f)(x) = \frac{d}{dx} (I_{a+}^{1+i\theta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-\xi)^{i\theta} f(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

$$(I_{b-}^{i\theta} f)(x) = -\frac{d}{dx} (I_{b-}^{1+i\theta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b (\xi-x)^{i\theta} f(\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

Производные Римана — Лиувилля дробного порядка α определяются соотношениями

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(\xi) (x-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi, \quad (1.5)$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b f(\xi) (\xi-x)^{n-\alpha-1} d\xi, \quad (1.6)$$

где $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$. Можно показать, что конструкции (1.5)–(1.6) являются аналитическими продолжениями дробных интегралов в область $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ [31]. Из (1.5) следует, в частности

$$(D_{a+}^0 f)(x) = f(x), \quad (D_{a+}^n f)(x) = f^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дробные производные чисто мнимого порядка определяются выражениями, по форме совпадающими с (1.3)–(1.4):

$$(D_{a+}^{i\theta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-\xi)^{-i\theta} f(\xi) d\xi,$$

$$(D_{b-}^{i\theta} f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b (x-\xi)^{-i\theta} f(\xi) d\xi.$$

Дальнейшее обобщение введенных понятий на случай функций комплексного переменного производится с помощью перехода к контурным интегралам и использования интегральной формулы Коши (см., например, [27, 31])

Достаточное условие существования дробных производных произвольного комплексного порядка α , $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ может быть сформулировано в терминах класса $AC^n[a, b]$ [27].

Теорема 1. Пусть $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ и $f \in AC^n[a, b]$, где $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$. Тогда $(D_{a+}^\alpha f)(x)$ существует почти всюду на $[a, b]$ и может быть представлена в виде

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi. \quad (1.7)$$

Левосторонние и правосторонние операторы Римана — Лиувилля связаны соотношением, напоминающим основное свойство сопряженных операторов [27, 31].

Теорема 2. Если $\phi \in L_p[a, b]$ и $\psi \in L_q[a, b]$, где $1/p + 1/q \leq 1 + \alpha$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, причем $p \neq 1$, $q \neq 1$ в случае $1/p + 1/q = 1 + \alpha$, то справедливо тождество

$$\int_a^b \phi(x) (I_{a+}^\alpha \psi)(x) dx = \int_a^b \psi(x) (I_{b-}^\alpha \phi)(x) dx.$$

Аналогичное по форме равенство выполняется при $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ для дробных производных, если $\phi \in I_{b-}^\alpha(L_p)$, $\psi \in I_{a+}^\alpha(L_q)$ (см. пояснения к теореме 3) и $1/p + 1/q \leq 1 + \alpha$:

$$\int_a^b \phi(x) (D_{a+}^\alpha \psi)(x) dx = \int_a^b \psi(x) (D_{b-}^\alpha \phi)(x) dx.$$

Для некоторых элементарных функций дробные интегралы и производные могут быть вычислены непосредственно. Так, например, для функций $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ с $\beta > 0$:

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\xi-a)^{\beta-1} (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi = \left[\eta = \frac{\xi-a}{x-a} \right] =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \eta^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}. \quad (1.8)$$

С помощью (1.8) теперь легко получить выражение для дробной производной:

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{B(n-\alpha, \beta)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n+\beta-\alpha-1}. \quad (1.9)$$

Таким образом, дробная производная $(x - a)^{\beta-1}$ будет равна нулю, если

$$\beta - 1 = \alpha - k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

во всех же остальных случаях она равна

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1}.$$

Дробная производная постоянной (при $\beta = 1$), напротив, равна нулю лишь при $\alpha \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ равенство $(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k (x - a)^{\alpha - k},$$

где c_k — некоторые постоянные. Явные выражения для дробных интегралов и производных в терминах элементарных функций можно получить лишь в ограниченном числе случаев: так, для e^x дробный интеграл выражается уже в терминах функции Миттаг-Леффлера (см. приложение А):

$$(I_{a+}^{\alpha} e^{x-a})(x) = (x - a)^{\alpha} E_{1, \alpha+1}(x - a).$$

Подробные таблицы дробных интегралов Римана — Лиувилля приведены в [33].

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести класс $I_{a+}^{\alpha}(L_p)$ функций, представимых на отрезке $[a, b]$ левосторонними дробными интегралами порядка α , $\operatorname{Re} \alpha > 0$ от суммируемых функций [27], т.е.

$$I_{a+}^{\alpha}(L_p) = \{f: f(x) = (I_{a+}^{\alpha} \phi)(x), \phi \in L_p[a, b]\}.$$

Теорема 3. Для того чтобы $f \in I_{a+}^{\alpha}(L_1)$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \in AC^n[a, b], \quad n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1,$$

и чтобы $f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Подчеркнем, что возможность представления функции дробным интегралом порядка α и существование дробной производной от этой же функции того же порядка не эквивалентны: например, $(x - a)^{\alpha-1}$ имеет дробную производную, тождественно равную нулю на $[a, b]$, но не принадлежит $I_{a+}^{\alpha}(L_1)$, поскольку $f_{n-\alpha}(a) \neq 0$.

Теорема 4. Для того чтобы $f \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$, где $0 < \alpha < 1$, $p > 1$ необходимо, а при $p \geq 1$ и достаточно, чтобы $f \in L_p[a, b]$ и существовал (в метрике пространства L_p) предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{x-\epsilon} \frac{f(x) - f(\xi)}{(x - \xi)^{1+\alpha}} d\xi, \quad \epsilon > 0.$$

Простейшим достаточным условием для представления функции дробным интегралом является принадлежность f пространству $H^{\beta}[a, b]$ при $\beta > \alpha$. Это условие избыточно, поскольку гарантирует, что дробный интеграл не только принадлежит пространству $L_p[a, b]$, но и удовлетворяет условию Гельдера.

Как известно, обычный оператор дифференцирования является левым обратным для оператора интегрирования (в смысле Римана), но не является в общем случае правым обратным. Подобное утверждение справедливо и для дробных операторов Римана — Лиувилля. Простейшим примером того, что эти операторы не являются взаимно обратными, является уже рассматривавшаяся выше функция $f(x) = (x - a)^{\alpha-1}$, для которой

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha} 0)(x) = 0 \neq f(x).$$

Теорема 5. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Тогда равенство

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad (1.10)$$

выполняется для любой суммируемой функции f , а равенство

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f) = f(x) \quad (1.11)$$

для функций из $I_{a+}^{\alpha}(L_1)$. В общем случае, для $f \in L_1[a, b]$

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a). \quad (1.12)$$

В частности, при $\alpha \in \mathbb{N}$ из (1.12) следует хорошо известное в классическом анализе соотношение

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (1.13)$$

Теорема 6. Равенство

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (1.14)$$

выполняется в следующих трех случаях:

$$\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0, f \in L_1[a, b]; \quad (1.15)$$

$$\operatorname{Re} \beta < 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, f \in I_{a+}^{-\beta}(L_1); \quad (1.16)$$

$$\operatorname{Re} \alpha < 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 0, f \in I_{a+}^{-\alpha-\beta}(L_1); \quad (1.17)$$

при вещественных α и β допустимы также случаи $\alpha = 0, \beta = 0$ и $\alpha + \beta = 0$. Здесь при $\operatorname{Re} \alpha < 0$ оператор I_{a+}^{α} следует считать равным $D_{a+}^{-\alpha}$.

Для $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$ проверить выполнение (1.14) можно простым вычислением:

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{d\eta}{(x-\eta)^{1-\alpha}} \int_a^{\eta} \frac{f(\xi)d\xi}{(\eta-\xi)^{1-\beta}}, \quad (1.18)$$

меняя порядок интегрирования в соответствии с теоремой Фубини и сделав во внутреннем интеграле замену $\eta = \xi + \zeta(x - \xi)$, получим

$$\frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(\eta)d\eta}{(x-\eta)^{1-\alpha-\beta}} = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x). \quad (1.19)$$

Доказательство для остальных случаев, технически более трудное, можно найти в [27].

Теорема 7. Если $f(x) = x^{\gamma-1}\phi(x)$ или $f(x) = x^{\gamma-1}\phi(x) \ln x$, $\gamma > 0$ и $\phi(x) = \sum c_k(x-a)^k$ имеет положительный радиус сходимости ρ , то при $0 \leq x < \rho$ справедливо [28]

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x), \quad \alpha \geq 0, 0 \leq \beta \leq \alpha; \quad (1.20)$$

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (D_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x), \quad \alpha \geq 0, \alpha < \beta; \quad (1.21)$$

$$(D_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad \beta \geq 0, 0 \leq \alpha \leq \gamma. \quad (1.22)$$

Теорема 8. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $m = [\beta] + 1$, причем $\alpha + \beta < n$, $f \in L_1[a, b]$ и $f_{m-\alpha} \in AC^m[a, b]$. Тогда [24]

$$\left(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) - \sum_{k=1}^m \left(D_{a+}^{\beta-k} f\right)(a+0) \frac{(x-a)^{-k-\alpha}}{\Gamma(1-k-\alpha)}. \quad (1.23)$$

Из теоремы 6 следует, что при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$ интегральные операторы коммутативны. Операторы дробного дифференцирования в общем случае, напротив, не коммутативны. Например, для $f(x) = (x-a)^{1/2}$ при $\alpha = 1/2$ и $\beta = 3/2$:

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left(D_{a+}^{\beta} f\right)(x) = 0, \\ \left(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f\right)(x) &= 0, \quad \left(D_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{(x-a)^{-3/2}}{4}. \end{aligned}$$

Теорема 9. Пусть $f \in H^{\beta}[a, b]$, $\beta \geq 0$. Тогда дробный интеграл $(I_{a+}^{\alpha} f)(x)$ с $\alpha > 0$ имеет вид [27]

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+\alpha+k)} (x-a)^{\alpha} + \phi(x),$$

где m — наибольшее целое число, такое что $m < \beta$, $\phi \in H^{\beta+\alpha}[a, b]$ если $\beta + \alpha$ нецелое или β и α целые, и $\phi \in H^{\beta+\alpha,1}[a, b]$ в противном случае.

Рассмотрение действия операторов дробного интегрирования в пространствах $L_p[a, b]$ и $H^{\beta}[a, b]$ позволяет утверждать, что они не только сохраняют, но и существенно улучшают свойства функций [27].

Теорема 10. Оператор I_{a+}^{α} ограничен в $L_p[a, b]$, где $p \geq 1$, причем [24]

$$\|I_{a+}^{\alpha} f\| \leq \frac{(b-a)^{\operatorname{Re} \alpha}}{|\Gamma(\alpha)| \operatorname{Re} \alpha} \|f\|.$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < 1/\alpha$, то I_{a+}^{α} ограниченно отображает $L_p[a, b]$ в $L_q[a, b]$, $q = p/(1-\alpha p)$.

Теорема 11. Если $\alpha > 0$ и $p > 1/\alpha$, то оператор дробного интегрирования ограниченно отображает $L_p[a, b]$ в $H^{\alpha-1/p}[a, b]$ если $\alpha - 1/p$ нецелое, и в $H^{\alpha-1/p,1/p}[a, b]$ в противном случае [27]; кроме того

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = o\left((x-a)^{\alpha-1/p}\right), \quad x \rightarrow a.$$

Как и в классическом анализе, при выполнении некоторых дополнительных условий возможно почленное дробное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов (см., например, [27–29]). Эти результаты, в частности, позволяют обобщить, причем в нескольких различных формах, правило Лейбница для вычисления дробных производных от произведения функций.

Лемма 1. Если $f_n \in C[a, b]$ и ряд $f(x) = \sum f_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то допустимо его почленное дробное интегрирование в форме

$$\left(I_{a+}^{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(I_{a+}^{\alpha} f_n\right)(x), \quad \alpha > 0, \quad (1.24)$$

причем ряд справа сходится также равномерно на $[a, b]$.

Если f представима в виде степенного ряда

$$f(x) = (x-a)^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x-a)^k, \quad \beta > 0, \quad c_0 \neq 0,$$

то в силу леммы 1 [21, 27, 29]

$$\lim_{x \rightarrow a+0} (I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{c_0 (x-a)^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \begin{cases} 0 & \beta + \alpha > 1, \\ \frac{c_0 \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & \beta + \alpha = 1, \\ \infty & \beta + \alpha < 1. \end{cases} \quad (1.25)$$

Лемма 2. Если для любого n существуют дробные производные $(D_{a+}^{\alpha} f_n)(x)$, ряды $\sum f_n(x)$ и $\sum (D_{a+}^{\alpha} f_n)(x)$ сходятся равномерно на любом отрезке $[a+\epsilon, b]$, $\epsilon > 0$, то первый из них допускает почленное дробное дифференцирование:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (D_{a+}^{\alpha} f_n)(x), \quad \alpha > 0. \quad (1.26)$$

Лемма 3. Если функция f аналитична на интервале (a, b) , то ее дробная производная представима в виде

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(x).$$

Теорема 12. Если f и g аналитичны на $[a, b]$, то [27, 31]

$$(D_{a+}^{\alpha} fg)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (D_{a+}^{\alpha-k} f)(x) g^{(k)}(x), \quad (1.27)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} fg)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k+\beta} (D_{a+}^{\alpha-\beta-k} f)(x) (D_{a+}^{\beta+k} g)(x); \quad (1.28)$$

причем $\alpha \neq -1, -2, \dots$ при нецелом β .

В [31] указана еще более общая форма правила Лейбница:

$$(D_{a+}^{\alpha} fg)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c \binom{\alpha}{ck+\mu} (D_{a+}^{\alpha-ck-\mu} f)(x) (D_{a+}^{ck+\mu} g)(x), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad 0 < c \leq 1. \quad (1.29)$$

Соотношения (1.27)–(1.29) выполняются для $\alpha \in \mathbb{R}$, если считать $D_{a+}^{-\alpha} = I_{a+}^{\alpha}$ при $\alpha > 0$.

Определения дробного интегрирования и дифференцирования легко распространяются со случая конечного отрезка на случай бесконечного промежутка; при этом рассматриваемые функции должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, связанным с поведением на бесконечности, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. Так, дробные интегралы Римана — Лиувилля на \mathbb{R} вводятся соотношениями

$$(I_{+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi, \quad (1.30)$$

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} f(\xi) (\xi-x)^{\alpha-1} d\xi, \quad (1.31)$$

или в виде свертки

$$(I_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} f(x \mp \xi) \xi^{\alpha-1} d\xi.$$

Как и в случае конечного отрезка, односторонние интегралы I_{+}^{α} и I_{-}^{α} связаны преобразованием отражения:

$$R I_{\pm}^{\alpha} = I_{\mp}^{\alpha} R, \quad (R f)(x) = f(-x).$$

Теорема 13. Если $p \geq 1$ и $q \geq 1$, то операторы I_{\pm}^{α} отображают $L_p(\mathbb{R})$ в $L_q(\mathbb{R}^+)$ и ограничены тогда и только тогда, когда

$$0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < 1/\alpha, \quad q = p/(1 - \alpha p).$$

Достаточным условием существования интегралов типа (1.30) и (1.31) в силу теоремы 13 при $0 < \alpha < 1$ является, например, принадлежность f пространству $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < 1/\alpha$. Дробные интегралы такого типа также обладают полугрупповым свойством (см. теорему 6).

Лемма 4. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$ и $\alpha + \beta < 1/p$. Если $f \in L_p(\mathbb{R})$, то

$$I_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\beta} = I_{\pm}^{\beta} I_{\pm}^{\alpha} = I_{\pm}^{\alpha+\beta}.$$

Производные дробного порядка вводятся аналогично (1.5) и (1.6):

$$(D_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^{+\infty} f(x \mp \xi) \xi^{n-\alpha-1} d\xi, \quad n = [\alpha] + 1. \quad (1.32)$$

Если $f \in L_p(\mathbb{R})$, то операторы дробного дифференцирования (1.32) будут являться левыми обратными для I_{\pm}^{α} только при $p = 1$. Обойти это ограничение можно, используя вместо производных Римана — Лиувилля дробные производные Маршо [27]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\sigma_1(m, \alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{(\Delta_{\pm \xi}^m f)(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi, \quad m > \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ \sigma_1(m, \alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\xi})^m}{\xi^{1+\alpha}} d\xi, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где Δ_h^m — оператор левых конечных нецентральных разностей порядка m

$$(\Delta_h^m f)(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - kh).$$

Отметим, что правая часть (1.33) не зависит от выбора m .

Равенство $(\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\alpha} f)(x) = f(x)$ выполняется для $f \in L_p(\mathbb{R})$ при всех допустимых p , $1 \leq p < 1/\alpha$. Различия между производными Маршо и производными Римана — Лиувилля связаны с поведением функции на бесконечности: простым примером здесь является постоянная, для которой производная Маршо равна нулю, а производная Римана — Лиувилля не существует. Для достаточно «хороших» функций производные Маршо и Римана — Лиувилля совпадают при всех $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, \dots$ [27].

Теорема 14. Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ и $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\mathbf{F} [(I_{\pm}^{\alpha} f)(x), x] = \frac{1}{(\mp i\omega)^{\alpha}} \mathbf{F} [f(x), x], \quad (\mp i\omega)^{\alpha} = e^{\alpha \ln |\omega| \mp \alpha \pi i \operatorname{sgn}(\omega)/2}. \quad (1.34)$$

где \mathbf{F} — оператор преобразования Фурье. Для достаточно гладких и достаточно быстро убывающих на бесконечности функций сходные по форме выражения справедливы и для операторов дифференцирования при $\operatorname{Re} \alpha > 0$:

$$\mathbf{F} [(D_{\pm}^{\alpha} f)(x), x] = (\mp i\omega)^{\alpha} \mathbf{F} [f(x), x].$$

Соотношение (1.34) не может быть распространено на значения $\operatorname{Re} \alpha > 1$ в непосредственном виде для произвольных функций, даже если они являются бесконечно дифференцируемыми [27].

Существуют также другие подходы к определению интегралов и производных дробного порядка. Например, в контексте исследования краевых задач, возникающих в различных приложениях, часто используются производные Герасимова — Капуто*:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) &= (I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)})(x), & (\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x) &= (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f^{(n)})(x), & \alpha &\notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) &= (\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x) = f^{(n)}(x), & & & \alpha &\in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$. Такая конструкция удобна тем, что позволяет задавать граничные и начальные условия в терминах производных целого порядка; решение самой краевой задачи в этом случае может быть получено с помощью интегральных преобразований Лапласа или Меллина. Кроме того, производная Герасимова — Капуто от постоянной, очевидно, равна нулю, что позволяет придать ей более прозрачный физический смысл. Для функций из $AC^{n-1}[a, b]$ производные Герасимова — Капуто при $\alpha \notin \mathbb{N}$ могут быть выражены через производные Римана — Лиувилля:

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)}. \quad (1.35)$$

Можно показать, что производные Герасимова — Капуто также являются левыми обратными для дробных интегралов Римана — Лиувилля при некоторых дополнительных предположениях.

Лемма 5. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $f \in C[a, b]$. Если $\operatorname{Re} \alpha \notin \mathbb{N}$ или $\alpha \in \mathbb{N}$, то [24]

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

Если $\operatorname{Re} \alpha \in \mathbb{N}$ и $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$, то

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} (I_{a+}^{\alpha+1-n} f)(x) \Big|_{x=a+0}.$$

Лемма 6. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $f \in AC^n[a, b]$. Тогда [24]

$$(I_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Дробные производные Грюнвальда — Летникова являются непосредственным обобщением определения производных целого порядка в терминах конечных разностей. Так, для функций, заданных на отрезке $[a, b]$, они определяются как [27, 29]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^{\alpha} f}{h^{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), \quad m = \left[\frac{x-a}{h} \right], \quad \alpha > 0. \quad (1.36)$$

Значения $h > 0$ соответствуют левосторонним производным, $h < 0$ — правосторонним. Аналогичная конструкция вводится для функций, заданных на \mathbb{R} :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), \quad \alpha > 0, \quad (1.37)$$

*Во многих публикациях они называются производными Капуто, поскольку стали известны после выхода его работ в конце 60-х гг. Однако еще раньше конструкции подобного типа были рассмотрены в работе А. Н. Герасимова [12], которая долгое время оставалась почти неизвестной зарубежным исследователям.

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно при любом α для любой ограниченной функции f . Для функций из $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 1/\alpha$, производная Грюнвальда — Летникова совпадает с производной Маршо; в случае конечного отрезка производная Грюнвальда — Летникова совпадает и с производной Римана — Лиувилля [27]. В общем случае, для $\alpha < 0$ предел в (1.36) может и не существовать, тем не менее для функций из пространства $L_1[a, b]$ при $\alpha > 0$ конструкция

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k! \Gamma(\alpha)} f(x - kh).$$

существует почти для всех x и совпадает с $(I_{a+}^\alpha f)(x)$, аналогичное утверждение справедливо также для интегралов на \mathbb{R} [21, 27, 29].

Рассмотренные выше интегро-дифференциальные операторы различной формы естественным образом распространяются на случай многих переменных. Для удобства обозначений мы ограничимся здесь лишь случаем двух переменных; выражения для функций n переменных выглядят аналогично. Смешанный левосторонний интеграл Римана — Лиувилля порядка $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет вид

$$(I_{\mathbf{a}+}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} (x_1 - \xi_1)^{\alpha_1-1} (x_2 - \xi_2)^{\alpha_2-1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — точки в \mathbb{R}^2 , причем $x_k > a_k$. Смешанный интеграл может применяться только по одному переменному — в этом случае следует положить $\alpha_k = 0$ для всех остальных переменных. Для такого частного интеграла дробного порядка будем использовать также обозначение ${}_k I_{a_k+}^{\alpha_k}$. Аналогично определяется правосторонний смешанный дробный интеграл; могут быть рассмотрены также конструкции, в которых по одним переменным используется левостороннее интегрирование, а по другим — правостороннее. Смешанная левосторонняя дробная производная Римана — Лиувилля вводится соотношением

$$(D_{\mathbf{a}+}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} (I_{\mathbf{a}+}^{\mathbf{n}-\alpha} f)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad n_k = [\alpha_k] + 1. \quad (1.38)$$

Если $\alpha_k = 0$, то (1.38) следует интерпретировать как частную дробную производную по k -му переменному; например, частная дробная производная по первому переменному будет иметь вид:

$$({}_{x_1} D_{a_1+}^{\alpha_1} f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(n_1 - \alpha_1)} \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \int_{a_1}^{x_1} (x_1 - \xi)^{n_1 - \alpha_1 - 1} f(\xi, x_2) d\xi.$$

Следует отметить, что порядок дифференцирования в (1.38) существенен [27].

Дробные интегралы и производные Римана — Лиувилля на всем пространстве \mathbb{R}^n , а также производные Маршо и производные Грюнвальда — Летникова вводятся с помощью прямых аналогий с соответствующими выражениями для случая одного переменного; подробное изложение можно найти в [27].

Наряду с односторонними интегралами и производными, рассмотренными выше, для которых один из пределов интегрирования является переменным, возможно также рассмотрение операторов дробного порядка с постоянными пределами интегрирования — характерным примером здесь являются т.н. операторы Рисса. В общем случае, для функций на \mathbb{R}^n инте-

гральный оператор Рисса I^α при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ определяется как свертка

$$(I^\alpha f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dy_1 \dots dy_n, \quad (1.39)$$

$$K_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |\mathbf{x}|^{\alpha-n} & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \\ |\mathbf{x}|^{\alpha-n} \ln \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) & \alpha - n = 0, 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((n-\alpha)/2) & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \\ (-1)^{(n-\alpha)/2} 2^{\alpha-1} \pi^{n/2} \Gamma(1 + (\alpha-n)/2) \Gamma(\alpha/2) & \alpha - n = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Оператор (1.39) определен на $L_p(\mathbb{R}^n)$, если $0 < \alpha < n$ и $1 < p < n/\alpha$. Можно показать, что, например, при $n = 1$ и $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$ интеграл Рисса представляет собой симметризованную линейную комбинацию односторонних интегралов Римана — Лиувилля:

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{(I_+^\alpha f)(x) + (I_-^\alpha f)(x)}{2 \cos(\alpha\pi/2)} = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi|^{\alpha-1} f(\xi) d\xi.$$

Производная Рисса определяется с помощью т.н. гиперсингулярного интеграла [27]:

$$(D^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_n(m, \alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta_{\mathbf{y}}^m f(\mathbf{x})}{|\mathbf{y}|^{n+\alpha}} dy_1 \dots dy_n, \quad m > \alpha. \quad (1.41)$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{y}}^m$ — оператор левых нецентральных конечных разностей порядка m

$$\Delta_{\mathbf{y}}^m f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(\mathbf{x} - k\mathbf{y}),$$

а постоянная $\sigma_n(m, \alpha)$ имеет вид

$$\sigma_n(m, \alpha) = \frac{2^{-\alpha} \pi^{1+n/2} A_m(\alpha)}{\Gamma(1 + \alpha/2) \Gamma((n + \alpha)/2) \sin(\alpha\pi/2)}, \quad A_m(\alpha) = \sum_{k=0}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} k^\alpha.$$

Значение (1.41) не зависит от выбора m . Достаточные условия сходимости такого интеграла можно найти в [27].

Естественным обобщением конструкции (1.39) является оператор Рисса — Феллера (см., например, [27]). Мы ограничимся здесь его описанием для случая $n = 1$ и $0 < \alpha < 2$. Интегральный оператор Рисса — Феллера представляет собой линейную комбинацию вида*

$$(I_\theta^\alpha f)(x) = \frac{\sin((\alpha - \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} (I_+^\alpha f)(x) + \frac{\sin((\alpha + \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} (I_-^\alpha f)(x)$$

где $\alpha \neq 1$ (исключенный случай может быть рассмотрен так же, как и в (1.40), т.е. с помощью введения дополнительного логарифмического множителя). Обратный к I_θ^α оператор (т.е. дифференциальный оператор Рисса — Феллера) при $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ имеет вид

$$(D_\theta^\alpha f)(x) = - \left[\frac{\sin((\alpha - \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} (D_+^\alpha f)(x) + \frac{\sin((\alpha + \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} (D_-^\alpha f)(x) \right], \quad (1.42)$$

а в случае $\alpha = 1$

$$(D_\theta^1 f)(x) = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \frac{\theta\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi + \sin \frac{\theta\pi}{2} \frac{df}{dx} \right], \quad (1.43)$$

*Определения оператора Рисса — Феллера, приводимые разными авторами, различаются. Используемое здесь соответствует [34].

причем интеграл в (1.43) понимается в смысле главного значения. Для достаточно «хороших» функций выполняется

$$F[(D_\theta^\alpha f)(x), x] = -|\omega|^\alpha e^{i\theta\pi \operatorname{sgn}(\omega)/2} F[f(x), x]. \quad (1.44)$$

Отсутствие простых и однозначных геометрических и физических аналогий в дробном исчислении долгое время осложняло широкое использование этого аппарата в прикладных задачах [11]. В работе [35] предлагается один из наиболее простых подходов к проблеме геометрической интерпретации дробных интегралов Римана — Лиувилля, основанный на сведении последних к интегралам Стильтьеса. Например, для левостороннего интеграла:

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \int_a^x f(\xi) dg_x(\xi), \quad g_x(\xi) = \frac{x^\alpha - (x - \xi)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (1.45)$$

В трехмерном пространстве (ξ, η, ψ) система параметрических уравнений

$$\xi = \xi, \quad \eta = g_x(\xi), \quad \psi = f(\xi), \quad \xi \in [a, x]$$

задает некоторую кривую \mathcal{C} ; тогда при фиксированном x площадь проекции цилиндрической поверхности, ограниченной кривой \mathcal{C} и плоскостью (ξ, η) , на плоскость (ξ, ψ) будет равна обычному интегралу Римана $\int_a^x f(\xi) d\xi$, а площадь проекции на плоскость (η, ψ) , в соответствии с известной геометрической интерпретацией интегралов Стильтьеса (см., например, [36]), равна значению дробного интеграла (1.45). Аналогичная трактовка возможна и в случае правостороннего интеграла. Альтернативный подход к геометрической интерпретации дробного интеграла в терминах касания α -го порядка был развит в работе [37]. Некоторые геометрические иллюстрации к понятию дробного интеграла были предложены в работе [38], однако приведенные там примеры относятся лишь к специальным областям.

