ТИПИЧНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА N-ВЕРШИННЫХ ГРАФОВ ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА

Т. И. Федоряева (Новосибирск)

При изучении заданного класса графов, допускающих понятие размерности, т. е. меры их количества (часто под размерностью графа понимается число его вершин, разумеется, есть и другие подходы), естественно возникают вопросы асимптотического характера. При асимптотическом исследовании класса Ω_n графов размерности n особое внимание привлекает тематика вокруг следующих трех вопросов. Первый — вычисление асимптотически точного значения числа таких графов (или получение его хороших оценок). Это позволяет с установленной точностью достаточно просто подсчитать, как правило, трудно вычислимое число $|\Omega_n|$. Второй вопрос — выделение или построение подкласса типичных графов $\Omega_n^* \subseteq \Omega_n$ для заданного класса Ω_n. И третий — изучение общих, типичных свойств (справедливых для почти всех) рассматриваемых графов. Такой подход существенно помогает понять строение графов всего класса, особенно при большом числе вершин.

В работе обсуждается обозначенная тематика для класса n-вершинных графов заданного диаметра. Исследуются типичные метрические свойства этих графов, связанные с разнообразием метрических шаров, радиусом графа, диаметральными и центральными вершинами, центром графа и его спектром (множеством мощностей центров графов) и т. п., а также классы возникающих здесь типичных графов.

Приведем определения основных метрических характеристик графа. В работе изучаются конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [1, 2], а также стандартные понятия комбинаторного анализа [3]. Для связного графа $G = (V, E)$ *расстояние* $\rho_G(u, v)$ между его вершинами $u, v \in V$ определяется как длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. При этом $e_G(v) = \max_{u \in V} \rho_G(v, u)$ есть *эксцентриситет вершины* v графа G, $d(G) = \max_{v \in V} e_G(v)$ — *диаметр графа* G и $r(G) = \min_{v \in V} e_G(v)$ — *радиус графа* G. Вершина называется *центральной* (*диаметральной*), если её эксцентриситет равен радиусу (диаметру), кратчайшая цепь длины $d(G)$ — *диаметральной цепью* графа G, а под парой диаметральных вершин понимаем неупорядоченную выборку двух вершин из множества V, расстояние между которыми равно диаметру. Распро-

страним понятие метрики $\rho : V^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (с сохранением всех аксиом) на случай несвязных графов стандартным способом. Полагаем $\rho_G(u, v) = \infty$, если в графе G не существует цепи, соединяющей вершины $u, v \in V$. В расширенной метрике диаметр $d(G)$ и радиус $r(G)$ несвязного графа G будут равны ∞.

Для оценки меры количества графов с определенным свойством часто используется понятие *почти все*, при таком подходе изучаемое свойство рассматривается для графов с большим числом вершин. Пусть $\mathcal{J}_n$ — класс помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое свойство $\mathcal{P}$, которым каждый граф может обладать или не обладать. Через $\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}$ обозначим множество всех графов из $\mathcal{J}_n$, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Говорят, что *почти все графы обладают свойством* $\mathcal{P}$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}|}{|\mathcal{J}_n|} = 1$, т.е. $|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}| \sim |\mathcal{J}_n|$, и *почти нет графов, обладающих свойством* $\mathcal{P}$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}|}{|\mathcal{J}_n|} = 0$. Аналогичным образом можно говорить о свойстве $\mathcal{P}$, которым обладают почти все n-вершинные графы изучаемого класса Ω, или когда почти нет графов в Ω, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

При исследовании и выделении почти всех графов для рассматриваемого класса графов часто бывает полезным определять не сами характеристические свойства для понятия почти все, а непосредственно выделять сам подкласс типичных графов. Пусть Ω — произвольный класс графов такой, что $\Omega_n \neq \varnothing$ для всех достаточно больших n, где $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{J}_n$. Подкласс $\Omega^* \subseteq \Omega$ есть *класс типичных графов класса* Ω, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega_n|} = 1$. При этом свойство графов рассматриваемого класса является *типичным*, если почти все графы этого класса обладают данным свойством.

