Vertices // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 251. — P. 531–538.
4. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR-многогранников // Чебышевский сборник. — 2020.— Т. 2. №1 — С. 297–309.

DOI: 10.20948/dms-2022-77

МНОГОГРАННИКИ БИНАРНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

О. С. Щербаков (Москва)

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства [1] состоит в поиске взвешенного дерева наименьшего веса, соединяющего данное метрическое пространство (т.е. точки метрического пространтсва вкладываются в множество вершин графа) так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве. В ходе решения задачи приходится иметь дело с т.н. задачей минимального параметрического заполнения, в такой постановке фиксируется граф G (тип заполнения) и минимизируется весовая функция на ребрах графа в сделанных выше предположениях. Вес минимального заполнения данного типа может быть найден как решение задачи линейного программирования [2] или с помощью так называемых мультиобходов [3]. В работе [3] предъявлена формула веса минимального параметрического заполнения, она использует так называемые классы неприводимых мультиобходов, обозначим их $\mathcal{T}'(G)$. В работе [2] формула веса получена в виде решения двойственной задачи линейного программирования: вес представляет максимум целевой функции на вершинах многогранника (допустимого множества), назовем этот многогранник — многогранником бинарного дерева.

Опишем многогранник бинарного дерева подробнее. Пусть у бинарного дерева G есть m вершин степени 1 (такие вершины называем граничными), тогда количество рёбер равно $2m - 3$. Для дерева G

строим матрицу разрезов A. Столбцы матрицы соответствуют неупорядоченным парам вершин, а строки — рёбрам. Элемент ij столбца и k строки определен условием

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & e_k \in \Gamma_{ij} \\ 0 & e_k \notin \Gamma_{ij} \end{cases}$$

Здесь e_k — ребро дерева G, Γ_{ij} — путь, соединяющий граничные вершины v_i и v_j.

Многогранник бинарного дерева определен следующим образом:

$$\{x = (x_{12}, \ldots, x_{(m-1)m})^T \in U : \quad Ax = (1, \ldots, 1), \quad x_{ij} \geq 0\}$$

Оказывается справедлива

Теорема. *Существует биекция между множеством вершин многогранника бинарного дерева G и множеством неприводимых мультиобходов $\mathcal{T}'(G)$.*

Полученные в работах [2] и [3] формулы веса минимального параметрического заполнения не могут быть улучшены, то есть ни одна вершина многогранника не может быть удалена из формулы, и соответственно ни один неприводимый мультиобход не может быть удален, что вытекает следующей теоремы.

Теорема. *Для любой вершины v многогранника бинарного дерева существует метрическое пространство M, такое, что на ней достигается строгий максимум целевой функции.*

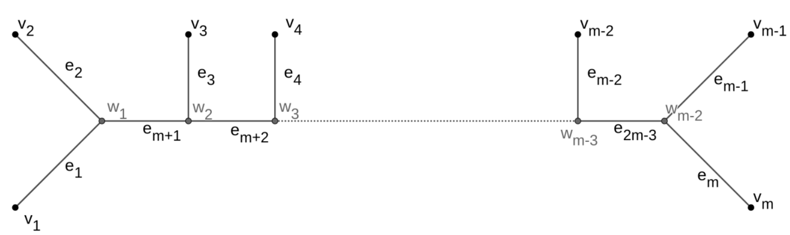

Рис. 1: Дерево типа «змея»

В заключение получена явная формула веса минимального параметрического заполнения для дерева типа «змея».

Список литературы

1. Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65–118.

2. Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. — 2022. — P. 165–182.

3. Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 51–72.

DOI: 10.20948/dms-2022-78