

Жуков Виктор Тимофеевич

**Развитие вычислительных моделей динамики
мишеней термоядерного синтеза**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук

Официальные
оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Трощев Виталий Ефимович

доктор физико-математических наук,
профессор Чарахчян Александр Агасиевич

доктор физико-математических наук,
профессор Шевелев Юрий Дмитриевич

Ведущая

организация: Институт Теоретической и Экспериментальной
Физики им. А.И. Алиханова (ФГУП “ГНЦ РФ – ИТЭФ”)

Защита состоится «_____» _____ 2010 г. в _____ часов на заседании

Диссертационного совета Д 002.024.03 при Институте прикладной математики им.М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2010 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

Н.В. Змитренко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию вычислительных моделей и алгоритмов для исследования высокотемпературных динамических процессов в мишенях термоядерного синтеза.

Исследования по управляемому термоядерному синтезу (УТС) в наше время определяют не только будущее энергетики, но и прогресс во многих областях науки и техники. Интерес к проблеме УТС объясняется несколькими причинами – исчерпанием в ближайшее столетие запасов органического топлива, безопасностью термоядерной энергетики, немаловажен и военный аспект.

Актуальным направлением в УТС является инерциальный тяжелоионный термоядерный синтез (ИТИС). Достижения на этом направлении¹ включают теоретические и экспериментальные аспекты разработки мишеней термоядерного синтеза, мощных и безопасных источников нагрева плазмы вплоть до концептуальной проработки электростанции на основе ИТИС.

В настоящее время работы по инерциальному термоядерному синтезу на пучках тяжелых ионов проводятся в Европейском Союзе, Японии, США и России. Следует отметить большие возможности математического моделирования в проблеме инерциального (в том числе и лазерного) термоядерного синтеза. Например, в США при разработке ядерных вооружений используются суперкомпьютеры высокой производительности для комплексного моделирования и расчетов импульсных ядерных и термоядерных процессов в динамике работы ядерного оружия.

Математическое моделирование мишеней для инерциального синтеза соответствует сегодняшним знаниям, так как хорошо известны основные уравнения физических процессов и константы взаимодействий частиц с веществом.

В Институте прикладной математики (ИПМ) им. М.В. Келдыша РАН под руководством член-корреспондента РАН А.В. Забродина сформировалось научное направление по математическому моделированию мишеней ИТИС в

¹ Ядерный синтез с инерционным удержанием. Современное состояние и перспективы для энергетики. Ред. Б.Ю. Шарков.–М.: Физматлит, 2005, 264 с.

тесном сотрудничестве с Институтом теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ) им. А.И.Алиханова, где в течение многих лет ведутся работы по развитию концепции инерциального термоядерного синтеза на основе использования ускорителей тяжелых ионов.

В результате этого сотрудничества в ИПМ им. М.В. Келдыша создан и работает уникальный исследовательский компьютерный код НЗТ на основе комплексной физико-математической модели, в число компонент которой входит: а) нестационарная трехтемпературная газодинамическая модель с учетом переноса тепла ионами, электронами, фотонами и обменом энергией между ними; б) специальный режим вложения энергии пучками тяжелых ионов; в) кинетика термоядерных реакций в термоядерном дейтриево-тритиевом (DT) топливе; г) модели переноса нейтронов для учета нейтронно-ядерных реакций в случае гибридной мишени с урановой оболочкой.

Таким образом, **работа актуальна** в связи с потребностью исследования процессов термоядерного синтеза в приложении к проблемам науки и промышленности.

Цель диссертационной работы. В работе рассматриваются несколько основных направлений исследований, подчиненных главной цели: поиску методами математического моделирования путей безопасного получения ядерной энергии на основе тяжелоионного ускорителя и термоядерной мишени.

Научные цели диссертации включают создание методов решения нелинейных уравнений теплопереноса на подвижных криволинейных сетках, создание многофункционального компьютерного кода для многопроцессорных систем, проведение расчетных исследований мишеней ИТИС.

Методика исследований. Базовым элементом в компьютерном коде НЗТ является алгоритм² решения начально-краевых задач для системы нестационарных уравнений газовой динамики в областях сложной формы с подвижными границами. В основе алгоритма лежит схема С.К. Годунова³. Главными принципами алгоритма являются консервативность, адаптируемость к

² Численное решение многомерных задач газовой динамики. С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. -М.:Наука, 1976, 400 с.

³ *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений газодинамики // Матем. сборник, 1959, т. 47(89), № 3, с. 271–306.

особенностям течений с использованием криволинейных подвижных сеток, сохранение групповых свойств дифференциальной задачи.

Для расчетов тепловых процессов автором диссертации построена дискретизация, согласованная с газодинамическим этапом. Для решения на каждом шаге по времени системы трех дискретных уравнений теплопроводности (или одного уравнения в случае однотемпературной модели) используется явно-итерационная схема с чебышевскими параметрами. Эта схема обеспечивает высокую фактическую точность и эффективное функционирование на многопроцессорных системах. Она построена на основе схемы, предложенной В.О. Локуциевским и О.В. Локуциевским⁴.

Для аппроксимации по пространству записывается закон сохранения тепла для каждой сеточной ячейки и потоки тепла на сторонах ячеек находятся интерполяцией значений сеточной функции (температуры или её степени). Рассмотрены два способа интерполяции: лагранжева, когда аппроксимирующий многочлен строится из условия совпадения в узлах сеточного шаблона с искомой функцией, и интерполяция методом наименьших квадратов.

В качестве средств разработки параллельной программы использовался набор функций межпроцессорных обменов для обеспечения геометрического и функционального параллелизма.

Расчетные исследования гибридной мишени с учетом нейтронно-ядерных реакций в урановом слое основаны на предложенной В.С Имшенником⁵ модели, которая позволяет учесть эффект вынужденного деления урана, а также развитие цепной реакции деления урана при выполнении критических условий.

Научная новизна. В диссертации развита вычислительная модель, алгоритмы и программы для исследования динамики мишеней термоядерного синтеза на многопроцессорных компьютерах и созданы средства математического моделирования процесса получения ядерной энергии на основе тяжелоионного ускорителя и термоядерной мишени.

⁴ Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа// Докл. АН СССР, 1986, т. 291, № 3, с. 540-544.

⁵ Имшенник В.С. Аналитический метод определения параметров цепной реакции деления для цилиндрического уранового стержня и оценки энерговыделения гибридных мишеней ИТИС// Ядерная физика, 2006, т. 69, № 10, с. 1690–1700.

Основными новыми элементами в диссертации являются следующие.

1. Разработаны, исследованы и включены в комплекс программ НЗТ новые методы дискретизации по пространству нелинейной системы уравнений трехтемпературной теплопроводности на подвижных криволинейных сетках. В классе явно-итерационных схем с чебышевскими параметрами построены две новые схемы интегрирования по времени параболических уравнений. Для линейного случая доказаны теоремы о сходимости с указанием порядков точности, проведена практическая проверка построенных схем, показавшая их высокую фактическую точность. Проведено качественное объяснение этого факта на основе исследования эволюции основных мод решения и разностных функций источника для модельных задач. Разработанные методы обеспечивают консервативность, сохранение симметрии решений и эффективность работы комплекса программ на многопроцессорных системах.
2. Исследован подход к построению блочно-структурных сеток на основе теории квазиизометрических отображений, построены алгоритмы расчета сеток, оценена их работоспособность.
3. На основе предложенных методов развит программный комплекс НЗТ для расчета мишеней ИТИС, функционирующий на многопроцессорных системах. Параллельный код сочетает геометрический и функциональный параллелизм; получено подтверждение его эффективности.
4. Проведены расчетные исследования двух сферических мишеней в условиях развития гидродинамической неустойчивости. Подтверждена возможность профилирования внешней оболочки мишени для компенсации асимметрии облучения и достижения необходимых параметров сжатия. В расчетах изучен рост возмущений на границах раздела сред и получена оценка допустимых начальных возмущений.
5. Исследована динамика цилиндрической мишени при режимах безударного сжатия, в том числе и динамика гибридной мишени, имеющей источник нейтронного энерговыделения в урановой оболочке. В расчетах установлено, что в гибридной мишени: 1) существенно повышается

КПД; 2) значительно повышается сжатие топлива, порождая процесс самоподдерживающегося горения в системе — урановая оболочка + термоядерное топливо; 3) может быть достигнуто критическое состояние, в котором помимо реакций вынужденного деления урана возникает кратковременная цепная реакция.

Практическая значимость. Разработанные методы, алгоритмы и программы используются для моделирования мишеней ИТИС на основе современных данных и с учетом новейших достижений в этой области в рамках работ по получению ядерной энергии на основе тяжелоионного ускорителя и термоядерной мишени. Важное прикладное значение имеют установленные при расчетных исследованиях следующие факты. Известно, что благоприятным фактором для создания условий термоядерного горения является сферическое сжатие вещества. Однако, для сферических мишеней характерно несферическое облучение — в силу специфики конструкции ускорителей ионные пучки располагаются в одной (экваториальной) плоскости. Степень несферичности облучения мишени зависит от многих причин: количества и формы пучков ионов, распределения интенсивности энергии по сечению пучков, их пространственного расположения и т.д. Поэтому необходимо учитывать влияние на динамику мишени малых возмущений, которые неизбежно возникают по указанным причинам и могут возрасти до величин, существенно нарушающих сферичность сжатия. При моделировании сферических мишеней установлено, что сжатие мишени сопровождается развитием рэлей-тейлоровской неустойчивости, что усложняет проблему симметризации. Специальное профилирование внешней оболочки мишени ограничивает деформацию пушера допустимыми значениями с достижением параметров сжатия, близких к термоядерным. Полученные при исследовании практические доказательства правильности передачи методикой эволюции возмущений означают, что отсутствие критического роста возмущений обусловлено удачным профилированием внешней оболочки, а не сглаживанием аппроксимационной вязкостью.

При моделировании цилиндрической мишени с урановой оболочкой установлен эффект усиления кумуляции энергии. Сжатие вещества инициирует загорание ДТ-топлива, а горение порождает мощный поток первичных ней-

тронов. Под их воздействием начинается ядерное энерговыделение в окружающей DT-топливо урановой оболочке. В зависимости от геометрии мишени и параметров энерговложения цепная ядерная реакция может не начаться, т.е. нейтронные процессы могут быть подкритичны, либо в урановом слое может возникнуть самоподдерживающаяся цепная реакция. В каждом из этих двух случаев энерговыделение в уране вызывает дополнительное сжатие, разогрев и выгорание DT-топлива. Происходит практически мгновенное взаимоусиление нейтронно-ядерных и термоядерных процессов.

Автор защищает следующие положения:

1. Общие принципы включения расчета теплопроводных процессов в газодинамическую модель.
2. Методы построения явно-итерационных схем численного интегрирования по времени параболических уравнений. Обоснование новых схем первого и второго порядка точности на основе многочленов Чебышева.
3. Метод пространственной аппроксимации нестационарного уравнения теплопроводности на криволинейных подвижных сетках.
4. Исследование и построение алгоритмов генерации блочно-структурных сеток на основе теории квазиизометрических отображений.
5. Параллельную программную реализацию комплекса НЗТ.
6. Результаты численного моделирования сферических и цилиндрических мишеней ИГИС, включая результаты расчетов гибридной мишени.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на различных конференциях и семинарах, в том числе на: Всероссийских конференциях “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики” памяти К.И. Бабенко, 1998, 2000 г.; Всероссийской конференции “Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления”, ВЦ РАН, 2004 г.; Всероссийской конференции “Математика в приложениях”, приуроченной к 80-летию академика С. К. Годунова. Новосибирск, 2009 г.; XVI Internat. Conference on

Numerical Methods in Fluid Dynamics, Arcachon, 1998; Международной конференции по физике высоких плотностей энергии (ФВПЭ)(Забабахинские научные чтения), Снежинск, 2005 г.; совместных конференциях ВНИИЭФ, ВНИИТФ, ИПМ; семинарах им. К.И.Бабенко в ИПМ РАН.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 32 работах, в том числе в 13 рецензируемых журнальных статьях, рекомендованных ВАК, в 2 рецензируемых журнальных статьях, в 8 препринтах ИПМ им.М.В. Келдыша РАН, публикациях тезисов докладов на всероссийских и зарубежных конференциях, в научно-технических отчетах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Диссертация содержит 262 страницы, в общей сложности 49 рисунков и 12 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 132 наименования.

