КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ И СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ

В. А. Малышев, **С. В. Малышев (Москва)**

Одна из важнейших проблем математической физики — вывод макроскопических законов механики сплошных сред из микроскопических законов механики точечных частиц. Здесь мы представляем простейшую, но математически строгую модель в этом направлении. Она состоит из двух следующих частей.

1. N точечных частиц $k = 1, 2, ..., N$ на R_+ с начальными скоростями $v_k(0) = -1$ и координатами

$$0 < x_1(0) = 1 < ... < x_k(0) = k < ... < x_N(0) = N,$$

где точка $0 \in R_+$ символизирует стенку. При столкновениях со стенкой частица 0 каждый раз меняет знак скорости, а при столкновении двух соседних частиц они обмениваются скоростями (упругое столкновение). Далее следует перевод этой физической динамики с непрерывным временем на язык динамики (с дискретным временем) клеточного автомата с $2N + 1$ клетками и 4 состояниями каждой клетки, с последующим изучением динамики этого автомата и переходом обратно к траекториям частиц $x_k(t), v_k(t)$ с непрерывным временем.

2. Переход к пределу $N \to \infty$ со скейлингом

$$t \to \frac{t}{N},\ x_k \to x = \frac{x}{N},$$

как стандартный переход к сплошной среде, состоящей уже из континуума «частиц».

Определим, в этом скейлинге, функцию распределения (числа частиц) в момент t как

$$F_N(x, t) = \frac{1}{N}\#\{k : x_k(t) < x\},\ 0 < x < \infty$$

Очевидно, что в начальный момент существует не только предел

$$F(x, 0) = \lim_{N\to\infty} F_N(x, 0) = x,\ 0 < x < 1,$$

но и плотность (производная)

$$\rho(x, 0) = F_x(x, 0) = 1,\ 0 < x < 1.$$

Теорема 1. *Для любого* $t \geq 0$ *существует предел*

$$F(x,t) = \lim_{N\to\infty} F_N(x,t),$$

и функция (плотность) $\rho(x,t)$ *такая, что*

$$\int_0^x \rho(x,t)dx = F(x,t)$$

Более того, при $0 < t < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq t < 1$, $t \geq 1$ *соответственно*

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 2, & 0 < x < t \\ 1, & t < x < 1-t \\ 0, & 1-t < x < \infty \end{cases}, \quad \rho(x,t) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1-t \\ 1, & 1-t < x < t \\ 0, & t < x < \infty \end{cases},$$

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 < x < t-1 \\ 1, & t-1 < x < t \\ 0 & t < x \end{cases}.$$

Для любого $x \in [0,1]$ и любого N определим частицу $k = k(N,x)$ так чтобы начальная координата $x_k(0){=}x_{k(N,x)}(0)$ являлась ближайшей к x справа. Пусть $x_k(t) = x_{k(N,x)}(t)$ — траектория этой частицы. Тогда назовем (если предел существует)

$$y(x,t) = \lim_{N\to\infty} x_{k(N,x)}(t) \tag{1}$$

(Лагранжевой) траекторией «частицы», расположенной начально в точке x.

Теорема 2. *Предел (1) существует для любого* $t \geq$ *и равен*

$$y(1,t) = \begin{cases} 1-t, & t \leq \frac{1}{2} \\ t, & t > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad y(0,t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ t-1, & t > 1 \end{cases},$$

$$y(x,t) = \begin{cases} x-t, & t < \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2}, & \frac{x}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + (t-\frac{1}{2}), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

При переходе к автомату удобнее использовать начальные условия без скейлинга

$$0 < x_1(0) = 1 < ... < x_k(0) = k < ... < x_N(0) = N,$$

Из определения динамики следует, что порядок частиц сохраняется во времени: $x_k(t) \leq x_{k+1}(t), k = 1, 2, \dots, N-1$.

Лемма 1. *В моменты времени* $t \in D = \{\frac{j}{2} : j \in Z_+\}$ *частицы могут быть лишь в точках* $x \in D$. *Более того, в моменты* $t \in D$ *для любого* $1 < k \leq N$ *расстояния* $x_k(t) - x_{k-1}(t)$ *могут быть либо* 1 *либо* 0 *(последнее соответствует моментам столкновения этих двух частиц)..*

Клетки $0, 1, 2, \dots, 2N+1$ автомата будут нумероваться целыми числами $i \in Z_+$, а состояние клетки i в момент t обозначается $\omega(i,t)$. Время дискретно $t \in D = \{\frac{j}{2} : j \in Z_+\}$, а единица времени равна $\frac{1}{2}$.

Каждая клетка может быть в одном из четырех состояний $0, \pm 1, 2$, а состояние всего автомата в момент t представляется словом (то есть конечной последовательностью из 4 символов) некоторой длины $n+1$.

$$w(t) = \omega(0,t)\omega(1,t)\dots\omega(n,t),$$

Мы считаем при этом, что $\omega(n,t) \neq 0$ и $\omega(i,t) = 0$ для $n < 1 \leq 2N+1$.

Выделим слова трех видов

$$w_{-,m} = 0(-1)0(-1)\dots0(-1), w_{+,m} = 0101\dots01, w_{2,m} = 0202\dots02$$

Каждое имеет длину $2m$ и состоит из m повторяющихся слов длины 2: $0(-1), 01, 02$ соответственно. Слова связаны с конфигурацией частиц следующим образом. Клетка i автомата отождествляется с точкой $\frac{i}{2} \in D$, а состояния клетки: 0 — в точке нет частиц, 1 — есть только одна частица со скоростью 1, -1 — одна частица со скоростью -1, 2 — две частицы со скоростями 1 и -1.

