

А. Л. Афонди́ков, А. А. Давы́дов, А. Е. Луцкий,
И. С. Меньшов, К. Д. Меркулов,
А. В. Пленкин, Я. В. Ханхасаева

**АДАПТИВНЫЕ ВЕЙВЛЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ГИДРО- И ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
НА ДЕКАРТОВЫХ СЕТКАХ**

ИПМ им. М. В. Келдыша
Москва 2016

УДК 519.6
ББК 22.193
А 284

Адаптивные вейвлетные алгоритмы для решения задач гидро- и газовой динамики на декартовых сетках. А. Л. Афондиков, А. А. Давыдов, А. Е. Луцкий, И. С. Меньшов, К. Д. Меркулов, А. В. Пленкин, Я. В. Ханхасаева. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. — 232 с.

Современные задачи механики жидкости и газа тесно связаны с математическим моделированием разнообразных физических процессов и расчетом течений в областях со сложной пространственной геометрией, которая может зависеть от времени. Исследуемые режимы в таких задачах характеризуются сильной неоднородностью пространственно-временных масштабов. Для их разрешения требуются подробные сетки с высоким пространственным разрешением. Использование однородных сеток приводит к значительным вычислительным затратам. Поэтому возникает идея введения локальной динамической адаптации сетки с целью увеличить в пределах возможностей доступных вычислительных ресурсов точность численного моделирования за счет учета структуры решения.

В книге излагается новая вычислительная технология решения задач подобного типа. Она основана на комбинации идеи многомасштабности в описании течения среды с методом свободной границы. Многомасштабность описания течения достигается с помощью вейвлетного анализа. Метод свободной границы позволяет эффективно реализовывать внутренние краевые условия на неконформных локально-адаптивных декартовых сетках.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИАП РАН И. В. Семенов.

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского научного фонда, проект № 14-11-00872*

Оглавление

Введение	5
Глава 1 Декартовы сетки и метод свободной границы	11
1.1 Регулярные декартовы сетки.....	14
1.1.1 Базовый численный метод	15
1.1.2 Метод свободной границы для расчета внутренних граничных условий	21
1.1.3 Решение уравнений дискретной модели	26
1.1.4 Параллельная программная реализация и результаты численных экспериментов	29
1.2 Динамические локально-адаптивные декартовы сетки	36
1.2.1 Представление неконформной сетки в памяти компьютера и выбор формата данных.....	38
1.2.2 Математическая модель и численный метод	41
1.2.3 WENO проекторы решения на сетку нижнего уровня.....	43
1.2.4 Тестовые расчеты на двухуровневых сетках	45
1.2.5 Многоуровневая адаптация сетки на основе вейвлет-анализа.....	55
1.2.6 Тестовые расчеты с многоуровневой адаптацией	59
1.2.7 Метод свободной границы на ЛАД сетках.....	64
1.2.8 Тестовые расчеты методом свободной границы на ЛАД сетке	69
Глава 2 Вейвлетная динамическая адаптация сеток и выделение сингулярностей течений	73
2.1 Некоторые численные методы выделения особенностей и построения адаптивных сеток	74
2.1.1 Основные определения и некоторые свойства вейвлетов	76
2.1.2 Связь асимптотики убывания вейвлет-преобразования с равномерной гладкостью Липшица на отрезке.....	85
2.1.3 Точечная гладкость Липшица.....	87
2.1.4 Максимумы модуля вейвлет-преобразования	88
2.1.5 Многомасштабное выделение перепадов.....	91
2.1.6 Увеличение четкости изображений при помощи лапласиана.....	98
2.1.7 Риджлеты	99
2.1.8 Выделение особенностей методом С. Б. Базарова	101
2.1.9 Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи вейвлетов	102

2.2	Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет-анализа.....	113
2.2.1	Применение вейвлетов для выделения и классификации особенностей газодинамических полей.....	114
2.2.2	Численные эксперименты	128
2.3	Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей и оценка качества работы детектора	141
2.3.1	Численное моделирование	143
2.3.2	Многомасштабный вейвлет-анализ.....	144
2.3.3	Структуры, локализуемые у границы расчетной области.....	155
2.3.4	Локализация разрывов с помощью корректора	156
2.3.5	Сравнение расчетов, выполненных на различных сетках	157
2.4	Обобщение алгоритма локализации особенностей на неструктурированные расчетные сетки, локализация структур в идеальной и вязкой моделях, адаптация расчетной сетки к положению разрывов	161
2.4.1	Алгоритм.....	163
2.4.2	Численное моделирование	167
2.4.3	Анализ расчетов	169
2.4.4	Локализация разрывов в трехмерных расчетах	174
2.4.5	Применение детектора для адаптации расчетной сетки к положению разрывов.....	178
Глава 3	Численное моделирование задач на адаптивных сетках.....	186
3.1	Численное моделирование на адаптивных сетках взаимодействия ударных волн с пограничными слоями.....	186
3.1.1	Режим $\alpha=0^\circ$	188
3.1.2	Режим $\alpha=10^\circ$	191
3.2	Численное моделирование неустойчивости контактного разрыва. Разрушение «застойной» зоны	194
3.3	Исследование обтекания движущихся тел.....	201
Глава 4	Справочные материалы.....	210
4.1	Симметричные комплексные вейвлеты Добеши	210
4.2	Связь между вещественной и мнимой частями скейлинг-функции... ..	2133
4.3	Лемма о сходимости масштабирующих функций.....	2144
4.4	Низкочастотные фильтры использованных в работе вейвлетов.....	2166
	Список литературы.....	218

Введение

Гидро- и газовая динамика имеют разнообразные критически важные приложения в различных вопросах науки и техники, из которых в качестве примеров упомянем движение на гиперзвуковых скоростях, различные аспекты проблемы перехода к турбулентности, описания движения разделяющихся летательных аппаратов, редуцицию шума от аппарата, проблему снижения сопротивления на различных режимах движения и т.д. При этом, наряду с экспериментальными и строгими математическими результатами для классических моделей Эйлера и Навье-Стокса, со времен появления первых ЭВМ все большую роль играет математическое моделирование.

В последние двадцать лет в области вычислительной гидродинамики (CFD — computational fluid dynamics) достигнуты значительные продвижения. Применение мощных суперкомпьютерных систем стало неотъемлемой технологией при проведении научных и практических исследований. Актуальные задачи сегодняшнего дня — это крупномасштабные высокопроизводительные расчеты течений жидкости и газа в областях со сложной геометрией. Такие течения зачастую являются турбулентными и содержат области отрыва большого размера. На сверхзвуковых режимах полета течение характеризуется разрывами, которые взаимодействуют друг с другом и с пограничными слоями. Исследуемые задачи характеризуются сильным различием пространственно-временных масштабов, для разрешения которых требуются не только высокоточные численные методы, но и весьма подробные пространственные сетки в геометрически сложных областях. По современным представлениям по крайней мере до 50% времени, необходимого для того, чтобы смоделировать и провести расчет более-менее сложного течения, тратится на генерацию начальной сетки и последующую ее модификацию (проводимую обычно вручную) с целью получения более качественного решения. Поэтому актуальной задачей сегодняшнего дня является разработка методов автоматической генерации пространственных сеток.

Отметим, что для математических моделей, описывающих указанные явления и процессы, нет строгой математической теории, выделяющей подходящие функциональные компакты, в которых лежат решения соответствующих

начально-краевых задач. Поэтому соображения, лежащие в основе аппроксимации решений и построения дискретных моделей и алгоритмов, должны служить достижению компромисса между физическими представлениями о характере разыскиваемых решений (прежде всего гладкостью и многомасштабностью), оптимальностью по числу операций, возможностью массивной параллелизации, а также спецификой архитектуры и элементной базы (CPU, GPU) суперкомпьютера, используемого для проведения расчетов. В подавляющем большинстве случаев для решения задач гидрогазодинамики на графических ускорителях из-за специфики их архитектур используются лишь простые явные разностные схемы. Причем программные реализации, как правило, одновременно могут задействовать несколько GPU только внутри одного узла.

В монографии предлагается использовать методы вейвлетного анализа с целью автоматического локального измельчения и укрупнения сетки в соответствии с локальными свойствами течения. При численном решении задач гидрогазодинамики используется дискретизация, когда область решения разбивается на счетные ячейки с помощью надлежащим образом подобранной сетки, а непрерывная задача сводится к дискретной, аппроксимирующей дифференциальные операторы и краевые условия. В настоящее время существует несколько подходов к решению этой задачи.

Первый — это стандартный метод связанных сеток, адаптированных к геометрии расчетной области и к особенностям решения. Сетка строится в области течения (например, вне тела, если речь идет о внешних задачах) так, чтобы в каждый момент времени граница области совпадала с одной из линий сетки.

Второй подход — метод гибридных (или химерных, от английского «chimerга») сеток, один из вариантов которого описан в работе [1]. Здесь вводятся сетки двух уровней. Сетка первого уровня (основная) строится во всей области, независимо от положения расположенных внутри этой области твердых объектов. Сетки второго уровня (дочерние) строятся отдельно около каждого твердого объекта поверх основной сетки. Внешние граничные условия для сеток второго уровня рассчитываются по решению на основной сетке с помощью интерполяционной процедуры. Решение на основной сетке затем модифицируется путем проекции решений, полученных на дочерних сетках, на основную сетку.

Третий подход — метод декартовых сеток [2]–[4]. Расчетная область выбирается простейшей формы, например, в виде куба, в котором строится регулярная декартовая сетка. Поверхность твердого включения, проходя по этой сетке, пересекает отдельные ячейки. Таким образом, возникают два типа счетных ячеек: нормальные шестигранные, целиком лежащие в области, занятой газовой средой, и усеченные, имеющие форму некоторого многогранника, зависящего от топологии пересечения. Дискретизация уравнений выполняется для ячеек как нормального, так и усеченного типа методом конечного объема.

Все эти подходы имеют определенные плюсы и успешно реализованы для решения многих задач. Однако существенные минусы возникают, когда указанные подходы применяют для решения больших задач с достаточно сложной геометрией.

Метод фиксированных сеток в силу нестационарности задач требует генерации сложных трехмерных сеток на каждом временном шаге. Кроме значительных вычислительных затрат, которые зачастую оказываются практически невыполнимыми, при движении объекта расчетная область может принимать сложную, сильно неоднородную по масштабам, форму. Сама по себе генерация сетки в такой области является далеко не простой задачей, как правило предусматривающей интерактивное вмешательство пользователя. Автоматическая (по единому алгоритму) генерация часто приводит к сильно искаженным сеткам плохого качества.

Второй подход не связан с построением и перестройкой сеток в сложных областях. Как базовая, так и дочерние сетки строятся в топологически простых областях. Кроме того, при движении объекта сетка смещается вместе с ним как твердое тело, что значительно упрощает пересчет нового положения узлов. В этом плане метод химерных сеток существенно проще метода фиксированных сеток и лишен проблемы некачественных сеток. Минусом в этом подходе является необходимость распознавать на каждом шаге взаимное расположение базовой и дочерних сеток, что представляет собой весьма трудоемкую задачу, когда речь идет о больших сетках. К тому же интерполяционные схемы приводят к большим погрешностям в ситуациях, когда базовая и дочерняя сетки сильно разномасштабны [5].

Метод декартовых сеток выгодно отличается от первых двух. Во-первых, практически полностью снимается проблема генерации сеток. Во-вторых, метод не предполагает выполнения переинтерполяции одних сеточных данных на другие. В-третьих, декартовая сетка позволяет реализовать схемы высокого порядка аппроксимации, такие как WENO [6], TVD [7] и компактные [8], [9]. Наряду с этим, слабая сторона метода состоит в необходимости определения пересечения поверхности объекта с ячейками расчетной сетки. Для сложных геометрий в трехмерном случае это может приводить к довольно непростым ситуациям, требующим многовариантного анализа. Кроме того, при движении объектов возникают ситуации, когда на очередном временном шаге сеточный элемент, находящийся внутри объекта, становится частично занятым газом усеченным элементом. Такой элемент не имеет истории и требует специального рассмотрения [4]. Все это делает метод декартовых сеток алгоритмически сильно неоднородным и, в конечном итоге, приводит к увеличению времени счета.

К настоящему времени накоплен весьма значительный опыт параллельной реализации алгоритмов, построенных на основе описанных выше подходов. Однако здесь возникают две фундаментальные проблемы. Первая из них — это построение корректного параллельного алгоритма. Результат его работы должен быть идентичен работе последовательного. Многие параллельные реализации численных методов (как правило, неявных) соблюдают эту идентичность лишь на определенных подобластях исходной расчетной области, как, например, в работах группы Р. Ленера (H. Luo, J. Baum, R. Lhener, George Washington University, USA). Как результат, в процессе вычислений накапливаются ошибки, связанные с различиями в последовательной и параллельной версиях алгоритма. Дополнительно сама архитектура вычислительной системы накладывает ограничения на структуру параллельного алгоритма. Вторая проблема — масштабируемость параллельных программ. Как правило, они могут эффективно использовать лишь порядка сотни процессорных ядер и 2–3 графических ускорителя, установленных внутри одного узла. Падение эффективности при задействовании большего числа ресурсов связано как со скоростными характеристиками сетей передачи данных вычислительной системы, так и с ограниченной масштабируемостью самого параллельного алгоритма (безотносительно его конкретных программных реализаций).

Все чаще современные суперкомпьютеры используют гибридную структуру. В дополнение к «классическим» процессорным ядрам устанавливаются графические ускорители, которые и дают основной вклад в суммарную производительность системы (на многих приложениях производительность GPU на 1–2 порядка превосходит производительность многоядерных центральных процессоров). Однако сложность массивно-параллельной архитектуры графических плат значительно затрудняет написание программ. В абсолютном большинстве случаев программы для GPU используют только явные схемы с простыми вычислительными ядрами и способны задействовать лишь несколько ускорителей, находящихся внутри одного узла. Помимо сложностей программной модели, архитектура мультитредовых графических процессоров обуславливает трудности при построении алгоритмов для них. В частности, отсутствие механизма глобальной синхронизации потоков является одной из основных причин отсутствия реализаций неявных методов для задач механики жидкостей и газов на GPU.

Проблема построения алгоритмов одновременного счета на узлах системы с распределенной памятью без единого адресного пространства является общей для CPU и GPU архитектур. Для неявных схем она решается, как правило, лишь частичным воспроизведением работы последовательного алгоритма на подобластях расчетной области, т.е., вообще говоря, параллельный алгоритм не вполне тождественен последовательному. Версии параллельных алгоритмов с идентичной последовательным работой, как, например, в [13], имеют уже теоретическое ограничение по масштабируемости, которая еще более ухудшается при программной реализации под конкретную вычислительную систему.

Наряду с рассмотренной выше проблемой особую важность имеет также подготовка исходных данных задачи, а именно построение сеточной геометрии расчетной области. В задачах со сложной геометрией этот процесс трудно автоматизируется, поэтому «ручное» построение высококачественных расчетных сеток по времени зачастую сравнимо с полным счетом всей задачи. Альтернативный подход основан на методе Volume of fluid (VOF) [14]–[16], в котором используются простые структурированные сетки, а вся информация о геометрии (поверхностях) расчетной области описывается характеристической функ-

цией. Данный подход позволяет вести эффективный расчет трехмерных задач со сложной геометрией на GPU без затрат времени на построение сеток.

Проблема адаптации сеток к решению имеет длинную историю. Однако идея применения вейвлетов для адаптации сеток восходит, по-видимому, к А. Хартену [14]–[17], внезапная кончина которого существенно задержала развитие этого направления. Из последующих исследований отметим работы [18]–[21], где существенный объем времени расходуется на использование В-сплайнов для построения криволинейных сеток, что существенно замедляет процесс и служит препятствием для его масштабируемости по числу процессоров.

В последнее время для решения задач газовой динамики успешно применяется и разрывный метод Галеркина (см., например, [22]–[26]), где точность приближения гладкой части потока решается за счет выбора метода высокого порядка. При этом существенной частью метода является построение адекватных лимитеров, обеспечивающих свойство монотонности численных решений.

В настоящей монографии излагается новая вычислительная технология решения задач подобного типа. Она основана на комбинации идеи многомасштабности в описании течения среды с методом свободной границы, позволяющим моделировать граничные условия на твердых поверхностях, не связанных с расчетной сеткой. Многомасштабность описания течения достигается с помощью вейвлетного анализа. Метод свободной границы позволяет эффективно реализовывать внутренние краевые условия на неконформных локально-адаптивных декартовых сетках.

Глава 1

Декартовы сетки и метод свободной границы

Решение задач газовой динамики на современных вычислительных системах с новыми архитектурами сопряжено с рядом возникающих при этом трудностей. Первая связана с дискретизацией расчетной области. В случае если она является геометрически сложной, сеточное разбиение в подавляющем большинстве случаев неструктурировано. Построение сетки при этом требует значительных вычислительных ресурсов и нередко «ручного» вмешательства для ее коррекции, что приводит к немалым временным затратам. Неструктурированные сеточные разбиения порождают нерегулярный доступ к памяти. Как результат, производительность программных реализаций методов для сеток данного типа оказывается ограничена не числом выполняемых в единицу времени арифметических операций (compute-bound), а пропускной способностью памяти (memory-bound). В большей степени это критично для массивно-параллельных вычислителей, поскольку эффективность их работы зависит в первую очередь от упорядоченности обращений в память. Поэтому наиболее предпочтительно использовать структурированные сеточные разбиения, для которых характерен регулярный шаблон обращений в память. Но построение таких сеток, согласованных с границей расчетной области, может оказаться в ряде случаев трудновыполнимой или вовсе неразрешимой задачей.

Другая сложность обусловлена взаимосвязанным развитием численных методов и архитектуры процессоров. Для решения задач на системах с ограниченными вычислительными ресурсами использовались сетки низкого разрешения. Чтобы получить на них более точное решение, приходилось строить численные методы высокого порядка со сложной алгоритмической структурой. С другой стороны, вычислительные ядра процессоров также становились все более «тяжелыми»: внеочередное исполнение команд, кеширование данных, прогнозирование ветвлений, векторные инструкции позволяли эффективно реализовывать сложные методы. Но масштабируемость вычислительных систем на таких «тяжелых» ядрах ограничена, и их дальнейшее усложнение приводит к

большему снижению эффективности. Это стало причиной появления систем на новых массивно-параллельных архитектурах с большим числом простых ядер. Вот здесь и проявилась проблема: накопленный за десятилетия «багаж» численных методов оказался плохо подходящим для реализации на новых вычислителях, поскольку высокая производительность в них достигается не за счет эффективного исполнения каждого из небольшого (порядка 10) числа «тяжелых» потоков, а за счет одновременной обработки значительно большего (порядка 1000) числа «легких». Иными словами, простое устройство ядра массивно-параллельных вычислителей влечет за собой требование вычислительного примитивизма для применяемых численных методов.

Явные методы хорошо подходят для реализации на новых архитектурах, но их применение сильно ограничено из-за условия устойчивости. В задачах со сложной геометрией, где неизбежно в сеточном разбиении будут присутствовать разномасштабные ячейки, глобальный шаг интегрирования по времени будет определяться размерами наименьшей из них, что приведет к неоправданно высокому росту вычислительной сложности. Неявные методы позволяют обойти это ограничение, но они значительно сложнее с точки зрения указанных выше требований, особенно в части возможного их распараллеливания. Таким образом, проблема выбора и создания методов и эффективных параллельных алгоритмов под них для решения широкого класса задач газовой динамики носит актуальный характер.

Реализация неявных схем для графических ускорителей (GPU) является непростой задачей, поскольку имеющаяся, как правило, в них зависимость по данным значительно затрудняет написание эффективного решателя, особенно в отсутствие средств глобальной синхронизации на GPU. В частности, в [34] метод LU-SGS [35], использующийся для решения СЛАУ, порожденной неявными схемами, рассматривается как один из хороших методов для расчетов на графических ускорителях. Однако из-за возникающей в нем зависимости по данным, сильно усложняющей распараллеливание, был выбран другой — DP-LUR, в котором отсутствует зависимость по данным, но при этом и выше вычислительная сложность.

Мы предлагаем специальный параллельный алгоритм для метода LU-SGS, который в точности соблюдает работу своего последовательного прототи-

па и масштабируется на несколько сотен графических ускорителей. Помимо собственно численного метода, важную роль, как уже было сказано, играет тип сеточного разбиения — GPU значительно эффективнее работают с регулярными структурами данных, в которых представляются структурированные сеточные разбиения, чем с нерегулярными, характерными для неструктурированных сеток. Применение структурированных сеток, адаптированных к геометрии расчетной области, накладывает ограничения на сложность геометрии расчетной области. Мы предлагаем метод, который позволяет проводить расчеты в областях с достаточно сложной геометрией на простых несогласованных декартовых сетках (по тексту мы их называем *несвязными сетками*), что делает его подходящим кандидатом для реализации на GPU. В дальнейшем будем называть его методом свободной границы. Он сводится к альтернативной постановке, в которой внутренние граничные условия моделируются компенсационным потоком — специальной поправкой в правой части определяющей системы уравнений. Это дает возможность вести сквозной расчет по всем ячейкам расчетной области, включая ячейки, приходящиеся на геометрию, в единообразной манере. Иными словами, данный метод обладает алгоритмической однородностью, весьма важной для массивно-параллельных архитектур.

Первые четыре раздела данной главы будут посвящены методу декартовых сеток без локальной адаптации, методу свободной границы расчета внутренних граничных условий на поверхностях, не согласованных с исходной декартовой сеткой, и параллельной реализации для вычислительной системы с множеством графических ускорителей.

Даже на вычислительных системах с большим числом графических ускорителей расчет сложных трехмерных задач со сложной пространственной геометрией требует очень больших сеток, и, как следствие, происходит значительное увеличение расчетного времени и затрат по памяти. Чтобы уменьшить эти показатели, можно применить принцип локальной адаптации расчетной сетки. Имея некоторую базовую регулярную декартовую сетку, мы можем измельчать счетные ячейки только там, где это необходимо, исходя из особенностей конкретной газодинамической задачи, а также ее геометрических особенностей. Напротив, там, где решение начинает вести себя гладким образом и нет необходимости в более мелком пространственном разрешении расчетной области,

ячейки объединяются вплоть до уровня базовой регулярной сетки. Это позволяет существенно сократить расчетное время задачи без серьезных потерь в качестве результата.

Метод локальной адаптации декартовых сеток совместно с методом свободной границы, представленные ниже, открывают широкие возможности для использования даже простого персонального компьютера при решении двумерных газодинамических задач и позволяют достигнуть особенно значимых результатов при адаптации методики для параллельных вычислительных систем и счета трехмерных задач со сложной геометрией твердых включений. Сохраняющийся при этом регулярный характер сеток (их декартовость) делает возможным использование простых вычислительных алгоритмов, выполнение которых идеально подходит для многопоточных вычислений на GPU.

Во второй части главы на примере двумерной газодинамической модели подробно рассматриваются вопросы динамической локальной адаптации сеток и реализации метода свободной границы.

1.1 Регулярные декартовые сетки

В настоящем разделе рассматриваются основные положения разрабатываемой численной методики, основанной на простых декартовых сетках. Для простоты изложения вопросы, связанные с динамической локальной адаптацией расчетной сетки путем введения локального подразбиения или огрубления ячеек сетки, здесь не затрагиваются. Они детально обсуждаются в следующем разделе. Ниже мы опишем положения основного численного метода на регулярной декартовой сетке, рассмотрим метод свободной границы для численного моделирования внутренних граничных условий на поверхностях тел, не связанных с базовой сеткой, особенности параллельной численной реализации на многопроцессорных вычислительных системах гибридной CPU/GPU архитектуры и результаты ряда вычислительных экспериментов, подтверждающих достоверность, точность и эффективность методики.

1.1.1 Базовый численный метод

Рассматривается численное решение системы уравнений Эйлера, описывающей движение идеальной сжимаемой жидкости. Система определяющих уравнений в декартовых координатах записывается в консервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1.1)$$

где подразумевается суммирование по индексу координатного направления k ,

$\mathbf{q} = (\rho, \rho u_m, \rho E)^T$ — вектор консервативных переменных,

$\mathbf{f}_k = (\rho u_k, \rho u_k u_m + \delta_{km} p, \rho u_k H)^T$ — векторы потоков,

$m = 1, 2, 3$, δ_{km} — символ Кронекера, ρ , u_k , p — плотность, компоненты вектора скорости и давление соответственно, $E = e + 0.5 u_k u_k$, $H = e + p/\rho$ — удельные полная энергия и энтальпия. Система уравнений (1.1) замыкается уравнением состояния, связывающим термодинамические параметры среды, которое в настоящей работе берется в форме уравнения состояния идеального совершенного с показателем адиабаты γ : $p = (\gamma - 1)\rho e$. В расчетах, которые будут представлены ниже, показатель адиабаты берется для случая воздуха, $\gamma = 1.4$.

Дискретизация по пространству выполняется декартовой сеткой, ориентированной вдоль координатных направлений, с шагами h_k , которые, вообще говоря, могут быть переменными. Применяя метод конечного объема к уравнениям (1.1), приходим к следующей системе полудискретных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = - \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i, \quad (1.2)$$

где i является обобщенным индексом ячейки, зависящим от индекса координатного направления k и принимающим значение порядкового номера ячейки в этом направлении.

Разность потоков в правой части (1.2)

$$\Delta \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k,i+1/2} - \mathbf{F}_{k,i-1/2}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{F}_{k,i+1/2}$ — численный поток, аппроксимирующий дифференциальный поток \mathbf{f}_k на грани между ячейками i и $i+1$. Этот численный поток берется в виде функции двух векторных аргументов

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-), \quad (1.4)$$

удовлетворяющей условию аппроксимации $\mathbf{F}_k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{f}_k(\mathbf{z})$. Здесь \mathbf{z} обозначает вектор примитивных переменных, $\mathbf{z} = (\rho, u_k, p)$.

Верхние индексы «+» и «-» в правой части уравнений (1.3) указывают, что соответствующие величины берутся в центре грани $i+1/2$. Выбор этих величин определяется точностью схемы. Например, схема первого порядка точности по пространству получается при простом выборе

$$\mathbf{z}_i^+ = \mathbf{z}_i, \quad \mathbf{z}_{i+1}^- = \mathbf{z}_{i+1}. \quad (1.5)$$

Для увеличения порядка аппроксимации схемы необходимо применять подсеточную реконструкцию параметров более высокого порядка точности [40]. В настоящей работе мы используем кусочно-линейное подсеточное восполнение, обобщающее на неравномерные сетки интерполяцию схемы MUSCL (Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) [36]

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{z} \pm 0.5\delta^\pm \left[(1 - k^\pm)\Delta^\mp + (1 + k^\pm)\Delta^\pm \right] \quad (1.6)$$

с конечными разностями $\Delta^+ = \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i$, $\Delta^- = \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}$. В этом уравнении для сокращения записи опущен индекс ячейки i , $\delta^+ = h_i / (h_i + h_{i+1})$, $\delta^- = h_i / (h_i + h_{i-1})$ — параметры неравномерности сетки, $k^\pm = k(\delta^\pm)$ — функция, определяющая порядок аппроксимации интерполяционной схемы. При выборе $k(\delta) = -1$ получается стандартная MUSCL схема второго порядка точности [37], $k(\delta) = 1$ дает неустойчивую центрально-разностную схему второго порядка, $k(\delta) = 0$ отвечает схеме Фромма [38], $k(\delta) = (12\delta^2 - 1) / (12\delta)$ приводит к MUSCL схеме третьего порядка аппроксимации по пространству. Ниже мы используем этот (последний) вариант схемы.

Схемы порядка точности по пространству второго и выше являются не-монотонными и приводят к нефизичным осцилляциям в численных решениях вблизи поверхностей сильных разрывов [39]. Для подавления этих осцилляций используют ограничители производных [37], [40]. Действие ограничителя сводится к модификации разностей Δ^\pm таким образом, чтобы интерполяция (1.6) не приводила к образованию локальных экстремумов.

Наиболее распространенными являются *minmod* ограничитель [36], [40]:

$$\Delta^+ = \mathit{minmod}(\Delta^+, \varphi\Delta^-), \quad \Delta^- = \mathit{minmod}(\Delta^-, \varphi\Delta^+) \quad (1.7)$$

$$\varphi = \frac{3-k}{1-k}, \quad \mathit{minmod}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy < 0 \\ \mathit{sign}(x) \min(|x|, |y|), & \text{если } xy \geq 0 \end{cases}$$

и ограничитель Ван Альбада [41]:

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{z} \pm 0.5s\delta^\pm \left[(1 - sk^\pm)\Delta^\mp + (1 + sk^\pm)\Delta^\pm \right] \quad (1.8)$$

$$s = \mathit{max} \left(0, \frac{2\Delta^+\Delta^-}{\Delta^+\Delta^+ + \Delta^-\Delta^- + \varepsilon} \right)$$

где ε — малое число, служащее для предотвращения деления на ноль ($\varepsilon \sim 10^{-12}$ для операций с двойной арифметикой, $\varepsilon \sim 10^{-6}$ — для одинарной). Первый ограничитель производных не является непрерывно дифференцируемой функцией и может приводить к заикливанью невязки в процессе сходимости решения. Мы используем второй ограничитель в виде гладкой функции, который во многих задачах решает проблему заикливания невязки.

Метод С.К. Годунова [42] применяется для аппроксимации функции численного потока. В этом подходе поток вычисляется на решении автомодельной задачи Римана для системы локально-одномерных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

с начальными данными $\mathbf{z}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{z}_i^+, & x < 0 \\ \mathbf{z}_{i+1}^-, & x \geq 0 \end{cases}$.

Решение этой задачи подробно описывается в монографии [43]. Оно фактически сводится к решению одного линейного уравнения относительно давле-

ния контактной зоны, что может быть реализовано ньютоновскими итерациями. Остальные параметры решения имеют точные аналитические выражения. Обозначим это решение как $\mathbf{z}(t, x) = \mathbf{Z}^{R,k}(\lambda, \mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-)$, где $\lambda = x / t$ — автомодельная переменная. Тогда стандартный гудуновский численный поток будет иметь вид

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) = \mathbf{f}_k[\mathbf{Z}^{R,k}(0, \mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-)]. \quad (1.10)$$

Расчет численного потока выполняется на каждом ребре счетной ячейки и является по сути основной (в смысле временных затрат) операцией расчетного цикла. Поэтому в целях повышения эффективности схемы С.К. Годунова были разработаны различные безытерационные приближенные решения задачи Римана [44]. Одно из таких приближений приводит к численному потоку, предложенному В. В. Русановым [45]. Ниже мы будем использовать его в линеаризации численного потока. Он имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}_i^+, \mathbf{z}_{i+1}^-) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^+) + \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_{i+1}^-) - (|u_k| + c)_{i+1/2} [\mathbf{q}(\mathbf{z}_{i+1}^-) - \mathbf{q}(\mathbf{z}_i^+)] \right\}, \quad (1.11)$$

где индекс $i + 1/2$ означает осреднение, например, $(*)_{i+1/2} = 0.5 [(*)_i^+ + (*)_{i+1}^-]$.

Интегрирование по времени системы полудискретных уравнений (1.2)–(1.4) с численным потоком в форме (1.10) проводится с использованием явно-неявной схемы [46], которая обеспечивает минимальное вовлечение диссипативной неявной компоненты, гарантируя при этом свойство невозрастания тах нормы (НВМН) для случая линейных уравнений. При надлежащем выборе шага по времени эта схема автоматически переходит в базовую явную схему второго порядка точности по времени и пространству, удовлетворяющую свойству НВМН.