Пусть k — положительное целое фиксированное число и $\mathcal{J}_{n,\,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$, $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$, $\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geq k}$ — следующие классы помеченных n-вершинных графов: графы диаметра k; связные графы диаметра не менее k; графы (не обязательно связные), имеющие кратчайшую цепь длины не менее k; и графы (не обязательно связные) диаметра не менее k, соответственно. Очевидно, что выполняются следующие включения: $\mathcal{J}_{n,\,d=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\,d\geq k} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k} \subseteq \mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geq k} \subseteq \mathcal{J}_n$.

Число графов. Дж. Мун и Л. Мозер установили, что почти все графы являются графами диаметра 2 [4]. Это означает, что при $k = 2$ все четыре класса графов $\mathcal{J}_{n,\,d=2}$, $\mathcal{J}_{n,\,d\geq 2}$, $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq 2}$, $\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geq 2}$ асимптотически равномощны, число графов в этих классах асимптотически

равно числу всех n-вершинных графов $2^{\binom{n}{2}}$. Асимптотика числа n-вершинных графов диаметра $k \geq 3$ найдена в [5]. В [6, 7] независимо доказано, что при $k \geq 3$ все три класса графов $\mathcal{J}_{n,\,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$, $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$ асимптотически равномощны, и установлено асимптотически точное значение $2^{\binom{n}{2}}\,\xi_{n,k}$ числа графов в этих классах, здесь

$$\xi_{n,k} = q_k\,(n)_{k-1}\left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{n-k+1}, \quad q_k = \frac{1}{2}\,(k-2)\,2^{-\binom{k-1}{2}}$$

и $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ (считаем $(n)_k = 0$ при $n < k$ и $(n)_0 = (0)_0 = 1$). При доказательстве был построен класс $\mathcal{T}_{n,\,d=k}$ типичных n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 3$ (а значит, и классов $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$, $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$) и получены следующие асимптотически совпадающие верхние и нижние оценки числа графах рассматриваемых классов.

Теорема 1 (число графов [6, 7])**.** *Пусть $k \geq 3$ и $0 < \varepsilon < 1$ не зависят от n. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от n, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\left(1 - c\left(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right) \leq |\mathcal{T}_{n,\,d=k}| \leq |\mathcal{J}_{n,\,d=k}|$$
$$\leq |\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}| \leq |\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}| \leq 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\left(1 + c\left(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right).$$

Заметим, что при $k = 3$ верхняя оценка в теореме 1 принимает вид $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,3}$. При этом эта верхняя оценка справедлива даже для класса графов, содержащего все несвязные графы (которые не обязательно имеют компоненту связности с кратчайшей цепью длины 3), а именно для надкласса $\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geq 3}$ класса $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq 3}$.

Следствие 1 (случай $k = 3$ [6])**.** *Пусть $0 < \varepsilon < 1$ не зависит от n. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от n, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,3}\left(1 - c\left(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right) \leq |\mathcal{T}_{n,\,d=3}| \leq |\mathcal{J}_{n,\,d=3}|$$
$$\leq |\mathcal{J}_{n,\,d\geq 3}| \leq |\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq 3}| \leq |\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geq 3}| \leq 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,3}.$$

Таким образом, при расширении класса связных графов $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$ до класса $\mathcal{J}^{**}_{n,\,d\geq k}$ (путем добавления всех несвязных графов) при $k = 3$ мы получим также асимптотически равномощный класс [6], а при $k \geq 4$ возникает класс бо̀льшего асимптотического порядка [7].

Разнообразие метрических шаров. Напомним, что под шаром (сферой) графа $G = (V, E)$ понимается метрический шар (сфера) в метрическом пространстве графа G с метрикой пути $\rho_G : V \to$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$, т.е. $B_i^G(v) = \{u \in V \mid \rho_G(v,u) \leq i\}$ есть *шар радиуса i с центром в вершине $v \in V$* и $S_i^G(v) = \{u \in V \mid \rho_G(v,u) = i\ \}$ — *сфера радиуса i с центром v*. Пусть $i \geq 0$ и $\tau_i(G)$ есть число различных шаров радиуса i, содержащихся в графе G. Для связного графа G диаметра k числа $\tau_i(G)$, $i \geq 0$ образуют вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_k(G))$, который мы называем *вектором разнообразия шаров* графа G [8]. При этом говорят, что граф G обладает *локальным t-разнообразием шаров*, если $\tau_0(G) = \tau_1(G) = \ldots = \tau_t(G)$. Граф с локальным $(k-1)$-разнообразием шаров называется *графом полного разнообразия шаров*. Заметим, что $\tau_0(G) = |V|$ и $\tau_i(G) = 1$ при $i \geq k$, а вектор разнообразия шаров n-вершинного графа диаметра k с полным разнообразием шаров имеет вид $(n, n, \ldots, n, 1)$. В [9] понятие вектора разнообразия шаров естественным образом распространено на случай несвязных графов. Там же был доказан критерий совпадения шаров с центрами в различных вершинах и разработан алгоритм вычисления вектора $\tau(G)$ заданного графа $G = (V, E)$ за время $O(|V|^3)$.

