шестиугольнике, вписанном в изотропную сферу трехмерного псевдогиперболического пространства.

Список литературы

1. Casey J. A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. — Dublin: Hodges, Figgis and Co., 1888.

2. Абросимов Н. В., Микайылова Л. А. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — 12. — С. 354–360.

3. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — 13. — С. 242–251.

DOI: 10.20948/dms-2022-75

ДВЕНАДЦАТЬ КОНГРУЭНТНЫХ МНОГОГРАННИКОВ ТИПА ТОРА С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ РЁБЕРНЫМ ОСТОВОМ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. А. Лавренченко, А. С. Лао (Москва)

Известно [1, 2], что в 2-мерном остове правильного 4-мерного гипероктаэдра находятся ровно 12 триангуляций (2-мерного) тора (с 8-ю вершинами каждая), попарно различных как множества точек в $\mathbb{R}^4$. Все 12 триангуляций изоморфны комбинаторной (или топологической, абстрактной) триангуляции тора, показанной на рис. 1 слева (отождествите противоположные стороны квадрата-развёртки, чтобы получить тор). Конструкция [2], использующая диаграмму Шлегеля, приводит соответственно к 12-ти конгруэнтным тороидальным многогранникам (каждый без самопересечений) с треугольными гранями в $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через Λ множество всех попарно различных (в вершинно-помеченном смысле) комбинаторных триангуляций тора с вершинно-помеченным графом 4-мерного гипероктаэдра, изоморфным полному 4-дольному графу $K_{2,2,2,2}$. Исторически впервые равенство $|\Lambda| = 12$ было установлено [3, 4] при помощи компьютера.

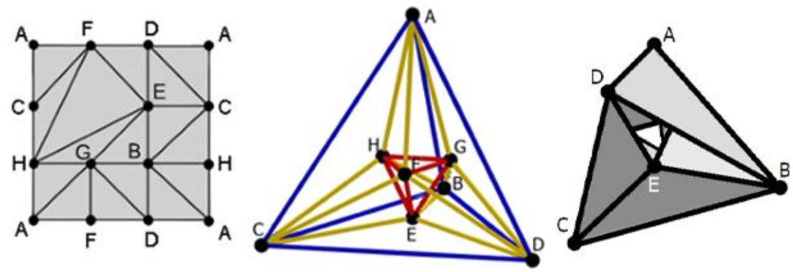

Рис. 1: Комбинаторная триангуляция тора (слева) и её геометрическая реализация в 3-мерном пространстве (справа) при помощи диаграммы Шлегеля (её 1-мерный остов — в середине)

Этот же результат получен без использования компьютера в [1] при помощи алгебраической формулы разложения на орбиты при действии на множестве Λ группы автоморфизмов графа гипероктаэдра. Геометрически эта группа реализуется в виде группы симметрий гипероктаэдра в $\mathbb{R}^4$, а все 12 триангуляций — в виде конгруэнтных 2-мерных тороидальных многогранных поверхностей (каждая без самопересечений) в $\mathbb{R}^4$ [5, 6].

Далее Λ обозначает множество, состоящее из *геометрических реализаций* наших 12-ти триангуляций в виде многогранников (каждый без самопересечений) в $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^3$, построенных в [5] и [2] соответственно. Таким образом, Λ состоит из 12-ти тороидальных многогранников с одним и тем же 1-мерным остовом в $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим по очереди действия трёх дискретных групп на Λ.

1. *Гипероктаэдральная группа* — группа (порядка 384) симметрий правильного гипероктаэдра в $\mathbb{R}^4$, фактически реализующая группу комбинаторных автоморфизмов его графа $K_{2,2,2,2}$. При действии этой группы на Λ это множество получается как одна орбита длины 12, и формула разложения на орбиты принимает вид: $|\Lambda| = 12 = \frac{384}{32}$, где “32” в знаменателе — порядок группы симметрий любой одной (они все конгруэнтны) многогранной тороидальной поверхности из множества Λ (см. [5]).

