НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НЕМОНОТОННОЙ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович (Москва)

Пусть P_k — множество всех функций k-значной логики ($k \geq 2$), M — класс всех функций из P_k, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \ldots < k-1$.

Исследуется сложность реализации функций k-значной логики схемами из функциональных элементов над базисами B, имеющими вид: $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, $\omega_i \in P_k \setminus M$ $(i = 1, \ldots, p)$, причем функциям из множества M приписан нулевой вес, а функциям $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — единичный.

Кратко напомним необходимые определения (подробнее см., например, [1]).

Немонотонная сложность $I_B(S)$ *схемы* S *над базисом* B — это число немонотонных элементов схемы S или суммарный вес всех элементов схемы S. *Немонотонную сложность над базисом* B *функции* k*-значной логики* f, обозначаемую $I_B(f)$, определим как минимальную немонотонную сложность схем, вычисляющих над базисом B функцию f.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция k-значной логики. Упорядоченную пару наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* f, если выполнены условия: $\alpha_j \leq \beta_j$, $(j = 1, \ldots, n)$ и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Пусть C — цепь, имеющая вид $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r$. Определим величины $d_C(f)$ и $u_C(f)$ следующим образом: $d_C(f)$ — число обрывов функции f на парах вида $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1})$; $u_C(f)$ — наибольшая длина t подпоследовательности $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_t$ последовательности C, удовлетворяющей условию $f(\tilde{\beta}_1) > f(\tilde{\beta}_2) > \ldots > f(\tilde{\beta}_t)$.

Определим *спад* $d(f)$ и *инверсионную силу* $u(f)$ функции f равенствами $d(f) = \max d_C(f)$ и $u(f) = \max u_C(f)$, где максимум берется по всем цепям C.

Кроме того, для произвольного базиса B описанного выше вида положим $D(B) = \max d(f)$ и $u(B) = \max u(f)$, где максимум берется по всем функциям f из базиса B.

Исчерпывающее описание немонотонной сложности булевых функций в базисе $B_0 = M \cup \{\overline{x}\}$, называемой в этом случае инверсионной сложностью, было получено А. А. Марковым [2]: для любой булевой функции f установлено равенство

$$I_{B_0}(f) = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil .$$

В работе [3] для произвольной функции k-значной логики установлено точное значение немонотонной сложности над двумя естественными базисами $B_P = M \cup \{N_P(x)\}$ и $B_L = M \cup \{N_L(x)\}$, где $N_P(x)$ — отрицание Поста, т. е. функция $x + 1 \pmod{k}$, а $N_L(x)$ — отрицание Лукасевича, т. е. функции $k - 1 - x$:

$$I_{B_P}(f) = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil, \qquad I_{B_L}(f) = \lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil .$$

В случае произвольного базиса B указанного вида из результатов работ [3, 4] следует, что найдется такая константа $c(B)$, что для любой функции k-значной логики f выполняются неравенства

$$\left\lceil \log_{u(B)}(d(f) + 1) \right\rceil - c(B) \leq I_B(f) \leq \left\lceil \log_{u(B)}(d(F) + 1) \right\rceil .$$

Эти оценки далеки от окончательных, так как константа $c(B)$ может оказаться сколь угодно большой: для любого заданного значения N найдется базис B_N вида $M \cup \{h_N\}$ и функция g_N, для которых справедливо неравенство $\left\lceil \log_{u(B)}(d(g_N) + 1) \right\rceil - I_{B_N}(g_N) > N$.

В булевом случае удалось получить окончательный результат [5]: для любой булевой функции f и любого базиса B описанного вида справедливо равенство

$$I_B(f) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil ,$$

где $D(B) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}$.

Для случая реализации функций k-значной логики, хотя задача и далека от полного решения, также удалось получить значительные продвижения. В работе [1] установлено, что для любой функции k-значной логики f и для произвольного базиса B указанного вида выполняются неравенства

$$\left\lceil \log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil - (\log_2 k + 2) \leq I_B(f) \leq \left\lceil \log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil + k^3.$$

В настоящей работе существенно усилена нижняя оценка.

Теорема. *Для любой функции k-значной логики f и для произвольного базиса B вида*

$$B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}, \quad \omega_i \in P_k \setminus M,\ i = 1, \ldots, p,$$

выполняется неравенство

$$I_B(f) > \log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1\right) - \log_{u(B)}\frac{u(B)}{u(B)-1}.$$

Тем самым, доказана нижняя оценка, не более чем на единицу отличающаяся от величины, получающейся из значения немонотонной сложности булевых функций путем замены оснавния логарифма с 2 на $u(B)$. Однако гипотеза, утверждающая, что и верхняя оценка будет аналогична верхней оценке в булевом случае, оказывается неверной. Более того, установлено, что немонотонная сложность функции k-значной логики f в базисе B, вообще говоря, не определяется только параметрами $d(f)$, $D(B)$ и $u(B)$: приведен пример базиса B и двух функций f_1 и f_2, для которых одновременно выполняются соотношения $d(f_1) = d(f_2)$ и $I_B(f_1) - I_B(f_2) = \lceil \log_2 k \rceil - 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Список литературы

1. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Оценки немонотонной сложности функций многозначной логики // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, кн. 3. — С. 311–321.

2. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем функций // ДАН СССР. — 1957. — Т. 116, № 6. — С. 917–919.

3. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций k-значной логики // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, вып. 4. — С. 80–90.

4. Kochergin V. V., Mikhailovich A. V. Asymptotics of growth for non-monotone complexity of multi-valued logic function systems // Siberian Electronic Mathematical Reports (`http://semr.math.nsc.ru`). — 2017. — Т. 14. — С. 1100–1107.

5. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Точное значение немонотонной сложности булевых функций // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 1. — С. 32–41.

DOI: 10.20948/dms-2022-15