Различные свойства векторов разнообразия шаров и их компонент были установлены как для всех графов, так и отдельных классов. Остановимся лишь на некоторых экстремальных случаях. Для n-вершинных графов диаметра k с локальным t-разнообразием справедлива нижняя оценка числа вершин, определяемая через параметры k и t [10], возникающие здесь экстремальные графы описаны с точностью до изоморфизма в [11]. В [10, 12] на основе исследования расположения центров различных шаров автором получены точные верхние оценки $\overline{\tau}_i(\mathcal{J}_{n,\,d=k})$ и точные нижние оценки $\underline{\tau}_i(\mathcal{J}_{n,\,d=k})$ числа различных шаров заданного радиуса i в n-вершинных графах диаметра k. При этом мажоранты и миноранты (экстремальные графы, на которых достигаются все верхние и все нижние оценки соответственно) исследованы в [10, 13]. Аналогичные результаты были получены для классов связных n-вершинных деревьев, всех n-вершинных связных графов и т.п. (т.е. в графах фиксированного «объёма») [10].

При асимптотическом исследовании разнообразия шаров автором выделен новый класс $\mathcal{F}_{n,k}$ типичных n-вершинных графов диаметра $k \geq 3$, который является подклассом ранее построенного класса $\mathcal{T}_{n,\,d=k}$ и обладает рядом метрических свойств [14]. Оказалось, что выполняется ряд типичных свойств, связанных с разнообразием метрических шаров, содержащихся в графе. Так, для любого $k \geq 1$ найден набор целочисленных векторов $\Lambda_{n,k}$ длины $k+1$ (состоящий из $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ различных векторов при $k \geq 5$ и единственного вектора при $k < 5$), устанавливающий типичное разнообразие метрических

шаров n-вершинных графов диаметра k. Кроме того, выяснено расположение центров всех различных шаров заданного радиуса для почти всех таких графов. При этом в доказательстве этого факта используется критерий совпадения шаров [9].

Теорема 2 (типичное разнообразие шаров [14])**.** *Вектор разнообразия шаров почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра k принадлежит $\Lambda_{n,k}$.*

Например, при $k = 1, 2, 3, 4$ набор $\Lambda_{n,k}$ содержит единственный вектор $\Lambda^0_{n,1} = (n, 1)$, $\Lambda^0_{n,2} = (n, n, 1)$, $\Lambda^0_{n,3} = (n, n, 3, 1)$ и $\Lambda^0_{n,4} = (n, n, 5, 3, 1)$ соответственно. Случай $k \geq 5$ уже приводит к более сложному описанию векторов набора $\Lambda_{n,k}$.

Непосредственно из теоремы 2 вытекают следующие типичные свойства t-разнообразия шаров.

Следствие 2. *При $k \geq 3$ почти все n-вершинные графы диаметра k не обладают локальным 2-разнообразием шаров (и, в частности, не обладают полным разнообразия шаров), при этом обладают локальным 1-разнообразием шаров.*

Следствие 3. *Почти все n-вершинные графы фиксированного диаметра $k = 1, 2$ обладают полным разнообразием шаров.*

Таким образом, набор векторов $\Lambda_{n,k}$ дает все векторы разнообразия шаров типичного графа фиксированного диаметра k. Также отметим, что при удалении любого вектора из набора $\Lambda_{n,k}$ это свойство нарушается (см. теорему 6 в [14]), т. е. в этом смысле теорема 2 не улучшаема.