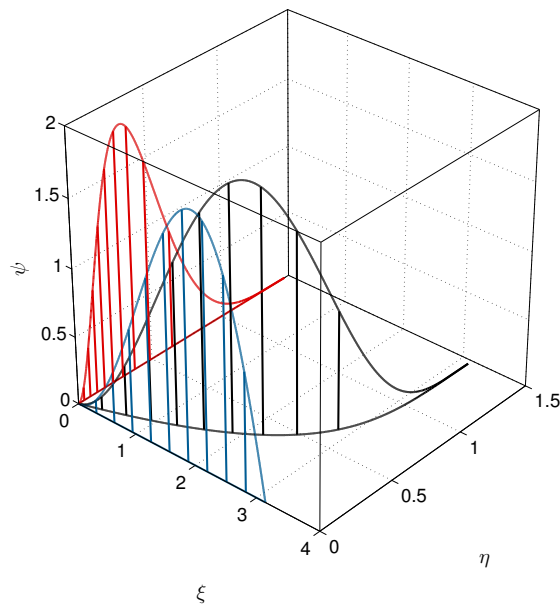


Рис. 1.1: Геометрическая интерпретация левостороннего дробного интеграла Римана — Лиувилля порядка $\alpha = 1/4$ от функции $f(x) = x \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$; проекция, соответствующая дробному интегралу, показана красным

Неоднократно предпринимались попытки доказательства наличия связи между дробными операторами и геометрией фрактальных множеств. Следует подчеркнуть, что эти попытки часто встречают серьезную критику и не всегда являются строго обоснованными.

Одной из первых работ в этой области являлась [39], где дробные интегралы Римана — Лиувилля рассматривались как интегралы от заданной функции на множестве Кантора; доказательство основывалось на использовании причинного интеграла типа свертки

$$f(x) = \int_0^x K(x - \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (1.46)$$

где $K(x)$ — функция импульсного отклика. Если выбрать в качестве $K(x)$ функцию Хевисайда, то (1.46) представляет собой обычный интеграл Римана, если же $K(x) = \delta(x)$, то $f(x) = \phi(x)$. Предполагалось, что дробный интеграл Римана — Лиувилля с $0 < \alpha < 1$ интерполирует функцию отклика между δ -функцией Дирака (случай отсутствия памяти) и функцией Хевисайда (случай полной памяти); интерполяцию предлагалось осуществить с помощью предельного перехода в итерационной процедуре построения т.н. полосок Кантора, при этом показатель дробного интеграла в точности совпадал с размерностью множества Кантора. Однако, как было показано в [40], такой подход несостоятелен и может рассматриваться лишь как некое приближение, возможно весьма грубое.

В работе [41] общая конструкция интеграла на фрактальном множестве Φ была предложена в следующем виде:

$$\int_{\Phi} f(x)\mu(dx) = c(\alpha) \lim_{\text{diam } E_k \rightarrow 0} \sum_k f(x_k) (\text{diam } E_k)^\alpha, \quad (1.47)$$

где множества E_k образуют покрытие Φ , $c(\alpha)$ — нормировочный коэффициент, а параметр α совпадает с размерностью Хаусдорфа множества Φ . В случае, когда E_k представляют собой кольцевые сегменты, а интегрируемая функция обладает центральной симметрией, интеграл в (1.47) может быть приведен к виду

$$\frac{2\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} f(x)x^{\alpha-1}dx = 2^\alpha \pi^{(\alpha-1)/2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) (I_-^\alpha f)(0).$$

В работе [42] была рассмотрена связь между метрическими размерностями графиков функций Вейерштрасса — Безиковича

$$B_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-\beta} \sin \lambda_k x, \quad 0 < \beta < 1, \quad (1.48)$$

где λ_k образуют монотонную неограниченную последовательность, и размерностями их образов под действием операторов Римана — Лиувилля. Было показано, что если $\alpha < 1$, $0 < \alpha + \beta < 1$, $\lambda_1 > 1$ и $\lambda_{k+1}\lambda_k^{-1}$ неограниченно возрастает, то

$$\dim_H (I_{0+}^\alpha B_\lambda)(x) = 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha - \beta) \ln \lambda_k}{(1 - \alpha - \beta) \ln \lambda_k + (\alpha + \beta) \ln \lambda_{k+1}}; \quad (1.49)$$

аналогичный результат справедлив и для дробных производных при $\alpha < \beta$:

$$\dim_H (D_{0+}^\alpha B_\lambda)(x) = 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 + \alpha - \beta) \ln \lambda_k}{(1 + \alpha - \beta) \ln \lambda_k + (\beta - \alpha) \ln \lambda_{k+1}}; \quad (1.50)$$

Полученные соотношения устанавливают линейную зависимость между размерностями графиков функций B_λ и их дробных интегралов и производных Римана — Лиувилля, при этом дробное дифференцирование порядка α увеличивает метрическую размерность на α , а интегрирование — соответственно уменьшает (см. также рис. 1.2). Схожие результаты были получены в работах [43, 44]; в [43] на основе указанного линейного соотношения также был

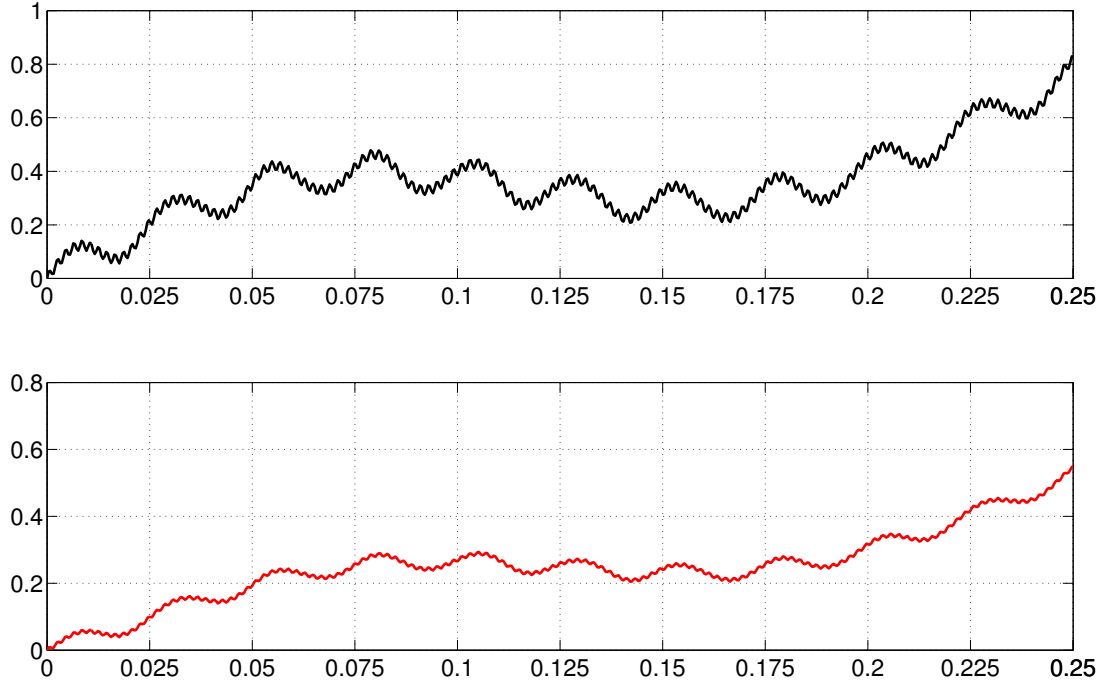


Рис. 1.2: Функция (1.48) с $\lambda_k = k^k$, $\beta = 1/2$ (вверху) и ее левосторонний дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha = 1/6$ (внизу)

предложен метод преобразования детерминированных фрактальных кривых, позволяющий получить кривую с требуемой фрактальной размерностью.

Таким образом, до настоящего времени не предложено строгого доказательства прямой связи между дробным исчислением и фрактальной геометрией в общем случае — этот вопрос остается открытым. Нельзя также утверждать, что эта связь должна быть однозначной: фрактальные множества вполне могут быть описаны без использования аппарата дробного анализа, а дробные операторы не обязательно порождают фрактальные множества.

1.2 Дифференциальные уравнения с дробными производными

Закономерным развитием дробного исчисления является теория дифференциальных уравнений с дробными производными (строго говоря, они представляют собой интегро-дифференциальные уравнения); подробное изложение основных результатов в этой области можно найти в [21, 24, 28, 45–47]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными справедлив аналог теоремы Пикара — Линделефа о существовании и единственности решения задачи Коши

$$(D_{a+}^{\alpha} u)(x) = f(x, u(x)), \quad (D_{a+}^{\alpha-k} u)(a+0) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.51)$$

где $n = [\alpha] + 1$ если $\alpha \notin \mathbb{N}$, и $n = \alpha$ в противном случае; обозначение $(D_{a+}^{\alpha-k} u)(a+0)$ следует понимать как односторонний предел

$$\begin{aligned} (D_{a+0}^{\alpha-k} u)(a+0) &= \lim_{x \rightarrow a+0} (D_{a+}^{\alpha-k} u)(x), \quad k \leq n-1, \\ (D_{a+0}^{\alpha-n} u)(a+0) &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a+0} (I_{a+}^{n-\alpha} u)(x) & \alpha \neq n, \\ u(a) & \alpha = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство существования и единственности в пространстве $L_1[a, b]$ при условии, что $f \in L_1[a, b]$ для любого y и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, основано на эквивалентности (1.51) и интегрального уравнения Вольтерра второго рода [24]

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k (x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad x > a.$$

В [24] аналогичные теоремы доказаны для задачи Коши (1.51) в пространстве непрерывных функций и для задачи Коши для уравнения с производными Герасимова — Капуто в пространстве непрерывно дифференцируемых функций.

Следует отметить, что дифференциальные уравнения с дробными производными различного типа требуют различных начальных условий. Так, начальные условия должны быть заданы в терминах производных целого порядка для уравнений с производными Герасимова — Капуто, и в терминах дробных производных для уравнений с производными Римана — Лиувилля. В последнем случае дополнительно возникает вопрос об адекватной физической интерпретации начальных и граничных условий, поскольку дробные производные являются нелокальными операторами, и в некотором смысле должны отражать историю эволюции системы. Известен пример, показывающий, что решение задачи Коши с начальными условиями, заданными производными дробного порядка, может не соответствовать реальному поведению системы, описываемой дифференциальным уравнением дробного порядка [48].

Общей теории уравнений с частными производными дробного порядка пока не предложено; тем не менее, опубликовано большое число работ, посвященных изучению различных классов уравнений специального вида и их приложениям к естественнонаучным и инженерным задачам.

Аппарат дробного исчисления успешно применяется для изучения вязкоупругих тел (см. обзор [49]), к которым относятся, например, полимеры и стекловидные эмали. По-видимому, именно в рамках этой области исследований впервые были рассмотрены дифференциальные уравнения с дробными частными производными — в работе А. Н. Герасимова [12] было введено обобщение известного соотношения между механической напряженностью и смещением $\sigma(t) = k (D_+^\alpha \epsilon)(t)$ и предложены уравнения

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= k \left({}_t D_-^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x, t), \\ \rho x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= k \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x} ({}_t D_-^\alpha u) (x, t) \right), \end{aligned}$$

где $0 < \alpha < 1$, описывающие течение вязкой жидкости между движущимися поверхностями. В работах Р. Бэгли и П. Торвика [50, 51] была подробно исследована общая линейная реологическая модель

$$\sum_{k=0}^n a_k (D_+^{\alpha_k} \sigma)(t) = \sum_{k=0}^m b_k (D_+^{\beta_k} \epsilon)(t). \quad (1.52)$$

Для большинства вязкоупругих материалов, как оказалось, в (1.52) достаточно ограничиться рассмотрением случая $n = m = 1$ и $\alpha = \beta$, $0 < \alpha < 1$. В [52] приведено большое количество точных решений уравнений типа (1.52); там же приведено сравнение экспериментальных данных для различных полимерных материалов с данными, полученными на основе численного анализа (1.52).

В [29] при исследовании диффузионных процессов в задачах аналитической химии впервые было получено уравнение диффузии с дробными производными; в последующие годы исследованиям в этой области посвящалось большое количество работ (см. [16, 18, 19, 24, 47, 53–62] и цитированную там литературу). Аппарат дробного исчисления оказался также весьма эффективен в рамках изучения процессов переноса в фрактальных структурах со сложными топологическими свойствами, объединенных под общим названием «странная кинетика» [63, 64].

Дифференциальные уравнения с дробными производными, ассоциированные с кинетическими процессами, весьма разнообразны по своей форме. Например, в работах [56, 65] были соответственно рассмотрены уравнения

$$\begin{aligned}({}_t D_{0+}^\alpha u)(x, t) &= -Ax^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A > 0, \beta \geq 0, 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \\({}_t D_{0+}^\alpha u)(x, t) &= -A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k}{x} u \right), \quad A > 0, k \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

описывающие диффузионные процессы в фрактальных структурах. Эти уравнения были получены как непосредственные обобщения уравнений с производными порядка $1/2$ по временному переменному, которые могут быть получены с помощью преобразования Лапласа из стандартного уравнения диффузии (такой же подход был использован в [29]).

Уравнение диффузии дробного порядка естественным образом возникает при рассмотрении схемы случайных блужданий с непрерывным временем (см., например, [54, 66, 67]). Случайное блуждание такого типа $\eta(t)$ определяется последовательностью неотрицательных независимых и одинаково распределенных случайных величин θ_k (времен ожидания) с плотностью распределения $\psi(t)$ и последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин ζ_k (величин смещения) с плотностью распределения $w(x)$:

$$\begin{aligned}t_n &= \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \eta(t) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_1, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n & t_n \leq t < t_{n+1}. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, процесс выходит из нуля (разумеется, можно построить такой же процесс, выходящий из любой другой заданной точки) и смещения из текущего положения происходят в моменты времени t_n . При весьма общих предположениях плотность $p(x, t)$ вероятности нахождения в точке x в момент времени t определяется соотношением

$$p(x, t) = \delta(x)\psi_0(t) + \int_0^t \psi(t - \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} w(x - \xi)p(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad \psi_0(t) = \int_t^{+\infty} \psi(\tau) d\tau,$$

где $\psi_0(t)$ — вероятность того, что до момента времени t не произойдет ни одного смещения. Если дополнительно предположить, что асимптотическое поведение плотностей $w(x)$ и $\psi(t)$ определяется соотношениями

$$\psi(t) \sim t^{-(1+\beta)}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad w(x) \sim |x|^{-(1+\alpha)}, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где $0 < \beta \leq 1$ и $0 < \alpha \leq 2$, то после применения преобразований Лапласа и Фурье по временному и пространственному переменным соответственно и некоторых преобразований

может быть получено уравнение относительно $p(x, t)$, определяющее эволюцию плотности:

$$\left({}_t D_{0+}^\beta p\right)(x, t) = K \left({}_x D^\alpha p\right)(x, t), \quad (1.53)$$

где K — некоторая постоянная. Подробное описание свойств решений этого уравнения и возможные подходы к их физической интерпретации, а также некоторых обобщения рассмотренной схемы можно найти в [54, 55]; простой подход к построению выборочных траекторий такого случайного блуждания приведен в [66].

В работе [68] с помощью аппарата производящих функций семиинвариантов (см., например, [69]) было показано, что эволюция условных плотностей распределения стохастического процесса, соответствующего нелинейному дифференциальному уравнению Ито

$$d\xi = a(\xi, t)dt + b(\xi, t)d\Lambda, \quad (1.54)$$

где Λ — устойчивый случайный процесс (т.е. процесс с независимыми устойчиво распределенными приращениями) также может быть описана уравнением типа адвекции — диффузии с дробными производными: условная плотность вероятности перехода

$$p(x, t | x_0, t_0) = \mathbb{P}(\xi(t) = x \mid \xi(t_0) = x_0)$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left((\mu b(x, t) + a(x, t))p \right) - \sigma \left[\left({}_x D^\alpha |b|^\alpha p\right)(x, t) + \right. \\ \left. + \beta \phi(\alpha) \frac{\partial}{\partial x} \left({}_x D^{\alpha-1} |b|^{\alpha-1} p\right)(x, t) \right] \end{aligned} \quad (1.55)$$

с начальным условием

$$p(x, t \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$$

где α, β, μ и σ соответствуют параметрам устойчивого распределения (см., например, [69, 70]), $\alpha \neq 1$ и $\phi(\alpha) = \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$. На коэффициенты уравнения (1.54), как и в случае обычных уравнений Ито [71], наложены дополнительные ограничения

$$\begin{aligned} |a(x_1, t) - a(x_2, t)| + |b(x_1, t) - b(x_2, t)| \leq K|x_1 - x_2|, \\ |a(x, t)| + |b(x, t)| \leq C|1 + x|, \end{aligned}$$

гарантирующие существование и единственность решения. Здесь K и C — некоторые положительные постоянные. В [72] для уравнения (1.55) с $a(x, t) = 0$ и $b(x, t) = 1$ указана альтернативная форма в терминах производных Римана — Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\sigma \left[{}_x D_+^{\alpha/2} {}_x D_-^{\alpha/2} p + \beta \omega(\alpha) \frac{\partial}{\partial x} {}_x D_+^{(\alpha-1)/2} {}_x D_-^{(\alpha-1)/2} p \right].$$

Отметим, что во многих работах, где дифференциальные уравнения с дробными производными вводятся в контексте исследования тех или иных физических процессов, эти уравнения получены с помощью замены *ad hoc* обычных интегральных и дифференциальных операторов в известных функциональных соотношениях их дробными аналогами. При этом, вообще говоря, может появиться несколько неэквивалентных уравнений, каждое из которых в равной мере может быть названо «дробным уравнением» соответствующего процесса. Так, например, работы [59, 61, 62] были посвящены уравнению типа

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(x) t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\Delta u(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.56)$$

а в [21, 24] было исследовано уравнение

$$({}_t D_{0+}^\alpha u)(x, t) = \lambda^2 \Delta u, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.57)$$

Оба этих уравнения были предложены в качестве дробных аналогов уравнения диффузии.

Основными методами решения задач для уравнений с дробными производными являются сведение к некоторому интегральному уравнению и применение техники интегральных преобразований. Аналитические решения обычно могут быть получены лишь в терминах достаточно сложных специальных функций, как, например, H -функций Фокса (см. приложение А). Для численного решения таких уравнений можно использовать разностные методы, опирающиеся на определение Грюнвальда — Летникова или основанные на непосредственной аппроксимации выражений, определяющих производные дробного порядка того или иного типа. Некоторые другие подходы к численному анализу таких уравнений отмечены в [11].

Существует также гипотеза, согласно которой аппарат дробного исчисления следует применять для описания любых эволюционных процессов, поскольку всем этим процессам, в той или иной мере, присуще свойство эридитарности [73]. В общем случае под эридитарной системой понимается такая, эволюция которой определяется не только ее текущим или ближайшим предыдущим состоянием, а всеми предшествующими состояниями; такая система сохраняет «память» об истории своего развития [74]. Хорошо известны [75] механические системы, демонстрирующие такое поведение — к ним, в частности, относятся упоминавшиеся выше вязкоупругие тела. Попытка строгого математического обоснования этой концепции предпринята в [76] и основывается на том, что дробная производная (в форме Маршо и форме Грюнвальда — Летникова, см. также [27, 77]) является при $0 < \alpha \leq 1$ порождающим оператором

$$\mathcal{A}_\alpha f = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T_\alpha^t f - f}{t}$$

однопараметрической полугруппы преобразований T_α^t , свойства которой сходны со свойствами полугруппы сдвигов по времени T^t , а для последней, как известно, порождающим оператором является обычная производная по временному переменному. Некоторые дополнительные сведения, связанные с применением дробного исчисления и уравнений с дробными производными, можно также найти в [21, 49, 73, 78–82].

1.3 Представление функций распределения дробными интегралами Римана — Лиувилля

В цикле работ [83–85] методы дробного исчисления были использованы для построения обобщения некоторых известных соотношений теории вероятностей. В частности, для случайной величины ξ , принимающей значения из отрезка $[a, b]$, была предложена обобщенная функция распределения

$$F(x) = (I_{a+}^\alpha p)(x), \quad \mathbb{P}(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad x_1, x_2 \in [a, b], \quad (1.58)$$

подчиняющаяся нормировочному условию $(I_{a+}^\alpha p)(b) = 1$. Как известно, в строгом смысле функция распределения случайной величины является ограниченной неубывающей непрерывной слева функцией, т.е.

$$F(x_1) \leq F(x_2), \quad x_1 < x_2, \quad (1.59)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad (1.60)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} F(x) = F(x_0). \quad (1.61)$$

Всякая функция, удовлетворяющая условиям (1.59)–(1.61), определяет над борелевской алгеброй в \mathbb{R} вероятностную меру $\mathbb{P}(\xi < x) = F(x)$. Для абсолютно непрерывных случайных величин функция распределения полностью определяется заданием неотрицательной функции плотности $p(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi = 1 - \int_x^{+\infty} p(\xi) d\xi. \quad (1.62)$$

Непосредственным вычислением легко установить, что для произвольных α и p (1.58) не является функцией распределения в строгом смысле: действительно, для функции плотности

$$p(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{2(2^\alpha - 1)} (1 - |x|) \mathbf{I}_{[-1,1]}(x),$$

задающей при $\alpha = 1$ распределение Симпсона, получим

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{2(2^\alpha - 1)} & x \in (-1, 0], \\ \frac{(x+1)^{\alpha+1} - 2x^{\alpha+1}}{2(2^\alpha - 1)} & x \in [0, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases} \quad (1.63)$$

Здесь \mathbf{I}_A — индикаторная функция множества A . Функция (1.63) достигает максимума в точке $x = 1/(2^{1/\alpha} - 1)$, которая при $0 < \alpha < 1$ находится внутри отрезка $[0, 1]$; таким образом, (1.63) не является неубывающей функцией при $0 < \alpha < 1$. В этом случае, вообще говоря, величина

$$F(x_2) - F(x_1) = \mathbb{P}(x_1 \leq \xi < x_2), \quad x_1, x_2 \in [-1, 1]$$

может быть отрицательной, что очевидным образом нарушает аксиоматическое определение вероятностной меры. Хотя попытки придать отрицательным вероятностям смысл предпринимались (краткий обзор можно найти в [86]), на сегодняшний день содержательной теории, допускающей отрицательные значения вероятностной меры, не построено. Тем не менее, несмотря на то, что конструкция (1.58) не является функцией распределения, в [87] на ее основе вводится понятие «дробного вероятностного пространства».

Представляется вполне естественным поставить вопрос о том, при каких условиях функции распределения абсолютно непрерывных случайных величин могут быть корректно представлены в терминах интегралов Римана — Лиувилля. Рассмотрим вначале функции плотности с ограниченным носителем $[a, b]$; функцию распределения будем определять как

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ (I_{a+}^\alpha p)(x) & x \in (a, b], \\ 1 & x > b. \end{cases} \quad (1.64)$$

Если функция распределения F известна и принадлежит классу $I_{a+}^\alpha(L_1)$ (см. раздел 1.1), то на $(a, b]$ соответствующая ей функция плотности является решением интегрального уравнения

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x p(\xi)(x - \xi)^{\alpha-1} d\xi,$$

т.е. производной порядка α от функции распределения. Таким образом, при заданном α класс допустимых функций плотности является образом множества неубывающих непрерывных

слева функций с соответствующим поведением на границах отрезка под действием оператора дробного дифференцирования D_{a+}^{α} . В качестве примера рассмотрим функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ -\frac{(x+1)^3}{4} + \frac{3(x+1)^2}{2} & x \in (-1, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases} \quad (1.65)$$

Легко убедиться, что при $\alpha = 1$ она соответствует плотности

$$p(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\mathbf{I}_{[-1,1]}(x). \quad (1.66)$$

Дробная производная может быть вычислена здесь непосредственно; с учетом (1.9) окончательное выражение для функции плотности, соответствующей при произвольном α (1.65), имеет вид

$$p(x) = \frac{3}{2} \left[\frac{(x+1)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{(x+1)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \mathbf{I}_{[-1,1]}(x). \quad (1.67)$$

Подстановка $\alpha = 1$ в (1.67), как и следовало ожидать, приводит к (1.66).

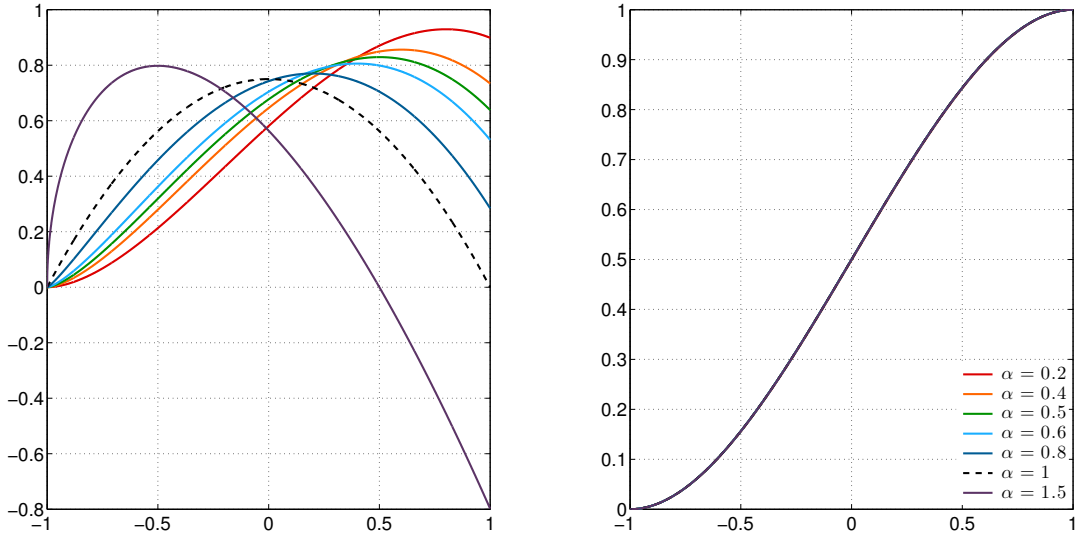


Рис. 1.3: Функции плотности (1.67) (слева) и соответствующие им функции распределения (1.65) (справа) при различных значениях α

Простой анализ (1.67) показывает, что при некоторых α эта функция плотности может принимать в том числе и отрицательные значения. Действительно,

$$p(1) = 2^{1-\alpha} \frac{3(1-\alpha)}{\Gamma(4-\alpha)}$$

меньше нуля при $\alpha > 1$, а поскольку функция (1.67) непрерывна на $(-1, 1]$, то существует некоторая левая окрестность точки $x = 1$, где она также меньше нуля. Таким образом, неотрицательность функции плотности не является ни необходимым, ни достаточным условием для корректности определения (1.64).

