ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ ФУРМАНА НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

А. В. Костин (Елабуга)

Для шестиугольника, вписанного в окружность, выполняется аналог теоремы Птолемея.

Теорема. *Пусть вершины шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ в указанном порядке располагаются на евклидовой окружности. Тогда имеет место соотношение:*

$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 = A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 +$$
$$+A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6$$

В работе рассматриваются различные аналоги и обобщения этого утверждения на плоскости Лобачевского. Рассматриваются случаи расположения вершин шестиугольника на различных линиях постоянной кривизны. В качестве примера приведем одно из утверждений такого типа.

Теорема. *Пусть вершины A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 выпуклого многоугольника на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$ лежат на одной ветви эквидистанты, а вершина A_6- на другой ветви этой эквидистанты. Тогда выполняется соотношение*

$$\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2} = \operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2} + \operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2} +$$
$$+\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2} + \operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2} + \operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}.$$

Для шести окружностей, касающихся одной фиксированной окружности, можно доказать утверждение, обобщающее и теорему Кези (Кейси, Casey) [1, 2], и теорему Фурмана (Fhurmann).

Теорема. *Пусть окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ касаются внутренним образом окружности ω на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$. Пусть $t_{ij}-$ длина отрезка общей внешней касательной окружностей ω_i, ω_j. Тогда имеет место соотношение:*

$$\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2} +$$
$$+\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2} + \operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}. \qquad (1)$$

Эта теорема допускает обобщения, как для различных способов касания, так и для различных линий постоянной кривизны на плоскости Лобачевского. По аналогии с интерпретацией аналога теоремы Кези [3], эту теорему можно интерпретировать как теорему о

шестиугольнике, вписанном в изотропную сферу трехмерного псевдогиперболического пространства.

Список литературы

1. Casey J. A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. — Dublin: Hodges, Figgis and Co., 1888.

2. Абросимов Н. В., Микайылова Л. А. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — 12. — С. 354–360.

3. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — 13. — С. 242–251.

DOI: 10.20948/dms-2022-75

ДВЕНАДЦАТЬ КОНГРУЭНТНЫХ МНОГОГРАННИКОВ ТИПА ТОРА С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ РЁБЕРНЫМ ОСТОВОМ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. А. Лавренченко, А. С. Лао (Москва)

Известно [1, 2], что в 2-мерном остове правильного 4-мерного гипероктаэдра находятся ровно 12 триангуляций (2-мерного) тора (с 8-ю вершинами каждая), попарно различных как множества точек в $\mathbb{R}^4$. Все 12 триангуляций изоморфны комбинаторной (или топологической, абстрактной) триангуляции тора, показанной на рис. 1 слева (отождествите противоположные стороны квадрата-развёртки, чтобы получить тор). Конструкция [2], использующая диаграмму Шлегеля, приводит соответственно к 12-ти конгруэнтным тороидальным многогранникам (каждый без самопересечений) с треугольными гранями в $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через Λ множество всех попарно различных (в вершинно-помеченном смысле) комбинаторных триангуляций тора с вершинно-помеченным графом 4-мерного гипероктаэдра, изоморфным полному 4-дольному графу $K_{2,2,2,2}$. Исторически впервые равенство $|\Lambda| = 12$ было установлено [3, 4] при помощи компьютера.