Содержание работы

Во **Введении** формулируется цель исследования, обосновывается актуальность математического моделирования процессов в мишенях термоядерного синтеза, аргументируется научная новизна полученных результатов, показывается практическая значимость исследований, представляются выносимые на защиту научные положения. Описывается структура работы и краткое содержание глав. Приводится список работ автора по теме диссертации.

В **главе 1** рассматривается современное состояние исследований по термоядерному синтезу на пучках тяжелых ионов, формулируются физическая и математическая модели, дается изложение вычислительной технологии НЗТ. Основные результаты опубликованы в [3], [8] – [10], [14], [22], [23].

В **разделе 1.1** приведены основные причины интереса к термоядерной энергетике. В **разделе 1.2** изложены принципы инерциального тяжелоионного синтеза. В соответствии с общей схемой ИТИС, топливо (смесь дейтерия и трития) помещается в сферическую или цилиндрическую капсулу, в которой оно подвергается сжатию до колоссальных плотностей $\rho \simeq (300-1000)$ г/см³ за счет импульса давления, обеспечиваемого внешним источником энергии – драйвером.

На рис. 1 и 2 показаны соответственно сферическая мишень ТИНАТА с профилированной внешней оболочкой и цилиндрическая мишень. Мишени представляют собой системы вложенных оболочек, выполненных из различных веществ. Сечение цилиндрической мишени плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, показано на рис. 3, а характерные геометрические размеры и возможный состав слоев показан на рис. 4. Такой же вид имеет сечение сферической мишени центральной плоскостью, геометрические размеры примерно такие же. В центральной части мишени находится DT-топливо, окруженное оболочкой из тяжелого металла (свинца, золота). Этот слой – пушер – выполняет роль сжимающего поршня. В гибридной мишени пушер должен быть выполнен из урана или другого делящегося вещества. Энергия тяжелых ионов вкладывается в следующий слой – тампер. Цилиндрическая мишень облучается с торцов, пучки направлены вдоль оси и быстро вращаются вокруг нее. В случае сферической мишени ионные пучки располагаются в одной (экваториальной) плоскости и вложение энергии происходит в два внешних слоя. Размеры мишени и характеристики ионных пучков таковы, что вложение энергии ионами в вещество тампера практически происходит равномерно по массе. Внешняя оболочка служит для сдерживания разлета вещества. В момент наибольшего сжатия достигаются необходимые условия по плотности и температуре вещества и происходит зажигание топлива, т.е. начинает идти ядерная реакция синтеза с выделением энергии в виде нейтронов и альфа-частиц. Нейтроны покидают зону реакции, а альфа-частицы тормозятся и отдают свою энергию DT-топливу, содействуя развитию самоподдерживающегося процесса термоядерного горения. К несомненным достоинствам ИТИС следует отнести безопасность, т.е. отсутствие физической возможности для разгонной аварии: при выключении ускорителя термоядерные микровзрывы становятся невозможными. Использование концепции безударного сжатия и конкретных формул, определяющих динамику вложения энергии, открывает перспективный способ оптимизации мишеней (см. Г.В. Долголева, А.В. Забродин ⁶).

⁶ Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия.-М.: Физматлит, 2004, с.72.

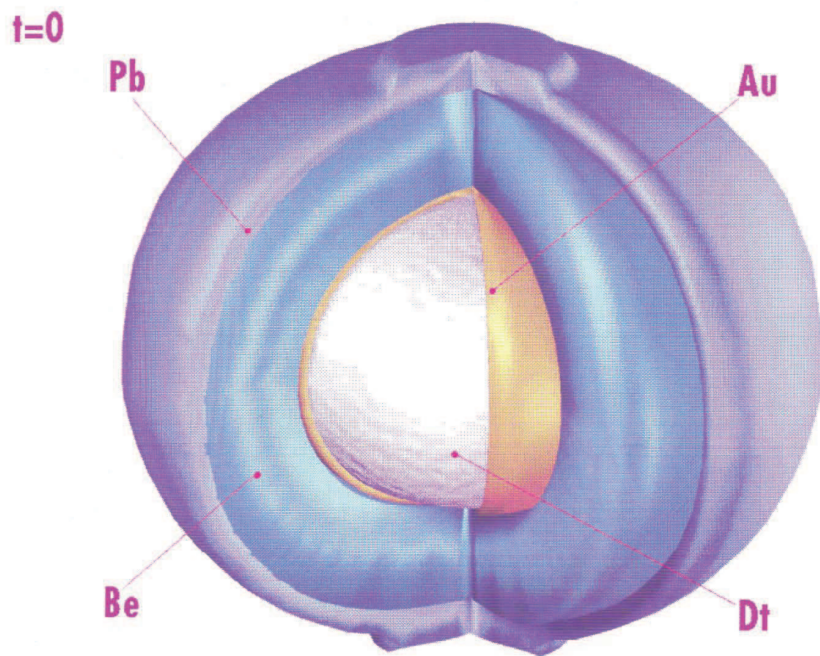


Рис. 1. Модель сферической мишени с профилированной внешней оболочкой

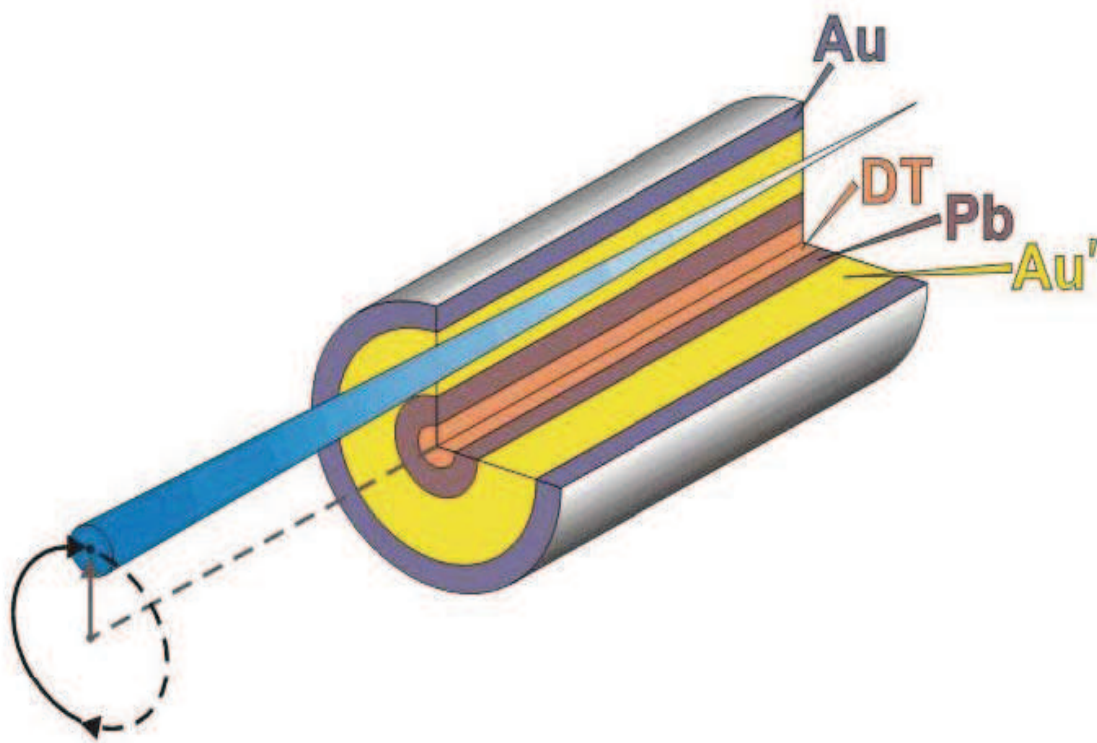


Рис. 2. Модель цилиндрической мишени

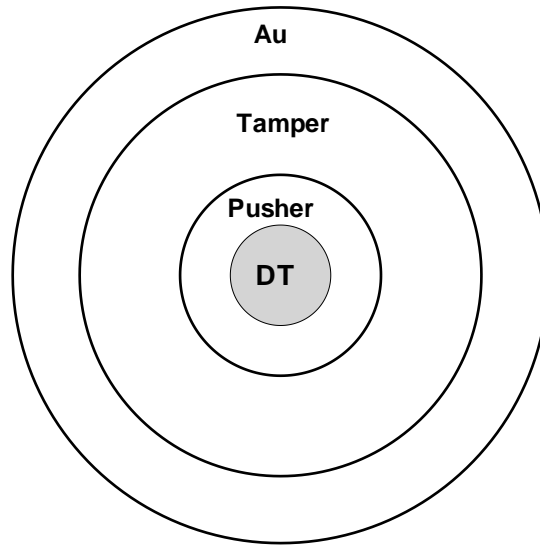


Рис. 3. Сечение мишени

Плотность:	0.05	20	5	20	(г/см ³)
	DT-топливо	Пушер	Тампер	Au	
	0.05	20	6	20	
Радиус:	0	0.20	0.21	0.39	0.44 см

Рис. 4. Состав и размеры мишени

В разделе 1.3 приведена трехтемпературная модель мишени ИТИС, предложенная А.В. Забродиним и Г.П. Прокоповым⁷. Эта модель представляет собой сплошную среду, в которой протекают физические процессы и которая состоит из трех видов частиц: ионов, электронов и фотонов. Фотонами условно названы частицы, ответственные за перенос энергии излучения. Сплошная среда описывается как газ (или “жидкость”) с единой плотностью частиц ρ и общим вектором их скорости $\vec{u} = (u, v)$. Температура T , давление p и удельная внутренняя энергия ε (для единицы массы среды) ионов, элек-

⁷ Забродин А.В., Прокопов Г.П., Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении// ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов, 1998, вып. 3, с. 3-16.

тронов и фотонов предполагаются различающимися между собой в каждой точке пространства (x, r) и времени t и отмечаются индексами i, e, f соответственно. Система дифференциальных уравнений для такой модели среды имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \vec{u}) + \operatorname{grad} p &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon_i) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon_i \vec{u}) + p_i \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div}(K_i \operatorname{grad} T_i) + c_{ei}(T_e - T_i) + Q_i, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon_e) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon_e \vec{u}) + p_e \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div}(K_e \operatorname{grad} T_e) + \\
&+ c_{ei}(T_i - T_e) + c_{ef}(T_f - T_e) + Q_e, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon_f) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon_f \vec{u}) + p_f \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div}(K_f \operatorname{grad} T_f) + \\
&+ c_{ef}(T_e - T_f) + Q_f.
\end{aligned}$$

Левые части этих уравнений описывают газодинамические процессы. Слагаемые $\operatorname{div}(K \operatorname{grad} T)$ описывают перенос тепла ионами и электронами и процесс диффузии энергии излучения в приближении “серой материи”. Следующие слагаемые в правой части моделируют релаксационные процессы обмена энергией между ионами и электронами и неравновесность процесса переноса излучения фотонами. Коэффициенты c_{ei}, c_{ef} и K_i, K_e, K_f могут зависеть от искоемых функций, пространственных переменных и времени. Качественная форма основного варианта коэффициентов теплопроводности имеет вид: $K_i \cong T_i^{5/2}$, $K_e \cong T_e^{5/2}$, $K_f \cong T_f^3$. Следующие члены в правых частях $Q = \{Q_i, Q_e, Q_f\}$ учитывают энерговложение в ионы, электроны и фотоны от различных источников: внешнего источника; термоядерных реакций в топливе; нейтронно-ядерных реакций в делящемся веществе пушера в случае гибридной мишени.

Для замыкания модели записывается система уравнений кинетики термоядерного горения, уравнения состояния, начальные и граничные условия.

