ЧИСЛО ОТМЕЧЕННЫХ ОСТОВНЫХ ЛЕСОВ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНОГО СЛОЕНИЯ НАД ГРАФОМ

И. А. Медных, Л. А. Грюнвальд (Новосибирск)

Пусть H — это конечный связный мультиграф с вершинами v_i, $i = 1, \ldots, m$ не содержащий петель. Ставя в соответствие каждой вершине v_i циркулянтный граф $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i})$, где для всех i каждая его вершина k, $k = 1, \ldots, n$ смежна со всеми вершинами графа H. Получившийся новый граф со множеством вершин $V(H_n) = \{(k, v_i) \mid k = 1, 2, \ldots n, i = 1, 2, \ldots, m\}$ назовем *циркулянтным слоением* над графом H со слоями $G_1, G_2, \ldots, G_m$.

Число отмеченных остовных лесов $f(n)$ в конечном связном графе, можно найти как определитель $\det(I_n + L)$, где I_n и L соответственно — единичная матрица и *матрица Лапласа* рассматриваемого графа. Этот самостоятельный результат является следствием известной теоремы Кельманса–Челнокова [1], которая устанавливает связь между коэффициентами *характеристического многочлена матрицы Лапласа* и числом отмеченных остовных лесов в графе. Будем называть $L(H, X)$ *обобщенным Лапласианом* графа H со множеством переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

С использованием ранее развитой технологии [2], был получен следующий результат

Теорема. *Пусть $V' = (v_1, v_2, \ldots, v_{m'})$ — это множество (возможно пустое) вершин графа H, со слоями G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, у которых $k_i = 1$ и $s_{i,1} = 0$. Пусть H' — это индуцированный вершинами V' подграф графа H. Тогда число отмеченных остовных лесов $f(n)$ в графе $H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ представляется формулой*

$$f(n) = \eta^n \prod_{p=1}^{s} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \ldots + s_{m,k_m}$, w_p, $p = 1, 2, \ldots, s$ все корни уравнения $Q(w) = \det(L(H, W)) = 0$ и $\eta = \det(L(H', X'))$.

Более того, данная технология дает возможность исследовать арифметические свойства числа отмеченных остовных лесов и его асимптотику.

Список литературы

1. Kel'mans A. K., Chelnokov V. M. A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees // J. Combin. Theory. — 1974. — Ser. B 16. — P. 197–214.

2. Kwon ,Y. ,S., Mednykh ,A. ,D., Mednykh ,I. ,A. On Jacobian group and complexity of the generalized Petersen graph $GP(n,k)$ through Chebyshev polynomials // Linear Algebra and its Applications. — 2017. — 529. — P. 355–373.

DOI: 10.20948/dms-2022-60

СРАВНЕНИЕ КОДИРОВОК И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ SAT-РЕШАТЕЛЯ В ЗАДАЧЕ О РАСКРАСКЕ ГРАФА

В. Р. Свистунова (Майкоп)

В работе рассматривается задача о раскраске графов специального вида, сведение этой задачи к задаче выполнимости булевых формул (SAT) и оптимизация параметров SAT-решателя, позволяющая решать задачи такого вида за меньшее время.

Рассмотрим некоторый граф $G = (V, E)$; пусть раскраска вершин задана функцией $c : V \to \{1, \ldots, k\}$. Раскраску назовем правильной, если для любых двух смежных вершин $x, y \in V$ выполняется условие $c(x) \neq c(y)$.

Задача о существовании правильной раскраски графа G в k цветов, вообще говоря, является NP-полной при $k \geq 3$, и может быть различными способами сведена к другой хорошо известной NP-полной задаче — задаче выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме. Способ сведения первой задачи ко второй будем называть кодировкой задачи. От кодировки может зависеть эффективность работы SAT-решателей (специализированных програм для решения задачи выполнимости) [1].

Наивная кодировка. Введём переменные $x_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. Переменная x_{ij} истинна, если вершина i имеет цвет j.

Пусть $|V| = n$. Каждая вершина имеет цвет, то есть для вершины i должно быть истинно выражение $x_{i1} \vee x_{i2} \vee \ldots \vee x_{ik}$.

Никакие две смежные вершины не могут быть покрашены в один цвет, то есть для вершин i и j, $(i, j) \in E(G)$ должны быть истинны выражения $\neg x_{i1} \vee \neg x_{j1}, \neg x_{i2} \vee \neg x_{j2}, \ldots \neg x_{ik} \vee \neg x_{jk}$.

Побитовая кодировка. Рассмотрим определение условий для 4-х цветов. Для вершины i введём переменные x_{i1}, x_{i2}. Значения