Число пар диаметральных вершин. При исследовании типичных графов и их свойств для класса $\mathcal{J}_{n,\,d=k}$ оказалось, что при $k \geq 3$ почти все n-вершинные графы диаметра k имеют единственную пару диаметральных вершин. Однако для графов диаметра 2 было установлено, что данное свойство не выполняется. Это побудило к детальному исследованию более общих свойств графов диаметра 2, связанных с числом пар диаметральных вершин, и дальнейшей более тонкой классификации таких графов, когда выделяются подклассы, образующие разбиение всего класса $\mathcal{J}_{n,\,d=2}$. Причём для содержательной классификации требуется, чтобы ни один из рассматриваемых подклассов не оказался бы бедным и слишком богатым, т.е. асимптотически не совпадал со всем классом.

В [15] построена классификация графов диаметра 2 по числу пар диаметральных вершин, содержащихся в графе. Установлены все возможные значения параметров n и q, при которых существует n-вершинный граф диаметра 2, имеющий в точности q пар диаметральных вершин. Для каждого наперед фиксированного целого $q \geq 1$

внутри выделенного класса n-вершинных графов диаметра 2, содержащих ровно q пар диаметральных вершин, автором построен класс типичных графов. Доказано, что для любого $q = q(n)$ с рассматриваемым ограничением роста, охватывающем случай фиксированного целого $q \geq 1$, почти все n-вершинные графы диаметра 2 имеют не менее $q(n)$ пар диаметральных вершин. В частности, нельзя ограничить число пар диаметральных вершин наперед фиксированным целым q, чтобы получить почти все графы диаметра 2.

Радиус графа. Хорошо известно соотношение $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$ между радиусом и диаметром произвольного связного графа G. Более того, для любых r и d, удовлетворяющих соотношению $r \leq d \leq 2r$, и $n \geq d + r$ из теоремы Ф. Остранда следует существование n-вершинного графа G с $r(G) = r$ и $d(G) = d$ [16]. Из результата Дж. Муна и Л. Мозера нетрудно получить, что почти все n-вершинные графы имеют диаметр и радиус, равные 2 (см., например, [1]). Ю. Д. Буртин, рассматривая случайный n-вершинный граф $G_p(n)$ с вероятностью присутствия ребра $p = p(n)$, при естественных ограничениях на рост $p(n)$ при $n \to \infty$ показал, что $L(n) + 1 \leq r(G_p(n)) \leq d(G_p(n)) \leq L(n) + 2$, т.е. радиус и диаметр случайного графа $G_p(n)$ могут принимать только два вычисленных в [17] значения $L(n) + 1$ и $L(n) + 2$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Естественно возникает вопрос о возможном радиусе почти всех n-вершинных графов диаметра k. Заметим, что для вероятностного пространства n-вершинных графов G рассматриваемого класса Ω (для почти всех графов) при распределении значений исследуемой числовой характеристики графа $\mathcal{X} : \Omega_n \to \mathbb{R}$, вообще говоря, не обязательно возникает единственное значение этой характеристики $\mathcal{X}(G)$ (такая ситуация известна для ряда характеристик графа, далее мы также столкнемся с таким эффектом при исследовании центра графа).

Из соотношения между радиусом $r(G)$ и диаметром k вытекает, что радиус может принимать значение между следующими величинами: $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq r(G) \leq k$. Заметим, что K_n — единственный n-вершинный граф диаметра 1, причем $r(K_n) = 1$. Поэтому почти все графы диаметра $k = 1$ имеют радиус, равный диаметру. Аналогичный факт для графов диаметра 2 также тривиально вытекает из известных вышеуказанных результатов о почти всех таких графах.

Теорема 3. *Почти все графы диаметра* 2 *имеют радиус* 2.

При исследовании радиуса графов диаметра $k \geq 3$ в классе $\mathcal{F}_{n,k}$ выделено семейство $\mathcal{F}_{n,k,p}$, $p \geq 1$ вложенных подклассов n-

вершинных графов: $\mathcal{F}_{n,k} \supseteq \mathcal{F}_{n,k,1} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{F}_{n,k,p} \supseteq \mathcal{F}_{n,k,p+1} \supseteq \ldots$ [18]. Каждый из этих классов сохраняет уже установленные свойства графов из $\mathcal{F}_{n,k}$, наряду с этим графы введенных классов обладают свойством метрических сфер, обеспечивающим наличие наперед заданного числа вершин в пересечении сфер радиуса 1.

