

На правах рукописи

Устюгов Дмитрий Олегович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ЛАЗЕРНОЙ ПЛАЗМЫ  
ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в Институте Математического Моделирования  
Российской Академии Наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор В.И. Мажукин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Ю.А. Повещенко

доктор физико-математических наук,  
профессор И.Г. Лебо

Ведущая организация: Институт Астрономии РАН

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2010 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании  
диссертационного совета Д 002.058.01 при Институте математического  
моделирования по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл. д 4-А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института  
математического моделирования РАН.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2010 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

доктор физико-математических наук

Н.В. Змитренко

## **Общая характеристика работы**

Диссертация посвящена математическому моделированию эволюции лазерной плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле.

### **1.1 Актуальность темы**

В настоящее время существует большой интерес к явлениям, протекающим при воздействии лазерного излучения на твердую мишень. Взаимодействие мощного лазерного излучения с твердотельными мишенями характеризуется необычайно большим спектром явлений, наблюдаемых в самых разных областях физики. Одним из таких явлений является образование лазерной плазмы. Лазерная плазма образуется в процессе абляции - процессе удаления (испарение, сублимация) малой части конденсированного вещества под действием лазерного импульса. Образующаяся таким образом плазма обладает уникальными характеристиками, так как обладает высокой плотностью, температурой, скоростью, состоит из разных сортов ионов, электронов и нейтралов, а также является мощным источником излучения. Лазерная плазма в зависимости от постановки эксперимента и целей оказывает либо негативное, либо положительное воздействие на сам ход эксперимента. Например, с точки зрения качественной обработки материалов при облучении лазером, такая плазма оказывает негативное влияние, так как создает перед мишенью профиль плотности. Разлетающаяся плазма частично поглощает излучение лазера, препятствуя его распространению к поверхности мишени. Помимо этого такая плазма имеет и ряд преимуществ: является источником многозарядных ионов, используемых в ускорителях, спектроскопии, рентгенолитографии, позволяет получать сильные ударные волны. Плазма, осаждающаяся на подложке, расположенной над поверхностью мишени, позволяет получить сверхпроводящие пленки для электронных приборов. Разлет плазмы и ее охлаждение при радиационном излучении позволяют получить наночастицы, размером порядка нескольких нанометров. Все это

стимулирует проведение теоретических и экспериментальных исследований, позволяющие определять механизмы возникновения и дальнейшей эволюции плазмы, а также динамику таких параметров как температура и плотность.

Характеристики лазерной плазмы и ее эволюция зависят от следующих параметров: химического состава мишени, параметров лазерного излучения длины волны, интенсивности и длительности (плотность потока, длительность импульса и т.д.), состава внешней среды (вакуум или газ), наличие магнитных и других полей.

В настоящее время существует большое количество экспериментальных, теоретических и численных работ, посвященных изучению физического состояния лазерной плазмы. Преимущество математического моделирования по сравнению с экспериментальными методами изучения лазерной плазмы состоит в том, что позволяет с достаточно хорошей точностью заменить сложные и дорогостоящие экспериментальные установки.

## **1.2 Цель и задачи работы**

Основная цель данной диссертации состоит

- В исследовании с помощью математического моделирования поведения лазерной плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле.
- В построении вычислительного алгоритма для решения системы уравнений магнитной гидродинамики и уравнений переноса излучения, используемых в данной работе для описания эволюции лазерной плазмы.
- В определении основных механизмов переноса энергии на различных стадиях эволюции лазерной плазмы.

## **1.3 Научная новизна**

В настоящее время практически отсутствуют численные работы, в которых эволюция плазменного факела рассматривается в двумерной постановке с учетом излучения и наличием внешнего магнитного поля. Основная научная новизна представленной работы заключается в создании математической модели, описывающей разлет плазменного факела во внешнюю газовую среду с учетом внешнего магнитного поля. Анализ результатов моделирования позволил определить роль переноса излучения и магнитного поля в процессах, происходящих в разлетающейся плазме.

