4. Воротников А. С. Верхние оценки переключательной мощности плоских схем, реализующих автономные автоматные функции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25, вып. 4. — С. 96–99

DOI: 10.20948/dms-2022-10

МЕТОДЫ СИНТЕЗА И ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ПРОГРАММ С НЕКОТОРЫМИ СТРУКТУРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В. В. Жуков (Москва)

В работе рассматривается задача синтеза, которая является одной из основных задач математической кибернетики и в общем виде состоит в поиске оптимальных или близких к ним методов построения дискретных управляющих систем для произвольной булевой функции или системы таких функций. Для оценки оптимальности вводится т. н. функция Шеннона, которая для заданного n равна сложности самой сложной функции, зависящей от n переменных.

В работах [1, 2] были исследованы вопросы сложности реализации булевых функций и функций k-значной логики соответственно в некоторых классах программ, состоящих из вычислительных команд, команд условного перехода и команд останова. В указанных работах были установлены асимптотически точные оценки функции Шеннона для рассматриваемых классов программ.

В работах [3, 4] модель программ, введенная в [1, 2], была существенно расширена добавлением в нее команд вызова подпрограмм (процедур). Кроме того, в указанных работах рассматривались т. н. рекурсивные схемы из функциональных элементов, которые являются подклассом программ в том случае, когда в них не используются команды условного перехода. Следует отметить, что в работах [3, 4] возможность вызова подпрограмм была исследована только на примере рекурсивных схем без ограничения на глубину вложенности вызовов, при этом также отсутствовала возможность рекурсивного вызова процедур.

В настоящей работе была введена и исследована модель программ, допускающая рекурсивный вызов процедур, было установлено асимптотическое поведение функции Шеннона для сложности реализации булевых функций в данной модели в зависимости от глубины рекурсии.

Программой Σ в паре базисов $\check{B}$, $\hat{B}$ вычислительных и переадресующих команд называется набор подпрограмм $\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s\}$. Для каждой подпрограммы Σ_i задан набор входных и выходных аргументов, упорядоченный набор команд Γ_i, а также область памяти, состоящая из M_i, $M_i \geq in(i) + out(i)$, ячеек.

Команды подпрограмм, входящие в наборы Γ_i, $i = \overline{1, s}$, могут быть трех типов: вычислительные команды, которые описываются символом булевой функции из базиса $\check{B}$ и номерами входных и выходных ячеек памяти; переадресующие команды, которые описываются символом булевой функции из базиса $\hat{B}$, номерами входных ячеек памяти, а также двумя номерами команд текущей подпрограммы, на которые выполняется условный переход; команды вызова подпрограмм, которые описываются номером вызываемой подпрограммы и номерами входных и выходных ячеек памяти.

Каждой функции $\check{\varphi}_i$ ($\hat{\varphi}_i$) из $\check{b}$ ($\hat{b}$) функций базиса $\check{B}$ ($\hat{B}$) сопоставлен некоторый положительный вещественный вес $\check{L}_i$ ($\hat{L}_i$), а вес вычислительной (переадресующей) команды равен весу соответствующей функции, используемой в команде. Вес команды вызова подпрограммы считается равным заданному положительному вещественному числу ν.

В работе рассматриваются программы с глубиной рекурсии, ограниченной натуральным числом r. В таких программах при попытке выполнения команды вызова подпрограммы, находясь на глубине вложенности вызовов r, вызов процедуры не происходит, а выполнение продолжается со следующей команды текущей подпрограммы.

Более подробное описание модели программ можно найти в работах [5, 6].

Сложность программы $\mathcal{L}(\Sigma)$ определяется как сумма весов всех команд ее подпрограмм $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$. Естественным образом определяется функция Шеннона для сложности реализации булевых функций в классе программ с глубиной рекурсии r:

$$\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \min_{\Sigma \text{ реализует } f} \mathcal{L}(\Sigma).$$

Введем следующие константы, зависящие от базисов $\check{B}$, $\hat{B}$:

$$\pi_{\check{B}} = \min_{i=\overline{1,\check{b}}} \frac{\check{L}_i}{\check{k}_i + \check{l}_i}, \quad \pi_{\hat{B}} = \min_{i=\overline{1,\hat{b}},\ \hat{k}_i>0} \frac{\hat{L}_i}{\hat{k}_i + 1}, \quad \theta_{\hat{B}} = \min_{i=\overline{1,\hat{b}},\ \hat{k}_i>0} \frac{\hat{L}_i}{\hat{k}_i},$$

где $\check{k}_i$ ($\hat{k}_i$) — число входных аргументов вычислительной (переадресующией) команды, использующей функцию $\check{\varphi}_i$ ($\hat{\varphi}_i$), а $\check{l}_i$ — число выходных аргументов соответствующей вычислительной команды.

Для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n)$ в работе было получено следующие утверждение.

Теорема. *Для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n)$ при $r = 1$ верно асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}^{\Pi(1)}(n) \sim \min(\pi_{\check{B}}, \pi_{\hat{B}}) \frac{2^n}{n},$$

а при $r \geq 2$ верно

$$\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{(r-1)^{1-r} \nu^{r-1} \min(\pi_{\check{B}}, \theta_{\hat{B}}) \frac{2^n}{n}}.$$

Вообще говоря, глубина рекурсии программ может быть задана как некоторая функция $r(n)$ натурального аргумента n, значение которой стремится к бесконечности. В данном случае речь идет о программах с неограниченной глубиной рекурсии, и для соответствующей им функции Шеннона в настоящей работе было получено следующее утверждение.

Теорема. *При $r(n) = n + 2$ для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r(n))}(n)$ верно следующее равенство:*

$$\mathcal{L}^{\Pi(r(n))}(n) = O(1).$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90125 «Аспиранты».

Список литературы

1. Кузьмин В. А. Оценка сложности реализаций функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Сборник трудов Института математики СО АН СССР. — Вып. 29. — Новосибирск, 1976. — С. 11–39.

2. Касим-Заде О. М. О сложности реализации функций в одном классе алгоритмов // Материалы IX межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 25–30.

3. Грибок С. В. Об одной модели рекурсивных схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2002. — № 4. — С. 31–36.

4. Грибок С. В. О реализации функций алгебры логики в некоторых классах программ: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2003.

5. Жуков В. В. Методы синтеза бинарных программ, допускающих рекурсивный вызов процедур // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2021. — № 3. — С. 3–12.

6. Жуков В. В. Синтез бинарных программ с преобладанием команд переадресующего типа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2021. — Т. 163, кн. 3. — С. 276–290.

DOI: 10.20948/dms-2022-11

СЛОЖНОСТЬ КЛЕТОЧНЫХ ДЕШИФРАТОРОВ С ПОВТОРЯЮЩИМИСЯ ВХОДАМИ

В. С. Зизов (Москва)

Модель клеточных схем (КС) впервые была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в работе [1], в которой для неё был получен порядок функции Шеннона. Функция Шеннона характеризует сложность самой «сложной» функции алгебры логики (ФАЛ) от n переменных. Модель КС является математической моделью интегральных схем (ИС), учитывающей особенности физического синтеза. В работе А. Альбрехта [2] продемонстрировано, что функция Шеннона для КС имеет вид $\sigma 2^n, \sigma = const$ при $n \to \infty$, но остается неизвестным точное значение σ в настоящий момент.