ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ

М. Д. Емелин, Л. Г. Афраймович (Нижний Новгород)

Рассматривается задача о назначениях с квадратичным критерием [2]. Ставится задача оптимального комбинирования допустимых решений задачи о назначениях с квадратичным критерием. Предлагается эвристический алгоритм её решения. Описывается подкласс задачи, на котором алгоритм находит оптимум. Данный подход может быть применен в качестве дополнения к известным эвристическим или приближенным алгоритмам для постобработки полученных решений задачи о назначениях.

Постановка задачи. Пусть заданы три непересекающиеся множества индексов $I, J, K, |I| = |J| = |K| = n$, а также две трёхиндексных матрицы стоимостей и трёхиндексная матрица неизвестных, $a_{ijk}, c_{ijk}, x_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K$, поставлена трёхиндексная аксиальная задача о назначениях с квадратичным критерием:

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, i \in I, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} = 1, k \in K, \tag{3}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J, k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{i'\in I}\sum_{j'\in J}\sum_{k'\in K} a_{ijk}a_{i'j'k'}x_{ijk}x_{i'j'k'}+$$

$$+\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} \to min. \tag{5}$$

и известны 2 допустимых решений данной задачи x^1, x^2. Введем множество $W(x)$ следующим образом: $W(x) = \{(i,j,k)|x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}$. Обозначим через $Z(W(x^1,x^2))$ задачу (1)–(6), где $W(x^1,x^2) = W(x^1) \cup W(x^2)$

$$x_{ijk} = 0, (i,j,k) \notin W(x^1,x^2) \tag{6}$$

Подходы к решению. По аналогии с [1], предлагается следующий алгоритм:
Шаг 1. Построить граф G(V,A), где $V = \{I \cup J \cup K\}, A = \{(i,j),(i,k),(j,k)|(i,j,k) \in W(x^1,x^2)\}$.
Шаг 2. Найти компоненты связности $V_l, l = (1,q)$ графа G и построить подграфы $G_l = (V_l, A_l), l = (1,q)$, порожденные соответствующими компонентами связанности.
Шаг 3. Построить следующие множества

$$D_l^1 = \{(i,j,k)|(i,j,k) \in W(x^1),(i,j),(i,k),(j,k) \in A_l\},$$

$$D_l^2 = \{(i,j,k)|(i,j,k) \in W(x^2),(i,j),(i,k),(j,k) \in A_l\},$$

Шаг 4. Построить следующие массивы

$$C_l^p = \sum_{(i,j,k)\in D_l^p} c_{ijk}, l = \overline{1,q}, p = \{1,2\}$$

$$A_l^p = \sum_{(i,j,k)\in D_l^p} a_{ijk}, l = \overline{1,q}, p = \{1,2\}$$

Шаг 5. Решение задачи определяется по следующему алгоритму. Пусть $x_{ijk} = 0, i \in I, j \in J, k \in K$. Далее для каждого $l = \overline{1,q}$ выполнить $x_{ijk} = 1, (i,j,k) \in D_l^{p^*}$, где если$A_l^1 = A_l^2$, то $p^* = \underset{p\in\{1,2\}}{\operatorname{argmin}} C_l^p$, иначе $p^* = \underset{p\in\{1,2\}}{\operatorname{argmin}} A_l^p$.

Теорема. *Алгоритм находит оптимальное решение задачи $Z(W)$, если $A_l^1 \le A_l^2$ и $C_l^1 \le C_l^2$ или $A_l^1 \ge A_l^2$ и $C_l^1 \ge C_l^2$ для всех $l = \overline{1,q}$.*

Утверждение. *Алгоритм требует $O(n)$ вычислительных операций.*

Вычислительный эксперимент. Эксперимент проводился на тестах сгенерированных следующим образом: c_{ijk}, a_{ijk} выбирались случайно из отрезка $[0,300]$. Для каждого теста генерировалось n^4 случайных решений, каждое из которых проходило через процедуру локальной оптимизации. Для серии экспериментов будем оценивать среднее отклонение от минимума. В каждой серии было 10 задач одинаковой размерности.

n	Среднее отклонение от минимума
10	5,13%
11	5,223%
12	4,904%
13	5,932%
14	6,339%
15	4,415%
16	4,497%
17	4,267%
18	3,552%
19	4,231%

Согласно приведенным выше результатам применение алгоритма комбинации позволило улучшить значение критерия в среднем на $4,849\%$ по сравнению с выбором минимума.

Список литературы

1. Афраймович Л. Г., Емелин М. Д. Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях // АиТ. — 2021. — № 8. — С. 159–168.

2. Spieksma F. C. R. Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications // Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. — P. 1–11.

DOI: 10.20948/dms-2022-46

СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ 5-КОФИГУРАЦИЙ

М. М. Комягин, Ф. М. Малышев (Москва)

Понятие k-конфигурации важно в связи с использованием их матриц инциденций (k-матриц) в алгоритмах шифрования. Определение k-конфигурации использует сложение множеств, задаваемое правилом $A + B = (A \cup B) \diagdown (A \cap B)$.