#### **1.4 Научная и практическая ценность**

Разработанные математическая модель и вычислительные алгоритмы используются для изучения влияния внешнего магнитного поля на плазму, образованную под действием лазерного излучения вблизи твёрдой мишени. Определены особенности процесса эволюции плазмы в воздухе для различных значений интенсивности лазерного импульса и величины магнитного поля. Моделирование показало, что учет переноса излучения приводит к уменьшению скорости частиц плазмы и температуры за фронтом ударной волны и сокращению области повышенной кинетической энергии на самом фронте ударной волны. Показано, что под действием градиента магнитного давления движение плазмы происходит, в основном, вдоль силовых линий в вертикальном направлении.

#### **1.5 Апробация диссертации**

Материалы диссертации докладывались на Третьем и Четвертом Международных научных семинарах “Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах” (Москва, 31 января - 4 февраля 2006; Москва, 30 января – 3 февраля 2007); на Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений” (Новосибирск, 5-12 октября 2008).

#### **1.6 Публикации**

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 5 работах, указанных в конце автореферата.

### 1.7 Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 48 наименований. Объем диссертации составляет 125 стр., включает 63 рисунков.

## II. Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы. Проводится обзор литературы по экспериментальным и вычислительным методам, посвященным изучению лазерной плазмы.

**Первая глава** посвящена описанию математической модели, используемой для численных расчетов задачи о гидродинамическом разлете лазерной плазмы в газовой среде с наличием внешнего магнитного поля.

В начальный момент времени плазма, образованная в результате действия лазера на алюминиевую мишень, сосредоточена в небольшой области  $Z_h \times R_h$  (рис. 1) вблизи начала системы координат и находится в среде, состоящей из воздуха. Плазма помещена в однородное магнитное поле с одной вертикальной компонентой.

Горячая подобласть  $Z_h \times R_h$  нагревается однократным лазерным импульсом с заданной максимальной интенсивностью  $G_0$  и гауссовым [1] пространственно-временным распределением

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}\right)$$
 длительностью 30 нс и длиной волны

$$\lambda = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

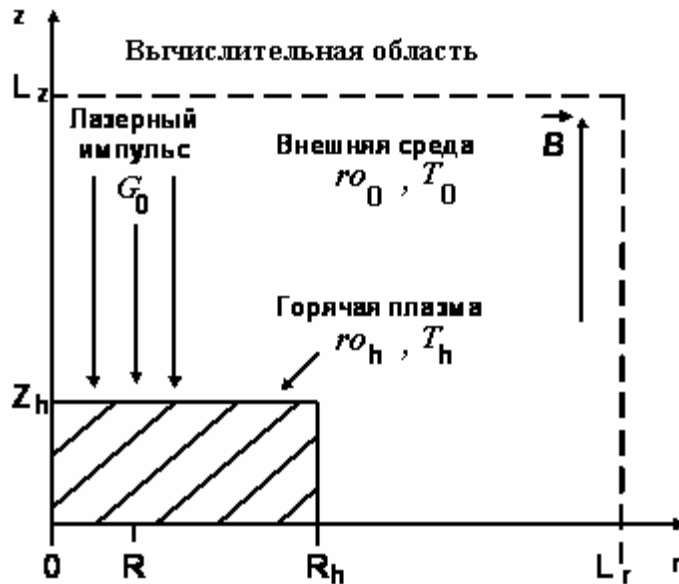


Рис.1. Вычислительная область и начальные условия

Для математического описания нестационарного гидродинамического разлета плазмы во внешнем магнитном поле использовалась замкнутая МГД - система уравнений, записанная в цилиндрической системе координат. В полной системе уравнений присутствуют члены, учитывающие кривизну пространства, действие источника лазерного излучения и изменение внутренней энергии за счет переноса излучения:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{F}) + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \vec{S} \quad (1)$$

$$\vec{U} = (\rho, \rho v_r, \rho v_\varphi, \rho v_z, B_r, B_\varphi, B_z, E)^T \quad (2)$$

$$\vec{F} = (\rho v_r, \rho v_r^2 - B_r^2 + P^*/r, \rho v_r v_\varphi - B_r B_\varphi, \rho v_r v_z - B_r B_z, 0, v_r B_\varphi - v_\varphi B_r, v_r B_z - v_z B_r, (E + P^*)v_r - B_r (\vec{B} \cdot \vec{v}))^T \quad (3)$$

