4. Рябов В. Г. О приближении ограничений функций q-значной логики на линейные многообразия аффинными аналогами // Дискретная математика. — 2020. — Т. 32, вып. 4. — С. 89–102.

5. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982. — 384 с.

DOI: 10.20948/dms-2022-88

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ АЛ. А. МАРКОВА В ТЕОРИИ АЛФАВИТНОГО КОДИРОВАНИЯ

Т. Г. Смирнова (Нижний Новгород)

Работа посвящена памяти известного российского математика, доктора физико-математических наук, профессора Александра Александровича Маркова (24.03.1937–23.10.1994), которому в 2022 году исполнилось бы 85 лет.

Александр Александрович окончил в 1959 г. физико-математический факультет Горьковского (ныне Нижегородского) университета. В 1963 г. под научным руководством профессора Ю. В. Глебского защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые вопросы теории алфавитного кодирования», а в 1984 г.— докторскую диссертацию на тему «Вопросы взаимной однозначности и сложности в алфавитном кодировании».

Ал. А. Марков был признанным лидером научного направления по дискретной математике в Нижегородском университете. Он руководил научным семинаром, был организатором Всесоюзных конференций и школ-семинаров, по его инициативе и под его редакцией издавался межвузовский сборник «Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике». Александр Александрович был членом редколлегии журнала «Дискретная математика», членом двух специализированных советов по защите диссертаций.

Ал. А. Марков подготовил девять кандидатов наук. Под его руководством защитили кандидатские диссертации В. Е. Алексеев (1975), Л. Г. Киселёва (1979), М. Ю. Мошков (1983), В. В. Носков (1983), Е. Г. Воробьёва (1986), Л. П. Жильцова (1988), Т. Г. Смирнова (1990), Н. М. Моржаков (1992, его вторым руководителем был М. Ю. Мошков), А. А. Кочетов (1996). Трое из них — М. Ю. Мошков (1999), В. Е. Алексеев (2002), Л. П. Жильцова (2004) — стали докторами физико-математических наук.

В списке научных трудов Ал. А. Маркова 62 работы [1], большинство из них относятся к математической теории кодирования. Основным достижением Александра Александровича явилось построение теории алфавитного кодирования, учитывающего структурные (а не только вероятностные) модели языка сообщений.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_q\}$ — алфавит канала связи, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — алфавит языка сообщений, $m > q \geq 2$.

Алфавитное кодирование есть гомоморфизм свободной полугруппы B^* в A^*, порождённый схемой $f_V : b_i \to v_i$, где $v_i \in A^*$ $(i = \overline{1, m})$ — элементарные коды, соответствующие буквам B.

На модели алфавитного кодирования рассматриваются две основные проблемы:
— проблема распознавания взаимной однозначности (ПРВО);
— проблема оптимального кодирования (ПО).

Первые результаты Ал. А. Маркова о взаимной однозначности алфавитного кодирования относятся к языку B^* [2–4], среди которых важно отметить следующие.
1. Доказан критерий взаимной однозначности алфавитного кодирования, посредством которого решение проблемы распознавания на бесконечном множестве B^* сводится к ее решению на конечном подмножестве сообщений.
2. Получен эффективный алгоритм для распознавания взаимной однозначности, который сводит решение данной проблемы к задаче нахождения ориентированного цикла в графе, проходящего через заданную вершину.

Эти результаты Ал. А. Маркова стали классикой и входят во многие учебники по дискретной математике [5], по теории кодирования и в учебные программы по этим дисциплинам для университетов.

В дальнейшем Ал. А. Марков исследовал проблему распознавания взаимной однозначности на моделях регулярных языков и показал, что ПРВО разрешима для класса регулярных языков [6]. Здесь он рассмотрел два сорта условий взаимной однозначности алфавитного кодирования – комбинаторно-логические и спектральные.
1. В качестве меры сложности распознавания для регулярных языков изучалась длина кратчайшего закодированного слова языка, которое допускает две расшифровки (если такое слово существует). Для этой характеристики получены квадратичные оценки как в за-

висимости от суммы длин элементарных кодов, так и от числа состояний регулярного источника, порождающего язык сообщений.
2. Ал. А. Марков получил асимптотическое спектральное неравенство, представляющее собой необходимое (а для некоторых регулярных языков и достаточное) условие реализуемости спектра однозначно декодируемым кодом. При $L = B^*$ это — неравенство Мак-Миллана.
3. Предложен алгоритм распознавания взаимной однозначности кодирования для произвольного регулярного языка.