Введем обозначения.

$X(t)$ — в момент $t \in D$ максимальная координата среди точек, где столкнулись частицы в этот момент.

$T_k(T_k^*)$ — время первого (последнего) столкновения частицы k.

X_k — координата первого столкнивения частицы k.

T_{NN} — момент возвращения частицы N в точку N.

Теорема 3. 1) *Если* $t \leq T_N$, *то*

$$X(t) = t-1,\ K(t) = 2t-1,\ T_N = \frac{N+1}{2},\ X(T_N) = \frac{N-1}{2},\ x_N(t) = N-t$$

2) *Если* $T_N < t < T_{NN}$, *то*

$$T_{NN} = N+1,\ X(t) = X(T_N) - (t - T_N) = N - t,$$

$$x_N(t) = X(T_N) + (t - T_N) = t - 1$$

В любой момент состояние автомата может быть только двух видов: (1) *при* $0 \leq l \leq \frac{N}{2}$ *только* $w(N,l,-) = w_{2,l}w_{-,N-2l}$ *или* $w_1(N,l,-) = 1w_{2,l}w_{-,N-2l-1}$, (2) *при* $\frac{N}{2} < l \leq N$ *только* $w(N,l,+) = w_{2,l}w_{+,N-2l}$ *или* $w_1(N,l,+) = 1w_{2,l}w_{+,N-2l-1}$.

Динамика с единицей времени $\frac{1}{2}$ *в случае* (1) *и* (2) *соответственно выглядит как (где* $l = 2t \Longleftrightarrow t = \frac{l}{2}$*)*

$$w_{2,l}w_{-,N-2l} \to 1w_{2,l}w_{-,N-2l-1} \to w_{2,l+1}w_{-,N-2l-2}$$

$$w(N,l,+) = w_{2,l}w_{+,N-2l} \to 1w_{2,l-1}w_{+,N-2l+1} \to w_{2,l-1}w_{+,N-2l+2}$$

Любая частица k *проходит 3 этапа динамики:*

(1) *движется со скоростью* -1 *до своего первого столкновения в момент* $T_k = \frac{k-1}{2}$*;*

(2) *совершает флуктуации с периодом* $\frac{1}{2}$ *в интервале времени* $T_k < t < T_k^+$. *Она флуктуирует между двумя точками* X_k *и* $X_k + \frac{1}{2}$.

(3) *движется со скоростью* 1 *при* $t > T_k^+$.

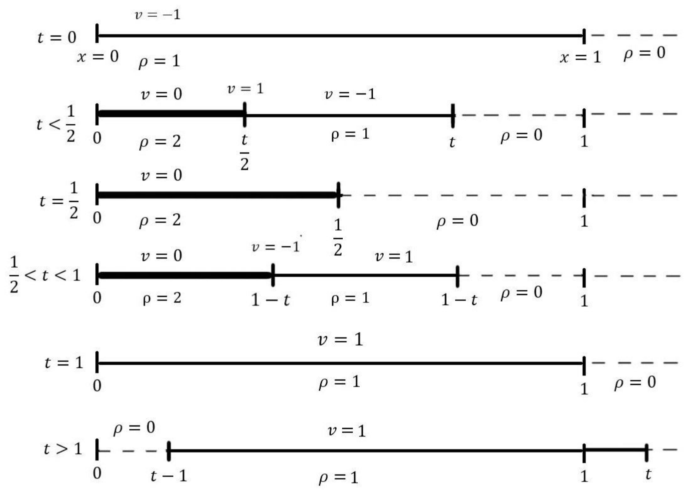
Картинка со скейлингом. При $N \to \infty$ основные параметры меняются так:

1) $T_N \to \frac{1}{2}, T_{NN} \to 1$;

2) $X(t)$ становится границей между областями разной плотности: левым интервалом, где $\rho = 2$ и правым интервалом, где $\rho = 1$: $X(t) \to t$ при $t \leq \frac{1}{2}$, i $X(t) \to 1 - t$ при $\frac{1}{2} < t < 1$;

3) если например $k = [\alpha N]$, где $0 < \alpha > 1$, то $X_k \to \alpha$;

4) T_k и X_k стремятся к $\frac{\alpha}{2}$.



Подобная детерминированная модель рассматривалась в [1] для $N = 2$ с внешней силой, а в других работах (см. например [2-4]) клеточные автоматы имели в основном случайную динамику.

Список литературы

1. Galperin. G. Playing pool with π. The number π from a billiard point of view // Regular and chaotic dynamics. — 2003. — V. 8, No. 4. — P. 375–394.

2. Cheng Z., Lebowitz J. L., Speer E. R. Microscopic shock structure in model partical systems: The Boghosian-Levermore cellular automation revisited // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1991. — V. 44.

3. Christianto V., Smarandache F. From Zeldovich approximation to Burgers' equation: A plausible route to a cellular automata Adhesion Universe. // Prespacetime Journal. — 2018. — V. 9, Iss. 1. — P. 41–44.

4. Yang X., Young Y. Cellular automata, PDEs, and pattern formation // Handbook of Bioinspired Algorithms and Applications. — 2005. — P. 271–282.

DOI: 10.20948/dms-2022-69