$$\vec{H} = (\rho v_z, \rho v_r v_z - B_r B_z, \rho v_z v_\varphi - B_z B_\varphi, \rho v_z^2 - B_z^2 + P^*, v_z B_r - v_r B_z, v_z B_\varphi - v_\varphi B_z, 0, (E + P^*)v_z - B_z (\vec{B} \cdot \vec{v}))^T \quad (4)$$

$$\vec{S} = (0, (\rho v_\varphi^2 - B_\varphi^2)/r, (-\rho v_r v_\varphi + B_r B_z)/r, 0, 0, (v_r B_\varphi + v_\varphi B_r)/r, 0, k_l G + ck_r U - 4k_r \sigma T^4)^T \quad (5)$$

$$P^* = P + \frac{1}{2}B^2, P = P(\rho, \varepsilon) \quad (6)$$

Здесь  $\vec{U}$  – вектор консервативных переменных,  $\vec{F}$ ,  $\vec{H}$  – векторы потоков,  $P^*$  – полное давление, учитывающее газодинамическое и магнитное давление,  $\vec{S}$  – вектор источников, содержащий компоненты, связанные с кривизной пространства и источником излучения.

Пространственно – временное распределение лазерной интенсивности  $G$  имеет гауссовый профиль по пространству и времени и в вертикальном направлении находится из уравнения (7)

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -k_l G \quad (7)$$

где  $k_l$ ,  $R$ ,  $\tau$  - коэффициент поглощения, радиус фокусировки и длительность излучения лазерного импульса соответственно, а  $G_0$  - значение интенсивности в максимуме.

Уравнение состояния плазмы  $p = p(\rho, \varepsilon)$  и окружающей среды были взяты из работ [2, 3] и использовались в виде двумерных таблиц для алюминия.

Перенос излучения рассматривался в многогрупповом диффузионном приближении [4 - 6] – для каждой группы  $k = (1...N)$  решалось стационарное уравнение для плотности излучения:

$$-\nabla D \text{grad} U_k + ck_k U_k = ck_k U_{keq} \quad (8)$$

где индекс  $k$  означает номер группы частот,  $k_k$  - коэффициент поглощения излучения плазмы для определенной частоты с номером  $k$ ,  $U$  - плотность излучения, а  $U_{keq}$  - равновесная плотность излучения,  $D = c\lambda / (3k_k)$  - коэффициент диффузии. В обычном диффузионном приближении  $\lambda = 1/3$ .



Для расчета коэффициента диффузии применялась функция ограничителей потоков излучения [7]:

$$\lambda(R) = \frac{1}{\sqrt[m]{1 + R^m}}, \quad (9)$$

где  $R = \frac{|\nabla U|}{3k_k U}$ . Это позволило аккуратно перейти от области с диффузионным

приближением к области, где выполняется режим свободного распространения фотонов. Если поток излучения обозначить через  $\vec{F}_{Rad} = -D\nabla U$ , тогда

при  $R \rightarrow \infty$  :  $|F_{Rad}| = cU$  (свободное распространение излучения без поглощения), а при  $R \rightarrow 0$  :  $\vec{F}_{Rad} = -\frac{c\nabla U}{3k}$  имеем диффузионное приближение.

Таким образом, для конкретной группы частот коэффициент диффузии не является константой. При расчетах использовались пять - семь групп по частоте. Коэффициент поглощения в зависимости от температуры и плотности вещества был взят из 2-мерных таблиц, рассчитанных в работе [2].

Решение системы уравнений (3), где  $k=1..N$ , позволяло найти в каждой точке расчетной области плотность излучения

$$U = \sum_{k=1}^N U_k \quad (10)$$

Внутренняя энергия с учетом охлаждения определялась из уравнения

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = ck_r U - 4k_r \sigma T^4 \quad (11)$$

