АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА ЧИСЛА НАБОРОВ, (k,l)-СВОБОДНЫХ ОТ РЕШЕНИЙ, В ОТРЕЗКЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В. Г. Саргсян (Ереван)

Пусть k, l — неотрицательные целые числа, и $k + l \geq 3$. Рассмотрим множество G с определенной на нем операцией сложения. Пусть $A_1, \ldots, A_{k+l}$ — подмножества G. Набор множеств $(A_1, \ldots, A_{k+l})$ называется (k,l)-*свободным от решений* ((k,l)-НСР), если не существует набора $(a_1, \ldots, a_{k+l}) \in A_1 \times \cdots \times A_{k+l}$, являющегося решением уравнения

$$x_1 + \cdots + x_k = x_{k+1} + \cdots + x_{k+l} \qquad (1)$$

Семейство всех (k,l)-НСР в G обозначим через $S_{k,l}(G)$. Положим

$$\lambda_{k,l}([1,n]) = \max_{(A_1,\ldots,A_{k+l}) \in S_{k,l}([1,n])} |A_1 \cup \cdots \cup A_{k+l}|.$$

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема 1. *Пусть k, l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \geq 3$. Тогда при $n \to \infty$ справедливо равенство*

$$\log |S_{k,l}([1,n])| = \lambda_{k,l}([1,n]) + \bar{o}(n),$$

L-гранулой типа смежного класса называется объединение смежных классов группы G по некоторой подгруппе порядка не меньше L.

Пусть L — целое число и $d \in G$, причем $\mathrm{ord}(d) \geq L$, где $\mathrm{ord}(d)$ — порядок элемента d. Пусть H — подгруппа группы G, порожденная элементом d. Разобьём каждый смежный класс подгруппы H на $\lfloor \mathrm{ord}(d)/L \rfloor$ прогрессий вида $\{x + ld \mid 0 \leq l \leq L-1\}$ и одно «остаточное» множество мощности менее L. Для каждого $d \in G$ фиксируем одно такое разбиение. Объединение полученных прогрессий (в объединение не входят «остаточные» множества) называется *L-гранулой типа прогрессии.*

Отметим, что в определении L-гранулы типа смежного класса (прогрессии) речь идет об объединении произвольных смежных классов (прогрессий).

Следующие две леммы можно найти в работе [1] (см. стр. 166, Лемма 3.3 и Лемма 3.4).

Лемма 1. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, G — абелева группа порядка n, а $L \leq \sqrt{n}$. Тогда в группе G имеется не более $2^{3n/L}$ L-гранул обоих типов (прогрессии и смежного класса).*

Лемма 2. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, и M — множество мощности n, а ρ — вещественное число, меньшее некоторой абсолютной положительной константы. Тогда, число подмножеств множества M, мощности не превышающей ρn, не превосходит $2^{n\sqrt{\rho}}$.*

Следующая теорема доказана в работе [2].

Теорема 2. *Пусть $k \geq 3$, $A_1, \ldots, A_k$ — такие подмножества абелевой группы G порядка n, что существует $\bar{o}(n^{k-1})$ решений уравнения $x_1 + \cdots + x_k = 0$ при $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда существуют подмножества $A'_1, \ldots, A'_k$ такие, что $A'_i \subseteq A_i$, $|A_i \setminus A'_i| = \bar{o}(n)$, и решений уравнения $x_1 + \cdots + x_k = 0$ при $x_i \in A'_i$ нет.*

Лемма 3 (Гранулирование)**.** *Пусть n — достаточно большое натуральное число, G — абелева группа порядка n, и k, l — натуральные числа, $k + l \geq 3$, $(A_1, \ldots, A_{k+l}) \in S_{k,l}(G)$, а $0 < \varepsilon < 1/2$, L и L' — положительные числа, удовлетворяющие неравенству $n > L'\,(4L/\varepsilon)^{(k+l)^3 4^{3(k+l)+1} \varepsilon^{-3(k+l+1)}}$. Тогда существуют подмножества $A'_1, \ldots, A'_{k+l}$ группы G такие, что:* (i) *$A'_1, \ldots, A'_{k+l}$ — либо L-гранулы типа прогрессии, либо L'-гранулы типа смежного класса;* (ii) $\left|A_1 \setminus A'_1\right| \leq \varepsilon n, \ldots, \left|A_{k+l} \setminus A'_{k+l}\right| \leq \varepsilon n$*;* (iii) *$(A'_1, \ldots, A'_{k+l})$ содержит не более εn^{k+l-1} решений уравнения (1).*

