# Секция «Комбинаторный анализ»

## АСИМПТОТИКА ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

**Т. В. Андреева (Москва)**

В работах [1, 2] рассмотрены задачи, решение которых может быть сведено к вычислению коэффициентов некоторых производящих функций. К таким задачам относятся вычисление мощности слоя частично упорядоченного множества, а также вычисление суммы граничных функционалов в оценке числа антицепей в частично упорядоченном множестве.

В этой статье приводится обобщение полученных ранее результатов. Рассмотрим производящую функцию вида

$$H_a(z) = (a + z + az^2)^n = \sum_{r=0}^{2n} H_a^{(r)} z^r.$$

В [1] описан метод вычисления коэффициентов функции $H_a(z)$, и при $a = 1$ вычислены коэффициенты функции $H_1^{(n)}$ и $H_1^{(n-1)}$.

Основным результатом настоящей работы является

**Теорема.** *При* $a > 0$

$$H_a^{(n)} = (2a+1)^n \sqrt{\tfrac{2a+1}{4a}} \cdot \tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \tfrac{2a-1}{a \cdot 16n} + \tfrac{(2a-1)(2a-9)}{a^2 \cdot 512 n^2} + O\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right).$$

$$H_a^{(n-1)} = (2a+1)^n \sqrt{\tfrac{2a+1}{4a}} \cdot \tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \tfrac{10a+3}{a \cdot 16n} + \tfrac{356a^2+108a-15}{a^2 \cdot 512 n^2} + O\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right).$$

Применив формулу Стирлинга, получим оценки, не содержащие двойные факториалы:

**Следствие.** *При* $a > 0$

$$H_a^{(n)} = (2a+1)^n \sqrt{\tfrac{2a+1}{4a}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \tfrac{4a-1}{a \cdot 16n} + \tfrac{(4a-3)^2}{a^2 \cdot 512 n^2} + O\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right),$$

$$H_a^{(n-1)} = (2a+1)^n \sqrt{\tfrac{2a+1}{4a}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \tfrac{12a+3}{a \cdot 16n} + \tfrac{400a^2+120a-15}{a^2 \cdot 512 n^2} + O\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right).$$

**Замечание.** При $a = 0.5$

$$H_{0.5}(z) = (0.5 + z + 0.5z^2)^n = \frac{1}{2^n}(1+z)^{2n},$$

поэтому можно получить точные значения:

$$H_{0.5}^{(n)} = \frac{1}{2^n} C_{2n}^{n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad H_{0.5}^{(n-1)} = \frac{1}{2^n} C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

**Замечание.** При $a, c > 0$

$$(a + cz + az^2)^n = c^n H_{a/c}(z).$$

Приведем пример приложения полученных результатов. При $a \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $E_{3,a} = \{-a, ..., -1, 0, 1, ..., a\}$ с отношением порядка $-i < 0 < j$, где $i, j = 1, \ldots, a$, и элементы одного знака несравнимы между собой. Его $n$–ую декартову степень обозначим $E_{3,a}^n$.

На множестве $E_{3,a}^n$ определим отношение частичного порядка $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \le \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \Leftrightarrow \beta_i < \gamma_i \vee \beta_i = \gamma_i, i = 1, ..., n$, и функцию ранга $r(\tilde{\beta}) = n + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\beta_{\mathrm{i}})$.

Антицепь в частично упорядоченом множестве — это подмножество, в котором нет пары сравнимых наборов. Через $\Psi(E_{3,a}^n)$ обозначим число антицепей в множестве $E_{3,a}^n$.

Через $F_a(n, r) = \{\tilde{\beta} \in E_{3,a}^n : r(\tilde{\beta}) = r\}$, $0 \le r \le 2n$, обозначим $r$–й слой множества $E_{3,a}^n$. Положим $N_a(n, r) = |F_a(n, r)|$, при этом $N_a(n, r) = H_a^{(r)}$.

Слой, очевидно, является антицепью. Несложно показать, что при достаточно больших $n$ центральный слой $F_a(n, n)$ имеет максимальную мощность, поэтому

$$2^{N_a(n,n)} \leqslant \Psi(E_{3,a}^n).$$

В работе [2] описан метод граничных функционалов, с помощью которого можно уточнить тривиальную нижнюю оценку числа антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах. Для множеств специального вида эта оценка является асимптотической. Суть метода заключается в вычислении так называемых сумм граничных функционалов.

Обозначим $X = F_a(n, n-1)$, $Z = F_a(n, n)$. Для $A \subseteq X$ положим $\partial A = \{\tilde{\delta} \in Z : \ \exists \tilde{\beta} \in A \ \ \tilde{\beta} \le \tilde{\delta}\}$. Тогда

$$\Psi\bigl(X \cup Z\bigr) = \sum_{A \subseteq X} 2^{|Z \setminus \partial A|} = 2^{N_a(n,n)} \sum_{A \subseteq X} 2^{-|\partial A|}.$$

Если $\partial\{\tilde\beta\}\cap\partial\{\tilde\gamma\}\neq\emptyset$, будем писать $\tilde\beta\bowtie\tilde\gamma$. Положим

$$\widehat{\mu}_2=\sum_{\tilde\beta\in X}\left(2^{-|\partial\{\tilde\beta\}|}-2^{-2|\partial\{\tilde\beta\}|-1}\right)+\sum_{\substack{\tilde\beta,\tilde\gamma\in X:\\ \tilde\beta\bowtie\tilde\gamma}}\left(2^{-|\partial\{\tilde\beta,\tilde\gamma\}|}-2^{-|\partial\{\tilde\beta\}|-|\partial\{\tilde\gamma\}|}\right),$$

здесь суммирование ведется не по всем множествам, а лишь по множествам малой мощности.

Из [2] (теорема 4.3) следует, что

$$e^{\widehat{\mu}_2}\leq\sum_{A\subseteq X}2^{-|\partial A|},\quad \text{откуда}\quad 2^{H_a^{(n)}}e^{\widehat{\mu}_2}\leqslant\Psi(E^n_{3,a}).$$

Вычисление $\widehat{\mu}_2$ можно свести к вычислению сумм граничных функционалов вида

$$\alpha^{(1),\nu}_{[1]}=\sum_{\tilde\beta\in X}2^{-\nu\cdot|\partial\{\tilde\beta\}|},\ \ \nu=1,2.$$

В разделе 5 работы [1] описан один из способов вычисления сумм граничных функционалов для множества $E^n_{3,1}$. Обобщим рассуждения на случай $E^n_{3,a}$, получим

$$\alpha^{(1),\nu}_{[1]}=\frac{1}{2^{\nu\cdot(an+0.5)}}H^{(n-1)}_{a2^{\nu\cdot(a-0.5)}}$$

Теперь из основного результата настоящей работы следует, что

$$\alpha^{(1),\nu}_{[1]}=\sqrt{\frac{1+2a2^{\nu\cdot(a-0.5)}}{4\pi na2^{\nu\cdot(a+0.5)}}}\left(\frac{1+2a2^{\nu\cdot(a-0.5)}}{2^{\nu a}}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, основную теорему можно использовать для получения асимптотик мощности центральных слоев симметричных множеств $E^n_{3,a}$ и для улучшения нижней оценки числа антицепей в таких множествах.

**Список литературы**

1. Андреева Т. В., Семенов Ю. С. О мощности слоёв некоторых частично упорядоченных множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, кн. 3. — С. 269–284.

2. Сапоженко А. А., Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 152 с.

DOI: 10.20948/dms-2022-42