Построение гибридной явно-неявной схемы начинается с выбора базовой явной схемы. В качестве такой схемы мы берем двухшаговую схему типа предиктор-корректор, хотя и другой выбор тоже возможен. В этой схеме на первом шаге вычисляются значения предиктора на полушаге по времени по явной эйлеровой схеме:

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z}^n)}{h_k} \right)_i \quad (1.12)$$

с потоком $\mathbf{F}_{k,i+1/2}$, определяемым по интерполированным на грани ячейки значениям,

$$\Delta \mathbf{F}_k(\mathbf{z}^n) = \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^+) - \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i^-). \quad (1.13)$$

Здесь верхний индекс n обозначает дискретный уровень по временной переменной. Решение на новом временном слое $n+1$ получается по явной схеме второго порядка точности на шаге Δt с потоками, вычисляемыми по значениям предиктора:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (1.14)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Описанная выше схема типа предиктор-корректор гарантирует (в линейном случае) свойство НВМН при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви на шаг интегрирования по времени,

$$\Delta t \leq \lambda_i(\mathbf{z}^n) \text{ для всех } i, \quad (1.15)$$

где функция в правой части определяется локальными скоростью течения и скоростью звука:

$$\lambda_i(\mathbf{z}^n) = K_s \left(\frac{|u_k| + C}{h_k} \right)^{-1}. \quad (1.16)$$

Здесь K_s — коэффициент запаса ($0 < K_s \leq 1$).

Запишем базовую явную схему в операторном виде:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t L_2(\Delta t, \mathbf{q}^n), \quad (1.17)$$

где $L_2(\cdot)$ обозначает дискретный двухшаговой оператор перехода (1.12)–(1.14). Введем для каждой счетной ячейки параметр промежуточного слоя — скалярный параметр ω_i , $0 \leq \omega_i \leq 1$. Определим также вектор решения на промежуточ-

ном слое $\mathbf{q}^\omega = \omega \mathbf{q}^n + (1 - \omega) \mathbf{q}^{n+1}$. Тогда гибридная явно-неявная схема записывается в следующем виде:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t L_2(\omega_i \Delta t, \mathbf{q}^\omega). \quad (1.18)$$

Очевидно, что при выборе $\omega_i = 1$ во всех счетных ячейках гибридная схема переходит в точности в ее явный аналог. В другом предельном случае $\omega_i = 0$ она становится чисто неявной эйлеровской схемой с пространственной аппроксимацией второго порядка точности.

Неявная составляющая гибридной схемы привносит излишнюю диссипацию, которая стабилизирует численное решение, но при этом занижает его точность. Поэтому оптимальным решением в конструировании гибридной схемы будет выбор наибольших значений параметра промежуточного слоя ω_i в счетных ячейках, обеспечивающий максимальное участие явной компоненты, при условии выполнения свойства НВМН.

Оказывается, что такой выбор можно сделать. Заметим, что гибридная схема может быть переписана в эквивалентной форме как

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^\omega + \omega_i \Delta t L_2(\omega_i \Delta t, \mathbf{q}^\omega). \quad (1.19)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (1.19) в точности представляет явную двухшаговую схему перехода с переменного промежуточного слоя $t^\omega = \omega t^n + (1 - \omega) t^{n+1}$ на верхний слой t^{n+1} . Поэтому невозрастание max нормы

$$\|\mathbf{q}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{q}^\omega\|_\infty \quad (1.20)$$

будет выполняться при условии

$$\omega_i \Delta t \leq \lambda_i(\mathbf{z}^\omega). \quad (1.21)$$

Следствием неравенства (1.20) является неравенство $\|\mathbf{q}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{q}^n\|_\infty$ [46].

Поэтому неравенство (1.21) является также необходимым условием выполнения свойства НВМН численных решений гибридной схемы.

Неравенство (1.21) будет выполняться, если положить

$$\omega_i = \min \left[1, \frac{\lambda_i(\mathbf{z}^\omega)}{\Delta t} \right], \quad (1.22)$$

или с учетом уравнения (1.16)

$$\omega_i = \min \left[1, \frac{K_s}{\Delta t} \left(\frac{|u_k^\omega| + C^\omega}{h_k} \right)_i^{-1} \right]. \quad (1.23)$$

Как видно, параметр промежуточного слоя в каждой счетной ячейке зависит от решения на верхнем временном слое. Таким образом, гибридная схема является фактически неявной, требующей решения нелинейной системы уравнений на каждом временном шаге. Отметим также, что выбором величины шага Δt можно уменьшить число решаемых в системе уравнений, переводя в части счетных ячеек гибридную схему в чисто явную. Более подробно решение системы нелинейных уравнений обсуждается ниже.

1.1.2 Метод свободной границы для расчета внутренних граничных условий

Для реализации внутренних граничных условий на декартовой сетке, не связанной с геометрией области решения, используется метод свободной границы (MSG) [47], [48]. Кратко опишем основные положения этого метода.

Пусть Ω является областью, занятой твердым телом, $\Gamma = \partial\Omega$ — его граница. Тогда уравнения Эйлера (1.1) описывают течение газа в области $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, и граничным условием для этих уравнений служит соотношение

$$u_k n_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (1.24)$$

где $\mathbf{n} = (n_k)$ — вектор единичной внешней к Ω нормали на поверхности Γ .

Суть метода свободной границы сводится к замене решения краевой задачи для однородной системы уравнений Эйлера в ограниченном пространстве решением неоднородной системы во всем пространстве. Исходная система уравнений модифицируется путем добавления в правую часть некоторого вектора \mathbf{F}_w , который далее называется компенсационным потоком:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = -\mathbf{F}_w. \quad (1.25)$$

По своей структуре модификация уравнений (1.25) напоминают штрафные функции, которые используются в методе погруженной границы (Immersed boundary method) [49]. По сути же это разные подходы. Штрафные функции являются объемными и никак не учитывают подсеточную структуру геометрии. Компенсационные потоки, напротив, определяются на поверхности, задающей геометрию объекта, и вычисляются, как будет видно ниже, с учетом геометрических характеристик объекта на подсеточном уровне.

Система модифицированных уравнений (1.25) решается во всем пространстве \mathbb{R}^3 , а компенсационный поток \mathbf{F}_w подбирается таким образом, чтобы сужение решения уравнения (1.25) в \mathbb{R}^3 на область $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ в точности совпадало с решением исходной краевой задачи. В работе [47] предлагается выражение для компенсационного потока \mathbf{F}_w , которое обеспечивает выполнение этого условия:

$$\mathbf{F}_w = \begin{pmatrix} \rho u_k n_k \\ \rho u_k u_m n_k + (p - p_w) n_m \\ \rho u_k n_k H \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}, \Gamma), \quad (1.26)$$

где $\delta(\mathbf{x}, \Gamma)$ обозначает обобщенную функцию Дирака поверхности Γ , определяемую соотношением

$$\int_V \delta(\mathbf{x}, S) \varphi(\mathbf{x}) dV = \int_{V \cap \Gamma} \varphi(\mathbf{x}) dS, \quad \forall V \in \mathbb{R}^3. \quad (1.27)$$

Величина p_w в уравнениях (1.26) представляет собой мгновенную реакцию жесткой стенки на воздействие со стороны потока жидкости. Для случая идеального газа с показателем адиабаты γ эта реакция определяется в зависимости от знака нормальной компоненты относительной скорости следующим образом.

Если $u_k n_k < 0$, то давление стенки p_w соответствует давлению за фронтом формирующейся ударной волны и определяется по формуле [50]:

$$p_w = p \left[1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M^2 + \sqrt{\gamma^2 M^2 + \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{16} M^4} \right]. \quad (1.28)$$

В противном случае ($u_k n_k > 0$) формируется волна разрежения, и давление стенки имеет вид

$$p_w = p \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (1.29)$$

Здесь M обозначает относительное число Маха, $M = u_k n_k / a$, где a — скорость звука.

Отметим, что выбор компенсационного потока в форме соотношений (1.27)–(1.29) не является единственным с математической точки зрения. Наверное, можно указать другие формы правой части, при которых краевое условие (1.24) будет также выполняться. Наш выбор основан на естественном физическом обосновании. Поток \mathbf{F}_w моделируется двумя составляющими. Первая компенсирует протекающие через поверхность Γ массу, импульс и энергию, а вторая определяет реакцию стенки и соответствующую ей работу.

При численной реализации МСГ предполагается, что поверхность Γ , задающая геометрию тела, представляется набором дискретных элементов $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$. В большинстве случаев это плоские многогранники или треугольные пространственные элементы. Ячейки декартовой сетки разбиваются границей тела на три типа: жидкостные — те, которые полностью находятся вне Γ , твердые, лежащие целиком внутри Γ , и, соответственно, пересекаемые. Пересекаемые ячейки наряду с расчетным вектором определяются также подсеточной структурой геометрии тела. В настоящей работе мы используем линейное восполнение, которое задается объемной долей, занимаемой жидкостью в пересекаемой ячейке, ω_f , и вектором внешней нормали (направленной в сторону жидкости) \mathbf{n}_f , $|\mathbf{n}_f| = s_f$, где s_f — площадь плоского элемента, аппроксимирующего пересечения счетной ячейки с поверхностью Γ .

Эти параметры вычисляются при анализе пересечения счетной ячейки с элементами поверхности Γ_j . Вектор нормали вычисляется осреднением единичных нормалей элементов с весовыми коэффициентами, равными площадям пересечения: $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_j s_j$, $s_j = \text{area}(\Gamma_j \cap C)$, где C обозначает область ячейки сетки. Объемную долю ω_f в пересекаемой ячейке можно приближенно вычислить через средние расстояния от жидких вершин ячейки, d^+ , и, соответственно, от твердых вершин, d^- , до плоскости, нормальной к \mathbf{n}_f и проходящей через опорную точку \mathbf{x}_0 :

$$\omega_f = d^+ / (d^+ + d^-). \quad (1.30)$$

Опорная точка определяется по центрам элементов поверхности \mathbf{x}_j

$$\mathbf{x}^j = \frac{|\mathbf{n}^{j-1}| \mathbf{x}^{j-1} + \mathbf{x}_j s_j}{|\mathbf{n}^{j-1}| + s_j}, \quad \mathbf{n}^j = \sum_{k=1}^j \mathbf{n}_k s_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^M, \quad (1.31)$$

где M — число элементов поверхности Γ .

Дискретизация системы уравнений (1.25) проводится в два этапа с применением метода разделения по физическим процессам. На первом этапе выполняется интегрирование однородной системы на множестве жидких и пересекаемых ячеек по численной схеме, рассмотренной в предыдущем разделе:

$$\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (1.32)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Таким образом, решение на этом этапе, \mathbf{q}_i^* , описывает изменение газодинамических параметров на временном шаге в соответствии с моделью Эйлера, но без учета влияния стенки на параметры течения.

На втором этапе полученное решение корректируется компенсационным потоком правой части. Вывод соответствующих дискретных уравнений мы получим из физических соображений, упомянутых выше.

Беря решение \mathbf{q}_i^* в качестве начальных данных, проинтегрируем однородную систему уравнений Эйлера по жидкостной части счетной ячейки:

$$\omega_f V_i \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = - \sum_{\sigma \in f} \mathbf{F}_\sigma s_\sigma + \mathbf{F}_p s_f, \quad (1.33)$$

где $\mathbf{F}_p = (0, p_w n_m, 0)^T$ — численный поток на стенке, суммирование в правой части ведется по граням ячейки, полностью или частично находящимся в жидкости, s_σ — площадь жидкостной части грани. Поскольку на этом этапе учитывается только влияние стенки, потоки на гранях \mathbf{F}_σ вычисляются по значениям \mathbf{q}_i^* из ячейки.

Используя свойство консервативности потока, уравнение (1.33) можно переписать в виде

$$\omega_f V_i \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = -\mathbf{F}_c s_f + \mathbf{F}_p s_f \quad (1.34)$$

с потоком $\mathbf{F}_c = (\rho u_k n_k, \rho u_k u_m n_k + p n_m, \rho u_k n_k H)^T$ и $V_i = h_1 h_2 h_3$. Сумма потоков в правой части как раз дает введенный выше компенсационный поток, $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p$.

Для интегрирования по времени уравнения (1.34) мы берем неявную схему, чтобы не накладывать жесткие ограничения на шаг по времени из-за объемной доли ω_f , которая в некоторых пересекаемых ячейках может быть, вообще говоря, сколь угодно малой величиной. Это приводит к следующей системе дискретных уравнений:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^* - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}). \quad (1.35)$$

Объединяя (1.32) и (1.35), приходим к следующей численной схеме:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}), \quad (1.36)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-),$$

которая является абсолютно устойчивой при вычислении параметра промежуточного слоя по формуле (1.23) и обеспечивает третий порядок точности по пространству и второй порядок по времени.

Решение нелинейной системы уравнений (1.36) находится безматричным методом приближенной факторизации LU-SGS [35], [51]. Этот метод экономичен и сводится к прямому и обратному циклам по счетным ячейкам, которые фактически реализуют явную схему. Детали метода решения описываются в следующем разделе.

1.1.3 Решение уравнений дискретной модели

Для решения уравнений (1.36) используем итерационный метод Ньютона. Он приводит к линейной системе относительно итерационных вариаций $\delta^s(\cdot) = (\cdot)^{n+1,s+1} - (\cdot)^{n+1,s}$, где s — итерационный индекс:

$$\left(I + \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} A_w^s \right) \delta^s \mathbf{q}_i = -\Delta^s \mathbf{q}_i - \Delta t \left(\frac{\Delta^s \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1,s}) - \Delta t \frac{\delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2} - \delta^s \mathbf{F}_{k,i-1/2}}{h_k}. \quad (1.37)$$

В этом уравнении $\Delta^s = (\cdot)^{n+1,s} - (\cdot)^n$ обозначает итерационное приращение на временном шаге, $A_w = \partial \mathbf{F}_w / \partial \mathbf{q}$ — якобиан компенсационного потока по вектору консервативных переменных.

Линеаризация численного потока $\delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2}$ выполняется приближенно, используя следующие упрощения. Во-первых, несмотря на то, что параметр ω зависит от итерационных значений, при линеаризации он предполагается замороженным. Во-вторых, при линеаризации не учитываются подсеточные интерполяции расчетного вектора и считается, что численный поток зависит от значений параметров в счетной ячейке, как в стандартной схеме первого порядка точности. И в-третьих, в качестве функции численного потока берется не точно поток по Годунову, а его приближение в форме В. В. Русанова, которое определяется соотношением (1.11). При этих допущениях линеаризация численного потока сводится к простому выражению

$$\begin{aligned} \delta^s \mathbf{F}_{k,i+1/2} = (1 - \omega_i) \frac{A_{k,i}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \delta^s \mathbf{q}_i + \\ + (1 - \omega_{i+1}) \frac{A_{k,i+1}^{\omega,s} - (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \delta^s \mathbf{q}_{i+1}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $A_{k,i}^{\omega,s} = A_k(\mathbf{z}_i^{\omega,s}) = \partial \mathbf{f}_k / \partial \mathbf{q}$ — якобиан потока в k -м направлении по вектору консервативных переменных и верхний индекс ω указывает на то, что значение параметра в счетной ячейке берется с промежуточного слоя.

С учетом уравнения (1.38) система уравнений (1.37) сводится к линейной системе относительно итерационных невязок $\delta^s \mathbf{q}$:

$$\begin{aligned} D_i^s \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^s - \frac{\Delta t (1 - \omega_{i+1})}{h_k} \left[\frac{A_{k,i+1}^{\omega,s} - (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s}}{2} \right] \delta^s \mathbf{q}_{i+1} + \\ + \frac{\Delta t (1 - \omega_{i-1})}{h_k} \left[\frac{A_{k,i-1}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i-1/2}^{\omega,s}}{2} \right] \delta^s \mathbf{q}_{i-1}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где

$$\begin{aligned} D_i^s = I + \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} A_w^s + \frac{\Delta t (1 - \omega_i)}{2 h_k} \left[(|u_k| + c)_{i-1/2}^{\omega,s} + (|u_k| + c)_{i+1/2}^{\omega,s} \right] \\ \mathbf{R}_i^s = -\Delta^s \mathbf{q}_i - \Delta t \left(\frac{\Delta^s \mathbf{F}_k}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{\omega_f V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1,s}). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Для дальнейшего рассмотрения будет удобно в правой части уравнения (1.39) сделать обратную линеаризацию, перейдя от произведения якобиана и итерационного приращения консервативного вектора к приращению соответствующего потокового вектора. Обозначая спектральный радиус якобиана через $r_k = |u_k| + c$, результирующую систему уравнений можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
D_i^s \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^s - \frac{\Delta t(1 - \omega_{i+1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i+1}^\omega - r_{k,i+1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i+1}) + \\
+ \frac{\Delta t(1 - \omega_{i-1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i-1}^\omega - r_{k,i-1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i-1}).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Решение этой системы ищется безматричным итерационным методом LU-SGS [51]. Матрица системы является семидиагональной. Запишем ее в расщепленном операторном виде:

$$D\delta\mathbf{q} + L(\delta\mathbf{q}) + U(\delta\mathbf{q}) = \mathbf{R}, \tag{1.42}$$

введя верхне-треугольный матричный оператор

$$L(\delta\mathbf{q}) = \frac{\Delta t(1 - \omega_{i+1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i+1}^\omega - r_{k,i+1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i+1})$$

и нижне-треугольный матричный оператор

$$U(\delta\mathbf{q}) = -\frac{\Delta t(1 - \omega_{i-1})}{2h_k} (\delta^s \mathbf{f}_{k,i-1}^\omega - r_{k,i-1/2}^{\omega,s} \delta^s \mathbf{q}_{i-1}).$$

Переписывая систему уравнений (1.42) в виде

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\delta\mathbf{q} = \mathbf{R} + LD^{-1}U, \tag{1.43}$$

для нахождения решения мы затем используем ее приближенную факторизацию, которая состоит в отбрасывании последнего слагаемого в правой части уравнения (1.43). В результате получается упрощенная система

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\delta\mathbf{q} = \mathbf{R}, \tag{1.44}$$

которая эффективно решается двумя расчетными циклами по ячейкам в прямом и обратном направлениях (по индексу ячейки) соответственно:

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{q}^* &= D^{-1}[\mathbf{R} - L(\delta\mathbf{q}^*)], \\
\delta\mathbf{q}^s &= \delta\mathbf{q}^* - D^{-1}U(\delta\mathbf{q}^s).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Отметим, что отбрасываемые в описанной выше приближенной факторизации члены оказываются по порядку малости величинами $O(\Delta t^2)$. Поэтому,

если при решении задачи используется малый шаг по времени, внесенная факторизацией ошибка будет небольшой.

1.1.4 Параллельная программная реализация и результаты численных экспериментов

Введение компенсационного потока не изменяет структуру результирующей СЛАУ (1.37), полученной в результате линеаризации дискретной системы уравнений, поскольку данный поток представляет собой локальную добавку. Данное свойство позволяет строить параллельный алгоритм для метода LU-SGS таким же образом, как и в случае использования согласованных сеток. Решение системы с факторизованной матрицей может быть представлено как обход всех ячеек сеточного разбиения в прямом и обратном направлениях, причем возникающая при этом зависимость по данным носит локальный характер и определяется только порядком обхода всех геометрически соседних ячеек относительно каждой из них. Иными словами, в зависимости от того, «до» или «после» относительно текущей ячейки в порядке обхода располагается соседняя, выполняются те или иные вычисления. Сам порядок обхода можно выбирать произвольным образом, основываясь не только на геометрическом соседстве ячеек. Этим и воспользуемся при построении параллельного алгоритма.

Одновременный счет в ячейках возможен только в том случае, если они не являются геометрически соседними. Выбор обхода ячеек в этом случае сводится к задаче о раскраске графа, две соседние вершины в котором всегда должны быть разного цвета. В случае структурированных, а именно используемых в методе свободной границы, декартовых сеток, достаточно двух цветов, что порождает «шахматный» порядок обхода ячеек, когда вычисления проводятся сначала над «черными», а затем над «белыми» ячейками. Подмножество каждого цвета можно считать одновременно, что приводит к параллельному алгоритму для одного GPU: сначала считаются только «черные», затем — только «белые» ячейки. Однако в случае использования нескольких GPU этот алгоритм приводит к неизбежным простоям во время обмена соседними ячейками между ускорителями. Это в конечном итоге ограничивает масштабируемость алгоритма, поскольку пересылки данных между GPU выполняются фактически

в 3 этапа: из памяти ускорителя в память CPU, затем пересылка по сети в другой узел и копирование из памяти CPU на этом узле в память GPU.

Для обхода этого ограничения был изменен порядок обхода ячеек. Расчетная область разбивается на блоки с примерно равным числом ячеек с топологией, аналогичной сеточному разбиению: прямоугольники, расположенные «стык в стык». Блоки также разбиваются в «шахматном» порядке, в каждом из них выделяется внутренняя и граничная части. Глобальный обход строится следующим образом: сначала выполняется обход всех внутренних частей «черных» блоков; затем в каждом «белом» блоке обходится сначала первая половина внутренних ячеек, а потом граничная часть; далее, во всех черных блоках обходятся граничные части и, наконец, в белых блоках обходятся оставшиеся половины внутренних ячеек (рис. 1.1). Данная схема позволяет совмещать во времени расчет внутренних частей блоков с обменом граничными ячейками между соседними блоками на разных GPU. Расчет каждой части блоков выполняется в соответствии с указанной выше «шахматной» раскраской ячеек. Детали алгоритма можно найти в [52].

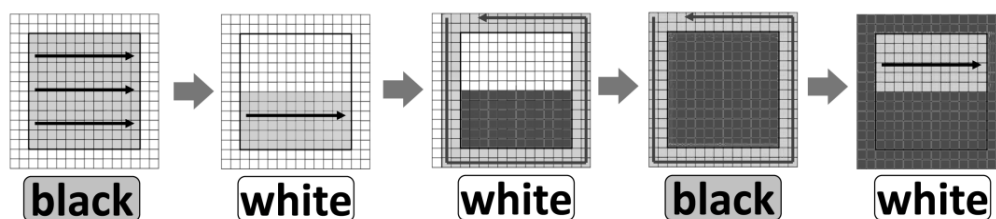


Рисунок 1.1 – Схема обхода ячеек для параллельного алгоритма LU-SGS

Программная реализация была выполнена на языке CUDA C с использованием Stream API и неблокирующих вызовов MPI, что позволило добиться совмещения счета и многофазной передачи данных между графическими ускорителями. Все вычислительные операции выполняются при этом на GPU, CPU используются лишь для межузловых обменов.

Детальное тестирование предлагаемого метода было проведено на задаче обтекания крыловидного профиля NASA 0012. Угол атаки составлял $\alpha=1.25^\circ$, число Маха набегающего потока — $M=0.8$. Использовались сетки 2 типов: связанная с поверхностью профиля структурированная C-сетка с разрешением 400 ячеек вдоль границы профиля и общим разрешением 1000×150 и несвязная де-

картова сетка с разрешением внутри описанного вокруг профиля прямоугольника 200×24 и общим разрешением 650×324 .

Расчеты на этих сетках проводились по гибридной явно-неявной схеме второго порядка точности с числом Куранта $C=10$. Распределение коэффициента давления C_p и скорости сходимости к стационарному решению приведены на рисунке 1.2. Как видно, результаты на разных сетках, включая и скорость сходимости, хорошо согласуются. Характерной особенностью течения является небольшой локальный минимум в распределении давления, возникающий сразу за ударной волной на наветренной стороне профиля. Видно, что эта особенность лучше воспроизводится на декартовой сетке, чем на согласованной, где она фактически отсутствует и начинает проявляться при увеличении сеточного разрешения. Это связано со свойством ортогональности, естественно присущим декартовой сетке, которое лучше обеспечивает выполнение повышенной точности схемы.

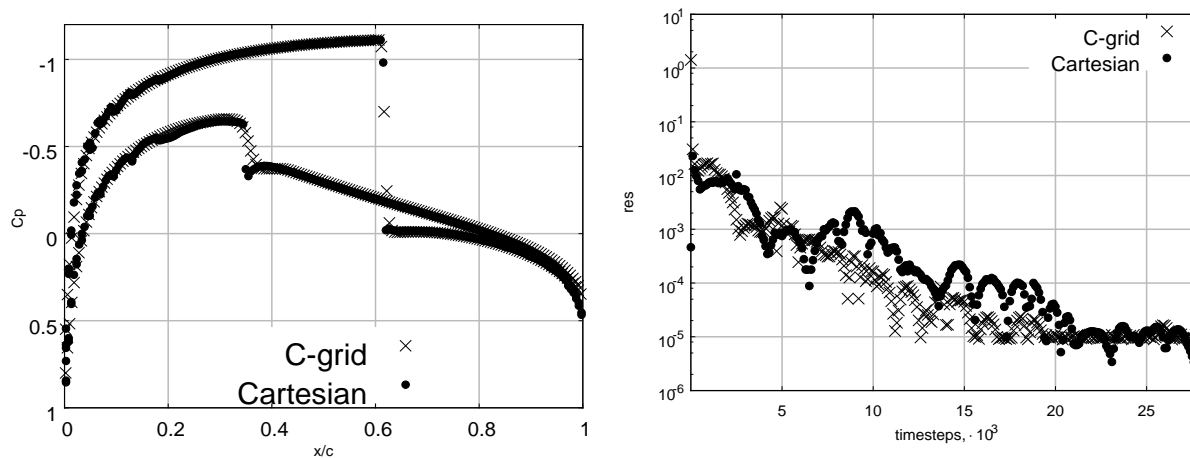


Рисунок 1.2 – Распределение C_p (слева) и скорость сходимости (справа) на согласованной (C-grid) и несвязной (Cartesian) сетках, NASA0012, $M=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$, число Куранта 10

Расчетные значения коэффициентов подъемной силы и сопротивления, C_l и C_d , полученные на согласованной и несвязной декартовой сетках, приведены в таблице 1. Разница значений этих коэффициентов составляет менее 1%.

Таблица 1. Аэродинамические коэффициенты: NASA0012, $M=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$

Коэффициент	Декартова сетка	C-сетка
C_l	0,3012	0,3036
C_d	0,02184	0,02199

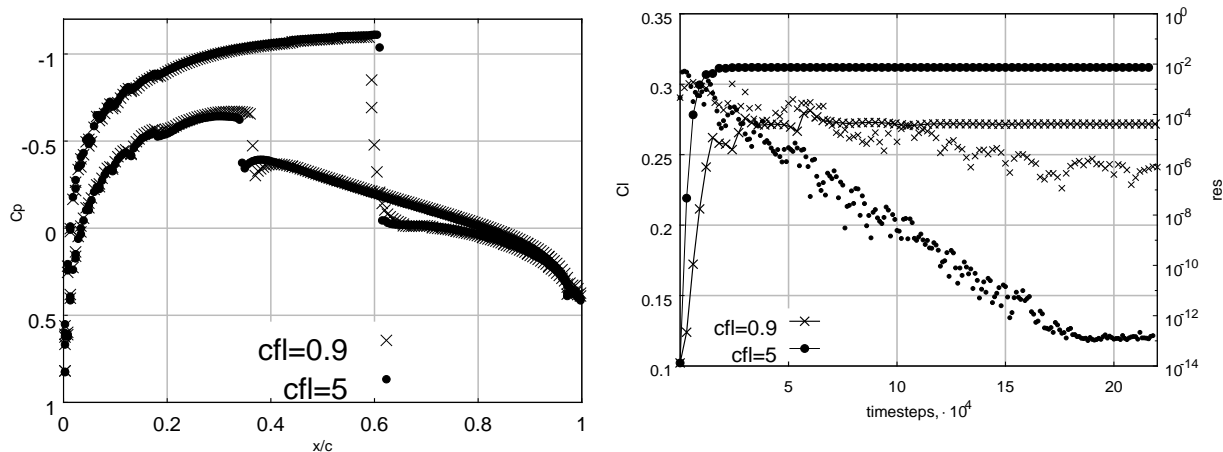


Рисунок 1.3 – Распределение C_p (слева), зависимость C_l от времени и скорость сходимости (справа) для чисел Куранта 0.9 и 5 на несвязной сетке, NASA0012, $M=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$

Были проведены также расчеты на несвязной декартовой сетке с разными временными шагами, которые обнаружили известное свойство неединственности решений уравнений Эйлера. В этой серии расчетов применялась чисто неявная схема ($\omega = 0$), чтобы исключить возможную зависимость стационарного решения от шага по времени. На рисунке 1.3 (слева) приведены два распределения коэффициента давления C_p , полученные при числах Куранта 0.9 и 5. Сетка и метод решения абсолютно одинаковые. Видно, что это два разных решения, отличающихся положением и профилем ударных волн (в частности, на подветренной стороне ударная волна имеет более резкий профиль для решения с числом Куранта 5). На рисунке 1.3 (справа) мы приводим графики сходимости невязки и коэффициента подъемной силы. Как следует из этих данных, оба решения выходят на стационарный режим. Различие в значениях коэффициента подъемной силы при этом оказывается порядка 15%. Неединственность реше-

ния, обнаруженная в этих расчетах, наблюдалась и исследовалась также в работах [53]–[55] по трансзвуковому обтеканию крыловидных профилей.

Корректность работы компенсационного потока проверялась также на задачах взаимодействия сверхзвукового потока газа (число Маха $M=3$) с клином (угол раствора 10°) на режимах с образованием ударной волны и волны разрежения. Использовалась равномерная несогласованная декартовая сетка с разрешением 1200×480 ячеек. Число Куранта в расчетах составляло $C=4$. Расчетные значения угла ударной волны β и угла γ , внутри которого формируется веер волны разрежения, приведены в Табл. 2. Там же для сравнения указаны соответствующие аналитические значения.

Таблица 2. Сверхзвуковое обтекания клина: угол раствора 10° , $M=3$

Численное решение, β°	Аналитическое решение, β°	Численное решение, γ°	Аналитическое решение, γ°
17.4	17.383	13.2	13.24

Для проверки метода был выполнен расчет нестационарной задачи взаимодействия ударной волны с группой цилиндров из работы [49]. Расчет проводился на декартовой равномерной сетке разрешением 1024×1024 ячеек с использованием 32 GPU. Расчетные данные представлены на Рис. 4 (справа), где изображена мгновенная численная шпирен-визуализация потока. Для сравнения представлен аналогичный расчет, выполненный с помощью одного из методов штрафных функций [49] (рис. 1.4, слева). Решения оказались очень близки, но при этом метод компенсационных потоков не дает нефизичных возмущений вблизи поверхностей цилиндров. Это связано с тем, что в методе штрафных функций нет подсеточного разрешения геометрии; геометрия там представлена более грубо, с точностью до ячейки сеточного разбиения.

Наконец, был проведен валидационный расчет трехмерного обтекания модели DLR F6 [56]. Число Маха набегающего потока составляло $M=0.75$, угол атаки — $\alpha=1^\circ$, разрешение расчетной сетки — $408 \times 520 \times 1256$ ячеек. Расчет проводился с использованием 162 GPU СК «Лобачевский» по гибридной явно- неявной схеме с числом Куранта $C=4$. Результаты расчета представлены на рисунке 1.5. Следует отметить, что расчетное значение коэффициента подъемной

силы оказалось несколько выше экспериментального ($Cl_{\text{exp}} = 5$). Подобное превышение (порядка 0.5 — 0.6) наблюдается также и в численных решениях, полученных на согласованных сетках [56], и объясняется недостаточностью модели Эйлера.