Поведение плотностей, соответствующих (1.64), в окрестности точки b существенно зависит от значения α . Так, при $\alpha < 1$ из теоремы 1 следует, что на $(a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{F(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{F'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\alpha} \right].$$

Поскольку F неубывает, найдется по крайней мере один отрезок внутри $[a, b]$, на котором $F' > 0$ (поскольку теорема справедлива лишь для функций из $AC[a, b]$, функции распределения типа функции Кантора, производная которой почти всюду равна нулю, исключены). Тогда сумма в правой части

$$p(b) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{F(a)}{(b-a)^\alpha} + \int_a^b \frac{F'(\xi)d\xi}{(b-\xi)^\alpha} \right].$$

является строго положительной; таким образом, при $0 < \alpha < 1$ не существует функций плотности, принимающих на обоих концах отрезка нулевые значения. При $1 \leq \alpha < 2$ аналогичное выражение для плотности принимает вид

$$p(x) = \frac{F(a)}{(x-a)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \frac{F'(a)}{(x-a)^{1-\alpha} \Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x \frac{F''(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}. \quad (1.68)$$

Значение плотности в точке b здесь зависит от направления выпуклости функции F и, вообще говоря, может быть любым, в том числе и равным нулю. Действительно, пусть функция F такова, что $F(a) = F'(a) = 0$ и

$$F''(x) = \mathbf{I}_{(a,c)}(x) - (\gamma - 1)\mathbf{I}_{[c,b]}(x), \quad a < c < b, \quad \gamma = \left(\frac{b-a}{b-c} \right)^{2-\alpha} > 1.$$

Вычисляя интеграл в (1.68), получим

$$\Gamma(3-\alpha)p(b) = (b-a)^{2-\alpha} - \gamma(b-c)^{2-\alpha} = 0.$$

Функция распределения F с указанными выше свойствами существует:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ K(x-a)^2 & x \in (a, c), \\ K[(c-a)(2x-a-c) - (\gamma-1)(x-c)^2] & x \in [c, b], \\ 1 & x > b. \end{cases} \quad (1.69)$$

Множитель K выбирается так, чтобы выполнялось $F(b) = 1$:

$$K = \frac{1}{(c-a)(2b-a-c) - (\gamma-1)(b-c)^2}.$$

Легко показать, что функция (1.69) будет непрерывной и неубывающей при любом выборе c . На рис. 1.4 показаны функции плотности, соответствующие (1.69) при некоторых $1 \leq \alpha < 2$. При $\alpha \geq 2$ анализ может быть проведен аналогичным образом.

Исчерпывающее описание класса функций плотности в контексте определения (1.64) весьма затруднительно, однако можно указать несколько простых достаточных условий. При $\alpha \geq 1$ приращение ΔF в области $x \in (a, b]$ будет определяться выражением

$$\Gamma(\alpha)\Delta F = \int_a^x p(\xi)[k_{\alpha-1}(x+\Delta x, \xi) - k_{\alpha-1}(x, \xi)]d\xi + \int_x^{x+\Delta x} p(\xi)k_{\alpha-1}(x+\Delta x, \xi)d\xi, \quad (1.70)$$

где $k_\alpha(x, \xi) = (x-\xi)^\alpha$. Если функция p неотрицательна, то, поскольку $k_{\alpha-1}(x, \xi)$ при фиксированном ξ монотонно возрастает по первому аргументу, все подынтегральные функции в (1.70) при $\Delta x \geq 0$ будут также неотрицательны, и $\Delta F \geq 0$. Для непрерывности слева достаточно потребовать, чтобы p была ограниченной и кусочно-непрерывной функцией — это следует из известной теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (см., например, [36]).

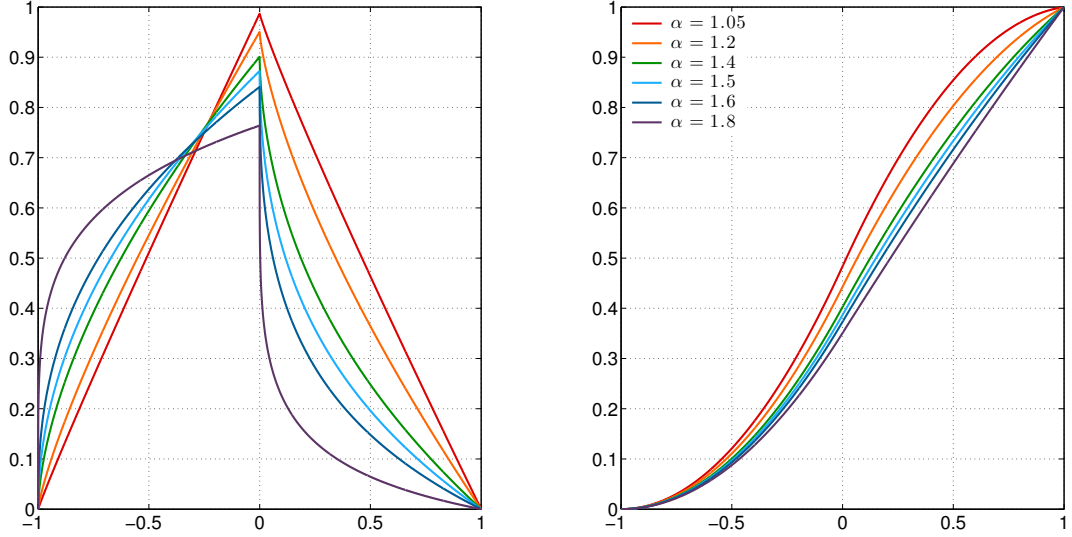


Рис. 1.4: Функции распределения (1.69) (справа) и соответствующие им функции плотности (слева) при различных значениях α

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$. Интегрирование по частям в (1.64) при $x \in (a, b]$ приводит к

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[p(a)k_\alpha(x, a) + \int_a^x p'(\xi)k_\alpha(x, \xi)d\xi \right], \quad (1.71)$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1)\Delta F = p(a)[k_\alpha(x + \Delta x, a) - k_\alpha(x, a)] + \int_a^x p'(\xi)[k_\alpha(x + \Delta x, \xi) - k_\alpha(x, \xi)]d\xi + \\ + \int_x^{x+\Delta x} p'(\xi)k_\alpha(x + \Delta x, \xi)d\xi. \end{aligned}$$

Если $p(a) \geq 0$ и p' неотрицательна, то $\Delta F \geq 0$. Представление (1.71) также позволяет сформулировать достаточный признак непрерывности слева при $0 < \alpha < 1$: p' должна быть ограниченной кусочно-непрерывной функцией. С учетом (1.25) необходимо дополнительно потребовать регулярности функции плотности, что гарантирует $F(a + 0) = 0$.

Таким образом, при $\alpha \geq 1$ искомому классу принадлежат ограниченные кусочно-непрерывные неотрицательные функции, удовлетворяющие дополнительному условию регулярности в точке a (что, в целом, совпадает с обычными требованиями к функции плотности); в случае же $0 < \alpha < 1$ в этот класс входят неубывающие функции с ограниченной кусочно-непрерывной производной и удовлетворяющие условию регулярности в точке a , такие что $p(a) \geq 0$.

На отрезке $[-1, 1]$, например, классу плотностей принадлежит, в силу полученного достаточного условия, семейство степенных функций

$$p(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma - 1)}{2^\alpha\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \gamma - 1)} \left(\frac{x + 1}{2} \right)^{\beta-1} \left(\frac{1 - x}{2} \right)^{\gamma-1} \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad (1.72)$$

с $\alpha + \beta \geq 1$ и $\gamma = 1$; функция распределения в этом случае может быть найдена простым вычислением (см. также рис. 1.5 и 1.6):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \left(\frac{x + 1}{2} \right)^{\alpha+\beta-1} & x \in (-1, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Этому семейству, в частности, принадлежит аналог равномерного распределения, получаемый при $\beta = 1$ и $\gamma = 1$.

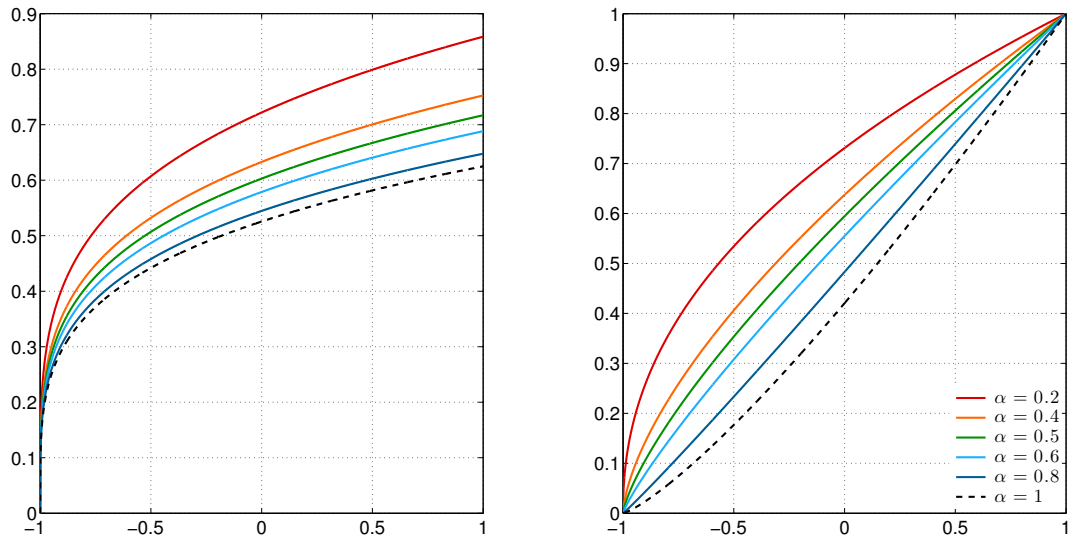


Рис. 1.5: Функции плотности (1.72) (слева) и соответствующие им функции распределения (1.64) (справа) при различных значениях α ; $\beta = 1.25$, $\gamma = 1$

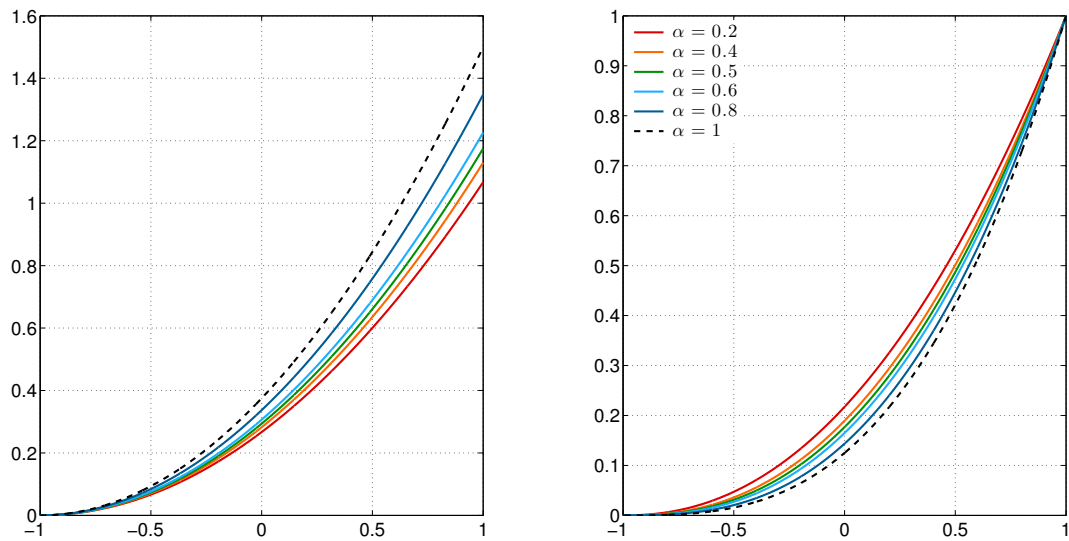


Рис. 1.6: Функции плотности (1.72) (слева) и соответствующие им функции распределения (1.64) (справа) при различных значениях α ; $\beta = 3$, $\gamma = 1$

Возможен также альтернативный подход к определению функции распределения в терминах правостороннего интегрального оператора:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ 1 - (I_{b-}^{\alpha} p)(x) & x \in (a, b), \\ 1 & x \geq b. \end{cases} \quad (1.73)$$

При этом (1.73) совпадает с (1.64) лишь для $\alpha = 1$. Как и в случае левосторонних интегралов, допустимые функции плотности могут быть найдены как $(D_{b-}^{\alpha} (1 - F))(x)$, где F — функция распределения некоторой случайной величины. Например, функции распределения (1.65) соответствует семейство плотностей

$$p(x) = \frac{3}{2} \left[\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{(1-x)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \mathbf{I}_{[-1,1]}(x), \quad (1.74)$$

которое, очевидно, может быть получено из (1.67) инверсией знака переменного x .

Повторяя приведенные выше рассуждения, легко показать, что в этом случае при $0 < \alpha < 1$ для монотонности функции распределения достаточно потребовать выполнения условия $p' \leq 0$ на (a, b) , т.к.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1)\Delta F = p(b)[k_{\alpha}(b, x) - k_{\alpha}(b, x + \Delta x)] + \int_{x+\Delta x}^b p'(\xi)[k_{\alpha}(\xi, x) - k_{\alpha}(\xi, x + \Delta x)]d\xi - \\ - \int_x^b p'(\xi)k_{\alpha}(\xi, x)d\xi \end{aligned}$$

и функция $k_{\alpha}(\xi, x)$ монотонно убывает по второму аргументу при фиксированном ξ .

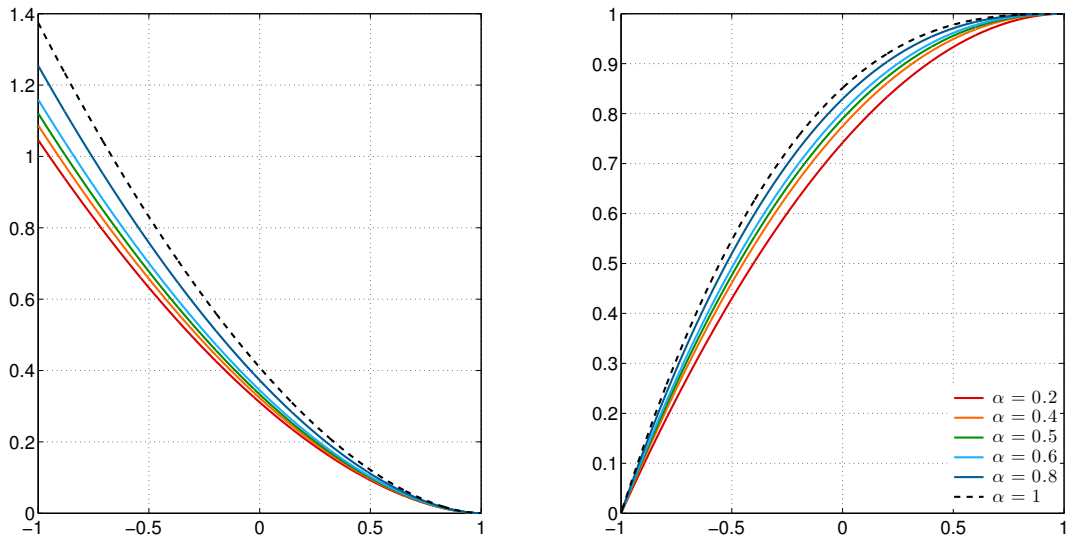


Рис. 1.7: Функции плотности (1.72) (слева) и соответствующие им функции распределения (1.73) (справа) при различных значениях α ; $\beta = 1$, $\gamma = 2.75$

Рассмотренные построения могут быть распространены на случай функций с неограниченным носителем, если дополнительно потребовать, чтобы p нужным образом убывала на бесконечности. Например, если функция распределения определена с помощью правостороннего интегрального оператора

$$F(x) = 1 - (I_{-}^{\alpha} p)(x),$$

классу плотностей принадлежит экспоненциальное однопараметрическое семейство

$$p(x) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^{+}}(x).$$

Функция распределения здесь легко может быть найдена непосредственным вычислением:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0, \end{cases}$$

поскольку

$$\frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda\xi} (\xi - x)^{\alpha-1} d\xi = \frac{e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\eta} \eta^{\alpha-1} d\eta = e^{-\lambda x}.$$

Для функций, носитель которых совпадает с \mathbb{R} , рассмотрение проводится аналогично. Например, на рис. 1.8 представлены несколько функций плотности (полученных с помощью численных методов) при различных α , соответствующих стандартному распределению Гаусса:

$$F(x) = (I_+^\alpha p)(x), \quad F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

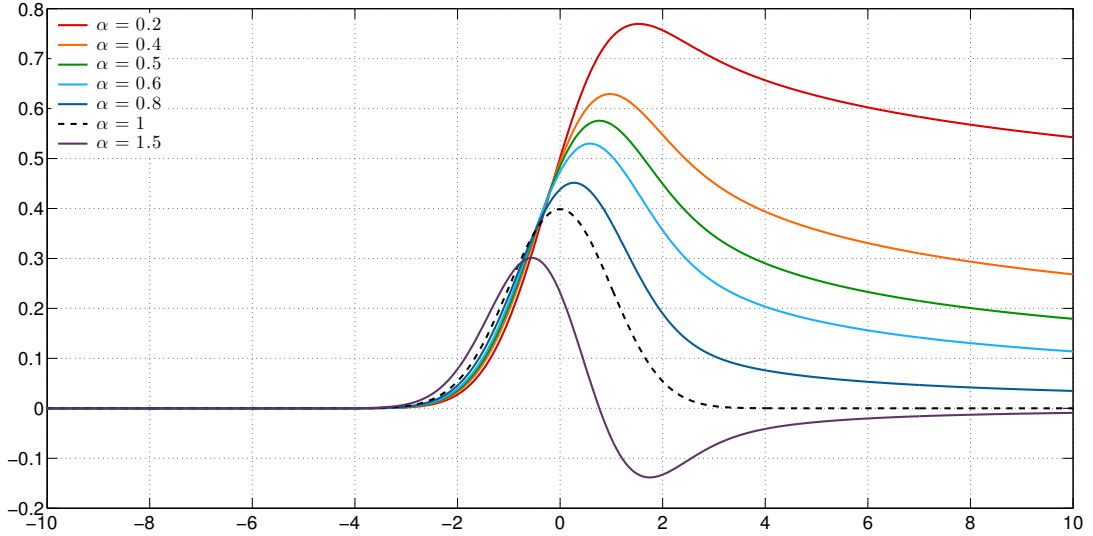


Рис. 1.8: Функции плотности, соответствующие стандартному распределению Гаусса, при различных значениях α

Полученные выше достаточные условия при $0 < \alpha < 1$, связанные с сохранением знака производной функции плотности, для функций, определенных на всей числовой оси, теряют смысл: действительно, для существования $(I_+^\alpha p)(x)$ на всей оси необходимо потребовать достаточно быстрого убывания p при $x \rightarrow \pm\infty$; но тогда p не может быть неубывающей положительной функцией на всей оси.

Следует отметить, что при рассмотрении функций распределения, представимых дробными интегралами Римана — Лиувилля, предварительный выбор носителя функции плотности имеет существенное значение. Рассмотрим, например, функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ (x+1)/2 & x \in (-1, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Если функция распределения определена соотношением (1.64), то, выполняя дробное дифференцирование на отрезке $(-1, 1]$, можно показать, что функция плотности будет иметь вид

$$p(x) = \frac{(x+1)^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \mathbf{I}_{[-1,1]}(x).$$

Однако, если считать, что $F(x) = (I_+^\alpha q)(x)$, и выполнить дробное дифференцирование на всей оси, будет получена другая функция плотности q , отличающаяся от p на множестве

ненулевой меры. Такая неоднозначность обусловлена отмечавшимся уже выше обстоятельством: дробная производная Римана — Лиувилля постоянной при $\alpha \notin \mathbb{N}$ не равна нулю.

Для получения аналитического выражения для q предварительно необходимо вычислить интеграл

$$j_\alpha(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^1 (\xi + 1)(x - \xi)^{\alpha-1} d\xi.$$

После замены $\eta = (\xi + 1)/(x + 1)$ получим

$$j_\alpha(x) = \frac{(x + 1)^{\alpha+1}}{2\Gamma(\alpha)} B\left(2, \alpha; \frac{2}{x + 1}\right) = \frac{(x + 1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_2F_1\left(2, 1 - \alpha, 3, \frac{2}{x + 1}\right),$$

где $B(\alpha, \beta; z)$ — неполная В-функция. Тогда, при $0 < \alpha < 1$

$$(I_+^\alpha F)(x) = j_\alpha(x) + \frac{(x - 1)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (D_+^\alpha F)(x) = \frac{d}{dx} (I_+^{1-\alpha} F)(x).$$

Последнее соотношение приводит к

$$q(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{(x + 1)^{1-\alpha}}{2\Gamma(2 - \alpha)} & x \in [-1, 1], \\ \psi_\alpha(x) + \frac{(x - 1)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} & x > 1, \end{cases} \quad (1.75)$$

где

$$\psi_\alpha(x) = \frac{d}{dx} j_{1-\alpha}(x) = -\frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)(x + 1)^{\alpha+2}} \left[(x + 1) {}_2F_1\left(2, \alpha, 3, \frac{2}{x + 1}\right) + \frac{4}{3} {}_2F_1\left(3, \alpha + 1, 4, \frac{2}{x + 1}\right) \right].$$

Отмеченные нестандартные свойства функций, допускающих корректное представление распределений в виде односторонних дробных интегралов, делают весьма затруднительным использование подобных конструкций в прикладных задачах. Например, привычная оценка плотности распределения с помощью относительных частот (гистограмма) может оказаться неприменимой при заданном нецелом α , поскольку, как уже отмечалось выше, неотрицательность еще не гарантирует, что выражение типа (1.64) будет корректно определять функцию распределения. Поэтому в дальнейшем будет использоваться обычный подход к определению функций распределения.

1.4 Основные результаты главы 1

Было проведено исследование возможности представления функций распределения случайных величин интегралами Римана — Лиувилля дробного порядка. Получены достаточные условия на подынтегральные функции, гарантирующие неубывание дробных интегралов как функций верхнего предела. Построены примеры, показывающие, что неотрицательность подынтегральной функции не является ни необходимым, ни достаточным условием монотонности. Описаны характерные особенности функций, дробные интегралы от которых корректно представляют функции распределения.

Глава 2

Некоторые модели случайных блужданий

2.1 Случайные блуждания на фрактальных множествах

Рассмотрение начнем с одного из наиболее известных примеров фрактального множества — множества Кантора. Простейшим способом определения симметричного множества Кантора \mathcal{C}_λ является следующая геометрическая итерационная процедура (см., например, [32, 88]): из замкнутого отрезка $[0, 1]$ исключается открытый интервал длины $\lambda < 1$, составляющий среднюю часть исходного отрезка; затем из каждого из двух оставшихся замкнутых отрезков исключается открытый интервал длины $\lambda\beta$, где $\beta = (1 - \lambda)/2$ и т.д. Таким образом, длина каждого из 2^{n-1} удаляемых на n -ой итерации интервалов равна $\lambda\beta^{n-1}$, так что на n -ом шаге удаляются интервалы совокупной длины $\lambda(2\beta)^{n-1}$. Суммарная длина этих интервалов, как легко видеть, равна единице, поэтому мера Лебега множества \mathcal{C}_λ равна нулю. Используя технику, предложенную в [89], можно показать, что его размерность Хаусдорфа равна $-\log_\beta 2$: это множество является объединением двух подобных ему множеств с масштабным коэффициентом β . Точки симметричного множества Кантора могут быть представлены в виде

$$(1 - \beta) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k b_k, \quad b_k \in \{0, 1\}. \quad (2.1)$$

Известны также различные обобщения множества Кантора: асимметричное множество Кантора [89]; множество Смита — Вольтерра — Кантора (или ϵ -множество Кантора) [90], получаемое исключением на n -ой итерации средней части длины 2^{-2n} ; n -мерное множество Кантора (или «канторова пыль») [91]; рандомизированное множество Кантора (см., например, [92, 93]) и некоторые другие. Несмотря на то, что множество Кантора имеет достаточно простую структуру, оно естественным образом возникает в самых различных нетривиальных задачах [88, 91, 94].

Представление (2.1) устанавливает соответствие между точками \mathcal{C}_λ и бинарными последовательностями, что позволяет использовать последние для построения случайного блуждания на таком множестве. Будем рассматривать случайный процесс с дискретным временем

$$\eta_t = (1 - \beta) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \xi_t^{(k)}, \quad (2.2)$$

где $\xi_t^{(k)}$ — дискретные случайные величины с распределением Бернулли, принимающие лишь два значения: 0 или 1.

Один из простейших вариантов случайного блуждания можно получить, считая, что $\xi_t^{(k)}$ при любом фиксированном k образуют однородную цепь Маркова (граф переходов изображен на рис. 2.1), и при любом фиксированном t случайные величины $\xi_t^{(k_1)}$ и $\xi_t^{(k_2)}$ независимы.

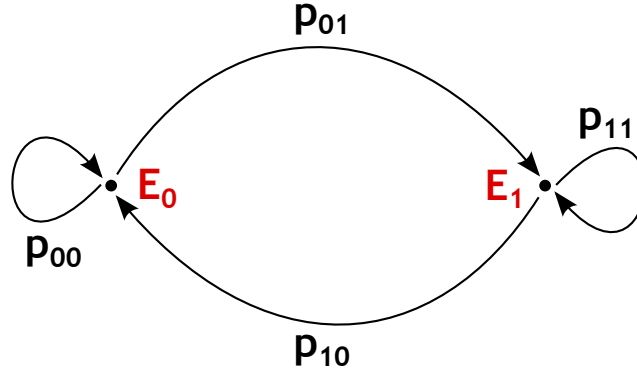


Рис. 2.1: Граф переходов для элементов бинарной последовательности

Не ограничивая общности, будем считать, что рассматриваемый случайный процесс выходит из нуля, т.е. $\xi_0^{(k)} \equiv 0$ для любого k . Будем также считать, что вероятности переходов не зависят от k . В этом случае легко получить аналитические выражения для основных характеристик случайного процесса (2.2). Уравнение Колмогорова для марковского процесса, ассоциированного с каждым символом бинарной последовательности, имеет вид

$$P(t+1) = \Pi^T P(t), \quad \Pi = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

где $P(t)$ — вектор вероятностей состояний. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$P_1(t) = \frac{p_{10}}{p_{01} + p_{10}} + \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}} (\text{tr} \Pi - 1)^t, \quad (2.3)$$

$$P_2(t) = \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}} - \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}} (\text{tr} \Pi - 1)^t. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что случайный процесс η_t будет строго стационарным, если $\text{tr} \Pi = 1$ или $p_{01} = 0$ (тривиальное решение, для которого случайный процесс тождественно равен нулю).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\mathbf{E} \left[\xi_t^{(k)} \right] = P_2(t), \quad \mathbf{D} \left[\xi_t^{(k)} \right] = P_1(t)P_2(t);$$

совместное распределение $\xi_t^{(k)}$ и $\xi_{t+1}^{(k)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\xi_t^{(k)} = 0, \xi_{t+1}^{(k)} = 0 \right) &= p_{00} P_1(t), & \mathbb{P} \left(\xi_t^{(k)} = 0, \xi_{t+1}^{(k)} = 1 \right) &= p_{01} P_1(t), \\ \mathbb{P} \left(\xi_t^{(k)} = 1, \xi_{t+1}^{(k)} = 0 \right) &= p_{10} P_2(t), & \mathbb{P} \left(\xi_t^{(k)} = 1, \xi_{t+1}^{(k)} = 1 \right) &= p_{11} P_2(t), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathbf{E} \left[\xi_t^{(k)} \xi_{t+1}^{(k)} \right] = p_{11} P_2(t)$. С помощью указанных выше соотношений могут

быть получены явные выражения для числовых характеристик случайного процесса (2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\eta_t] &= (1 - \beta) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \mathbf{E} [\xi_t^{(k)}] = P_2(t), \\ \mathbf{D} [\eta_t] &= (1 - \beta)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^{2k} \mathbf{D} [\xi_t^{(k)}] = P_1(t)P_2(t) \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \\ K_\eta(t, \tau) &= \begin{cases} p_{11}P_2(\min\{t, \tau\}) \frac{1 - \beta}{1 + \beta} - P_2(t)P_2(\tau) & |t - \tau| = 1, \\ P_1(t)P_2(t) \frac{1 - \beta}{1 + \beta} & |t - \tau| = 0, \\ 0 & |t - \tau| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Для того чтобы получить траектории случайного процесса η_t , в сумме (2.2) необходимо удержать лишь n слагаемых, где $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, построенная таким образом траектория будет лишь приближением к истинной траектории η_t . Точностью аппроксимации можно управлять, задавая достаточно большим n . Множество точек вида

$$(1 - \beta) \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k b_k, \quad b_k \in \{0, 1\},$$

соответствующее всем возможным бинарным последовательностям конечной длины n , будем обозначать $\mathcal{C}_\lambda^{(n)}$. Очевидно, что $\mathcal{C}_\lambda^{(n)} \subset \mathcal{C}_\lambda$. Легко оценить, в какой мере это множество приближает множество Кантора:

$$\max\{\rho(x, y) : x \in \mathcal{C}_\lambda^{(n)}, y \in \mathcal{C}_\lambda \setminus \mathcal{C}_\lambda^{(n)}\} = (1 - \beta) \sum_{k=n}^{+\infty} \beta^k = \beta^n. \quad (2.5)$$

Так, например, для тернарного множества Кантора ($\lambda = 1/3$) максимальное расстояние (2.5) не превосходит $2 \cdot 10^{-48}$ при $n = 100$. Хотя мы рассматривали конструкцию, в которой изменением каждого символа последовательности управляет цепь Маркова с двумя состояниями, очевидно, что она эквивалентна «агрегированной» цепи Маркова с 2^n состояниями. Если исходные цепи были регулярными (в том смысле что все переходные вероятности отличны от нуля), то эта агрегированная цепь будет неразложимой и непериодической, и, в силу эргодической теоремы (см., например, [69]), после достаточного количества шагов каждое ее состояние будет достигнуто хотя бы один раз. Последнее, в свою очередь, означает, что пространство значений выборочной траектории будет совпадать с $\mathcal{C}_\lambda^{(n)}$, которое аппроксимирует \mathcal{C}_λ с любой заранее заданной точностью.