При решении задачи оптимального кодирования Ал. А. Марков выделял как наиболее важные две подзадачи:
— описание матрицы оптимального кодирования $M(L)$;
— построение эффективного алгоритма оптимального кодирования.

Для языка всех сообщений B^* обе подзадачи решены: неравенство Мак-Миллана дает аналитическое описание матрицы $M(B^*)$; алгоритм Хаффмана позволяет минимизировать неотрицательную линейную форму на множестве целочисленных решений неравенства Мак-Миллана за квадратичное от m число операций. При переходе от B^* к некоторому, пусть даже регулярному, языку $L \subset B^*$ задача оптимального кодирования существенно усложняется.

Для регулярных языков ПО решена Ал. А. Марковым для подкласса регулярных языков — вполне регулярных языков — порождаемых регулярными источниками, у которых алфавит языка, порождённого любой компонентой циклической связности, если не пуст, то совпадает с алфавитом всего языка. Данный класс содержит все конечные языки и все языки, которые порождаются эргодическими источниками.

Ал. А. Марков разработал принцип равномерного пополнения кодов, с помощью которого удалось получить оценку сверху для $k(L)$ (максимальное значение элементов матрицы $M(L)$), и тем самым доказать, что задача оптимального кодирования в этом классе языков алгоритмически разрешима, но является уже NP–трудной.

Асимптотическое спектральное неравенство уже не всегда даёт аналитическое описание $M(L)$, а оценка $k(L)$, полученная Марковым, является гиперэкспоненциальной.

Для всех регулярных языков принцип равномерного пополнения не может быть обоснован; примеры его нарушения имеются уже среди языков, порождаемых регулярными источниками с двумя состояниями.

Список литературы

1. Жильцова Л. П., Киселёва Л. Г., Смирнова Т. Г. О работах Александра Александровича Маркова // Вестн. Нижегородского ун-

та. —2012. — № 6 (1). — С. 127–133.

2. Марков Ал. А. Об алфавитном кодировании. I // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 132. № 3. — С. 521–523.

3. Марков Ал. А. Об алфавитном кодировании. II // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 139. № 3. — С. 560–561.

4. Марков Ал. А. Нерекуррентное кодирование // Проблемы кибернетики. — 1962. — Вып. 3. — С. 169–186.

5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

6. Марков Ал. А. Введение в теорию кодирования. — М.: Наука, 1982.

DOI: 10.20948/dms-2022-89

О РАЗБИЕНИЯХ НА СОВЕРШЕННЫЕ КОДЫ В МЕТРИКЕ ХЭММИНГА

Ф. И. Соловьева **(Новосибирск)**

В настоящей работе приводятся две новые конструкции разбиений на совершенные коды в метрике Хэмминга. Вопрос построения таких разбиений остается недостаточно изученным (см. [1]), хотя является важным, поскольку тесно связан с проблемой перечисления q-ичных совершенных кодов с минимальным расстоянием 3 в векторном пространстве над полем Галуа. Обе конструкции разбиений являются комбинаторными, что может представлять интерес с практической точки зрения. Приведенные в работе методы построения базируются на двух конструкциях q-ичных совершенных кодов, принадлежащих Моллару [2, 3]. Одна из предложенных конструкций разбиений является свитчинговой, вторая – каскадной, идеи свитчинговых методов построения совершенных кодов см. подробно в [1].

Векторное пространство размерности n над полем Галуа $GF(q)$ по отношению к метрике Хэмминга обозначим через F_q^n. Параметры (длина, мощность кода и минимальное расстояние) q-ичного кода, необязательно линейного, обозначаются $(n, K, d)_q$. Совершенный q-ичный код — это код, достигающий границы Хэмминга. Далее будут