Секция
«Теория графов»

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДЕРЕВЬЕВ С РАЗМЕРОМ ПРИВЕДЕННОЙ КОЛОДЫ 1

М. Б. Абросимов, П. А. Володина (Саратов)

Неориентированным графом (далее просто графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V, называемое отношением смежности. Степень вершины — количество ребер графа, инцидентных этой вершине [1, 2]. Висячая вершина (лист) — вершина степени 1.

Дерево — связный граф, в котором нет циклов. Дерево с одной вершиной называется *тривиальным.* Мы будем рассматривать деревья с числом вершин больше 1. Среди нетривиальных деревьев только цепи имеют 2 листа, у всех остальных деревьев не менее 3 листьев.

Деревья являются важным классом графов. Многие задачи, весьма сложные в общем случае, эффективно решаются для деревьев. Одной из таких задач является реконструкция графов по их частям.

Подграф — граф, получающийся удалением произвольного количества вершин и всех инцидентных им ребер из исходного графа. *Максимальный подграф* — подграф, получающийся удалением одной произвольной вершины.

Колодой графа называется список его максимальных подграфов. *Поддерево* — дерево, получающееся удалением произвольного количества висячих вершин и всех смежных с ними ребер из исходного дерева. *Максимальное поддерево дерева* — поддерево, получающееся удалением одной произвольной висячей вершины. *Колодой дерева* будем называть список его максимальных поддеревьев.

Определение. Приведенная колода дерева — колода дерева, которая содержит только неизоморфные максимальные поддеревья дерева.

Напомним, что два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $f : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности:

$$\forall u, v \in V_1 : (u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2.$$

Пол Келли в своей работе «Теорема о конгруэнции деревьев» [3] доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть $c(a_i)$ обозначает $(n-1)$-вершинный подграф дерева, полученный удалением вершины a_i и всех инцидентных ей ребер. Если A и B — деревья с вершинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ($n \geq 3$) соответственно, и $c(a_i)$ изоморфно $c(b_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, тогда A изоморфно B.*

Таким образом, вопрос о вершинной реконструируемости деревьев был решён. Фрэнк Харари и Эд Палмер в 1966 году опубликовали работу «Реконструкция дерева по его максимальным поддеревьям» [4]. В ней был получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — висячие вершины в дереве T и пусть $T_t = T - v_t$ — поддерево, полученное удалением вершины v_t из дерева T. Каждое дерево T однозначно определяется своими поддеревъями T_i.*

Таким образом, известно, что дерево однозначно определяется не только его колодой, но и своими максимальными поддеревьями. Вопрос о реконструируемости дерева по его приведённой колоде также был решён в работе [5].

Теорема. *Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — висячие вершины в дереве T и пусть $T_t = T - v_t$ — поддерево, полученное удалением вершины v_t из дерева T. Каждое дерево T с числом вершин $n > 6$однозначно определяется своими неизоморфными поддеревъями T_i.*

В данной работе рассматривались деревья с приведённой колодой определённого вида. *Размер приведённой колоды дерева* — количество поддеревьев в ней. Рассмотрим деревья с размером приведённой колоды 1, то есть это такие деревья, что все их максимальные поддеревья являются попарно изоморфными. К таким деревьям относятся, например, цепи или звезды. Для деревьев с размером приведённой колоды 1 удалось установить ряд свойств.

Теорема. *В дереве с размером приведённой колоды 1 все листья имеют одинаковый эксцентриситет.*

Как известно по теореме Жордана центр дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Теорема. *Если дерево с размером приведённой колоды 1 не является цепью, то удаление из него одного листа не меняет центр.*

Основным результатом данной работы является следующая характеристическая теорема.

Теорема. *Дерево имеет размер приведённой колоды 1 тогда и только тогда, когда все его листья подобны.*

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

2. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука, 1997.
3. Kelly P. J. A congruence theorem for trees // Pacific Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 7. — P. 961–968.
4. Harary F., Palmer E. The reconstruction of a tree from its maximal subtrees // Canadian Journal of Mathematics. — 1966. — Vol. 18. — P. 803–810.
5. Manvel B. Reconstruction of trees // Canadian Journal of Mathematics. — 1970. — Vol. 22. — P. 55–60.

DOI: 10.20948/dms-2022-51

О КОЛИЧЕСТВАХ ДЕТСКИХ РИСУНКОВ С ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ПАСПОРТАМИ

Н. М. Адрианов (Москва)

Пусть X — компактная ориентированная поверхность рода g. *Детским рисунком* $D = (X, \Gamma)$ мы называем двукрашенный граф Γ, вложенный в поверхность X таким образом, что $X \setminus \Gamma$ есть объединение дисков. Термин «детский рисунок» (dessin d'enfant), придуманный А. Гротендиком, является синонимом понятия *двукрашенная карта*. Мы используем его для того, чтобы подчеркнуть связи между комбинаторикой и теорией рациональных функций (функций Белого), алгебраических кривых и их пространств модулей, теорией Галуа (полей определения) и т.д., см. [1].

Паспортом детского рисунка D с N ребрами называется тройка $\pi = (\lambda_0 \,|\, \lambda_1 \,|\, \lambda_2)$, где $\lambda_i \vdash N$ — разбиения, определяемые как наборы степеней вершин белого/черного цвета и граней. Род рисунка определяется из формулы Эйлера: $|\lambda_0| + |\lambda_1| + |\lambda_2| - N = 2 - 2g$.

Обозначим множество детских рисунков с паспортом π через $\mathcal{D}(\pi)$. Общий принцип говорит, что перечисление комбинаторных объектов дает красивые формулы, если считать взвешенное количество (с учетом количества симметрий):

$$\#\#\mathcal{D}(\pi) = \sum_{D \in \mathcal{D}(\pi)} \frac{1}{\#\operatorname{Aut} D}$$