Ниже приведены примеры полученных траекторий случайного блуждания на тернарном множестве Кантора для различных матриц переходных вероятностей; во всех рассмотренных случаях $n = 5000$. Так, на рис. 2.2 показана траектория симметричного блуждания, когда все переходы в соответствующей цепи Маркова равновероятны; на рис. 2.3 траектория «притягивается» к точке 1, поскольку $p_{00} < 0.5$ и $p_{11} > 0.5$. На рис. 2.4–2.5 показаны примеры траекторий нестационарных случайных блужданий, для которых условие $\text{tr } \Pi = 1$ не выполнено.

Естественным обобщением описанной конструкции является случайное блуждание, где $\xi_t^{(k)}$ образуют неоднородную цепь Маркова, т.е. вероятности переходов зависят от времени t . Для простоты будем по-прежнему считать, что переходные вероятности не зависят от k ; однако даже с учетом такого упрощения получить выражения вероятностей состояний при произвольном t , подобные (2.3)–(2.4), в общем случае весьма затруднительно.

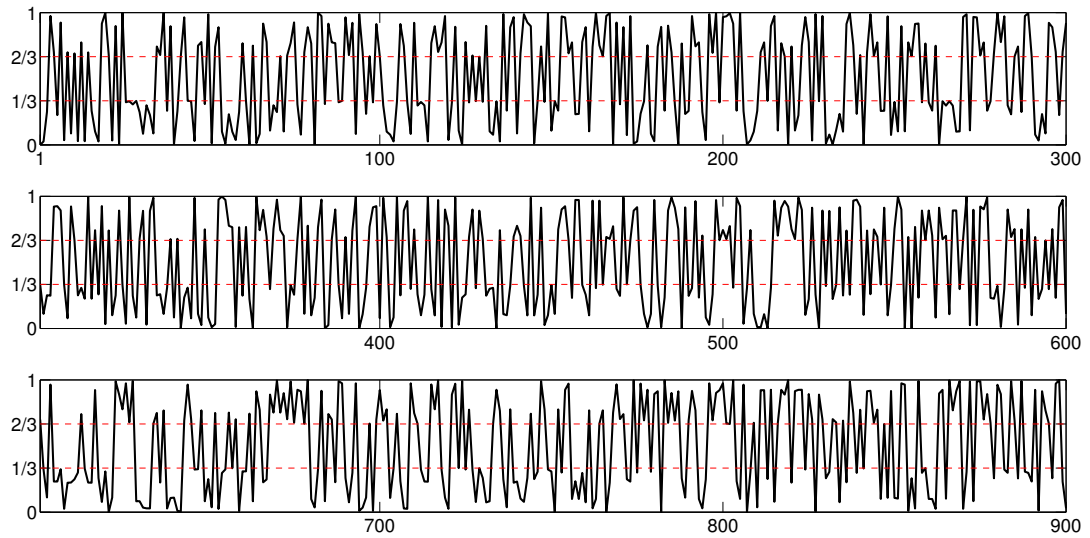


Рис. 2.2: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с $p_{00} = 0.5$, $p_{11} = 0.5$

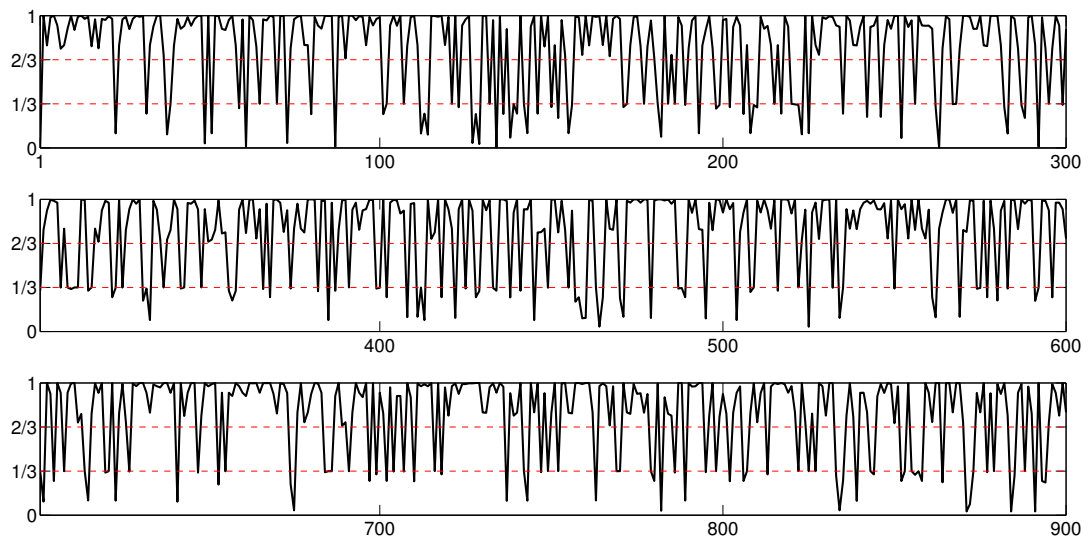


Рис. 2.3: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с $p_{00} = 0.25$, $p_{11} = 0.75$

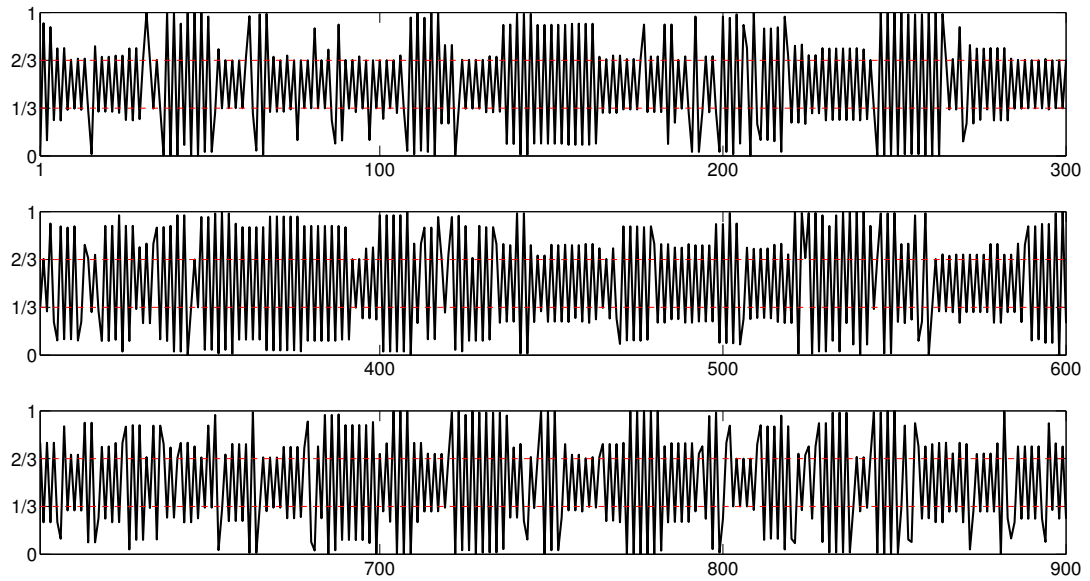


Рис. 2.4: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с $p_{00} = 0.1$, $p_{11} = 0.1$

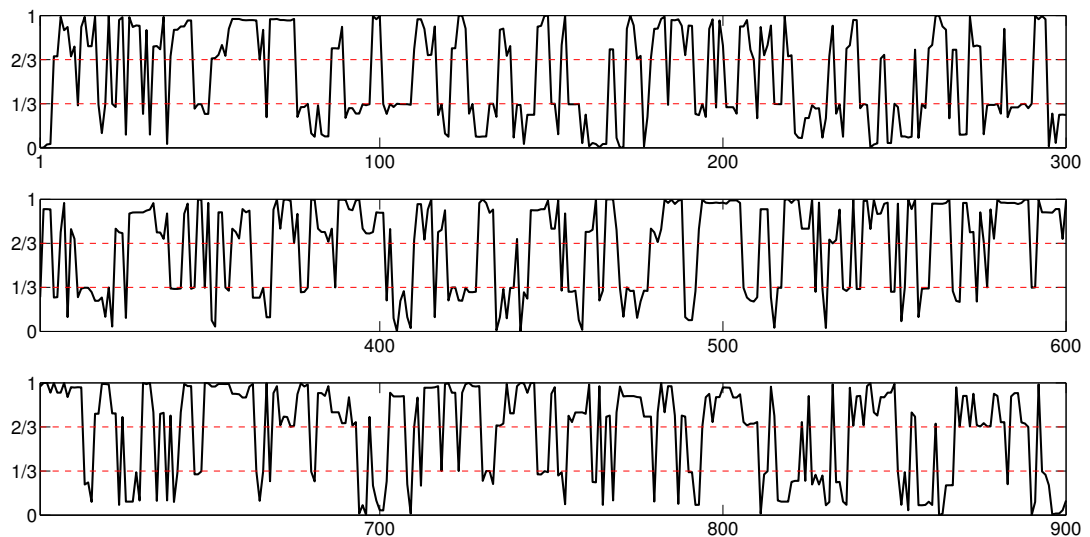


Рис. 2.5: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с $p_{00} = 0.7$, $p_{11} = 0.8$

Среди всевозможных видов функциональной зависимости переходных вероятностей от времени были выбраны периодические и триггерные зависимости, которые могут быть описаны, например, следующими семействами функций:

$$\theta(t, s, L) = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{2\pi(t-s)}{L} \right) + 1 \right),$$

$$\tau(t, s, L) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{t-s}{\sqrt{2}L} \right) + 1 \right).$$

На рис. 2.6 показана траектория случайного процесса η_t с переходными вероятностями $p_{00} = \theta(t, 1, 250)$ и $p_{11} = \theta(t, 126, 256)$. Поскольку

$$\theta(t, s + L/2, L) = 1 - \theta(t, s, L),$$

локальным максимумам p_{00} соответствуют локальные минимумы p_{11} и наоборот; вследствие этого траектория обладает ярко выраженной периодичностью — области «притяжения» траектории к нулю или единице перемежаются с областями резких осцилляций.

На рис. 2.7 показана траектория с переходными вероятностями $p_{00} = \tau(t, 250, 250)$, $p_{11} = \tau(t, 500, 250)$. Качественно характер траектории здесь можно объяснить следующим образом: при небольших t вероятности сохранения символов последовательности, соответственно p_{00} и p_{11} , малы; с ростом t эти вероятности стремятся к единице и изменения символов становятся все более редкими, а траектория устанавливается на некотором постоянном уровне. В обоих вышеприведенных примерах рассматривалось блуждание на тернарном множестве Кантора при $n = 5000$.

Таким же образом можно ввести явную зависимость переходных вероятностей от положения символа в последовательности. Например, на рис. 2.8 показана траектория случайного процесса η_t , для которого величинам $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$ соответствует матрица Π_1 , а $\xi_t^{(k)}$ при $k > 2$ — матрица Π_2 :

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0.975 & 0.025 \\ 0.025 & 0.975 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

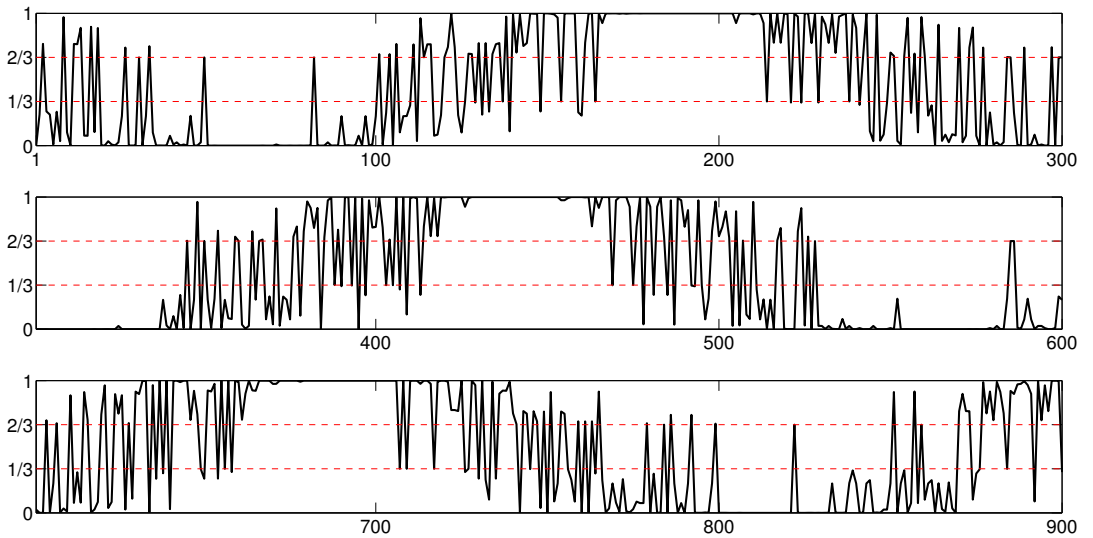


Рис. 2.6: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с $p_{00} = \theta(t, 1, 250)$, $p_{11} = \theta(t, 126, 256)$

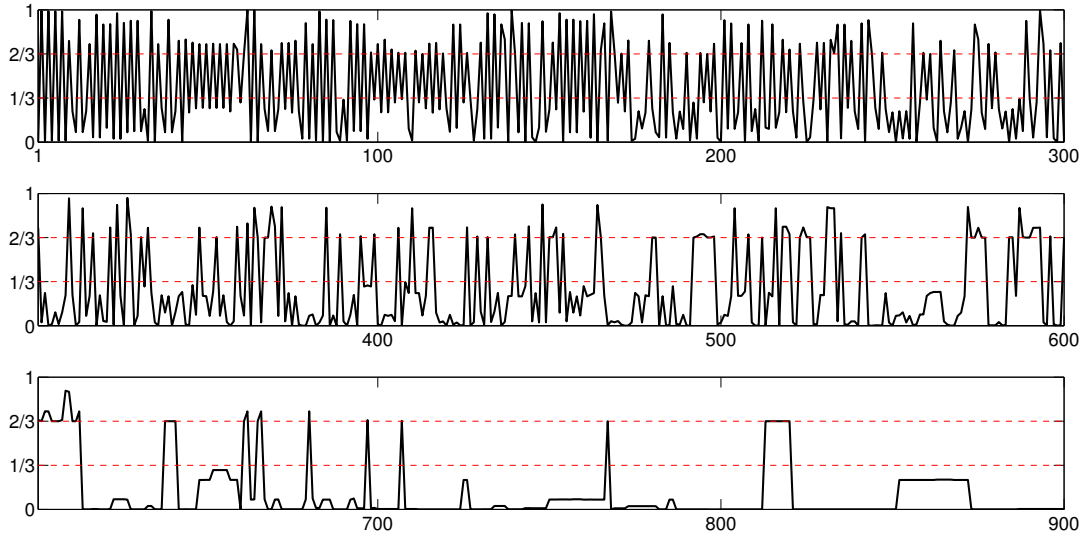


Рис. 2.7: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с $p_{00} = \tau(t, 200, 350)$, $p_{11} = \tau(t, 150, 100)$

Характерный вид траектории легко объяснить: поскольку вклад каждого $\xi_t^{(k)}$ в сумму (2.2) существенно уменьшается с увеличением k , наибольшее изменение значения случайного процесса реализуется за счет первых нескольких символов бинарной последовательности, для которых вероятность изменения мала; наблюдаемые флуктуации малой амплитуды обусловлены символами с $k > 2$, для которых вероятность изменения несколько больше.

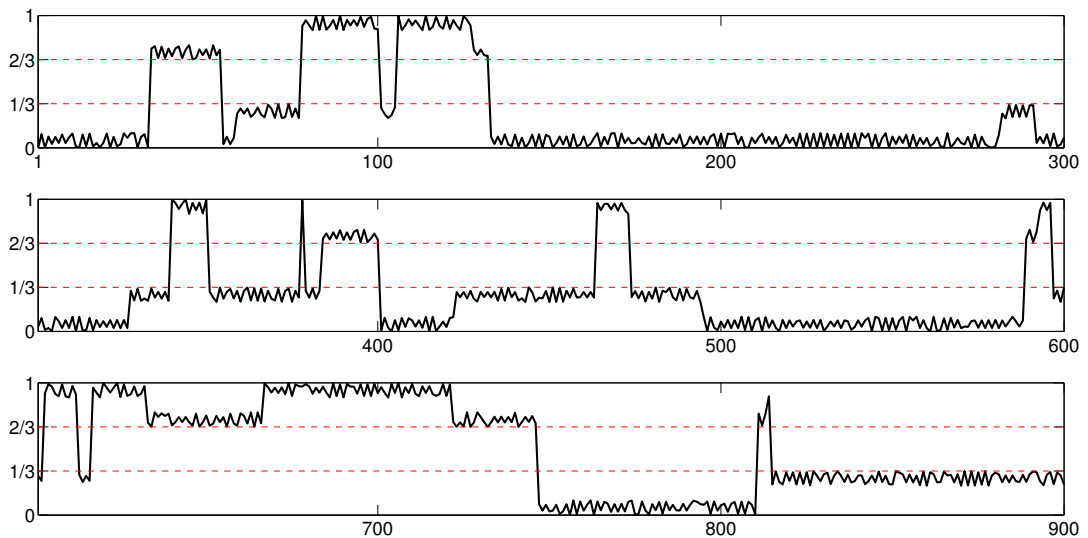


Рис. 2.8: Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с переходными вероятностями, зависящими от k

В рассмотренную выше конструкцию случайного процесса можно также включить зависимость между случайными величинами $\xi_t^{(k)}$ при различных k . Например, значение величины $\xi_t^{(k)}$ может определяться не только ее предыдущим значением $\xi_{t-1}^{(k)}$, но и предыдущими значениями $\xi_{t-1}^{(k\pm 1)}$; такая система в целом будет весьма похожа на одномерную модель Изинга.

При фиксированном t последовательность $\xi_t^{(k)}$ здесь образует цепь Маркова (в общем случае неоднородную), имеющую с учетом всех возможных контекстов k -ого символа в бинарной последовательности восемь состояний; граф переходов здесь имеет четыре компоненты связности, эквивалентные графу, изображенному на рис. 2.1. Для того чтобы правила перехода применялись единообразно ко всем символам, можно считать, что последовательности $\{\xi_t^{(k)}\}$ предшествует последовательность $\{\xi_{t-1}^{(k)}\}$.

Предложенный метод может быть обобщен на случай фрактальных множеств с более сложной структурой. Пусть задана конечная система сжимающих отображений $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ полного метрического пространства M на себя (наиболее естественным здесь является пространство \mathbb{R}^n). Тогда оператор

$$H(A) = \bigcup_{k=1}^m \psi_k(A) \quad (2.7)$$

является сжимающим в пространстве непустых компактных подмножеств M , оснащенном метрикой Хаусдорфа, и по теореме Банаха существует единственное инвариантное относительно этой системы отображений множество Φ , такое что $H(\Phi) = \Phi$; более того, Φ может быть представлено как замыкание множества неподвижных точек всевозможных конечных композиций $\psi_{i_1} \circ \dots \circ \psi_{i_q}$ [25].

Например, симметричное множество Кантора \mathcal{C}_λ порождается системой из двух отображений

$$\psi_1(x) = \beta x, \quad \psi_2(x) = 1 - \beta(1 - x);$$

т.н. подерному треугольнику Серпинского [95] соответствует система отображений

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & -\cos^2 \beta \end{pmatrix} \mathbf{x}, \\ \psi_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & -\cos \gamma \sin \gamma \\ -\cos \gamma \sin \gamma & -\cos^2 \gamma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin^2 \gamma \\ \cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix}, \\ \psi_3(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos(\gamma - \beta) & \cos \alpha \sin(\gamma - \beta) \\ \cos \alpha \sin(\gamma - \beta) & \cos \alpha \cos(\gamma - \beta) \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin^2 \gamma \\ \cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где α, β и γ — острые углы при вершинах исходного треугольника. Фрактальные множества, получаемые с помощью систем итерированных сжимающих отображений, могут иметь весьма сложную форму; несколько таких примеров показано на рис. 2.9.

Случайное блуждание на фрактальном множестве, получаемом с помощью некоторой системы сжимающих отображений, также можно описать в терминах случайных последовательностей над алфавитом из m символов, где m — количество отображений; эту последовательность следует интерпретировать как порядок применения конкретных отображений (пронумерованных числами от 1 до m) к некоторой фиксированной точке $x_0 \in \Phi$. Корректность такого подхода обусловлена тем, что для любой последовательности $\{s_k\}$, где $s_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $x_0 \in \Phi$ [26]

$$\psi_{s_1} \circ \dots \circ \psi_{s_q}(x_0) \in \Phi.$$

Для получения выборочных траекторий и в этом случае необходимо рассматривать последовательности некоторой конечной длины n . Вопрос о точности аппроксимации здесь решается как и для множества Кантора, необходимые оценки для расстояний можно найти в [25].

На рис. 2.10 в качестве примера показана реализация случайного блуждания на подерном треугольнике Серпинского с $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 50^\circ$ с матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

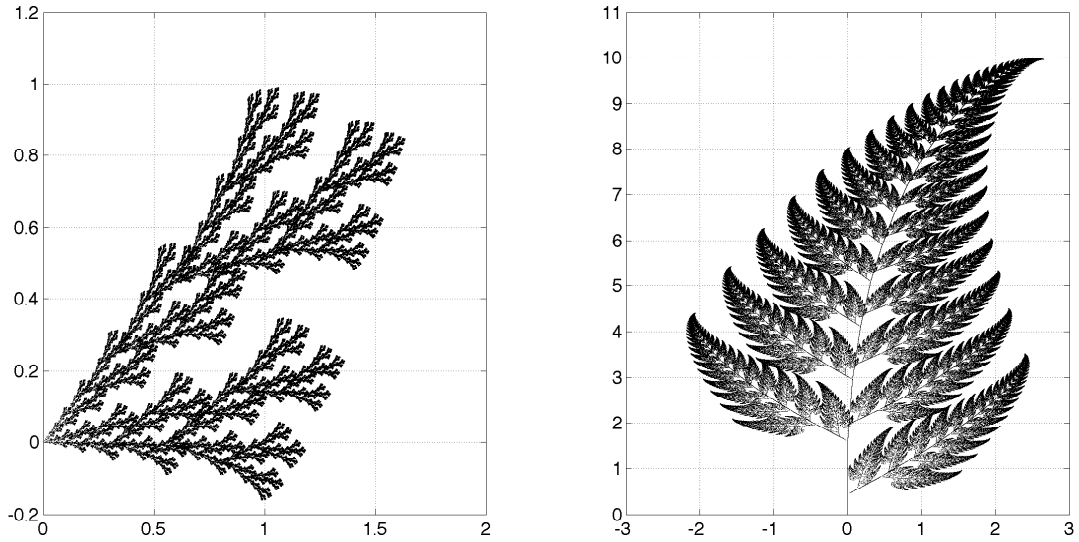


Рис. 2.9: Примеры «дендритных» фрактальных множеств, получаемых с помощью систем сжимающих отображений (справа — т.н. папоротник Барнсли)

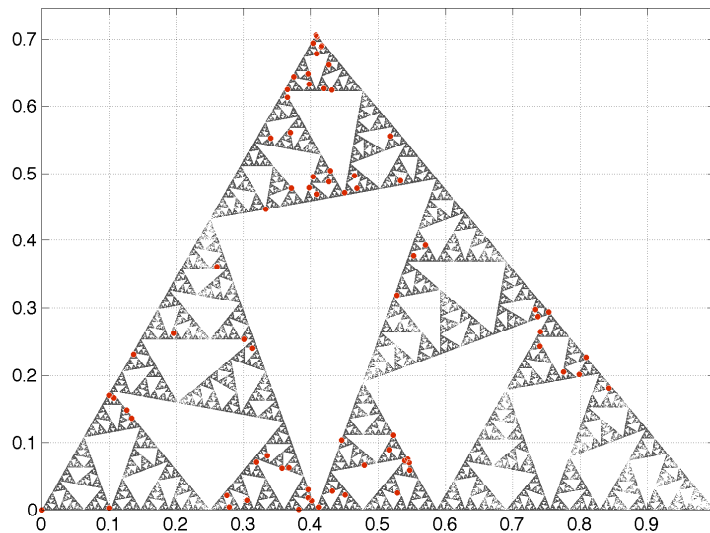


Рис. 2.10: Реализация случайного блуждания на подерном треугольнике Серпинского

Рассмотрение случайных блужданий на регулярных фрактальных множествах возможно также с использованием аппарата теории графов. Разумеется, в этом случае графы должны обладать свойством самоподобия, отличающим все фрактальные множества. Существует несколько подходов к вопросу строгого определения самоподобных графов. По-видимому, самым простым примером здесь являются графы, получаемые дословным повторением процедуры построения регулярных фрактальных множеств на плоскости (см., например, рис. 2.11). Более общий подход предполагает итерационное построение самоподобных графов на основе некоторого конечного набора правил преобразования [96,97]: в исходном графе все подграфы, удовлетворяющие определенным требованиям (т.е. соответствующие некоторому шаблону), заменяются более сложными подграфами, после чего к полученному графу применяются аналогичные правила преобразования (схематичный пример приведен на рис. 2.11); проце-

дура продолжается *ad infinitum*. В целом, такая процедура аналогична выводу в некоторой формальной грамматике. Во многом похожий метод был предложен в работе [98], где самоподобные графы строятся из некоторого заданного конечного графа с помощью произведения Кронекера матриц смежности. Известны также работы, в которых самоподобные графы вводятся аксиоматически на основе понятия изоморфизма графов [99].