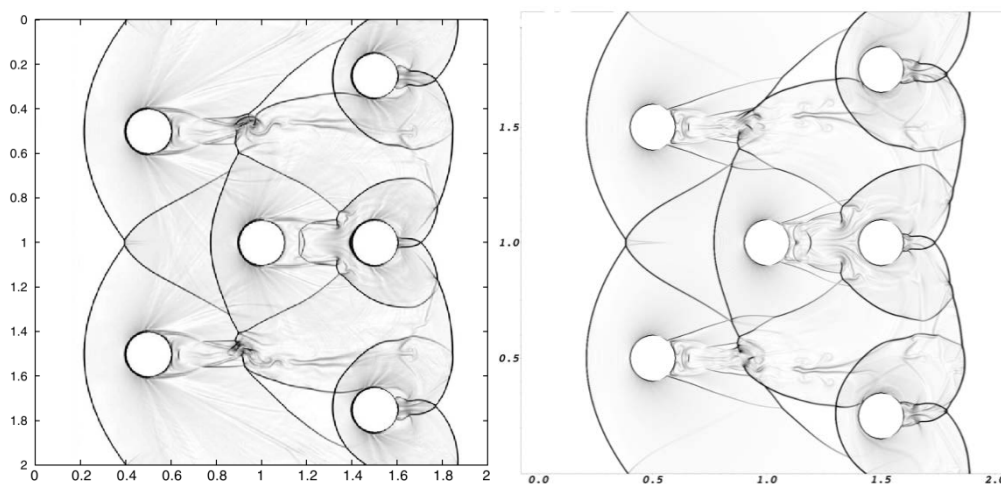


Рисунок 1.4 – Численная визуализация течения около системы цилиндров, $M=3$; слева — метод штрафных функций [53], справа — настоящий метод компенсационных потоков

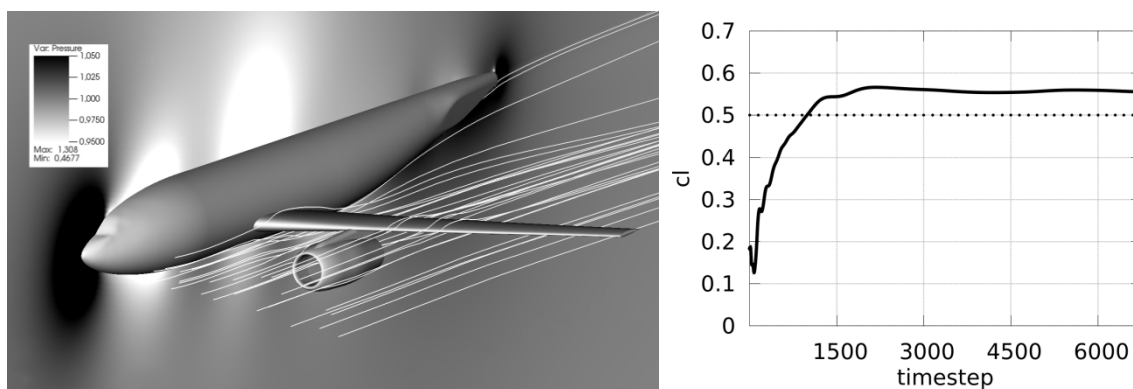


Рисунок 1.5 – Модель DLR F6, $M=0.75$, $\alpha=1^\circ$; слева — поле давления в плоскости симметрии и линии тока, справа — зависимость коэффициента подъемной силы Cl от времени

Исследование эффективности работы с большим числом GPU проводилось на задаче с фиксированной сеткой в 150 млн ячеек на СК «Ломоносов». Программный комплекс показал хорошую масштабируемость на несколько сотен ускорителей — эффективность счета составила 75% на 768 GPU (рис. 1.6). Ее удалось добиться благодаря оригинальной схеме обхода ячеек расчетной об-

ласти, допускающей совмещение обменов между GPU со счетом, и ее программной реализации с использованием асинхронных функций CUDA и MPI.

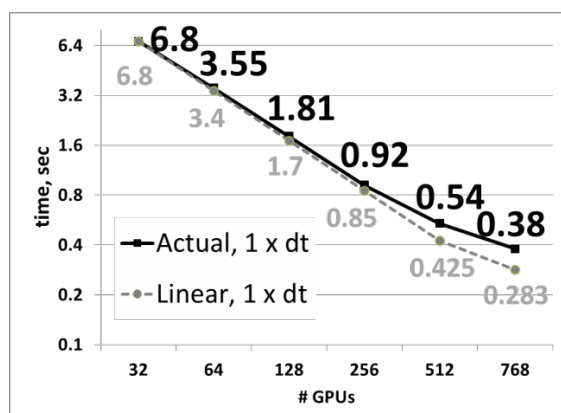


Рисунок 1.6 – Время счета в зависимости от числа GPU, пунктиром показан график линейной масштабируемости

Таким образом, выше был описан эффективный численный метод, позволяющий рассчитывать сложные трехмерные нестационарные газодинамические течения на простейших декартовых сетках, не связанных с геометрией расчетной области. В основе метода лежит гибридная явно-неявная схема С.К. Годунова, обеспечивающая минимальное вовлечение неявной компоненты при сохранении свойства НВМН. Был предложен способ реализации граничных условий на декартовой сетке посредством введения в правую часть исходных уравнений специальных компенсационных потоков. Это позволяет уйти от решения краевой задачи в части пространства к решению уравнений с компенсационным потоком во всем пространстве, т.е. фактически заменить краевую задачу задачей Коши. Решение дискретных уравнений выполняется методом приближенной LU-SGS факторизации, что существенно упрощает алгоритмическую часть метода. Это свойство (вычислительный примитивизм) позволило авторам разработать эффективный алгоритм параллельных вычислений на гибридных CPU/GPU вычислительных системах. Приведенные в работе результаты тестовых расчетов и сравнение с альтернативными расчетами на связанных с геометрией сетках убедительно показывают достоверность и работоспособность предложенного метода, а также его высокую масштабируемость и эффективность.

Формальное обобщение предложенной методики на задачи вязкого обтекания не представляет особого труда. Можно включить вязкие потоки в базо-

вую гибридную явно-неявную схему по аналогии с тем, как это делается, например, в работе [57], и модифицировать компенсационный поток пересекаемой ячейки, добавив к нему силу вязкого трения на поверхности тела. Основная проблема здесь — вычисление этой силы для режимов с большими числами Рейнольдса, при которых максимально возможная с точки зрения практической реализации адаптация сетки к геометрии не сможет обеспечить необходимого для погранслойного пристеночного течения сеточного разрешения. Для этих случаев, возможно, придется строить специальные пристеночные модели и включать их в расчетный процесс (см., например, [58]). Кроме этого, можно использовать принцип локальной адаптации базовой сетки с целью получения более точного дискретного представления расчетной области в приграничных областях и других областях, где решение претерпевает резкое изменение. Вопросам локальной адаптации декартовых сеток посвящен второй раздел настоящей главы.

1.2 Динамические локально-адаптивные декартовые сетки

Вопрос динамической адаптации сеток путем дополнительного подразбиения счетных ячеек с целью повышения точности численных решений для задач гидродинамики и газовой динамики интенсивно исследуется уже на протяжении последних двадцати лет [60]–[64]. Однако при проведении расчетов на современных многопроцессорных вычислительных системах подобная адаптация приобретает дополнительную специфику, которая делает необходимым развитие новых подходов, один из которых состоит в использовании простых регулярных сеток. Такие сетки, как правило, не согласованы с геометрией задачи. Для более точного представления геометрии и для повышения разрешения особенностей задачи мы используем подход, основанный на локальной динамической адаптации несогласованных декартовых сеток. Для учета граничных условий на таких несогласованных сетках применяется метод свободной границы [47], [48], который уже рассматривался выше для декартовых сеток регулярной структуры.

В настоящем разделе обсуждаются вопросы, связанные с двумерными сетками с динамической локальной адаптацией. Значительная часть работы посвящена алгоритмам построения и модификации декартовых сеток с динамиче-

ской локальной адаптацией, а также методам численного расчета газодинамических задач на данном классе сеток. Описывается алгоритм многоуровневой адаптации сетки по произвольному критерию. Для переноса данных между сетками различных уровней измельчения предлагается метод функциональной реконструкции на основе WENO-подхода. Для расчета задач обтекания тела на сетках с локальным уточнением используется метод свободной границы. Преимущества и особенности представленных алгоритмов, индикаторы для измельчения и огрубления ячеек проанализированы на различных задачах газовой динамики.

Реализация алгоритмов решения на параллельных многоядерных системах сверхвысокой производительности сопряжена с преодолением ряда трудностей и особенностей организации счета и обмена данными. Например, желание использовать графические многопоточные ускорители приводит к необходимости поиска простых вычислительных алгоритмов и узкой локализации расчетных шаблонов. Повышение точности расчетов требует рассмотрения очень подробных сеток с высоким пространственным разрешением, что, в свою очередь, сильно увеличивает расчетное время для получения требуемого решения.

Декартовы сетки идеально подходят для алгоритмов, приспособленных для использования многоядерных параллельных вычислительных систем, благодаря простоте программной реализации методов расщепления по направлениям, регулярным шаблонам обращения в память, отсутствию необходимости вычисления нормалей и прочих геометрических характеристик расчетных ячеек. Вместе с тем, использование структурированных регулярных декартовых сеток для получения качественного результата зачастую требует расчетные сетки столь большого размера, что выполнение конкретных вычислительных экспериментов даже на современных суперкомпьютерах может занимать практически неприемлемое время.

Чтобы снять это ограничение, можно воспользоваться тем фактом, что математическое моделирование гидрогазодинамических процессов описывается кусочно-гладкими функциями, где особенности с большими градиентами локализованы в узких подобластях области нахождения решения. Применение в этом случае сеток с высоким пространственным разрешением во всей области

нерационально. Уменьшение размера всех расчетных ячеек приводит к значительному росту вычислительной сложности задачи.

В этой связи более разумно использовать сетки с возможностью выборочного измельчения сеточных элементов. Признак деления крупной ячейки на несколько малых может быть разным: большой локальный градиент сеточной функции, пограничный слой вблизи обтекаемого тела, граница раздела фаз в многофазной задаче. Так мы приходим к локально-адаптивным (далее ЛАД) сеткам вложенной структуры.

Описание связанности сеточных элементов и, соответственно, поиск соседних ячеек не должны становиться сложными в вычислительном плане операциями. Кроме того, требуют отдельного рассмотрения такие вопросы, как: хранить или вычислять координаты адаптированных ячеек, находить всех соседей при необходимости или хранить внутри ячейки ссылки на некоторые из них, как расположить в динамической памяти поля физических величин, чтобы доступ к ним не требовал много лишнего времени из-за неконформности сетки? Отдельной проблемой служит распараллеливание алгоритмов на ЛАД декартовых сетках, которые фактически являются и неструктурированными, и неконформными. Для вычислительных систем с общей памятью актуальны вопросы размещения счетных ячеек в памяти, порядка обхода этих ячеек. Для систем с распределенной памятью встает вопрос динамической балансировки памяти между ее узлами.

1.2.1 Представление неконформной сетки в памяти компьютера и выбор формата данных

Определение оптимального и удобного формата представления данных — одна из ключевых задач при использовании сеток с локальной адаптацией. Для адаптации изначально структурированных декартовых сеток, где разбиение производится по какому-то заранее выбранному закону, удобно использовать различные древовидные структуры. Кроме того, для них хорошо известны быстрые рекурсивные алгоритмы обхода и перестроения [65].

Для описания двумерной сетки с возможностью локальной адаптации предлагается следующий формат. Ячейка может разбиваться только на четыре равновеликих части делением пополам по каждому из направлений. В этом

случае удобно говорить о наличии четырех *потомков* данной ячейки. Берется первоначальная прямоугольная (допустима и неравномерная) сетка размера $M \times N$ с ячейками, которым приписан нулевой уровень.

Каждая ячейка адаптивной сетки описывается своим уровнем lvl (т.е. сколько разбиений начиная с нулевого уровня было проведено для ее получения) и виртуальным положением на этом уровне — парой индексов (i, j) , таких, какими они были бы в случае полного заполнения данного уровня. Каждый узел дерева хранит флаг наличия подразбиения. Если он равен единице, ячейка обязательно имеет 4 потомка и хранит указатели на них, для листовых ячеек дерева эти указатели нулевые, но устанавливаются ненулевые указатели на координаты и вектор физических параметров.

Кроме того, с особенностями численных методов газовой динамики связано еще одно дополнительное ограничение на конфигурацию сетки: соседние ячейки могут отличаться не более чем в 2 раза.

Такой тип данных позволяет описывать адаптивные сетки различных конфигураций без использования лишней памяти. Этот формат будем называть *четверичным деревом*, по числу потомков родительской ячейки (см. рис. 1.7).

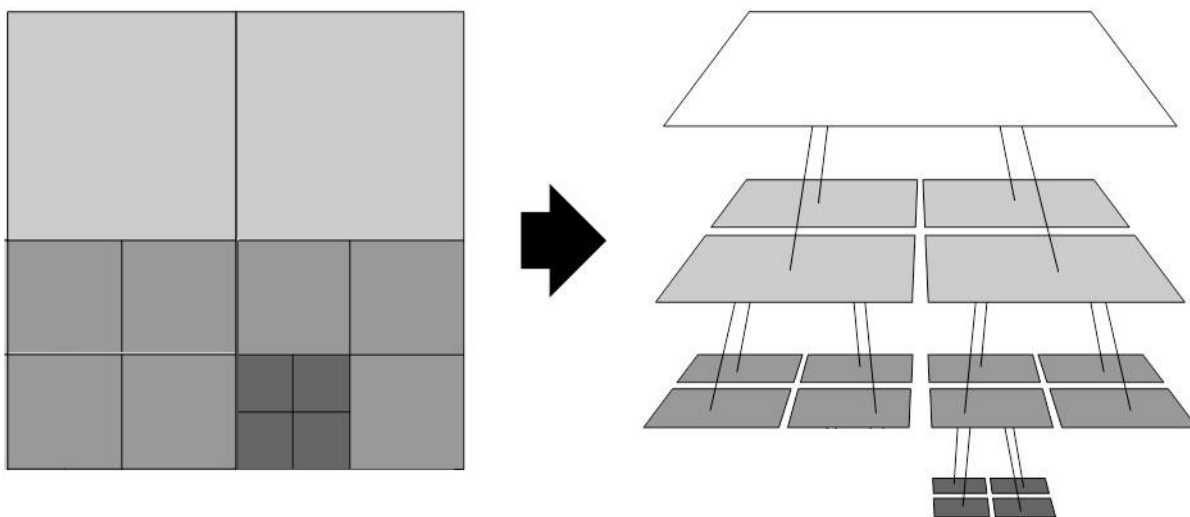


Рисунок 1.7 – Четверичное дерево как формат представления двумерной декартовой сетки с измельчением

Описанный выше формат характеризуется рядом особенностей, которые становятся очень полезными при разработке алгоритмов над описываемыми сетками.

Ячейка 1-го уровня с индексами (i, j) обязательно имеет своим родителем ячейку с индексами $([i/2], [j/2])$, где $/$ — операция целочисленного деления, а нумерация обоих индексов начинается с нуля, $i = \overline{0, M-1}; j = \overline{0, N-1}$.

Число соседей варьируется от 6 до 12, *прямых соседей* (вдоль осей) — от 4 до 8.

Если записать виртуальные координаты ячейки (i, j) на ее уровне lvl в двоичной системе счисления так, чтобы число знаков двоичной записи составляло lvl , то можно заметить следующее полезное свойство. Пара цифр, стоящих на k -й позиции двоичных записей индексов i и j , определяет положение k -го прародителя в ячейке k -1-го: $(0,0)$ — k -й прародитель является нижней и левой ячейкой ячейки k -1-го уровня, $(1,0)$ — верхней и левой, $(0,1)$ — нижней и правой, $(1,1)$ — верхней и правой соответственно.

Последнее свойство иллюстрируется рисунке 1.8. Для ячейки с $lvl = 2$ и $(i, j) = (1, 2)$, показанной оранжевым, двоичная запись виртуальных индексов есть $(01_2, 10_2)$. Первые цифры индексов — 0 и 1 — показывают, что сначала рассматривается нижний правый потомок базовой ячейки (бордовая стрелка), вторые цифры — 1 и 0 — адресуют ячейку как верхнего левого подпотомка выбранной ячейки 1-го уровня (белая стрелка).

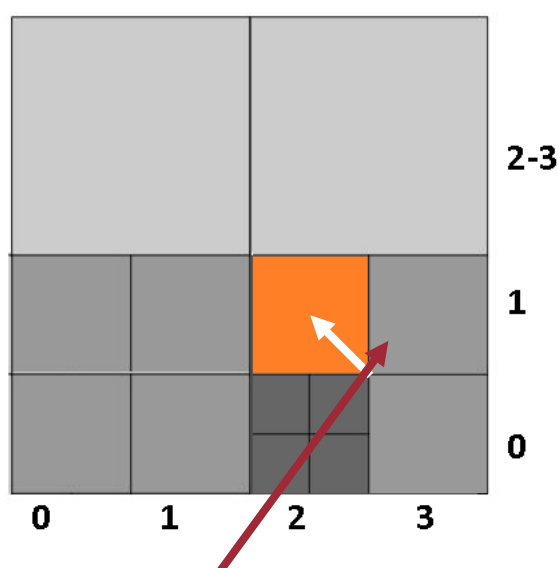


Рисунок 1.8 – Иллюстрация к определению адреса ячейки через двоичную запись ее виртуальных индексов на уровне адаптации

Таким образом, 3 адресных координаты ячейки (lvl, i, j) однозначно определяют топологическое положение рассматриваемой ячейки на многоуровневой локально-адаптивной сетке.

Обход квадратного массива (матрицы) деревьев, описанных выше, осуществляется простой процедурой: в двойном цикле обходятся все элементы базовой сетки, в случае если текущая ячейка является конечной (листовой), то применяем целевую функцию к ней, в противном случае вызываем процедуру для всех четырех потомков данной ячейки.

Для поиска соседей удобно пользоваться свойством 3 используемого формата данных из предыдущего раздела. Будем подразумевать, что ячейка обладает соседями, равными себе по размеру во все стороны вдоль каждой из осей. Если ее координаты (lvl, i, j) , тогда, например, правый сосед — $(lvl, i, j+1)$. При поиске ячейки с такими координатами (прохождении по определяемому координатами пути) возможны 3 случая: мы нашли такую ячейку и она *физическая* (листовая), она подразбитая, тогда правыми соседями исходной будут 2 левых потомка найденной. Если же мы не дошли до искомой ячейки и остановились на уровне $lvl-1$, то эта ячейка и будет правым соседом исходной, просто предыдущего уровня $lvl-1$.

Для случая двух уровней соседей текущей ячейки по каждой из осей можно получить простым оптимизированным перебором на основе половинного деления и умножения индексов, пользуясь только первым свойством описанных сеток.

1.2.2 Математическая модель и численный метод

Мы рассматриваем двумерное приближение математической модели газовой динамики, описанной в первом разделе главы. Запишем в векторном виде систему определяющих уравнений в консервативных переменных:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = 0,$$

где $\mathbf{Q} = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E)^T$ — вектор консервативных переменных, а $\mathbf{F}_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p \delta_k, \rho U_k U_y + p \delta_k, \rho U_k H)^T$, $k = x, y$ — векторы потоков по направлениям.

Эта система численно решается на временном шаге Δt на неподвижной декартовой сетке. Для этого используется метод конечного объема с приближенным решением задачи о распаде произвольного разрыва по Русанову [66] или точным — по Годунову [43].

Если расчетная сетка состоит одновременно из ячеек разных уровней (например, нулевого и первого), она становится неконформной, и насчитывать суммарные потоки через ячейку приходится по более сложной формуле:

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}} \left[\sum_{\sigma x} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} + \sum_{\sigma y} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \right], \quad (1.46)$$

где $\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n$ — значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня lvl с виртуальными индексами (i, j) на этом уровне на временном шаге с номером n . Потоки по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки, умноженные на соответствующие площади части границы.

Устойчивость оператора в правой части (1.46) обеспечивается переменным шагом по времени, который вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta t = K_{safe} \cdot (\Delta t)_{CFL}, \quad 0 < K_{safe} < 1,$$

где K_{safe} — коэффициент запаса, $(\Delta t)_{CFL}$ — максимальный курантовский шаг. $(\Delta t)_{CFL}$ пересчитывается по формуле:

$$\begin{aligned} (\Delta t)_{CFL} &= \min_{\Omega}(\tau_x, \tau_y), \\ \tau_i &= \min_{\Omega} \left(\frac{\Delta i}{c_0 + |U_i|} \right), \quad i = x, y, \end{aligned}$$

где Δi — пространственный шаг по i -му направлению в конкретной ячейке, c_0 — скорость звука в ячейке, минимум берется по всей расчетной области.

1.2.3 WENO проекторы решения на сетку нижнего уровня

При изменении конфигурации сетки необходимо как-либо заполнять обновленные ячейки данными. Объединение нескольких ячеек заведомо связано с потерей данных, и потому консервативное осреднение выглядит наилучшим решением. Однако при измельчении сетки необходимо заполнить новые ячейки данными, зная только информацию об их родителе и, возможно, его соседях. Простой снос значений из родительских ячеек в дочерние порождает ступенчатость в распределениях физических величин, нарушает гладкость самого численного решения и не позволяет получить более точное решение, чем то, каким оно было до измельчения.

Разумным выглядит применение некоторой гладкой интерполяции физических величин на основе некоторого окружения разбиваемой ячейки. Особенно актуальным является гладкое восполнение новоявленных потомков при использовании численных методов 2-го и больших порядков.

Для подсеточной реконструкции численных решений часто применяются методы на основе WENO-интерполяции [67], [68], не порождающие нефизических осцилляций газодинамических полей. С учетом физических особенностей решаемых задач необходимо, чтобы реконструкция оставалась консервативной, то есть суммы интегралов всех параметров по подъячейкам соответствовали интегралу старых значений этих же параметров по всей родительской ячейке.

Можно показать, что для удовлетворения требованию консервативности подходит только линейная реконструкция, при которой распределение величин внутри ячейки помимо значения в ее центре описывается еще величиной градиента.

Для построения линейно независимых шаблонов, по которым будут рассчитываться градиенты сеточной функции, рассматривается реальная конфигурация сетки в окрестности текущей ячейки. Ячейки-соседи нумеруются против часовой стрелки, начиная с правого нижнего (при отсутствии такового — с правого) соседа, заканчивая нижним правым (при отсутствии этого — нижним). Через точки — центры ячеек-соседей с подряд идущими номерами (1 и 2, 2 и 3 и т.д.) и центр текущей ячейки строятся шаблоны, которые опять же нумеруются против часовой стрелки с шаблона, образуемого центрами соседей 1, 2 и текущей ячейки. Последний шаблон получается на основе центра соседа под но-

мером 1 и соседа с наибольшим номером. Пример набора пронумерованных шаблонов представлен на рисунке 1.9.

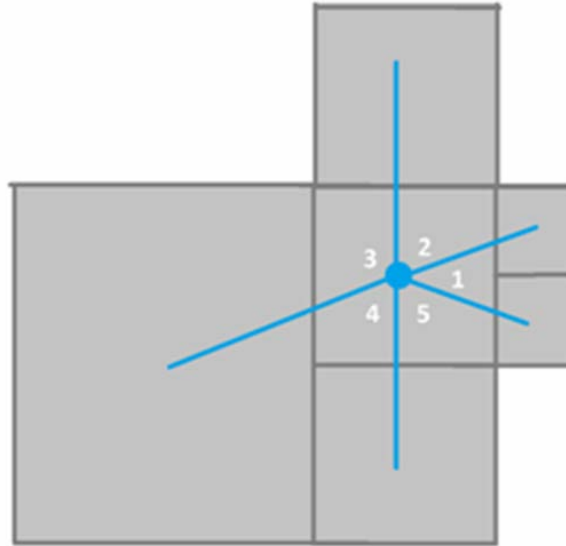


Рисунок 1.9 – Пример набора шаблонов для вычисления градиентов при расчете WENO-производной

По любым трем узлам на плоскости, не лежащим на одной прямой, можно составить единственный градиент. Например, для шаблона, образованного центрами соседних ячеек с номерами 1 и 2, при том что это правый верхний и верхний правый соседи соответственно, его можно вычислить следующим образом.

Пусть U — исследуемая консервативная величина, заданная сеточной функцией на некотором множестве узлов, U_0, U_1, U_2 — ее значения в узлах 0, 1 и 2 соответственно, Δx и Δy — линейные размеры ячейки с центром в узле 0, тогда можно составить следующую систему линейных уравнений относительно градиента

$$\nabla U_{102} = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{102}, \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{102} \right) = (U_{x,102}, U_{y,102}):$$

$$\begin{cases} U_0 + \frac{3}{4}\Delta x U_{x,102} + \frac{1}{4}\Delta y U_{y,102} = U_1, \\ U_0 + \frac{1}{4}\Delta x U_{x,102} + \frac{3}{4}\Delta y U_{y,102} = U_2 \end{cases},$$

откуда можно получить следующее выражение градиента:

$$(U_{x,102}, U_{y,102}) = \left(\frac{U_1 - 3U_2 + 2U_0}{2\Delta x}, \frac{U_2 - 3U_1 + 2U_0}{2\Delta y} \right).$$

Аналогично вычисляются оставшиеся градиенты.

Относительный вес шаблонов из каждой группы прямо пропорционален заматаемой шаблоном площади внутри рассматриваемой ячейки и обратно — расстоянию от центра привязки шаблона до центра ячейки.

Далее по каждому шаблону вычисляем градиент, итоговый считаем как взвешенную сумму градиентов по шаблонам с весами $\frac{1}{(\beta + \varepsilon)^2}$, где β — показатель гладкости (модуль градиента), ε — малое число, позволяющее избежать деления на ноль. В конце нормируем все веса так, чтобы их сумма равнялась единице. Итоговое выражение градиента есть сумма 8 градиентов по шаблонам с соответствующими нормированными весами.

1.2.4 Тестовые расчеты на двухуровневых сетках

Для демонстрации эффекта измельчения сетки с целью уточнения численных решений были проведены два расчета. В обоих использовалась квадратная область $[0;1] \times [0;1]$ с граничными условиями нулевой экстраполяции. Часть области выше главной диагонали ($y > x$) считалась на измельченной сетке, нижняя — на базовой. Размер базовой сетки — 200×200 ячеек. Здесь и далее все расчеты проводились с коэффициентом запаса K_{safe} , равным $1/2$.

Начальным условием первой задачи являются симметричные относительно разделяющей сетку диагонали точечные взрывы (круглые области радиуса $0,05$ в точках $(0,2; 0,8)$ и $(0,8; 0,2)$ с повышенным давлением $p = 10$). В остальной части примитивный вектор газодинамических переменных одинаков — $(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 0, 0, 1)$. На рисунке 1.10 показаны распределения давления и плотности в расчетной области на момент времени $t = 1$, на рис. 1.11 — распределения двух компонент скорости. Уже по этим данным видно, что двукратное измельчение сетки позволяет лучше улавливать фронты ударных волн, точнее описывать конфигурации газового течения.

Во второй задаче аналогичный точечный взрыв помещен в центр исходного квадрата. В качестве результатов представлены поля плотности и давления (рис. 1.12), а также срезы плотности и давления по второй диагонали квадрата (рис. 1.13).

Графики показывают, что результат расчета на мелкой сетке более гладкий, профили давления и плотности получаются более четкими, пики — большими по амплитуде. По срезам хорошо видна и количественная разница между двумя результатами.

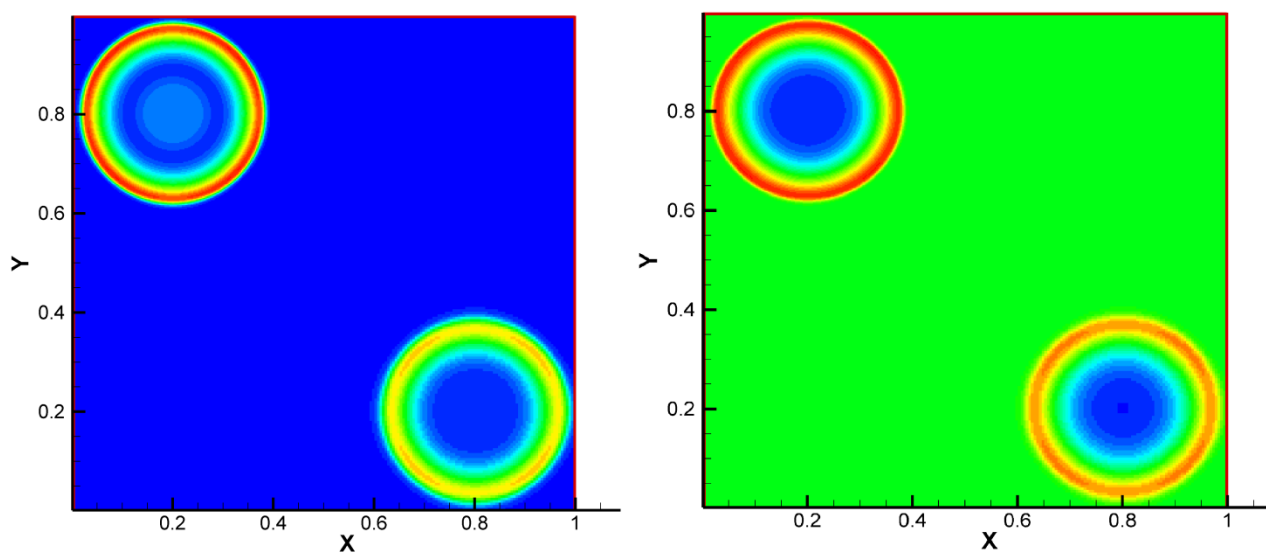


Рисунок 1.10 – Поля давления (слева) и плотности (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (200×200 ячеек, ниже главной диагонали) и мелкой (400×400 ячеек, выше главной диагонали) сетках

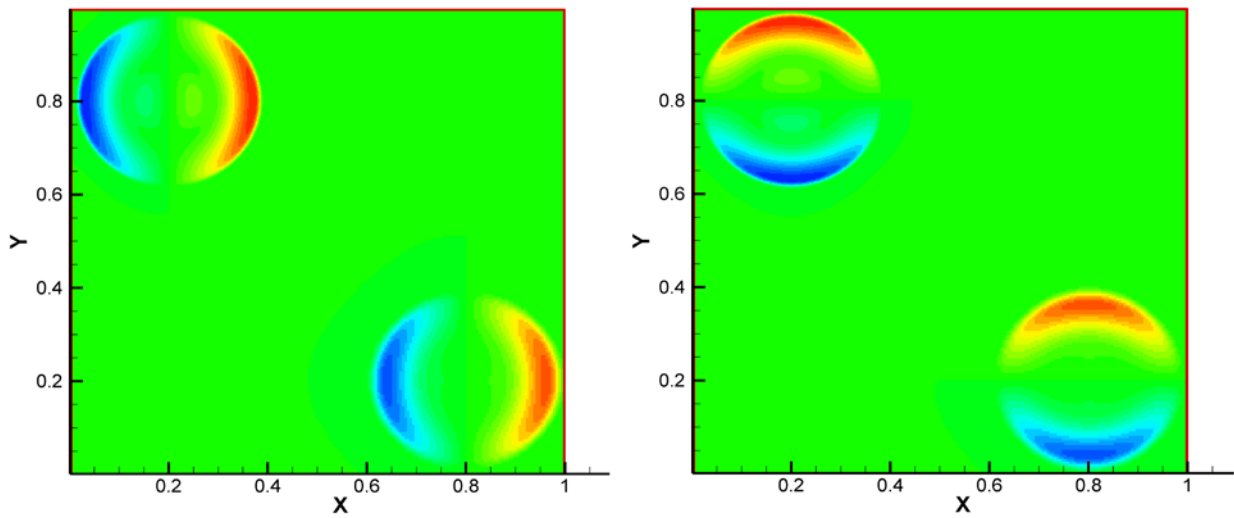


Рисунок 1.11 – Поля скоростей U_x (слева) и U_y (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (ниже главной диагонали) и мелкой (выше главной диагонали) сетках

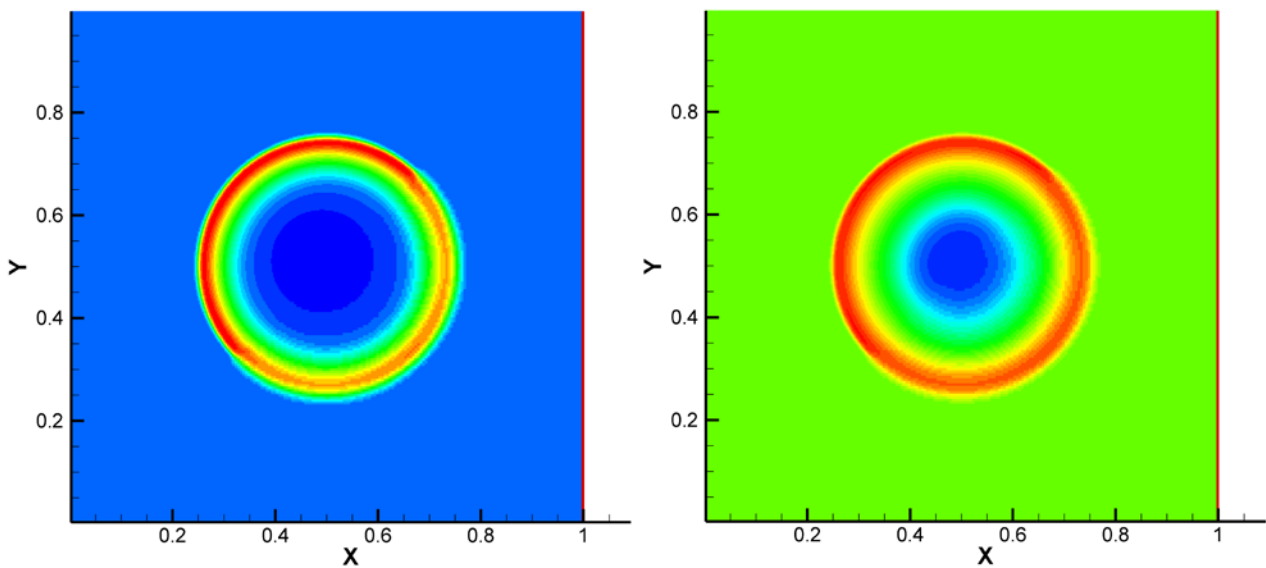


Рисунок 1.12 – Поля давления (слева) и плотности (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (ниже главной диагонали) и мелкой (выше главной диагонали) сетках

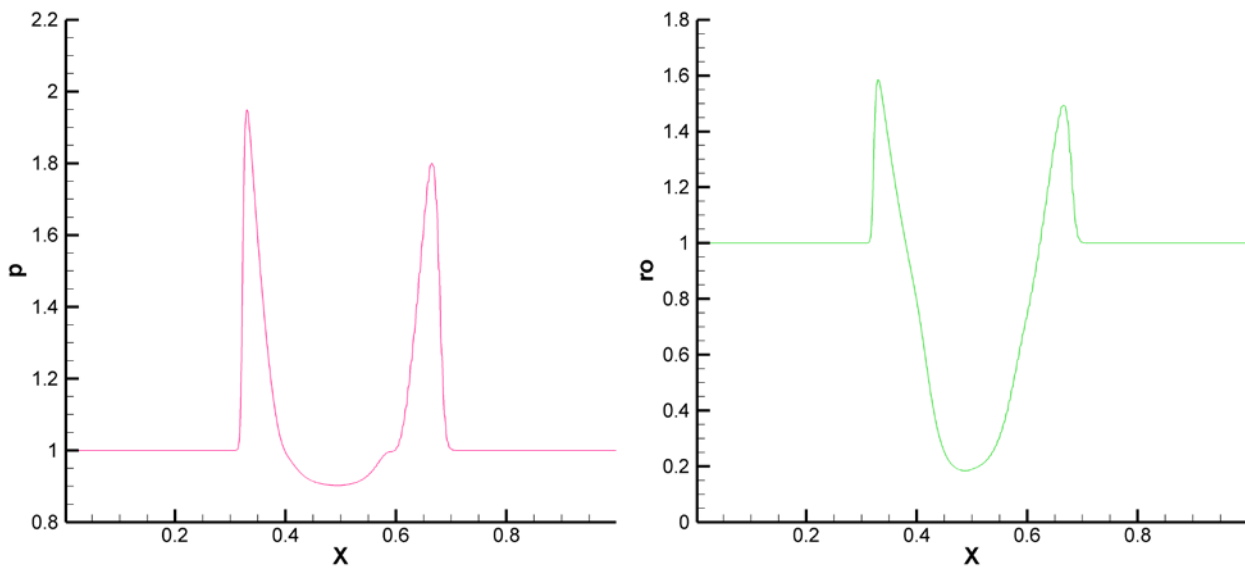


Рисунок 1.13 – Срезы давления (слева) и плотности (справа) урвней вдоль второй диагонали квадрата

Для тестирования различных численных методов часто используется задача о сильном точечном взрыве (задача Седова [69]). Ее постановка выглядит так: в центре бесконечной области, заполненной неподвижной средой плотности ρ_1 с давлением p_1 вкладывается энергия E_0 .

