Кодировка	19 вершин	20 вершин	22 вершины
Прямая	655,2 сек.	701,32 сек.	1860,02 сек.
Двоичная	12,76 сек.	8,49 сек.	13,17 сек.
Смешанная (степ.)	288,49 сек.	273,49 сек.	508,38 сек.
Смешанная (мн-во)	352,89 сек.	284,29 сек.	124,84 сек.
Смешанная (случ.)	183,86 сек.	219,20 сек.	162,79 сек.

Список литературы

1. Velev M. N. Exploiting hierarchy and structure to efficiently solve graph coloring as sat //2007 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design. — 2007. — P. 135–142.

2. Oostema P., Martins R., Heule M. Coloring unit-distance strips using SAT // EPiC Series in Computing. — 2020. — V. 73.

3. Heule M. J. H. Computing small unit-distance graphs with chromatic number 5 // arXiv preprint arXiv:1805.12181. — 2018.

4. Voronov V., Neopryatnaya A., Dergachev E. Constructing 5-chromatic unit distance graphs embedded in the Euclidean plane and two-dimensional spheres // arXiv preprint arXiv:2106.11824. — 2021.

5. Eén N., Sörensson N. An extensible SAT-solver //International conference on theory and applications of satisfiability testing. — 2003. — P. 502–518.

6. Audemard G., Simon L. On the glucose SAT solver //International Journal on Artificial Intelligence Tools. — 2018. — V. 27., No. 01. — P. 1840001.

7. Ansótegui C., Pon J., Sellmann M. Boosting evolutionary algorithm configuration //Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. — 2021. — P. 1–20.

DOI: 10.20948/dms-2022-61

О ГРАФАХ С ЗАДАННОЙ РЁБЕРНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ, ТОЧКАМИ СОЧЛЕНЕНИЯ И МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ РЁБЕР

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов (Саратов)

В работе рассматриваются простые неориентированные графы и их основные меры связности. Основные понятия из теории графов используются в соответствии с работами [1, 2]. Напомним, что *связным* называется граф, любая пара вершин которого соединена путём. В противном случае граф называется *несвязным. Тривиальным* называется одновершинный граф. Граф, любые две вершины которого смежны, называется *полным.*

Определение. *Вершинной связностью k* графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Определение. *Рёберная связность* λ нетривиального графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Например, деревья имеют вершинную и рёберную связности, равные 1. Полный n-вершинный граф имеет вершинную и рёберную связности, равные $n-1$. Далее мы будем рассматривать только связные графы.

Обозначим минимальную степень вершины в графе за δ.

Вершинная связность k, рёберная связность λ и минимальная степень вершины δ произвольного графа связаны неравенством, которое было найдено Уитни [3].

Теорема. *Для любого графа G справедливо неравенство:*

$$k \leq \lambda \leq \delta.$$

Позднее Чартрэнд и Харари [4] доказали, что для подходящих значений k, λ и δ существует соответствующий граф:

Теорема. *Для любых натуральных чисел a, b, c, таких что $0 < a \leq b \leq c$, существует граф G, у которого $k = a, \lambda = b, c = \delta$.*

В работах [5, 6] рассматривалась задача о поиске графов с минимальным числом вершин и рёбер для любых a, b, c из теоремы Чартрэнда-Харари. В данной работе рассматривается следующая задача: описание графов, состоящих из заданного числа вершин n с минимальным числом рёбер для пар возможных значений k и λ.

Обозначим $N_{k,\lambda}$ — минимальное число вершин, из которого может состоять граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ.

Теорема. *Верно равенство*

$$N_{k,\lambda} = \begin{cases} 2(\lambda+1)-k, & \text{\textit{при} } \lambda > k \\ \lambda+1, & \text{\textit{при} } \lambda = k. \end{cases}$$

Обозначим $E_{k,\lambda}$ — минимальное число рёбер, из которого может состоять граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ.