Конструирование разностной схемы производится для уравнений, записанных в виде интегральных законов сохранения. Такая запись соответствует фундаментальным принципам, развитым С.К. Годуновым, о термодина-

мически согласованных уравнениях, образующих симметрические гиперболические системы, составленные из дивергенций – законов сохранения (см. С.К. Годунов, И.М.Пешков⁸ и цитированную там литературу). Приводится вид уравнений в локальной криволинейной системе координат, который непосредственно используется для построения разностных уравнений.

Раздел 1.4 посвящен описанию основных элементов вычислительной методики, представлению геометрии и топологии расчетных областей, общему описанию дискретизации уравнений. Методика НЗТ предназначена для расчета течений в областях сложной формы, поэтому первым шагом является декомпозиция области. Эта операция включает 3 этапа: геометрическое разбиение исходной области на подобласти (введение дополнительных границ), движение границ, построение сетки в каждой подобласти. Разбиение исходной области определяется в основном необходимостью ее представления набором “топологических четырехугольников”. Несколько подобластей могут объединяться в структуру, называемую ярусом, если при этом для объединения сохраняется топология четырехугольника, а сами подобласти составляют в ярусе прямоугольную решетку. Каждая из подобластей является либо физической областью с заданными материальными параметрами, либо ее частью. В каждом ярусе строится четырехугольная криволинейная сетка, схематически показанная на рис. 5. Реальная сетка, адаптирующаяся к возмущенным контактными границам сферической мишени, приведена на рис. 10.

Гладкость сетки через границы ярусов не предполагается, более того, сетки на границах ярусов могут быть не состыкованы. Ярус является основной структурой: на каждом шаге по времени исходные уравнения решаются последовательно (а на многопроцессорной системе – параллельно) во всех ярусах с краевыми условиями в каждом из них. Внутренние и внешние границы ярусов могут представлять выделенные разрывы. Как правило, выделяются контактные разрывы. Именно границы областей служат опорными для построения координатных линий. Сетка в каждом ярусе строится на каждом шаге по времени либо интерполяцией, либо минимизацией некоторого вариационного функционала. Стороны ячеек называются ребрами и аппроксимиру-

⁸ Годунов С.К., Пешков И.М. К симметризации нелинейной системы уравнений газовой динамики// Сиб. матем. журн., 2008, т.49, № 5, с. 1046-1053.

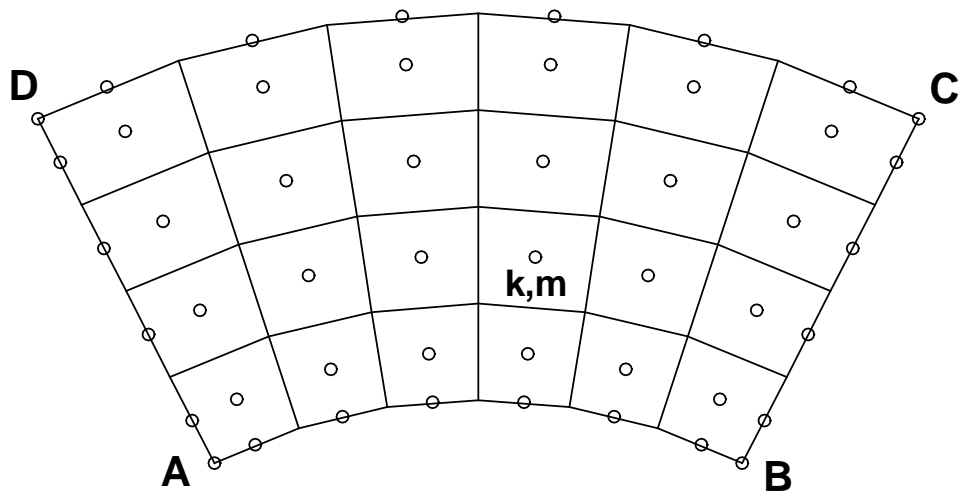


Рис. 5. Схематическое изображение сетки в ярусе

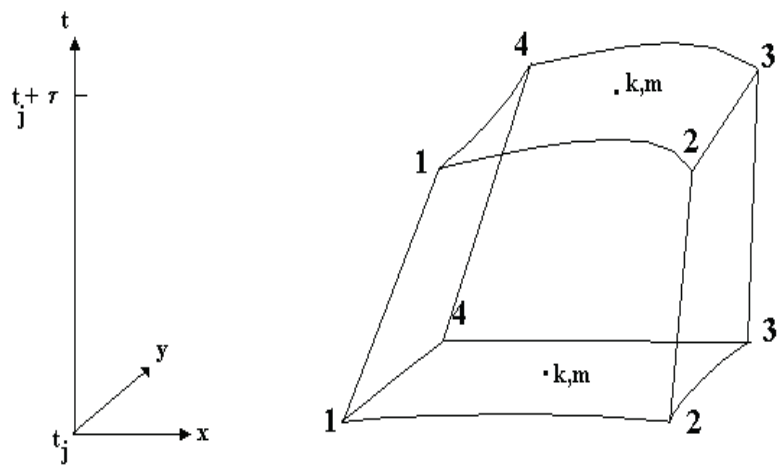


Рис. 6. Ячейка сетки как шестигранник в пространстве-времени x, y, t

ются дугами окружностей или отрезками прямых. Кривизна ребра задается углом θ , равным половине центрального угла, стягивающего ребро \widehat{ab} ; $\theta > 0$, если дуга лежит в верхней полуплоскости, когда \mathbf{ab} – единичный вектор оси абсцисс, иначе $\theta < 0$; $\theta = 0$, если ребро является отрезком прямой.

Сетка задается декартовыми координатами своих узлов и метрическими параметрами θ ребер. Объектами сетки являются ячейки, ребра, вершины и центры ячеек, середины ребер. Центр ячейки определяется как точка, в которой дуги окружностей, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаясь, делятся пополам. Формулы расчета площадей ячеек, длин ребер для плоского случая, а также объемов ячеек, площадей поверхностей, заметаемых ребрами при их вращении относительно оси симметрии для осесимметрического случая приведены в [23]. В определение сетки включаются также середины граничных ребер и четыре вершины области Ω (см. рис.5); на этой сетке определены сеточные функции. Координаты узлов сетки обозначаются как (x_{km}, y_{km}) , центры ячеек называются внутренними узлами. Соответствующая каждому внутреннему узлу (k, m) ячейка сетки обозначается как S_{km} .

Сетка является подвижной и ее объекты на момент времени $t = t_n$ называются t_n -слоем. Система разностных уравнений связывает величины на двух слоях: t_n – нижнем и $t_{n+1} = t_n + \tau$ – верхнем. Шаг по времени τ переменный и вычисляется в процессе расчета. Сетка на каждом слое строится по определенным правилам: сначала находится положение всех границ на момент времени $t + \tau$, а затем строится и сама сетка. На каждом слое вычисляются следующие сеточные функции: (u, v) – декартовы компоненты скорости, ρ – плотность, E – удельная внутренняя энергия, T – температура. Для трехтемпературной модели функции E и T являются вектор-функциями. Эти величины (u, v, ρ, E) – “малые” – считаются постоянными по ячейке и, как и температура T , относятся к центрам ячеек.

Формулы перехода на верхний слой строятся для отдельной ячейки сетки на интервале времени от t до $t + \tau$ с учетом движения этой сетки. На рис. 6 показана ячейка сетки как шестигранник в трехмерном пространстве x, y, t : его нижним и верхним основаниями являются, соответственно, ячейки (k, m) на плоскостях $t = t_n$ и $t + \tau$, а боковыми гранями – поверхности, образуемые при перемещении криволинейных ребер ячейки за время τ .

Для расчета величин на момент $t + \tau$, кроме известных величин на нижней грани, необходимо знать газодинамические и тепловые потоки через боковые грани (эти потоки предполагаются постоянными в течение шага τ). Потоки определяются по величинам, которые для краткости называются “большими величинами”, в отличие от “малых величин”, отвечающих нижнему и верхнему основаниям шестигранника. К большим величинам относятся нормальная и касательная к боковой грани компоненты вектора скорости \vec{U} , плотность вещества R , его давление P и внутренняя энергия E , температура T в теплопроводном случае, нужная для расчета теплового потока. Значения первых четырех величин находятся из решения задачи о распаде разрыва [23]. Алгоритм расчета тепловых потоков приводится в главе 3.

Все величины на верхнем слое помечаются двумя чертами, а величины на среднем слое – одной верхней чертой. Величины на нижнем слое не имеют черты. Для трехтемпературного случая каждая из величин энергии, давления, температуры представляет “набор” из трех величин, отвечающих трем компонентам среды. Суммарное давление на ребре и суммарная энергия складываются из ионной, электронной, фотонной компонент соответственно. Так же получается полный тепловой поток.

Векторная форма записи дискретной системы уравнений имеет вид (для простоты записи ограничимся случаем “плоского” течения):

$$\frac{\overline{\overline{Jf}} - Jf}{\tau} = -A^f. \quad (1)$$

Здесь J и $\overline{\overline{J}}$ – площадь нижней и верхней граней шестигранника, а векторы f и A^f имеют в одно- и трехтемпературном случаях соответственно вид:

$$f = (\rho, \rho u, \rho v, e), \quad A^f = [A^\rho, A^{\rho u}, A^{\rho v}, A^e],$$

$$f = (\rho, \rho u, \rho v, e, \rho \varepsilon_e, \rho \varepsilon_f), \quad A^f = (A^\rho, A^{\rho u}, A^{\rho v}, A^e, A^{\rho \varepsilon_e}, A^{\rho \varepsilon_f}).$$

Компонентами вектора A^f являются потоки массы, импульса и энергии через боковую поверхность шестигранника в направлении вектора внешней нормали в единицу времени. Вложение энергии может выполняться покомпонентно и включается в выражения для $A^e, A^{\rho \varepsilon_e}, A^{\rho \varepsilon_f}$. Полное вложение энергии в ячейке получается сложением отдельных компонент: $Q = Q_i + Q_e + Q_f$.

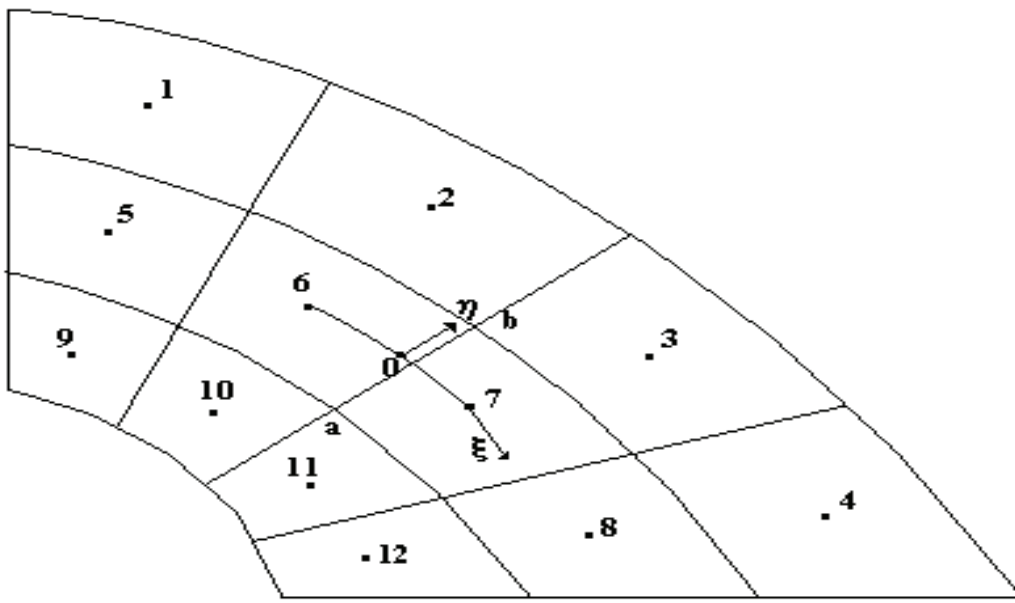


Рис. 7. Ребро ab , 12-точечный шаблон узлов и локальная система координат

Детальная запись разностных уравнений в криволинейной системе координат является достаточно громоздкой и полностью приведена в [23].