Задача связана с распространением сильных ударных волн и имеет аналитическое решение. При сравнительно малой величине начального давления относительно плотности соотношения на ударной волне можно записать так:

$$\begin{cases} U_2 = \frac{2}{\gamma+1}c, \\ \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \\ p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1c^2 \end{cases}$$

Точное решение задачи для случая цилиндрической симметрии, моделируемого в данной работе, выражается в виде закона движения и формулы скорости ударной волны:

$$r_2(t) = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/4} \sqrt{t},$$

$$c(t) = \frac{1}{2r_2(t)} \sqrt{\frac{E}{\rho_1}},$$

где $E_0 = \alpha E$, а множитель α можно получить из соотношения

$$r_2 = \left(\frac{\alpha E_0}{\rho_1}\right)^{1/4} t^{2+\nu}.$$

Для оценки качества численного решения нас особенно интересуют положение ударной волны и величина пика плотности на ней. Можно подобрать величину заряда и начальные условия так, что аналитическое решение задачи через некоторый момент времени будет соответствовать целым значениям параметров. Например, при $\rho_1 = 1$, сравнительно малой числовой величине начального давления и вложенной энергии $E_0 \approx 0,244816$ в момент времени $t = 1$ ударная волна будет находиться на расстоянии $r_2 = 1$ от эпицентра взрыва и величина плотности на ней будет близка к $\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$, т. е. для используемого в расчетах $\gamma = 1,4$ имеем $\rho = 6$.

Для расчета задачи Седова ставится начально-краевая задача в квадратной области $[-1, 2; 1, 2] \times [-1, 2; 1, 2]$. Во всех ячейках устанавливается поле примитивных переменных $(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 0, 0, 10^{-6})$, на границах — условие свободного протекания. Рассматривается базовая сетка размером 200×200 ячеек. В круге радиуса 0,1 от начала координат устанавливается другое значение плотности, соответствующее суммарно вложенной энергии 0,244816, равномерно распределенной по данному кругу. Ячейка считается попавшей в круг, если ее центр попал внутрь. Рассматриваются 2 типа сеток: базовая и адаптивная (ее конфигурация изменяется по ходу расчета согласно полю индикаторов). Для расчетов на адаптивной сетке в области повышенной плотности ячейки предварительно измельчаются, подсчет индикаторов проводится по полю плотности.

Сначала сравним два подхода к расчету на адаптивных сетках методом «укрупнения мелкой сетки». В данном разделе будем говорить о критериях анализа сеточных решений на основе вейвлет-анализа. Подробное описание самих критериев будет представлено в Главе 2. В первом случае значения с грубой сетки сносятся на соответствующие ячейки мелкой сетки (рис. 1.14), а во втором случае обеспечивается гладкий переход за счет использования обратного вейвлет-преобразования (рис. 1.15). Как видно из рисунков, при сносе возникают дополнительные шумы и артефакты, что связано с возникновением особенностей на границах ячеек. Далее при использовании индикатора на основе В-вейвлетов будет использоваться только второй подход.

Уменьшить количество артефактов можно за счет подбора порога чувствительности (рис. 1.16, 1.17). Однако подобрать порог так, чтобы сетка адаптировалась только к фронту ударной волны, не удастся.

Сравним полученные результаты с результатами расчетов, в которых в качестве индикатора гладкости использовался детектор на основе вейвлетов Добеши. Формирование индикаторов при этом производится по данным, заданным на грубой сетке, что соответствует подходу к адаптации, который мы обозначили как «измельчение грубой сетки». Результаты расчетов с порогами чувствительности 0.001, 0.005 и 0.01 представлены на рис. 1.18, 1.19 и 1.21 соответственно. Число разбиваемых и неразбиваемых ячеек базовой сетки составляет (9544, 30456), (3292, 36708) и (3284, 36716) соответственно. Как видно, ширина локализации ударной волны практически не зависит от величины порога, это объясняется тем, что детектор основан на локализации определенных структур: нулей и локальных максимумов модуля, больших порога. Тем не менее, при малом значении порога возникают дополнительные «артефактные» области адаптации сетки (рис. 1.18).

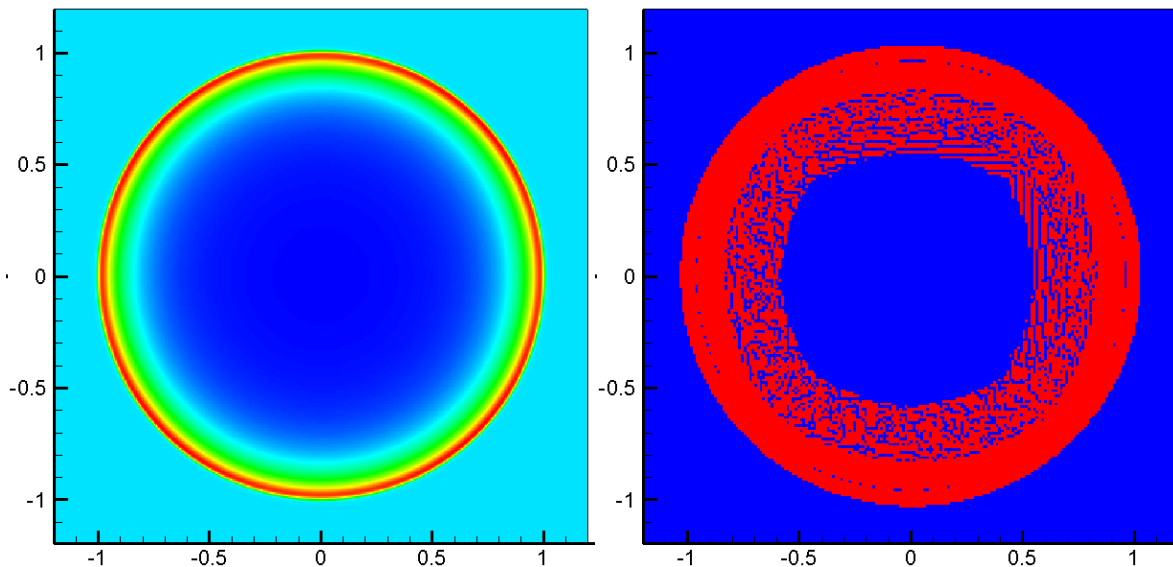


Рисунок 1.14 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов и сносе значений из ячейки грубой сетки на четыре ячейки мелкой сетки

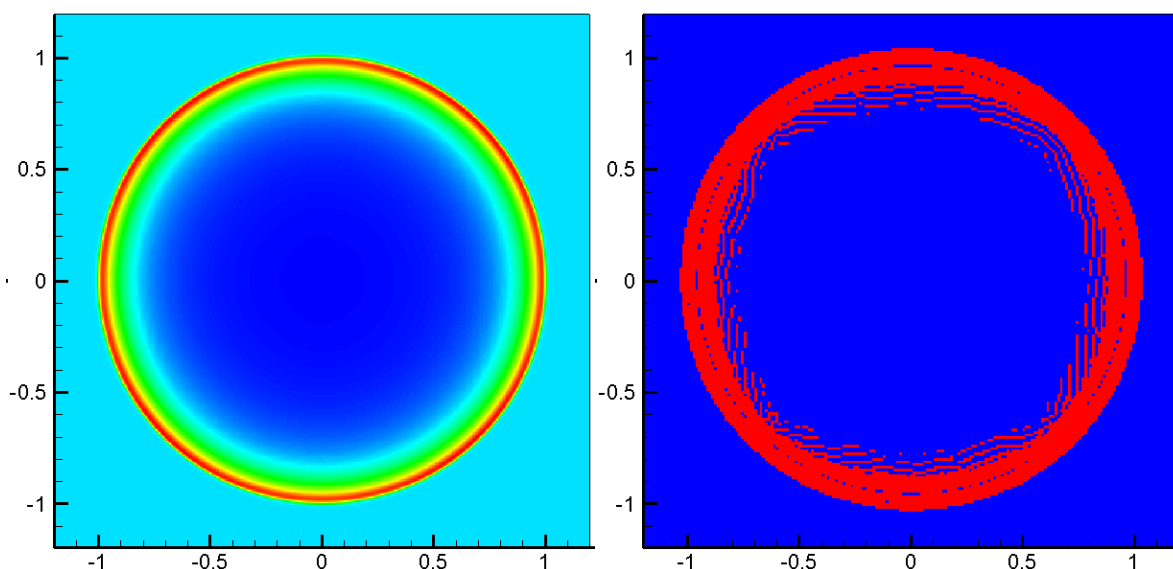


Рисунок 1.15 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов и гладком переносе значений из ячеек грубой сетки на ячейки мелкой сетки

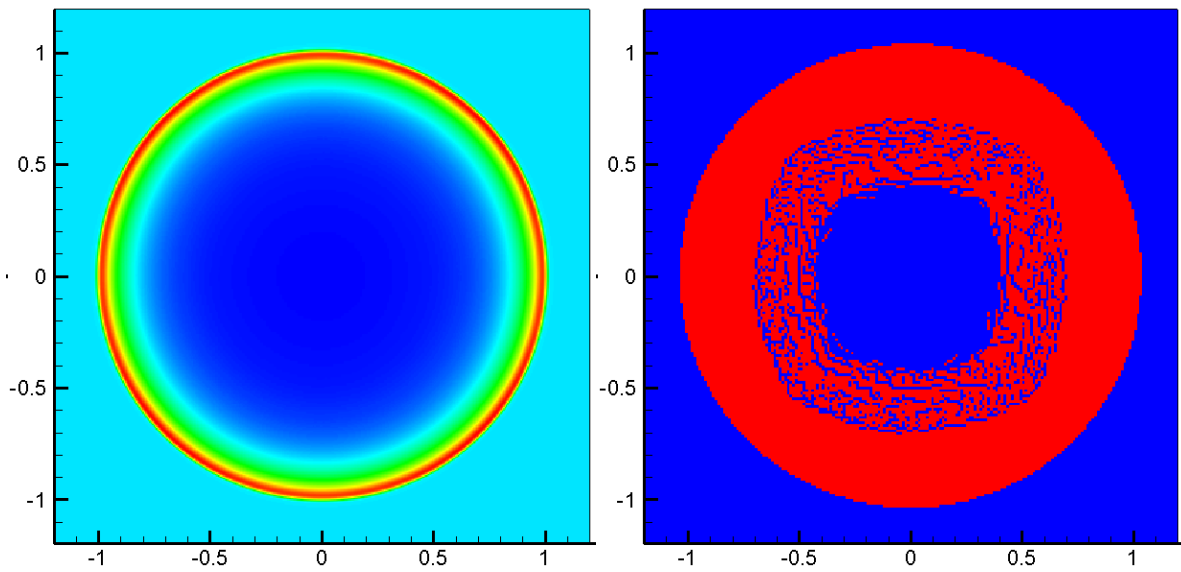


Рисунок 1.16 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов с порогом чувствительности 0.001

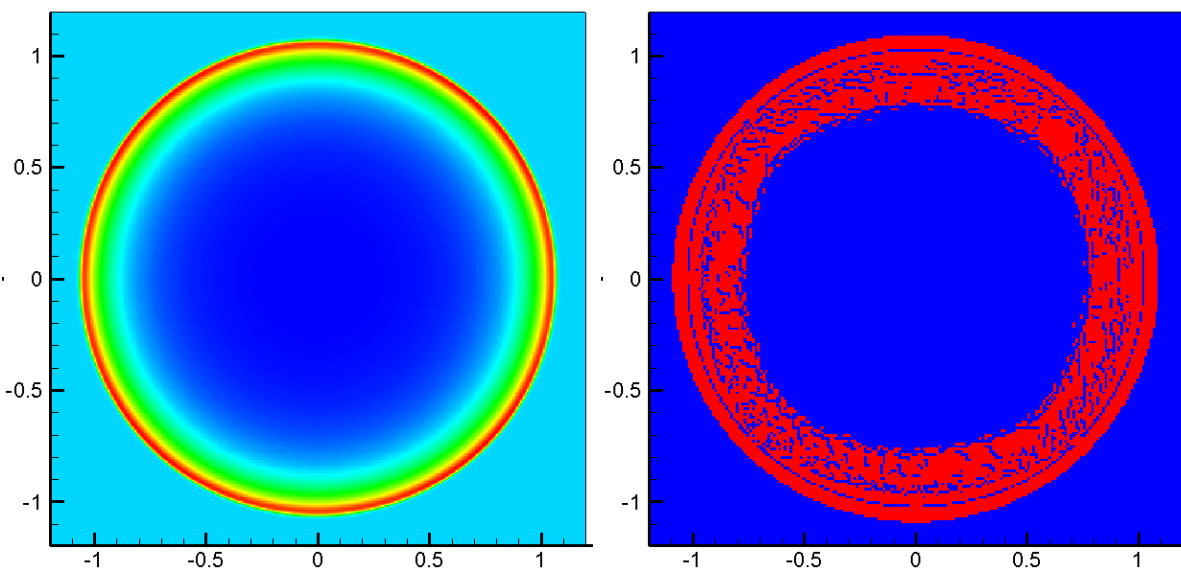


Рисунок 1.17 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов с порогом чувствительности 0.01

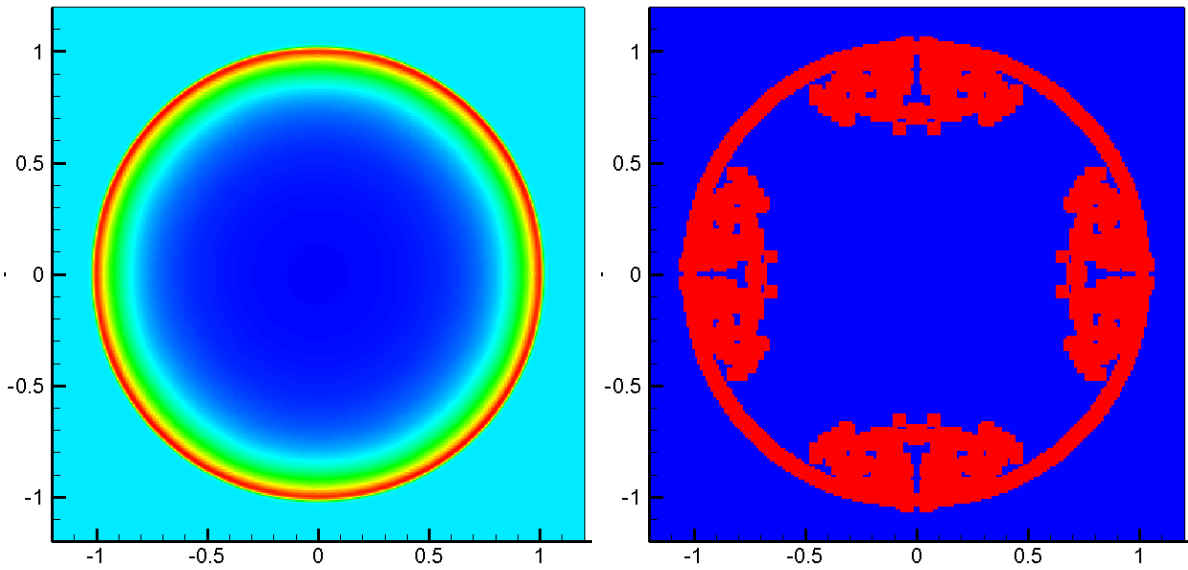


Рисунок 1.18 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.001

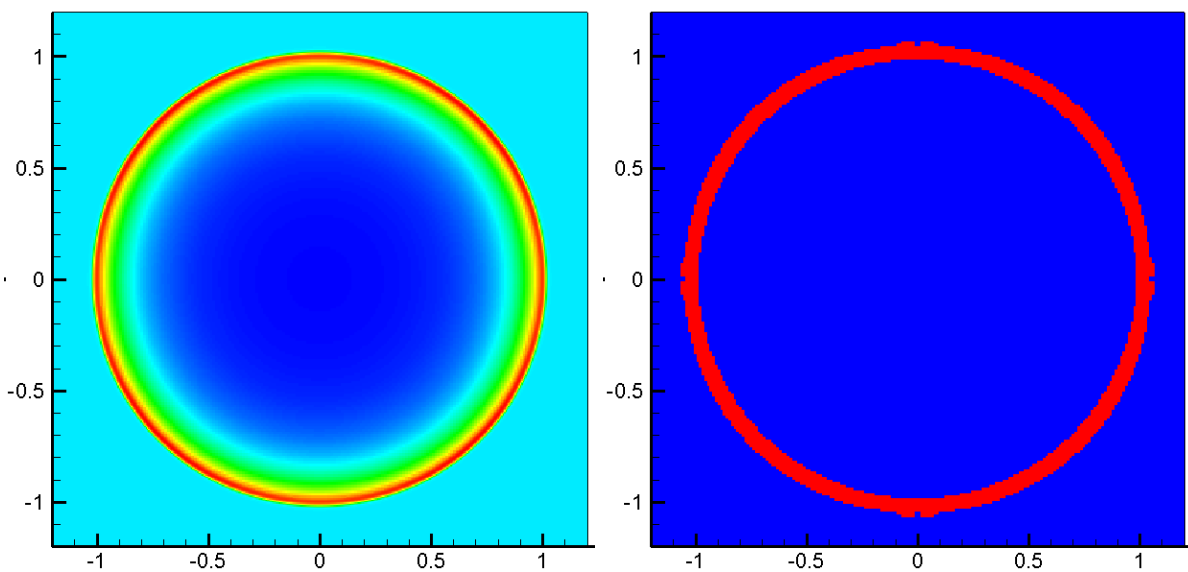


Рисунок 1.19 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.005

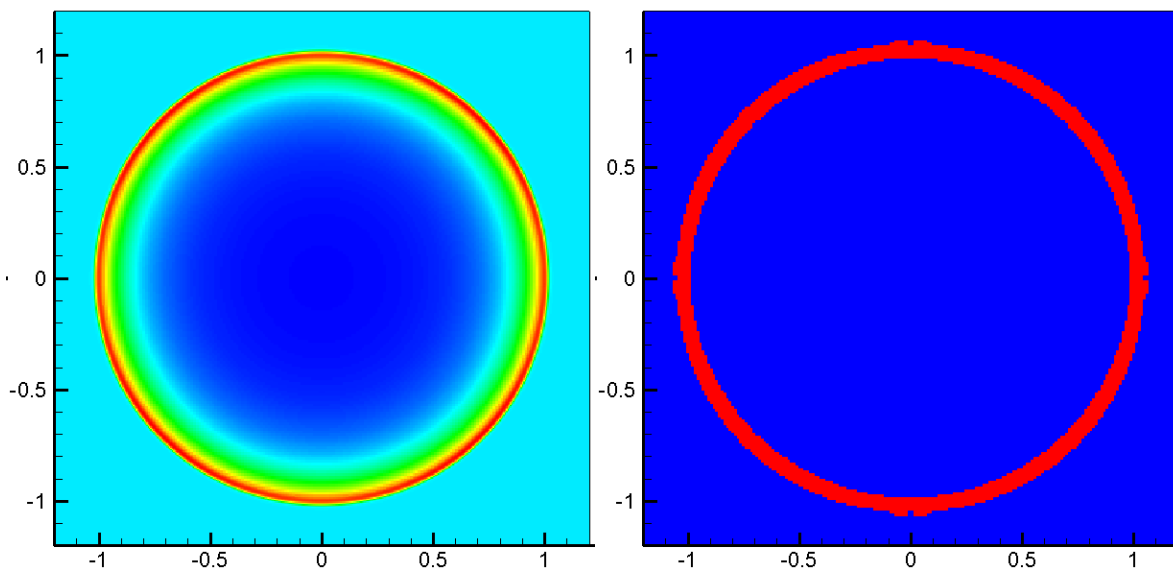


Рисунок 1.20 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.01

Для исследуемой задачи индикатор на основе вейвлетов Добеши обеспечивает наилучшую адаптацию (в том смысле, что все особенности локализуются на минимальном количестве ячеек исходной сетки). Тем не менее, индикатор на основе В-вейвлетов также позволяет локализовать все особенности, хотя при этом выделяется и большое количество артефактов. Наличие артефактов на практике приводит к построению неоправданно мелкой сетки и замедлению счета.

В заключении продемонстрируем, что индикаторы гладкости являются лишь инструментом и отображают лишь текущее состояние расчета. Так при численном моделировании задачи Седова методом Годунова возникает эффект карбункула [70], который порождает особенности на осях $x = 0$, $y = 0$. И хотя индикатор правильно локализует положение ударной волны и даже дополнительно измельчает сетку в окрестности карбункула, а это не помогает избавиться от алгоритмической особенности только за счет адаптации расчетной сетки.

Кроме того, был проведен расчет с несимметричной конфигурацией (взаимодействие точечных взрывов разной интенсивности). Расчеты проводились, как и для предыдущего раздела, на трех типах сетки: базовой, мелкой и адаптивной. Базовый размер сетки был равен 500×500 . Полученные распределения плотностей и флагов адаптации по окончании расчета на сетке с динамической

локальной адаптацией представлены аналогично предыдущим рисункам на рис. 1.21. Адаптация проводилась по полю плотностей, представленному на изображении, порог обнуления вейвлет-коэффициентов полагали равным $h/4$.

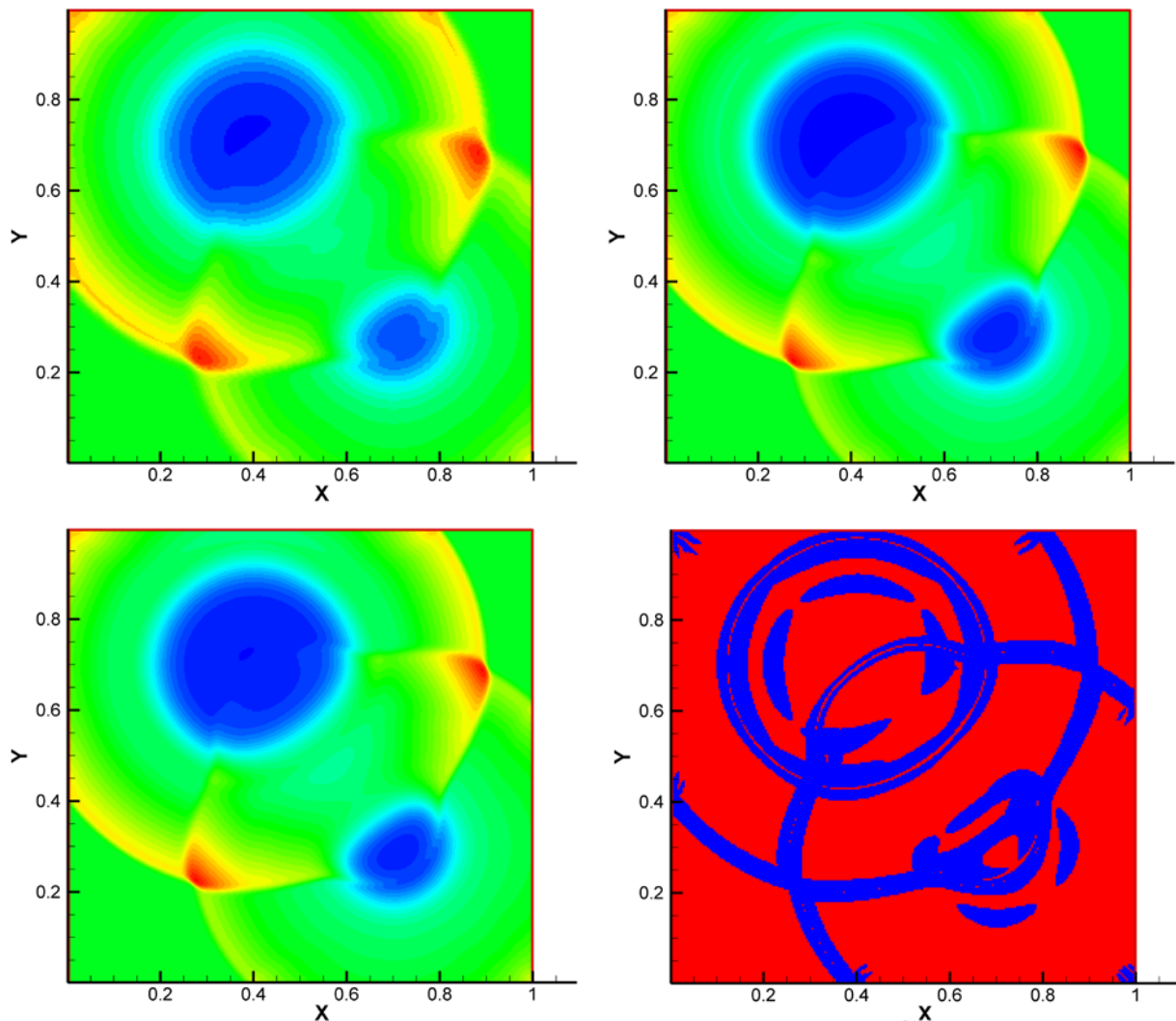


Рисунок 1.21 – Поля плотностей на базовой (слева сверху), мелкой (справа сверху) и адаптивной (слева внизу) сетках, флаги адаптации (внизу справа) после расчета на динамически адаптивной сетке для задачи взаимодействия точечных взрывов

1.2.5 Многоуровневая адаптация сетки на основе вейвлет-анализа

При работе с многоуровневыми расчетными сетками возникает потребность в индикаторах, сигнализирующих о необходимости перестроения сетки. Используемые для данной задачи алгоритмы должны быть хорошо локализованы (на вход анализатора подаются только данные в самой исследуемой ячейке

и нескольких ее соседях), что связано как с многоуровневостью, так и с необходимостью параллелизации. В работе предлагаются два индикатора гладкости (на крестовом и квадратном шаблонах), основанных на использовании В-вейвлетов.

Параметрами при анализе являются величины (k, p) , где k — порядок В-сплайнов, которые используются в анализе, а p — число нулевых моментов вейвлета.

Низкочастотный фильтр $\{\beta_i\}$ задается обычным образом (см. [111])

$$\beta_i = 2^{-k-1} \binom{k+1}{i}, \quad 0 \leq i \leq k+1.$$

Определим семейство В-сплайнов порядка k , заданных на множестве целых точек:

$$B_j^k = B^k(j, j+1, \dots, j+k, j+k+1), \quad 0 \leq j < p,$$

и определим В-сплайн по полуцелым точкам:

$$\tilde{B}^k = B^k \left(\left(p + \left[\frac{k}{2} \right] \right) / 2, \left(p + \left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) / 2, \dots, \left(p + \left[\frac{k}{2} \right] + k + 1 \right) / 2 \right).$$

Высокочастотный фильтр $\{\alpha_i\}$, $0 \leq i < p$ определяется из условия, что функция $W^k = \tilde{B}^k - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j B_j^k$ имеет p нулевых моментов.

Более подробное описание анализатора можно найти в главе 2.

Квазиодномерный анализ. В этом случае на вход анализатора подается дискретный набор данных $\{a_{i,j} = f(x_i, y_j)\}$, $i, j = 0, 1, \dots, 2p+k-1$. При этом в исследуемой ячейке задано значение $f(x_\nu, y_\nu)$, где индекс $i = j = \nu := \left[\frac{2p+k}{2} \right]$. Этими данными могут быть, например, значения плотности или давления, заданные в центрах ячеек одного уровня. Кроме того, задается порог чувствительности $\theta > 0$. Для получения массива ячеек одного уровня производится осреднение или снос значений функции f с ячеек других уровней. Анализируемая ячейка является центром креста. Крест передается в анализатор как два массива, со-

ответствующие вертикальной $\{a_{v,i}\}$ и горизонтальной $\{a_{i,v}\}$ частям креста. Далее вычисляется свертка с низкочастотным фильтром:

$$H_m = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j a_{v,2m+j}, \quad 0 \leq m < p,$$

а затем определяется величина

$$r_{hor} = a_{v,v} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_j,$$

аналогично вычисляется r_{ver} . Если $(|r_{ver}| > \theta)$ или $(|r_{hor}| > \theta)$, то считается, что точность решения в окрестности исследуемой ячейки недостаточна и счет надо вести на более мелкой сетке, т.е. эту ячейку следует разбить.