В качестве граничных условий использовались следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
& \rho_{r=0, z} = \rho_{r+\Delta r, z}, \quad P_{r=0, z} = P_{r+\Delta r, z}, \\
\text{На оси } r = 0: & \quad v_{r=0, z} = -v_{r+\Delta r, z}, \quad v_{r=0, z} = v_{r+\Delta r, z}, \\
& B_{r=0, z} = -B_{r+\Delta r, z}, \quad B_{r=0, z} = B_{r+\Delta r, z}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{r, z=0} = \rho_{r, z+\Delta z}, \quad P_{r, z=0} = P_{r, z+\Delta z}, \\
\text{На оси } z = 0: & \quad v_{r, z=0} = v_{r, z+\Delta z}, \quad v_{r, z=0} = -v_{r, z+\Delta z}, \\
& B_{r, z=0} = -B_{r, z+\Delta z}, \quad B_{r, z=0} = B_{r, z+\Delta z}
\end{aligned} \tag{10}$$

На верхней и нижней границах  $L_r$  и  $L_z$  значения физических переменных сносятся с предыдущего расчетного слоя.

Для уравнения переноса излучения граничные условия выглядят следующим образом:

$$r = 0: \quad v = 0, F_r = 0; \quad z = 0: \quad U = 0, F_r = c \frac{U}{2} \tag{11}$$

$$r = L_r: \quad F_r = -c \frac{U}{2}; \quad z = L_z: \quad F_z = -c \frac{U}{2}. \tag{12}$$

**Во второй главе** описан численный метод и представлены результаты четырех тестов численной схемы. Для численного решения системы (1) была применена консервативная TVD разностная схема со вторым порядком по пространству и времени [8]. Пусть  $U_{ij}^n$  - значение вектора переменных с начальный момент времени, тогда

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n - \Delta t \cdot L_{ij}^n \tag{13}$$

где

$$L_{ij}^n = \frac{r_{i+1/2, j} F_{i+1/2, j}^n - r_{i-1/2, j} F_{i-1/2, j}^n}{0.5(r_{i+1/2, j}^2 - r_{i-1/2, j}^2)} + \frac{H_{i, j+1/2}^n - H_{i, j-1/2}^n}{z_{i, j+1/2} - z_{i, j-1/2}} - S_{ij}^n \tag{14}$$

- оператор потоков,  $F_{i+1/2,j}^n$  и  $H_{i,j+1/2}^n$  средние значения

$$\text{потоков } F_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left[ F_{i,j} + F_{i+1,j} + R_{i+1/2} W_{i+1/2} \right]$$

где  $R_{i+1/2}$  - матрица правых собственных векторов якобиана  $\frac{\partial F}{\partial U}$ , величина  $W_{i+1/2}$  называется матрицей диссипации.

Уравнение переноса излучения (8), записанное в конечно-разностном виде (15), приводилось к линейному виду относительно искомой величины  $U_{i,j}$ , и решалось методом BiCG-STAB [9].

$$\frac{r_{i+1/2} F_{r,i+1/2,j} - r_{i-1/2} F_{r,i-1/2,j}}{0.5(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)} + \frac{F_{z,i,j+1/2} - F_{z,i,j-1/2}}{z_{j+1/2} - z_{j-1/2}} + ck_{i,j} U_{i,j} = ck_{i,j} U_{keq,i,j} \quad (15)$$

где

$$F_{r,i+1/2,j} = -D_{i+1/2}^r \frac{(U_{i+1,j} - U_{i,j})}{(r_{i+1} - r_i)}, \quad F_{z,i,j+1/2} = -D_{j+1/2}^z \frac{(U_{i,j+1} - U_{i,j})}{(z_{j+1} - z_j)}, \quad (16)$$

Вычисления на каждом временном слое осуществлялись с помощью метода Рунге-Кутты 3-го порядка [10]. Величина шага по времени для части исходных уравнений без источников определялась из условия Куранта

$$\Delta t_h = C_{cour} \cdot \min \left\{ \frac{\Delta r}{\left| v_{r,i+1/2,j}^n \right| + C_{f,i+1/2,j}^n}; \frac{\Delta z}{\left| v_{z,i,j+1/2}^n \right| + C_{f,i,j+1/2}^n} \right\} \quad (17)$$

Здесь  $C_{cour}$  - число Куранта,  $C_f^n$  - быстрая магнитозвуковая скорость.

При наличии радиационного охлаждения шаг по времени контролировался с помощью методики, основанной на мониторинге внутренней энергии [11].