Тепловые потоки через боковые грани пространственно-временных ячеек определяются по температуре \bar{T} (отнесенной к верхнему временному слою) – она вычисляется с помощью явно-итерационной схемы ЛИ-М, см. главу 2 диссертации. Аппроксимация потока тепла Δ_{ij} через грань, определяемую ребром ij , имеет вид

$$\Delta_{ij}(\bar{T}) = \sum_{l=1}^{12} D_l \bar{T}_l + S,$$

где $S = 0$, если ребро внутреннее, и S – значение, определяемое граничным условием, если ребро граничное, D_l – разностные коэффициенты, отвечающие 12-ти точечному шаблону узлов (см. рис. 7). Шаблон регулярный, он определяет локальную криволинейную систему координат (ξ, η) , в которой записываются формулы расчета коэффициентов $\{D_l\}$. Сначала строятся по тройкам узлов (5,6,7) и (6,7,8) дуги окружностей, как это делается при восполнении сеточных линии, по ним определяется средняя дуга, которая является опорной для определения системы координат. В примере на рис. 7 эта дуга окружности определяет семейство ξ -линий, а ортогональное построенной дуге направление определяет семейство η -линий.

Алгоритм расчета коэффициентов $\{D_l\}$ основан на аппроксимации поля температуры в окрестности ребра многочленом (линейным, квадратичным или квадратично-кубическим), см. главу 3 диссертации.

В трехтемпературном случае $(\Delta^i, \Delta^e, \Delta^f)_{ij}$ представляют тепловые потоки через грани ячеек для трех компонент среды и эти потоки определяются аналогично однотемпературному случаю. Для расщепления схемы (1) на газодинамический и теплопроводный этапы она переписывается в виде

$$\frac{\overline{\overline{Jf}} - Jf}{\tau} = -A^g - \Delta(\bar{T}) + R(\bar{T}) \bar{J} + Q \bar{J}, \quad (2)$$

где $A^g = (A^\rho, A^{\rho u}, A^{\rho v}, A^{g_i}, A^{g_e}, A^{g_f})$ – газодинамические потоки, $\Delta(\bar{T})$ – тепловые потоки, $R(\bar{T})$ – обменные члены, Q – источник. Подразумевается, что последние три выражения тоже векторы, имеющие ненулевые компоненты, отвечающие уравнениям для энергий ионов, электронов и фотонов.

Разделим исходную систему (2) на две подсистемы

$$\frac{\bar{J} f^g - Jf}{\tau} = -A^g + E_{part1} \cdot Q \bar{J}, \quad (3)$$

$$\frac{\overline{\overline{Jf}} - \bar{J} f^g}{\tau} = -\Delta(\bar{T}) + R(\bar{T}) \bar{J} + E_{part2} Q \bar{J}. \quad (4)$$

Здесь $f^g = (\bar{\rho}, \bar{\rho} \bar{u}, \bar{\rho} \bar{v}, \bar{\rho} \varepsilon_i^g, \bar{\rho} \varepsilon_e^g, \bar{\rho} \varepsilon_f^g)$ – результат решения системы (3), не содержащей членов, описывающих тепловые потоки и релаксационные процессы. Подсистема (4), наоборот, содержит опущенные члены. Этот прием – разностный аналог расщепления по физическим процессам: в сумме уравнения (3)–(4) дают исходное уравнение (2). Множители E_{part1} , E_{part2} , позволяют распределить источник Q между процессами ($E_{part1} + E_{part2} = 1$).

Уравнения подсистемы (4) можно записать для $k_0 = i, e, f$ так:

$$\frac{\overline{\overline{J\rho\varepsilon_{k_0}}} - \bar{J}\rho \varepsilon_{k_0}^g}{\tau} = -\Delta(\bar{T}_{k_0}) + R_{k_0}(\bar{T}_i, \bar{T}_e, \bar{T}_f) \bar{J} + E_{part2} Q_{k_0} \bar{J}. \quad (5)$$

Так как удельная энергия ε_{k_0} связана с T_{k_0} уравнением состояния $\varepsilon_{k_0} = E(\rho, T_{k_0})$, то (5) можно рассматривать как нелинейную неявную разностную схему относительно векторной сеточной функции $\bar{T} = (\bar{T}_i, \bar{T}_e, \bar{T}_f)$. Заметим,

что эти три уравнения связаны между собой, т.к. релаксационные слагаемые содержат все компоненты температуры T или их попарные комбинации.

В однотемпературном случае (5) представляет собой одно уравнение. Без учета источника, и вводя вместо ε_{k_0} обозначение E , оно переписывается в виде

$$\overline{\overline{J\rho}} (E - E^g)/\tau = -\Delta(\bar{T}). \quad (6)$$

Именно для такого уравнения в главе 2 обосновывается явно-итерационная процедура ЛИ-М, в процессе которой находится \bar{T} и делается пересчет (6), выражающий закон сохранения. В данном случае схема ЛИ-М записывается в виде:

$$E^{(k)} = \frac{1}{1 + \tau a_k} \left\{ E^g + \tau a_k E^{(k-1)} - \frac{\tau}{\overline{\overline{J\rho}}} \Delta \left(T^{(k-1)} \right) \right\}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (7)$$

где $E^{(k)}$, $T^{(k)} = F(E^{(k)})$ – итерационные приближения, F – функция, определяемая уравнением состояния $E = E(\rho, T)$; $\Delta(T^{(k-1)})$ – поток тепла через границу ячейки. Число итераций (шагов) p определяется “теплопроводным числом Куранта” ($p \simeq \sqrt{\tau/h^2}$, где h – сеточный параметр); по p определяется набор чебышевских параметров $\{a_k\}$. Среди них по построению есть нулевой; при выборе $a_p = 0$ легко видеть, что последняя итерация эквивалентна шагу (6). Это означает, что схема ЛИ-М представима в виде процедуры “предиктор–корректор” – предиктор вычисляет \bar{T} , а корректором является (6).

В (7) может быть использована линеаризация зависимости энергии от температуры, и тогда процедура (7) является линейной, так как коэффициенты, зависящие от решения, рассчитываются на нижнем слое и не изменяются во время итераций. Подобным образом схема ЛИ-М применяется к системе трехтемпературных уравнений. В этом случае на каждом шаге итераций возникает линейная система относительно трех неизвестных $T_i^{(k)}$, $T_e^{(k)}$, $T_f^{(k)}$ (в силу линейности обменных членов в (5)).

Если в качестве температуры \bar{T} для расчета теплового потока взять температуру T с нижнего слоя, то схема (6) становится явной и требует для устойчивости жесткого ограничения на шаг по времени.

Следует отметить, что предложенная схема, основанная на расщеплении по процессам, обеспечивает выполнение закона сохранения полной энергии.

После расчета концентраций $\bar{X} = (\bar{X}_D, \bar{X}_T, \bar{X}_{He})$ в центрах ячеек на верхнем слое, вычисляется энерговыделение от термоядерных реакций, что позволяет определить энерговыделение от всех внешних и внутренних источников.

Включение релаксационных членов в итерации позволяет одновременно учесть релаксационные обмены энергией и теплопроводность, что приводит к релаксации температур во всей физической области влияния этих взаимосвязанных процессов. Источник энергии учитывается либо единожды либо распределяется пропорционально между основными расчетными этапами.

Коэффициенты обмена энергией электронов с ионами и фотонами, а также коэффициенты теплопроводности, зависят от искомым функций и вычисляются с помощью специальной библиотеки.

В **разделе 1.5** обсуждается проблема расчета сеток в нестационарных задачах математической физики. В частности, изучается возможность построения сетки, необходимой в качестве начальной сетки, или сетки для переинтерполяции, когда решено прервать нестационарный расчет и продолжить его с новой сеткой. Исследовано предложение С.К. Годунова строить сетки на основе квазиизометрических отображений⁹. Математические основы и вычислительные алгоритмы построения квазиизометрических сеток являются достаточно трудными. Приведено описание метода построения квазиизометрических сеток [10]. Следует отметить, что в качестве основной в вычислительной методике НЗТ принята технология расчета сеток, восходящая к первым работам С.К. Годунова и Г.П. Прокопова, и развитая Г.П. Прокоповым в публикациях 1988, 1998, 2001, 2003, 2006 гг., см. работу¹⁰ и цитированную там литературу.

В **главе 2** рассмотрены принципы построения схем численного интегрирования по времени параболических уравнений и представлен основной вклад автора диссертации в развитие численных методов. Изложен подход, основанный на использовании явных итераций с чебышевскими параметрами, и послуживший отправным пунктом для создания новых схем первого и

⁹ Годунов С.К., Гордиенко В.М., Чумаков Г.А. Квазиизометрическая параметризация криволинейного четырехугольника и метрика постоянной кривизны. Siberian Advances in Mathematics, 1995, т. 5, № 2, с. 1-20.

¹⁰ Прокопов Г.П. Выбор параметров при вариационном подходе к расчету регулярных сеток. -М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2006, препринт № 14, 32 с.

второго порядка точности, названных схемами локальных итераций (ЛИ). В этой главе систематизируются основные сведения о разработанных автором схемах и условиях их использования [2], [3], [7], [16], [17].

В разделе 2.1 приведены принципы, принятые для построения явно-итерационных схем: нужно обеспечить аппроксимацию уравнений, сохранение баланса тепла для каждой ячейки сетки, правильно описывать эволюцию решения. Кроме того, число итераций должно определяться из условия устойчивости.

Основу конструкции схем ЛИ составляют явные итерации с параметрами, являющимися корнями многочленов Чебышева 1 рода. Главная идея таких конструкций принципиально отличается от стандартного чебышевского ускорения итераций: выбор числа итераций и итерационных параметров диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы. В нестационарных задачах часто применяют схемы расщепления по пространственным переменным, оптимизирующие порядок числа операций для узкого класса задач. Но схемы расщепления хуже поддаются распараллеливанию, и во многих ситуациях (области неправильной формы, сложные краевые условия, неструктурированные, нерегулярные или косые сетки, требование сохранения баланса тепла по ячейкам сетки и т.п.) вызывают трудности при реализации. Такие схемы могут приводить к значительной потере точности, как отмечено в работе¹¹. Схемы локальных итераций и появились после неудачных попыток использования схем переменных направлений в рассматриваемом классе задач.

В разделе 2.2 дана постановка задачи. Конструкция схем ЛИ объясняется на примере первой начально-краевой задачи для линейного дифференциального параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f(x, t), \quad x \in G \subset R^d, \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

Здесь L – эллиптический самосопряженный положительно-определенный оператор с коэффициентами, зависящими от x и t .

¹¹ *Белякова Г.В., Грынъ В.И., Чарахчян А.А.* Применение составных разностных схем для расчета нестационарных течений с узкими тепловыми слоями. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, т. 47, №3, с. 481–489.

Для простоты считается, что искомая функция равна нулю на ∂G , G – d -мерный параллелепипед, $d \geq 1$ и в $G \times [0, T]$ построена пространственно-временная сетка $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ с шагами τ, h . Здесь h – шаг сетки, характеризующий средний размер (диаметр) ячеек; сама сетка может быть неравномерной и даже неструктурной. Вводятся обозначения: $Int \Omega_h$ – внутренность Ω_h , $\partial\Omega_h$ – теоретико-множественная граница Ω_h .

Обычным образом определяется пространство сеточных функций со скалярным произведением и $L_2(\Omega_h)$ -нормой, а также разностный оператор L_h , аппроксимирующий исходный оператор L . Конкретный вид оператора L_h не важен, поэтому он представляется в общей форме. Для этого с каждым внутренним узлом i сетки связывается шаблон узлов дискретизации S_i . Тогда $L_h : w \rightarrow L_h w$ и в узле i

$$(L_h w)_i = \sum_{k \in S_i} l_k^i w_{i+k},$$

где l_k^i – разностные коэффициенты, w – сеточная функция.

Предполагается, что оператор L_h – самосопряженный, его собственные значения неотрицательны и лежат на отрезке $[0, \lambda_\infty]$ вещественной оси, их набор обозначается как $Sp(L_h)$. В качестве λ_∞ берется оценка сверху максимального собственного значения λ_{max} , получаемая по теореме Гершгорина о кругах.