Анализ на квадратном шаблоне. На вход анализатора подаются данные, заданные в ячейках одного уровня, и порог чувствительности θ . Центром квадрата является анализируемая ячейка. Квадрат передается в анализатор в виде матрицы $\{a_{i,j}\}$, $0 \leq i < 2p+k$, $0 \leq j < 2p+k$. Размер этой матрицы определяется выбранным при построении фильтров порядком гладкости k и числом p нулевых моментов вейвлета. При этом исследуемой ячейке соответствует индекс (v,v) , где $v = \left\lfloor \frac{2p+k}{2} \right\rfloor$.

Вычисляем свертку с низкочастотным фильтром:

$$H_{i,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j a_{i,2m+j}, \quad 0 \leq m < p, \quad 0 \leq i < 2p+k.$$

Затем находим:

$$r_{i,p} = a_{i,v} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_{i,j}.$$

Затем аналогичные вычисления производятся по столбцам:

$$r_{q,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j H_{2q+j,m}, \quad 0 \leq q < p, \quad 0 \leq m \leq p.$$

$$r_{p,p} = H_{v,p} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_{j,p}.$$

Если выполнено хотя бы одно из условий $(|r_{p,p}| > \theta), (|r_{v,p}| > \theta), (|r_{p,v}| > \theta)$, то считается, что точность решения в окрестности исследуемой ячейки недостаточна и счет надо вести на более мелкой сетке, т.е. эту ячейку следует разбить.

Анализатор рассматривается как черный ящик, выдающий 1, если ячейку надо измельчить, и 0, если не нужно. Для любой ячейки черный ящик работает для некоторого локального окна (креста с центром в ней из 5 ячеек одного уровня с исследуемой и сторонами вдоль осей или квадрата со стороной 5 ячеек и центром в заданной). Перед анализом данные сносятся на текущий уровень и, если элемент этого уровня является частью большей ячейки, берется значение из нее, а если состоит из ячеек следующего, то проводим осреднение по четырем ячейкам. В данном случае применять консервативное осреднение и специфическую подсеточную реконструкцию нецелесообразно, так как для анализа решения высокая точность значений не нужна, поскольку в дальнейшем счете это проектирование не используется и на результатах итогового расчета это проектирование не сказывается. Тонкости вейвлет-анализа, применяемые при построении анализатора сеточного решения по численным данным с анализируемых шаблонов, представлены в главе 2. При описании алгоритмов достаточно рассматривать процедуру определения значения критериев измельчения и огрубления сетки как «черный ящик».

Алгоритм, формирующий конфигурацию сетки, адекватную соответствующую текущему сеточному полю некоторой физической величины, основан на следующем порядке действий.

1. Сначала проводится процедура огрубления сетки: те ячейки, которые можно сделать более крупными, согласно вейвлетному анализатору объединяем в одну ячейку без нарушения имеющейся структуры дерева. В цикле на уровнях начиная с первого (т.е. с предпоследнего перед нулевым, базовым) ищем виртуальные ячейки, которые могут быть огрублены (имеют четырех физических потомков) и удовлетворяют критерию огрубления (черный ящик для ячейки-родителя выдает ноль).

2. Следом осуществляется процедура измельчения сетки. Проходим по уровням с нулевого до предпоследнего, ищем на них физические ячейки, для

которых выполняется критерий измельчения (черный ящик выдает единицу), и делим их на 4 части.

3. Далее проводится процедура сглаживания сетки: удаляются все несоответствия введенному ограничению, что соседние ячейки должны отличаться не более чем на один уровень. В цикле, на уровнях начиная с предшествующего второму ищем ячейки, у которых соседи крупнее более чем в 2 раза, и мельчим их до нужного уровня.

1.2.6 Тестовые расчеты с многоуровневой адаптацией

Задача Л.И. Седова о сильном взрыве. Результаты работы данного алгоритма продемонстрированы на примере расчета задачи Л. И. Седова [69] с 4 и 6 (рис. 1.22) уровнями адаптации в виде итогового поля плотности и конфигурации сетки, показанной величиной уровня. В таблице 3 представлена статистика, демонстрирующая эффективность использования адаптивных сеток. Задача Л. И. Седова описывает сильный точечный взрыв внутри сравнительно большой области. В центральной точке области вводится заряд. Можно подобрать его энергию так, что ударная волна будет достигать радиуса 1 в момент времени 1. Данная задача имеет аналитическое решение: при сравнительно малой начальной плотности по области плотность среды на ударной волне будет стремиться к 6.

Таблица 3. Статистика по расчетам задачи Л. И. Седова на многоуровневой сетке с локальной адаптацией

Уровни	4	6
Базовая	50 x 50	50 x 50
Подробная	800 x 800	3200 x 3200
Итоговая	40552 (6,34 %)	589708 (5,76 %)
Пик плотности	4.316	5.287
Время счета	72.9 с.	5270 с.

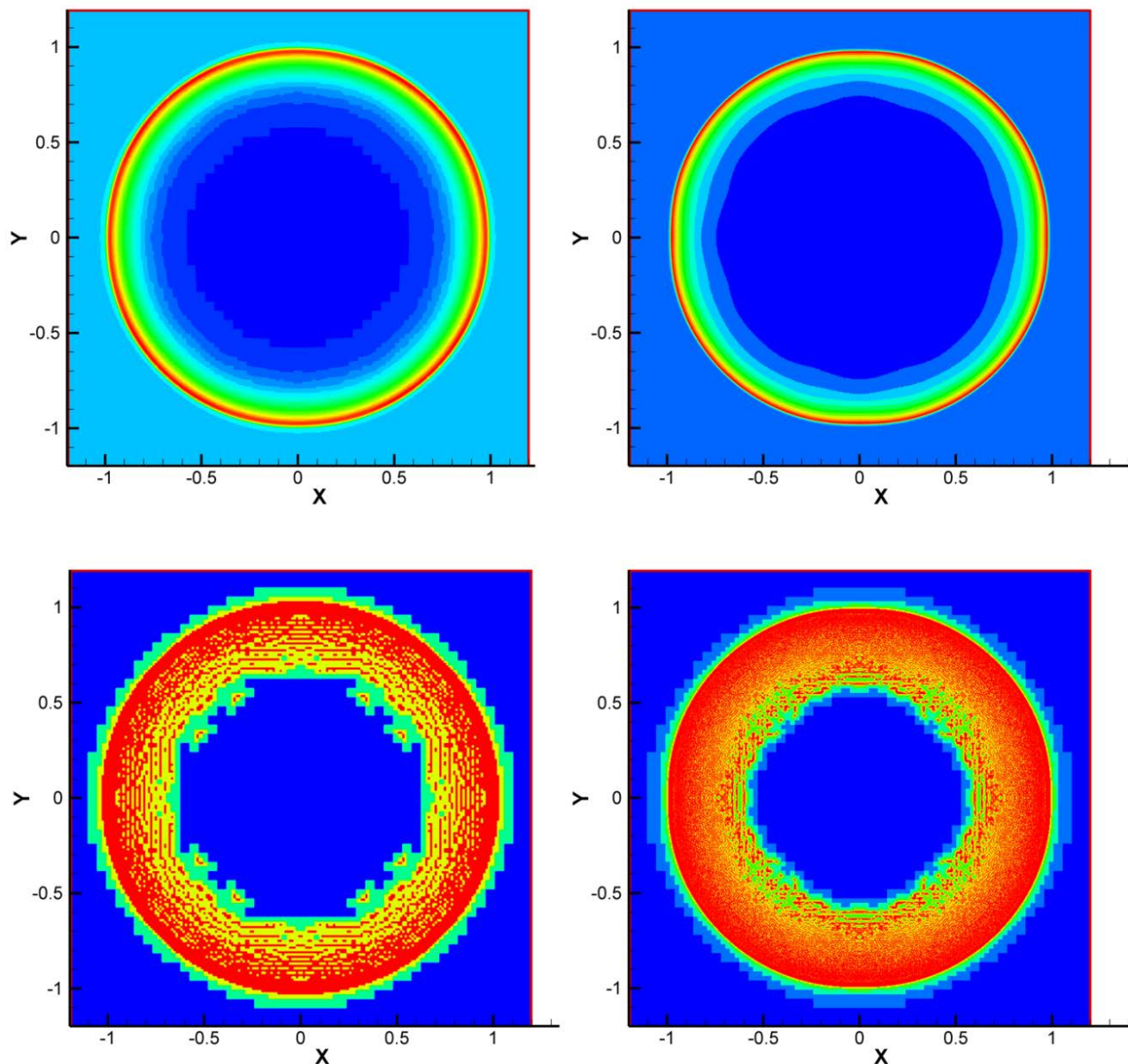


Рисунок 1.22 – Результаты расчетов задачи Л. И. Седова (верхний ряд — поля плотности) на многоуровневой адаптивной сетке и соответствующие им конфигурации расчетных сеток на конец расчета (от синего к красному показан уровень физической ячейки). Левый столбец — 4 уровня адаптации, правый — 6 уровней, базовая сетка 50x50

С увеличением числа уровней адаптации значительно увеличивается точность расчетов (плотность на ударной волне приближается к величине полученной аналитически), уменьшается процент ячеек от максимально возможного при заданном числе уровней, что говорит о лучшей локализации особенностей

решения. Все расчеты проводились с потоками, вычисленными по В. В. Русанову, во избежание проявления эффекта карбункула, см. [70].

Газодинамические тесты Лиски-Вендрофа. Для демонстрации большего количества возможностей и особенностей представленного алгоритма, а также валидации программного кода были проведены расчеты газодинамических тестов Лиски-Вендрофа [71]. Схема всех тестов одинакова и предельно проста: рассматривается квадратная область $[0; 1] \times [0; 1]$, которая разбивается на 4 равных квадрата серединными перпендикулярами к сторонам. Образуются 4 подобласти, помечаемые индексами UL, UR, LL, LR по английским аббревиатурам для верхней левой, верхней правой, нижней левой и нижней правой частей соответственно. В каждой части устанавливаются свои значения начальных данных. Перебрав различные сочетания соотношений газодинамических компонент в подобластях, можно получить разнообразные конфигурации решений и численные эффекты, поэтому данные тесты активно используются при валидации и оценке качества двумерных вычислительных кодов.

Наиболее интересными с точки зрения конфигурации итогового решения и ввиду большого количества особенностей, которые сложно достигаются при численном моделировании, выглядят тесты №6 и №16. Их формулировка такова.

Тест № 6:

Начальные условия для $V = (p, \rho, U_x, U_y)$ по квадрантам такие:

$$\begin{aligned} V_{UL} &= (1, 2, 0.75, 0.5), & V_{UR} &= (1, 1, 0.75, -0.5), \\ V_{LL} &= (1, 1, -0.75, 0.5), & V_{LR} &= (1, 3, -0.75, 0.5). \end{aligned}$$

Рассматривается решение на момент времени $t = 0.3$. Для данной задачи характерно образование вихрей вдоль центральных осей квадрата.

Тест № 16:

Аналогичные данные для этого теста таковы:

$$\begin{aligned} V_{UL} &= (1, 1.0222, -0.6179, 0.1), & V_{UR} &= (0.4, 0.5313, 0.1, 0.1), \\ V_{LL} &= (1, 0.8, 0.1, 0.1), & V_{LR} &= (1, 1, 0.1, 0.8276). \end{aligned}$$

$t = 0.2$

Этот тест отличается особой зоной низкой плотности возле точки $(0,5; 0,6)$, которая получается ясно выраженной при расчете далеко не всеми газодинамическими кодами.

Моделирование данных тестов было проведено с использованием различного числа уровней адаптации по методам С. К. Годунова и В. В. Русанова. Увеличение числа уровней адаптации при использовании метода С. К. Годунова позволяет даже при первом порядке пространственной аппроксимации выявить эффекты неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для теста №6 (см. рис. 1.23) вдоль координатных осей и зону разрежения для теста №16 (см. рис. 1.24). Расчеты с применением русановских потоков даже при большом числе уровней адаптации (максимальный, представленный здесь равен 7) не показывают эти особенности.

Таблицы 4 и 5 демонстрируют показатели эффективности предложенного алгоритма. Для обоих тестов процент счетных ячеек уменьшается, а значит, повышается локализация наиболее интересных участков. При этом время увеличивается далеко не так сильно, как было бы при использовании равномерной сетки повышенного разрешения.

Таблица 4. Статистика по расчетам теста Лиски-Вендрофа №6 на многоуровневой сетке с локальной адаптацией

Число уровней адаптации	Время счета, с	Число ячеек	Процент числа ячеек от максимально возможного
7 уровней	36783	1881120	18,4%
5 уровней	1140	157048	24,5%
3 уровня	25	13507	33,8%
Русанов, 7 уровней	5491	1793462	17,5%

Таблица 5. Статистика по расчетам теста Лиски-Вендрофа №16 на многоуровневой сетке с локальной адаптацией

Число уровней адаптации	Время счета, с	Число ячеек	Процент числа ячеек от максимально возможного
6 уровней	1364	131355	5,1%
3 уровня	10	5011	12,5%

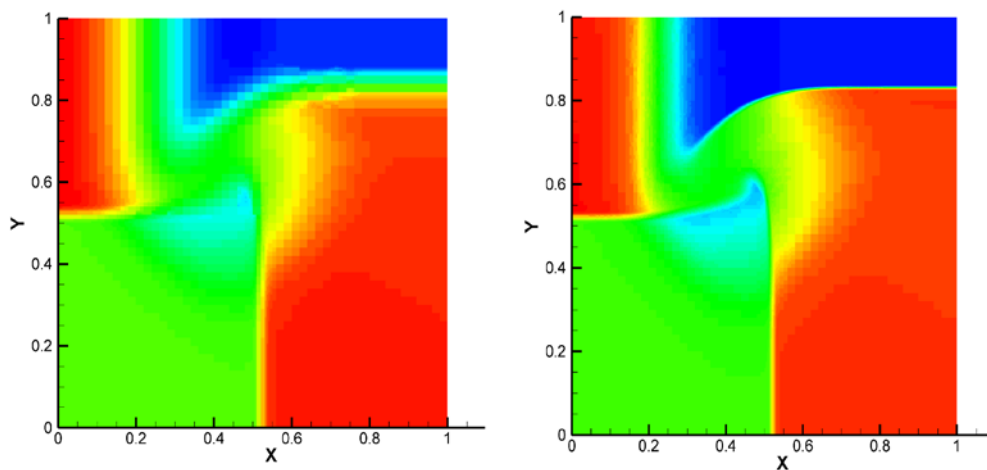


Рисунок 1.23 – Расчетные поля плотности для теста Лиски-Вендрофа №16 при использовании метода С. К. Годунова с 3 уровнями адаптации (слева) и 6 уровнями адаптации (справа) при базовой сетке 50x50 ячеек

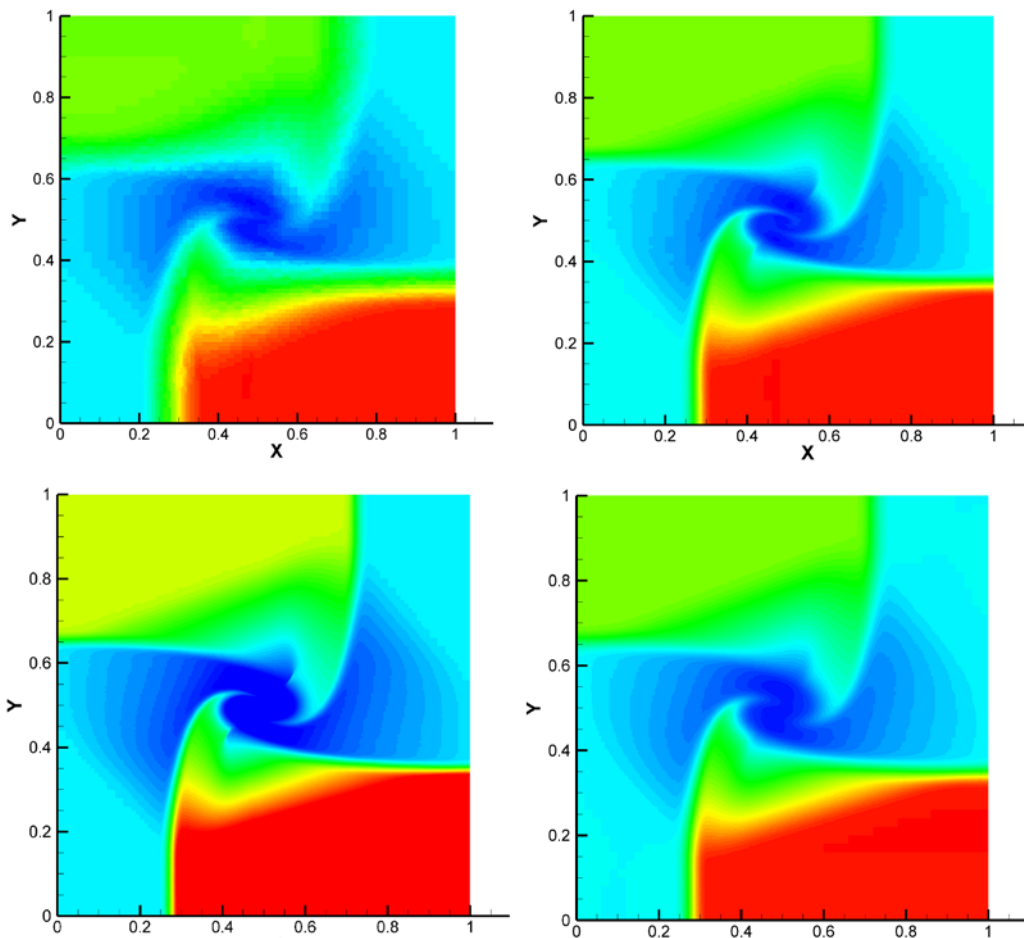


Рисунок 1.24 – Расчетные поля плотности для теста Лиски-Вендрофа №6 при использовании метода С. К. Годунова с 3 уровнями адаптации (слева сверху), 5 уровнями адаптации (справа сверху), 7 уровнями адаптации (слева внизу) и метода В. В. Русанова с 7 уровнями адаптации при базовой сетке 50x50 ячеек

1.2.7 Метод свободной границы на ЛАД сетках

Для интегрирования по времени уравнения (1.37) нужно использовать неявную схему, чтобы не накладывать жесткие ограничения на шаг по времени из-за объемной доли ω_f , которая в некоторых пересекаемых ячейках может быть, вообще говоря, сколь угодно малой величиной. Это приводит к следующей системе дискретных уравнений:

$$q^{n+1} = q^* - \frac{\Delta t s_f}{V \omega_f} F(q^{n+1}); \quad (1.47)$$

$$q^{n+1,s+1} = q^{n+1,s} - \left[\frac{\Delta t s_f}{V \omega_f} A(q^{n+1,s}) + I \right]^{-1} \left(q^* - q^{n+1,s} - \frac{\Delta t s_f}{V \omega_f} F(q^{n+1,s}) \right). \quad (1.48)$$

Уравнение (1.47) мы решаем итеративно методом Ньютона (1.48) с первым приближением для $q^{n+1,0} = q^*$.

Применение метода LU-SGS для ЛАД сеток нецелесообразно ввиду алгоритмической сложности построения соответствующих матриц или аналогичной схемы.

Данные вычисления проводятся только для пересекаемых ячеек на втором этапе метода разделения по физическим процессам. Сначала все ячейки расчетной области считаются сквозным обходом (внутренние ячейки для включений с неподвижной геометрией можно не рассчитывать вовсе), на втором этапе значения газодинамических компонент доитерируются в пересекаемых ячейках по формуле (1.48) до сходимости (понижения невязки до машинного нуля). Скорость газа внутри тела устанавливается равной скорости его границы.

Алгоритм геометрической адаптации сетки. Под геометрической адаптацией понимаем адаптацию с анализатором, выдающим единицу для ячеек, имеющих ненулевое пересечение с внедренным в область геометрическим телом.

Пошагово алгоритм можно записать так:

Объект окружается кубом соответствующей размерности. Проводится цикл по всем элементам тела (отрезкам для 2D или треугольникам для 3D).

1. Проводим начальное разбиение куба (базовая сетка) и находим ячейки, имеющие ненулевое пересечение с заданным элементом геометрии.
2. Каждую из этих ячеек разбиваем на 4 (2D) или 8 (3D) частей и повторяем процедуру для ячеек-потомков.
3. Повторяем последний шаг до достижения нужной точности (заданное максимальное число уровней адаптации).

Для теста пересечения прямоугольной ячейки и отрезка замкнутой кривой, составляющей границу твердого тела, выполняется простая процедура: находятся все точки, являющиеся пересечениями прямых, содержащих одну из граней ячейки с прямой, содержащей исходный отрезок границы. Если данное пересечение непустое, проверяем точки на принадлежность ячейке и отрезку

простым по координатным сравнением, если после проверки множество точек подобных пересечений оказывается непустым, удаляем из него повторяющиеся точки с учетом погрешности вычислений и получаем пару, образующую отрезок пересечения, являющийся частью исходного отрезка с вершинами на гранях ячейки. Отрезки контуров, параллельные осям сетки, обрабатываются отдельным тривиальным образом: их пересечение осуществляется только с гранями сетки, перпендикулярными им самим.

В трехмерном случае возможно огромное количество разнообразных конфигураций пересечения элемента сетки (осеориентированного параллелепипеда) с элементом геометрии (пространственным треугольником), однако можно добиться унификации поиска путем проведения аналогичной процедуры поиска пересечения: сначала стороны треугольника пересекаются с гранями ячейки простой проверкой координат, потом ребра параллелепипеда пересекаются с треугольником. Все точки пересечения объединяются в единое множество, удаляются дубликаты. Площадь искомого многогранника ищется как сумма площадей треугольников, его составляющих. Для получения правильной последовательности его вершин точки сортируются по величине скалярного произведения (угол между соседними должен быть максимальным).

Для каждой итоговой пересекаемой ячейки сохраняется жидкостная объемная доля и интегральная взвешенная площадью нормаль. После нахождения пересекаемых ячеек вся расчетная область подразбивается на внутреннюю подобласть, внешнюю подобласть и множество пересекаемых ячеек, уже вычисленное алгоритмом. Для малых размеров базовой сетки эту процедуру можно проводить рекурсивно, что и было сделано для всех расчетов, представленных ниже. При увеличении числа ячеек сетки рекурсивную процедуру можно заменить срезами вдоль одной из осей или аналитической проверкой центра ячейки на нахождение внутри тела.

В каждой пересекаемой ячейке нижнего уровня проводятся операции, аналогичные представленным в разделе 2 данной главы: рассчитывается объемная доля, занимаемая жидкостью в пересекаемой ячейке, ω_f , и вектор внешней нормали (направленной в сторону жидкости) \mathbf{n}_f , $|\mathbf{n}_f| = s_f$, где s_f — длина отрезка, аппроксимирующего пересечение счетной ячейки с поверхно-

стью Γ . Для сохранения общности изложения сохраним «объемную» нотацию для описания параметров алгоритма.

Эти параметры вычисляются при анализе пересечения счетной ячейки с элементами поверхности Γ_j . Вектор нормали вычисляется осреднением единичных нормалей элементов с весовыми коэффициентами, равными площадям пересечения: $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_j s_j$, $s_j = \text{area}(\Gamma_j \cap C)$, где C обозначает область ячейки сетки. В двумерном случае объемную долю ω_f в пересекаемой ячейке можно приближенно вычислить точно. Прямая, определяемая данной нормалью и точкой \mathbf{x}_o , насчитываемой по итеративной формуле (1.31), пересекая прямоугольную ячейку, разбивает ее на 2 подобласти: либо одна из них является прямоугольным треугольником, либо обе являются трапециями. Во втором случае вычисляем просто площадь трапеции, содержащей опорную точку \mathbf{x}_o , делим ее на объем ячейки и получаем искомую объемную долю:

$$\omega_f = \frac{V_f}{V_{cell}} = \frac{(a+b)h}{2V_{cell}}, \quad (1.49)$$

где a и b — основания данной трапеции, отсекаемые отрезком аппроксимирующей прямой на гранях ячейки, а h — ее высота, являющаяся размером ячейки в перпендикулярном основаниям направлении. В первом же случае в качестве V_f — объема жидкой части ячейки — берется либо площадь треугольника, либо площадь всей ячейки без данного треугольника. Выбор альтернативы определяется принадлежностью точки \mathbf{x}_o данному треугольнику:

$$\omega_f = \frac{V_f}{V_{cell}} = \begin{cases} \frac{ab}{2V_{cell}}, x_o \in \Delta \\ \frac{2V_{cell} - ab}{2V_{cell}}, x_o \notin \Delta \end{cases} \quad (1.50)$$

После нахождения всех пересекаемых ячеек нужно разбить все ячейки расчетной сетки на 3 класса: внешние, пересекаемые и внутренние. Пересекаемые ячейки определяются непосредственно вышеописанной процедурой. Для присвоения ячейкам одной из двух оставшихся категорий будем пользоваться следующим алгоритмом:

1. выбираем одну заведомо внешнейю ячейку; один из углов сетки, как правило, задан наперед, помечаем данную ячейку флагом;
2. помечаем всех ее непересекаемых соседей аналогичным флагом;
3. повторяем процедуру для всех ячеек, помеченных этим флагом, для этого в двойном цикле по направлениям обходим все ячейки и, если они помечены флагом, помечаем флагом их непересекаемых соседей;
4. повторяем данные обходы сетки в двойном цикле с разных углов сетки в направлении к ее центру до тех пор, пока у каждой помеченной флагом ячейки все соседи не будут либо помечены этим же флагом, либо являться пересекаемыми;
5. на выходе из алгоритма все помеченные флагом ячейки будут являться внешними ко всем контурам, представленным в постановке задачи. Ячейки же, не помеченные флагом и не являющиеся внешними, автоматом становятся внутренними.

Примеры работы алгоритма геометрической адаптации представлены на рисунках 1.25 и 1.26. На рис. 1.26 также представлена сегментация расчетной области.

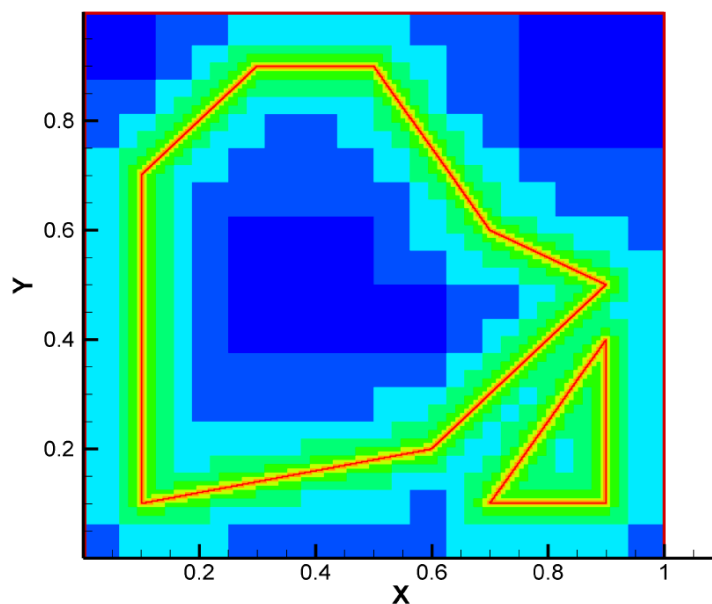


Рисунок 1.25 – Расчетная сетка (цветом от синего к красному показан уровень физической ячейки) после геометрической адаптации к двум многоугольникам, внедренным в область. 8 уровней, базовая сетка 10x10

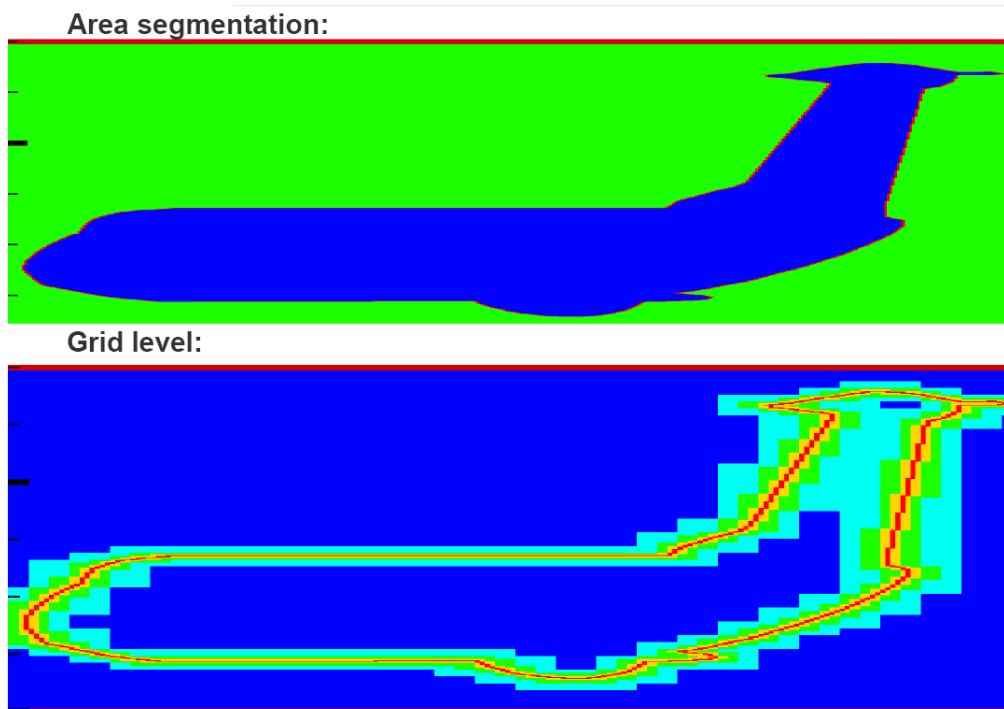


Рисунок 1.26 – Расчетная сетка (снизу, цветом от синего к красного показан уровень физической ячейки) и сегментация расчетной области (сверху, зеленый — внешние ячейки, синий — внутренние, красный — пересекаемые) после геометрической адаптации к контуру осевого разреза самолета Ту-134. 5 уровней, базовая сетка 70x70

При работе с подвижной геометрией координаты вершин тела пересчитываются согласно уравнениям его движения, а геометрическая адаптация проводится на каждом временном слое.

1.2.8 Тестовые расчеты методом свободной границы на ЛАД сетке

Стационарная геометрия. Решалась задача обтекания клина с углом 20° при скорости набегающего потока $M=3$ с 5 и 8 уровнями сетки, и проводилось сравнение с аналитическим решением. Для представления клина использовался метод свободной границы. Базовая сетка имела 50×50 ячеек, таким образом, наименьшая ячейка в 5-уровневой сетке эквивалентна ячейке в сетке 800×800 , а наименьшая ячейка в 8-уровневой сетке — ячейке в сетке 6400×6400 . Адаптация производилась по плотности. При вейвлет-анализе использовался крестовой шаблон. Результаты представлены на рис. 1.27 и 1.28.