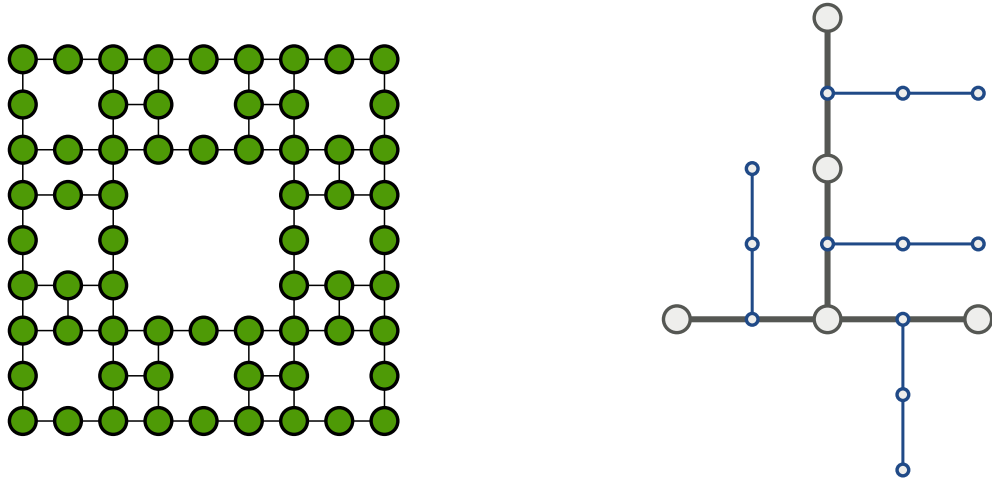


Рис. 2.11: К вопросу о самоподобных графах: слева — граф, соответствующий квадрату Серпинского (после двух итераций); справа — пример итерационного преобразования ребер в графе (показаны две итерации)

После того как структура самоподобного графа определена, случайное блуждание на нем можно ввести так же, как и для обычного конечного графа (см., например, [100–102]). Хотя самоподобные графы имеют бесконечное число вершин, они являются локально конечными (т.е. все вершины имеют конечную степень), что позволяет корректно определить случайные смещения из одной вершины в другую. Некоторые свойства таких случайных блужданий уже изучены (см. [103, 104] и цитированную там литературу).

В последние десятилетия аппарат графов все чаще применяется в рамках различных прикладных задач для моделирования сложных сетевых конструкций (см. [105] и цитированную там литературу). Так, например, в [106] была предложена имитационная модель институциональной коррупции: в основе ее лежит последовательное моделирование случайного блуждания на некотором нагруженном графе, при этом характеристики графа меняются на каждой итерации в зависимости от реализации блуждания.

2.2 Случайные блуждания, ассоциированные с уравнением дробной диффузии

Основным объектом исследования данного раздела является уравнение смешанного типа с производными Герасимова — Капуто и Рисса — Феллера

$$\left({}_t\mathcal{D}_{0+}^\beta p\right)(x, t) = A \frac{\partial p}{\partial x} + B ({}_x D_\theta^\alpha p)(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.8)$$

параметры которого подчинены следующим ограничениям:

$$0 < \beta \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad |\theta| \leq \min\{2, 2 - \alpha\}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathbb{R}^+.$$

Фундаментальные решения (2.8) при любом фиксированном t являются плотностями распределения некоторых абсолютно непрерывных случайных величин.

Предваряя доказательство последнего утверждения, необходимо ввести некоторые определения, касающиеся устойчивых распределений. Распределение случайной величины ξ называется устойчивым, если для любого $n \geq 2$ существуют $c_n > 0$ и d_n , такие что

$$\xi_1 + \dots + \xi_n = c_n \xi + d_n, \quad (2.9)$$

где ξ_k — независимые случайные величины, распределение которых совпадает с распределением ξ , а равенство (2.9) понимается в смысле равенства по распределению. Устойчивые распределения и только они могут являться предельными распределениями для нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (см., например, [69]). В последние десятилетия устойчивые распределения находят все больше применений в различных прикладных задачах (множество примеров можно найти в [70]).

Для характеристической функции устойчивого распределения известно представление Леви — Хинчина [69, 70]:

$$\begin{aligned} \ln \chi(\omega) &= i\mu\omega - \sigma|\omega|^\alpha (1 - i\gamma\phi(\alpha) \operatorname{sgn}(\omega)), \\ 0 < \alpha &\leq 2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad |\gamma| \leq 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где α — характеристический параметр, μ — параметр положения, σ — параметр масштаба, γ — параметр асимметрии (иногда называемый также параметром скоса), и

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) & \alpha \neq 1, \\ -2 \ln|x|/\pi & \alpha = 1. \end{cases}$$

Наряду с (2.10) используются несколько альтернативных представлений для характеристической функции устойчивых распределений [70]. Так, например, Феллером [107] было введено понятие устойчивых в строгом смысле распределений, для которых соотношение (2.9) выполняется при $d_n = 0$; логарифм характеристической функции в этом случае при $\alpha \neq 1$ может быть представлен в виде

$$\ln \chi(\omega) = -i\mu\omega - \sigma|\omega|^\alpha e^{\theta\pi i \operatorname{sgn}(\omega)/2}, \quad |\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}. \quad (2.11)$$

Следует подчеркнуть, что значения параметров асимметрии θ и γ в этих представлениях не совпадают. При $\alpha = 1$ это представление справедливо только для симметричного распределения с $\theta = 0$.

Явные аналитические выражения для устойчивых плотностей в терминах элементарных функций известны лишь для трех значений α — это распределения Гаусса ($\alpha = 2, \gamma = 0$), Коши ($\alpha = 1, \gamma = 0$) и Леви — Смирнова ($\alpha = 1/2, \gamma = 1$); в общем случае устойчивые плотности могут быть выражены лишь через специальные функции. На рис. 2.12–2.14 показаны несколько примеров устойчивых плотностей, соответствующих параметризации (2.10), при фиксированных значениях $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Рассмотрение уравнения (2.8) начнем с нескольких частных случаев. Пусть в уравнении (2.8) $\beta = 1$. Применяя преобразование Фурье по пространственному переменному, легко можно получить явное выражение для Фурье-образа искомого решения

$$\ln u(\omega, t) = t (i\omega A - B|\omega|^\alpha e^{\theta\pi i \operatorname{sgn}(\omega)/2}),$$

которое с точностью до обозначений совпадает с выражением (2.11) для характеристической функции устойчивого в строгом смысле распределения.

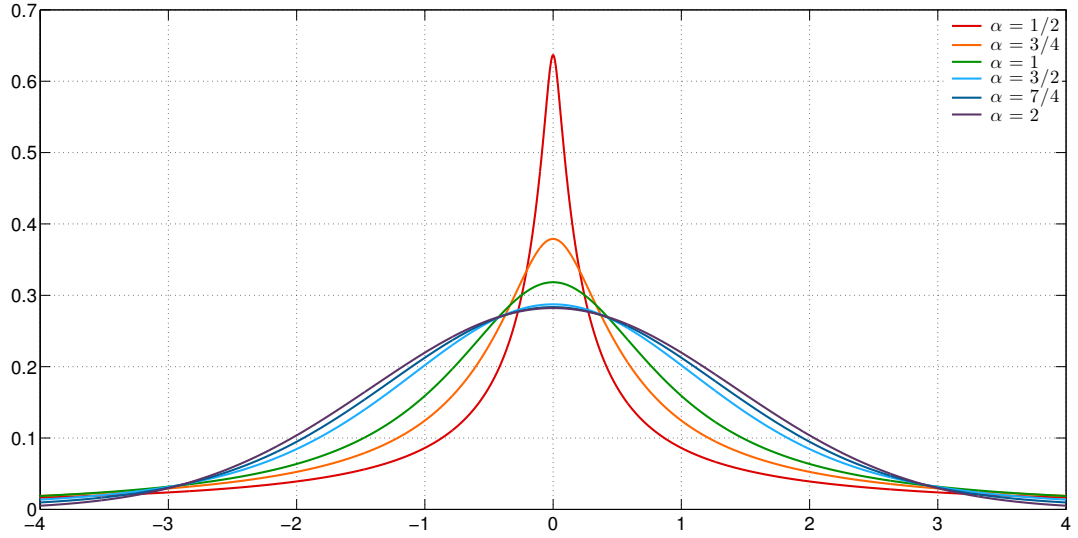


Рис. 2.12: Симметричные устойчивые плотности с $\gamma = 0$ при различных значениях α

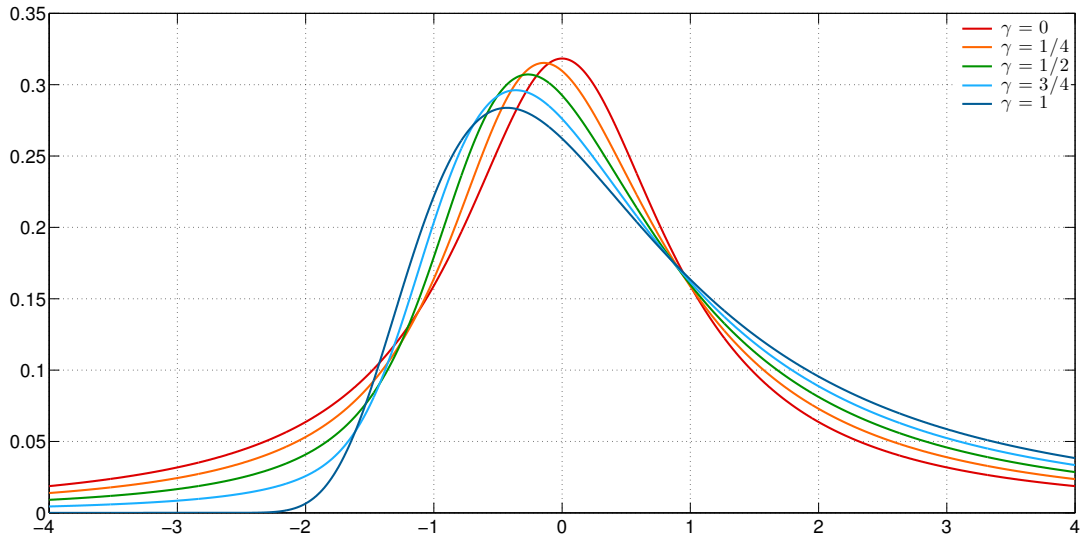


Рис. 2.13: Устойчивые плотности при $\alpha = 1$ и различных неотрицательных значениях γ

Пусть теперь $\alpha = 2$, $\theta = 0$ и $A = 0$. В этом случае фундаментальное решение (2.8) может быть выражено в терминах функций Райта [53, 108] (см. также приложение А):

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{Bt^\nu}} \phi(-\nu, 1 - \nu, -\zeta), \quad \zeta = \frac{|x|}{\sqrt{Bt^\nu}}, \quad \nu = \frac{\beta}{2}. \quad (2.12)$$

В [108] это решение было подробно исследовано, в частности, было показано, что (2.12) является симметричной функцией плотности, достигающей своего максимального значения в точке $x = 0$ и имеющей более «тяжелые» хвосты, чем распределение Гаусса, и может быть выражена через односторонние «экстремальные» устойчивые плотности (для которых параметр γ принимает значение ± 1). Отметим, что и при $1 < \beta < 2$ решение (2.12) также имеет смысл функции плотности; в этом случае оно имеет два симметричных максимума и более

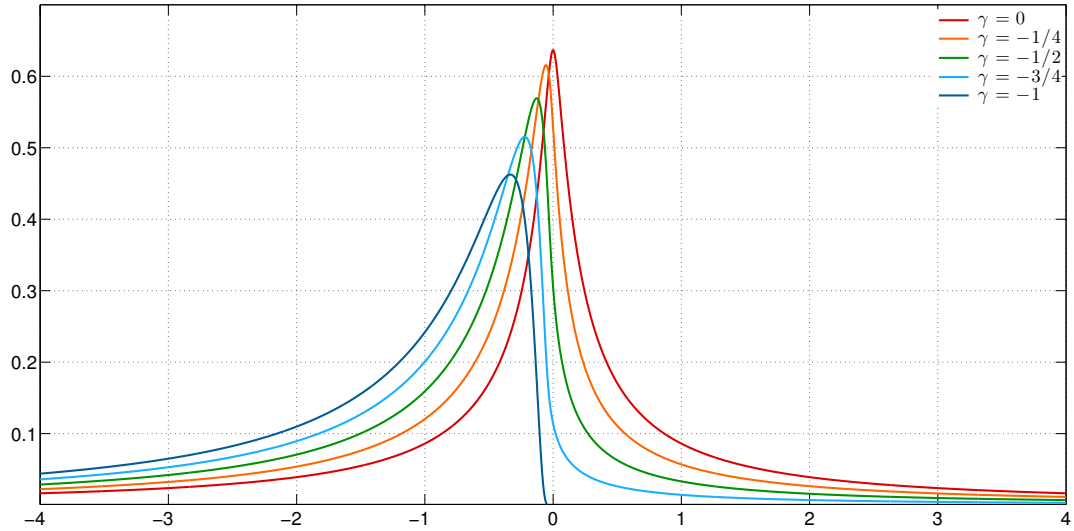


Рис. 2.14: Устойчивые плотности при $\alpha = 1/2$ и различных неположительных значениях γ

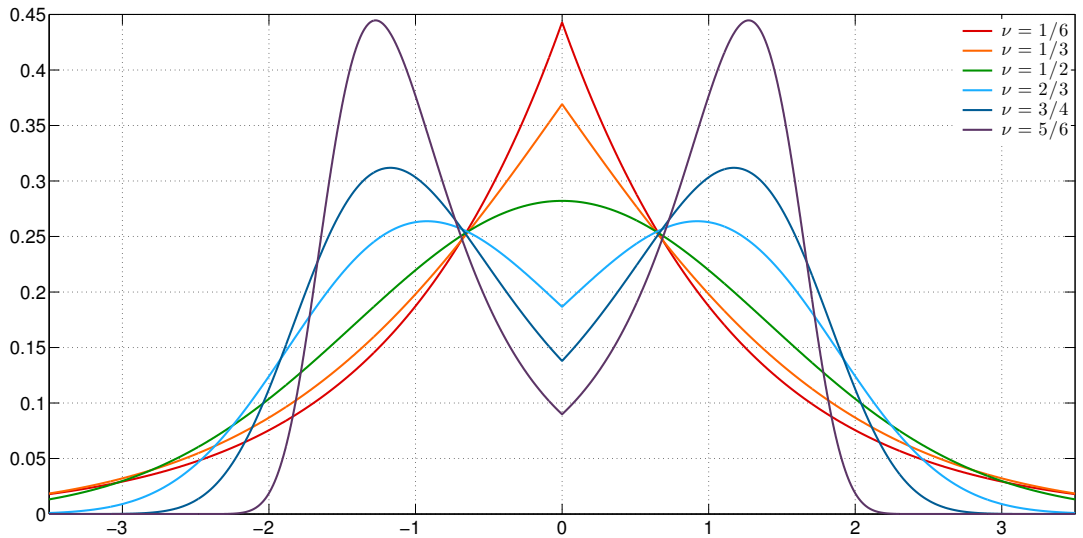


Рис. 2.15: Плотности (2.12) при различных значениях $\nu = \beta/2$

«легкие» хвосты, чем распределение Гаусса. На рис. 2.15 показаны некоторые плотности (2.12) при $t = 1$ и $B = 1$.

В работе [53] для фундаментального решения (2.8) при $A = 0, B = 1$ было получено интегральное представление Меллина — Барнса

$$p_{\alpha,\beta}^{\theta}(x,t) = t^{-q} K_{\alpha,\beta}^{\theta}(xt^{-q}), \quad q = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$K_{\alpha,\beta}^{\theta}(x) = \frac{1}{2\pi i \alpha x} \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} \frac{\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-qs)\Gamma(\rho s)\Gamma(1-\rho s)} x^s ds, \quad \rho = \frac{\alpha-\theta}{2\alpha},$$

которое справедливо в области $x > 0$ при выполнении условий $q < \min\{\alpha, 1\}$, $|\theta| \leq 2 - \beta$. В

области $x < 0$ решение может быть получено с помощью соотношения симметрии

$$K_{\alpha,\beta}^{\theta}(-x) = K_{\alpha,\beta}^{-\theta}(x).$$

В [109] решение было получено в явном виде в терминах H -функций Фокса; для этого необходимо отдельно рассматривать случаи $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$, для которых функции Фокса имеют особенности соответственно в точке $x = 0$ и в бесконечно удаленной точке:

$$K_{\alpha,\beta}^{\theta}(x) = \frac{1}{\alpha x} H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} (0, 1/\alpha) (0, 1) (0, \rho) \\ (0, 1/\alpha) (0, q) (0, \rho) \end{array} \right. \right], \quad \alpha < \beta,$$

$$K_{\alpha,\beta}^{\theta}(x) = \frac{1}{\alpha x} H_{3,3}^{2,1} \left[x \left| \begin{array}{l} (1, 1/\alpha) (1, q) (1, \rho) \\ (1, 1/\alpha) (1, 1) (1, \rho) \end{array} \right. \right], \quad \alpha > \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, функция Фокса имеет особенность в точке $x = 1$; в этом случае, однако, решение выражается через элементарные функции

$$K_{\alpha,\alpha}^{\theta}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x^{\alpha-1} \sin(\pi(\alpha - \theta)/2)}{1 + 2x^{\alpha} \cos(\pi(\alpha - \theta)/2) + x^{2\alpha}}$$

и может рассматриваться как несимметричный аналог распределения Коши дробного порядка.

Остановимся на доказательстве того, что решения уравнения (2.8) в общем случае является плотностью распределения некоторой абсолютно непрерывной случайной величины. Схема доказательства совпадает с изложенной в работе [53], где рассматривается уравнение типа (2.8) без конвективного слагаемого; аналогичная схема была применена в [110] для исследования уравнения (2.8) с $\beta = 1$. Введем следующие обозначения:

$$u(\omega, t) = F[p(x, t), x], \quad w(\omega, s) = L[u(\omega, t), t],$$

где F и L — соответственно операторы преобразований Фурье и Лапласа. Последовательное применение указанных преобразований к (2.8) приводит к соотношению

$$w(\omega, s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta} - \zeta(\omega)}, \quad \zeta(\omega) = i\omega A - B|\omega|^{\alpha} e^{\theta\pi i \operatorname{sgn}(\omega)/2}. \quad (2.13)$$

Обращение преобразования Лапласа в (2.13) приводит к

$$u(\omega, t) = E_{\beta}(t^{\beta} \zeta(\omega)).$$

Из определения функции Миттаг-Леффлера (A.1) немедленно следует, что $u(0, t) = 1$, откуда, в свою очередь, следует выполнение нормировочного условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = 1.$$

Непосредственной подстановкой в (A.1) легко убедиться в справедливости соотношения

$$u(-\omega, t) = E_{\beta}(t^{\beta} \zeta^{*}(\omega)) = E_{\beta}^{*}(t^{\beta} \zeta(\omega)) = u^{*}(\omega, t).$$

Тогда, в силу свойств преобразования Фурье, $p(x, t)$ является вещественной функцией.

Представление (2.13) может быть записано в виде интеграла

$$s^{\beta-1} \int_0^{+\infty} e^{-y(s^{\beta} - \zeta(\omega))} dy = \int_0^{+\infty} e^{y\zeta(\omega)} s^{\beta-1} e^{-ys^{\beta}} dy = 2 \int_0^{+\infty} Q(\omega, y) R(y, s) dy.$$

Как легко видеть, $Q(\omega, y)$ при любом фиксированном y совпадает с характеристической функцией устойчивого распределения с некоторыми параметрами; $R(y, s)$ при фиксированном y можно рассматривать как преобразование Лапласа от (2.12) [49, 53]. Отсюда следует, что после обращения интегральных преобразований $p(x, t)$ представима в виде интеграла от произведения двух функций плотности, а значит, $p(x, t)$ неотрицательна. Таким образом, $p(x, t)$ при любом t является вещественной неотрицательной функцией, подчиненной нормировочному условию, т.е. функцией плотности.

Как известно, стандартное уравнение адвекции — диффузии тесно связано со схемой случайного блуждания (см., например, [67, 111]). Для удобства будем рассматривать одномерный случай, считая, что смещения возможны лишь в две ближайшие точки (простейшая схема, связанная также с задачей о разорении). Пусть p_k^n — вероятность того, что на n -м шаге процесс находится в k -ой точке, и $u(kh, n\tau) = p_k^n$. Тогда, очевидно, выполняется соотношение

$$u(x, t + \tau) = qu(x - h, t) + su(x + h, t), \quad q + s = 1, \quad (2.14)$$

где q и s — вероятность смещения за один шаг, $x = kh$ и $t = n\tau$. Предполагая, что функция $u(x, t)$ дифференцируема по каждому аргументу достаточное число раз, справедливы разложения

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) &= u(x, t) + \tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2), \\ u(x \pm h, t) &= u(x, t) \pm h \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Подстановка этих разложений в (2.14) приводит к

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[(s - q) \frac{h}{\tau} \right] \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\tau) + \mathcal{O}\left(\frac{h^3}{\tau}\right). \quad (2.15)$$

Если устремить h и τ к нулю так, чтобы пределы

$$a = - \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left[(s - q) \frac{h}{\tau} \right], \quad b = \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \frac{h^2}{2\tau}$$

оставались конечными (при $s \neq q$ требуются некоторые дополнительные ограничения), то из (2.15) следует

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Корректный переход к дискретному аналогу уравнения (2.8) также позволяет получить схему некоторого случайного блуждания, свойства которого в общем случае заметно отличаются от известных простых моделей. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_j &= jh, \quad h > 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ t_n &= n\tau, \quad \tau > 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ y_j^n &= y(x_j, t_n) = \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} p(x, t_n) dx \approx hp(x_j, t_n). \end{aligned}$$

В качестве аппроксимации конвективного слагаемого будем рассматривать нестандартную конструкцию

$$A \frac{\partial p(x, t_n)}{\partial x} \approx h^{-1} \left[\frac{A + |A|}{2} y_{j+1}^n - |A| y_j^n + \frac{|A| - A}{2} y_{j-1}^n \right]. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что при $A \geq 0$ она совпадает с правосторонней разностной аппроксимацией, а при $A < 0$ — с левосторонней; такой подход используется, например, при решении уравнений гидродинамики и называется «разностью против потока» [112]. Причина такого выбора будет пояснена ниже.

Для производной Герасимова — Капуто дискретным аналогом является выражение [34,53]

$$\left({}_t\mathcal{D}_{0+}^\beta y\right)(x_j, t_{n+1}) \approx \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{\beta}{k} \frac{y_j^{n+1-k} - y_j^0}{\tau^\beta}. \quad (2.17)$$

При аппроксимации производной Рисса — Феллера необходимо рассматривать отдельно два различных случая [34]:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1, \quad |\theta| \leq \alpha, \\ 1 < \alpha \leq 2, \quad |\theta| \leq 2 - \alpha. \end{aligned}$$

Случай $\alpha = 1$ не рассматривается в силу отмеченного выше свойства характеристических функций устойчивых в строгом смысле распределений.

Начнем рассмотрение со случая $0 < \alpha < 1$:

$$\left({}_x D_{\theta}^\alpha y\right)(x_j, t_n) \approx -h^{-\alpha} \left(c_+ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y_{j-k}^n + c_- \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y_{j+k}^n \right), \quad (2.18)$$

где

$$c_+ = \frac{\sin((\alpha - \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad c_- = \frac{\sin((\alpha + \theta)\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Подстановка (2.16)–(2.18) в (2.8) после некоторых упрощений приводит к

$$y_j^{n+1} = b_n y_j^0 + \sum_{k=1}^n c_k y_j^{n+1-k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k y_{j-k}^n. \quad (2.19)$$

Для удобства записи были введены обозначения

$$\begin{aligned} A_* = A \frac{\tau^\beta}{h}, \quad B_* = B \frac{\tau^\beta}{h^\alpha}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\beta}{k}, \quad c_k = (-1)^{k+1} \binom{\beta}{k}, \quad k \geq 1, \\ \begin{cases} p_1 = (|A_*| - A_*)/2 + B_* \alpha c_+, \\ p_0 = -|A_*| - B_*(c_+ + c_-), \\ p_{-1} = (A_* + |A_*|)/2 + B_* \alpha c_-, \\ p_{\pm k} = (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k} B_* c_{\pm}, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку дискретную схему (2.19) можно рассматривать в более широком смысле, не требуя устойчивости и сходимости распределения к решению (2.8), параметры τ и h можно формально исключить, переходя к модифицированным значениям A_* и B_* и вводя новые произвольные пространственный и временной шаги $h_* > 0$ и $\tau_* > 0$. Для удобства далее будем считать $h_* = \tau_* = 1$.

В силу свойств биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = 1, \quad b_n = 1 - \sum_{k=1}^n c_k, \quad b_0 = 1, \quad c_1 = \beta.$$

Также справедливо равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k = -B_*(c_+ + c_-) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} = -B_*(c_+ + c_-) (1-1)^\alpha = 0.$$

По индукции легко показать, что схема (2.19) сохраняет величину $S_n = \sum_j y_j^n$. Действительно, с учетом привычного соглашения о «пустых» суммах (когда верхний индекс суммирования меньше нижнего), при $n = 0$ уравнение (2.19) принимает вид

$$y_j^1 = y_j^0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k y_{j-k}^0,$$

откуда немедленно следует

$$S_1 = S_0 + S_0 \sum_k p_k = S_0$$

Далее, пусть $S_0 = S_1 = \dots = S_n$, тогда

$$S_{n+1} = b_n S_0 + \sum_{k=2}^n c_k S_{n+1-k} + \left(\beta + \sum_k p_k \right) S_n = \left(b_n + \sum_{k=1}^n c_k \right) S_0 = S_0.$$

Коэффициенты p_k в (2.19) будут неотрицательны при выполнении следующего условия:

$$\beta - |A_*| - B_*(c_+ + c_-) = \beta - |A_*| - B_* \frac{\cos(\pi\theta/2)}{\cos(\pi\alpha/2)} \geq 0.$$

Неотрицательность p_1 и p_{-1} обеспечена выполнением при любых A_* очевидных неравенств

$$\frac{|A_*| - A_*}{2} \geq 0, \quad \frac{A_* + |A_*|}{2} \geq 0.$$

Именно по этой причине в (2.16) была выбрана такая форма аппроксимации для первой производной по пространственному переменному.

Из приведенного анализа следует, что (2.19) можно рассматривать как схему некоторого случайного процесса с дискретным временем: величины y_j^n следует интерпретировать как вероятность нахождения в точке x_j в момент времени t_n , а коэффициенты при них — как вероятности переходов (разумеется, если выполнены условия неотрицательности) из текущего положения в следующее. Не ограничивая общности, будем считать, что $y_j^0 = \delta_{0,j}$, а значит $S_n = 1$. Легко показать, что вероятности переходов также подчинены нормировочному условию:

$$b_n + \sum_{k=1}^n c_k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k = 1.$$

Случайный процесс, определяемый (2.19), при $\beta \neq 1$ является немарковским, поскольку вероятность нахождения в любой точке в момент времени t_n зависит от траектории случайного процесса вплоть до момента времени t_{n-1} .

Для получения выборочных траекторий случайного блуждания, соответствующего (2.19), в последней сумме необходимо рассматривать лишь конечное число слагаемых; критерием точности является отклонение от единицы суммы вероятностей переходов:

$$\begin{aligned} b_n + \sum_{k=1}^n c_k + \sum_{k=-m}^m p_k &= 1 + \sum_{k=-m}^m p_k = 1 - B_*(c_+ + c_-) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \\ &= 1 - B_*(c_+ + c_-) \binom{m-\alpha}{m} = 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Здесь был использован известный результат для суммы биномиальных коэффициентов [113].

Переход от момента времени t_n к t_{n+1} можно рассматривать следующим образом. Пусть Q — реализация равномерно распределенной на $[0, 1 - \epsilon]$ случайной величины, и отрезок $[0, 1 - \epsilon]$ разделен на сегменты с длинами

$$p_{-m}, p_{-m+1}, \dots, p_{-1}, p_0 + \beta, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, c_2, c_3, \dots, c_n, b_n.$$

Если значение Q попадает в первый сегмент длины p_{-m} , то случайное блуждание смещается из текущего положения на $-mh_*$, если во второй — то на $(-m+1)h_*$ и т.д., причем сегменту длины $p_0 + \beta$ соответствует сохранение текущего положения. Если же Q попадает в сегмент длины c_k , $2 \leq k \leq n$, то случайное блуждание возвращается к своему $(n+1-k)$ -му значению. Наконец, если Q попадает в последний сегмент длины b_n , то случайный процесс возвращается к своему начальному значению.