Теорема 4 (класс $\mathcal{F}_{n,k,p}$ [18])**.** *Пусть $k \geq 3$, $0 < \varepsilon < 1$ и $p \geq 1$ не зависят от n. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от n, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\left(1 - c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right) \leq |\mathcal{F}_{n,k,p}|$$
$$\leq |\mathcal{F}_{n,k}| \leq |\mathcal{T}_{n,\,d=k}| \leq |\mathcal{J}_{n,\,d=k}| \leq |\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}|$$
$$\leq |\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}| \leq 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\left(1 + c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\right).$$

Следствие 4. *Пусть $k \geq 3$ и $p \geq 1$. Тогда при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства $|\mathcal{F}_{n,k,p}| \sim |\mathcal{F}_{n,k}| \sim |\mathcal{T}_{n,\,d=k}| \sim |\mathcal{J}_{n,\,d=k}| \sim |\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}| \sim |\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}| \sim 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$.*

Таким образом, для любого фиксированного $p \geq 1$ класс графов $\mathcal{F}_{n,k,p}$ является классом типичных графов каждого из классов $\mathcal{J}_{n,\,d=k}$, $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$ и $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$. Введенное условие на сферы графа из класса $\mathcal{F}_{n,k,p}$ обеспечивает наличие вершин большой степени и большого разнообразия коротких кратчайших путей при условии в определенном смысле «единственности» (с точностью до участка из двух вершин) самого длинного кратчайшего пути для почти всех графов диаметра k. Данное условие оказалось полезным при исследовании типичных свойств n-вершинных графов, связанных с различными метрическими характеристиками. Отметим, что эти классы $\mathcal{F}_{n,k,p}$ также используются далее при изучении центра графа.

На основе найденных типичных свойств метрических шаров, содержащихся в графе, и теоремы 4 находится типичный радиус.

Теорема 5 (типичный радиус [18])**.** *Радиус почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 3$ равен $\lceil \frac{k}{2} \rceil$.*

Таким образом, радиус почти всех графов заданного фиксированного диаметра установлен в теоремах 3 и 5.

Напомним, что граф называется *самоцентрированным*, если все его вершины являются центральными [19].

Следствие 5. *Почти нет самоцентрированных n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 3$, при этом почти все графы диаметра $k = 1, 2$ являются самоцентрированными.*

Все полученные типичные свойства для n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 2$ остаются типичными и для связных графов диаметра не менее k, а также для графов (не обязательно связных), содержащих кратчайшую цепь длины не менее k. В частности, справедливо следующее следствие.

Следствие 6. *Для любого фиксированного $k \geq 3$ почти все n-вершинные графы каждого из следующих классов $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$, $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$ связны и имеют радиус $\lceil \frac{k}{2} \rceil$, диаметр k.*

Центр графа. Множество центральных вершин графа G образует его *центр* $\mathbb{C}(G)$. Концепция центра графа связана с его многочисленными практическими задачами, возникающими в различных областях, и обусловлена измерением центральности по близости при анализе различного рода сетей и связей [19]. Хорошо известен ряд классических результатов о центре графа [1, 2, 19–22]. Так, установлена реализуемость произвольного графа в качестве подграфа, порожденного центром подходящего графа. Именно доказано, что для любого графа H существует связный граф G такой, что его подграф, порожденный центром $\mathbb{C}(G)$, изоморфен H. Этот факт установили Г. Н. Копылов и Е. А. Тимофеев [20], его простое обоснование привёл также С. Т. Хедетниеми (см. [21]). А Ф. Бакли исследовал так называемое *центральное соотношение* $\mathbb{R}_c(G) = |\mathbb{C}(G)|/|V(G)|$ связного графа G, для которого очевидно выполняется неравенство $0 < \mathbb{R}_c(G) \leq 1$. Для любого рационального q из интервала $(0, 1]$ он доказал существование графа G такого, что $\mathbb{R}_c(G) = q$ [22].