Теорема. *Верно равенство*

$$E_{k,\lambda} = \begin{cases} \lambda^2 - k^2 + k + \lambda + \sigma, & \text{при } \lambda > k \\ \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}, & \text{при } \lambda = k, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \left\lceil \frac{2k^2 - k\lambda - 2k}{2} \right\rceil \leq 0, \\ \left\lceil \frac{2k^2 - k\lambda - 2k}{2} \right\rceil & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что построить граф, состоящий из заданного числа вершин n с минимальным числом рёбер для заданных значений k и λ, можно только при $n \geq N_{k,\lambda}$. Если $k = \lambda = 1$, то $N_{1,1} = 2$. Легко видеть, что граф с минимальным числом рёбер для заданного числа вершин n с $k = \lambda = 1$ — это будет дерево с числом рёбер $n - 1$. Далее приводится основной результат работы для случая $k = 1, \lambda > 1$. Напомним, что вершина, после удаления которой граф перестаёт быть связным называется *точкой сочленения*.

Теорема. *Пусть $k = 1, \lambda > 1$. Тогда $\forall n \geq N_{k,\lambda}$ существует граф G с заданными k и λ, состоящий из n вершин, такой что:*

- *если λ чётное, то в таком графе степень одной вершины (точки сочленения) равна $N_{k,\lambda} - 1$, а остальных — λ. Минимальное число рёбер — $\frac{\lambda(n+1)}{2}$.*
- *если λ нечётное, то в таком графе:*
  - *если n нечётное, то в таком графе степень одной вершины (точки сочленения) равна $N_{k,\lambda} - 1$, а остальных — λ. Минимальное число рёбер — $\frac{\lambda(n+1)}{2}$.*
  - *если n чётное, то либо степень одной вершины (точки сочленения) равна $N_{k,\lambda}$, остальных — λ, а минимальное число рёбер — $\frac{\lambda n+\lambda+1}{2}$, либо степень одной вершины (точки сочленения) равна $N_{k,\lambda} - 1$, степень другой вершины — $\lambda + 1$, остальных — λ, а минимальное число рёбер — $\frac{\lambda n+\lambda+1}{2}$.*

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

2. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука, 1997.

3. Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs // American Journal of Mathematics. — 1932. — issue 1, vol. 54. — P. 150–168.

4. Chartrand G., Harary F. Graphs with prescribed connectivities // Theory of Graphs. — NY : Academic Press, 1968. — P. 61–63.

5. Теребин Б. А., Абросимов М. Б. Об оптимальности реализации графов с заданными мерами связности // Прикладная дискретная математика. Приложение. — Томск: Издательский дом ТГУ, 2020. — С. 103–105.

6. Теребин Б. А., Абросимов М. Б. О минимальном числе рёбер в реализациях графов с заданными мерами связности // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. — Саратов: Издат. центр «Наука», 2021. — С. 159–161.

DOI: 10.20948/dms-2022-62

СТРОЕНИЕ ИЗОМОРФИЗМОВ И ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГРАФОВЫХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов (Саратов)

Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф [1]. Для графа $G = (X,\rho)$ дугу $(x,y) \in \rho$ будем называть собственной, если $(y,x) \notin \rho$. Граф называется квазибесконтурным, если каждая его собственная дуга не содержится ни в каком контуре. Квазибесконтурный граф будем называть тривиальным, если у него нет собственных дуг, и нетривиальным, в противном случае. Граф $\breve{G} = (X,\rho^{-1})$ называется двойственным для графа $G = (X,\rho)$. Антиизоморфизмом графа $G_1 = (X_1,\rho_1)$ на граф $G_2 = (X_2,\rho_2)$ называется изоморфизм графа G_1 на двойственный к G_2 граф $\breve{G}_2$. Антиавтоморфизмом графа $G = (X,\rho)$ называется изоморфизм графа G на двойственный к себе граф $\breve{G}$.

Автомат $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ называется графовым, если множество состояний X_1 и множество выходных сигналов X_2 наделены структурами графов $G_1 = (X_1,\rho_1)$ и $G_2 = (X_2,\rho_2)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s(x) = x \star s$ $(x \in X_1)$ является эндоморфизмом графа G_1 и функция выходов $\lambda_s(x) = x \diamond s$ $(x \in X_1)$ является гомоморфизмом графа G_1 в граф G_2. Символически такие автоматы обозначаются $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$. Графовый