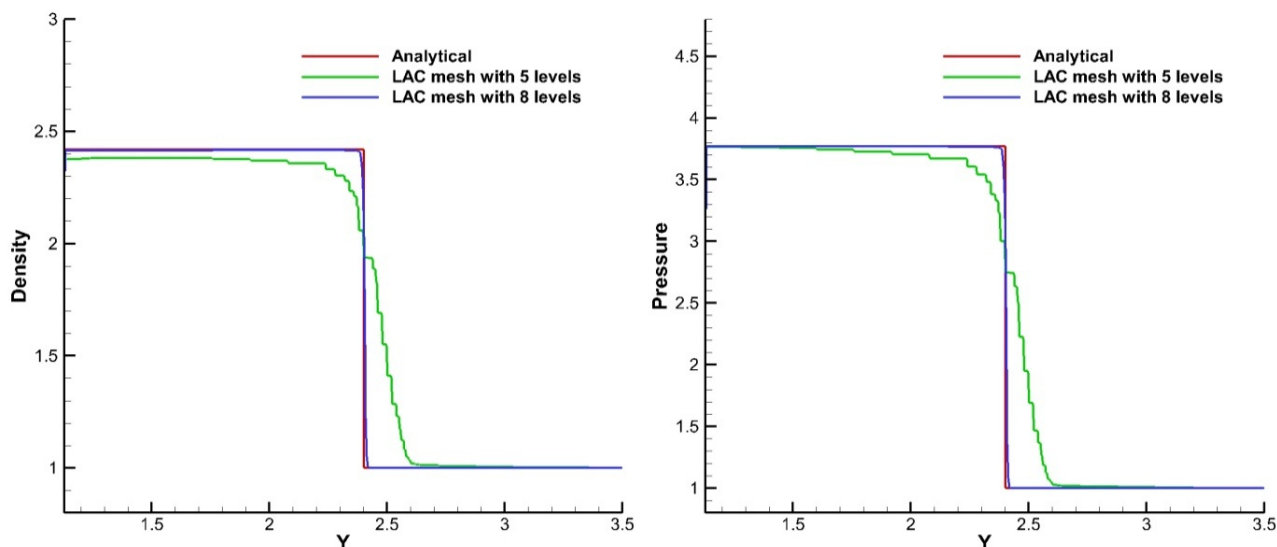


Рисунок 1.27 – Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения (красная линия), расчетов на сетке с 5 (зеленая) и 8 (синяя) уровнями

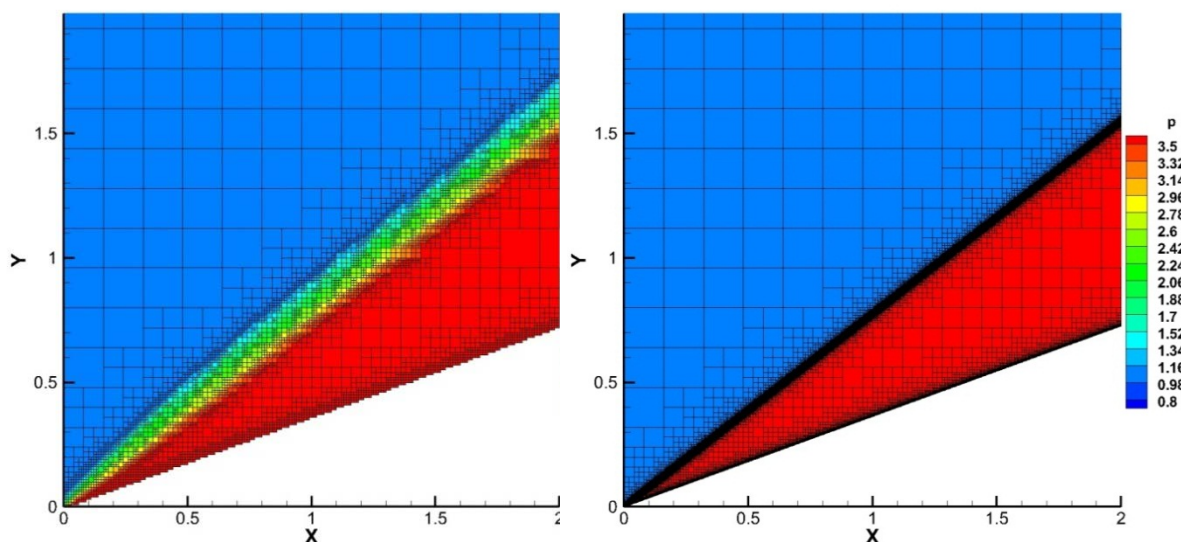


Рисунок 1.28 – Распределения давления для расчетов на сетке с 5 уровнями (слева) и 8 уровнями (справа)

Как и ожидалось, расчет на сетке с 8 уровнями ближе к аналитическому решению, чем расчет на 5 уровнях (рис. 1.27). Расчет на 5-уровневой сетке несколько размывает ударную волну (рис. 1.27 и 1.28). Как видно на рис. 1.28, адаптация происходит как к решению, так и к геометрии.

Также проводились расчеты на сетке с 5 уровнями при различных порогах обнуления вейвлетных коэффициентов. Чем меньше порог, тем больше

мелких ячеек, соответственно, тем точнее расчет, что и проиллюстрировано на рис. 1.29.

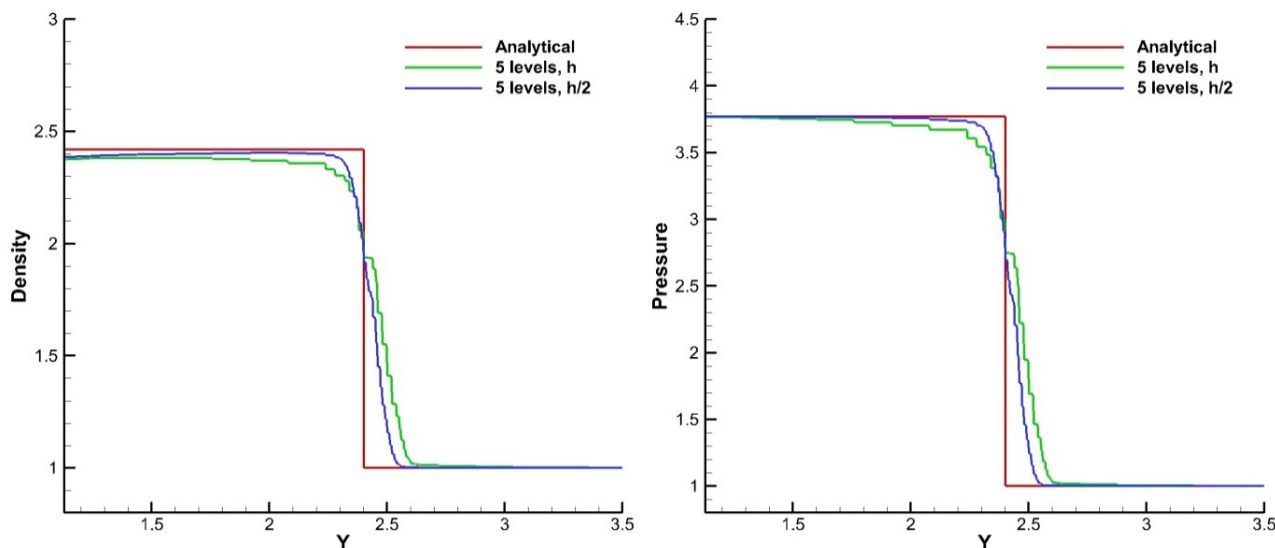


Рисунок 1.29 – Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения (красная линия), расчетов на сетке с 5 уровнями с порогом, равным h (зеленая) и $h/2$ (синяя)

Нестационарная геометрия. Были проведены расчеты обтекания клина, движущегося со скоростью $0.1M$ навстречу набегающему потоку. Таким образом, стационарное решение для неподвижного клина при скорости набегающего потока $M=3.1$ и решение для движущегося клина со скоростью $0.1M$ и набегающего потока $M=3.0$ в системе координат, связанной с клином, должны совпадать. На рис. 1.30 приведено сравнение численного решения для движущегося клина с соответствующим аналитическим решением стационарного случая, которое показывает хорошее совпадение результатов с учетом того, что расчет проводился по схеме первого порядка точности с диссипативным численным потоком по В.В. Русанову. Рисунок 1.31 иллюстрирует динамику установления решения.

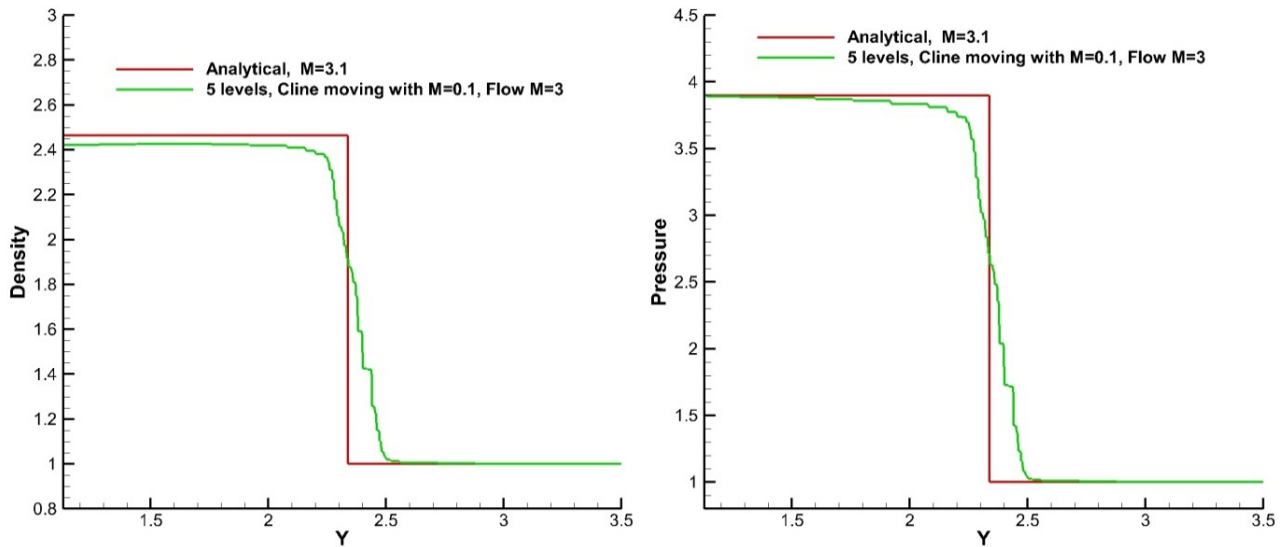


Рисунок 1.30 – Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения с $M=3.1$ (красная линия) и расчета на сетке с 5 уровнями при скорости набегающего потока $M=3$ и скорости клина $M=0.1$ (зеленая)

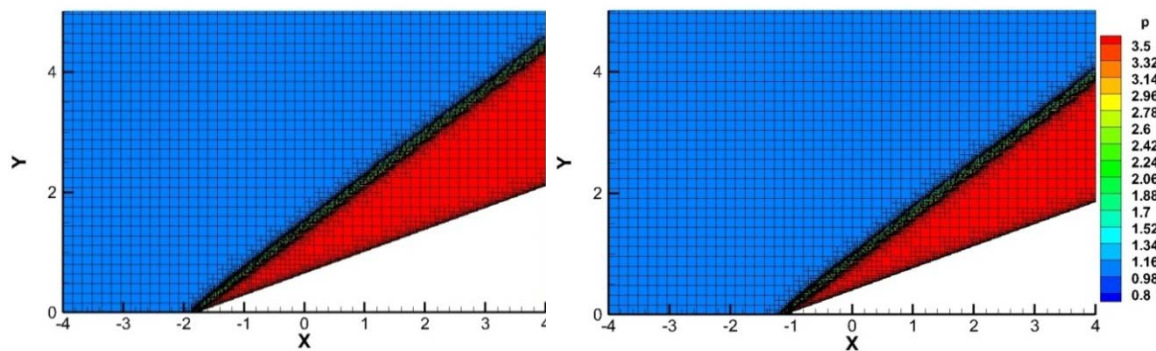


Рисунок 1.31 – Распределения давления для расчетов на сетке с 5 уровнями при движущемся клине с $M=0.1$ в различные моменты времени

Глава 2

Вейвлетная динамическая адаптация сеток и выделение сингулярностей течений

В численном моделировании течений газа или жидкости, содержащих структуры существенно различающихся масштабов остается актуальной задача построения алгоритмов, в которых указанные объекты могут быть выделены с высокой точностью. Такими объектами могут быть пространственно локализованные структуры, например, ударные волны, контактные разрывы, пограничные слои, вихревые образования и др. Разные масштабы могут быть инициированы различными внешними или геометрическими причинами, например, движением тел разных размеров, локальным энерговыделением и т.д.

Можно условно выделить три основных класса методов адаптивных расчетов. В исторически первом разрывы выделяются, а сетка привязывается к расположению разрывов. Очевидно, что в этом случае логическая сложность алгоритмов быстро растет при усложнении картины расположения разрывов, что делает практически нереальным использование параллельных методов. Альтернативой является применение методов сквозного счета, где разрывы в решениях, которым в идеальной модели соответствуют скачки, размазываются и формируются переходные зоны ненулевой толщины.

Постановка задачи о выделении разрывов или иных сингулярностей в числовых полях, заданных в дискретном наборе узлов, требует принятия дополнительных гипотез о структуре этих объектов. Так, например, можно построить математическую модель для выделения разрывов, которая использует информацию о том, каким методом были получены анализируемые численные поля, и экспериментально оттестировать ее эффективность.

Обычно предполагается, что заданная сеточная вектор-функция является малым возмущением проекции значений (обобщенного) решения уравнений Эйлера на множество узлов некоторой сетки. Кроме того, предполагается, что решения являются гладкими вне множества разрывов первого рода функций и их производных, а эти множества сами являются регулярными множествами,

состоящими из кусочно-гладких поверхностей (кривых). Алгоритмическое выделение разрывов и адаптация сетки к их положению позволяет существенно уточнить результаты счета без увеличения его продолжительности, однако тоже плохо ложится на архитектуру современных суперкомпьютеров.

Третий подход основан на вейвлетном разложении вычисленных на момент времени t решений и использовании величин найденных вейвлетных коэффициентов для адаптации сетки к решению. Этот подход будет подробно обсуждаться в разделе «Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет-анализа» настоящей главы.

Следующий раздел посвящен обзору и анализу методов выделения особенностей, в основе которых лежит применение теории вейвлетов.

2.1 Некоторые численные методы выделения особенностей и построения адаптивных сеток

Задача локализации сингулярностей в газодинамических полях исследована относительно слабо. В этой области в первую очередь следует упомянуть работу Е. В. Ворожцова и Н. Н. Яненко [78]. В этой работе алгоритмы выделения особенностей условно разбиваются на две группы. В первой группе алгоритмов локализация разрывов производится путем слежения за движением точек, соответствующих начальной конфигурации разрывов. К ней относится, например, оптимизационный метод Минакера-Пироно (Miranker–Pironneau), который применим к задачам, для которых геометрия разрывов относительно проста и слабо зависит от времени. Если со временем в течении возникают новые разрывы, то метод нуждается в модификации и комбинировании с методами определения места и времени возникновения скачка. Алгоритмы второй группы используют только мгновенные (на заданный момент времени) числовые значения параметров течения. Эти алгоритмы применимы и к методам сквозного счета, так как работают с числовыми параметрами течения в фиксированные моменты времени. Описанные в книге так называемые дифференциальные анализаторы по сути относятся к одномерным методам, а при рассмотрении двумерных и трехмерных задач требуется выбор лучей, ортогональных линиям разрывов, определение которых является отдельной нетривиальной за-

дачей. Также большой интерес представляют развивающиеся эти работы исследования С.Б. Базарова, в которых, однако, используются лишь сравнительно простые локальные детекторы сингулярностей с вычислением градиента по всему расчетному полю.

В то же время в области обработки и распознавания изображений существует родственная задача «выделения краев» (edge detection), которая исследована довольно тщательно. К сожалению, методы «выделения краев» не достаточно эффективны при анализе газодинамических полей. Они нуждаются в модификации, поскольку не учитывают специфику расположения структуры разрывов в газодинамических течениях. Опишем ряд известных методов применения вейвлетов для выделения особенностей сигнала. Некоторые из этих методов (параграфы 2.1.3, 2.1.4) имеют достаточное теоретическое обоснование, но не могут быть использованы на практике, так как либо требуют трудоемких расчетов (вычисление непрерывного вейвлет-преобразования), либо не приспособлены для анализа дискретного входного сигнала, с которым приходится иметь дело в большинстве прикладных задач. На практике могут быть использованы только некоторые дискретные модификации этих алгоритмов. Также приведено описание некоторых прикладных алгоритмов (параграфы 2.1.5, 2.1.6), включая многомасштабную версию известного детектора Кэнни. В параграфе 2.1.7 описана модификация базиса вейвлетов, которая лучше адаптирована для представления двумерного сигнала и может быть использована для построения более эффективных, но и более ресурсоемких алгоритмов выделения и анализа особенностей. В параграфе 2.1.8 приведен метод, предложенный С.Б. Базаровым, который не использует вейвлеты, этот метод был программно реализован и апробирован (см. пункт 2.2.2.7). Ниже использованы материалы, изложенные в [85] (параграфы 2.1.1-2.1.5), [81] (параграф 2.1.6), [86] (параграф 2.1.7), [79] (параграф 2.1.8) и [82] (параграф 2.1.9). В приложениях теории вейвлетов встречаются различия в терминологии и обозначениях, но в данной работе изложение использует систему, принятую в [81].

2.1.1 Основные определения и некоторые свойства вейвлетов

2.1.1.1 Показатель гладкости Липшица

Чтобы характеризовать структуры с особенностями, необходимо точное количественное выражение гладкости для сигнала $f(t)$. Показатели Липшица позволяют измерить равномерную гладкость на временных интервалах, а также и в любой точке \mathcal{V} . Если f имеет особенность при $t = \mathcal{V}$, которая означает, что функция не дифференцируема в этой точке, то показатель Липшица при $t = \mathcal{V}$ характеризует сингулярное поведение функции.

Формула Тейлора связывает дифференцируемость сигнала с локальной полиномиальной аппроксимацией. Предположим, что функция f является m раз дифференцируемой на отрезке $[\mathcal{V} - h, \mathcal{V} + h]$. Пусть $p_{\mathcal{V}}(t)$ — многочлен Тейлора в окрестности \mathcal{V} :

$$p_{\mathcal{V}}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\mathcal{V})}{k!} (t - \mathcal{V})^k.$$

Из формулы Тейлора следует, что погрешность аппроксимации

$$\varepsilon_{\mathcal{V}}(t) = f(t) - p_{\mathcal{V}}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\forall t \in [\mathcal{V} - h, \mathcal{V} + h], \quad |\varepsilon_{\mathcal{V}}(t)| \leq \frac{|t - \mathcal{V}|^m}{m!} \sup_{u \in [\mathcal{V} - h, \mathcal{V} + h]} |f^{(m)}(u)|.$$

Следовательно, m -й порядок дифференцируемости функции f в окрестности точки \mathcal{V} определяет верхнюю границу погрешности $\varepsilon_{\mathcal{V}}(t)$ при $t \rightarrow \mathcal{V}$. Гладкость Липшица уточняет эту верхнюю границу введением нецелого показателя. В математической литературе показатели Липшица называются также показателями Гёльдера.

Определение 2.1. Функция f удовлетворяет условию Липшица $\alpha \geq 0$ в точке \mathcal{V} , если существуют $K > 0$ и многочлен $p_{\mathcal{V}}$ степени $m = [\alpha]$, такие, что

$$|f(t) - p_{\mathcal{V}}(t)| \leq K |t - \mathcal{V}|^{\alpha}. \quad (2.1)$$

Функция f удовлетворяет равномерному условию Липшица α на отрезке $[a, b]$, если она удовлетворяет (2.1) для всех $v \in [a, b]$ с константой K , не зависящей от точки V .

Гладкость Липшица функции f в точке V или на отрезке $[a, b]$ есть верхняя грань α , таких, что f удовлетворяет условию Липшица α .

В каждой точке V многочлен $p_v(t)$ определяется единственным образом. Если функция f непрерывно дифференцируема $m = [\alpha]$ раз в окрестности точки V , то p_v есть разложение Тейлора функции f в точке V . Показатели Липшица могут произвольно меняться от точки к точке. Если f удовлетворяет равномерному условию Липшица $\alpha > m$ в окрестности точки V , то можно убедиться, что функция f обязательно m раз непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Замечание. Иногда в литературе принимается, что показатель Липшица $0 \leq \alpha^* < 1$, тогда, если функция m раз непрерывно дифференцируема, в определении 2.1 $\alpha = m + \alpha^*$.

Если $0 \leq \alpha < 1$, то $p_v(t) = f(t)$ и условие Липшица (2.1) принимает вид

$$\forall t \in R \quad |f(t) - f(v)| \leq K |t - v|^\alpha.$$

Ограниченная, но разрывная в точке V функция удовлетворяет условию Липшица 0 в точке V . Если гладкость Липшица есть $\alpha < 1$ в точке V , то функция f недифференцируема в V , и α характеризует тип особенности.

2.1.1.2 Условие Фурье

Равномерная гладкость Липшица функции f на R связана с асимптотическим убыванием ее преобразования Фурье.

Теорема 2.1. Функция f ограничена и удовлетворяет равномерному условию Липшица α на R , если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^\alpha) d\omega < +\infty.$$

Преобразование Фурье является мощным средством для измерения минимальной глобальной гладкости функций. Однако невозможно анализировать

гладкость функции f в отдельных точках ν по убыванию $|\hat{f}(\omega)|$ при больших частотах ω . В противоположность этому, вейвлет-преобразование дает гладкость Липшица, как на интервалах (Теорема 2.3), так и в отдельных точках (Теорема 2.4), поскольку вейвлет-базисы, в отличие от базиса Фурье, хорошо локализованы не только в частотном, но и пространственно-временном диапазоне.

2.1.1.3 Вейвлеты

Определение 2.2. Функция $\psi(t) \in L^2(R)$ называется вейвлетом, если она удовлетворяет следующему соотношению допустимости:

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Это соотношение означает, что преобразование Фурье функции $\psi(t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

Обычно в приложениях используют более простое условие допустимости (подразумевая, что функция $\psi(t)$ гладкая и быстро убывает на бесконечности):

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Определение 2.3. Для семейства функций

$$\psi_{u,s}(t) = |s|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right),$$

$u, s \in R, s \neq 0$, непрерывное вейвлет-преобразование, заданное допустимым вейвлетом $\psi(t)$, есть

$$Wf(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt$$

Далеко не все вейвлеты имеют практически полезные свойства. Большим достижением последних лет было построение вейвлетов с компактным носителем. Также важными характеристиками вейвлетов являются ортогональность двоичных сдвигов и растяжений, число нулевых моментов, гладкость и др.

В приложениях очень важно подобрать вейвлет, обладающий необходимым для данной задачи набором свойств.

Свойства симметричных комплексных вейвлетов Добеши, используемых в данной работе, приведены разделе «Справочные материалы». Нулевые моменты вейвлетов

Для измерения локальной гладкости сигнала не так важно использовать вейвлет с узким частотным носителем, решающим являются его нулевые моменты.

Формула Липшица (2.1) приближает f многочленом p_ν в окрестности \mathcal{V} .

$$f(t) = p_\nu(t) + \varepsilon_\nu(t), \text{ где } |\varepsilon_\nu(t)| \leq K|t - \nu|^\alpha.$$

Вейвлет-преобразование позволяет оценить показатель α без знания многочлена p_ν . Для этой цели может быть использован вейвлет, который имеет $n > \alpha$ нулевых моментов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \text{ при } 0 \leq k < n, k \in \mathbb{Z}.$$

Вейвлет с n нулевыми моментами ортогонален многочленам степени $n-1$. Так как $\alpha < n$, то максимальная степень многочлена p_ν равна $n-1$. С помощью замены переменных $t' = (t-u)/s$ можно убедиться, что

$$Wp_\nu(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = 0.$$

Так как $f = p_\nu + \varepsilon_\nu$,

$$Wf(u, s) = W\varepsilon_\nu(u, s).$$

В параграфах 2.1.2, 2.1.3 объясняется, как измерить α по $|Wf(u, s)|$ в тех случаях, когда u принадлежит окрестности точки \mathcal{V} .

2.1.1.4 Многомасштабный дифференциальный оператор

Если вейвлет имеет n нулевых моментов, то можно показать, что вейвлет-преобразование можно интерпретировать как многомасштабный дифференциальный оператор порядка n . Это позволяет установить основополагающую связь между дифференцируемостью функции f и убыванием модуля ее вейвлет-преобразования при убывании масштаба.

Следующая теорема утверждает, что вейвлет, имеющий n нулевых моментов, может быть записан как производная n -го порядка быстроубывающей функции θ , а вейвлет-преобразование $Wf(u, s)$ — как n -я производная усреднения функции по области, пропорциональной масштабу s .

Предполагается, что вейвлет ψ имеет быстрое убывание; это означает, что для любого показателя убывания $m \in \mathbb{N}$ существует константа C_m , такая, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1+|t|^m}.$$

Теорема 2.2. Вейвлет ψ с быстрым убыванием имеет n нулевых моментов тогда и только тогда, когда существует быстроубывающая функция θ , такая, что

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{\partial^n \theta(t)}{\partial t^n}.$$

Как следствие,

$$Wf(u, s) = s^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} (f * \bar{\theta}_s)(u), \quad \text{где } \bar{\theta}_s(t) = s^{-1/2} \bar{\theta}(-t/s). \quad (2.2)$$

Более того, вейвлет ψ имеет не более чем n нулевых моментов тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$.

Если $K = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$, то свертка $f * \bar{\theta}_s(t)$ может быть интерпретирована как усреднение функции f с весом — ядром, растянутым в s раз. Из (2.2) следует, что $Wf(u, s)$ есть n -я производная усреднения f по области, пропорциональной s .

Так как θ имеет быстрое убывание, то можно убедиться, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s = K \delta$$

в смысле слабой сходимости. Это означает, что для любой φ , которая непрерывна в точке u ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi * \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s(u) = K\varphi(u)$$

Если функция f n раз непрерывно дифференцируема в окрестности u , то (2.2) означает, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Wf(u, s)}{s^{n+1/2}} = \lim_{s \rightarrow 0} f^{(n)} * \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s(u) = Kf^{(n)}(u). \quad (2.3)$$

В частности, если f принадлежит C^n с ограниченной n -й производной, то $|Wf(u, s)| = O(s^{n+1/2})$. Это — основополагающая связь убывания $|Wf(u, s)|$ при уменьшении s и равномерной гладкости f . Более тонкие соотношения изучаются ниже.

2.1.1.5 Многомасштабный (кратномасштабный) анализ

На практике часто необходимо иметь возможность анализировать только определенные детали исследуемых сигналов. При обработке изображений для этого можно, например, построить многомасштабную пирамиду и первоначально проводить обработку изображения с низким разрешением, а затем при необходимости локально повышать разрешение. Вейвлеты порождают естественную структуру масштабов, а также позволяют получить алгоритмы быстрого разложения исходного сигнала по масштабам.

Определение 2.4 (базис Рисса). Система функций $\{\theta_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в пространстве V , если функции системы линейно независимы, линейная оболочка системы функций $\{\theta_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является всюду плотной в V и существуют константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любой суммируемой с квадратом последовательности $\{c_n\} \in l^2$ выполняется соотношение:

$$A \|\{c_n\}\|_{l^2}^2 \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n \right\|_2^2 \leq B \|\{c_n\}\|_{l^2}^2$$

Определение 2.5 (Кратномасштабные пространства). Последовательность замкнутых пространств $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ из $L^2(\mathbb{R})$ образует кратномасштабную аппроксимацию, если удовлетворяются следующие свойства:

$$\begin{aligned}
\forall (j, k) \in Z^2 : f(t) \in V_j &\Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j; \\
\forall j \in Z : V_{j+1} &\subset V_j; \\
\forall j \in Z : f(t) \in V_j &\Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}; \quad , \\
\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j &= \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}; \\
\text{clos}_{L^2} \left(\bigcup_{j \in Z} V_j \right) &= L^2(R);
\end{aligned}$$

Существует функция $\theta(t)$, такая, что семейство $\{\theta(t-n)\}_{n \in Z}$ образует базис Рисса в пространстве V_0 .

Пусть W_{n+1} — ортогональное дополнение V_{n+1} в V_n : $V_n = V_{n+1} \oplus W_{n+1}$, тогда $V_0 \oplus \sum_{k=0}^{-n} W_k = \bigoplus_{k=-\infty}^{-n} W_k = V_{-(n+1)}$ и $\text{clos}_{L^2} \left(\bigoplus_{k \in Z} W_k \right) = L^2(R)$.

2.1.1.6 Масштабирующая (скейлинг) функция и материнский вейвлет

Пусть $\{V_j\}_{j \in Z}$ — кратномасштабная аппроксимация и семейство $\{\theta(t-n)\}_{n \in Z}$ образует базис Рисса в пространстве V_0 , а преобразование Фурье функции $\phi(t)$ есть:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}},$$

тогда семейство $\{\phi_{n,j}\}_{n \in Z}$, где $\phi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$, образует ортонормированный базис пространства V_j при всех $j \in Z$.

Функция $\phi(t)$ называется масштабирующей (скейлинг) функцией, или отцовской функцией.

Из третьего свойства кратномасштабной аппроксимации следует, что функция $\phi\left(\frac{t}{2}\right)$ может быть представлена в виде разложения по системе сдвигов $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \phi(t-n)$$

Из этого следует, что $\hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$, где $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-in\omega}$.

Функция $\phi(t)$ и коэффициенты $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ обладают следующими свойствами [87]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n &= \hat{h}(0) = \sqrt{2}, \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 &= 1, \\ \forall \omega \in \mathbb{R} \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 &= 2, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h_n &= 0 \quad \text{ИЛИ} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{2n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \hat{h}(\pi) &= 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{n-2k} \bar{h}_{n-2l} &= \delta_{kl}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(t-n) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(n) = 1 \end{aligned}$$

Пусть:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \phi(2t-n), \quad \text{при } g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n},$$

тогда можно показать, что семейство $\{\omega_{n,j}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где

$\omega_{n,j}(t) = \psi_{n,2^j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$, образует ортонормированный базис пространства W_j при всех $j \in \mathbb{Z}$.

Функция $\psi(t)$ называется *материнским вейвлетом*.

2.1.1.7 Вейвлет-фильтры и дискретное вейвлет-преобразование

Коэффициенты $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ называют *низкочастотным и высокочастотным вейвлет-фильтрами* соответственно.

Пусть функция $f(t) \in V_j$, тогда $f(t)$ можно разложить по системе функций $\{\phi_{k,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^o \phi_{k,j}(t)$. Из определения семейства пространств $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ и второго свойства кратномасштабной аппроксимации следует, что функцию $f(t)$ можно представить в виде суммы функций $f(t) = f_1(t) + r_1(t)$, таких, что $f_1(t) \in V_{j+1}$ и $r_1(t) \in W_{j+1}$, это означает, что $f(t)$ можно разложить на две компоненты: сглаженную $f_1(t)$ и шумливую $r_1(t)$. Очевидно, что функции $f_1(t)$ и $r_1(t)$ можно представить в виде разложения:

$$\begin{cases} f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^1 \phi_{k,j+1}(t), \\ r_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^1 \omega_{k,j+1}(t). \end{cases}$$

Аналогично функцию $f_n(t) \in V_{j+n}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$) можно представить в виде суммы функций $f_n(t) = f_{n+1}(t) + r_{n+1}(t)$, таких, что $f_{n+1}(t) \in V_{j+n+1}$ и $r_{n+1}(t) \in W_{j+n+1}$.

Фильтры $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ могут быть использованы для вычисления коэффициентов разложения $\{c_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{d_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$ функции $f(t)$ по пространствам кратномасштабной аппроксимации, а также для восстановления исходной функции по коэффициентам разложения, поскольку:

$$\begin{cases} c_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{h}_{j-2k} c_j^n, \\ d_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{g}_{j-2k} c_j^n, \\ c_k^n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-2j} c_j^{n+1} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_{k-2j} d_j^{n+1}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Для ускорения вычисления сверток в (2.4) можно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье [88], [89] и быстрой свертки.

Часто на практике при анализе функции $f(t) \in L^2$ на первом шаге отождествляют значения функции в целочисленных узлах $\{f_k = f(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с коэффициентами $\{c_k^o\}_{k \in \mathbb{Z}}$ её разложения по базису $\{\phi_{k,0}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Затем с помощью (2.4) вычисляется дискретное вейвлет-разложение сигнала $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ по масштабам. Таким образом, вейвлет-анализ позволяет использовать быстрые дискретные алгоритмы для разложения сигнала по пространствам кратномасштабной аппроксимации.

2.1.2 Связь асимптотики убывания вейвлет-преобразования с равномерной гладкостью Липшица на отрезке

Убывание амплитуды вейвлет-преобразования в зависимости от масштаба связано с равномерной и точечной гладкостью Липшица сигнала. Измерение этого асимптотического убывания эквивалентно приближению структур сигнала при масштабе, стремящемся к нулю. Предполагается, что вейвлет ψ имеет n нулевых моментов и принадлежит классу функций C^n с быстроубывающими производными. Это означает, что для любого $0 \leq k \leq n$ и $m \in \mathbb{N}$ существует константа C_m , такая, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\psi^{(k)}(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}.$$

Следующая теорема связывает равномерную гладкость Липшица функции f на интервале с амплитудой ее вейвлет-преобразования при малых масштабах.