В [23] исследована структура центра почти всех n-вершинных графов диаметра k. Для таких графов при $k = 1, 2$ любая вершина является центральной, т.е $\mathbb{C}(G) = V(G)$. А при $k \geq 3$ выделено два типа центральных вершин, необходимых и достаточных для получения центров почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра k.

Теорема 6 (типичный центр [23])**.** *Пусть $k \geq 3$ — фиксированное целое число. Тогда*

(i) *центр почти всех n-вершинных графов чётного диаметра k состоит из всех центральных вершин диаметральных цепей графа*;

(ii) *центр почти всех n-вершинных графов нечётного диаметра k состоит из всех центральных вершин диаметральных цепей графа и всех вершин, равноудаленных на расстояние $\frac{k+1}{2}$ от их концов. При этом доля таких n-вершинных графов, центр которых состоит только из центральных вершин диаметральных цепей графа, асимптотически равна $\frac{k-3}{k-2}$.*

Заметим, что в центре $\mathbb{C}(G)$ нельзя обойтись без вершин каждого из выделенных типов центральных вершин для того, чтобы получить почти все графы G диаметра $k \geq 3$. Это следует из теоремы 6 при $k \geq 4$ непосредственно, а при $k = 3$ дополнительно используется теорема Ф. Бакли и М. Левинтера об L'-графах [24]. Отметим также, что центр типичных графов из класса $\mathcal{F}_{n,k,p}$ выделен явно.

Спектр центра. Для произвольного класса связных графов Ω через $\mathbb{S}p_c(\Omega)$ обозначим *спектр центра графов этого класса*, т.е. множество мощностей центров графов из класса Ω [23]. Класс всех n-вершинных связных графов естественным образом разбивается на подклассы графов, определяемые диаметром. При этом $\mathcal{J}_{n=1,\, d=0} = \{K_1\}$ и $\mathcal{J}_{n,\, d=0} = \varnothing$ при $n \neq 1$, а $\mathcal{J}_{n,\, d\geq 1} = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{J}_{n,\, d=k}$ есть класс всех нетривиальных связных n-вершинных графов. В [20] Г. Н. Копыловым и Е. А. Тимофеевым найдены все значения параметров n, m и c, при которых существует n-вершинный граф, имеющий m рёбер и c центральных вершин. Соотношения между этими параметрами сводятся к нижним и верхним оценкам числа рёбер m через заданные параметры n и c. Используя эту теорему, можно найти спектр центра всех n-вершинных связных графов. В следующей теореме описывается спектр центра всех и почти всех графов класса $\mathcal{J}_{n,\, d\geq 1}$.

Теорема 7 (спектр $\mathbb{S}p_c(\mathcal{J}_{n,\, d\geq 1})$ [23])**.** *Справедливы следующие свойства*

(i) $\mathbb{S}p_c(\mathcal{J}_{n,\, d\geq 1}) = \big[\big[\, 1,\, n \,\big]\big] \setminus \{n-1\}$ *для любого* $n \geq 2$*;*

(ii) *почти все* n*-вершинные связные графы имеют центр мощности* n*.*

Здесь $\big[\big[\, x,\, y \,\big]\big]$ обозначает целочисленный интервал между числами $x,\, y \in \mathbb{R}$, т.е. $\big[\big[\, x,\, y \,\big]\big] = [x,\, y] \cap \mathbb{Z}$.

Таким образом, для почти всех n-вершинных связных графов G справедливо равенство $|\mathbb{C}(G)| = n$. Очевидно, что $\mathbb{S}p_c(\mathcal{J}_{n,\, d=1}) = \{n\}$, $n \geq 2$. Кроме того, из следствия 5 вытекает, что мощность центра почти всех графов из $\mathcal{J}_{n,\, d=2}$ также равна n. Естественно возникает вопрос о возможном спектре центра почти всех n-вершинных графов диаметра $k \geq 3$.

Отметим, что Я. Ху и С. Чжань нашли спектр центра n-вершинных графов заданного радиуса r [25]. С точки зрения свойств спектра центров почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра k (при больших n), из этого результата вытекает лишь включение $\mathbb{S}p_c(\mathcal{J}_{n,\, d=k}) \subseteq \big[\big[\, 1,\, n \,\big]\big] \setminus \{n-1\}$ для всех $n \geq (8k-2)/3$. Это соотношение является следствием равенства в теореме 7(i), т.е новых ограничений для возможных значений спектра центра почти

всех графов не возникает.

