МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ГОСУДАРСТВА НА АДМИНИСТРАТИВНО-ТЕРРИТОРИАЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Р. В. Бузату (Кишинёв)

В работе исследуется задача нахождения оптимального разделения территории государства на административно-территориальные единицы (АТЕ), ограниченного демографическими, экономическими и географическими критериями балансировки. Детальнее с подобными задачами можно ознакомится в работах [1, 2].

Минимальными неделимыми элементами считаются населённые пункты (НП). Из числа всех НП нужно выбрать административно-территориальные центры (АТЦ), а оставшиеся НП подчинить каким-то из этих центров, образовав тем самым искомые АТЕ. Требование связности и компактности территории каждой АТЕ представляет собой основное вычислительное узкое место. Разработанная модель весьма хорошо масштабируется и находит разделения территории государства на связные АТЕ, используя эвристику, основанную на поиске всех кратчайших путей между АТЦ и подчинёнными им НП. При этом под оптимальностью разделения государства на АТЕ понимается минимизация общего количества АТЕ, ограниченного рядом условий.

Формулировка задачи. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф, в котором множество вершин обозначается через $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (каждая вершина соответствует одному НП), и ребро e_{ij} принадлежит E тогда и только тогда, когда населённые пункты v_i и v_j напрямую соединены дорогой. Каждая вершина характеризуется тремя атрибутами: численностью населения, бюджетным потенциалом и долей этнических меньшинств. Вес каждого ребра $e_{ij} \in E$ соответствует длине дороги, напрямую соединяющей населённые пункты v_i и v_j.

Множество V следует разбить на p АТЕ, $p \geq 2$, с учётом следующих ограничений. Прежде всего, каждой вершине должна быть назначена ровно одна АТЕ, причём каждая АТЕ должна иметь по крайней мере минимально допустимое количество жителей. Административным центром АТЕ должен быть НП с максимальной численностью населения и максимальным бюджетным потенциалом, и он должен располагаться как можно ближе ко всем другим НП, входящих в данную АТЕ. Последнее условие можно интерпретировать как меру компактности. Кроме того, АТЕ должны быть географически связными, т.е. каждая АТЕ должна индуцировать связный подграф.

Еще одно важное ограничение обусловлено тем, что только НП со схожей этнической структурой могут группироваться в АТЕ.

Модель двоичного линейного программирования. Для решения поставленной задачи вначале введём переменные x_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, имеющие следующее значение:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{НП } v_j \text{ подчинён АТЦ } v_i. \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, если v_i является АТЦ, то $x_{ii} = 1$, иначе $x_{ii} = 0$. Вспомогательные двоичные переменные y_i, $1 \leq i \leq n$, используются для обеспечения соблюдения этнических ограничений. Введём необходимые обозначения:

N	—	минимальное число выделяемых АТЕ;
D	—	максимально допустимое дорожное расстояние между АТЦ и подченёнными им НП;
C	—	минимально допустимый бюджетным потенциал АТЦ;
P	—	минимально допустимая численность населения АТЦ;
P^*	—	минимально допустимая численность населения АТЕ;
M	—	достаточно большое положительное число;
p_i	—	численность населения НП v_i;
c_i	—	бюджетный потенциал НП v_i;
γ_i	—	этнический индикатор НП v_i ($\gamma_i = 1$ если доля этнических меньшинтв НП v_i превышает заданный порог, иначе $\gamma_i = 0$);
d_{ij}	—	длина кратчайшей дороги, напрямую соединяющей НП v_i и v_j;
α	—	коэффициент релаксации численности населения, $\alpha \in [0, 1]$ (численность населения любого НП не должна превышать $(1 + \alpha) * 100\%$ от численности населения АТЦ);
β	—	коэффициент релаксации бюджетного потенциала, $\beta \in [0, 1]$ (бюджетный потенциал любого НП не должен превышать $(1 + \beta) * 100\%$ от бюджетного потенциала АТЦ);
$\langle v_i, v_j \rangle$	—	множество НП, расположенных на всех кратчайших дорогах, соединяющих НП v_i и v_j.

Сформулируем модель двоичного линейного программирования.

Минимизировать $\sum_{i=1}^{n} x_{ii}$
при ограничениях:

$$\begin{array}{lr}
d_{ij}x_{ij} \le D, & i,j=\overline{1,n} \\
\sum_{v_k\in\langle v_i,v_j\rangle} x_{ik} \ge |\langle v_i,v_j\rangle| x_{ij}, & i,j=\overline{1,n} \\
\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \ge P^* x_{ii}, & i=\overline{1,n} \\
p_i x_{ii} \ge P x_{ii}, & i=\overline{1,n} \\
p_j x_{ij} \le (1+\alpha) p_i x_{ii}, & i,j=\overline{1,n} \\
c_i x_{ii} \ge C x_{ii}, & i=\overline{1,n} \\
c_j x_{ij} \le (1+\beta) c_i x_{ii}, & i,j=\overline{1,n} \\
\sum_{j=1}^{n} (1-\gamma_j) x_{ij} \le M y_i, & i=\overline{1,n} \\
\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \le M(1-y_i), & i=\overline{1,n} \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j=\overline{1,n} \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ii} \ge N & \\
x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, & i,j=\overline{1,n}
\end{array}$$

Заметим, что разработанная модель была успешно применена для получения оптимальных сценариев разделения территории Республики Молдова на АТЕ, которые полностью соответствуют требованиям законодательства и обеспечивают разумный компромисс между всеми критериями балансировки [3].

Список литературы

1. Kalcsics J., Nickel S., Schröder M. Towards a unified territorial design approach — Applications, algorithms and GIS integration // TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research. — 2005. — Vol. 13. — No. 1 — P. 1–56.

2. Ricca F., Scozzari A., Simeone B. Political districting: from classical models to recent approaches // Annals of Operations Research. — 2013. — Vol. 204. — No. 1 — P. 271–299.

3. Beschieru I., Toma D., Levinta-Perciun E., Utica O., Buzatu R., Ghita A.F., Cepoi E. Study on administrative-territorial reform scenarios. — Chisinau. — 2018. — 272 p. (in Romanian).

DOI: 10.20948/dms-2022-43