ИГРА ВЕРШИННОГО ПОКРЫТИЯ ГРАФА

В. В. Гусев (Санкт-Петербург)

В теории графов существует понятие вершинного покрытия неориентированного графа [3]. Вершинным покрытием графа $G = \langle N, E \rangle$ называется такое подмножество S множества вершин графа N, что любое ребро этого графа инцидентно хотя бы одной вершине из множества S. Интерес представляет вершинное покрытие с минимальным количеством вершин, т. е. минимальное вершинное покрытие графа.

Для того, чтобы узнать полезность вершин в вершинном покрытии, воспользуемся методами кооперативной теорией игр. С точки зрения теории игр каждую вершину можно рассматривать как отдельного игрока. Термины вершина и игрок будем считать синонимами. Вершинное покрытие это коалиция игроков. Если некоторая группа вершин содержит в себе хотя бы одно вершинное покрытие, то выигрыш такой группы будем считать равным единице, иначе ноль. Характеристическая функция кооперативной игры будет принимать только два значения: 0 и 1. Шепли предложил использовать кооперативную теорию игр для нахождения индексов влияния партий. Так же индекс Шепли-Шубика применяется в качестве дележа в играх на энергических сетях [5], используется для анализа иерархических структур [1], поведения людей [4]. Мы применяем индекс Шепли-Шубика для оценки значимости вершин графа, учитывая вершинные покрытия.

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество игроков. Обозначим 2^N множество всевозможных подмножеств множества N. Характеристическая функция $v : 2^N \to \{0, 1\}$ называется простой, то есть $v(K)$ принимает значение 0 или 1.

Пусть $v(K), K \subseteq N$ простая функция. Если $v(K) = 1$, то $K, K \subseteq N$ будем называть выигрывающей коалицией, иначе проигрывающей. Будем называть K минимальной выигрывающей коалицией если $v(K) = 1$ и $\forall i \in K : v(K \setminus \{i\}) = 0$. Обозначим $M(v) = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ — множество минимальных выигрывающих коалиций функции $v(K), K \subseteq N$. Любую простую монотонную характеристическую функцию можно определить с помощью множества минимальных выигрывающих коалиций следующим образом:

$$v(K) = \begin{cases} 1, \exists A \in M(v) : A \subseteq K; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Объединением (пересечением) простых игр v и w называется игра

$v \vee w$ ($v \wedge w$), множеством выигрывающих коалиций в которой будет объединение (пересечение) множеств выигрывающих коалиций для v и w.

Индекс Шепли-Шубика для игрока $i \in N$ определяется по формуле

$$\phi_i(v) = \sum_{K: i \in K} \frac{(|K|-1)!(|N|-|K|)!}{|N|!},$$

где K выигрывающая коалиция, содержащая в себе игрока i.

Множество S называется вершинным покрытием неориентированного графа $G = \langle N, E \rangle$, если выполняется: 1. $S \subseteq N$; 2. $\forall \{a, b\} \in E: \ a \in S$ or $b \in S$.

Минимальным вершинным покрытием графа $G = \langle N, E \rangle$ называется вершинное покрытие, состоящее из наименьшего числа вершин. Вершинное покрытие S графа G будем называть наименьшим, если $\forall i \in S$ множество $S \setminus \{i\}$ не является вершинным покрытием. Обозначим $M(G)$ множество наименьших вершинных покрытий графа G.

Определение ([2])**.** Кооперативную игру $\Gamma = \langle N, v^{M(G)}(K) \rangle, K \subseteq N$ будем называть игрой вершинного покрытия.

$$v^{M(G)}(K) = \begin{cases} 1, \exists A \in M(G) : A \subseteq K; \\ \quad 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть* $I = \{1, 2, ..., r\}, G = \langle N, E \rangle, G_i = \langle N_i, E_i \rangle, i \in I$ *неориентированные графы, где* $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. *Тогда* $\forall K \in N$ *выполняется*

$$v^{M(G)}(K) = \left(v^{M(G_1)} \wedge v^{M(G_2)} \wedge ... \wedge v^{M(G_r)} \right)(K).$$

Утверждение 1. *Пусть* G *граф звезда, для которого* $N = \{1, 2, ..., n\}, E = \{\{1, 2\}\{1, 3\}, ..., \{1, n-1\}\}$. *Тогда индекс Шепли-Шубика для игрока* $i \in N$ *в игре вершинного покрытия* $\Gamma = \langle N, v^{M(G)}(K) \rangle, K \subseteq N$ *имеет следующий вид*

$$\phi_i \left(v^{M(G)} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & i = 1; \\ \frac{1}{n(n-1)}, & i \neq 1. \end{cases}$$

Утверждение 2. *Пусть* $G = \langle N, E \rangle$ *полный двудольный граф,* $L \cup R = N, L \cap R = \emptyset, E = \{\{a, b\} | a \in L, b \in R\}$. *Тогда индекс*

Шепли-Шубика для игрока $i \in N$ *в игре вершинного покрытия* $\Gamma = \langle N, v^{M(G)}(K)\rangle, K \subseteq N$ *имеет следующий вид*

$$\phi_i\left(v^{M(G)}\right) = \begin{cases} \frac{1}{|L|} - \frac{1}{|L|+|R|}, & i \in L; \\ \frac{1}{|R|} - \frac{1}{|L|+|R|}, & i \in R. \end{cases}$$

Утверждение 3. *Пусть* $G = \langle N, E\rangle$, *пусть* $E = \{\{1,2\}, \{\{1,a_p\}\}_{p=1}^{k}, \{\{2,b_q\}\}_{q=1}^{r}\}$, $\forall p, q\ :\ a_p \neq 2, b_q \neq 1$. *Тогда индекс Шепли-Шубика для игрока* $i \in N$ *в игре вершинного покрытия* $\Gamma = \langle N, v^{M(G)}(K)\rangle, K \subseteq N$ *имеет следующий вид*

$$\phi_i\left(v^{M(G)}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}, & i = 1; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{r+2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}, & i = 2; \\ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}, & i = a_p, p \in \{1, ..., k\}; \\ \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}, & i = b_q, q \in \{1, ..., r\}. \end{cases}$$

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (The paper was prepared within the framework of the HSE University Basic Research Program).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-20070, https://rscf.ru/project/22-21-20070/» и гранта Санкт-Петербургского научного фонда в соответствии с соглашением от 15 апреля 2022 г. № 65/2022.

Список литературы

1. Gallardo J. M., Jiménez N., Jiménez-Losada A. A Shapley measure of power in hierarchies // Information Sciences. — 2016. — 372. — P. 98–110.

2. Gusev V. V. The vertex cover game: Application to transport networks // Omega. — 2020. — 97.

3. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. — 1972 — P. 85–103.

4. Molinero X., Riquelme F., Serna M. Cooperation through social influence // European Journal of Operational Research. — 2015. — 242 (3). — P. 960–974.

5. Wu Q., Ren H., Gao W., Ren, J. Benefit allocation for distributed energy network participants applying game theory based solutions // Energy. — 2017. — 119. — P. 384–391.

DOI: 10.20948/dms-2022-56