В [26] Дх. Мубайи и Д. Вест исследовали наименьшее $h_{n,k}(c)$ и наибольшее $f_{n,k}(c)$ число вершин с эксцентриситетом c в n-вершинных графах диаметра k. Для отдельных случаев, не покрывающих все возможные соотношения между параметрами n, k и c, найдены значения $f_{n,k}(c)$ и $h_{n,k}(c)$. В частности, для $c = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ — радиусе почти всех графов из $\mathcal{J}_{n,\, d=k}$, имеем $h_{n,k}(\lceil \frac{k}{2} \rceil) = 0$ и $f_{n,k}(\frac{k}{2}) = n - k$, $f_{n,k}(\frac{k+1}{2}) = n - k + 1$. Такая нижняя оценка мощности центра сводится к тривиальной, а верхняя оценка ввиду определения не учитывает возможных скачков и пропусков значений мощности центра в интервале $\big[\big[1,\, f_{n,k}(\lceil \frac{k}{2} \rceil)\big]\big]$, определяемом этими оценками, а также оказывается малоинформативной при исследовании распределения мощностей центра для почти всех n-вершинных графов, когда n стремится к бесконечности.

Теорема 8 (о спектре центра почти всех графов из $\mathcal{J}_{n,\, d=k}$ [23])**.** *Пусть $k \geq 1$ и $p \geq 1$ — фиксированные целые константы. Тогда*

(i) $|\mathbb{C}(G)| = n$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* $k = 1, 2$;

(ii) $|\mathbb{C}(G)| = n - 2$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 3;

(iii) $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[1 + p,\, n - 5 - p\big]\big]$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 4;

(iv) $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[2 + p,\, n - 5 - p\big]\big] \cup \{n - 4\}$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 5, *при этом доля таких графов с $(n-4)$-вершинным центром асимптотически равна* $\frac{1}{3}$;

(v) $|\mathbb{C}(G)| \in \{1\} \cup \big[\big[1 + p,\, n - k - 1 - p\big]\big]$ *для почти всех n-вершинных графов G четного фиксированного диаметра $k \geq 6$, при этом доля таких графов с тривиальным центром асимптотически равна* $\frac{k-4}{k-2}$;

(vi) $|\mathbb{C}(G)| \in \{2\} \cup \big[\big[2 + p,\, n - k - p\big]\big] \cup \{n - k + 1\}$ *для почти всех n-вершинных графов G нечётного фиксированного диаметра $k \geq 7$, при этом доля таких графов с* 2*-вершинным и $(n-k+1)$-вершинным центром асимптотически равна* $\frac{k-5}{k-2}$ *и* $\frac{1}{k-2}$ *соответственно.*

Отметим, что реализуемость найденного в теореме 8 спектра мощностей центра установлена в классе построенных типичных графов $\mathcal{F}_{n,k,p}$, для этого введены две конструкции построения таких графов (см. теорему 5 в [23]).

Из теоремы 8 вытекает ряд свойств центров почти всех графов фиксированного диаметра k. Например, почти нет графов диаметра

$k = 2, 4$ и нечётного диаметра k с тривиальным центром, причём для любого чётного $k \geq 6$ это не так. Аналогично почти нет графов диаметра $k = 1, 3, 5$ и чётного диаметра k с 2-вершинным центром, однако для любого нечётного $k \geq 7$ это не так. Неожиданным оказывается скачок мощности центра за пределы интервала из последовательных целых значений как сверху от $n - k - p$ до $n - k + 1$ для нечётного $k \geq 5$, так и снизу от $1 + p$ до 1 для чётного $k \geq 6$ и от $2 + p$ до 2 для нечётного $k \geq 7$. Заметим также, что границы этого интервала зависят от наперед выбранного произвольного целого p и сжимаются при выборе бóльшего значения p. При этом графы, мощность центра которых принадлежит этому интервалу (или соответственно совпадает со значением вне его), имеют ненулевую асимптотическую долю. А типичные графы для классов графов, соответствующих этим случаям мощности центра из теоремы 8, также построены в [23].

