НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ В ПОЛИГОНАХ НАД ПОЛУГРУППАМИ

И. Б. Кожухов, К. А. Колесникова (Москва)

Полигон X над полугруппой S $[1,2]$ — это множество, на котором действует полугруппа, т. е. задано отображение $X \times S \to X$, $(x,s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)$ для любых $x \in X$, $s,t \in S$. Полигон является алгебраической моделью автомата. Кроме того, понятие полигона фактически тождественно понятию унарной алгебры.

Полигон X над полугруппой S называется *унитарным*, если S имеет единицу (обозначим её через e) и выполнено условие $xe = x$ для любого $x \in X$. Для полугрупп без единицы — например, для рисовской матричной полугруппы $\mathcal{M}(G,I,\Lambda,P)$ можно ввести понятие квазиунитарного полигона — такого полигона, что $XS = X$. Понятие *копроизведения* универсальных алгебр — двойственное понятию прямого произведения — в случае полигонов над полугруппой S означает дизъюнктное объединение этих полигонов. Копроизведение полигонов X_i $(i \in I)$ будем обозначать следующим образом: $\coprod_{i\in I} X_i$.

Инфляция универсальной алгебры A сигнатуры Σ называется такая алгебра $B \supseteq A$, что существует эндоморфизм $\mu : B \to B$, удовлетворяющий требованиям: 1) $\mu(B) = A$, 2) $\mu(a) = a$ для всех $a \in A$, 3) $f(b_1,\ldots,b_n) \in A$ для любой операции $f \in \Sigma$ арности n и любых $b_1,\ldots,b_n \in B$.

Наиболее изученными, как и следовало бы ожидать, являются полигоны над группами. Пусть G – группа, H – её подгруппа, не обязательно нормальная. Через G/H будем обозначать множество всех правых смежных классов Hg, рассматриваемое как полигон над группой G относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно доказать, что всякий унитарный циклический полигон над группой G изоморфен какому-либо из полигонов G/H для некоторой подгруппы H группы G, произвольный унитарный полигон над G – это копроизведение $\coprod_{i\in I}(G/H_i)$ для некоторого семейства $\mathcal{H} = \{H_i | i \in I\}$ подгрупп группы G, а произвольный (необязательно унитарный) полигон – это инфляция унитарного (см. теоремы 1 и 4 в [3]). Таким образом, всякий полигон над группой G имеет вид $X = Y \cup A$, где $Y = Xe \cong \coprod_{i\in I}(G/H_i)$ (унитарная часть), множество A может быть пустым, а умножение на элементы $g \in G$ определяется с помощью заранее заданного произвольного отображения $\mu : A \to Y$ по правилу

$$x \cdot s = \begin{cases} xs, & \text{если } x \in Y, \\ \mu(x)s, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Условие конечности — это условие, которому удовлетворяют все конечные алгебры. Таковыми являются, например, конечная порождённость, локальная конечность, условие минимальности (артиновость), условие максимальности (нётеровость). При этом имеется разница между условием минимальности (максимальности) для конгруэнций и аналогичным условием для подалгебр. В общем случае эти условия не эквивалентны.

Алгебра A называется *хопфовой*, если любой её сюръективный эндоморфизм является инъективным (а значит, является автоморфизмом), и *кохопфовой*, если всякий инъективный эндоморфизм сюръективен. Очевидно, хопфовость равносильна тому, что алгебра не изоморфна никакой своей нетривиальной фактор-алгебре, а кохопфовость означает в точности то, что алгебра не изоморфна никакой своей собственной подалгебре. Также ясно, что нётеровость алгебры в смысле конгруэнций влечёт её хопфовость, а артиновость в смысле подалгебр влечёт кохопфовость.

Алгебра A называется *канторовой* (соотв., *кокanторовой*), если для любой алгебры B наличие инъективных (соотв, сюръективных) гомоморфизмов $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм $A \cong B$ (т. е. верна теорема, аналогичная классической теореме Кантора–Шрёдера–Бернштейна). Очевидно, хопфовость влечёт кокanторовость, а кохопфовость — канторовость.

В работе [4] было доказано, что всякий коммутативный конечно порождённый полигон над полугруппой (в частности, конечно порождённый полигон над коммутативной полугруппой) является хопфовым. Необходимые и достаточные условия хопфовости и кохопфовости унитарного полигона над группой были найдены в [5], а хопфовости неунитарных полигонов с циклической унитарной частью над группой — в [6].

В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия канторовости полигона над конечной коммутативной полугруппой идемпотентов при условии, что все компоненты связности полигона конечны. В работе [8] было доказано, что любой унитарный полигон над группой канторов (но не все они кокanторовы).

Аналогично хопфовости, для полигона над группой, имеющего циклическую унитарную часть, можно сформулировать необходимое и достаточное условие его кохопфовости:

Теорема. *Полигон* $X = (G/H) \cup A$ *над группой* G *кохопфов в том и только том случае, если выполнены условия:*

1) $\left|\mu^{-1}(Hg)\right| < \infty$ *при всех* $g \in G$;
2) *для любого* $a \in N_G(H)$ *где* $N_G(H)$ *— нормализатор, если для всех* $g \in G$ $\left|\mu^{-1}(Hag)\right| \leqslant \left|\mu^{-1}(Hg)\right|$, *то для всех* $g \in G$ $\left|\mu^{-1}(Hag)\right| = \left|\mu^{-1}(Hg)\right|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант №22-11-00052

Список литературы

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. — Berlin, N. Y.: W. de Gruyter, 2000.

2. Кожухов И. Б., Михалёв А.В. Полигоны над полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика. — 2020-2021. — Том 23, №3. — С. 141–200.

3. Максимовский М. Ю. О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами // Мат. заметки. — 2010. — т.87, №6. — С. 855–866.

4. Карташов В. К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискретная математика. — 2008. — Том 20. Вып. 4. — С. 79–84.

5. Кожухов И. Б., Колесникова К. А. О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами // Фундаментальная и прикладная математика. —2020-2021. — Том 23, №3. — С. 131–139.

6. Кожухов И. Б., Колесникова К. А. Хопфовость унитарных и неунитарных полигонов над группами // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XIX международной кон ференции. Под редакцией Ю. И. Журавлева. — Казань: Казанский федеральный университет, 2021. — С. 64–66.

7. Кожухов И. Б, Сотов А. С. Об условиях канторовости полигонов над полурешёткой // Мат. заметки. —2021 — 109:4. — С. 581–589.

8. Сотов А. С. Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами // Материалы VI Межд. конф. Соврем. информ. технологии в образов. и научн. иссл. — 2019. — ДонНТУ, Донецк. — С. 120–123.

DOI: 10.20948/dms-2022-68