В п. 2.3 второй главы описана методика, с помощью которой в моделировании сохранялось условие бездивергентности магнитного поля. Для этого использовалась теорема Стокса о циркуляции электрического поля и уравнении индукции для магнитного поля. Компоненты электрического поля в узлах сетки находились из процедуры усреднения соответствующих компонент векторов потоков, определенных на границах численных ячеек.

$$E_{ij} = \frac{1}{4}(H_{5i,j} + H_{5i+1,j} - F_{7i,j} - F_{7i+1,j}). \quad (18)$$

Компоненты магнитного поля в центре ячейки получаются усреднением компонент магнитного поля, определенных на гранях ячеек:

$$B_{ri,j}^{n+1} = 0.5(B_{ri,j}^{n+1} + B_{ri-1,j}^{n+1}), \quad B_{zi,j}^{n+1} = 0.5(B_{zi,j}^{n+1} + B_{zi,j-1}^{n+1}) \quad (19)$$

Численный метод был протестирован на примере четырех характерных двумерных задач МГД [12 -15]: 1) задача о распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны; 2) 2.5 – мерная ударная волна; 3) быстрое вращение цилиндра в покоящейся среде с однородным магнитным полем; 4) вихрь Орзага-Танга.

**В третьей главе** представлены результаты численного моделирования разлета лазерной плазмы во внешнем магнитном поле без учета переноса излучения. Двумерный численный расчет эволюции лазерной плазмы проводился в прямоугольной области размером  $L_r \times L_z = 4.8 \times 16$  см (см. рис.1). В каждой точке этой области задано магнитное поле с конфигурацией  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ . Использовалась прямоугольная неравномерная сетка размером  $200 \times 200$  ячеек с уменьшением размера ячеек к началу координат. Задача решалась в цилиндрической системе координат с симметрией относительно оси OZ. В начальный момент времени плазма сосредоточена в небольшой подобласти  $Z_h \times R_h = 0,1 \times 0,5$  см. Подобласть  $Z_h \times R_h$  нагревается однократным лазерным импульсом, интенсивность которого в максимуме

достигает  $G_0 = 2 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> с пространственно-временным распределением

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}\right).$$

Величина магнитного поля задавалась с помощью плазменного параметра  $\beta = 2P/B^2$ , где  $P$  - газовое давление,  $B$  - магнитное поле. Плазменный параметр определялся по величине газового давления в холодной фазе. Расчеты проведены для приближения «слабого» магнитного поля  $\beta \ll 1$  и в приближении «сильного» магнитного поля  $\beta = 1$ . Результаты показали, что параметр  $\beta$  следует определять относительно газодинамического давления в горячей фазе, поскольку даже при  $\beta = 1$  (с величиной магнитного поля порядка нескольких гаусс) магнитное поле заметно действует на плазму лишь на поздних временах ее разлета, когда ее плотность достаточно мала. Показано, что для  $\beta = 1$  течение плазменного факела напоминает струйное течение. На рис.2 линиями с номерами уровней показаны изолинии: плотности (D), температуры (T), удельной кинетической энергией частиц плазмы (V2) и магнитного давления (B2) в случае «сильного» магнитного поля на момент времени  $t = 0.6$  сек.

**В четвертой главе** представлены результаты расчетов с учетом переноса излучения, а также приведен детальный сравнительный анализ всех расчетов: без переноса излучения, с переносом излучения, без магнитного поля, с магнитным полем 3.7 кГс ( $\beta = 100$ ), и с магнитным полем 11.7 кГс ( $\beta = 10$ ). В этих расчетах была увеличена интенсивность лазерного импульса до значения  $G_0 = 9 \cdot 10^{10}$  Вт/см<sup>2</sup> для более высокого прогрева плазмы, а также уменьшена физическая область ( $L_r \times L_z = 1.8 \times 3.2$ ) и увеличена сетка до  $300 \times 300$  ячеек для более детального рассмотрения процессов при начальном разлете лазерной плазмы.