При $1 < \alpha < 2$ дискретный аналог производной Рисса — Феллера имеет вид

$$({}_x D_\theta^\alpha y)(x_j, t_n) \approx -h^{-\alpha} \left(c_+ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y_{j+1-k}^n + c_- \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y_{j-1+k}^n \right). \quad (2.20)$$

Сдвиг индексов в (2.20) был введен для того, чтобы это выражение при $\alpha = 2$ совпадало со стандартной трехточечной аппроксимацией производной второго порядка (в [114] было показано, что такой подход позволяет добиться безусловной устойчивости неявной разностной схемы типа (2.20) для уравнения диффузии дробного порядка). Дискретная схема, порождающая случайное блуждание, совпадает с (2.19), где

$$\begin{cases} p_1 = (|A_*| - A_*)/2 - B_* \left[\binom{\alpha}{2} c_- + c_+ \right], \\ p_0 = -|A_*| + B_* \alpha (c_+ + c_-), \\ p_{-1} = (A_* + |A_*|)/2 - B_* \left[\binom{\alpha}{2} c_+ + c_- \right], \\ p_{\pm k} = (-1)^k \binom{\alpha}{k+1} B_* c_{\pm}, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Сохранение нормировочного условия для сумм S_n проверяется аналогично случаю $0 < \alpha < 1$. Условие неотрицательности вероятностей перехода принимает вид

$$\beta - |A_*| + B_* \alpha \frac{\cos(\theta\pi/2)}{\cos(\alpha\pi/2)} \geq 0.$$

На рис. 2.16–2.22 приведены примеры выборочных траекторий рассматриваемого случайного блуждания при различных сочетаниях параметров и $m = 1500$. Траектории формируются под влиянием двух конкурирующих механизмов: диффузионного механизма и механизма памяти, отвечающего за спонтанные возвращения к прошлым значениям случайного блуждания. Значение параметра β однозначно определяет, какой из этих механизмов будет доминировать, поскольку сумма переходных вероятностей в той части (2.19), которая соответствует диффузионному механизму, равна β .

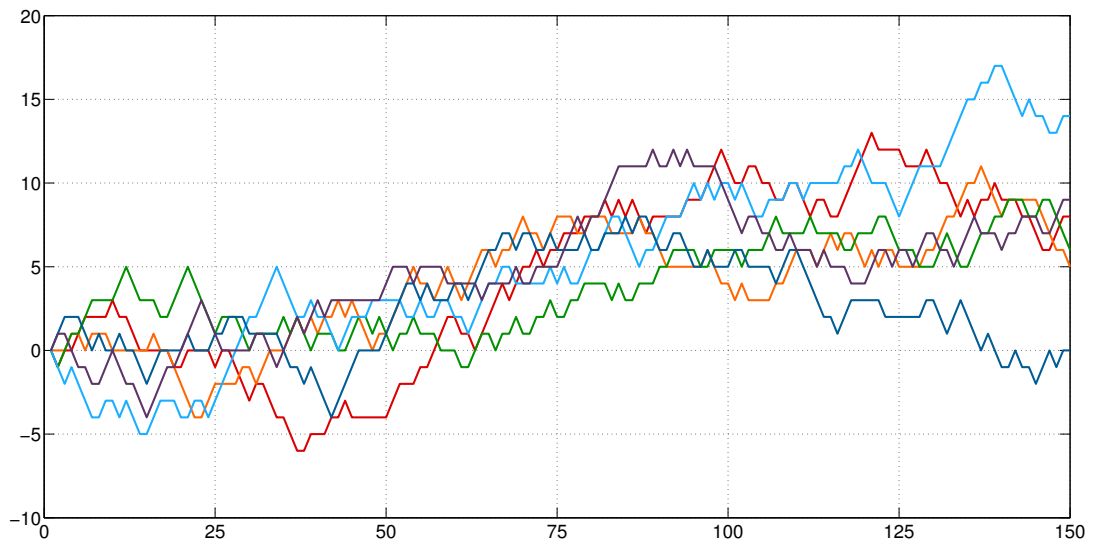


Рис. 2.16: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\theta = 0$, $A_* = 0$, $B_* = 0.3$

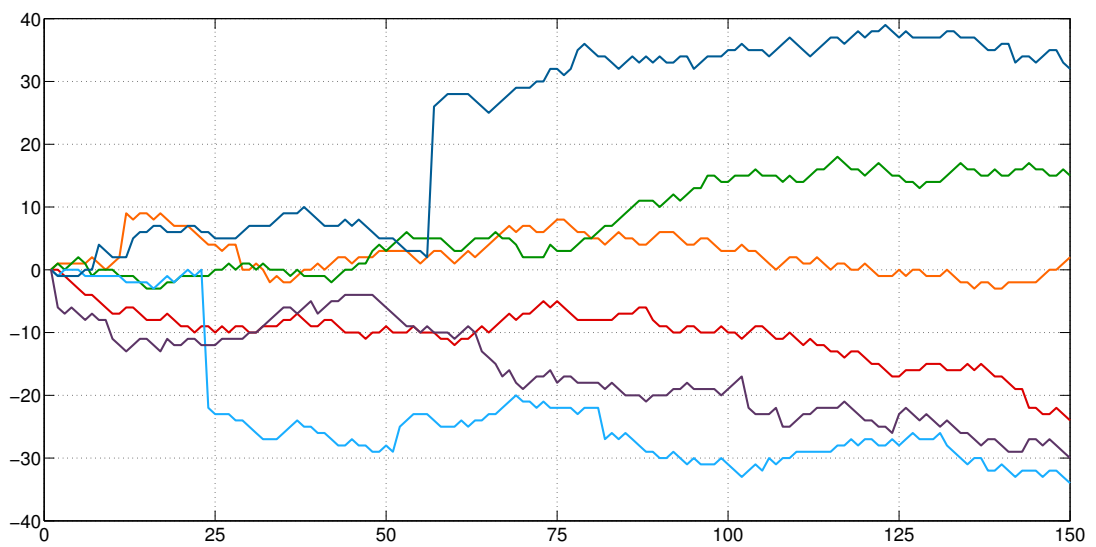


Рис. 2.17: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\theta = 0$, $A_* = 0$, $B_* = 0.3$

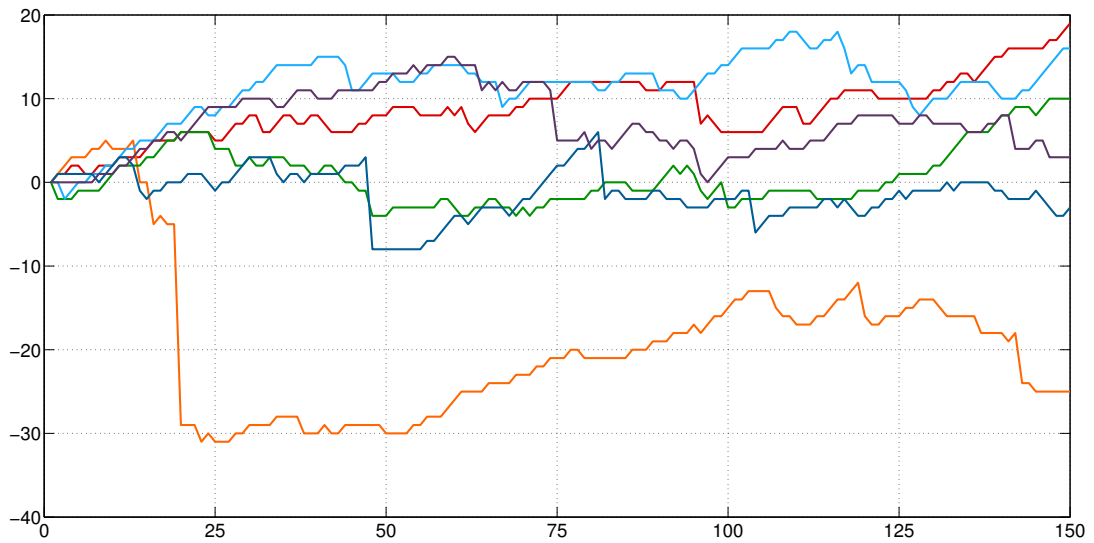


Рис. 2.18: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\theta = -0.5$, $A_* = 0$, $B_* = 0.3$

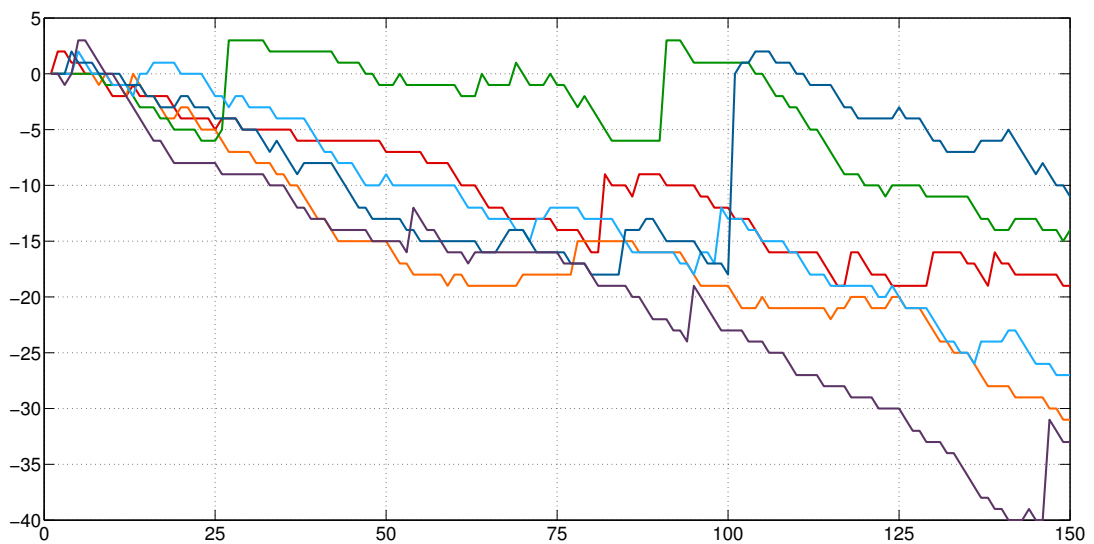


Рис. 2.19: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 1.25$, $\beta = 1$, $\theta = 0.75$, $A_* = 0$, $B_* = 0.3$

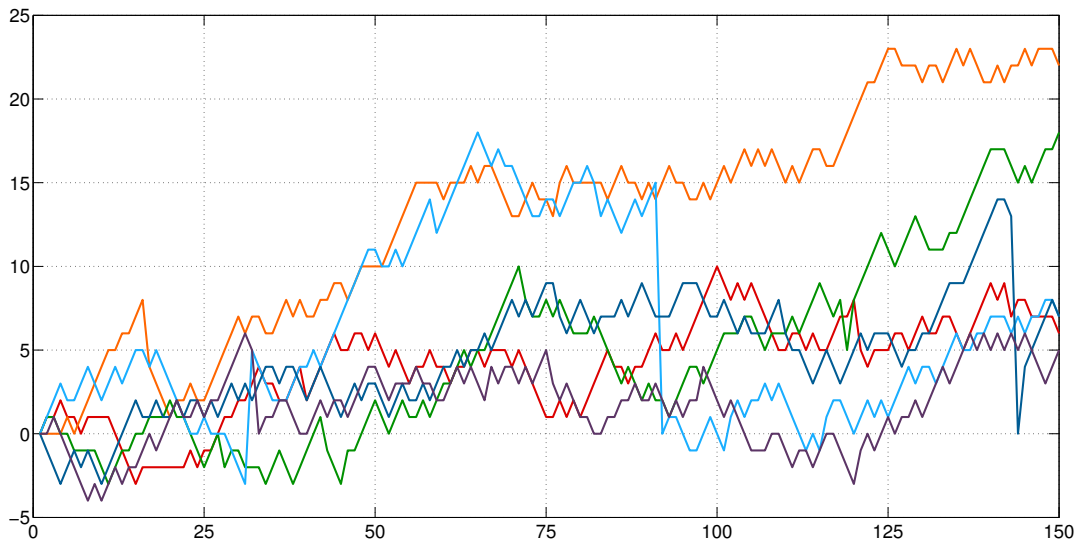


Рис. 2.20: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 2$, $\beta = 0.9$, $\theta = 0$, $A_* = 0.1$, $B_* = 0.3$

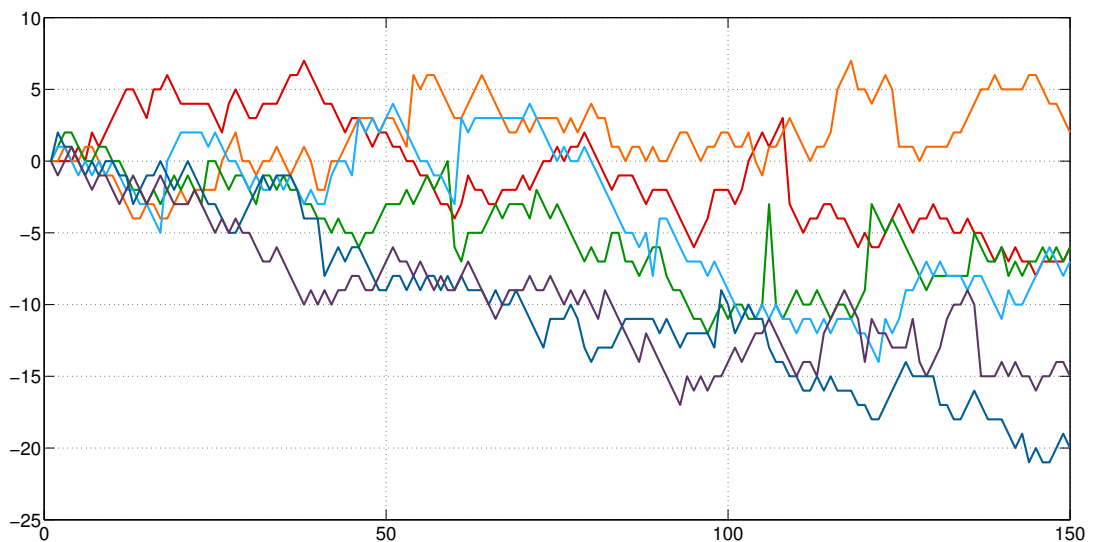


Рис. 2.21: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.9$, $\theta = 0$, $A_* = -0.1$, $B_* = 0.3$

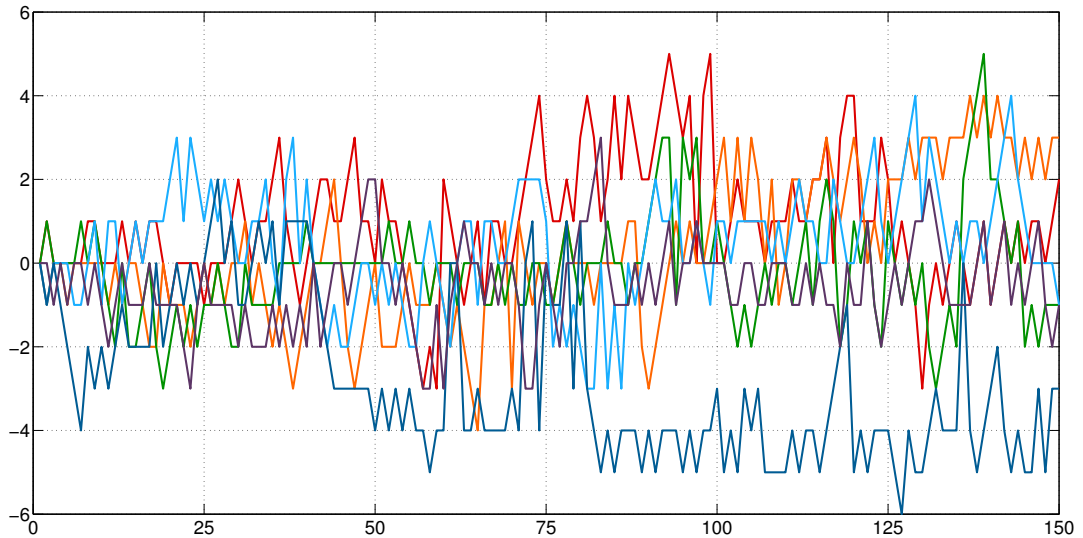


Рис. 2.22: Выборочные траектории случайного блуждания при $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$, $\theta = 0$, $A_* = 0$, $B_* = 0.2$

2.3 Основные результаты главы 2

Построен алгоритм моделирования траекторий случайного блуждания на детерминированном множестве Кантора, основанный на использовании цепей Маркова. Показано, что предложенный алгоритм может быть обобщен на случай регулярных фрактальных множеств, получаемых с помощью итерированных систем сжимающих отображений. Также реализован алгоритм построения выборочных траекторий случайного блуждания, порождаемого уравнением адвекции — диффузии дробного порядка.

Глава 3

Задача оценки параметров по наблюдаемой траектории временного ряда

3.1 Метод оценки параметров

Использование аппарата уравнений с дробными производными в контексте задачи статистического анализа нестационарных временных рядов возможно, разумеется, лишь в том случае, если предварительно будет предложена адекватная процедура оценки параметров этого уравнения по наблюдаемому временному ряду. Для обычного уравнения Фоккера — Планка и ассоциированного с ним стохастического уравнения в форме Ито задача оценки параметров хорошо исследована (см., например, [115, 116]). Методы же решения обратной задачи для уравнений с дробными производными, напротив, изучены в гораздо меньшей степени; здесь можно отметить лишь работы [117–119], посвященные реконструкции параметров уравнения диффузии с дробной производной Герасимова — Капуто по временному переменному.

Перед тем как описать собственно предлагаемый метод оценки параметров, необходимо отметить, что постановка корректных граничных условий для уравнения (2.8) на конечном отрезке может вызывать некоторые затруднения. Будем рассматривать уравнение

$$\left({}_t\mathcal{D}_{0+}^\beta p\right)(x, t) = -A \frac{\partial p}{\partial x} + B \left(c_+ ({}_x\mathcal{D}_{a+}^\alpha p)(x, t) + c_- ({}_x\mathcal{D}_{b-}^\alpha p)(x, t)\right), \quad x \in [a, b], t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) может быть записано в виде уравнения непрерывности

$$\left({}_t\mathcal{D}_{0+}^\beta p\right)(x, t) = -\frac{\partial j}{\partial x},$$

где плотность потока вероятности j имеет вид

$$j(x, t) = Ap(x, t) - B \cdot \begin{cases} c_+ ({}_xI_{a+}^{1-\alpha} p)(x, t) - c_- ({}_xI_{b-}^{1-\alpha} p)(x, t) & 0 < \alpha < 1, \\ c_+ \frac{\partial}{\partial x} ({}_xI_{a+}^{2-\alpha} p)(x, t) + c_- \frac{\partial}{\partial x} ({}_xI_{b-}^{2-\alpha} p)(x, t) & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для того чтобы решение уравнения (3.1) являлось функцией плотности некоторой случайной величины, оно, очевидно, должно сохранять нормировочное условие. Отсюда следует, что естественными граничными условиями в этом случае будут

$$j(a, t) = j(b, t) = 0. \quad (3.3)$$

Строго говоря, нормировочное условие будет сохранено и при выполнении более слабого требования

$$j(b, t) - j(a, t) = 0,$$

однако в контексте анализа временных рядов мы ограничимся лишь однородными условиями (3.3).

Поведение плотности потока на границах рассматриваемой области может быть весьма сложным. Предположим, что функция плотности $p(x, t)$ представима в окрестности точки $x = a$ в виде

$$p(x, t) = (x - a)^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{+\infty} h_k (x - a)^k, \quad h_0 \neq 0, \gamma > 0. \quad (3.4)$$

Тогда, повторяя рассуждения, приведшие к (1.25), при $0 < \alpha < 1$ получим, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} ({}_x I_{a+}^{1-\alpha} p)(x, t) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h_0 \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha)} (x - a)^{\gamma-\alpha} = \begin{cases} 0 & \gamma > \alpha, \\ h_0 \Gamma(\alpha) & \gamma = \alpha, \\ \infty & \gamma < \alpha. \end{cases}$$

Тогда равенство $j(a, t) = 0$ будет выполнено при условии

$$\begin{cases} ({}_x I_{b-}^{1-\alpha} p)(a, t) = 0 & \gamma > \alpha, \\ c_+ h_0 \Gamma(\alpha) = c_- ({}_x I_{b-}^{1-\alpha} p)(a, t) & \gamma = \alpha. \end{cases}$$

В окрестности точки $x = b$ также необходимо рассматривать разложение типа (3.4), приводящее к схожим по форме условиям.

Пусть теперь $1 < \alpha < 2$. Тогда

$$\begin{aligned} ({}_x I_{a+}^{2-\alpha} p)(x, t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h_k \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + k + 2 - \alpha)} (x - a)^{\gamma+k+1-\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{a+}^{2-\alpha} p)(x, t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h_k \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + k + 1 - \alpha)} (x - a)^{\gamma+k-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{a+}^{2-\alpha} p)(x, t) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h_0 \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha)} (x - a)^{\gamma-\alpha} = \begin{cases} 0 & \gamma > \alpha, \\ h_0 \Gamma(\alpha) & \gamma = \alpha, \\ \infty & \gamma < \alpha. \end{cases}$$

В этом случае однородное условие для плотности потока $j(a, t) = 0$ может быть сведено к

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{b-}^{2-\alpha} p)(x, t) \right|_{x=a} = 0 & \gamma > \alpha, \\ c_+ h_0 \Gamma(\alpha) = c_- \left. \frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{b-}^{2-\alpha} p)(x, t) \right|_{x=a} & \gamma = \alpha. \end{cases} \quad (3.5)$$

Таким образом, вопрос о существовании решений уравнения Фоккера — Планка дробного порядка в форме (3.1) на ограниченном отрезке с граничными условиями (3.3) остается открытым: класс функций, которому может принадлежать это решение, задается нетривиальными ограничениями на поведение функции в окрестности граничных точек и на значения дробных интегралов от нее. Отметим также, что решение (3.1) на ограниченном отрезке не существует в классе кусочно-постоянных функций, поскольку плотность потока вероятности

в этом случае расходится на границах отрезка (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой). По этой причине эволюция гистограммы эмпирических частот, являющейся самой распространенной оценкой функции плотности, не может быть описана с помощью уравнения (3.1) на конечном отрезке.

Вследствие этих причин непосредственное использование уравнений (2.8) или (3.1) в рамках задачи оценки параметров затруднительно. Переход к описанию эволюции моментов распределения в данном случае также не может быть достаточно обоснован, поскольку само существование моментов (для распределений с неограниченным носителем) зависит от асимптотического поведения плотностей. С другой стороны, для любого распределения существуют корректно вычисляемые квантили (медиана, квартили, децили и т.п.), поэтому один из возможных подходов к описанию эволюции функции распределения состоит в описании эволюции его квантилей. Мы ограничимся рассмотрением случая $\beta = 1$.

Пусть $Q_\gamma(t)$ — квантиль порядка γ распределения с плотностью $p(x, t)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} p(x, t) dx = \gamma, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (3.6)$$

Дифференцируя (3.6) по t , получим

$$\frac{dQ_\gamma}{dt} p(Q_\gamma(t), t) + \int_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} \frac{\partial p}{\partial t} dx = 0,$$

откуда, в предположении, что эволюция функции плотности описывается уравнением непрерывности (3.3) с $\beta = 1$, приходим к

$$\frac{dQ_\gamma}{dt} p(Q_\gamma(t), t) - \int_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} \frac{\partial j}{\partial x} dx = \frac{dQ_\gamma}{dt} p(Q_\gamma(t), t) - j(Q_\gamma(t), t) = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) справедливо для распределений с любым носителем. Отметим, что в случае $\alpha = 2$ можно получить для квантилей уравнение в частных производных по переменным t и γ , которое в некотором смысле двойственно к исходному уравнению Фоккера — Планка; вывод этого уравнения и некоторые его приложения подробно описаны в [120].

Уравнение (3.7) незамкнуто в том смысле, что оно не может быть решено относительно Q_γ , если неизвестна функция плотности p . Однако, если считать, что это уравнение описывает эволюцию эмпирических характеристик временного ряда, то указанное обстоятельство не является препятствием: вместо неизвестных функции плотности p и плотности потока вероятности j можно использовать их статистические оценки, построенные по наблюдаемым данным.

Конвективный коэффициент $A(x, t)$ в рамках кинетического подхода к описанию нестационарных временных рядов должен описывать «скорость дрейфа» эмпирических частот в соседних классовых интервалах (или аналогичную характеристику в случае непрерывной оценки эмпирической плотности) с течением времени. В [9] было показано, что

$$A(x, t) p(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v p_2(x, v, t) dv, \quad (3.8)$$

где $p_2(x, v, t)$ — совместное распределение рассматриваемого временного ряда и его первых разностей. Следует подчеркнуть, что введение неоднородного конвективного коэффициента может привести к появлению отрицательных вероятностей при численном решении соответствующих уравнений. Наличие отрицательных вероятностей, однако, не является однозначным свидетельством некорректности модели, поскольку сами эмпирические вероятности здесь оцениваются с некоторой погрешностью — модель можно считать неадекватной лишь

в том случае, если сумма полученных отрицательных вероятностей по модулю превосходит эту погрешность.

После перехода к эмпирическим уравнениям эволюции квантилей процедура оценки параметров α , θ и B может быть реализована с помощью минимизации отклонения решений этих уравнений от реально наблюдаемых квантилей временного ряда — такой подход широко используется для реконструкции параметров динамических систем (см., например, [121, 122]). Целевая функция, подлежащая оптимизации, обычно выбирается в виде суммы квадратов отклонений, так что предлагаемая процедура сводится к нахождению оценок по методу наименьших квадратов:

$$(\alpha^*, \theta^*, B^*) = \arg \min_{(\alpha, \theta, B) \in \Omega} \rho(\alpha, \theta, B), \quad (3.9)$$

$$\rho(\alpha, \theta, B) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (q_{\gamma_k}(t+1) - Q_{\gamma_k}(t+1))^2}, \quad (3.10)$$

$$Q_{\gamma_k}(t+1) = q_{\gamma_k}(t) + \frac{\hat{j}(q_{\gamma_k}(t), t)}{\hat{p}(q_{\gamma_k}(t), t)} \quad (3.11)$$

Здесь q_{γ} — наблюдаемые значения квантилей; Q_{γ} — решения уравнений эволюции квантилей; $\hat{j}(x, t)$ — аппроксимация плотности потока вероятностей, получаемая после подстановки в выражение (3.2) оценки плотности распределения $\hat{p}(x, t)$; n — количество используемых в схеме квантилей. Все входящие в (3.10) оценки вычисляются по непересекающимся сегментам временного ряда длины L . В общем случае количество рассматриваемых в рамках этого метода квантилей n и их уровни γ_k могут быть любыми. Например, можно рассматривать схему с квантилями уровней 0.25, 0.5 и 0.75. Такой выбор может быть аргументирован тем, что $Q_{0.5}$ является медианой, которая, как известно, используется в качестве устойчивой оценки параметра положения, а разность $Q_{0.75} - Q_{0.25}$ (т.н. интерквартильный размах) — в качестве оценки параметра рассеяния.

Для решения экстремальной задачи (3.9) можно использовать различные численные методы; в настоящей работе был использован самый простой подход — исчерпывающий поиск. Такой выбор мотивирован тем, что гиперповерхность, соответствующая (3.10), имеет достаточно сложную геометрию (см. рис. 3.1), поэтому сложные методы оптимизации, которые требуют выпуклости или унимодальности целевой функции (например, градиентные), могут найти лишь локальный минимум.