Для уравнения (8) записывается двухслойная схема¹², частными случаями которой являются явная, симметричная и чисто неявная схемы. Для устойчивости явной схемы должно выполняться обременительное ограничение $\tau \leq 2/\lambda_{max}$. В неявной схеме для нахождения решения u^{n+1} на верхнем слое часто используется, например, чебышевский метод с итерационными параметрами $\{\omega_j, j = 1, \dots, p\}$:

$$\begin{aligned} y^j &= y^{j-1} + \omega_j \{(E + \tau L_h) y^{j-1} - (u^n + \tau f^n)\}, \quad j = 1, \dots, p, \\ y^0 &= u^n, \quad u^{n+1} = y^p. \end{aligned} \quad (9)$$

Хорошо известно математическое решение задачи о выборе оптимальных параметров в этом методе с использованием корней многочленов Чебышева $T_p(z) = \cos(p \arccos(z))$, $-1 \leq z \leq 1$, и алгоритм упорядочивания этих

¹² Самарский А. А. Теория разностных схем. -М.:Наука, 1977, 656 с

параметров, приводящий к устойчивому итерационному процессу, см. ¹³ и ¹⁴. Число итераций p при решении неявной схемы обычно назначается из условия уменьшения нормы начальной невязки в заданное число раз.

Для нестационарных задач число итераций должно быть подчинено требованию устойчивости. Это высказывание иллюстрируется на примере простейшего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Пусть, например, при реализации простейшей трехточечной по x разностной схемы для уравнения (10) сделано p итераций и результат принят в качестве решения u^{n+1} на новом временном слое. Тогда справедливо представление

$$u_i^{n+1} = l_0 u_i^n + \sum_{m=1}^p l_m (u_{i-m}^n + u_{i+m}^n).$$

Эту формулу можно трактовать как явную схему на расширенном шаблоне узлов $i - p, \dots, i - 1, i, i + 1, \dots, i + p$. Граничные узлы такого шаблона удалены от центрального узла на расстояние $H = ph$, которое и определяет область влияния на решение u_i^{n+1} данных со слоя n . Тогда в предположении $\tau/h^2 = const$, а $\tau, h \rightarrow 0$, необходимое ограничение на число итераций дается теоремой И.М. Гельфанда – О.В. Локуциевского¹⁵, (см. К.И. Бабенко¹⁶) и это ограничение имеет вид

$$\tau \leq \frac{1}{2} p^2 h^2. \quad (11)$$

В частности, это означает, в итерационном процессе вида (9) при реализации разностной схемы для уравнения (10) нужно проделать не менее p_{opt} итераций, где

$$p_{opt} = \lceil \sqrt{2r} \rceil, \quad r = \tau/h^2. \quad (12)$$

Здесь использовано обозначение $\lceil x \rceil$ для наименьшего целого, большего или

¹³ Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978, 592 с.

¹⁴ Лебедев В.И., Финогенов С.А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом методе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 2.

¹⁵ Гельфанд И.М., Локуциевский О.В. О разностных схемах для решения уравнения теплопроводности. - В кн.: Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. -М.: Физматгиз, 1962, с. 275-282.

¹⁶ Бабенко К.И. Основы численного анализа. -Москва–Ижевск: НИЦ РХД, 2002, 848 с.

равного x : $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$. Заметим, что ограничение (11) совпадает при $p = 1$ с условием устойчивости явной схемы.

Для эволюционных задач можно дополнительно ввести промежуточную дифференциально-разностную схему, сводя задачу (8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = -L_h u + f(t), \quad (13)$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_I)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_I)$ – вектор-функции непрерывного аргумента t , $u_i(t) = u(x, t)$, $x \in \text{Int } \Omega_h$. Система (13) дополняется начальными условиями $u_i(0) = u(x, 0)$, $x \in \text{Int } \Omega_h$.

Для интегрирования системы (13) известный способ получения устойчивых явных методов заключается в построении методов Рунге–Кутты с использованием многочленов Чебышева. В разделе 2.6 диссертации приведен пример метода такого типа, в котором минимум (12) p_{opt} достигается, т.е. метод оптимален. Но он приводит к резкой потере точности вследствие ухудшения аппроксимации по пространству. В этом принципиальное отличие явно-итерационных схем от явной схемы, для которой условие устойчивости естественным образом обеспечивает точность численного решения. Поэтому для исследования качества явно-итерационных схем нужно использовать приемы, приведенные в главе 2 диссертации.

В **разделе 2.3** приводится алгоритм схемы ЛИ¹⁷. Операторная форма алгоритма имеет вид:

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= S v^n + \tau Q^n, & 0 \leq n < N, & & v^0 &= u^0, \\ Q^n &= (E - Z_{p-1}) B^{-1} f^{n+1} + Z_{p-1} f^n. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь n – номер слоя по времени,

$$S = (E + \tau L_h F_p) B^{-1}$$

– оператор перехода со слоя n на слой $n + 1$ (он может зависеть от n),

$$B = E + \tau L_h, \quad Z_{p-1} = \prod_{m=p}^{m=2} \left(E - \frac{1}{1 + \tau a_m} B \right), \quad F_p = -\tau L_h Z_{p-1}.$$

¹⁷ Локуцкий В.О., Локуцкий О.В. Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач. -М.: ИПМ им.М.В. Келдыша АН СССР, 1984, препринт № 99, с.32.

Итерационные параметры $\{a_m, m = 1, \dots, p\}$, выражающиеся через нули многочлена Чебышева, упорядочены для устойчивости, и так, что $a_1 = 0$. В практических задачах, когда уравнение теплопроводности входит в систему других уравнений, параметры берутся в обратном порядке и последняя итерация делается в рамках всей системы, как это реализовано в НЗТ. По построению F_p есть многочлен Чебышева 1 рода, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[\lambda_0, \lambda_\infty]$, где $\lambda_0 = \lambda_\infty \operatorname{tg}^2(\pi/(4p)) \in [-1/\tau, 0]$, с условием нормировки $F_p(-1/\tau) = 1$. На отрезке $[0, \lambda_\infty]$ выполнено: $|F_p(\lambda)| \leq 1$, и $F_p(0) = 0$. Многочлен F_p легко выражается через многочлен Чебышева степени p на стандартном отрезке $[-1, 1]$.

Оценку уклонения приближенного решения $v^n = v(x, t_n)$, полученного с помощью схемы ЛИ (14), от точного решения u^n дифференциально-разностной задачи (13) дает следующее утверждение.

Теорема⁴. Пусть выполнено ограничение на временной шаг

$$\tau \leq \frac{1}{\lambda_\infty} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4p}\right).$$

Тогда при решении задачи (13) с помощью схемы ЛИ (14) для погрешности $u^n - v^n$ приближенного решения при $n\tau \leq T$ справедлива оценка

$$\|u^n - v^n\| \leq Cn\tau^2,$$

где постоянная C не зависит от p .

На основе схемы ЛИ в **разделах 2.4, 2.5** строятся две новые схемы ЛИ-М и ЛИ-2. Проводится теоретическое обоснование схем и их исследование. Эти схемы записываются с помощью операторов F_p , Z_{p-1} следующим образом.

Схема ЛИ-М:

$$v^{n+1} = S^+ v^n + \tau Q^n, \quad 0 \leq n < N, \quad v^0 = u^0,$$

$$S^+ = (E - F_p^2)B^{-1}, \quad Q^n = (E - Z_{p-1}^2)B^{-1}f^{n+1} + Z_{p-1}^2 f^n.$$

Схема ЛИ-2:

$$v^{n+1} = (E - \tau L_h \tilde{S}^+) v^n + \tau g^{n+1}, \quad 0 \leq n < N, \quad v^0 = u^0,$$

$$g^{n+1} = f^{n+1/2} - 0.5\tau L_h \tilde{Q}^{n+1/2},$$

$$\tilde{Q}^{n+1/2} = (E - \tilde{Z}_{p-1}^2) \tilde{B}^{-1} f^{n+1/2} + \tilde{Z}_{p-1}^2 f^n.$$

Величина p и все входящие операторы \tilde{S}^+ , \tilde{F}_p , \tilde{Z}_{p-1} , \tilde{B} вычисляются как в схеме ЛИ, но с заменой τ на 0.5τ . Схема ЛИ-2 основана на конструкции предиктор–корректор, в которой роль предиктора выполняет схема ЛИ-М.

Для схем ЛИ-М и ЛИ-2 доказаны теоремы о сходимости приближенных решений со скоростью $O(\tau + h^2)$ и $O(\tau^2 + h^2)$ соответственно.

В разделе 2.6 приведен качественный анализ схем ЛИ для объяснения их высокой фактической точности. Анализ основан на изучении спектров операторов послыного перехода и функции источника схем для простейшей задачи. В разделе 2.7 описываются результаты расчетов, связанных с некоторыми точными решениями одномерного или двумерного уравнения теплопроводности. Результаты одного из расчетов – решение нелинейного уравнения коэффициентом теплопроводности $k(u) = u^4$ и решением в виде бегущей температурной волны показаны на рис. 8.

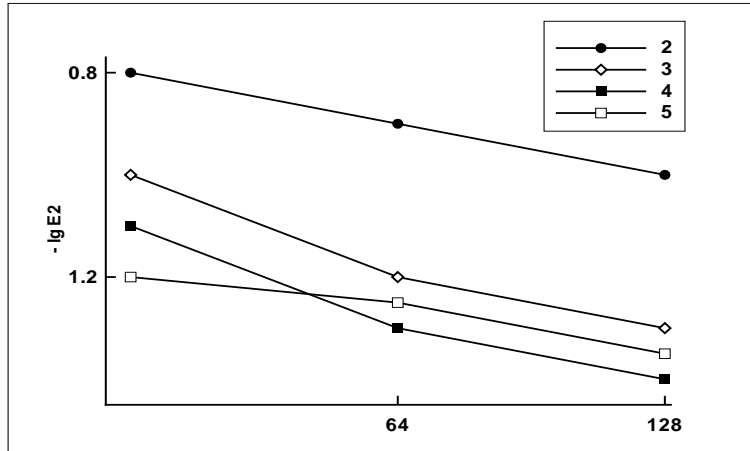


Рис. 8. Зависимость погрешности от шага сетки: 2 - неявная схема, 3 - ЛИ, 4 - ЛИ-М, 5 - ЛИ-2

Расчеты проводились на сетках с числом шагов 32, 64, 128 и шагом по времени $\tau = 0.5h$ (за это время волна проходит половину интервала сетки). На графике в логарифмическом масштабе приведена сеточная L_2 -норма погрешности приближенного решения, средняя на отрезке времени $T=11/16$. Как показывается в разделе 2.6, высокая фактической точности схем ЛИ объясняется правильным описанием эволюции основных гармоник решения, отвечающих начальному участку спектра.

Глава 3 посвящена описанию дискретизации по пространству нестационарного уравнения теплопроводности. Дискретизация строится на неортогональных криволинейных сетках с ячейками четырехугольной формы на основе интегрального закона сохранения тепла, записанного для каждой ячейки сетки. Основные результаты опубликованы в [1], [3], [18], [19].

На неортогональных сетках известные 5- или 9-точечные схемы оказываются недостаточно точными, а их сходимость может отсутствовать¹⁸. В такой ситуации строят более сложные схемы; общим для большинства из них является наличие дополнительных неизвестных. Например, в схеме “Ромб”¹⁹ неизвестными являются температура и компоненты вектора теплового потока в центре и на сторонах ячеек. В аппроксимационно-инвариантной схеме (В.Е. Трощев, Р.М. Шагалиев²⁰) температура определена в центре и вершинах ячеек, см. также работу²¹.

Кроме упомянутых работ, методы пространственной аппроксимации для уравнения теплопроводности на неортогональных сетках разрабатывались в работах российских ученых С.К. Годунова, А.В. Забродина, Г.П. Прокопова, И.Д. Софронова, А.А. Самарского, В.М. Головизнина, А.Ф. Тишкина, А.А. Фаворского, А.А. Чарахчяна и др.