Следствие 7. *Для любого фиксированного $k \geq 2$ почти все n-вершинные графы каждого из следующих классов $\mathcal{J}_{n,\, d \geq k}$, $\mathcal{J}^*_{n,\, d \geq k}$ связны, имеют диаметр k и для центра выполняются свойства, сформулированные в теореме* 8.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

Список литературы

1. V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, R. I. Tyshkevich. Lectures on Graph Theory. — B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.

2. F. Harary. Graph Theory. – Addison–Wesley, London, 1969.

3. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. Concrete Mathematics. — Addison-Wesley, 1994.

4. J. W. Moon, L. Moser. Almost all (0,1) matrices are primitive // Stud. Sci. Math. Hung. — 1966. — V. 1. — P. 153–156.

5. Z. Füredi, Y. Kim. The number of graphs of given diameter // arXiv:1204.4580v1 [math.CO], 2012.

6. Т. И. Федоряева. Вектор разнообразия шаров типичного графа малого диаметра // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2015. — Т. 22(6). — С. 43–54.

7. T. I. Fedoryaeva. Asymptotic approximation for the number of n-vertex graphs of given diameter // J.Appl.Ind.Math. — 2017. — V. 11(2). — P. 204–214.

8. Т. И. Федоряева. Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2005. — Т. 12(3). — С. 74–84.

9. T. I. Fedoryaeva. Calculation of the diversity vector of balls of a

given graph // Siber. Electr. Math. Reports. — 2016. — V. 13. — P. 122–129.

10. T. I. Fedoryaeva. Diversity vectors of balls in graphs and estimates of the components of the vectors // J.Appl.Ind.Math. — 2008. — V. 2(3). — P. 341–356.

11. T. I. Fedoryaeva. On graphs with given diameter, number of vertices, and local diversity of balls // J.Appl.Ind.Math. — 2011. — V. 5(1). — P. 44–50.

12. Т. И. Федоряева. Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2009. — Т. 16(6). — С. 86–104.

13. T. I. Fedoryaeva. Majorants and minorants for the classes of graphs with fixed diameter and number of vertices // J.Appl.Ind.Math. — 2013. — V. 7(2). — P. 153–165.

14. T. I. Fedoryaeva. Structure of the diversity vector of balls of a typical graph with given diameter // Siber. Electr. Math. Reports. — 2016. — V. 13. — P. 375–387.

15. T. I. Fedoryaeva. Classification of graphs of diameter 2 // Siber. Electr. Math. Reports. — 2020. — V. 17. — P. 502–512.

16. P. A. Ostrand. Graphs with specified radius and diameter // Discrete Math. — 1973. — V. 4. — P. 71–75.

17. Yu. D. Burtin. On Extreme Metric Parameters of a Random Graph. I. Asymptotic Estimates // Theory Probab. Appl. — 1975. — V. 19(4). — P. 710-–725.

18. T. I. Fedoryaeva. On radius and typical properties of n-vertex graphs of given diameter // Siber. Electr. Math. Reports. — 2021. — V. 18. — P. 345–357.

19. F. Buckley, F. Harary. Distance In Graphs. — Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.

20. Г. Н. Копылов, Е. А. Тимофеев. О центрах и радиусах графов // УМН. — 1975. —- 32:6(198). — С. 226.

21. F. Buckley, Z. Miller, P. J. Slater. On graphs containing a given graph as a center // J. Graph Theory. — 1981. — V. 5. — P. 427–434.

22. F. Buckley. The central ratio of a graph // Discrete Mathematics. — 1982. — V. 38(1). — P. 17–21.

23. T. I. Fedoryaeva. Center and its spectrum of almost all n-vertex graphs of given diameter // Siber. Electr. Math. Reports. — 2021. — V. 18. — P. 511–529.

24. F. Buckley, M. Lewinter. Graphs with all diametral paths through distant central nodes // Mathematical and Computer Modelling. —

1993. — V. 17(11). — P. 35–41.

25. Y. Hu, X. Zhan. Possible cardinalities of the center of a graph // arXiv:2009.05925 [math.CO], 2020.

26. D. Mubayi, D. B. West. On the number of vertices with specified eccentricity // Graphs Comb. — 2000. — V. 16. — P. 441–452.

DOI: 10.20948/dms-2022-3