Теорема 3. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, а k, l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условиям $k + l \geq 3$ и $k \geq l$. Тогда существует семейство $\mathcal{F}$ наборов $(F_1, \ldots, F_{k+l})$ подмножеств отрезка натуральных чисел $[1, n]$, удовлетворяющее условиям:* (i) $\log|\mathcal{F}| \leq 2(k + l)(kn + 1)(k + l - 1)^{-1/2}(\log(kn + 1))^{-(6(k+l)+8)^{-1}}$*;* (ii) *для каждого $(A_1, \ldots, A_{k+l}) \in S_{k,l}([1, n])$ существует набор $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$ такой, что $A_1 \subseteq F_1, \ldots, A_{k+l} \subseteq F_{k+l}$;* (iii) *всякий набор $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$ содержит не более $(kn+1)^{k+l-1}(\log(kn+1))^{-(3(k+l)+4)^{-1}}$ решений уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}_m$ — циклическая группа порядка $m = kn+1$. Положим $\mathcal{H} = \left\{(A_1 \cap [1, n], \ldots, A_{k+l} \cap [1, n]) \,\middle|\, (A_1, \ldots, A_{k+l}) \in S_{k,l}(\mathbb{Z}_m)\right\}$. Нетрудно убедиться, что $S_{k,l}([1, n]) = \mathcal{H} \subseteq S_{k,l}(\mathbb{Z}_m)$. Положим $L = L' = \lfloor \log m \rfloor$ и $\varepsilon = (k + l + 1)^{-1}(\log m)^{-(3(k+l)+4)^{-1}}$. Несложно видеть, что при достаточно большом m такой выбор параметров удовлетворяет условию леммы 3 (в лемме 3 в качестве G берем $\mathbb{Z}_m$). Таким образом, для каждого набора $(A_1 \ldots, A_{k+l}) \in \mathcal{H}$, применяя лемму 3, построим набор множеств $(A'_1 \ldots, A'_{k+l})$. Положим $\mathcal{F} = \{(A_1 \cup A'_1, \ldots, A_{k+l} \cup A'_{k+l}) \mid (A_1 \ldots, A_{k+l}) \in \mathcal{H}\}$. Тогда пункт (ii) выполнен автоматически. Отсюда и в силу пункта (ii) леммы 3 вытекает, что мощность семейства $\mathcal{F}$ не превосходит количества наборов $(F_1 \ldots, F_{k+l})$ таких, что для всех $i = 1, \ldots, k+l$ множество F_i является объединением L-гранулы с некоторым подмножеством группы Z_m, мощности не более εm. Таким образом, в силу лемм 1 и 2 следует, что $\log|\mathcal{F}| \leq (k+l)(3m/L + m\sqrt{\varepsilon})$, что при достаточно большом m не превосходит $2(k+l)m\sqrt{\varepsilon} = 2(k+l)(kn+1)(k+l-1)^{-1/2}(\log(kn+1))^{-(6(k+l)+8)^{-1}}$. Пункт (i) выполнен. Несложно убедиться, что при добавлении элемента в одно из множеств набора $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$, в нем может образоваться не более m^{k+l-2} новых решений уравнения (1). Отсюда и в силу пункта (iii) леммы 3 получаем, что в каждом наборе $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$ не более, чем $\varepsilon m^{k+l-1} + \varepsilon m \cdot (k+l)m^{k+l-2} = (kn+1)^{k+l-1}(\log(kn+1))^{-(3(k+l)+4)^{-1}}$ решений уравнения (1).

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности предположим, что $k \geq l$. Пусть $\mathbb{Z}_m$ — циклическая группа порядка $m = kn+1$. Из теоремы 3 следует, что существует семейство $\mathcal{F}$ наборов подмножеств (гранул) отрезка натуральных чисел $[1,n]$, удовлетворяющее условиям (i)-(iii). Пусть $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$. Фиксируя $(F_1, \ldots, F_{k+l})$ и, применяя теорему 2 при $A_1 = F_1, \ldots, A_k = F_k, A_{k+1} = -F_{k+1}, \ldots, A_{k+l} = -F_{k+l}$, как подмножества группы $\mathbb{Z}_m$, получаем, что существуют $F'_1 \subseteq F_1, \ldots, F'_{k+l} \subseteq F_{k+l}$, такие, что $|F_i \setminus F'_i| = \overline{o}(m)$, $i = 1, \ldots, k+l$, и $(F'_1, \ldots, F'_{k+l}) \in S_{k,l}([1,n])$. Набор $(Q_1, \ldots, Q_{k+l})$ назовем «*поднабором*» набора $(W_1, \ldots, W_{k+l})$, если имеет место $Q_1 \subseteq W_1, \ldots, Q_{k+l} \subseteq W_{k+l}$. Отсюда и из того, что $\log|\mathcal{F}| = \overline{o}(n)$ (пункт (i) теоремы 3), с учетом того, что $\overline{o}(m) = \overline{o}(n)$, получаем, что число «поднаборов» всех наборов семейства $\mathcal{F}$, не превосходит $2^{|F'_1 \cup \cdots \cup F'_{k+l}| + \overline{o}(n)}$.

Из пункта (ii) теоремы 3 следует, что любой набор из $S_{k,l}([1,n])$ является «поднабором» некоторого набора из семейства $\mathcal{F}$. Из последнего следует, что при $n \to \infty$ верно, что $\log|S_{k,l}([1,n])| = \lambda_{k,l}([1,n]) + \overline{o}(n)$.

Список литературы

1. Green B., Ruzsa I. Sum-free sets in abelian groups // Israel J. Math. — 2005. — Vol. 147. — P. 157–188.

2. Green B. A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups // GAFA. — 2005. — Vol. 15, No. 2. — P. 340–376.

DOI: 10.20948/dms-2022-49