Секция «Функциональные системы»

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРВАЛА Int В ЧАСТИЧНОЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

В. Б. Алексеев, М. И. Миронов (Москва)

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $E_k^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid \forall i (a_i \in E_k)\}$ и ∞ трактуется как неопределенность. Множество всех функций $f : E_k^n \to E_k$ ($f : E_k^n \to E_k \cup \{\infty\}$), $(n = 1, 2, \dots)$ с операцией суперпозиции называют k-значной логикой P_k (соответственно, частичной k-значной логикой P_k^*).

Пусть A — произвольный замкнутый класс в P_k. Через $Int(A)$ будем обозначать множество всех замкнутых классов в P_k^*, содержащих A и состоящих только из функций, доопределимых до какой-нибудь функции из A [1]. В докладе установлены некоторые общие свойства интервала Int и приведен пример их применения.

Ранее многими авторами изучался более широкий интервал $\mathcal{I}(A)$, который состоит из всех замкнутых классов в P_k^*, пересечение которых с P_k есть в точности A. После долгих исследований в 2017 году была установлена мощность интервалов $\mathcal{I}(A)$ для всех замкнутых классов A булевых функций [2].

Интервалы $Int(A)$ оказываются интересны своей связью с полукольцами на подмножествах предикатов.

Пусть $Pr(k)$ — множество всех предикатов на E_k (то есть функций, принимающих только значения 0 и 1) от любого числа переменных. Пусть $A \subseteq P_k$, $K \subseteq Pr(k)$. Через $[K]_A$ будем обозначать замыкание множества предикатов K относительно следующих операций над предикатами: 1) произвольное переименование переменных; 2) добавление и изъятие фиктивных переменных; 3) конъюнкция предикатов; 4) подстановка в предикат функций из A вместо некоторых переменных. Множество всех предикатов $1(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ от любого числа переменных будем обозначать $\{1\}$. Через $Z(A)$ будем обозначать семейство всех подмножеств K в $Pr(k)$, содержащих $\{1\}$ и таких, что $[K]_A = K$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^*$, $R(x_1, \dots, x_n) \in Pr(k)$. Тогда через f/R

мы будем обозначать следующую функцию $h(x_1,\ldots,x_n) \in P_k^*$:

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_n), & \text{если } R(x_1,\ldots,x_n)=1,\\ \infty, & \text{если } R(x_1,\ldots,x_n)=0. \end{cases}$$

Пусть $A \subseteq P_k$, $K \subseteq Pr(k)$. Тогда положим $A/K = \{g \in P_k^* | \exists f \in A, \exists R \in K(g = f/R)\}$.

Клоном называют любой замкнутый класс, содержащий все селекторы $f_i^n(x_1,\ldots,x_n) \equiv x_i$. Одним из авторов в [3] доказано следующее утверждение, которое сводит изучение интервала $Int(A)$ к изучению $Z(A)$.

Теорема 1. *Если A — клон в P_k, то $Int(A)$ состоит из всех классов вида A/K, где K пробегает все классы предикатов из $Z(A)$. При этом $A/K_1 \subset A/K_2$ тогда и только тогда, когда $K_1 \subset K_2$.*

Если $K_1 \subseteq Pr(k)$, $K_2 \subseteq Pr(k)$, то положим $K_1 \cdot K_2 = \{R_1 \cdot R_2 | R_1 \in K_1, R_2 \in K_2\}$. На семействе всех подмножеств предикатов из $Pr(k)$ операции объединения и умножения подмножеств обладают всеми свойствами полукольца и задают коммутативное идемпотентное полукольцо с единицей, роль которой играет $\{1\}$. Роль 0 относительно умножения играет подмножество $\{0\}$ всех предикатов, тождественно равных нулю. Мы будем рассматривать и произведение бесконечного числа классов, имея в виду объединение всех конечных произведений этих классов.

Утверждение. *Если $K_1 \in Z(A)$, $K_2 \in Z(A)$ и $K_1 \subseteq K_2$, то $K_1 \cdot K_2 = K_2$.*

Класс K из $Z(A)$ будем называть базисным классом для $Z(A)$, если существует такой предикат $R \in Pr(k)$, что $[R \cup \{1\}]_A = K$. Важную роль для описания $Z(A)$ играют следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $A \subseteq P_k$. Тогда семейство $Z(A)$ состоит в точности из всех произведений (возможно бесконечных) базисных классов для $Z(A)$. Если число базисных классов в $Z(A)$ конечно и равно m, то $Z(A)$ содержит не более 2^{m-1} различных классов.*

Теорема 3. *Пусть $A \subseteq P_k$, $B \subseteq P_k$. Тогда $Z(A \cup B) = Z(A) \cap Z(B)$. Если $K_1 \in Z(A)$, $K_2 \in Z(B)$, то $K_1 \cap K_2 \in Z(A \cap B)$. Если $\{1\} \subseteq K_1$, $\{1\} \subseteq K_2$, то $[K_1 \cdot K_2]_A = [K_1]_A \cdot [K_2]_A = [K_1 \cup K_2]_A$.*

В качестве применения теоремы 2 рассмотрим описание $Z(N)$, где $N = M \cap T_0 \cap T_1$, M — класс монотонных булевых функций, а T_0 и T_1 — классы булевых функций, сохраняющих 0 и 1 соответственно.

Пусть $Q = \{f(x_1,\ldots,x_n) \in P_2 \mid \forall \alpha,\beta,\gamma((\alpha < \beta < \gamma)\&(f(\alpha) = f(\gamma) = 1) \Rightarrow (f(\beta) = 1))\}$, и пусть $C = \{\{0\} \cup \{1\}\}$.