Предложенные в диссертационной работе способы пространственной дис-

¹⁸ Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одной алгоритме решения уравнения теплопроводности на неортогональных сетках // Дифференц. уравнения, 1985, т. XXI, № 7, с. 1273-1276.

¹⁹ Гаджиев А.Д., Писарев В.Н., Шестаков Л.А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Ж. вычисл. мат. и матем. физ., 1982, т. 22, № 2, с. 339-347.

²⁰ Трощев В.Е., Шагалиев Р.М. Консервативные узловые схемы методов конечных разностей и конечных элементов для двумерного уравнения теплопроводности // Сб. Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1984, т. 15, № 4, с.131-157.

²¹ Трощев В.Е., Шагалиев Р.М. Проблема совмещения конечно-разностных и конечно-элементных схем в задачах газовой динамики с теплопроводностью // Матем. моделирование, 2000, т.12, № 2, с. 3-11.

кретизации используют значения температуры только в центрах ячеек, где заданы основные газодинамические функции, и являются универсальными по отношению к геометрии сетки; конкретная реализация осуществлена для случая, когда границами ячейки служат отрезки прямых либо дуги окружностей. Основное внимание уделено построению схем и их практической проверке.

В разделе 3.1 приведены принципы дискретизации. В методике НЗТ трудности дискретизации теплопроводных членов связаны с тем, что сетки являются подвижными, они подстраиваются под характер газодинамических течений. Поэтому, во-первых, сетки могут состоять из существенно различных ячеек, и, во-вторых, стороны ячеек могут быть криволинейными. Простейший способ – восполнение ребер сетки отрезками прямых – далеко не всегда дает удовлетворительный результат. Следует отметить, что в задачах моделирования сверхбыстрых процессов крайне важно по возможности точно передавать законы сохранения массы, импульса и энергии для каждой из ячеек сетки и обеспечить высокую фактическую точность этих значений. Поэтому в НЗТ реализован и показал надежность алгоритм гладкого восполнения сеточных линий, который и достаточно прост, и является естественным для трех частных случаев: одномерного плоского течения, одномерного течения с цилиндрической симметрией и сферически симметричного течения.

При выбранном способе восполнения сеточных линий базовая схема, приведенная в главе 1, и полная схема НЗТ расчета трехтемпературной газодинамики обладают важным свойством сохранять симметрию решения, т.е., какую бы группу сдвигов или вращений ни выдерживало решение исходной краевой задачи, разностное решение будет обладать той же симметрией.

Более того, схема НЗТ обладает свойством сильного сохранения симметрии²². Последнее свойство означает, что, например, в случае угловой симметрии и полярной сетки сеточное решение во всех узлах, лежащих на одной окружности, постоянно, и эта постоянная не зависит от числа узлов по угловой переменной.

Свойство сохранения симметрии важно для задач моделирования физи-

²² Шведов А.С. Разностная схема для уравнений газовой динамики, сохраняющая групповые свойства решений// Матем. заметки, 1990, т. 4, вып. 4, с. 140-151.

ческих неустойчивостей, например, неустойчивости Рэлея-Тейлора, см. главу 4.

В разделе 3.2 приведена постановка задачи, в разделе 3.3 – общая схема дискретизации, в разделах 3.4 и 3.5 приведены соответственно интерполяционная и аппроксимационные схемы и результаты их исследования для линейного и нелинейного уравнений теплопроводности. Эти схемы основаны на следующих положениях: температура как сеточная функция считается заданной в центрах ячеек, поток тепла на каждой стороне ячейки находится интерполяцией значений температуры (или её степени) на шаблоне узлов, связанным с рассматриваемой стороной четырехугольной ячейки. Рассмотрены два способа интерполяции: лагранжева, когда аппроксимирующий многочлен строится из условия совпадения в узлах шаблона с искомой функцией, и среднеквадратичная интерполяция, основанная на аппроксимации температурного поля в окрестности каждой из сторон ячеек сетки многочленом, построенным методом наименьших квадратов. В результате получают две схемы – И-схема (интерполяционная) и А-схема (аппроксимационная). В И-схеме интерполяционный многочлен строится по значениям функции на 12-точечном шаблоне, своем для каждой из сторон (см. рис. 7). Результирующий шаблон дискретизации всего уравнения является 21-точечным. В А-схеме результирующий шаблон дискретизации зависит от локальной топологии сетки, и в худшем случае является 21-точечным, а в лучшем случае – 5-точечным, т.е. А-схема является адаптивной и в отличие от И-схемы на квазиравномерных косоугольных сетках переходит в традиционные 5-, 7- или 9-точечные схемы.

Аппроксимация потока тепла записывается в локальной криволинейной системе координат, связанной с ребром. Система координат строится с учетом расположения узлов шаблона ребра, что вместе с аппроксимацией ребер дугами окружностей обеспечивает свойство сохранения симметрии. При наличии у сетки той или иной симметрии криволинейная система координат непрерывно переходит в прямоугольную декартову или полярную систему координат. С формальной точки зрения оба предлагаемых способа являются специфическими вариантами интегро-интерполяционного метода.

Дискретизация проводится для каждого внутреннего узла (k, m) (т.е. центра ячейки) сетки. Рассматривается уравнение (8) с оператором $Lu =$

$-\text{div}(\kappa \text{ gradu})$, где κ – коэффициент теплопроводности, записанное в интегральной форме

$$\iint_{S_{km}} \frac{\partial T}{\partial t} dS = \oint_{\omega_{km}} \kappa \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} d\omega + \int_{S_{km}} f dS, \quad (15)$$

где S_{km} – ячейка сетки, ограниченная контуром ω_{km} , который состоит из ее четырех криволинейных или прямолинейных ребер. Для приближенного вычисления двойных интегралов записывается простейшая квадратурная формула. Контурный интеграл разбивается на сумму четырех интегралов по числу ребер ячейки и каждый интеграл записывается приближенно

$$I_{a,b} = \int_a^b \kappa \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} d\omega \simeq \sum_{l=1}^L D_l T_l$$

в виде линейной комбинации значений температуры $T_l = T(x_k, y_l)$ на связанном с ребром некотором шаблоне узлов $\Pi_{ab} = \{(x_l, y_l), l = \overline{1, L}\}$ сетки. Максимальный шаблон состоит из 12 узлов, см. рис. 7. Эта процедура является основной при составлении разностных уравнений и описана в разделах 3.4 и 3.5.

Важными элементами этой процедуры являются:

1. Построение локальной криволинейной системы координат.
2. Выбор базисных функций для построения многочлена.
3. Назначение весов узлам шаблона (в случае, когда ставится задача среднеквадратичного приближения)
4. Формирование матрицы, определяющей коэффициенты многочлена через неизвестные значения сеточной функции в узлах шаблона.
5. Расчет контурных интегралов от производных базисных функций.
6. Расчет среднего значения коэффициента теплопроводности на ребре.

Для каждой ячейки (k, m) после суммирования четырех контурных интегралов получается непрерывное по времени t и дискретное по пространству уравнение

$$\frac{\partial T_{km}}{\partial t} = \frac{1}{|S_{km}|} \sum_{\Pi_{k,m}} \bar{D}_l T_l + f_{k,m}$$

на шаблоне узлов $\Pi_{k,m}$, полученном объединением шаблонов четырех ребер ячейки (k, m) , l – номер узла шаблона $\Pi_{k,m}$, \bar{D}_l – разностные коэффициенты,

а сумма берется по всем узлам шаблона.

Для практической проверки предложенных схем проведены расчеты по оценке их точности и сравнению их с некоторыми другими схемами, упомянутыми в начале главы.

Глава 4 посвящена численному исследованию динамики сферических мишеней тяжелоионного термоядерного синтеза. Основные результаты опубликованы в [4]– [6], [21].

В **разделе 4.1** приведены основные характеристики этой мишени и проблемы, связанные с ее работоспособностью. Известно, что благоприятным фактором для создания условий термоядерного горения является сферическое сжатие вещества. Однако, для систем ИТИС характерно несферическое облучение мишеней. Степень несферичности зависит от многих причин: количества и формы пучков ионов, распределения интенсивности энергии по сечению пучков, их пространственного расположения и т.д. Это существенно усложняет задачу симметризации сферического сжатия. Поэтому необходимо учитывать влияние на динамику мишени малых возмущений, которые неизбежно возникают по указанным причинам и могут возрасти до величин, существенно нарушающих сферичность сжатия. Задача расчета динамики мишени с учетом возмущений в полной постановке является трехмерной. В данной исследовании рассматривается двумерный осесимметричный случай. В качестве инструмента для численного исследования использовалась однотемпературное приближение. В **разделе 4.2** приведена краткая формулировка задачи. Для изучения влияния асимметрии облучения на процесс сжатия мишени и оценки конструктивных способов симметризации ставятся две модельные задачи 1 и 2. Подробно они описаны **разделах 4.3** и **4.4** соответственно. В задаче 1 рассматривается сферически-симметричная мишень, представляющая собой 4 вложенных друг в друга сферических слоя, так же как и на рис. 3, но состав слоев другой. Внешние области выполнены из бериллия (Be) и свинца (Pb) и являются приемниками энергии тяжелых ионов, пушер выполнен из золота (Au). Удельная мощность энерговложения Q в сферических координатах (r, φ, θ) зависит в каждой из областей Be и Pb только от угла θ (полярного расстояния):

$$Q(\theta) = Q_0(1 + m \cos n\theta), \quad (16)$$

где Q_0 – постоянная (своя для каждой области), m – амплитуда возмущения, n – номер гармоники (волновое число). Вложение энергии постоянно во времени и его продолжительность (17 нс) сравнима с характерным гидродинамическим временем мишени (20 нс). Асимметрия вида (16) моделирует, например, неоднородности облучения. В основе выбора амплитуды и номера гармоники лежат эмпирические соображения, согласно которым интерес представляют, в частности, значения $m = 0.05$, $n = 8$. Можно сразу сказать, что указанная амплитуда близка к критической величине для сжатия центральных областей мишени.

В задаче 2 внешняя оболочка (Pb) мишени профилировалась специальным образом: форма оболочки подбиралась так, чтобы пучки ионов (оси пучков направлены перпендикулярно оси вращения) останавливались на внешней границе пушера (Au), отдавая свою энергию в областях Pb и Be . Такое профилирование толщины внешнего слоя Pb проводилось для компенсации несимметрии энерговложения и обеспечения благоприятных условия кумуляции, близких к условиям сферического сжатия. Энерговложение в каждой из двух внешних областей задавалось постоянным в соответствии со средним энерговложением Q_0 задачи 1.

Каждая из задач 1 и 2 имеет самостоятельный интерес, но между ними есть связь методического характера, обусловленная явлениями гидродинамической неустойчивости, присущими этим задачам. Убедительное решение задачи 1 дополнительно обосновывает правильность выбора формы внешней оболочки мишени в задаче 2.

Раздел 4.5 посвящен изложению принципов и результатов параллельной реализации программы НЗТ на многопроцессорной ЭВМ с широким параллелизмом, представляющей вычислительные ресурсы, адекватные сложности динамических процессов в мишенях ИТИС. Отметим, параллельная реализация алгоритма такой сложности и серийные многовариантные расчеты были, по-видимому, одними из первых в стране. На рис. 9 показана эффективность параллельной программы; вариант 1 означает использование обычного геометрического параллелизма, а варианте 2 использован дополнительно функциональный параллелизм: расчет границ и сеток был совмещен с расчетом теплопроводности, а также были буферизованы обмены данными

по границам сеточных фрагментов.

