2. Kwon ,Y. ,S., Mednykh ,A. ,D., Mednykh ,I. ,A. On Jacobian group and complexity of the generalized Petersen graph $GP(n,k)$ through Chebyshev polynomials // Linear Algebra and its Applications. — 2017. — 529. — P. 355–373.

DOI: 10.20948/dms-2022-60

СРАВНЕНИЕ КОДИРОВОК И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ SAT-РЕШАТЕЛЯ В ЗАДАЧЕ О РАСКРАСКЕ ГРАФА

В. Р. Свистунова (Майкоп)

В работе рассматривается задача о раскраске графов специального вида, сведение этой задачи к задаче выполнимости булевых формул (SAT) и оптимизация параметров SAT-решателя, позволяющая решать задачи такого вида за меньшее время.

Рассмотрим некоторый граф $G = (V, E)$; пусть раскраска вершин задана функцией $c : V \to \{1, \dots, k\}$. Раскраску назовем правильной, если для любых двух смежных вершин $x, y \in V$ выполняется условие $c(x) \neq c(y)$.

Задача о существовании правильной раскраски графа G в k цветов, вообще говоря, является NP-полной при $k \geq 3$, и может быть различными способами сведена к другой хорошо известной NP-полной задаче — задаче выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме. Способ сведения первой задачи ко второй будем называть кодировкой задачи. От кодировки может зависеть эффективность работы SAT-решателей (специализированных програм для решения задачи выполнимости) [1].

Наивная кодировка. Введём переменные $x_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$. Переменная x_{ij} истинна, если вершина i имеет цвет j.

Пусть $|V| = n$. Каждая вершина имеет цвет, то есть для вершины i должно быть истинно выражение $x_{i1} \vee x_{i2} \vee ... \vee x_{ik}$.

Никакие две смежные вершины не могут быть покрашены в один цвет, то есть для вершин i и j, $(i, j) \in E(G)$ должны быть истинны выражения $\neg x_{i1} \vee \neg x_{j1}, \neg x_{i2} \vee \neg x_{j2}, ... \neg x_{ik} \vee \neg x_{jk}$.

Побитовая кодировка. Рассмотрим определение условий для 4-х цветов. Для вершины i введём переменные x_{i1}, x_{i2}. Значения

$(0,0)$ соответствуют раскраске в первый цвет, $(0,1)$ — во второй, $(1,0)$ — в третий, $(1,1)$ — в четвёртый. Условия существования и единственности цвета не нужны, так как для любых возможных значений переменных задан какой-либо цвет. Для каждого ребра, соединяющего вершины i и j должны быть истинны выражения $\neg x_{i1} \vee \neg x_{i2} \vee \neg x_{j1} \vee \neg x_{j2}$, и т.д.

Смешанная кодировка. Прямую и логарифмическую кодировки можно использовать в одной задаче. Назовём такую кодировку смешанной. В смешанной кодировке некоторые вершины кодируются прямым способом, а остальные — двоичным. Есть различные методы распредения кодировок по вершинам: можно выбирать кодировку случайным образом для каждой вершины, закодировать двоично только несколько вершин наибольшей степени или независимое множество. Эффективность решения меняется в зависимости от метода распределения.

Задачи о раскраске графов. Выбор оптимальной кодировки и оптимизация параметров SAT-решателя выполнялись для двух классов задач. Задачи первого типа были связаны с вычислением хроматического числа квадрата триангуляции сферы (т.е. нахождением минимального числа цветов в раскраске, в которой вершины одного цвета находятся на расстоянии по крайней мере 2). Расммативались триангуляции, содержащие вершины степени 5 и 6. При этом хроматическое число квадрата графа не превосходит 9, а задача о существовании 8-раскраски во многих случаях оказывается весьма сложной. Второй класс включал в себя задачи о поиске 4-раскраски графов единичных расстояний, вложенных в двумерную поверхность постоянной кривизны. Применение SAT-решателей к раскраске геометрических графов рассматривалось ранее в ряде работ [2–4].

При решении задач использовались SAT-решатели Minisat и Glucose [5, 6]. Поскольку Glucose показывает наибольшую эффективность, оптимизация параметров выполнялась для этого SAT-решателя.

Результаты. В таблице приведено время работы Minisat с различными кодировками в задачах о поиске 8-раскраски квадрата триангуляции. В данном классе задач побитовая кодировка оказывается наиболее эффективной.

Кроме того, выполнялась оптимизация параметров SAT-решателя Glucose при помощи генетического алгоритма, реализованного в пакете PyDGGA [7]. Оптимизация позволила ускорить работу SAT-решателя в 3–5 раз.

Кодировка	19 вершин	20 вершин	22 вершины
Прямая	655,2 сек.	701,32 сек.	1860,02 сек.
Двоичная	12,76 сек.	8,49 сек.	13,17 сек.
Смешанная (степ.)	288,49 сек.	273,49 сек.	508,38 сек.
Смешанная (мн-во)	352,89 сек.	284,29 сек.	124,84 сек.
Смешанная (случ.)	183,86 сек.	219,20 сек.	162,79 сек.

Список литературы

1. Velev M. N. Exploiting hierarchy and structure to efficiently solve graph coloring as sat //2007 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design. — 2007. — P. 135–142.

2. Oostema P., Martins R., Heule M. Coloring unit-distance strips using SAT // EPiC Series in Computing. — 2020. — V. 73.

3. Heule M. J. H. Computing small unit-distance graphs with chromatic number 5 // arXiv preprint arXiv:1805.12181. — 2018.

4. Voronov V., Neopryatnaya A., Dergachev E. Constructing 5-chromatic unit distance graphs embedded in the Euclidean plane and two-dimensional spheres // arXiv preprint arXiv:2106.11824. — 2021.

5. Eén N., Sörensson N. An extensible SAT-solver //International conference on theory and applications of satisfiability testing. — 2003. — P. 502–518.

6. Audemard G., Simon L. On the glucose SAT solver //International Journal on Artificial Intelligence Tools. — 2018. — V. 27., No. 01. — P. 1840001.

7. Ansótegui C., Pon J., Sellmann M. Boosting evolutionary algorithm configuration //Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. — 2021. — P. 1–20.

DOI: 10.20948/dms-2022-61

О ГРАФАХ С ЗАДАННОЙ РЁБЕРНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ, ТОЧКАМИ СОЧЛЕНЕНИЯ И МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ РЁБЕР

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов (Саратов)

В работе рассматриваются простые неориентированные графы и их основные меры связности. Основные понятия из теории графов используются в соответствии с работами [1, 2]. Напомним, что