Если $A \subseteq P_2$, $a, b \in \{0, 1\}$, то положим $A_{ab} = \{f \in A | f(0, \dots, 0) = a, f(1, \dots, 1) = b\}$ и $\overline{A} = \{f \in P_2 | \overline{f} \in A\}$. Вместо $(P_2)_{ab}$ будем писать P_{ab}. Легко видеть, что $Q_{11} = \{1\}$, $Q_{01} = N$, $Q_{10} = \overline{N}$, $Q = M \cdot \overline{M}$.

Теорема 4. *Базисными классами для* $Z(N)$ *являются только следующие 9 классов предикатов:* $\{1\}, C, Q_{00} \cup \{1\}, P_{00} \cup \{1\}, N \cup \{1\}, P_{01} \cup \{1\}, \overline{N} \cup \{1\}, P_{10} \cup \{1\}, P_{11}$.

Так как умножение классов предикатов дистрибутивно относительно их объединения, то для применения теоремы 2 достаточно иметь таблицу умножения для классов $\{1\}$, $\{0\}$, Q_{00}, N, $\overline{N}$, P_{ab}. Очевидно, что $\{1\} \cdot K = K$ и $\{0\} \cdot K = \{0\}$ для любого класса $K \subseteq Pr(k)$.

Теорема 5. *Для всех* a, b, c, d *из* $\{0, 1\}$ *выполняются следующие равенства:* $Q_{00} \cdot Q_{00} = Q_{00} \cdot N = Q_{00} \cdot \overline{N} = Q_{00}$, $Q_{00} \cdot P_{ab} = P_{00}$, $N \cdot N = N$, $\overline{N} \cdot \overline{N} = \overline{N}$, $N \cdot \overline{N} = Q_{00}$, $N \cdot P_{ab} = P_{0b}$, $\overline{N} \cdot P_{ab} = P_{a0}$, $P_{ab} \cdot P_{cd} = P_{a \cdot c, b \cdot d}$.

Теоремы 1, 2, 4, 5 позволяют получить следующее утверждение.

Теорема 6. *Если* $N = M \cap T_0 \cap T_1$, *то* $Int(N)$ *содержит ровно 33 замкнутых класса. Это классы вида* N/K, *где* K *пробегает все классы предикатов из теоремы 4, а также классы* $M, \overline{M}, M \cdot \overline{M} = Q, Q_{00} \cup M, Q_{00} \cup \overline{M}, P_{00} \cup M, P_{00} \cup \overline{M}, P_{01} \cup C, P_{10} \cup C, P_{11} \cup \{0\}, P_{00} \cup P_{11}, T_0 \cup \{1\}, \overline{T_0}, T_1, \overline{T_1} \cup \{1\}, T_0 \cup \overline{M}, \overline{T_1} \cup M, T_0 \cup P_{10} \cup \{1\}, T_1 \cup \{0\}, \overline{T_0} \cup \{0\}, T_0 \cup T_1, \overline{T_0} \cup \overline{T_1}, P_{00} \cup Q, Pr(2)$.

Используя теоремы 2-6 и то, что $M \cap T_a = N \cup \{a\}$, $M = (M \cap T_0) \cup \{1\}$, можно получить следующее утверждение.

Теорема 7. 1) *Для* $a \in \{0, 1\}$ *семейство* $Z(M \cap T_a)$ *содержит ровно 12 классов предикатов:* $\{1\}, C, Q_{\overline{a}a} \cup \{1\}, M, \overline{M}, Q, Q_{00} \cup Q_{a\overline{a}} \cup \{1\}, T_a \cup \{1\}, \overline{T_a}, T_a \cup \overline{M}, \overline{T_a} \cup C, Pr(2)$; 2) $Z(M)$ *содержит ровно 6 классов предикатов:* $\{1\}, C, M, \overline{M}, Q, Pr(2)$.

Теорема 7 вместе с теоремой 1 дают описание $Int(M \cap T_a)$ и $Int(M)$. Аналогично можно доказать, что $|Int(T_0 \cap T_1)| = 20$. Из работы [4] легко получить, что $|Int(S)| = 6$, $|Int(T_0)| = |Int(T_1)| = 6$. Однако семейство $Int(A)$ бесконечно для любого клона $A \subseteq L$, где L — класс линейных булевых функций [4, стр. 74].

Список литературы

1. Алексеев В. Б. О замкнутых классах в частичной k-значной логике, содержащих все полиномы // Дискретная математика. — 2021. — Т. 33, вып. 2. — С. 6–19.

2. Couceiro M., Haddad L., Schoelzel K., Waldhauser T. A solution to a problem of D. Lau: Complete classification of intervals in the lattice of

partial Boolean clones // J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. — 2017. — V. 28. — P. 47–58.

3. Alekseev V. B. On some intervals of partial clones // J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. — 2022. — V. 38. — P. 3–22.

4. Алексеев В. Б., Вороненко А.А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, вып. 4. — С. 58–79.

DOI: 10.20948/dms-2022-31

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ *A*-ФУНКЦИИ В ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ПОЛИНОМОВ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. Ф. Алексиадис (Москва)

Этот доклад можно считать продолжением цикла работ [3–5] и докладов на конференциях [6, 7] о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций.

При изложении материала в основном используется терминология книг [8, 9].

Для удобства изложения полагаем $0^0 = 1$.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F — множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах – это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).