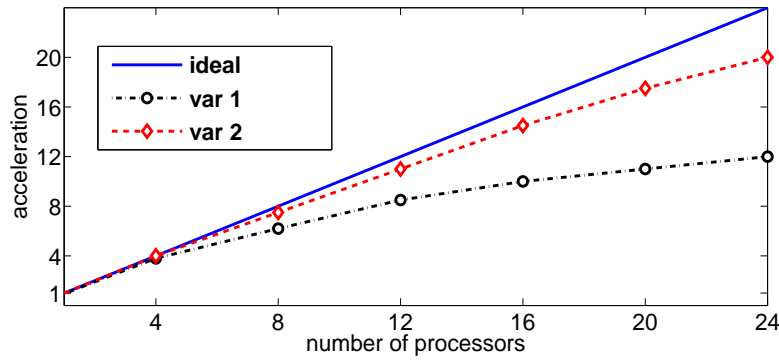


Рис. 9. Эффективность расчетов по параллельной программе

В разделе 4.6 приведены выводы. Результаты расчетов показали, что динамика мишени ИТИС – существенно нелинейный процесс, сопровождаемый развитием рэлей-тейлоровской неустойчивости на границах пушера. Развитие неустойчивости усложняет проблему симметризации сжатия. В задаче 1 малые угловые возмущения энерговложения приводят к значительным деформациям пушера. В рассматриваемой модели возмущение с относительной амплитудой в 5% приводит к различию максимальной и минимальной толщины пушера в 10 раз. Теплопроводность выполняет роль симметризирующего фактора, но не снимает проблему симметризации сжатия полностью. Указанное возмущение энерговложения генерирует в волновом спектре внешней границы пушера гармоники с более высокими номерами $n \leq 24$, но среди всех них наиболее заметны лишь основная 8-ая и 16-ая гармоники (их амплитуды в конце расчета составляют 19% и 8% соответственно). Это значит, что в задачах такого типа следует исходить при выборе сетки из соображений правильного описания эволюции не только заданной основной гармоники, но и более высоких гармоник, возбуждаемых ею.

В задаче 2 специальное профилирование внешней оболочки мишени обусловлено асимметричным облучением тяжелоионными пучками. В расчетах показывается, что этим профилированием обеспечивается допустимая деформация пушера с достижением параметров сжатия, близких к термоядерным.

Полученные при исследовании задачи 1 практические доказательства правильности передачи методикой эволюции возмущений означают, что отсутствие критического роста возмущений в задаче 2 обусловлено удачным профилированием внешней оболочки, а не погрешностью методики (например, выглаживанием возмущений аппроксимационной вязкостью). В этом состоит методическая связь двух задач.

Средствами внутреннего контроля и сравнением с другими методиками показана работоспособность данной численной модели и ее возможность служить инструментом исследования сложных газодинамических и тепловых процессов в термоядерных мишенях. На рис. 10, 11, 12 наглядно показана деформация сферической и профилированной мишеней в результате роста возмущений.

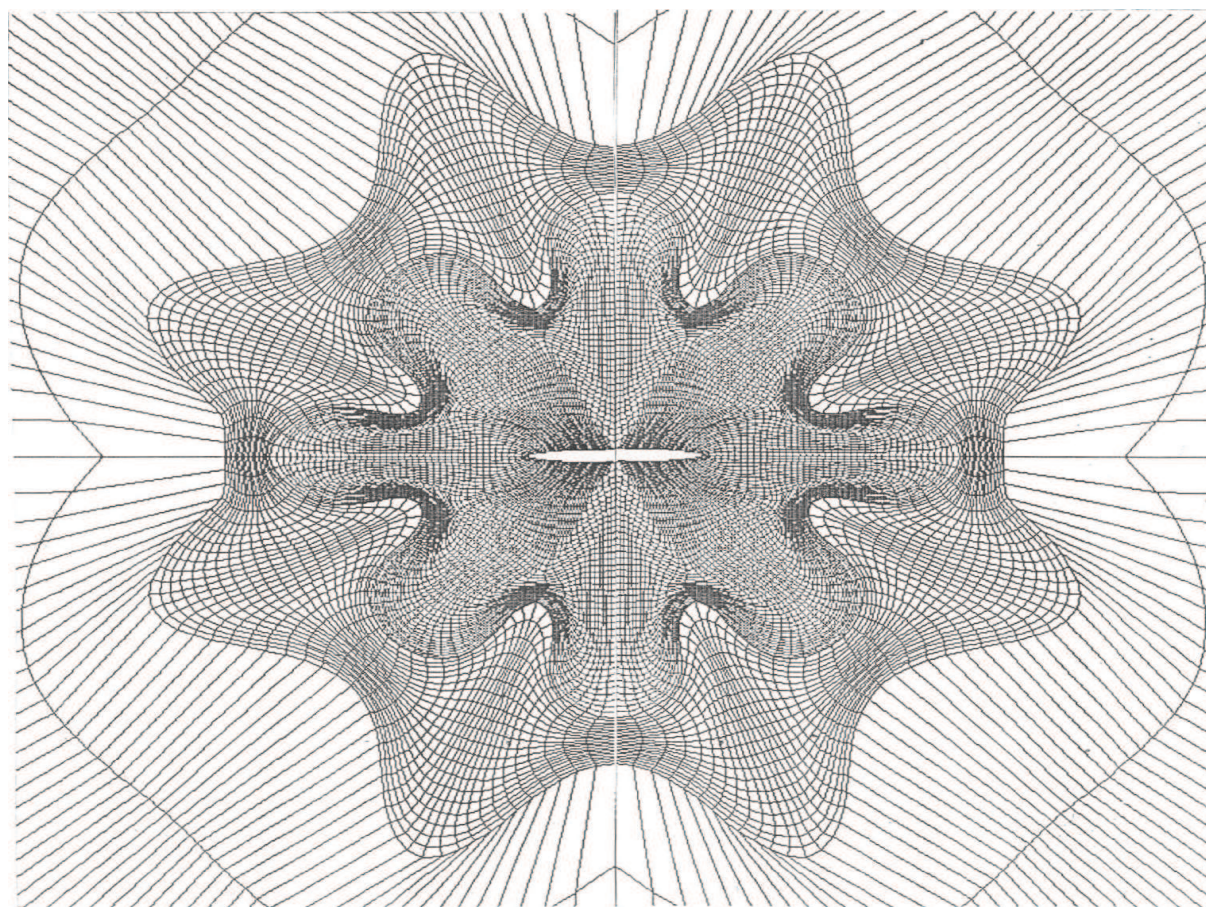


Рис. 10. Деформация центральной части сферической мишени

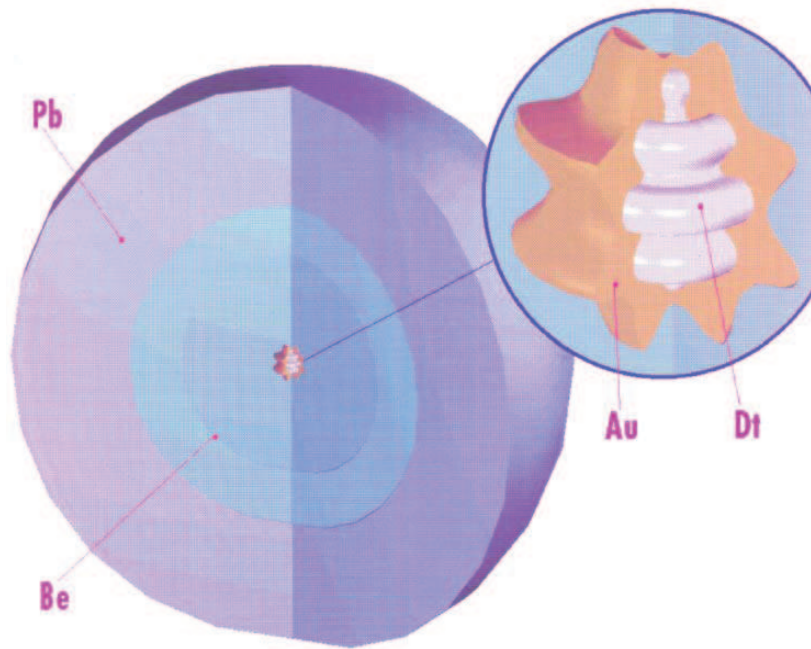


Рис. 11. Деформация сферической мишени

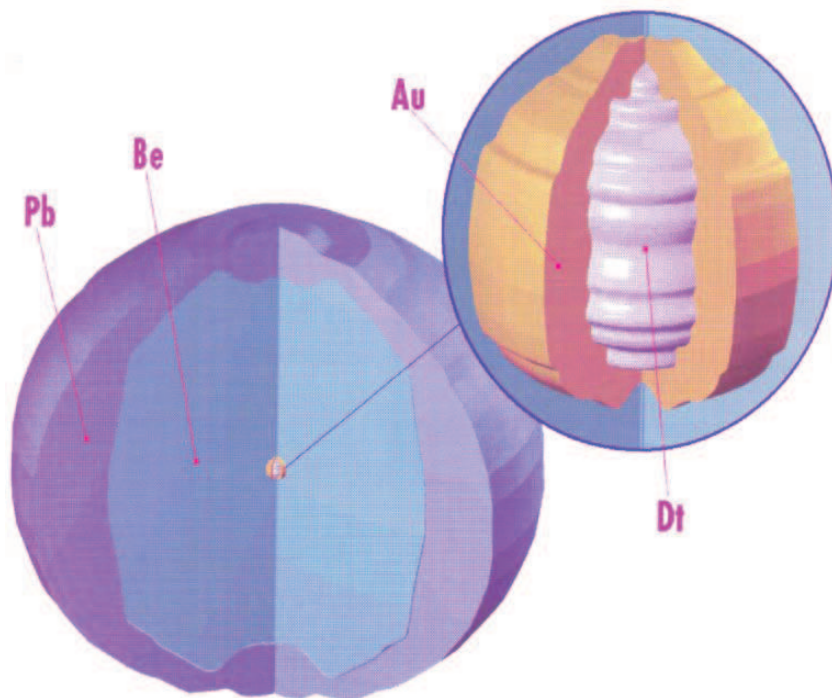


Рис. 12. Деформация мишени с профилированной оболочкой

Глава 5 посвящена численному моделированию цилиндрических мишеней ИТИС, облучаемых с торцов пучками тяжелых ионов. Основные результаты опубликованы в [9], [15], [25]. Для классических цилиндрических мишеней с пушером из неделящегося вещества получены с помощью методики НЗТ многочисленные результаты, достаточно полно представленные в диссертации Н.М. Гиззаткулова²³, при подготовке которой автор данной работы выступал в качестве научного консультанта.

Новый этап исследований связан с перспективным направлением безопасного процесса получения ядерной энергии на основе тяжелоионного ускорителя и гибридной термоядерной мишени с урановым пушером²⁴. В таком пушере в процессе сжатия DT-топлива выделяется энергия в результате деления урана под действием нейтронов, рожденных в результате термоядерных реакций в DT-топливе. Термоядерные нейтроны попадают в урановый пушер и обеспечивают дополнительное энерговыделение, усиливающее сжатие топлива. В условиях инерционного тяжелоионного синтеза возникает возможность получения цепной реакции деления для цилиндрической мишени ИТИС. Математическая модель для описания вклада в энерговыделение ядерных реакций в урановом пушере предложена В.С. Имшенником в работе²⁵.

В **разделе 5.1** приведены сведения о конструкции и параметрах модели цилиндрических мишеней с урановым пушером. Обсуждаются вопросы достижения критических условий в пушере и использования такого пушера для существенного увеличения энерговыделения в гибридной мишени.

В **разделе 5.2** приведен алгоритм расчета критических параметров уранового пушера на основе прямого решения интегрального уравнения Пайерлса, записанного для концентрации нейтронов в цилиндрически-симметричном случае при некоторых упрощениях.

Раздел 5.3 содержит описание вклада в энерговыделение ядерных ре-

²³ *Гиззаткулов Н.М.* Численное моделирование двумерной нестационарной газовой динамики в трехтемпературном приближении с учетом термоядерного горения // Дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2006

²⁴ *Кошкарёв Д.Г., Шарков Б.Ю.* Ядерное деление с инерционным удержанием // Письма в ЖЭТФ, 2002, т. 75, вып. 7, с. 371-373.

²⁵ *Имшенник В.С.* Аналитический метод определения параметров цепной реакции деления для цилиндрического уранового стержня и оценки энерговыделения гибридных мишеней ИТИС // Ядерная физика, 2006, т. 69, № 10, с. 1690-1700.