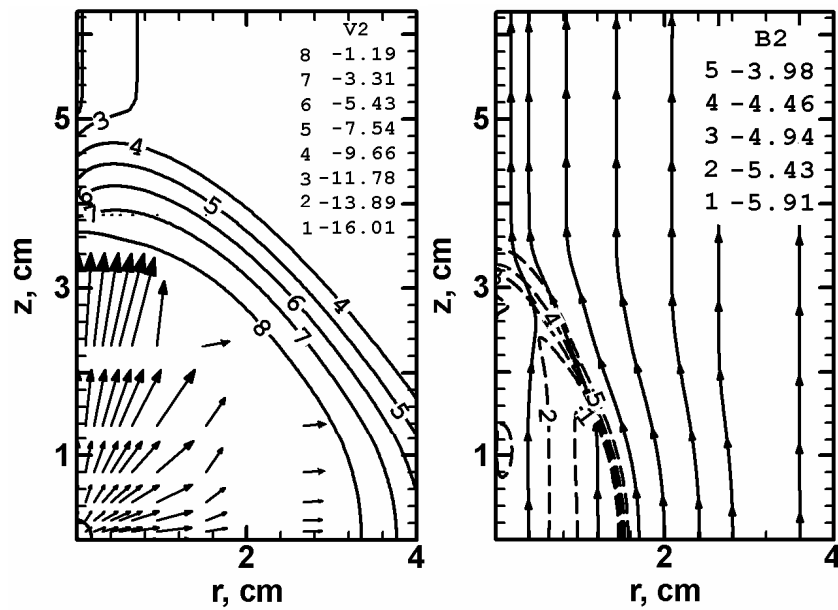


Рис. 2.

Сравнение результатов показало, что при наличии внешнего магнитного поля, плазма тормозится в радиальном направлении и двигается в основном вдоль магнитных силовых линий, вследствие чего плазменный факел имеет сплюснутую к оси  $Z$  форму. С учетом процесса переноса излучения, плазма теряет часть кинетической энергии и, поэтому, распространяется на меньшие расстояния и, следовательно, занимает меньший объем. Плотность вещества увеличивается, и это ведет к изменению кинетической энергии. При сравнении со случаем без переноса излучения, кинетическая энергия немного увеличивается и достигает значений  $4 \cdot 10^{-2}$  Дж. Схематически это можно представить следующим образом: высвечивание части кинетической энергии  $\rightarrow$  уменьшение скорости разлета вещества  $\rightarrow$  увеличение плотности  $\rightarrow$  небольшое увеличение кинетической энергии.

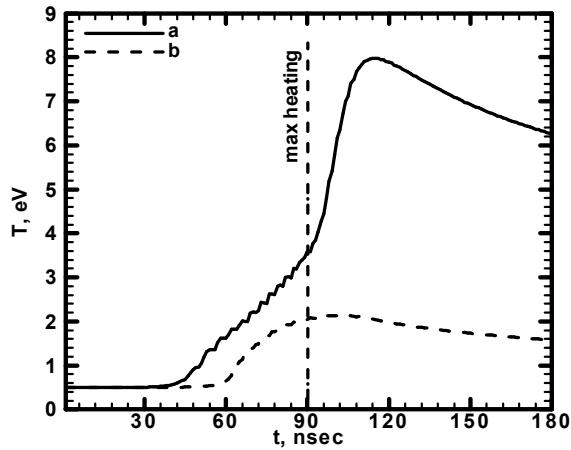


Рис. 3 Изменение максимальной температуры плазмы на период действия лазерного импульса. Сплошная и пунктирная линия соответствует случаям без учета и с наличием радиационного переноса соответственно. Вертикальная штрихпунктирная линия показывает момент наибольшего воздействия лазера.