2. *Тетраэдральная группа* — группа (порядка 24) симметрий правильного 3-мерного тетраэдра в $\mathbb{R}^3$. В работе [2] показано, как найти в явном виде все 12 триангуляций, составляющих множество Λ, в

виде конгруэнтных многогранников с треугольными гранями в 3-мерном пространстве, при помощи диаграммы Шлегеля 4-мерного гипероктаэдра (т.е. его центральную проекцию на один из его ограничивающих тетраэдров). 1-Мерный остов (граф) диаграммы Шлегеля (рис. 1, в середине) представляет собой объединение графов двух правильных тетраэдров, множества вершин которых располагаются на двух концентрических сферах (соответственно) с общим центром в начале координат O, причем меньший из этих тетраэдров получается из большего гомотетией с центром в O и коэффициентом $-1/k$ ($k > 3$). Вершины двух тетраэдров соединяются всевозможными рёбрами за исключением того, что вершины большего тетраэдра не соединяются с их гомотетичными образами (соответственно). Каждая симметрия большего тетраэдра естественно индуцирует симметрию меньшего тетраэдра, и, таким образом, мы имеем действие тетраэдральной группы на множестве Λ. Итак, группа симметрий 1-мерного остова диаграммы Шлегеля — тетраэдральная группа порядка 24, действующая на Λ.

Теорема 1. *При действии тетраэдральной группы на множестве* Λ *в* $\mathbb{R}^3$ *это множество образует орбиту длины* 12 *(поэтому все* 12 *многогранников конгруэнтны), и формула разложения на орбиты имеет вид:* $|\Lambda| = 12 = \frac{24}{2}$*, где «2» в знаменателе говорит, что каждый из* 12*-ти тороидальных многогранников имеет ровно одну нетривиальную симметрию — поворот на угол* 180° *вокруг соответствующей бимедианы (рёберной медианы) тетраэдра.*

Гипотеза: триангуляцию на рис. 1 нельзя геометрически реализовать в 3-мерном пространстве в виде многогранника более чем с одной нетривиальной симметрией.

3. *Четверная группа Клейна* (порядка 4), реализуемая как группа поворотов правильного 3-мерного тетраэдра на угол 180° вокруг его трёх бимедиан (соответственно), вместе с тождественным поворотом. Эта группа — подгруппа тетраэдральной группы.

Теорема 2. *При действии четверной группы Клейна на множестве* Λ *в* $\mathbb{R}^3$ *это множество распадается на шесть орбит длины* 2 *каждая, причём пара многогранников в каждой орбите не имеют ни одной общей грани, хотя у них один и то же* 1*-мерный остов. Формула разложения на орбиты принимает следующий вид:* $|\Lambda| = 12 = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2}$.

Список литературы

1. Lawrencenko S., Magomedov A. M. Generating the triangulations of the torus with the vertex-labeled complete 4-partite graph $K_{2,2,2,2}$ // Symmetry. — 2021. — V. 13, No. 8. — 1418.

2. Lawrencenko S., Lao A. Pairs of polyhedra sharing the same 1-skeleton in 3D and 4D spaces, without a single common face // Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography. — 2022. — V. 25, issue 1. — P. 253–263.

3. Лавренченко С. А. О числе треугольных укладок вершинно-помеченного графа на торе // Украинский геометрический сборник. — 1988. — Т. 31. — С. 76–90.

4. Лавренченко С. А. Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций / Харьковский институт радиоэлектроники им. акад. М. К. Янгеля. Харьков, 1987. Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.1987. — № 2779-Ук87. — 57 с.

5. Lawrencenko S. Polyhedral suspensions of arbitrary genus // Graphs and Combinatorics. — 2010. — V. 26. — P. 537–548.

6. Маслова Ю. В., Петров М. В. Многогранник Лавренченко рода один // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования (Санкт-Петербург, 09–13 апреля 2018 г.). — Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 2018. — С. 162–168.

DOI: 10.20948/dms-2022-76

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ

В. И. Субботин (Новочеркасск)

Пусть M — замкнутый выпуклый многогранник в E^3. Под звездой $\mathrm{Star}\, V$ вершины V многогранника M понимается совокупность всех граней, имеющих одну общую вершину, совпадающую с V. Если звезда $\mathrm{Star}\, V$ состоит из n равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V своими острыми, либо тупыми углами ромбов, то вершину V будем называть ромбической. Если V расположена на оси вращения порядка n множества $\mathrm{Star}\, V$, то V будем называть *n-ромбической.*