акций вынужденного деления урана под действием термоядерных нейтронов.

В разделе 5.4 описаны расчеты гибридной мишени и приведены полученные результаты. В качестве характерной выбрана четырехоболочечная мишень, схематически изображенная на рис. 2, но с урановым пушером. Для достижения достаточно высоких сжатий по радиусу, важных для повышения вклада нейтронно-ядерных реакций, энерговложение в тампер (равномерное по его массе) задается профилированным по времени. Такое профилирование обеспечивает достаточно продолжительно безударный режим сжатия мишени и высокий коэффициент усиления. На рис. 11 приведены графики внешней (R) и внутренней ($R1$) границ пушера для гибридной и традиционной мишени. Предварительные двумерные расчеты показали, что движение центральной части мишени остается невозмущенным и одномерным. Так как исследование гибридной мишени носит поисковый многопараметрический характер, то расчеты были одномерными.

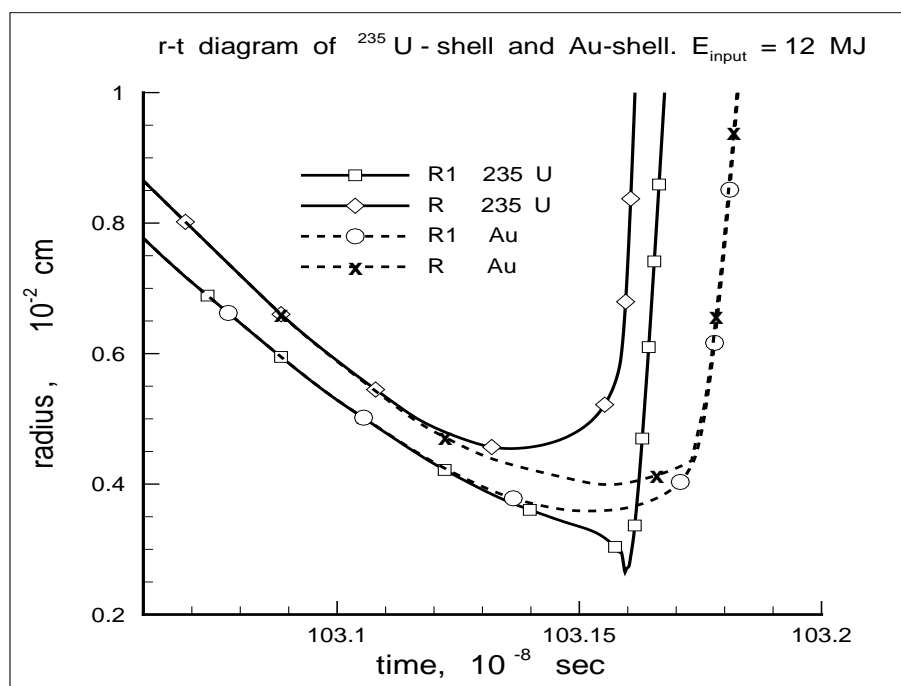


Рис. 11. $r - t$ -диаграммы границ пушера для гибридной мишени (сплошная линия) и традиционной мишени с золотым пушером (пунктир)

Раздел 5.5 содержит выводы, полученные на основании данных вычислительных экспериментов. Подтверждается, что использование гибридных ми-

шеней ИТИС: 1) существенно повышает энергетический выход установки; 2) способствует эффективности термоядерного горения; 3) значительно повышает сжатие топлива, порождая процесс самоподдерживающегося горения в системе пушер+топливо; 4) приближает достижение критического состояния пушера, в котором помимо реакций вынужденного деления урана возникает цепная реакция деления. Критические условия в пушере не достигались в рассматриваемых (неоптимизированных) мишенях, но были близкими в исследованном режиме безударного сжатия. Вклад цепной реакции деления может быть увеличен с использованием иного делящегося вещества, а также по пути оптимизации сочетания термоядерных и нейтронно-ядерных реакций в гибридных мишенях.

Основные результаты

1. Для газодинамической модели развиты и реализованы принципы расчета теплопроводных процессов, протекающих в фотонно-электронно-ионной среде.

2. Разработаны и исследованы новые методы дискретизации по пространству и времени нелинейной системы уравнений теплопроводности на криволинейных подвижных сетках. Они обеспечивают консервативность, сохранение симметрии решений и эффективность комплекса НЗТ при работе на многопроцессорных системах. В классе явно-итерационных схем с чебышевскими параметрами построены две новые схемы интегрирования по времени. Для линейного случая доказаны теоремы о сходимости схем, проведена практическая проверка построенных схем на многочисленных задачах-тестах. Проведено объяснение причин высокой фактической точности схем (и практической монотонности для построенной схемы первого порядка) на основе исследования эволюции основных мод решения и разностных функций источника для модельных задач.

3. На основе предложенных методов расчета развит программный комплекс НЗТ для расчета мишеней ИТИС, функционирующий на многопроцессорных системах, получено подтверждение его высокой параллельной эффективности. Разработан параллельный алгоритм, сочетающий геометрический и функциональный параллелизм. Средствами внутреннего контроля показана работоспособность данной численной модели и ее возможность служить

инструментом исследования сложных газодинамических и тепловых процессов в термоядерных мишенях.

4. Исследован подход к построению блочно-структурных сеток на основе теории квазиизометрических отображений, оценена его работоспособность и эффективность.

5. Проведено численное моделирование двух сферических моделей мишени ИТИС в условиях развития гидродинамической неустойчивости. Подтверждена возможность профилирования внешней оболочки для компенсации асимметрии облучения и достижения необходимых параметров сжатия. В расчетах изучен рост возмущений на границах раздела сред и получена оценка допустимых начальных возмущений.

6. Исследована динамика цилиндрической мишени ИТИС при режимах безударного сжатия, в том числе и динамика гибридной мишени, имеющей источник нейтронного энерговыделения в урановой оболочке. В расчетах установлено, что в гибридной мишени: 1) существенно повышается КПД; 2) значительно повышается сжатие топлива, порождая процесс самоподдерживающегося горения в системе – урановая оболочка + термоядерное топливо; 3) может быть достигнуто критическое состояние, в котором помимо реакций вынужденного деления урана возникает цепная реакция.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждена сравнением с другими расчетными методиками (ИТЭФ, ВНИИЭФ).

Таким образом, сделан крупный вклад в математическое моделирование безопасного процесса получения ядерной энергии на основе тяжелоионного ускорителя и термоядерной мишени: развита вычислительная модель, построены алгоритмы и программы для исследования динамики мишеней на многопроцессорных компьютерах. Результаты, представленные в диссертации, являются новыми, обоснованы, исследования выполнены на высоком научном уровне, имеют значительную научную и практическую ценность.

Публикации по теме диссертации.

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.

- [1] Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Разностные схемы решения нестационарного двумерного уравнения теплопроводности на криволинейных сетках и их реализация на параллельной вычислительной системе// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов, 1992. в. 3, с. 66-71.
- [2] Жуков В.Т. Явно-итерационные схемы для параболических уравнений// Вопросы атомной науки и техники. Матем. моделирование физ. процессов, 1993, № 4, с. 40-46.
- [3] Жуков В.Т., Забродин А.В., Феодоритова О.Б. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 33, № 8, 1993.
- [4] Гусев А.В., Жуков В.Т., Забродин А.В., Лацис А.О., Луцкий А.Е., Петрущенко И.Л., Поздняков Л.А., Феодоритова О.Б. Решение задач газовой динамики и аэродинамики на параллельных ЭВМ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов, 1993, вып.2. с.44-54.
- [5] Жуков В.Т., Забродин А.В., Феодоритова О.Б. Особенности численного моделирования мишени итерационного термоядерного синтеза в приближении теплопроводной газовой динамики //Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 34, № 12, 1994. с. 1852-1866.
- [6] Жуков В.Т., Забродин А.В., Имшенник В.С., Феодоритова О.Б. Численное исследование процесса сжатия несферической мишени тяжелоионного термоядерного синтеза в приближении двумерной теплопроводной газодинамики// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов, 1994, вып. 1, с. 8-18.

- [7] *A.S. Shvedov, V.T. Zhukov.* Explicit iterative difference schemes for parabolic equations. Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 13 (1998), № 2, P. 133-148. [In English]
- [8] *S.K. Godunov, O.B. Feodoritova, V.T. Zhukov.* Algorithm for construction of quasi-isometric grids in curvilinear quadrangular regions. In: XVI Internat. Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Phys., V. 515, 49-54, Springer, Berlin, 1998
- [9] *Алексеев Н.Н., Баско М.М., Забродина Е.А., Имшенник В.С., Кошкарев Д.Г., Чуразов М.Д., Шарков Б.Ю., Долголева Г.В., Забродин А.В., Жуков В.Т., Орлов Ю.Н., Субботин В.И.* Разработка энергетической установки, сочетающей синтез и деление на основе микромишеней прямого действия и мощного тяжелоионного драйвера. Атомная энергия, 2004, т. 97, вып. 3, с. 200-209,
- [10] *S.K. Godunov, O.B. Feodoritova, and V. T. Zhukov.* On one Class of Quasi-isometric Grids. In: O.V. Ushakova (Ed.), Advances in Grid Generation, Nova Science Publishers, New York, 2005. (Chapter 2), p.53-68.
- [11] *Годунов С.К., Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.* Метод расчета инвариантных подпространств для симметричных гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. т.46, № 6, с.1041 - 1053.
- [12] *Бабий Д.П., Годунов С.К., Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.* О разностных аппроксимациях переопределенных гиперболических уравнений классической математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, т.47, № 3, с.445 - 459.
- [13] *S.K. Godunov, O.B. Feodoritova, V.T. Zhukov.* Computation of Eigenspaces of Hyperbolic Systems. In: Computational Fluid Dynamics 2006, H. Deconinck, E. Dick (Eds.). Springer, 2009, p.143-148.

Статьи в рецензируемых изданиях.

- [14] Годунов С.К., Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Об одном классе квази-изометрических сеток. Труды Всерос.конфер. “Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления”, ВЦ РАН, 2004, с. 5-16.
- [15] V.S. Imshennik, V.T. Zhukov. Contribution of neutron reactions in hybrid targets of inertial heavy ion fusion (HIF). American Institute of Physics Conference Proceedings: V.849(2006), p. 221-236, (Zababakhin scientific talks - 2005: Internat. Conf. on High Energy Density Physics). In English.

Прочие публикации автора по теме диссертации.

- [16] Жуков В.Т. Численные эксперименты по решению уравнения теплопроводности методом локальных итераций. -М.: ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1984, препринт № 97, с.22.
- [17] Жуков В.Т. Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений. -М.: ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1986, препринт № 183, с.20.
- [18] Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Интерполяционные схемы для численного решения уравнения теплопроводности. -М.:ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1988, препринт № 80, с.32.
- [19] Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Разностные схемы для уравнения теплопроводности на основе локальных среднеквадратичных приближений. -М.: ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1989, препринт № 97, с.20.
- [20] Жуков В.Т., Забродин А.В., Феодоритова О.Б. Схема решения нестационарных двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью на подвижных криволинейных сетках. -М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991, препринт № 18, с.28.

- [21] Жуков В. Т., Забродин А. В., Имшенник В. С., Феодоритова О. Б. Численное моделирование мишени тяжелоионного синтеза в приближении теплопроводной газодинамики. -М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1993, препринт № 41, с.32.
- [22] Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод решения эллиптических уравнений с использованием чебышевских итераций. -М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1996, препринт № 16, с.20.
- [23] Алалыкин Г.Б., Жуков В.Т., Забродин А.В. и др. Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении в областях сложной формы с подвижными границами (НЗТ). -М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, отчет НИР 8-1-04, 2004, 244 с.
- [24] Годунов С.К., Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Алгоритм спектрального анализа для симметрических гиперболических систем. -М.:ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2005, препринт № 91, с.32.
- [25] Жуков В.Т., Имшенник В.С. Модели гибридных мишеней ИТИС с использованием безударного сжатия// Сборник научных трудов. Высокопроизводительные вычисления в задачах механики и физики. -М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009, с. 95-109.