ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ И ДИНАМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА БАЗИСОВ

Н. В. Пименов, С. А. Ложкин (Москва)

Продолжается (см. [1, 2]) исследование возможности построения для «типичных» и «самых сложных» функций алгебры логики (ФАЛ) таких реализующих их схем из функциональных элементов (СФЭ) в конечном полном базисе[2] $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_b\}$, которые имеют асимтоптически оптимальную сложность и линейную статическую или динамическую активность.

Под *сложностью* $L(\Sigma)$ и *размером* $\mathcal{L}(\Sigma)$ СФЭ Σ в базисе $\mathcal{B}$ будем, как обычно, понимать число и суммарный «вес» её функциональных элементов (ФЭ). Пусть Σ — произвольная СФЭ в базисе $\mathcal{B}$, имеющая n входов, которым сопоставлены булевы переменные набора $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $m = L(\Sigma)$, причём на выходе ФЭ с номером i в Σ реализуется ФАЛ $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$.

Определим для произвольных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из B^n, где $B = \{0, 1\}$, величину

$$S(\Sigma, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(\tilde{\alpha}) \oplus \varphi_i(\tilde{\beta})),$$

которую назовем *динамической активностью* СФЭ Σ на паре наборов $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. При этом *динамической активностью* $S(\Sigma)$ СФЭ Σ назовем максимальное значение величины $S(\Sigma, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, взятое по всем парам наборов $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ из $B^n \times B^n$.

Для функционального элемента (ФЭ) $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, базиса $\mathcal{B}$ определим его приведённый вес ρ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{L_i}{k_i - 1},$$

где k_i — число входов ФЭ $\mathcal{E}_i$, причём в случае $k_i \geq 2$ все они являются существенными, а L_i, $L_i > 0$, — его сложность. Тогда приведённый вес $\rho_{\mathcal{B}}$ базиса $\mathcal{B}$ определим как минимальное значение ρ_i среди всех тех ФЭ $\mathcal{E}_i$ базиса $\mathcal{B}$, для которых $k_i \geq 2$.

---

[2] Те понятия, которые здесь не определяются, могут быть найдены, например, в [3–5].

Будем говорить, что ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, имеет изолированный ноль (единицу), если существует такой набор $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in B^n$, что $f(\widetilde{\tau}) = 0$ ($f(\widetilde{\tau}) = 1$) и $\forall i \in [1, n]$: $f(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \overline{\tau}_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n) = 1$ ($f(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \overline{\tau}_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n) = 0$). Соответствующий набор $\widetilde{\tau}$ будем называть *изолированным нулём* (*единицей*) ФАЛ f.

Конечный полный базис $\mathcal{B}$ назовём *базисом специального вида*, если среди его функциональных элементов, обладающих минимальным приведённым весом $\rho_{\mathcal{B}}$, хотя бы один реализует ФАЛ, имеющую изолированный ноль, и хотя бы один реализует ФАЛ, имеющую изолированную единицу.

Теорема. *Для любого базиса $\mathcal{B}$ специального вида существуют неотрицательная и стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \ldots$, и положительная константа c_1 такие, что для любого n, $n = 1, 2, \ldots$, любая ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, может быть реализована в базисе $\mathcal{B}$ некоторой СФЭ Σ_f, удовлетворяющей неравенствам*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \le \rho_{\mathcal{B}}(1 + \varepsilon(n))\frac{2^n}{n}, \quad S(\Sigma_f) \le c_1(1 + \varepsilon(n))n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075–15–2022–284.

Список литературы

1. Ложкин С. А., Шуплецов М. С. О динамической активности схем из функциональных элементов и построении асимптотически оптимальных по сложности схем с линейной динамической активностью // Учёные записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2014. — Т. 156, вып. 3. — С. 84–97.

2. Касим-Заде О. М. Об одновременной минимизации сложности и мощности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1978. — Вып. 33. — С. 215–220.

3. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

4. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004.

5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.

DOI: 10.20948/dms-2022-19