НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЛЕГКОТЕСТИРУЕМЫХ СХЕМ В БАЗИСЕ ЖЕГАЛКИНА

Ю. В. Бородина (Москва)

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов [1, 2] в некотором конечном базисе B. В качестве неисправностей предполагаем константные неисправности типа «1» на выходах элементов (при переходе в неисправное состояние элемент выдает значение 1 независимо от входных данных).

Пусть S — некоторая схема из функциональных элементов, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в базисе B.

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в последней неисправного элемента, называется *функцией неисправности*. Всякое множество T входных наборов схемы S называется *полным проверяющим тестом* для этой схемы, если для любой функции неисправности $g(\tilde{x})$, не равной тождественно $f(\tilde{x})$, в T найдется хотя бы один такой набор $\tilde{\sigma}$, что $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ [3, 4]. Число наборов, составляющих этот тест, называется *длиной* теста.

Введем обозначения [3, 4]: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем полным проверяющим тестам T для схемы S; $D(f, B) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам S в данном базисе B, реализующим функцию f; $D(n, B) = \max D(f, B)$, где максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D(n, B)$ называется *функцией Шеннона* длины полного проверяющего теста для базиса B.

Пусть $B = \{\oplus, \&, 0, 1\}$ — базис Жегалкина. Ниже считаем, что константы 0 и 1 при реализации функций схемами в этом базисе подаются на входы схемы, сами же они функциональными элементами не являются и в неисправное состояние перейти не могут.

В работе [5] была доказана

Теорема. *Любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе B, допускающей в случае константных неисправностей типа «0» на выходах элементов полный проверяющий тест длины 1.*

В случае константных неисправностей типа «1» такого рода результат невозможен.

Теорема. *Функция $f(\tilde{x})$, отличная от констант, удовлетворяет равенству $D(f) = 1$ тогда и только тогда, когда все ее существенные переменные можно разбить на такие два непересекаю-*

щихся множества Z и Y, что f представима в виде

$$f(x) = (\ldots((M \oplus \bigoplus_{A_0} z_k)y_1 \oplus \bigoplus_{A_1} z_k)y_2 \oplus \ldots)y_s \oplus \bigoplus_{A_s} z_k, \qquad (1)$$

где $s \leq n$, $A_0, A_1, \ldots, A_s \subset Z$, а выражение M имеет один из следующих 4 типов:
(a) $y_{-1} \oplus y_0$, и тогда $Y = \{y_{-1}, y_0, y_1, \ldots, y_s\}$;
(b) $y_0 \oplus 1$, и тогда $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$;
(c) $z_p z_q$, где $z_p, z_q \in Z, p \neq q$, и тогда $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$;
(d) 0, и тогда $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$,
причем если $M = 0$, то $A_0 \neq \emptyset$.

Функции вида (1) составляют достаточно узкий класс.

Рассмотрим функции вида

$$f(\tilde{x}) = (\ldots(l_0(\tilde{x})x_{i_1} \oplus l_1(\tilde{x}))x_{i_2} \oplus l_2(\tilde{x}))x_{i_3} \oplus \ldots \oplus l_{m-1}(\tilde{x}))x_{i_m} \oplus l_m(\tilde{x})), \qquad (2)$$

где $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, $l_j(\tilde{x})$ — линейные функции, $1 \leq j \leq m$, $l_m(\tilde{x})$ не содержит 1.

Назовем вид (2) *каноническим*, если $l_0(\tilde{x})$ не константа и не содержит 1, все $l_j(\tilde{x})$, $1 \leq j \leq m$, не содержат 1 и всякая переменная x_{i_k} отсутствует в линейных функциях $l_0, \ldots, l_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Лемма 1. *Всякая функция вида (2) может быть приведена к каноническому виду.*

Теорема. *Пусть функция $f(\tilde{x})$ имеет вид (2). Тогда $D(f) \leq m' + 1 \leq m + 1$, где m' — количество таких индексов k, $1 \leq k \leq m$, что переменная x_{i_k} встречается в каких-то функциях $l_k(\tilde{x}), \ldots, l_m(\tilde{x})$ в каноническом виде (2) для f.*

Теорема. *Пусть функция*

$$f(\tilde{x}) = x_1 g(x_2, \ldots, x_n) \oplus h(x_2, \ldots, x_n),$$

где h — функция вида (1). Тогда $D(f) \leq D(g) + 3$.

Теорема. *$D(2) = 2$, $D(3) \leq 5$, $D(n) \geq 2$ при $n \geq 5$.*

Список литературы

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2002.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Матем. вопросы кибернетики. — 198. — Т. 1. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. —М.: Изд-во МГУ, 1992.

5. Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа «0» на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

DOI: 10.20948/dms-2022-9

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНОЙ МОЩНОСТИ ПЛОСКИХ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ОДИН КЛАСС АВТОМАТОВ

А. С. Воротников (Москва)

Впервые понятие схемы из клеточных элементов, далее так же называемой плоской схемой, было введено в работе Кравцова С. С. [1]. В работах [2, 3] Г. В. Калачев показал, что порядок потенциала и переключательной мощности плоской схемы, реализующей булеву функцию от n переменных, составляет $2^{n/2}$.

В данной работе мы будем опираться на определение, введённое автором в работе [4]. Поскольку ниже мы рассмотрим плоские автоматные схемы со входами, нам придётся рассматривать иные меры мощности.

Состоянием схемы K на такте t при подаче на вход строки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l)$ длины l назовём вектор $s_K(\alpha, t) := (g_1(t), ..., g_h(t))$. Величину $c_K(t) := |s_K(\alpha, t) \oplus s_K(\alpha, t+1)|$ назовём *затратой энергии на переключение схемы* с такта t на $t + 1$.