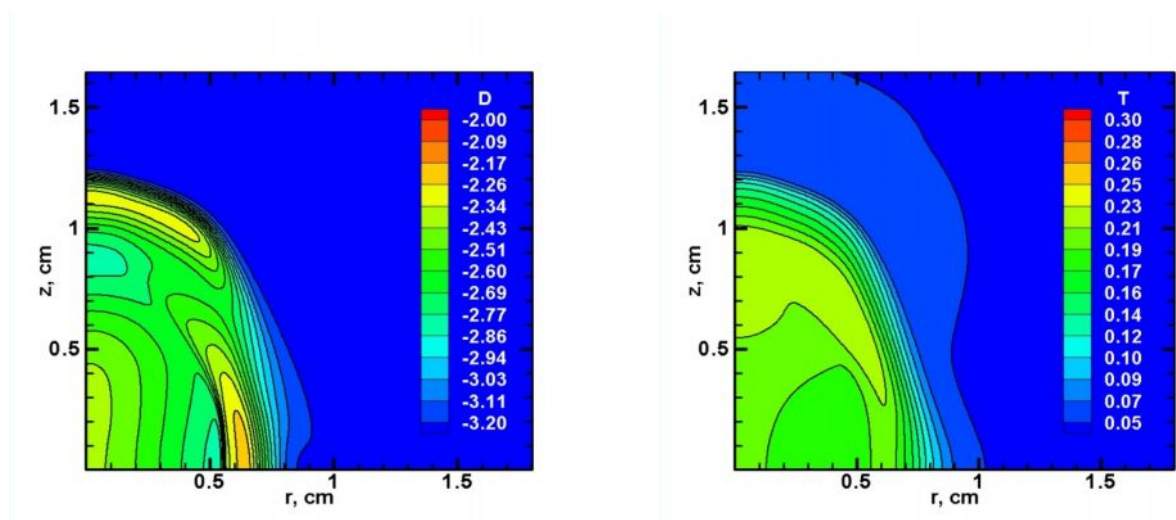


Рис. 4. Показаны 15 уровней с изолиниями: плотности (D) и температуры (T) плазмы на момент времени  $t=3$  мкс.

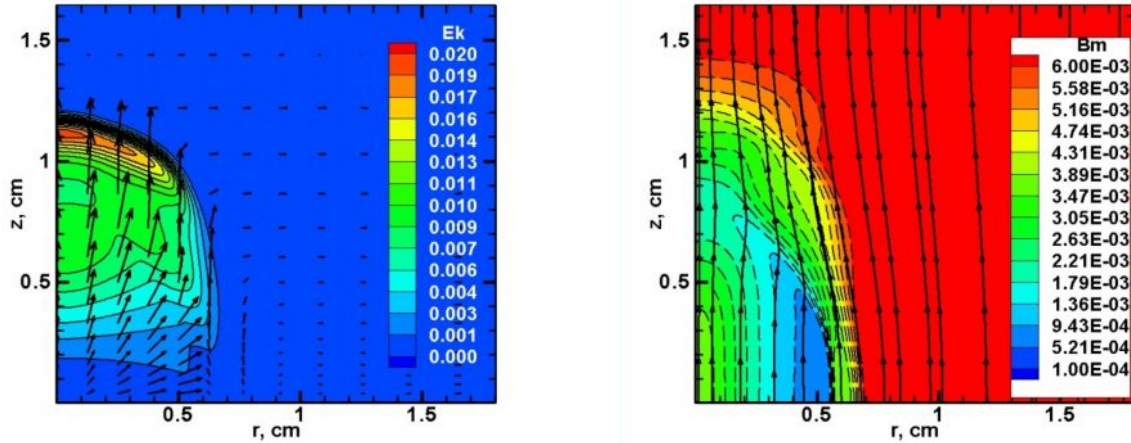


Рис. 5. Показаны 15 уровней с изолиниями кинетической энергии частиц плазмы ( $E_k$ ) и магнитного давления ( $B_m$ ) на момент времени  $t=3$  мкс.

Таким образом, учет магнитного поля и переноса излучения в процессе моделирования разлета плазмы, приводит к качественному изменению ее свойств, она становится менее горячей и более плотной. Исследование величины кинетической энергии плазмы для различных моментов времени показало, что перенос излучения практически не влияет на ее распределение в радиальном направлении.

## Заключение

### Основные результаты работы

1. Создана математическая модель, состоящая из системы уравнений радиационной магнитной гидродинамики, записанной в двумерной цилиндрической системе координат, уравнения состояния вещества, заданного в табличной форме и уравнения переноса излучения в многогрупповом диффузионном приближении с ограничителем потоков. Данная модель описывает эволюцию плазмы во внешнем магнитном поле с учетом переноса излучения.
2. Разработан вычислительный алгоритм для решения используемых уравнений, основанный на конечно-разностной монотонной TVD схеме



второго порядка по пространству и времени для уравнений МГД и на итерационной схеме градиентного типа с преобуславливателем для уравнения переноса излучения.

