УТОЧНЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КВАЗИГРУППОВЫХ «СУММ» КОНЕЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Д. Яшунский (Москва)

Суммы независимых случайных величин — один из классических объектов исследования для теории вероятностей. Обычно предполагается, что значения сумм лежат в некотором бесконечном множестве, однако имеются естественные обобщения на случай, в котором случайные величины и их суммы принадлежат некоторому конечному множеству E: в суммах $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ вместо операции $+$ используется некоторая операция $\circ$ на множестве E.

В случае, если операция $\circ$ ассоциативна, значения «сумм» растущего числа «слагаемых» моделируются состояниями некоторой конечной цепи Маркова, что позволяет легко установить условия наличия предельного распределения для «сумм», а также при достаточно общих условиях показать, что для групповой операции $\circ$ предельное распределение — равномерное на множестве E. Относительно современный обзор проблематики и результатов в области «сумм» независимых случайных величин в конечных группах можно найти в [1].

В работе С. Марковского, Д. Глигорского и В. Бакевой [2] рассматриваются «суммы» S_n в случае, когда $\circ$ — квазигрупповая операция. Напомним, что операция $x \circ y$ на множестве E называется *квазигрупповой*, если уравнения $x \circ a = b$ и $a \circ y = b$ однозначно разрешимы относительно x и y для любых фиксированных $a, b \in E$. Поскольку квазигрупповая операция, вообще говоря, не обладает ассоциативностью, в выражении для S_n требуется явно указывать порядок применения операций. В работе [2] рассматриваются «суммы» $(\ldots((X_1 \circ X_2) \circ X_3) \circ \cdots \circ X_{n-1}) \circ X_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин X_i. Значения таких «сумм», как и в полугрупповом случае, можно моделировать состояниями некоторой цепи Маркова, и, как и в групповом случае, предельное распределение оказывается равномерным.

В работе автора [3] результаты работы [2] о равномерности предельного распределения распространены на произвольные квазигрупповые «суммы». Для оценки близости распределений к равномерному в этой работе используется следующий подход. Пусть X — случайная величина, принимающая значения из конечного множества $E = \{1, \ldots, k\}$ и $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ — её распределение, т. е. p_i — вероятность обращения X в i для $i = 1, \ldots, k$. Обозначим через $(p_{[1]}, \ldots, p_{[k]})$ распределение, получающееся из $(p_1, \ldots, p_k)$ такой перестановкой компонент, при которой выполняются неравен-

ства $p_{[1]} \geq p_{[2]} \geq \cdots \geq p_{[k]}$, и положим $\delta(\mathbf{p}) = p_{[1]} - p_{[k]}$. Несложно проверить выполнение неравенств $\delta(\mathbf{p}) \leq \sum_{i=1}^{k} |p_i - 1/k| \leq k\delta(\mathbf{p})$. Отсюда видно, что близость величины $\delta(\mathbf{p})$ к нулю равносильна близости распределения $\mathbf{p}$ к равномерному.

В работе [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в конечном множестве $E = \{1, \ldots, k\}$ и распределением $\mathbf{p}$, удовлетворяющим условию $|\{i\colon p_i > 0\}| > k/2$. Тогда найдется такое число $\beta > 0$, зависящее только от распределения $\mathbf{p}$, что для любого выражения, получающегося правильной расстановкой скобок в выражении $X_1 \circ_1 X_2 \circ_2 X_3 \circ_3 \cdots \circ_{n-1} X_n$, где $\circ_1, \ldots, \circ_{n-1}$ — произвольные квазигрупповые операции на множестве E, распределение $\mathbf{r}$ значений выражения удовлетворяет неравенству $\delta(\mathbf{r}) \leq n^{-\beta}$.*

Из этой теоремы вытекает, что квазигрупповые «суммы» случайных величин имеют как минимум полиномиальную (по числу n «суммируемых» случайных величин) скорость сходимости распределений к равномерному. Вместе с тем известно, что для «сумм», моделируемых цепью Маркова, в частности, — квазигрупповых, рассматриваемых в работе [2], а также произвольных групповых и полугрупповых, — отклонение распределения значений S_n от предельного может быть оценено величиной $C\lambda^n$, где C и λ, $0 \leq \lambda < 1$, — некоторые константы, зависящие от используемых операций и распределения величин X_i, но не зависящие от n. Таким образом, в этих случаях имеет место экспоненциальная по n скорость сходимости распределений к предельному.

В настоящей работе показано, что в действительности для квазигрупповых «сумм» с произвольной расстановкой скобок имеет место экспоненциальная скорость сходимости распределений к равномерному. Для распределения $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ определим величину:

$$d(\mathbf{p}) = p_{[1]} + \cdots + p_{[\lfloor k/2 \rfloor]} - p_{[\lceil k/2 \rceil + 1]} - p_{[\lceil k/2 \rceil + 2]} - \cdots - p_{[k]}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть X и Y — независимые случайные величины со значениями в конечном множестве E и распределениями $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответственно. Если $\circ$ — произвольная квазигрупповая операция на E и величина $Z = X \circ Y$ имеет распределение $\mathbf{r}$, то выполнено неравенство $d(\mathbf{r}) \leq d(\mathbf{p})d(\mathbf{q})$.*

Из этой теоремы можно вывести следующее утверждение, уточняющее результат работы [3].

Теорема 3. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в множестве $E = \{1, \ldots, k\}$ и распределением $\mathbf{p}$. Тогда для любого выражения, получающегося правильной расстановкой скобок в выражении $X_1 \circ_1 X_2 \circ_2 X_3 \circ_3 \cdots \circ_{n-1} X_n$, где $\circ_1, \ldots, \circ_{n-1}$ — произвольные квазигрупповые операции на множестве E, распределение $\mathbf{r}$ значений этого выражения удовлетворяет неравенству $d(\mathbf{r}) \leq (d(\mathbf{p}))^n$.*

Если в условиях этой теоремы распределения $\mathbf{p}$ дополнительно удовлетворяет соотношению $|\{i\colon p_i > 0\}| > k/2$, то справедливо неравенство $d(\mathbf{p}) < 1$. Тогда, положив $\alpha = d(\mathbf{p})$, получаем оценку $d(\mathbf{r}) \leq \alpha^n$, которая в свою очередь влечет неравенства $\sum_{i=1}^{k} |r_i - 1/k| \leq k d(\mathbf{r}) \leq k\alpha^n$, т. е. экспоненциальную скорость сходимости распределений квазигрупповых «сумм» к равномерному распределению.

Список литературы

1. Saloff-Coste L. Random walks on finite groups // Probability on discrete structures. Encyclopaedia Math. Sci. Vol. 110. — Springer, Berlin, 2004. — P. 263–346.

2. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. Maked. Acad. Sci. and Arts for Math. And Tech. Sci. — 1999. — V. 20. — P. 13–28.

3. Яшунский А. Д. О преобразованиях распределений вероятностей бесповторными квазигрупповыми формулами // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 149–159.

DOI: 10.20948/dms-2022-95