О СЛОЖНОСТИ МНОГОАДРЕСНОГО МУЛЬТИПЛЕКСОРНОГО ОПЕРАТОРА В КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

С. А. Ложкин, Д. Э. Хзмалян (Москва)

Рассматриваемая задача относится к теории синтеза управляющих систем, которая является одним из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. Необходимость проектирования и логического описания дискретных вычислительных устройств различного типа привела к возникновению данной теории. Клод Шеннон в работах [1, 2] дал строгую математическую постановку задачи синтеза управляющих систем, положив тем самым начало соответствующей теории, исследования в которой ведутся с тех пор непрерывно.

Задача синтеза ставится для определенного класса управляющих систем, при этом, количество таких классов довольно велико, что оправдано потребностью в изучении различных моделей и характеристик реальных схем. Для каждого класса определяется структура его схем и их функционирование в виде системы функций алгебры логики (ФАЛ). Также для каждого класса предполагается наличие функционала сложности, который каждой схеме ставит в соответствие положительное число, отражающее некоторую числовую характеристику для схем из рассматриваемого класса (например, в классе схем из функциональных элементов функционалом сложности может являться число элементов в схеме).

В данной работе рассматривается задача индивидуального синтеза в классе контактных схем (КС) для так называемого многоадресного мультиплексорного оператора.

Будем рассматривать мультиплексорную ФАЛ порядка n от $n+2^n$ переменных

$$\mu_n(x_1, x_2, ..., x_n, y_0, y_1, ..., y_{2^n-1}) = \bigvee_{\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in B^n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\tilde{\sigma})},$$

где $\nu(\tilde{\sigma})$ это число, двоичная запись которого совпадает с $\tilde{\sigma}$.

Также будем рассматривать k-адресный мультиплексорный оператор $\tilde{\mu}_n^k$ порядка n от $kn+2^n$ переменных, состоящий из мультиплексорных ФАЛ $\mu_n(x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i, y_0, y_1, ..., y_{2^n-1})$, где $i = 1, \ldots, k$.

Напомним некоторые определения, а также введем обозначения, связанные с реализацией ФАЛ в классе КС. Те понятия, которые в данной работе не определяются, могут быть найдены, например, в [3, 4].

Пусть $B = \{0, 1\}$, а $B^n = \underbrace{B \times ... \times B}_{n\ раз}$ — единичный куб размерности n.

Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, ..., x_n)$ представляет собой отображение $B^n \xrightarrow{f} B$, а система функций F от n переменных, состоящая из k ФАЛ, является отображением $B^n \xrightarrow{F} B^k$.

Сеть Σ с входом a и выходами $b_1, \ldots, b_k$, в которой все ребра помечены переменными $x_1, ..., x_n$ или их отрицаниями $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$, называется $(1, k)$-контактной схемой (КС) от булевых переменных (БП) $x_1, ..., x_n$. При этом ребро с пометкой x_i ($\overline{x}_i$) называется замыкающим (соответственно размыкающим) контактом БП x_i.

Указанная КС Σ реализует систему ФАЛ $F(f_1, \ldots, f_k)$, где, как обычно, ФАЛ $f_i(x_1, ..., x_n)$ является ФАЛ проводимости от a к b_i, $i = 1, \ldots, k$. Сложностью $L(\Sigma)$ контактной схемы Σ будем называть количество контактов в ней. Сложностью $L^{KC}(F)$ системы ФАЛ F в классе КС будем называть наименьшее количество контактов в схеме Σ, которая реализует F.

Напомним, что для мультиплексорной ФАЛ μ_n от $n+2^n$ БП первые n БП называются «адресными» БП, а оставшиеся 2^n — «информационными» БП. При этом значение функции μ_n равно значению той ее информационной переменной, номер которой поступил на ее адресные входы.

Для сложности $L^{KC}(\tilde{\mu}_n^1) = L^{KC}(\mu_n)$ в классе КС известны следующие оценки

$$L^{KC}(\mu_n) \geq 2^{n+1} - 1, \tag{1}$$

$$L^{KC}(\mu_n) \leq 2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right). \tag{2}$$

Для сложности $L^{K'}(\tilde{\mu}_n^1) = L^{K'}(\mu_n)$ в классе *корректных* КС (см. [5]), который является подклассом класса КС, известна нижняя оценка

$$L^{K'}(\mu_n) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} - O(\frac{2^n}{n^2}). \tag{3}$$

Верхняя оценка сложности $L^{K'}(\mu_n)$ ФАЛ μ_n в классе корректных КС, совпадает с (2).

Верны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть КС Σ реализует многоадресный мультиплексорный оператор $\tilde{\mu}_n^k$, где $n \geq 1, k \geq 1$, с наименьшей слож-*

ностью. Тогда

$$L(\Sigma) \leq (k+1)2^n + k\frac{2^n}{n} + O\left(\frac{k2^n}{n\log n}\right). \tag{4}$$

Для мультиплексорной функции μ_n под $L_A^{KC}(\mu_n)$ будем понимать минимальное количество контактов адресных переменных в КС, реализующих μ_n.

Теорема 2. *Пусть КС Σ реализует многоадресный мультиплексорный оператор $\tilde{\mu_n^k}$, где $n \geq 1, k \geq 1,$. Тогда*

$$L(\Sigma) \geq 2^n + kL_A^{KC}(\mu_n). \tag{5}$$

Из неравенств (1), (5) и (3), (5) следуют нижнии оценки сложности k-адресного мультиплексорного оператора в классах КС и корректных КС

$$L^{KC}(\tilde{\mu}_n^k) \geq (k+1)2^n - k \tag{6}$$

и

$$L^{K'}(\tilde{\mu}_n^k) \geq (k+1)2^n + k\frac{2^n}{2n} - O\left(k\frac{2^n}{n^2}\right)$$

соответственно.

Из (4), (6) получается асимптотика вида $(k+1)2^n$ для сложности многоадресного мультиплексорного оператора $\tilde{\mu}_n^k$ в классе КС.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075–15–2022–284.

Список литературы

1. Shannon C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. — 1938. — V. 57. — P. 713–723.

2. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. — 1949. — V. 28. — P. 59–98.

3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. —М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ 2004. — 256 с.

4. Алексеев В. Б., Ложкин С. А. Элементы теории графов, схем и автоматов. — М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ, 2000. — 58 с.

5. Ложкин С. А., Хзмалян Д. Э. О сложности стандартной мультиплексорной функции в одном классе контактных схем // Прикладная математика и информатика. — 2022. — №68. — С. 59–74.

DOI: 10.20948/dms-2022-18