Теорема 2.3. Если функция $f \in L^2(R)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица α , $\alpha \leq n$ на отрезке $[a, b]$, то существует число $A > 0$, такое, что

$$\forall (u, s) \in [a, b] \times R^+ \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2}. \quad (2.5)$$

Обратно, если функция f ограничена и $Wf(u, s)$ удовлетворяет (2.5) для нецелого $\alpha < n$, тогда f удовлетворяет равномерному условию Липшица α на отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Неравенство (2.5) на самом деле есть условие асимптотического убывания $|Wf(u, s)|$ при s , стремящемся к нулю. При больших масштабах это не накладывает никаких ограничений, так как неравенство Коши-Шварца гарантирует ограниченность вейвлет-преобразования:

$$|Wf(u, s)| = \left| \langle f, \psi_{u,s} \rangle \right| \leq \|f\| \|\psi\|.$$

При убывании масштаба $Wf(u, s)$ измеряет мелкомасштабные изменения в окрестности u . В теореме 1.3 доказывается, что $|Wf(u, s)|$ убывает как $s^{\alpha+1/2}$ на интервалах, где функция f удовлетворяет равномерному условию Липшица α .

В противоположность преобразованию Фурье, которое дает условие гладкости Липшица на R (Теорема 2.1), вейвлет-преобразование дает условие гладкости Липшица, которое локализовано на конечном интервале и тем обеспечивает необходимое и почти достаточное условие. Если $[a, b] = R$, то (2.5) есть необходимое и достаточное условие того, что f удовлетворяет равномерному условию Липшица α на R .

Если ψ имеет точно n нулевых моментов, то убывание вейвлет-преобразования не дает информации о гладкости Липшица функции f при $\alpha > n$. Если f удовлетворяет равномерному условию Липшица $\alpha > n$, то она

принадлежит C^n и из (2.3) следует, что $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-n-1/2} Wf(u, s) = Kf^{(n)}(u)$, где $K \neq 0$. Из этого следует, что $|Wf(u, s)| \sim s^{n+1/2}$ при малых масштабах, несмотря на более высокую гладкость функции f .

Если показатель Липшица α — целое число, то неравенства (2.5) недостаточно для того факта, что f удовлетворяет равномерному условию Липшица α . Если $[a, b] = R$, $\alpha = 1$ и ψ имеет два нулевых момента, то класс функций, удовлетворяющих (2.5), называется классом Зигмунда [90]. Он немного шире, чем множество функций, удовлетворяющих равномерному условию Липшица 1. Например, $f(t) = t \ln t$ принадлежит классу Зигмунда, хотя не удовлетворяет условию Липшица 1 при $t = 0$.

2.1.3 Точечная гладкость Липшица

Изучение показателей Липшица в точках с помощью вейвлет-преобразования — это деликатная и красивая тема, которая своими корнями уходит в работы Литтлвуда и Пэли 1930-х годов по гармоническому анализу и характеристике различных функциональных пространств. Характеризовать гладкость функции f в точке V может быть очень трудно, потому что f может иметь различные виды особенностей, присутствующих в окрестности точки V . В 1984 году Бони [91] развил теорию «двойной микролокализации», которая уточняет подход Литтлвуда-Пэли для получения точечной характеристики особенностей. Она была использована для изучения решения гиперболических уравнений в частных производных. Эти технические результаты упрощены в работах Жаффара [92], который доказал, что «дважды микролокализационные» свойства эквивалентны специфическим условиям на убывание амплитуды вейвлет-преобразования. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие на вейвлет-преобразование для оценки гладкости Липшица функции f в точке V .

2.1.3.1 Теорема Жаффара

Предполагается, что вейвлет ψ имеет n нулевых моментов и n производных с быстрым убыванием.

Теорема 2.4. Если функция $f \in L^2(R)$ удовлетворяет условию Липшица $\alpha \leq n$ в точке ν , то существует число A , такое, что

$$\forall (u, s) \in R \times R^+ \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left(1 + \left| \frac{u - \nu}{s} \right|^\alpha \right). \quad (2.6)$$

Обратно, если $\alpha < n$ — нецелое и существуют A и $\alpha' < \alpha$, такие, что

$$\forall (u, s) \in R \times R^+ \quad |Wf(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left(1 + \left| \frac{u - \nu}{s} \right|^{\alpha'} \right), \quad (2.7)$$

то функция f удовлетворяет условию Липшица α в точке ν .

2.1.3.2 Конус влияния

Необходимое условие (2.6) и достаточное условие (2.7), можно интерпретировать по-иному. Пусть вейвлет ψ имеет компактный носитель, равный $[-C, C]$, тогда конус влияния точки ν в масштабно-пространственной плоскости — это множество точек (u, s) , таких, что точка ν содержится в носителе $\psi_{u,s}(t) = s^{-1/2}\psi((t-u)/s)$. Так как носитель $\psi((t-u)/s)$ равен $[u - Cs, u + Cs]$, то конус влияния ν определяется неравенством

$$|u - \nu| \leq Cs.$$

Если u находится в конусе влияния точки ν , то $Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle$ зависит от значения функции f в окрестности ν . Так как $|u - \nu|/s \leq C$, то условия (2.6) и (2.7) могут быть записаны в виде:

$$|Wf(u, s)| \leq A's^{\alpha+1/2},$$

что тождественно равномерному условию Липшица (2.5), данному в теореме 1.3.

2.1.4 Максимумы модуля вейвлет-преобразования

В теоремах 2.3 и 2.4 доказывається, что гладкость Липшица функции f в точке ν зависит от убывания $|Wf(u, s)|$ при малых масштабах в окрестности ν .

Однако нет необходимости прямого измерения этого убывания в масштабнo-временной плоскости (u, s) . В данном параграфе показано, что убывание $|Wf(u, s)|$ может быть проконтролировано по его максимальным значениям.

2.1.4.1.1 Максимумы модуля и выделение особенностей

Термин максимум модуля будет использоваться для описания любой точки (u_0, s_0) , такой, что $|Wf(u, s_0)|$ имеет локальный максимум в точке $u = u_0$. Это означает, что

$$\frac{\partial Wf(u_0, s_0)}{\partial u} = 0.$$

Этот локальный максимум должен быть строгим локальным максимумом в правой или левой окрестности u_0 , чтобы исключить другие локальные максимумы, когда $|Wf(u, s_0)|$ — константа. Линией максимумов будем называть любую связную кривую $s(u)$ в пространственно-масштабной плоскости (u, s) , все точки которой — это точки максимумов модуля.

Особенности выделяются путем нахождения абсцисс, к которым сходятся максимумы модуля при малых масштабах. Чтобы лучше понять свойства этих максимумов, следует записать вейвлет-преобразование как многомасштабный дифференциальный оператор. В теореме 1.2 доказывается, что если ψ имеет точно n нулевых моментов и компактный носитель, то существует функция θ с компактным носителем, такая, что $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$, где $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$, а вейвлетное преобразование можно переписать как многомасштабный дифференциальный оператор (2.2).

Если вейвлет имеет только один нулевой момент, то максимумы модуля — это максимумы производной первого порядка функции f , сглаженной $\bar{\theta}_s$. Эти многомасштабные максимумы модуля используются для определения местонахождения разрывов и перепадов в изображениях. Если вейвлет имеет два равных нулю момента, то максимумы модуля соответствуют локальным максимумам кривизны.

В следующей теореме доказывается, что если $Wf(u, s)$ не имеет локальных максимумов модуля при малых масштабах, то f — локально гладкая функция.

Теорема 2.5 (Малла, Хвонг). Предположим, что ψ из C^n имеет компактный носитель и $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ при $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$. Пусть $f \in L^1[a, b]$. Если существует $s_0 > 0$, такое, что $|Wf(u, s)|$ не имеет локальных максимумов при $u \in [a, b]$ и $s < s_0$, то f удовлетворяет равномерному условию Липшица n на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$.

Эти точки максимумов модуля могут быть расположены как вдоль одной и той же линии максимумов, так и вдоль нескольких линий максимумов. Этот результат гарантирует, что все особенности выделяются, если следовать максимумам модуля вейвлет-преобразования при уменьшении масштаба. Доказательство этой теоремы имеется в [93]. Из нее вытекает, что если функция f имеет особенность (не удовлетворяет условию Липшица 1) в точке ν , то существует последовательность точек вейвлет-максимумов $(u_p, s_p)_{p \in \mathbb{N}}$, которая сходится к точке ν при малых масштабах:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = \nu \quad \text{и} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} s_p = 0.$$

2.1.4.2 Распространение максимумов

Для произвольного вейвлета $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ нет гарантии, что максимум модуля, расположенный в точке (u_0, s_0) , принадлежит линии максимумов, которая распространяется по направлению к малым масштабам. Когда s убывает, $Wf(u, s)$ может не иметь больше максимумов в окрестности $u = u_0$. Однако этого не может быть, если θ — функция Гаусса.

Лемма. Пусть $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$, где θ — функция Гаусса. Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ максимумы модуля $Wf(u, s)$ принадлежат связным кривым, которые никогда не прерываются при убывании масштаба.

Производные функции Гаусса часто используются для гарантии того, что линии максимумов распространяются до самых малых масштабов. Объединение максимумов модуля в линии также позволяет удалить ложные максимумы модуля, возникшие за счет численных погрешностей в областях, где вейвлет-преобразование близко к нулю.

Оценка асимптотики и отслеживание линий максимумов требуют вычисления непрерывного вейвлет-преобразования. Это требует больших вычислительных мощностей, кроме того на практике, в большинстве случаев, приходится работать с дискретными сигналами. Поэтому для анализа необходимы эффективные дискретные алгоритмы.

Чтобы построить дискретные версии описанных выше алгоритмов, требуется учитывать необходимость предельного перехода, что не всегда возможно в реальных задачах. Тем не менее, можно построить алгоритмы, которые имеют широкую область применения, один из них — алгоритм Кэнни.

2.1.5 Многомасштабное выделение перепадов

Перепады в структурах изображений часто являются наиболее важной особенностью при распознавании изображения. Однако понятие перепада изображения далеко не очевидно. Его можно определить как точки, где интенсивность изображения имеет резкие переходы, но более внимательный взгляд показывает, что это определение часто неудовлетворительно. Текстура изображения может иметь резкие изменения интенсивности, которые часто не рассматриваются как перепады. Если смотреть на кирпичную стену, то можно решить, что перепады — это контуры стены, там, где кирпичи определяют ее границы. С другой стороны, можно включить контуры каждого кирпича во множество перепадов и рассматривать негладкую поверхность каждого кирпича как текстуру. Умение разбираться в текстуре на основе перепадов зависит от масштабности анализа. Это побудило исследователей компьютерной визуализации выделять резкие изменения изображения при различных масштабах [94], [95]. Данный раздел описывает многомасштабный детектор перепадов Кэнни [96]. Применение детектора эквивалентно выделению максимумов модуля в двумерном вейвлет-преобразовании [97]. Гладкость Липшица точек перепада выводится из убывания максимальных вейвлет-модулей в зависимости от масштаба.

2.1.5.1 Алгоритм Кэнни выделения перепадов

Алгоритм Кэнни выделяет точки резкого изменения функции $f(x_1, x_2)$ с помощью вычисления модуля её вектора градиента

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right).$$

Частная производная f в направлении единичного вектора $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ в плоскости $x = (x_1, x_2)$ вычисляется как скалярное произведение с вектором градиента

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla}f \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2} \sin \alpha.$$

Абсолютное значение этой частной производной максимально, если вектор \vec{n} коллинеарен $\vec{\nabla}f$. Это показывает, что $\vec{\nabla}f(x)$ параллелен направлению максимального изменения поверхности $f(x)$. Точка $y \in R^2$ определяется как перепад, если $|\vec{\nabla}f(x)|$ имеет локальный максимум при $x = y$, когда $x = y + \lambda \vec{\nabla}f(y)$ для достаточно малых $|\lambda|$. Это означает, что частные производные f достигают локального максимума при $x = y$, когда x изменяется в одномерной окрестности y вдоль направления максимального изменения f в точке y . Эти точки перепада — точки перегиба f .

На практике в структуру детектора часто вводят параметр чувствительности α , при этом из множества перепадов исключаются те, для которых $|\vec{\nabla}f(x)| < \alpha$. Это позволяет избавиться от артефактов, порожденных шумовыми эффектами, но требует более активного участия пользователя в процессе обработки данных.

2.1.5.2 Многомасштабное выделение перепадов

Многомасштабная версия этого детектора перепада выполняется сглаживанием поверхности с растянутым ядром свертки $\theta(x)$. Это ядро вычисляется с помощью вейвлетов, которые являются частными производными θ :

$$\psi^1 = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \psi^2 = -\frac{\partial \theta}{\partial x_2}.$$

Для экономии вычислений и памяти рассматриваются только масштабы вейвлет-преобразования, соответствующие двоичной последовательности $\{2^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Если обозначить

$$\psi_{2^j}^k(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x_1}{2^j}, \frac{x_2}{2^j}\right) \quad \text{и} \quad \bar{\psi}_{2^j}^k(x) = \psi_{2^j}^k(-x), \quad \text{где } k = 1, 2 \quad \text{и} \quad x = (x_1, x_2),$$

то двоичное вейвлет-преобразование функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ в точке $u = (u_1, u_2)$ в двух направлениях может быть записано в виде

$$W^k f(u, 2^j) = \langle f(x), \psi_{2^j}^k(x-u) \rangle = f * \bar{\psi}_{2^j}^k(u) \quad (\text{при } k = 1, 2). \quad (2.8)$$

Затем, если обозначить $\theta_{2^j}(x) = 2^{-j} \theta(2^{-j} x)$ и $\bar{\theta}_{2^j}(x) = \bar{\theta}_{2^j}(-x)$, то два масштабированных вейвлета могут быть переписаны в виде

$$\bar{\psi}_{2^j}^1 = 2^j \frac{\partial \bar{\theta}_{2^j}}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \bar{\psi}_{2^j}^2 = 2^j \frac{\partial \bar{\theta}_{2^j}}{\partial x_2}.$$

Таким образом, из (2.8) следует, что компоненты вейвлет-преобразования пропорциональны координатам вектора градиента функции f , сглаженного ядром $\bar{\theta}_{2^j}$:

$$\begin{pmatrix} W^1 f(u, 2^j) \\ W^2 f(u, 2^j) \end{pmatrix} = 2^j \begin{pmatrix} \frac{\partial (f * \bar{\theta}_{2^j})(u)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial (f * \bar{\theta}_{2^j})(u)}{\partial u_2} \end{pmatrix} = 2^j \bar{\nabla} (f * \bar{\theta}_{2^j})(u). \quad (2.9)$$

Модуль этого вектора градиента пропорционален модулю вейвлет-преобразования

$$Mf(u, 2^j) = \sqrt{|W^1 f(u, 2^j)|^2 + |W^2 f(u, 2^j)|^2}.$$

Пусть $Af(u, 2^j)$ — угол вектора вейвлет-преобразования (2.9) в плоскости (x_1, x_2) :

$$Af(u, 2^j) = \begin{cases} \alpha(u), & W^1 f(u, 2^j) \geq 0, \\ \pi - \alpha(u), & W^1 f(u, 2^j) < 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha(u) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{W^2 f(u, 2^j)}{W^1 f(u, 2^j)} \right).$$

Единичный вектор $\vec{n}_j(u) = (\cos Af(u, 2^j), \sin Af(u, 2^j))$ коллинеарен вектору $\vec{\nabla}(f * \bar{\theta}_{2^j})(u)$. Точка перепада с масштабом 2^j — это точка V , такая, что $Mf(u, 2^j)$ имеет локальный максимум при $u = V$, когда $u = v + \lambda \vec{n}_j(v)$ для достаточно малых $|\lambda|$. Эти точки называются также максимумами модуля вейвлет-преобразования. Сглаженное изображение $f * \bar{\theta}_{2^j}$ имеет точку перегиба в расположении максимума модуля.

2.1.5.3 Кривые максимумов

Отдельные максимумы вейвлет-модулей, объединенные вместе, образуют кривые максимумов, которые следуют вдоль перепадов. В любой области касательная к кривой перепада аппроксимируется вычислением касательной к линии уровня. Это направление касательной используется для объединения вейвлет-максимумов, расположенных вдоль одной кривой хребта.

Линии уровня $g(x)$ — это кривые $x(s)$ в плоскости (x_1, x_2) , где $g(x(s))$ — константа. Параметр s есть длина дуги линии уровня. Пусть $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ — направление касательной к кривой $x(s)$. Так как $g(x(s))$ — константа при из-

$$\text{менении } s, \quad \frac{\partial g(x(s))}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \tau_2 = \vec{\nabla} g \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Поэтому вектор $\vec{\nabla}g(x)$ ортогонален направлению $\vec{\tau}$ касательной линии уровня, которая проходит через x .

Из этого свойства линии уровня, примененного к $g = f * \bar{\theta}_{2^j}$, следует, что в точке максимума \mathcal{V} вектор $\vec{n}_j(\nu)$ с углом $Af(\nu, 2^j)$ перпендикулярен линии уровня $f * \bar{\theta}_{2^j}$, проходящей через \mathcal{V} . Если профиль интенсивности остается константой вдоль перепада, то точки перегиба (точки максимума) расположены вдоль линии уровня. Поэтому касательная к кривой максимумов перпендикулярна $\vec{n}_j(\nu)$. Профиль интенсивности перепада может и не быть константой, но его изменения часто пренебрежимо малы в окрестности размера 2^j для достаточно малого масштаба 2^j , исключения составляют окрестности угловых точек. Касательная к кривой максимумов в этом случае почти перпендикулярна вектору $\vec{n}_j(\nu)$. Поэтому в дискретных вычислениях кривые максимумов восстанавливаются объединением вместе любых двух вейвлет-максимумов в точках \mathcal{V} и $\nu + \vec{n}$, которые являются соседними на решетке выборки изображения, и таких, что вектор \vec{n} почти перпендикулярен $\vec{n}_j(\nu)$.

Пример. Двоичное вейвлет-преобразование изображения на рисунке 2.1 дает модули изображений $Mf(2^j, \nu)$, максимумы которых расположены вдоль границы диска. Этот круговой перепад есть также линия уровня изображения. Поэтому вектор $\vec{n}_j(\nu)$ с углом $Af(2^j, \nu)$ перпендикулярен к перепаду в точках максимумов.

2.1.5.4 Гладкость Липшица

Убывание двумерного вейвлет-преобразования зависит от гладкости функции f . Такой анализ сужается до показателей Липшица $0 \leq \alpha \leq 1$. Говорится, что функция f удовлетворяет условию Липшица α в точке $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, если существует $K > 0$, такое, что для всех $(x_1, x_2) \in R^2$

$$|f(x_1, x_2) - f(\nu_1, \nu_2)| \leq K \left(|x_1 - \nu_1|^2 + |x_2 - \nu_2|^2 \right)^{\alpha/2}. \quad (2.10)$$

Если существует $K > 0$, такое, что (2.10) выполняется для всех $v \in \Omega$, то f удовлетворяет равномерному условию Липшица α в области Ω . Как и в одномерном случае, гладкость Липшица функции f связана с асимптотическим убыванием $|W^1 f(u, 2^j)|$ и $|W^2 f(u, 2^j)|$ в соответствующей окрестности. Это убывание определяется величиной $Mf(u, 2^j)$. Как и в теореме 1.3, можно доказать, что f удовлетворяет равномерному условию Липшица α внутри ограниченной области R^2 тогда и только тогда, когда существует $A > 0$, такое, что для всех u внутри этой области и для всех масштабов 2^j

$$|Mf(u, 2^j)| \leq A2^{j(\alpha+1)}. \quad (2.11)$$

Если изображение имеет изолированную кривую, на которой f имеет гладкость Липшица α , то значение $|Mf(u, 2^j)|$ в двумерной окрестности этой кривой может быть ограничено значениями вейвлет-модулей вдоль кривой перепада. Гладкость Липшица α перепада оценивается с помощью (2.11) измерением наклона $\log_2 |Mf(u, 2^j)|$ как функции j .

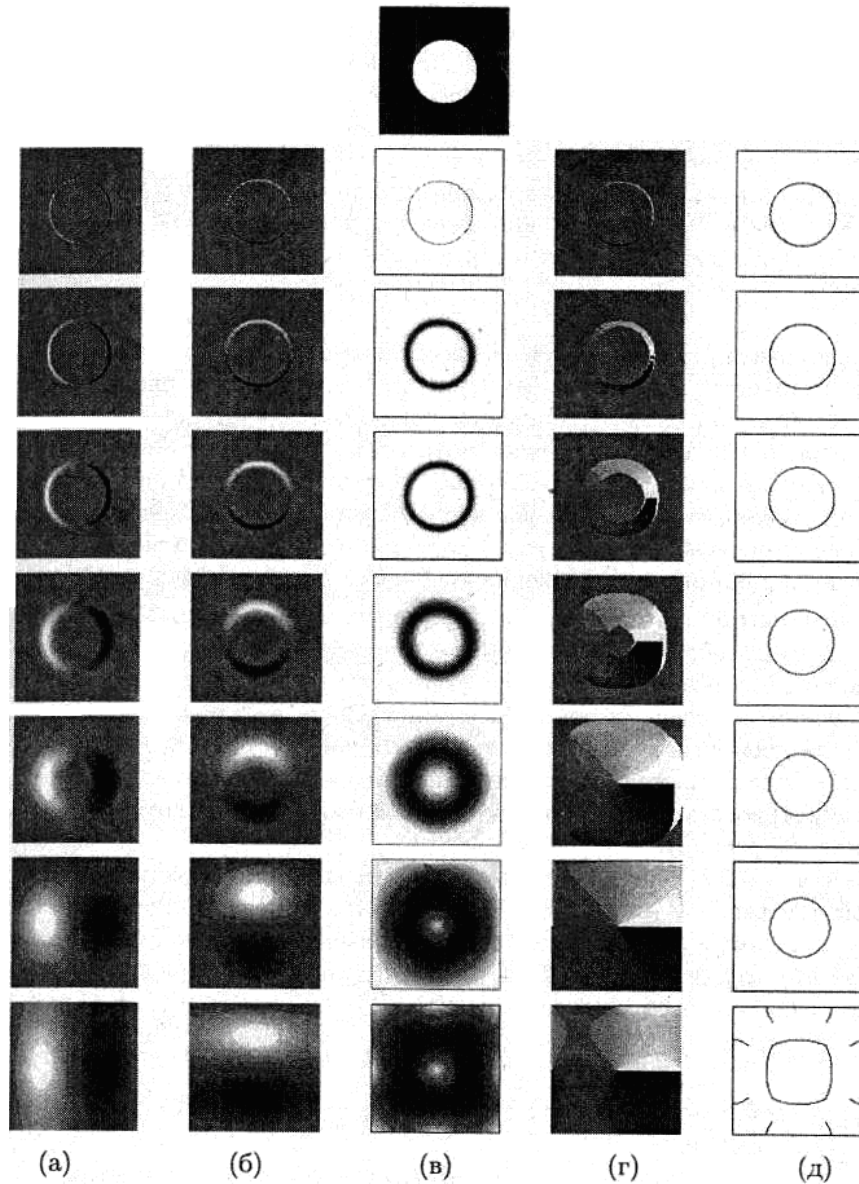


Рисунок 2.1 – Верхнее изображение имеет $N^2 = 128^2$ пикселей. Столбец (а) — вейвлет-преобразование в горизонтальном направлении с масштабом 2^j , который возрастает сверху вниз: $\{W^1 f(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$. Черный, серый и белый пиксели соответственно определяют отрицательные, нулевые и положительные значения. Столбец (б) — вейвлет-преобразование в вертикальном направлении: $\{W^2 f(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$. Столбец (в) — модули вейвлет-преобразования $\{Mf(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$. Белые и черные пиксели соответственно определяют нулевые коэффициенты и коэффициенты с большой амплитудой. Столбец (г) — углы

$\{Af(u, 2^j)\}_{-6 \leq j \leq 0}$ в точках, где модули не равны нулю. Столбец (д) — максимумы вейвлет-модулей — черные линии

2.1.6 Увеличение четкости изображений при помощи лапласиана

Приведенный в этом параграфе алгоритм основан на использовании специфической структуры скейлинг-функции $\phi(x)$ симметричных комплексных вейвлетов Добеши (см. справочные материалы):

$$\phi(x) = u(x) + v(x) \approx (1 + i\alpha \partial_x^2)u(x)$$

Одновременное наличие сглаживающего ядра и его лапласиана в комплексной скейлинг-функции может быть использовано для определения некоторых элементарных операций на вейвлет-коэффициентах. Вещественная и мнимая части коэффициентов вейвлет-преобразования соответствуют свертке исходного вещественного поля с вещественной и мнимой частями вейвлет-фильтров соответственно. Поэтому симметричные комплексные вейвлеты Добеши могут быть использованы для получения многомасштабного представления сглаженного лапласиана изображения (более подробные выкладки приведены в пункте 2.2.1.1).

Рассматриваются изображение, то есть вещественная матрица $I_{m,n}$, и комплекснозначная функция

$$f(x, y) = \sum_{m,n} I_{m,n} \Phi_{0,m,n}(x, y), \quad \Phi_{j,m,n}(x, y) = 2^{-j} \Phi(2^{-j}x - m, 2^{-j}y - n),$$

где $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$. Функция $f(x, y)$ — точка в пространстве R_0 . Пространство R_j определяется как множество всех функций

$$I(x, y) = \sum_{m,n} c_{m,n}^j \Phi_{j,m,n}(x, y) \text{ на масштабе } j \text{ с вещественными коэффициентами } c_{m,n}^j.$$

Сглаживающий оператор $Z: R_0 \rightarrow R_{-1}$ определяется как обратное вейвлет-преобразование только с вещественной частью фильтров симметричных комплексных вейвлетов Добеши. Изображение Zf имеет вдвое большее разрешение,

чем исходное. Мнимая часть низкочастотных коэффициентов вейвлет-разложения WZf обеспечивает хорошую оценку лапласиана изображения $I_{m,n}$.

Этот алгоритм может быть проиллюстрирован повышающим четкость оператором $f \rightarrow \tilde{f} = f - \rho \Delta f$. При высочайшем разрешении он может быть выражен как

$$c_{m,n}^0 \rightarrow \tilde{c}_{m,n}^0 = c_{m,n}^0 + \frac{\rho}{\alpha} g_{m,n}^0,$$

где ρ — параметр улучшения, $g_{m,n}^0 = \sum_r \eta_{r-2m} \sum_l \eta_{l-2n} \left(\sum_p \xi_{r-2p} \sum_q \xi_{l-2q} c_{p,q}^0 \right)$, а ξ и η — вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши.

Данный алгоритм может быть обобщен и использован для многомасштабного улучшения путем рассмотрения N уровней разложения изображения Zf и применения на каждом уровне адаптированного улучшения:

$$c_{m,n}^j \rightarrow c_{m,n}^j + \frac{\rho_j}{2^{2j} \alpha} g_{m,n}^j.$$

Параметр улучшения ρ теперь зависит от уровня разложения ($\rho \rightarrow \rho_j$).

2.1.7 Риджлеты

В одномерном случае вейвлеты позволяют эффективно локализовать особенности сигнала как по частоте, так и по координате. Однако в двумерном случае базис вейвлетов уже не так хорошо приближает функцию, поскольку он адаптирован только к вертикальным и горизонтальным особенностям.

2.1.7.1 Оценки аппроксимации функции в различных базисах

Пусть f — ограниченная кусочно-гладкая функция, заданная в области $[0;1]^2$, которая имеет особенности вдоль кусочно-гладких кривых. Тогда при использовании стандартного представления Фурье и аппроксимации \tilde{f}_m^F , по-

строенной из m ненулевых коэффициентов Фурье, определяющих лучшую аппроксимацию по норме L^2 , мы имеем оценку: $\|f - \tilde{f}_m^F\|_2^2 = O(m^{-1/2})$.

Эта оценка в случае вейвлет-представления улучшается:

$$\|f - \tilde{f}_m^W\|_2^2 = O(m^{-1}).$$

Если расположение особых линий известно, то можно построить адаптивный базис, для которого выполняется оценка:

$$\|f - \tilde{f}_m^A\|_2^2 = O(m^{-2}).$$

Грубо говоря, адаптивный базис задается на треугольниках, причем триангуляция идеально адаптирована к линиям особенностей.

Однако выясняется, что можно построить неадаптивный базис, такой, что для приближения \tilde{f}_m^R , построенного из m наибольших по модулю коэффициентов, выполняется оценка

$$\|f - \tilde{f}_m^R\|_2^2 = O(m^{-2}(\log m)^3).$$

2.1.7.2 Базис риджлетов

Чтобы приспособить вейвлеты к особенностям произвольного направления, можно ввести угол в конструкцию вейвлетов:

$$\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \psi\left(\left(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - b\right) / a\right).$$

Это так называемые функции горного хребта (риджлеты).

Теперь можно рассмотреть разложение сигнала по базису:

$$\psi_{j,k,i,l}(x_1, x_2) = 2^{-j/2} \psi\left(\left(x_1 \cos(l/2^i) + x_2 \sin(l/2^i) - 2^j k\right) / 2^j\right).$$

Индексы j и k характеризуют масштаб и сдвиг базисной функции, а i и l — угол поворота.

Особенностям сигнала соответствуют наибольшие по модулю коэффициенты. По ним можно определить не только расположение, но и направление разрывов. Однако вычислительная сложность риджлет-преобразования, по сравнению с вейвлет-преобразованием, значительно возрастает.

2.1.8 Выделение особенностей методом С. Б. Базарова

В данном параграфе представлен метод выделения особенностей, в котором не используются вейвлеты. Достоинством данного алгоритма является то, что он не требует тонкой настройки и подбора порогов чувствительности.

Рассматривается функция $f(x_1, x_2)$ — интенсивность изображения, состоящего из $M_1 \times M_2$ квадратных пикселей (со стороной Δx). В центральной точке каждого пикселя (i, j) используется детектор перепадов для окна изображения 3×3 :

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{i-1,j+1} & f_{i,j+1} & f_{i+1,j+1} \\ f_{i-1,j} & f_{i,j} & f_{i+1,j} \\ f_{i-1,j-1} & f_{i,j-1} & f_{i+1,j-1} \end{vmatrix},$$

и вычисляются выражения — дискретные свертки данного окна изображения с масками H_1 и H_2 :

$$S_1 = H_1 * F = (f_{i-1,j+1} + 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}) - (f_{i-1,j-1} + 2f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1}),$$

$$S_2 = H_2 * F = (f_{i+1,j+1} + 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}) - (f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1}),$$

тогда модуль градиента $g_{i,j}(f)$ функции f в точке (i, j) равен:

$$g_{i,j} = \frac{1}{8\Delta x} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \text{ а ориентация вектора градиента в центре пикселя } (i, j):$$

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \arctan(S_1 / S_2), & S_2 \geq 0 \\ \pi - \arctan(S_1 / S_2), & S_2 < 0 \end{cases}.$$

Затем вычисляется среднее значение градиента по всему расчетному полю: $T = \sum_{i,j} g_{i,j} / (M_1 \times M_2)$ — и из множества всех точек $(i = 1, 2, \dots, M_1, j = 1, 2, \dots, M_2)$ выбираются те, в которых $g_{i,j} > T$ (то есть точки, в которых градиент превышает среднее значение). Это множество точек обозначается через N_1 .

Во множество N_1 попадают не только пиксели истинных перепадов, но и близлежащие. Для их исключения применяется метод подавления «немаксимумов», при котором исключается конкуренция между собой соседних точек, расположенных вдоль перепада. Угол $\alpha_{i,j}$ определяет направление, нормальное к поверхности перепада интенсивности, две соседних с (i, j) ячейки (i_l, j_l) и (i_r, j_r) определяются как ячейки, задающие ближайшее к этой нормали направление. Из точек множества N_1 выбираются те, в которых одновременно выполняются условия $g_{i,j} > g_{i_l, j_l}$, $g_{i,j} > g_{i_r, j_r}$. Это множество точек обозначается через N_2 . На практике значение $\alpha_{i,j}$ аппроксимируется одним из восьми направлений из центра пикселя (i, j) на центры соседних ячеек.