3. В результате моделирования показано, что учет переноса излучения приводит к уменьшению скорости частиц плазмы и температуры за фронтом ударной волны и сокращению области повышенной кинетической энергии на самом фронте ударной волны. Показано, что под действием градиента магнитного давления движение плазмы происходит, в основном, вдоль силовых линий в вертикальном направлении.

#### **Цитированная литература.**

1. *V.I. Mazhukin, V.V. Nossov, G. Flamant, I. Smurov.* Modeling of radiation transfer and emission spectra in laser-induced plasma of Al vapor// *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2002, v.73, p.451
2. *G.S. Romanov, K.L. Stepanov, M.I. Surkin* // *Opt. Spektrosk.*, 1982, v.53, p.642.
3. *N.N. Kalitkin, I.V. Ritus, A.M. Mironov.* // Preprint No. 6 Moscow: IPM AN SSSR, 19
4. *V.I. Mazhukin, V.V. Nossov, I. Smurov and G. Flamant.* Modeling of radiation transfer in low temperature nanosecond laser-induced plasma of Al vapour // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2004, v.37, p.185
5. *V. Mazhukin, I. Smurov & G.Flamant.* Simulation of laser plasma dynamic: influence of ambient pressure and intensity of laser radiation // *J. Comp. Phys.*, 1994, v. 112. №.1, p.78

6. *R. Turpault, M. Frank, B. Dubroca, A. Klar.* Multigroup half space moment approximations to the radiative heat transfer equations // Journal of Computational Physics, 2004, v.198, p.363
7. *Gordon L. Olson.* Efficient solution of multi-dimensional flux-limited nonequilibrium radiation diffusion coupled to material conduction with second-order time discretization // Journal of Computational Physics, 2007, v.226, p.1181
8. *H. C. Yee, G. H. Klopfer and J. -L. Montagné.* High-resolution shock-capturing schemes for inviscid and viscous hypersonic flows // Journal of Computational Physics, 1990, v.88, №1, p.31
9. *H. van der Vorst.* Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1992, v.13, p.631
10. *Chi-Wang Shu and Stanley Osher.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // Journal of Computational Physics, v.77, №2, p.439
11. *D.A. Knoll, W.J. Rider, G.L. Olson.* Nonlinear convergence, accuracy, and time step control in nonequilibrium radiation diffusion // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2001, v.70, p.25
12. *Tóth G.* The  $\text{div}\cdot\mathbf{B} = 0$  constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // J. Comput. Phys, 2000, v.161, p. 605
13. *Han J., Tang H.* An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magnetohydrodynamics // J. Comput. Phys. 2007. v. 220, p. 791
14. *Jiang G.-S., Wu C.C.* A high-order WENO finite difference scheme for the equation of ideal magnetohydrodynamics // J. Comput. Phys., 1999. v. 150. p. 561
15. *Orszag A., Tang C.M.* Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // J. Fluid Mech., 1979. v.90, p.129

**Публикации по теме диссертации.**

1. *Д.О. Устюгов, С.Д. Устюгов.* Эволюция лазерной плазмы во внешнем магнитном поле//Математическое моделирование, 2008, т. 20, №.8 с.74
2. *Д.О. Устюгов, С.Д. Устюгов.* Моделирование радиационного разлета лазерной плазмы во внешнем магнитном поле// Математическое моделирование, 2009, т.21, №11, с.33
3. *Д.О. Устюгов, В.И. Мажукин, С.Д. Устюгов.* Моделирование лазерной плазмы во внешнем магнитном поле//Знание. Понимание. Умение. (Научный журнал Московского гуманитарного университета). Тезисы докладов IV Международного научного семинара “Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах”, 2007, с. 257
4. *Д.О. Устюгов, С.Д. Устюгов.* Радиационный разлет лазерной плазмы во внешнем магнитном поле// Резюме докладов V Международного научного семинара “Математические модели и моделирование в лазероплазменных процессах”, 2008, с. 49
5. *Д.О. Устюгов, С.Д. Устюгов.* Моделирование разлета лазерной плазмы во внешнем магнитном поле с учетом радиационных эффектов //Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.): Тез. докладов, Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2008, с. 573