Оценки функции плотности и плотности потока вероятности, входящие в (3.11), также могут быть построены различными способами. Как известно, простейшей оценкой функции плотности является гистограмма эмпирических частот, имеющая вид

$$\hat{p}(x, t) = \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\nu_k}{x_{k+1} - x_k} \mathbf{I}_{[x_k, x_{k+1})}(x), \quad (3.12)$$

где x_k — границы классовых интервалов, образующих разбиение области значений временного ряда в рассматриваемом сегменте, ν_k — количество точек временного ряда, попадающих в k -й классовой интервал с границами x_k и x_{k+1} . Аналогичная оценка может быть построена и для двухмерной функции плотности:

$$\hat{p}_2(x, v, t) = \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{k=1}^{m_2-1} \frac{\nu_{ik}}{(x_{i+1} - x_i)(v_{k+1} - v_k)} \mathbf{I}_{[x_i, x_{i+1})}(x) \mathbf{I}_{[v_k, v_{k+1})}(v). \quad (3.13)$$

Здесь ν_{ik} — количество точек двухмерного временного ряда, попавших в квадрат $[x_i, x_{i+1}) \times [v_k, v_{k+1})$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением гистограмм с равномерными разбиениями на классы интервалы, т.е. $x_{k+1} - x_k = \Delta_1$ и $v_{k+1} - v_k = \Delta_2$. Оценку плотности потока

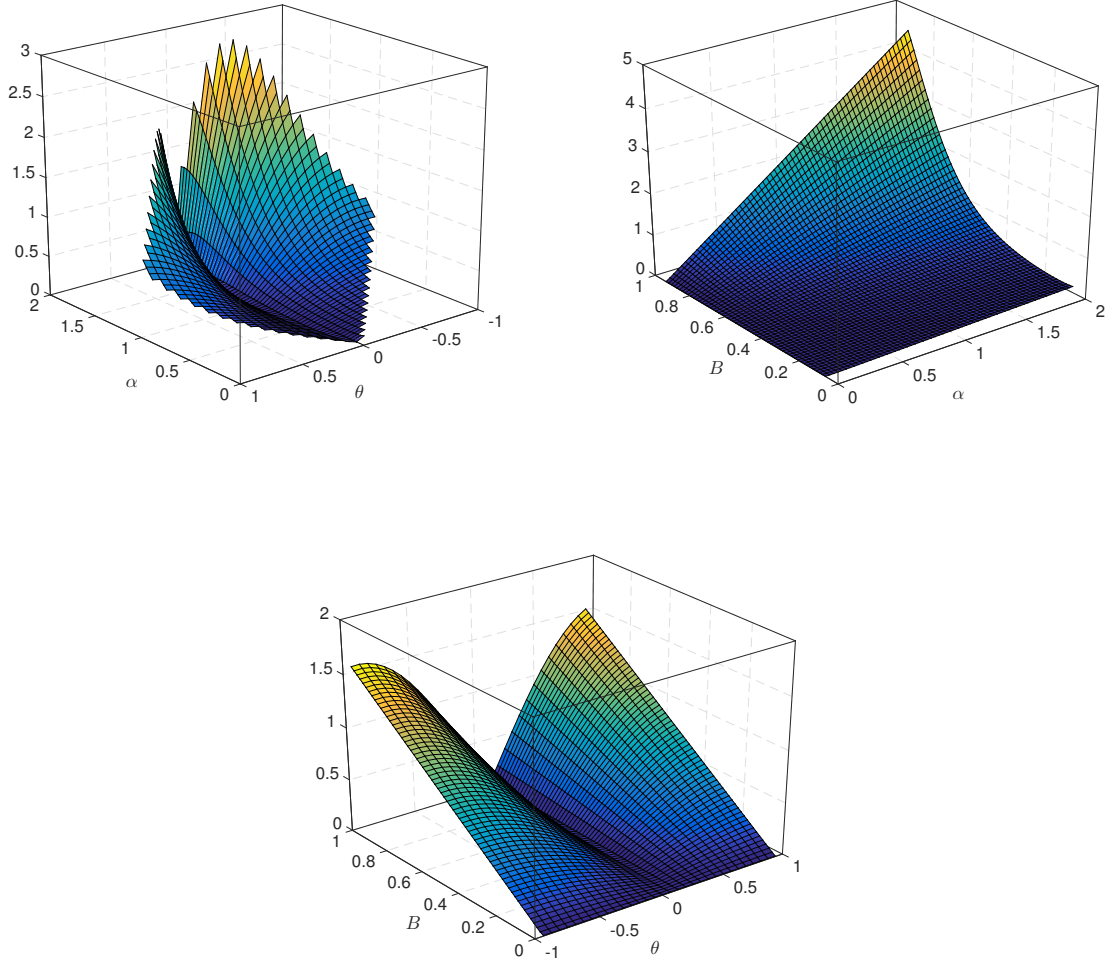


Рис. 3.1: Пример проекций целевой функции (3.10) на секции плоскости

вероятности можно получить, подставляя в его аналитическое выражение (3.12) и (3.13) и вычисляя интегралы в явном виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v \hat{p}_2(x, v, t) dv = \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{m_1-1} \mathbf{I}_{[x_i, x_{i+1})}(x) \sum_{k=1}^{m_2-1} \nu_{ik} \frac{v_k + v_{k+1}}{2},$$

$$({}_x I_{a+\hat{p}}^\sigma)(x, t) = \frac{1}{\Delta_1 \Gamma(\sigma + 1)} \left[\sum_{k=1}^s \nu_k [(x - x_k)^\sigma - (x - x_{k+1})^\sigma] + \nu_{s+1} (x - x_{s+1})^\sigma \right],$$

$$({}_x I_{b-\hat{p}}^\sigma)(x, t) = \frac{1}{\Delta_1 \Gamma(\sigma + 1)} \left[\nu_{s+1} (x_{s+2} - x)^\sigma + \sum_{k=s+2}^{m_1-1} \nu_k [(x_{k+1} - x)^\sigma - (x_k - x)^\sigma] \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{a+\hat{p}}^\sigma)(x, t) = \frac{1}{\Delta_1 \Gamma(\sigma)} \left[\sum_{k=1}^s \nu_k [(x - x_k)^{\sigma-1} - (x - x_{k+1})^{\sigma-1}] + \nu_{s+1} (x - x_{s+1})^{\sigma-1} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{b-\hat{p}}^\sigma)(x, t) = \frac{-1}{\Delta_1 \Gamma(\sigma)} \left[\nu_{s+1} (x_{s+2} - x)^{\sigma-1} + \sum_{k=s+2}^{m_1-1} \nu_k [(x_{k+1} - x)^{\sigma-1} - (x_k - x)^{\sigma-1}] \right],$$

где $x_{s+1} \leq x < x_{s+2}$. В первом выражении мы воспользовались очевидным равенством $(v_{k+1}^2 - v_k^2)/\Delta_2 = v_{k+1} + v_k$.

Оценка неизвестной функции плотности может быть также получена с помощью метода Розенблатта — Парзена, согласно которому

$$\hat{p}(x, t) = \frac{1}{Lh_1} \sum_{k=1}^L K_1 \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right), \quad (3.14)$$

где x_k — наблюдаемые значения временного ряда в сегменте длины L , h_1 — сглаживающий параметр, $K_1(x)$ — т.н. ядерная функция. В качестве ядерной функции, вообще говоря, можно использовать любую функцию плотности симметричного распределения с конечными начальными моментами. Статистические свойства оценок (3.14), вопросы выбора ядерных функций и оптимального значения сглаживающего параметра подробно исследованы (см., например, [123, 124] и цитированную там литературу). Оценка совместной плотности распределения строится таким же способом (заметим, что это не единственный возможный способ обобщения ядерных оценок на случай многомерных данных):

$$\hat{p}_2(x, v, t) = \frac{1}{Lh_1h_2} \sum_{k=1}^L K_1 \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right) K_2 \left(\frac{v - v_k}{h_2} \right), \quad (3.15)$$

причем ядерные функции и параметры сглаживания могут быть здесь различными. Возникающие после подстановки (3.14) и (3.15) в выражение для плотности потока вероятности интегралы и производные от них вычисляются в явном виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} v \hat{p}_2(x, v, t) dv &= \frac{1}{Lh_1} \sum_{k=1}^L v_k K_1 \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right), \\ ({}_x I_{a_+}^\sigma \hat{p})(x, t) &= \frac{h_1^{\sigma-1}}{L} \sum_{k=1}^L (I_{a_+}^\sigma K_1) \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right), \\ ({}_x I_{b-}^\sigma \hat{p})(x, t) &= \frac{h_1^{\sigma-1}}{L} \sum_{k=1}^L (I_{b-}^\sigma K_1) \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{a_+}^\sigma \hat{p})(x, t) &= \frac{h_1^{\sigma-2}}{L} \sum_{k=1}^L \frac{\partial}{\partial x} (I_{a_+}^\sigma K_1) \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} ({}_x I_{b-}^\sigma \hat{p})(x, t) &= \frac{h_1^{\sigma-2}}{L} \sum_{k=1}^L \frac{\partial}{\partial x} (I_{b-}^\sigma K_1) \left(\frac{x - x_k}{h_1} \right), \end{aligned}$$

где

$$a_k = \frac{a - x_k}{h_1}, \quad b_k = \frac{b - x_k}{h_1}.$$

В ряде случаев дробные интегралы от ядерных функций могут быть выражены в терминах элементарных функций, что позволяет получить достаточно простую оценку плотности потока вероятности. Например, такое вычисление возможно для полиномиальных ядерных функций, поскольку дробные интегралы в этом случае представляют собой сумму выражений вида (1.8). В качестве примера рассмотрим здесь т.н. ядерные функции Епанечникова:

$$K_1(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{I}_{[-1,1]}(x),$$

$$(I_{a+}^{\sigma} K_1)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{3(x+1)^{\sigma+1}}{2\Gamma(3+\sigma)} [-(x+1) + 2 + \sigma] & -1 < x \leq 1, \\ 3 \cdot 2^{\sigma} \sigma / \Gamma(3 + \sigma) & x > 1, \end{cases}$$

$$(I_{b-}^{\sigma} K_1)(x) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{\sigma} \sigma / \Gamma(3 + \sigma) & x \leq -1, \\ \frac{3(1-x)^{\sigma+1}}{2\Gamma(3+\sigma)} [-(1-x) + 2 + \sigma] & -1 < x \leq 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

3.2 Результаты вычислений

Предложенный в предыдущем разделе метод оценки параметров был применен к нескольким временным рядам: были проанализированы временные ряды, образованные котировками акций крупнейших российских коопераций и некоторыми другими финансовыми инструментами, а также траектории фрактального броуновского движения. Из исходных рядов были получены временные ряды конечных разностей, к которым затем применялось линейное преобразование

$$x_k = \frac{x_k^* - \min\{x_k^*\}}{\max\{x_k^*\} - \min\{x_k^*\}}.$$

Применение таких преобразований объясняется следующим: операция взятия конечных разностей в большинстве случаев позволяет получить ряд, значения которого можно рассматривать как попарно независимые (что необходимо для применения большинства методов статистического анализа); нормализация же необходима потому, что разные временные ряды измеряются в разных масштабах.

На рис. 3.2 показаны полученные оценки параметров при $L = 750$ для траектории фрактального броуновского движения с $\mathbb{H} = 0.8$ в схеме с тремя квартилями. Как известно (см., например, [125]), фрактальное броуновское движение $B_{\mathbb{H}}(t)$ представляет собой гауссовский случайный процесс со стационарными приращениями, нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^{2\mathbb{H}} + |s|^{2\mathbb{H}} - |t - s|^{2\mathbb{H}}),$$

где $\mathbb{H} \in [0, 1]$ — показатель Херста. Этот случайный процесс является статистически самоподобным, т.е. выполняется

$$B_{\mathbb{H}}(at) = a^{\mathbb{H}} B_{\mathbb{H}}(t), a > 0,$$

причем равенство понимается в смысле совпадения конечномерных функций распределения. Существует явное представление для фрактального броуновского движения через стохастические интегралы:

$$B_{\mathbb{H}}(t) = c \left(\int_{-\infty}^0 [(t-s)^{\mathbb{H}-1/2} - (-s)^{\mathbb{H}-1/2}] dW_s + \int_0^t (t-s)^{\mathbb{H}-1/2} dW_s \right),$$

где c — нормировочная постоянная, dW_s — стохастический дифференциал стандартного винеровского процесса. Отметим, что структура подынтегральных выражений в этом представлении весьма схожа с дробными интегралами Римана — Лиувилля.

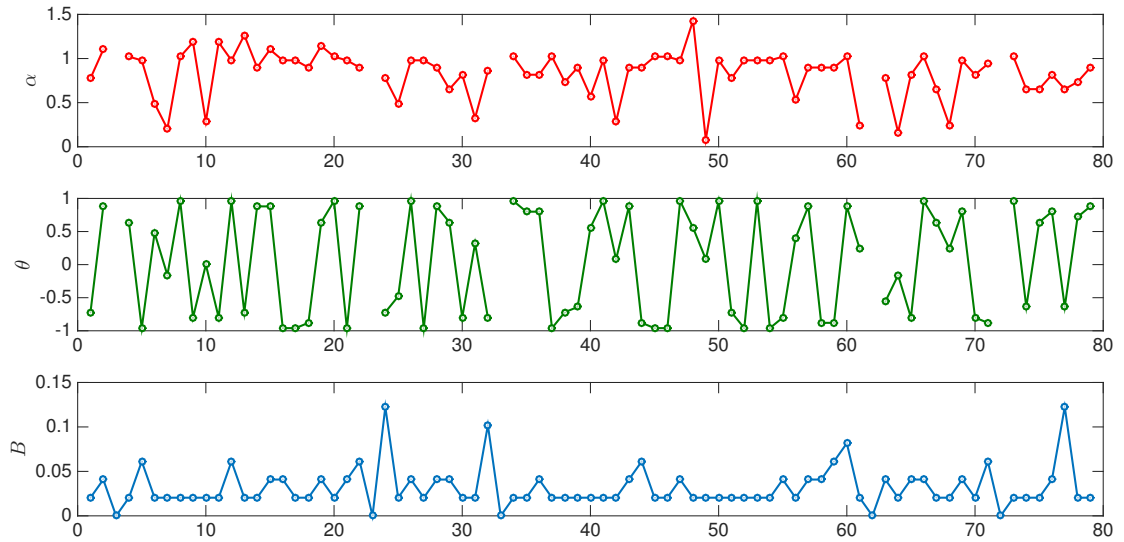


Рис. 3.2: Оценки параметров для фрактального броуновского движения с $\mathbb{H} = 0.8$; схема с тремя квартилями

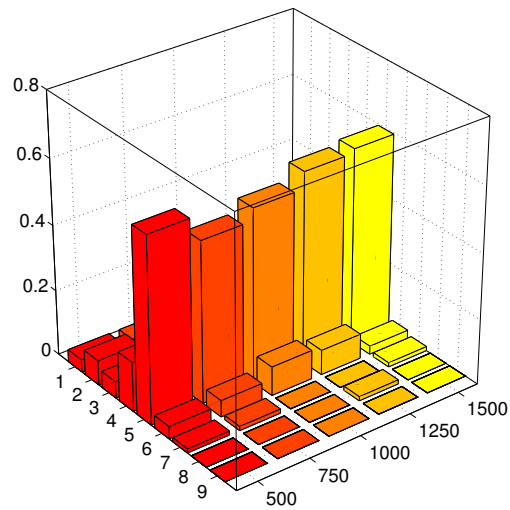


Рис. 3.3: Распределения оценок параметра α по 9 классовым интервалам при различных длинах сегмента L для фрактального броуновского движения с $\mathbb{H} = 0.8$

Хорошо видно, что оценки параметра α тесно группируются вблизи назначенного значения показателя Херста для этого ряда. Такой же эффект наблюдался и при других значениях \mathbb{H} или управляющих параметров алгоритма построения оценок. Например, на рис. 3.3 показаны гистограммы оценок α для того же временного ряда при различных L ; во всех случаях большая часть полученных значений сосредоточена в классом интервале, содержащем 0.8. Такое поведение можно считать косвенной верификацией предложенной численной процедуры. Необходимо, однако, отметить, что рассматриваемый метод оценки не может заменить стандартные методы расчета показателя Херста (например, R/S метод), поскольку значения

Ш принадлежат отрезку $[0, 1]$; в то время как оценка α может лежать в области $(0, 2)$.

На рис. 3.4–3.7 приведены результаты для временных рядов котировок (с минутными интервалами за период с 8 января по 3 мая 2013 г.) акций нескольких российских корпораций с наибольшей капитализацией, используемых при расчете индекса РТС. Использовалась схема с тремя квартилями при $L = 750$. Как хорошо видно на рисунках, качественное поведение полученных оценок для разных рядов такого типа очень похоже. Заметим, что в некоторых случаях для некоторых сегментов оценкой параметра B было нулевое значение. Это означает, что наименьшее отклонение от наблюдаемых значений достигается в том случае, если эволюция квантилей описывается уравнением типа Лиувилля, в котором диффузионное слагаемое отсутствует. Необходимо также подчеркнуть, что во всех рассмотренных примерах оценка параметра α редко приближалась к 2, откуда можно сделать вывод, что обычное уравнение диффузии (с $\alpha = 2$) описывает рассмотренные ряды несколько хуже. На рис. 3.5 и 3.7 показана точность идентификации квантилей с помощью предложенного метода; для сравнения показана также точность определения квантилей в модели авторегрессии и скользящего среднего ARMA(2, 1), коэффициенты которой также оценивались по временному ряду. Видно, что в целом точность предложенного метода не хуже, чем у стандартного подхода ARMA, а во многих случаях заметно лучше. На рис. 3.8 показаны аналогичные оценки (схема с тремя квартилями) для временного ряда, образованного значениями фондового индекса DAX (с минутными интервалами). Для этого ряда качественное поведение оценок заметно отличается от рис. 3.4 и 3.6; в частности, среднее значение оценки α здесь существенно больше.

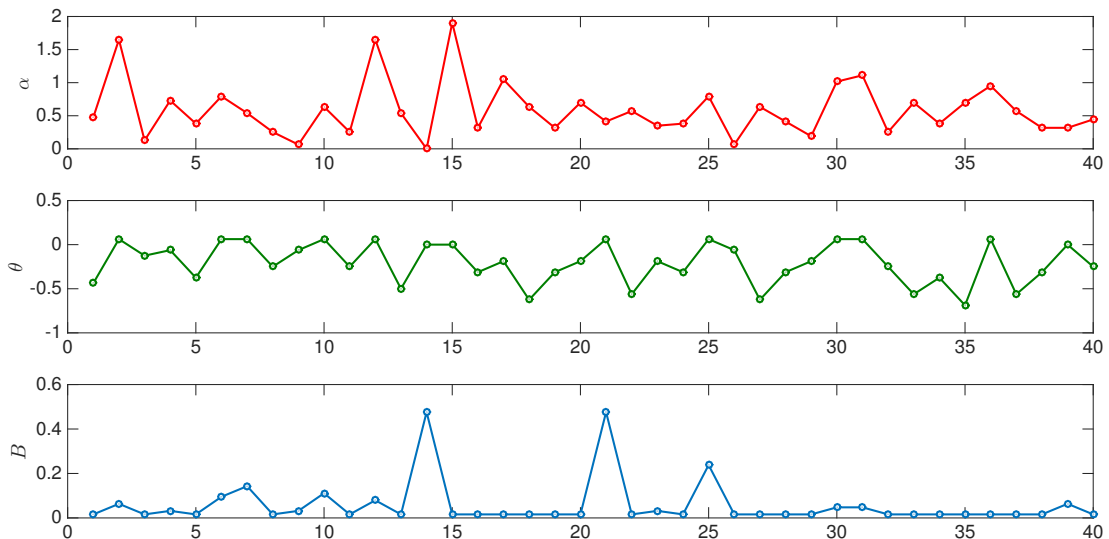


Рис. 3.4: Оценки параметров для котировок ОАО Новатэк при $L = 750$

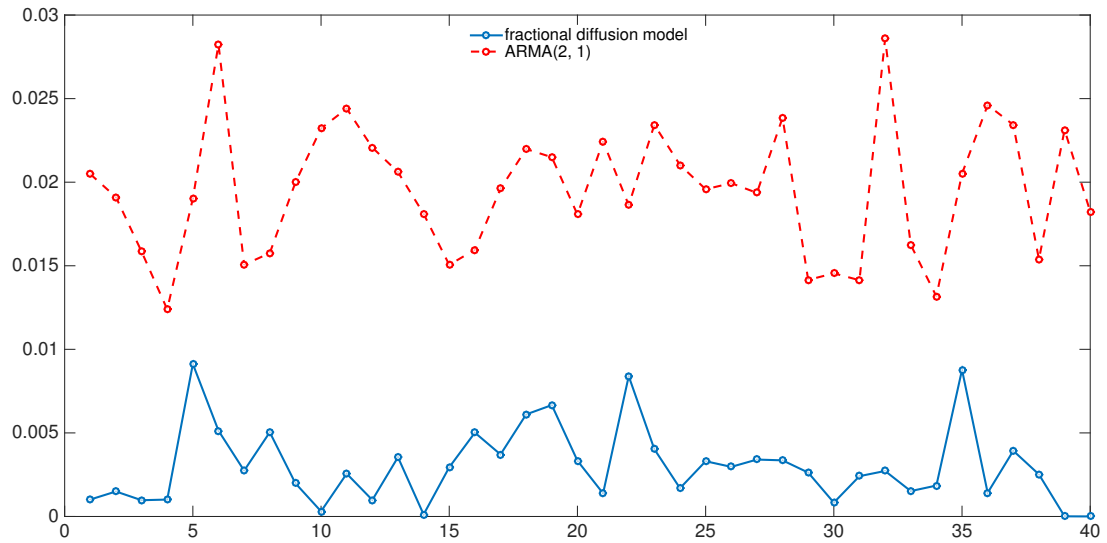


Рис. 3.5: Относительная погрешность идентификации квантилей для котировок ОАО Новатэк

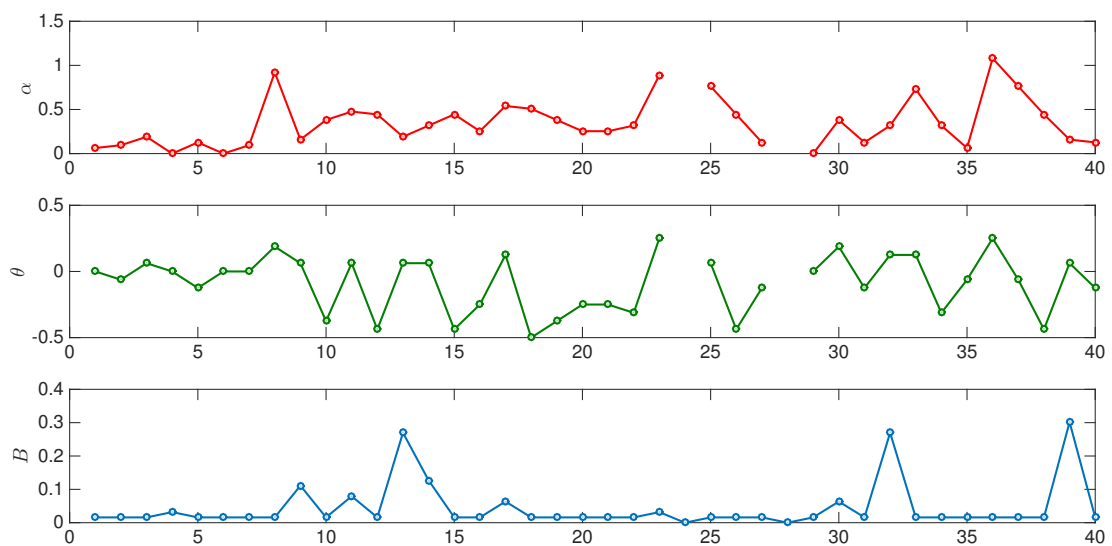


Рис. 3.6: Оценки параметров для котировок ПАО Сбербанк России при $L = 750$

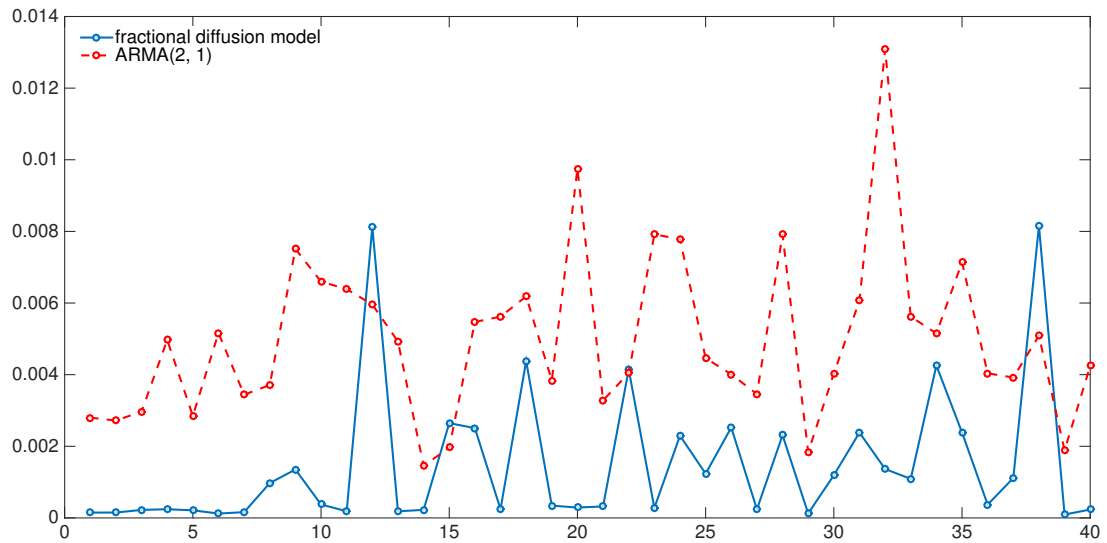


Рис. 3.7: Относительная точность погрешность идентификации квантилей для котировок ПАО Сбербанк

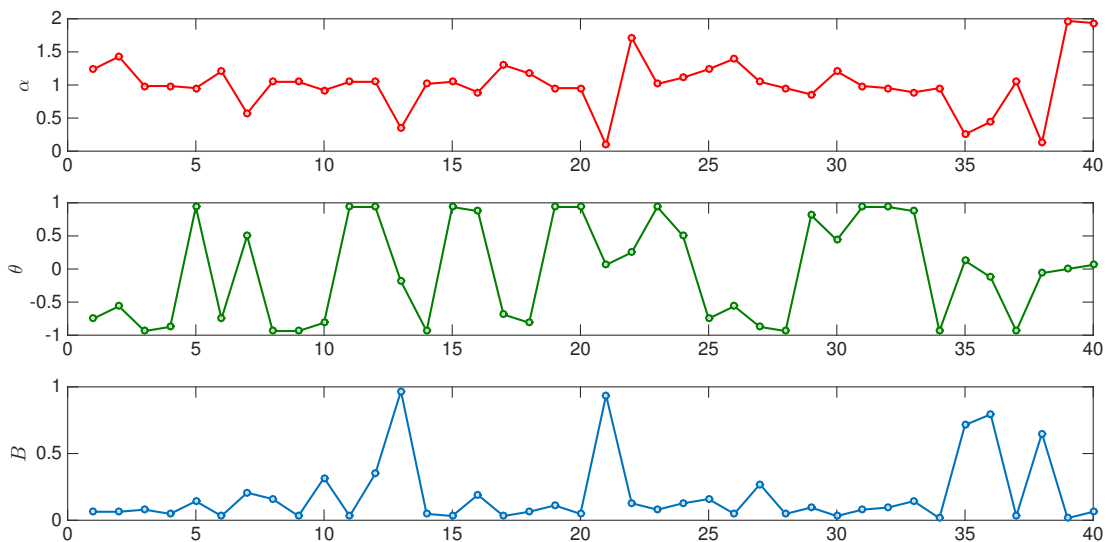


Рис. 3.8: Оценки параметров для значений индекса DAX при $L = 750$

3.3 Основные результаты главы 3

Предложен алгоритм идентификации параметров эволюционной модели временного ряда, основанной на уравнении адвекции — диффузии дробного порядка. Проведена верификация вычислительной процедуры на примере траекторий фрактального броуновского движения, показано хорошее совпадение результатов с ожидаемыми. Приведены примеры применения алгоритма к реальным временным рядам. Точность идентификации квантилей, достигаемая предложенным алгоритмом, в большинстве случаев лучше, чем для стандартной модели ARMA.

