## УТОЧНЁННЫЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ УНИВЕРСАЛЬНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА В МОДЕЛИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ

**С. А. Ложкин, В. С. Зизов (Москва)**

Впервые в работе [1] в 1967 году С.С. Кравцовым была предложена модель клеточных схем (КС), где под сложностью КС понималась её площадь. В этой работе был получен порядок соответствующей функции Шеннона, а в работе А. Альбрехта [2] доказано, что при $n \to \infty$ она асимптотически равна $\sigma 2^n$, $\sigma = const$. При этом точное значение константы $\sigma$ остается неизвестным до настоящего времени.

Аналогичная модель была описана в 1980 году К.Д. Томпсоном в работе [3]. Исследование [4] показало, что модель плоских схем Томпсона является удовлетворительным приближением для ИС, по крайней мере для монокристаллических систем.

Ранее в работе [5] были установлены асимптотически точные верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка $n$ без повторяющихся входов. Более того, данные оценки имеют вид $n2^{n-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, и аналогично работе [6] могут считаться асимптотическими оценками высокой степени точности (АОВСТ). В настоящей работе устанавливаются асимптотически точные верхние и нижние оценки для сложности системы всех булевых функций от $n$ булевых переменных (БП) в модели клеточных схем, имеющие вид $2^{2^n-1}n(1+O\left(\frac{1}{n}\right))$ и являющиеся, тем самым, АОВСТ.

КС является прямоугольной решёткой на плоскости, состоящей из клеток – единичных квадратов. Каждая клетка представляет собой элемент одного из двух типов: *коммутационный* или *функциональный*. *Функциональным* называется элемент, который реализует хотя бы одну нетождественную булеву функцию. Тем самым, *коммутационные элементы* реализуют тождественные функции. Входами и выходами одного элемента являются контакты, сопоставленные сторонам соответствующего квадрата. Элемент реализует функцию $f$ на выходе $a$, если при сопоставлении каждому входу своих БП $x_i$ на выходе $a$ реализуется функция $f$ от этих БП. В данной работе используется клеточный вариант базиса $Б_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$, подробно описанный в работе [5].

**Определение 1.** Сложностью системы ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ от $n$ БП в модели клеточных схем называется минимальная площадь клеточной схемы $\Sigma$, реализующей $f$.

$$A(f) = \min_{\Sigma} A(\Sigma)$$

**Определение 2.** Будем называть КС, реализующую систему $\overrightarrow{P}_2(n)$, состоящую из всех ФАЛ от $n$ БП универсальным многополюсником порядка $n$.

**Теорема 1** Для любого натурального $n$ справедливо

$$A(\overrightarrow{P}_2(n)) \leqslant (n+6)2^{2^n-1} + \frac{3n}{2^n}2^{2^n-1}.$$

**Теорема 2** Для любого натурального $n$ справедливо

$$A(\overrightarrow{P}_2(n)) \geqslant n2^{2^n-1} - O(2^{2^n}).$$

**Следствие 1.** Из теорем 1 и 2 следует

$$A(\overrightarrow{P}_2(n)) = n2^{2^n-1} \pm O(2^{2^n}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075–15–2022–284.

**Список литературы**

1. Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука. — 1967. — Т. 19 —С. 285—292.

2. Альбрехт А. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука. —1975. — Т. 33 — С. 209—214.

3. Thompson C. D. A complexity theory for VLSI. — 1980.

4. Bilardi G., Pracchi M., Preparata F. A critique of network speed in VLSI models of computation // Solid-State Circuits, IEEE Journal of. —1982. — Vol. 17. — С. 696–702.

5. Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, № 3. — С. 322–334.

6. Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математическиевопросы кибернетики М., Наука, Физматлит. — 2005. — Т. 6.

DOI: 10.20948/dms-2022-16