При $n > 3$ функции определены индуктивно:

$$p_n(\tilde{x}) = \bar{x}_1 p_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1 q_{n-1}(x_2, \ldots, x_n),$$
$$q_n(\tilde{x}) = \bar{q}_1 p_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1 t_{n-1}(x_2, \ldots, x_n),$$
$$t_n(\tilde{x}) = \bar{t}_1 p_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1 p_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

В этой же работе доказано, что функции этой последовательности являются самыми сложными в классе расширенных поляризованных полиномов ZhE. Также имеет место формула для сложности представления функций из M_n в классе обратимых схем RS:

$$L_{RS}(M_n) = \tfrac{1}{2}2^n + 1.$$

В следующих теоремах представленной работы уточняется оценка $L_{ZhE}(M_n)$ и доказывается формула для сложности $L_{Zh_{\bar{1}}}(M_n)$.

Теорема. *Для любой функции $f \in M_n$ сложность f в классе поляризованных полиномов Жегалкина равна*

$$L_{Zh}(f) = \tfrac{1}{2}2^n - 1.$$

Теорема. $L_{Zh_{\bar{1}}}(M_n) = \frac{1}{2}2^n + 1$

Из приведенных оценок также получается формула для сложности $L_{RS}(M_n)$ из [1].

Список литературы

1. Францева А. С. Сложность представлений многовыходных фунций алгебры логики / С. Ф. Винокуров, А. С. Францева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2016. — Т.16. — С.30–42.

2. Избранные вопросы теории булевых функций / под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева. — М.: Физматлит, 2001.

DOI: 10.20948/dms-2022-34

О ГОМОМОРФИЗМАХ ГРУПП АВТОМАТНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК

В. В. Макаров (Москва)

Исследуется группа автоматных перестановок AS_2, состоящая из конечных автоматов с одним входом, действующих взаимнооднозначно на каждом множестве E_2^n всех слов из нулей и единиц

фиксированной длины n [1]. Эта группа занимает важное место в тематике исследований в дискретной математике и теории групп:
1) она содержит 2-порожденную бесконечную подгруппу, каждый элемент которой имеет конечный порядок (он является степенью двойки) (результат С. В. Алешина, решающий классическую проблему Бернсайда из теории групп [2]),
2) в ней содержатся свободные подгруппы,
3) AS_2 порождается своими элементами бесконечного порядка (результат автора — получен для всех AS_n [3, 4]).

Открытым остается вопрос : порождается ли группа AS_2 своими элементами порядка 2 (инволюциями)? В данной статье предложен пример подгруппы F в AS_2 , которая порождается своими инволюциями, причем в F содержится подгруппа G, которую можно гомоморфно отобразить на всю AS_2.

Пусть элемент A группы AS_2 имеет вид $A = (E_2, Q, E_2, \varphi, \psi, q_0)$, где Q — множество состояний автомата, q_0 — начальное состояние, φ — функция переходов $\varphi : Q \times E_2 \to Q$, ψ — функция выходов $\psi : Q \times E_2 \to E_2$. При фиксированном q из Q функция $\psi(q, x)$ равна либо x , либо $\overline{x}$.

Автомат с той же диаграммой, что и автомат A, но с другим начальным состоянием q обозначим через A_q. Автомат, обратный к A (или A_q) обозначим A^{-1} (A_q^{-1} соответственно). Пусть $C \circ D$ — суперпозиция автоматов C и D, т.е. $(C \circ D)(\alpha) = D(C(\alpha))$.

Рассмотрим систему Ω из автоматов $J = (E_2, Q, E_2, \varphi, \psi, q_0)$ с условием $\psi(q_0, x) = \overline{x}$, где для некоторого A из AS_2 имеет место: $J_{\varphi(q_0,0)}$ есть отображение, тождественное A, а $J_{\varphi(q_0,1)}$ есть отображение, тождественное A^{-1}. Если автомату A так соответствует автомат J , то будем использовать обозначение: $A \mapsto J$. Система Ω состоит из инволюций. Подгруппу, порожденную этой системой и обозначим через F.

Пусть E — единица группы AS_2. Пусть $V \in \Omega$ таков, что $E \mapsto V$.

Рассмотрим все те автоматы B из F, у которых в начальном состоянии q_0 реализуется тождественная выходная функция. Все они образуют подгруппу в F, которую мы и обозначим G.

Рассмотрим отображение H группы G в группу AS_2 заданное условием $H(K) = K_{\varphi(q_0,0)}$, где φ — функция переходов K.

Теорема. *H — гомоморфизм группы G на группу AS_2.*

Для доказательства сюръективности H рассмотрим произвольный автомат A из AS_2. Пусть J из Ω таков, что $A \mapsto J$. Тогда $H(J \circ V) = A, J \circ V \in G$. То есть G отображается на всю AS_2.

Пусть $K, L \in G$. Пусть $a \in E_2, \alpha \in E_2^n$. Пусть $H(K) = A, H(L) = B$. Тогда $K \circ L(a\alpha) = aB(A(\alpha)) = a(A \circ B)(\alpha)$, откуда следует $H(K \circ L) = H(K) \circ H(L)$.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С.В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

2.. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.

3. Makarov V. V. The automaton permutation group AS_n is generated by elements of infinite order // Discrete Mathematics and Applications. — 1997. — Vol. 7, Iss. 5. — P. 455–463.

4. Макаров В. В. О группах автоматных перестановок // Фунд. и прикл. мат. — 1996. —Т. 2, Вып. 1. — С. 171–186.

DOI: 10.20948/dms-2022-35

ТРУДНО ОПИСУЕМЫЕ ПОЧТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ВОЗВРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С. Д. Макеев (Москва)

Возвратная последовательность — последовательность чисел (в нашем случае — целых), в которой каждое следующий элемент вычисляется как некоторая функция от нескольких предыдущих: $x_n = f(x_{n-m}, ..., x_{n-1})$. Функция f называется *порождающей*, а число m — *порядком* последовательности. Каждая последовательность полностью задаётся её порождающей функцией и первыми m элементами.

Класс последовательностей задаётся классом функций, из которого можно выбирать их порождающие функции. Некоторые классы последовательностей являются «просто описуемыми»: например, для класса, в котором порождающими функциями могут быть только линейные, известны явные формулы n-го члена последовательности. Но для класса, порождающими функциями которого являются все полиномы с целыми коэффициентами, неизвестно, является ли он просто описуемым. Мы будем доказывать, что некоторые чуть большего размера классы являются «трудно описуемыми», в том смысле, что предсказать поведение последовательности этого класса — настолько же сложная задача, как предсказать поведение машины Тьюринга, т.е. алгоритмически неразрешимая. Если мы