Заключение

Проведенные исследования позволяют сформулировать основные результаты в рамках поставленных задач.

Было показано, что функции распределения случайных величин могут быть представлены с помощью односторонних интегралов Римана — Лиувилля, однако в этом случае требуется наложить некоторые дополнительные ограничения на класс допустимых функций плотности, связанные с характерными свойствами дробных интегралов. В общем случае односторонние интегралы Римана — Лиувилля как функции верхнего предела не являются монотонными, и потому не могут определять меру Лебега — Стильбеса. Даже с учетом упомянутых дополнительных требований представление распределений в виде дробных интегралов порождает ряд эффектов (наличие отрицательных значений, неоднозначность соответствия, невозможность нулевых значений на обоих концах отрезка), приводящих к нецелесообразности использования такой конструкции в задачах анализа временных рядов.

В работе была предложена схема численной реализации случайного блуждания на регулярных фрактальных множествах, которые могут быть описаны с помощью систем итерированных сжимающих отображений. Основным достоинством развитого метода является его простота: получение выборочных траекторий соответствующего случайного блуждания основано на случайных перестановках некоторого количества символов, управляемых конечными цепями Маркова.

В качестве основного уравнения эволюционной модели дробного порядка было выбрано уравнение адвекции — диффузии (2.8). Непосредственное решение этого уравнения требует корректной постановки граничных условий. Было показано, что на ограниченном отрезке этот вопрос весьма сложен: требования сохранения неотрицательности и нормировочного условия (необходимые для того, чтобы решение являлось функцией плотности) налагают нетривиальные ограничения на поведение решения и дробных интегралов от него в окрестности граничных точек.

Предложенный метод описания эволюции выборочных квантилей позволил обойти затруднения, связанные с постановкой начально-краевой задачи для этого уравнения. Переход к описанию распределения в терминах квантилей удобен и тем, что квантили, в отличие от моментов, определены для любого распределения вне зависимости от характера его асимптотического поведения и формы его носителя.

Описанный в работе метод оценки параметров был применен к нескольким временным рядам. Было показано, что точность аппроксимации квантилей, на основе которой выполняется реконструкция параметров, достаточно высока и в ряде случаев лучше, чем в стандартной модели ARMA. Из результатов вычислений следует, что разным временным рядам может соответствовать разное качественное поведение оценок параметров.

Таким образом, развитый метод описания эволюции нестационарных временных рядов получил математическое обоснование и имеет практическую значимость.

Приложение. Некоторые специальные функции

В данном разделе будут приведены определения и некоторые свойства специальных функций, использовавшихся в тексте.

Функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяется степенным рядом* [24, 126]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (\text{A.1})$$

и представляет собой целую функцию порядка $|\operatorname{Re} \alpha|^{-1}$ первого типа. В некоторых частных случаях функция Миттаг-Леффлера может быть выражена через элементарные функции:

$$E_{1,0}(z) = e^z, \quad E_{2,0}(z) = \operatorname{ch} \sqrt{z}, \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_{2,2}(z) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Опираясь на определение (A.1), можно показать, что

$$\frac{d^n}{dz^n} E_{\alpha,\beta}(z) = n! E_{\alpha,\beta+\alpha n}^{n+1}(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Справедливо интегральное представление

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{t^{\alpha-\beta} e^t}{t^\alpha - z} dt, \quad (\text{A.2})$$

где контур интегрирования \mathcal{C} представляет собой петлю, которая начинается и заканчивается в точке $-\infty$ и обходит круг $|t| \leq |z|^{1/\alpha}$ в положительном направлении, т.е. $|\arg t| \leq \pi$. Отметим, что в (A.2) выбирается главное значение функции t^α . При $\alpha > 0$ и $|\arg z| < \pi$ функция Миттаг-Леффлера также может быть представлена в виде интеграла Меллина — Барнса

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s} ds,$$

где контур интегрирования оставляет полюса функции $\Gamma(s)$ слева, а функции $\Gamma(1-s)$ — справа.

Известно соотношение [24, 27]

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z) dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

приводящее, в частности, к следующему результату для преобразования Лапласа функции $E_\alpha(z)$:

$$\mathcal{L}[E_\alpha(z^\alpha), z] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (\text{A.3})$$

*Иногда собственно функцией Миттаг-Леффлера называют $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$, а $E_{\alpha,\beta}(z)$ называют функцией типа Миттаг-Леффлера.

Функцией Райта $\phi(\alpha, \beta, z)$ называется степенной ряд [24, 126]

$$\phi(\alpha, \beta, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{A.4})$$

Если $\alpha > -1$, этот ряд сходится абсолютно для всех $z \in \mathbb{C}$, в то время как при $\alpha = -1$ он сходится в круге $|z| < 1$. Функции Райта в некоторых случаях могут быть выражены через элементарные или другие специальные функции:

$$\phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -z\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{z^2/4}, \quad \phi\left(1, \nu + 1, -\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z), \quad \phi\left(1, \nu + 1, \frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu I_\nu(z).$$

Интегральное представление Меллина – Барнса для функции Райта имеет вид

$$\phi(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^{-s} ds,$$

где контур интегрирования \mathcal{C} оставляет все полюса функции $\Gamma(s)$ слева. Для преобразования Лапласа функции Райта справедливо

$$L[\phi(\alpha, \beta, z), z] = \frac{1}{s} E_{\alpha, \beta} \left(\frac{1}{s} \right), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha > -1.$$

Пусть m, n, p и q – целые числа, причем $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$. H -функция Фокса определяется следующим образом [24, 127]:

$$H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), (a_2, A_2) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} h(s) z^{-s} ds, \quad (\text{A.5})$$

где

$$h(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s)}. \quad (\text{A.6})$$

Коэффициенты a_j, A_j, b_j и B_j должны быть подобраны таким образом, чтобы

$$A_i(b_j + k) \neq B_j(a_i - r - 1), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пустое произведение в (A.6), если оно возникает, полагается равным единице. Интеграл в (A.5) сходится при выполнении одного из условий:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{L}_0, \quad a^* > 0, \quad |\arg z| < a^* \pi / 2, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_0, \quad a^* \geq 0, \quad |\arg z| = a^* \pi / 2, \quad \gamma \Delta < -\operatorname{Re} \mu, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_-, \quad \Delta > 0, \quad z \neq 0, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_-, \quad \Delta = 0, \quad 0 < |z| < \beta, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_-, \quad \Delta = 0, \quad a^* \geq 0, \quad |z| = \beta, \quad \operatorname{Re} \mu < 0, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_+, \quad \Delta < 0, \quad z \neq 0, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_+, \quad \Delta = 0, \quad |z| > \beta, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{L}_+, \quad \Delta = 0, \quad a^* \geq 0, \quad |z| = \beta, \quad \operatorname{Re} \mu < 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a^* &= \sum_{j=1}^n A_j - \sum_{j=n+1}^p A_j + \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{j=m+1}^q B_j, \\ \beta &= \prod_{j=1}^p A_j^{-A_j} \prod_{j=1}^q B_j^{B_j}, \quad \gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{Re} s, \\ \Delta &= \sum_{j=1}^q B_j - \sum_{j=1}^p A_j, \quad \mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j + \frac{p-q}{2} + 1. \end{aligned}$$

Контур \mathcal{L}_- (\mathcal{L}_+) представляет собой левую (правую) петлю, которая расположена в некоторой горизонтальной полосе, начинается в точке $-\infty + i\phi_1$ ($+\infty + i\phi_1$), оставляет все полюса функции $\Gamma(b_j + B_j s)$, $j = 1, \dots, m$ слева от контура, а функции $\Gamma(1 - a_j - A_j s)$, $j = 1, \dots, n$ — справа, и оканчивается в точке $-\infty + i\phi_2$ ($+\infty + i\phi_2$), где $\phi_1 < \phi_2$. Контур \mathcal{L}_0 начинается в точке $\gamma - i\infty$ и оканчивается в $\gamma + i\infty$, разделяя полюса так же, как и \mathcal{L}_\pm .

H -функция симметрична относительно пар $(a_1, A_1), \dots, (a_n, A_n)$, $(a_{n+1}, A_{n+1}), \dots, (a_p, A_p)$, $(b_1, B_1), \dots, (b_m, B_m)$ и $(b_{m+1}, B_{m+1}), \dots, (b_q, B_q)$ в отдельности. В общем случае выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}), (a_1, A_1) \end{array} \right. \right] &= H_{p-1, q-1}^{m, n-1} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_2, A_2) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}) \end{array} \right. \right], \\ H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), (a_2, A_2) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] &= H_{qp}^{mn} \left[\frac{1}{z} \left| \begin{array}{c} (1 - b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \\ (1 - a_1, A_1), \dots, (1 - a_p, A_p) \end{array} \right. \right], \\ z^\alpha H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] &= H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1 + \alpha A_1, A_1), \dots, (a_p + \alpha A_p, A_p) \\ (b_1 + \alpha B_1, B_1), \dots, (b_q + \alpha B_q, B_q) \end{array} \right. \right] \end{aligned}$$

Дифференцирование H -функции подчиняется соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k} H_{pq}^{mn} \left[(cz + d)^\alpha \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] &= \\ &= \left(\frac{c}{cz + d} \right)^k H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[(cz + d)^\alpha \left| \begin{array}{c} (0, \alpha), (a_1, A_1) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q), (k, \alpha) \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Многие элементарные и специальные функции могут быть представлены в виде функций Фокса. Так, H -функция Фокса связана с G -функцией Мейера соотношением

$$H_{pq}^{mn} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, 1), (a_2, 1) \dots (a_p, 1) \\ (b_1, 1), (b_2, 1), \dots, (b_q, 1) \end{array} \right. \right] = G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{array}{c} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{array} \right. \right),$$

а через последнюю, как известно, могут быть выражены почти все специальные функции, используемые в прикладных задачах [127]. Отметим также представления [24]

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(z) &= H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{array}{c} (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right], \\ \phi(\alpha, \beta, z) &= H_{0,2}^{1,0} \left[-z \left| \begin{array}{c} (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Литература

- [1] Канторович Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. — 2002. — Т. 1. — С. 85–116.
- [2] Montgomery D. C., Hennings C. L., Kulachi M. Introduction to time series analysis and forecasting. — Hoboken : John Wiley & Sons, 2008. — 455 p.
- [3] Kirchgässner G., Wolter J. Introduction to modern time series analysis. — Berlin : Springer, 2007. — 274 p.
- [4] Priestley M. B. Non-linear and non-stationary time series analysis. — London : Academic Press, 1989. — 237 p.
- [5] Golyandina M., Zhigljavsky A. Singular spectrum analysis for time series. — Berlin : Springer, 2013. — 125 p.
- [6] Zhang G., Patuwo B. E., Hu M. Y. Forecasting with artificial neural networks: the state of the art // International Journal of Forecasting. — 1998. — Vol. 14, no. 1. — P. 35–62.
- [7] Horowitz J. L. The bootstrap // Handbook of econometrics / Ed. by J. J. Heckman, E. Leamer. — Amsterdam : North Holland Publishing, 2001. — Vol. 5. — P. 3159–3228.
- [8] Artificial neuron network models for forecasting and decision making / T. Hill, L. Marquez, M. O’Conner, W. Remus // International Journal of Forecasting. — 1994. — Vol. 10, no. 1. — P. 5–15.
- [9] Орлов Ю. Н., Осминин К. П. Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 384 с.
- [10] Босов А. Д., Орлов Ю. Н. Эмпирическое уравнение Фоккера — Планка для прогнозирования нестационарных временных рядов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2013. — № 3. — 30 с.
- [11] Бутковский А. Г., Постнов С. С., Постнова Е. А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 4. — С. 3–42.
- [12] Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. — 1948. — Т. 12. — С. 529–539.
- [13] Scott-Blair G. W. Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem // Journal of Scientific Instruments. — 1944. — Vol. 21, no. 5. — P. 80.
- [14] Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. — 1948. — Т. 12, № 1. — С. 53–62.

- [15] Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. — London : Imperial College Press, 2010. — 347 p.
- [16] Metzler R., Glöckle W., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 1994. — Vol. 211, no. 1. — P. 13–24.
- [17] Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach / R. Metzler, W. Schick, H. Kilian, T. F. Nonnenmacher // *The Journal of Chemical Physics*. — 1995. — Vol. 103, no. 16. — P. 7180–7186.
- [18] Metzler R., Barkai E., Klafter J. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium: a fractional Fokker–Planck equation approach // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 82, no. 18. — P. 3563–3567.
- [19] Hilfer R. Fractional diffusion based on Riemann–Liouville fractional derivatives // *The Journal of Physical Chemistry B*. — 2000. — Vol. 104, no. 16. — P. 3914–3917.
- [20] Strange kinetics / A. Blumen, J. Klafter, R. Hilfer, R. Metzler // *Chemical Physics*. — 2002. — Vol. 284, no. 1. — P. 15–31.
- [21] Podlubny I. Fractional differential equations. — San Diego : Academic Press, 1999. — 366 p.
- [22] Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order // *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* / Ed. by A. Carpinteri, F. Mainardi. — Wien : Springer, 1997. — P. 223–276.
- [23] Gorenflo R., Mainardi F. Power laws, random walks, and fractional diffusion processes as well scaled refinement limits // *Fractional Differentiation and its Applications* / Ed. by A. Méhauté, J. A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou, J. Sabatier. — 2005. — P. 497–516.
- [24] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 541 p.
- [25] Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // *Indiana University Mathematics Journal*. — 1981. — Vol. 30, no. 5. — P. 713–747.
- [26] Barnsley M. F., Demko S. Iterated function systems and the global construction of fractals // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1985. — Vol. 399, no. 1817. — P. 243–275.
- [27] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
- [28] Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — New York : John Wiley & Sons, 1993. — 366 p.
- [29] Oldham K. B., Spaniel J. The fractional calculus. — San Diego : Academic Press, 1974. — 240 p.
- [30] Ross B. The development of fractional calculus 1695–1900 // *Historia Mathematica*. — 1997. — Vol. 4. — P. 75–89.
- [31] Butzer P. L., Westphal U. An introduction to fractional calculus // *Applications of fractional calculus in physics* / Ed. by R. Hilfer. — Singapore : World Scientific, 2000. — P. 1–87.

- [32] Колмогоров А. Ф. С. Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 572 с.
- [33] Бейтмен Г., Эрдеи А. Таблицы интегральных преобразований. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. — Т. 2. — 328 с.
- [34] Discrete random walk models for space-time fractional diffusion / R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti et al. // *Chemical Physics*. — 2002. — Vol. 284, no. 1. — P. 521–541.
- [35] Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation // *Fractional Calculus & Applied Analysis*. — 2002. — Vol. 5, no. 4. — P. 367–386.
- [36] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т. 2. — 810 с.
- [37] Ben Adda F. Geometric interpretation of the fractional derivative // *Journal of Fractional Calculus*. — 1997. — Vol. 11. — P. 21–52.
- [38] Monsrefi-Torbati M., Hammond J. K. Physical and geometrical interpretation of fractional operators // *Journal of The Franklin Institute*. — 1998. — Vol. 335B, no. 6. — P. 1077–1086.
- [39] Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // *ТМФ*. — 1992. — Т. 90, № 3. — С. 354–368.
- [40] Rutman R. S. On the paper by R.R. Nigmatullin «Fractional integral and its physical interpretation» // *ТМФ*. — 1994. — Т. 100, № 3. — С. 476–478.
- [41] Svozil K. Quantum field theory on fractal space-time: a new regularization method // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1987. — Vol. 20, no. 12. — P. 3861–3875.
- [42] Liang Y. S., Su W. Y. The relationship between the fractal dimensions of a type of fractal functions and the order of their fractional calculus // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2007. — Vol. 34, no. 3. — P. 682–692.
- [43] Tatom F. B. The relationship between fractional calculus and fractals // *Fractals*. — 1995. — Vol. 3, no. 1. — P. 217–229.
- [44] Yao K., Su W. Y., Zhou S. P. The fractional derivatives of a fractal function // *Acta mathematica Sinica*. — 2006. — Vol. 22, no. 3. — P. 719–722.
- [45] Kilbas A. A., Trujillo J. J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems — I // *Applicable Analysis*. — 2001. — Vol. 78, no. 1-2. — P. 153–192.
- [46] Kilbas A. A., Trujillo J. J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems — II // *Applicable Analysis*. — 2002. — Vol. 81, no. 2. — P. 435–493.
- [47] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
- [48] How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system? / J. Sabatier, M. Merveillaut, R. Malti, A. Oustaloup // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2010. — Vol. 15, no. 5. — P. 1318–1326.

- [49] Mainardi F. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics // *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* / Ed. by A. Carpinteri, F. Mainardi. — Wien : Springer, 1997. — P. 291–348.
- [50] Torvik P. J., Bagley R. L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials // *Journal of Applied Mechanics*. — 1984. — Vol. 51, no. 2. — P. 294–298.
- [51] Bagley R. L., Torvik P. J. On the fractional calculus of viscoelastic behavior // *Journal of Rheology*. — 1986. — Vol. 30. — P. 133–155.
- [52] Schiessel H., Friedrich C., Blumen A. Applications to problems in polymer physics and rheology // *Applicationa of fractional calculus in physics* / Ed. by R. Hilfer. — Singapore : World Scientific, 2000. — P. 331–376.
- [53] Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. — 2001. — Vol. 4, no. 2. — P. 153–192.
- [54] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics reports*. — 2000. — Vol. 339, no. 1. — P. 1–77.
- [55] Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2004. — Vol. 37, no. 31.
- [56] Giona M., Roman H. E. Fractional diffusion equation on fractals: One-dimensional case and asymptotic behaviour // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1992. — Vol. 25, no. 8. — P. 2093–2105.
- [57] Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation // *Waves and stability in continuous media* / Ed. by S. Ruggeri, T. Rionero. — Singapore : World Scientific, 1993. — P. 329–333.
- [58] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematics Letters*. — 1996. — Vol. 9, no. 6. — P. 23–28.
- [59] Fujita Y. Integro-differential equations which interpolates the heat and the wave equation // *Osaka Journal of Mathematics*. — 1990. — Vol. 27, no. 2. — P. 309–321.
- [60] Schneider W. R. Fractional diffusion // *Dynamics and stochastic processes*. — Lisbon : Springer, 1988. — Vol. 355. — P. 276–286.
- [61] Schneider W. R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equation // *Journal of Mathematical Physics*. — 1989. — Vol. 30, no. 1. — P. 134–144.
- [62] Wyss W. The fractional diffusion equation // *Journal of Mathematical Physics*. — 1986. — Vol. 27, no. 11. — P. 2782–2785.
- [63] Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics // *Nature*. — 1993. — Vol. 363, no. 6424. — P. 13–37.
- [64] Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *УФН*. — 2004. — Т. 174, № 8. — С. 809–852.

- [65] Giona M., Roman H. E. Fractional diffusion equation on fractals: three-dimensional case and scattering function // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1992. — Vol. 25, no. 8. — P. 2107–2117.
- [66] Gorenflo R., Mainardi F. Probability distributions and continuous time random walk // *Processes with long range correlations* / Ed. by G. Rangarajan, M. Ding. — Berlin : Springer, 2003. — P. 148–166.
- [67] Hughes B. D. *Random walks and random environments*. — Oxford : Clarendon Press, 1995. — Vol. 1. — 652 p.
- [68] Fractional Fokker–Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises / D. Schertzer, M. Larchevêque, J. Duan et al. // *Journal of Mathematical Physics*. — 2001. — Vol. 42. — P. 200–212.
- [69] Ширяев А. Н. *Вероятность*. — М. : Наука, 1989. — 581 с.
- [70] Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. *Chance and Stability: Stable distributions and their applications*. — Zeist : VSP, 1999.
- [71] Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*. — М. : Мир, 2000. — 208 с.
- [72] Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker–Planck equation / V. V. Yanovsky, A. V. Chechkin, D. Schertzer, A. V. Tur // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2000. — Vol. 282, no. 1. — P. 13–34.
- [73] Westerlund S. Dead matter has memory! // *Physica Scripta*. — 1991. — Vol. 43, no. 2. — P. 174–179.
- [74] Вольтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений*. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
- [75] Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. — М. : Наука, 1977. — 384 с.
- [76] Hilfer R. Fractional time evolution // *Applicationa of fractional calculus in physics* / Ed. by R. Hilfer. — Singapore : World Scientific, 2000. — P. 88–131.
- [77] Westphal U. Fractional powers of infinitesimal generators of semigroups // *Applicationa of fractional calculus in physics* / Ed. by R. Hilfer. — Singapore : World Sientific, 2000. — P. 132–171.
- [78] Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с.
- [79] Nonnenmacher T. F., Metzler R. Applications of fractional calculus techniques to problems in biology // *Applicationa of fractional calculus in physics* / Ed. by R. Hilfer. — Singapore : World Scientific, 2000. — P. 377–428.
- [80] Васильев В. В., Симак Л. А. *Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем*. — Киев : НАН Украины, 2008. — 256 с.
- [81] West B., Bologna M., Grigolini P. *Physics of fractal operators*. — New York : Springer, 2003. — 359 с.

- [82] Das S. Functional fractional calculus for system identification and controls. — Berlin : Springer, 2008. — 239 p.
- [83] Jumarie G. Fractional Euler's integral of first and second kinds. Application to fractional Hermit's polynomials and to probability density of fractional order // Journal of Applied Mathematics & Informatics. — 2010. — Vol. 28, no. 1–2. — P. 257–273.
- [84] Jumarie G. Probability calculus of fractional order and fractional Taylor's series application to Fokker–Planck equation and information of non-random functions // Chaos, Solitons & Fractals. — 2009. — Vol. 40, no. 3. — P. 1428–1448.
- [85] Jumarie G. Path probability of random fractional systems defined by white noises in coarse-grained time. Applications of fractional entropy // Fractional Differential Calculus. — 2011. — Vol. 1, no. 1. — P. 47–87.
- [86] Tenreiro Machado J. A. Fractional coin and fractional derivatives // Abstract and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 2013.
- [87] Mostafaei H., Ghotbi P. A. Fractional probability measure and its properties // Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran. — 2010. — Vol. 21, no. 3. — P. 259–264.
- [88] Willard S. General topology. — Reading : Addison-Wesley Publishing, 1970. — 369 p.
- [89] Федер Е. Фракталы. — М. : Мир, 1991. — 254 с.
- [90] Aliprantis C., Burkinshaw O. Principles of real analysis. — San Diego : Academic Press, 1998. — 415 p.
- [91] Mandelbrot B. B. Fractal geometry of nature. — New York : W. H. Freeman, 1983. — 468 p.
- [92] Dekking F. M., Grimmet G. R. Superbranching processes and projections of random Cantor sets // Probability Theory and Related Fields. — 1988. — Vol. 78, no. 3. — P. 335–355.
- [93] Falconer K. Projections of random Cantor sets // Journal of Theoretical Probability. — 1989. — Vol. 2, no. 1. — P. 65–70.
- [94] Gouyet J.-F. Physics and fractal structures. — New York : Springer, 1995. — 234 p.
- [95] Sierpiński pedal triangles / X.-M. Zhang, L. R. Hitt, B. Wang, J. Ding // Fractals. — 2008. — Vol. 16, no. 2. — P. 141–150.
- [96] Handbook of graph grammars and computing by graph transformations / Ed. by Grzegorz Rozenberg. — Singapore : World Scientific, 1997. — Vol. 1–3. — 547 p.
- [97] Lobo D., Vico F. J., Dassow J. Graph grammars with string-regulated rewriting // Theoretical computer science. — 2011. — Vol. 412, no. 43. — P. 6101–6111.
- [98] Kronecker graphs: An approach to modeling networks / J. Leskovec, D. Chakrabarti, J. Kleinberg et al. // The Journal of Machine Learning Research. — 2010. — Vol. 11. — P. 985–1042.
- [99] Krön B. Growth of self-similar graphs // Journal of Graph Theory. — 2004. — Vol. 45, no. 3. — P. 224–239.
- [100] Bollobás B. Modern graph theory. — New York : Springer, 1998. — 394 p.

- [101] Grimmet G. Probability on graphs. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 260 p.
- [102] Blanchard P., Volchenkov D. Random walks and diffusions on graphs and databases. — Berlin : Springer, 2011. — 276 p.
- [103] Barlow M. T., Perkins E. A. Brownian motion on the sierpinski gasket // Probability theory and related fields. — 1988. — Vol. 79, no. 4. — P. 543–623.
- [104] Krön B., Teufl E. Asymptotics of the transition probabilities of the simple random walk on self-similar graphs // Transactions of the American Mathematical Society. — 2004. — Vol. 356, no. 1. — P. 393–414.
- [105] Newman M. E. J. The structure and function of complex networks // SIAM review. — 2003. — Vol. 45, no. 2. — P. 167–256.
- [106] Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Имитационная модель коррупции в иерархических системах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 321–329.
- [107] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М. : Мир, 1964. — 765 с.
- [108] Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R. Probability distributions generated by fractional diffusion equations. — 2007. — 46 p. — arXiv : [0704.0320v1](https://arxiv.org/abs/0704.0320v1).
- [109] Mainardi F., Pagnini G., Saxena R. Fox functions in fractional diffusion // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 178, no. 1–2. — P. 321–331.
- [110] Approximation of the Lévy–Feller advection–dispersion process by random walk and finite difference method / Q. Liu, F. Liu, I. W. Turner, V. V. Anh // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 222, no. 1. — P. 57–70.
- [111] Zauderer E. Partial differential equations of applied mathematics. — New York : Wiley, 1998. — 891 p.
- [112] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М. : Мир, 1980. — 618 с.
- [113] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1981. — Т. 1. — 800 с.
- [114] Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximation for fractional advection–dispersion flow equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2004. — Vol. 172, no. 1. — P. 65–77.
- [115] Bishwal J. Parameter estimation in stochastic differential equations. — Berlin : Springer, 2008. — 264 p.
- [116] Iacus S. M. Simulation and inference for stochastic differential equations. — Berlin : Springer, 2008. — 284 p.
- [117] Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation / J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto, T. Yamazaki // Inverse Problems. — 2009. — Vol. 25, no. 11. — P. 115002.
- [118] Miller L., Yamamoto M. Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. — 2013. — Vol. 29, no. 7. — P. 075013.

- [119] Wei T., Zhang Z. Q. Reconstruction of a time-dependent source term in a time-fractional diffusion equation // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2013. — Vol. 37, no. 1. — P. 23–31.
- [120] Steinbrecher G., Shaw W. T. Quantile mechanics // *European journal of applied mathematics*. — 2008. — Vol. 19, no. 02. — P. 87–112.
- [121] Bezruchko B. P., Smirnov D. A. *Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling*. — Springer, 2010. — 410 p.
- [122] Isermann R., Münchhof M. *Identification of dynamic systems: An introduction with applications*. — Springer, 2011. — 705 p.
- [123] Bowman A. W., Azzalini A. *Applied smoothing techniques for data analysis*. — Oxford : Oxford University Press, 1997. — 193 p.
- [124] Wand M. P., Jones M. C. *Kernel smoothing*. — London : Chapman & Hall/CRC, 1995. — 224 p.
- [125] Ширяев А. Н. *Основы стохастической финансовой математики*. — М. : ФАЗИС, 1998. — Т. 1. — 512 с.
- [126] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. — Т. 3. — 300 с.
- [127] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды*. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. — 687 с.