Для сохранения свойства линейной протяженности перепада необходимо исключить изолированные выбросы интенсивности изображения. Из точек множества N_2 выбираются те, в которых одновременно выполняются условия: $|\alpha_{i_l, j_l} - \alpha_{i,j}| < \pi/4$, $|\alpha_{i_r, j_r} - \alpha_{i,j}| < \pi/4$. Поиск изолированных артефактов осуществляется рассмотрением круговой окрестности каждой точки радиусом $R = Q\Delta x$ (обычно используется константа $Q=2$). Точка удаляется из множества в том случае, если в этой окрестности нет других точек перепада. Множество оставшихся точек N_1 отражает положение особенностей функции $f(x_1, x_2)$.

2.1.9 Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи вейвлетов

В данном параграфе представлены алгоритмы локализации особенностей газодинамических полей, разработанные на ранней стадии исследования этой задачи. Один из них, по сути, является адаптацией метода, представленного в параграфе 2.1.3, которая позволяет использовать его для анализа полей газодинамических величин, заданных в дискретном наборе узлов расчетной сетки. Другой детектор основан на создании комплексного фильтра из пары вещественных вейвлет-фильтров (низкочастотного и высокочастотного). Этот детек-

тор в большей степени адаптирован для локализации разрывов преимущественно вертикального или горизонтального направлений.

2.1.9.1 Детектор, основанный на оценке показателя гладкости

Липшица в точках исследуемого поля

Алгоритм локализации и классификации особенностей состоит из трех этапов. На первом шаге вычисляется вейвлет-разложение исследуемого расчетного поля. Разложение может быть вычислено как классическим способом с прореживанием коэффициентов по формулам (2.4), так и без прореживания коэффициентов по формулам:

$$\begin{cases} c_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{h}_{j-k} c_j^n, \\ d_k^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{g}_{j-k} c_j^n. \end{cases}$$

Первый вариант требует значительно меньше вычислений, а второй позволяет получить более точную локализацию сингулярностей.

На втором этапе к полученному массиву данных применяется детектор сингулярностей. Разделение точек на сингулярные и регулярные зависит от значений $\varepsilon_{k,j}$, которые определяются из соотношения $\varepsilon_{k,j} = \frac{c_{k,j}}{C_{k,j}}$, где

$c_{k,j} = \text{Im}(\langle f(x), \phi_{k,j}(x) \rangle)$, $C_{k,j} = \text{Im}(\langle x, \phi_{k,j}(x) \rangle)$, а $\phi(x)$ — скейлинг-функция

симметричного комплексного вейвлета из семейства Добеши — dcola8 [98].

Величина коэффициентов $c_{k,j}$ значительно больше в точках сингулярности числового поля, чем в гладких областях. Результатом работы детектора является бинарное поле, в котором единицам соответствуют подозрительные на сингулярность точки, где $\varepsilon_{k,j}$ больше заданного порога \mathcal{E} .

На третьем шаге к полученному "подозрительному" множеству точек применяется метод классификации, основанный на анализе показателя гладкости Липшица. Он заключается в отборе тех точек газодинамического поля данных, в которых показатель гладкости Липшица α находится в заданном диапазоне. Разным диапазонам изменения α соответствуют разные типы сингуляр-

ностей поля. Численная оценка показателя α в точке, в зависимости от номера уровня вейвлет-разложения i , определяется по формуле:

$$\alpha_i(n) \approx \log_2 \left| \frac{\langle f, \psi_{n,2^{i+1}} \rangle}{\langle f, \psi_{n,2^i} \rangle} \right| - \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Эта эмпирическая оценка соответствует теоретической, которую можно получить из (2.5) и теоремы 1.3. Точки классифицируются как ударные волны, если соответствующие им значения α_i , найденные по формуле (2.12), попадают в диапазон $-1 < \alpha_i < 0$.

Алгоритм был использован для анализа одномерной нестационарной задачи о течении газа при мгновенном выделении тепла на некотором внутреннем участке (рисунок 2.2).

На рисунках 2.3 и 2.4 представлены результаты обработки поля распределения плотности для случая классической реализации вейвлет-разложения, а на рисунках 2.5, 2.6 — для случая реализации вейвлет-разложения без прореживания. Интенсивность цвета соответствует показателю Липшица α в точках газодинамического поля, рассчитанному по формуле (2.12). Видно, что отказ от прореживания позволяет более четко выявить границы разрывов.

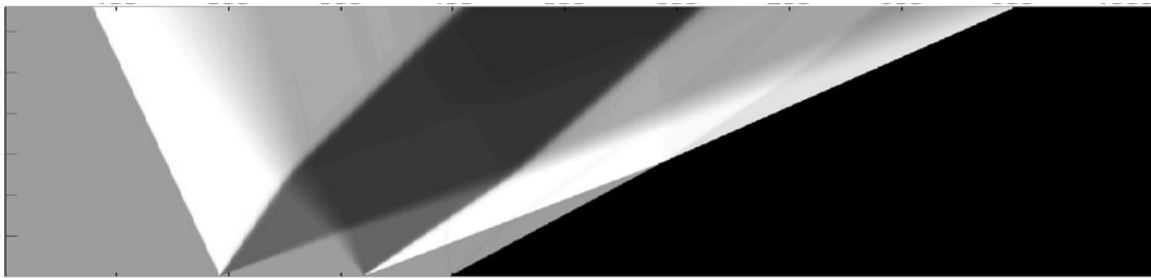


Рисунок 2.2 – Распределение поля плотности

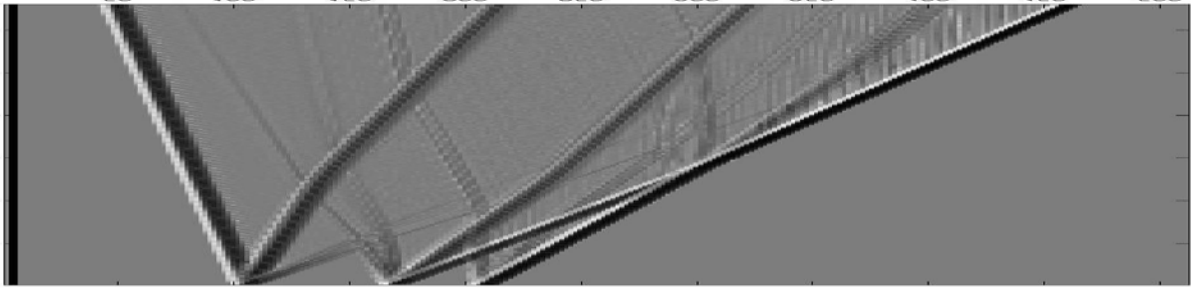


Рисунок 2.3 – Показатель Липшица α_1 , полученный при классической реализации вейвлет-разложения

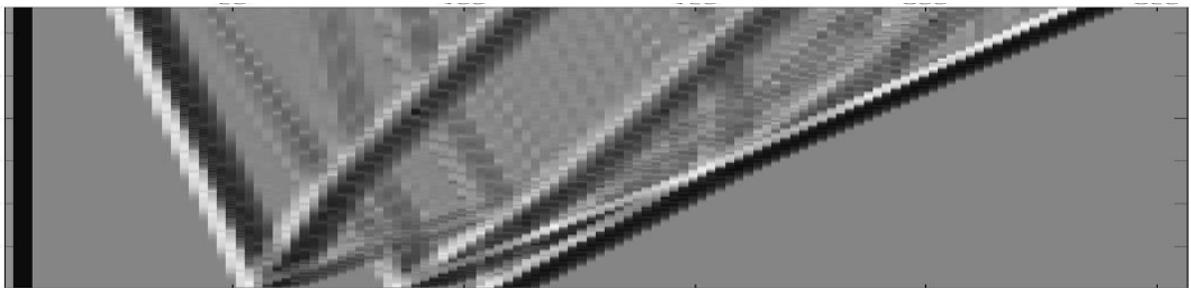


Рисунок 2.4 – Показатель Липшица α_2 , полученный при классической реализации вейвлет-разложения

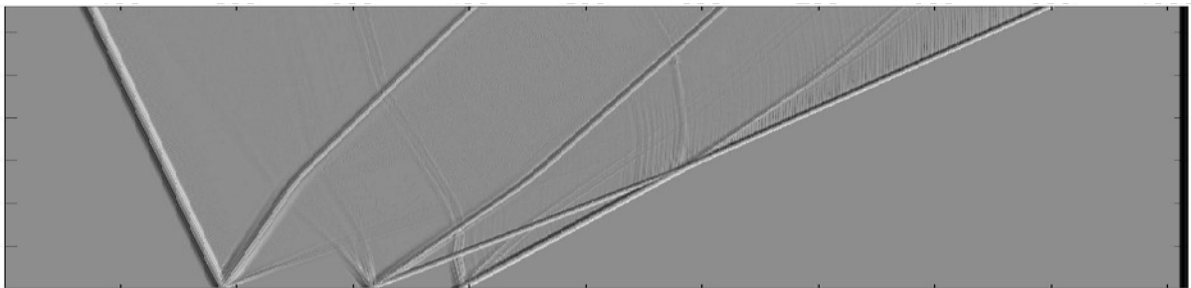


Рисунок 2.5 – Показатель Липшица α_1 , полученный при реализации вейвлет-разложения без прореживания

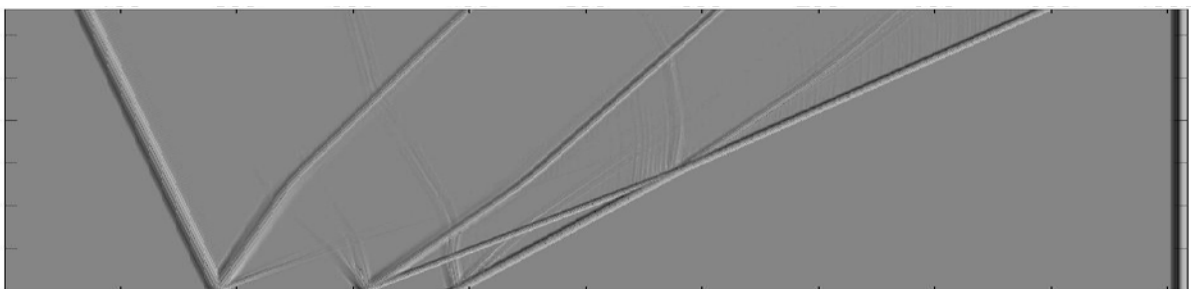


Рисунок 2.6 – Показатель Липшица α_2 , полученный при реализации вейвлет-разложения без прореживания

Угол наклона ϕ крайней правой ударной волны в начальный период времени может быть получен аналитически, он равен $\phi \approx 0.857$. Оценка того же угла, полученная при помощи детектора, равна $\phi \approx 0.873$. Этот факт позволяет судить об адекватности полученных результатов локализации.

2.1.9.2 Детектор на основе пары вещественных ортогональных вейвлет-фильтров

Рассматривается пара вещественных фильтров h , g , разделяющих частотный диапазон, h — низкочастотный, g — высокочастотный. Используя эти фильтры, можно построить новые комплексные фильтры $H = h + i\varepsilon g$ и $G = g + i\varepsilon h$, где ε — малый параметр (на практике обычно используется значение $\varepsilon = 0.0001$). Фильтры H и G используются для вычисления двумерного преобразования заданного поля по формулам (2.4), соответствующим классическому вейвлет-разложению, свертка производится сначала по строкам, а затем по столбцам. Операции, относящиеся к строкам и столбцам, будут обозначаться индексами $'$ и $''$ соответственно:

$$H^- f = h^- f + i\varepsilon g^- f, \quad G^- f = g^- f + i\varepsilon h^- f \quad \text{и так далее.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H^| H^- f = (h^| h^- f - \varepsilon^2 g^| g^- f) + \varepsilon (h^| g^- f + g^| h^- f) i; \\ H^| G^- f = (h^| g^- f - \varepsilon^2 g^| h^- f) + \varepsilon (h^| h^- f + g^| g^- f) i; \\ G^| H^- f = (g^| h^- f - \varepsilon^2 h^| g^- f) + \varepsilon (h^| h^- f + g^| g^- f) i; \\ G^| G^- f = (g^| g^- f - \varepsilon^2 h^| h^- f) + \varepsilon (h^| g^- f + g^| h^- f) i. \end{array} \right.$$

В трех первых выражениях при достаточно малом ε вторым слагаемым в первой скобке можно пренебречь. Первое слагаемое в первой скобке четвертого выражения носит характер шумов, и его взаимодействие с малой величиной $\varepsilon^2 h^| h^- f$ не позволяет использовать это выражение в дальнейшем анализе.

Таким образом, получим:

$$\begin{cases} H^{\downarrow} H^{-} f = (h^{\downarrow} h^{-} f - O(\varepsilon^2)) + \varepsilon (h^{\downarrow} g^{-} f + g^{\downarrow} h^{-} f) i; \\ H^{\downarrow} G^{-} f = (h^{\downarrow} g^{-} f - O(\varepsilon^2)) + \varepsilon (h^{\downarrow} h^{-} f + g^{\downarrow} g^{-} f) i; \\ G^{\downarrow} H^{-} f = (g^{\downarrow} h^{-} f - O(\varepsilon^2)) + \varepsilon (h^{\downarrow} h^{-} f + g^{\downarrow} g^{-} f) i. \end{cases} \quad (2.13)$$

В правой части (2.13) встречаются следующие выражения:

$h^{\downarrow} h^{-} f = f_{cp}$ — сглаженная по двум направлениям исходная функция;

$h^{\downarrow} g^{-} f$ — сглаженные по вертикали горизонтальные детали (шумы) исходной функции;

$g^{\downarrow} h^{-} f$ — сглаженные по горизонтали вертикальные детали исходной функции;

$g^{\downarrow} g^{-} f$ — вертикальные детали горизонтальных деталей исходной функции. Если исходная функция достаточно гладкая и интенсивность разрывов мала, то это слагаемое мало по сравнению со слагаемым $h^{\downarrow} h^{-} f$ и им можно пренебречь.

На практике для сокращения объема вычислений можно заменить $\text{Im}(H^{\downarrow} G^{-} f) = \text{Im}(G^{\downarrow} H^{-} f) = \varepsilon (h^{\downarrow} h^{-} f + g^{\downarrow} g^{-} f)$ на $\varepsilon \text{Re}(H^{\downarrow} H^{-} f) = \varepsilon (h^{\downarrow} h^{-} f) + O(\varepsilon^3)$.

Пусть $f(x, y) > 0$ (например, функция, соответствующая плотности или давлению), а функция $\Omega f(x, y)$ определяет абсолютную величину разрывов функции $f(x, y)$. В областях, где $f(x, y)$ гладкая, $\Omega f(x, y) = 0$.

Дискретные функции:

$$\begin{cases} dat_{xy} := \frac{|\text{Im}(H^{\downarrow} H^{-} f)|}{|\text{Re}(H^{\downarrow} H^{-} f)|} \approx \varepsilon \frac{|(h^{\downarrow} g^{-} f + g^{\downarrow} h^{-} f)|}{|(h^{\downarrow} h^{-} f)|}, \\ dat_x := \varepsilon \frac{|\text{Re}(H^{\downarrow} G^{-} f)|}{|\text{Re}(H^{\downarrow} H^{-} f)|} \approx \varepsilon^2 \frac{|\text{Re}(H^{\downarrow} G^{-} f)|}{|\text{Im}(H^{\downarrow} G^{-} f)|} \approx \varepsilon \frac{|(h^{\downarrow} g^{-} f)|}{|(h^{\downarrow} h^{-} f)|}, \\ dat_y := \varepsilon \frac{|\text{Re}(G^{\downarrow} H^{-} f)|}{|\text{Re}(H^{\downarrow} H^{-} f)|} \approx \varepsilon^2 \frac{|\text{Re}(G^{\downarrow} H^{-} f)|}{|\text{Im}(G^{\downarrow} H^{-} f)|} \approx \varepsilon \frac{|(g^{\downarrow} h^{-} f)|}{|(h^{\downarrow} h^{-} f)|}, \end{cases}$$

можно считать аналогами фазы компонент комплекснозначного вейвлет-преобразования.

Взаимодействие слагаемых в числителе первого выражения может быть очень сильным, вплоть до полного сокращения. Поэтому первое выражение можно эффективно применять, только если предполагается, что все разрывы близки к вертикальным и горизонтальным, в противном случае часть разрывов не будет обнаружена.

Если предположить, что разрывы анализируемой функции не "размазываются", то числитель второго выражения пропорционален Ωf там, где имеются сильные разрывы в направлениях, далеких от горизонтального, а в остальных точках — близок к нулю. Аналогично, можно считать, что числитель третьего выражения имеет вид $a\Omega f$, где $a > 0$ — некоторый коэффициент пропорциональности, там, где имеются сильные разрывы в направлениях, далеких от вертикального направления, а в остальных точках мал. Поскольку $h|h^- f = f_{cp}$,

то можно считать, что $\text{Re}(H|H^- f) \approx f$. Пусть $C(x, y) = \frac{\Omega f}{f}$, тогда можно

сформулировать следующие эвристические условия, которые выполняются в точках, подозрительных на наличие разрыва:

$dat_{xy} = \left| \frac{\text{Im}(H|H^- f)}{\text{Re}(H|H^- f)} \right| \approx \varepsilon \frac{a\Omega f}{f} = a\varepsilon C(x, y)$ — в точках, подозрительных на горизонтальные и вертикальные разрывы;

$dat_x = \varepsilon \left| \frac{\text{Re}(H|G^- f)}{\text{Re}(H|H^- f)} \right| \approx \varepsilon \frac{a\Omega f}{f} = a\varepsilon C(x, y)$ — в точках, подозрительных на негоризонтальные разрывы;

$dat_y = \varepsilon \left| \frac{\text{Re}(G|H^- f)}{\text{Re}(H|H^- f)} \right| \approx \varepsilon \frac{a\Omega f}{f} = a\varepsilon C(x, y)$ — в точках, подозрительных на негоризонтальные разрывы.

Пусты $test(dat, C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, & dat_{i,j} \geq \varepsilon C^* \\ 0, & dat_{i,j} < \varepsilon C^* \end{cases}$, тогда для каждого дискретной функции dat функция $test$ служит индикатором точек, в которых могут быть

разрывы соответствующей пространственной ориентации и относительная интенсивность которых больше C^*/a .

Таким образом, точки разрывов с относительной интенсивностью больше C^*/a определяются индикатором:

$$res(C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, & (test(dat_x, C^*)_{i,j} = 1) \vee (test(dat_y, C^*)_{i,j} = 1) \\ 0, & (test(dat_x, C^*)_{i,j} = 0) \& (test(dat_y, C^*)_{i,j} = 0) \end{cases},$$

который задан в узлах сетки, шаг которой вдвое больше шага исходной расчетной сетки.

Алгоритм был использован для анализа двумерной стационарной задачи о сверхзвуковом обтекании тонкого клина в узкой трубе (рисунок 2.7).

На рисунке 2.8 представлены результаты обработки исходного поля, полученные с использованием детектора на основе вейвлета Хаара: $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, $g_0 = 1/\sqrt{2}$, $g_1 = -1/\sqrt{2}$. Видно, что даже этот простейший вейвлет позволяет определить расположение ударных волн (рисунок 2.8(a)). Однако границы волны разрежения постепенно закругляются, что не соответствует действительности. Наиболее же интересный результат заключается в том, что при сравнительно большом пороге чувствительности можно выделить все области, в которых действуют ударные волны или волны разрежения (рисунок 2.8 (б)). Однако следует отметить, что ударные волны уже немного размазываются.

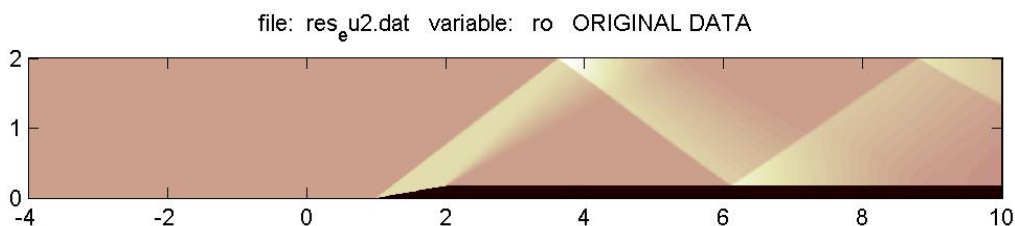


Рисунок 2.7 – Распределение поля плотности

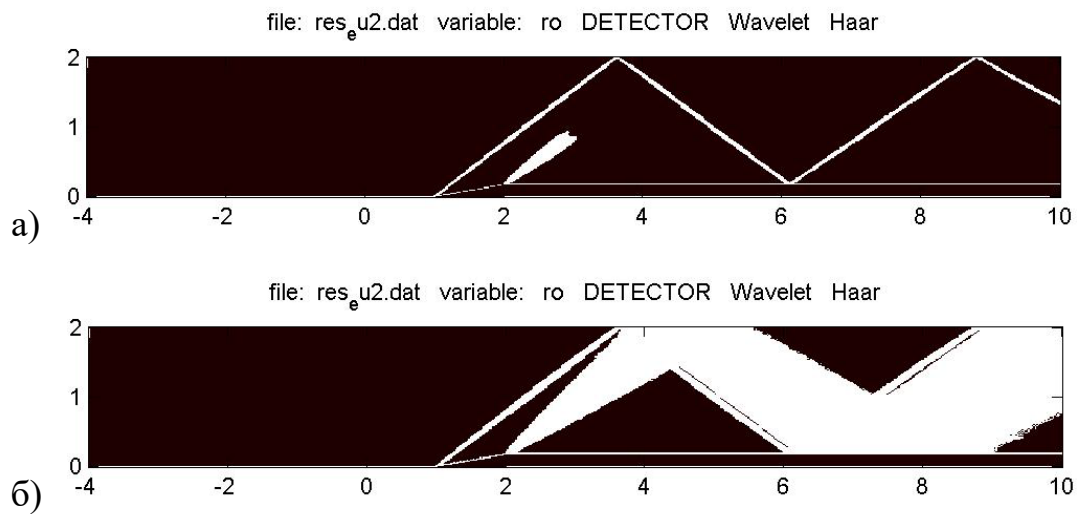


Рисунок 2.8 – Применение детектора на основе вейвлета Хаара с чувствительностями $C^* = 0.004, 0.0004$

На рисунках 2.9, 2.10 и 2.11 представлены результаты обработки исходного поля, полученные с использованием детекторов на основе классических вещественных вейвлетов Добеши, фильтры которых имеют 4, 10 и 20 ненулевых коэффициентов соответственно.

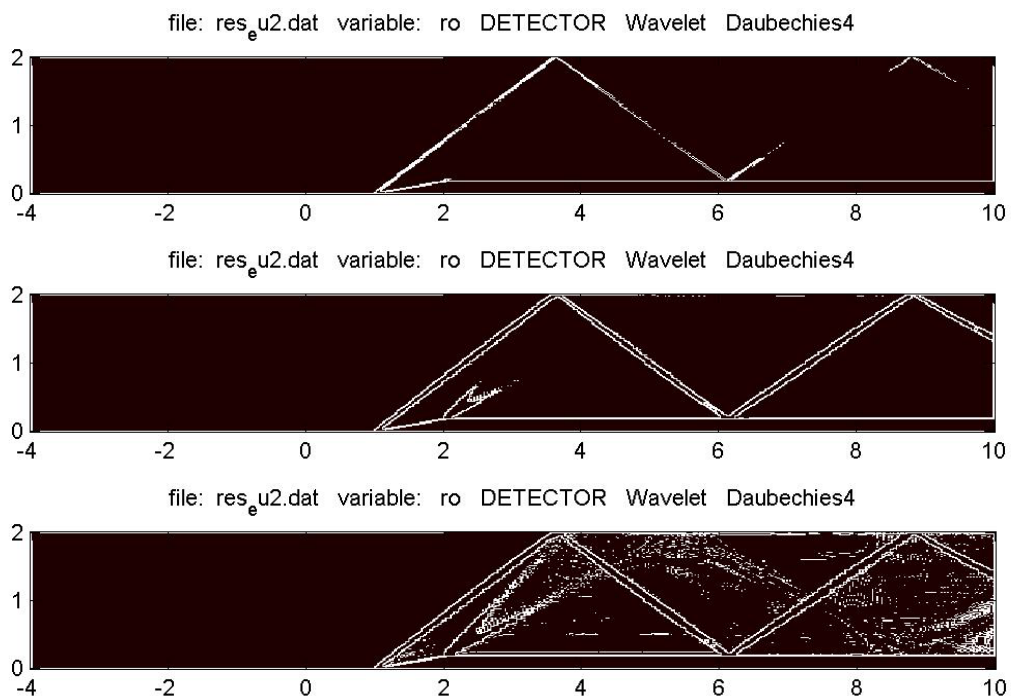


Рисунок 2.9 – Применение детектора на основе вейвлета Добеши 4 с чувствительностями $C^* = 0.008, 0.0004, 0.00015$ (только границы выделяемых областей)

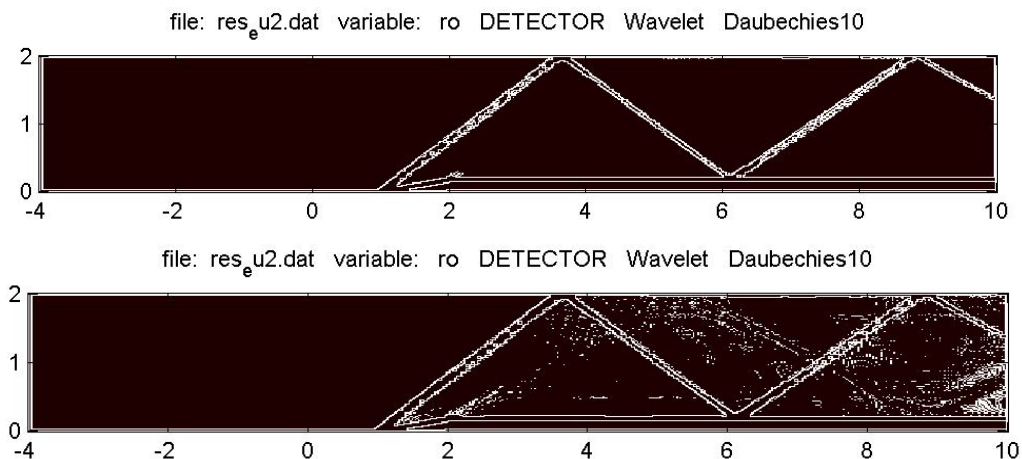


Рисунок 2.10 – Применение детектора на основе вейвлета Добеши 10 с чувствительностями $C^* = 0.0004, 0.00015$ (только границы выделяемых областей)

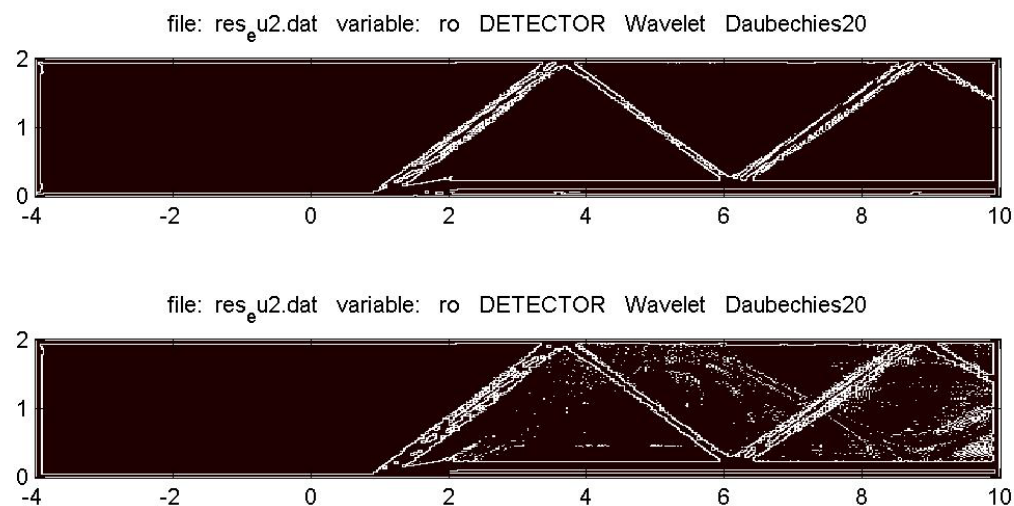


Рисунок 2.11 – Применение детектора на основе вейвлета Добеши 20 с чувствительностями $C^* = 0.0004, 0.00015$ (только границы выделяемых областей)

Все детекторы позволяют локализовать положение ударной волны. Однако чем больше ненулевых коэффициентов имеет фильтр соответствующего вейвлета, тем сильнее размазываются ударные волны. Положение волны разрежения удастся локализовать только при использовании детектора на основе вейвлета Добеши, фильтр которого имеет 4 ненулевых коэффициента, за счет повышения чувствительности. Для детекторов на основе вейвлетов Добеши,

фильтры которых имеют 10 и 20 ненулевых коэффициентов, повышение чувствительности приводит только к появлению дополнительных артефактов.

Так же, как и в предыдущем пункте, оценить адекватность результатов, полученных с использованием детектора, можно, сравнив значения угла наклона ударной волны и углов наклона границ волны разрежения, полученные при помощи детектора, с теоретическими значениями. Аналитическое решение, позволяющее определить расположение ударной волны в вершине клина, хорошо известно [99]; угол наклона β ударной волны находится из уравнения (6.37) [99, том 1, стр. 392]. Для данной задачи этот угол, вычисленный при помощи детектора, оказался равен $\beta \approx 0.824$ при теоретическом (с тремя верными десятичными знаками) значении $\beta \approx 0.827$.

Положение волны разрежения находится при решении задачи Прандтля-Майера и определяется местной скоростью звука. Отклонение вычисленных углов наклона границ волны разрежения от теоретических не превосходит $\Delta_0 \approx 0.035$.

Замечание. Описание алгоритма и результатов локализации в этом пункте соответствуют приведенным в [82]. Тем не менее, очевидно, что на практике можно отказаться от создания комплексных фильтров из пары вещественных. Вместо этого достаточно определить:

$$\begin{cases} dat_x^* = \frac{h^+ g^- f}{h^- h^+ f} \\ dat_y^* = \frac{g^+ h^- f}{h^- h^+ f} \end{cases} \text{ и} \\ test^*(dat^*, C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, dat_{i,j}^* \geq C^* \\ 0, dat_{i,j}^* < C^* \end{cases} .$$

При этом точки разрывов с относительной интенсивностью больше C^*/a будут определяться индикатором:

$$res^*(C^*)_{i,j} = \begin{cases} 1, (test^*(dat_x^*, C^*)_{i,j} = 1) \vee (test^*(dat_y^*, C^*)_{i,j} = 1) \\ 0, (test^*(dat_x^*, C^*)_{i,j} = 0) \& (test^*(dat_y^*, C^*)_{i,j} = 0) \end{cases} .$$

Итак, хотя задаче построения алгоритмов локализации сингулярностей газодинамических полей посвящено мало работ, близкая к ней задача «выделения краев» подробно исследована.

Тем не менее, методы «edge detection» применимы только к определенному кругу задач. В частности, методы «выделения краев» разрабатывались для обработки изображений, то есть данных, которые представляются в виде двумерной матрицы, но в газовой динамике часто используются неструктурированные сетки, а наибольший интерес представляет анализ трехмерных задач.

Очевидно, что при построении детектора особенностей газодинамических полей необходимо учитывать эту специфику задачи. Так, например, при решении этой задачи нерационально тратить огромные вычислительные ресурсы на использование риджлетов. В то же время требуется уделять особое внимание минимизации числа артефактов, поскольку в задачах адаптивного построения расчетных сеток они приводят к чрезмерному измельчению ячеек, а следовательно, и к увеличению времени счета.

2.2 Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет-анализа

Ниже описан линейный по трудоемкости алгоритм выделения и классификации разрывов. В нем используется разложение компонент поля газодинамических величин по базису комплексных симметричных ортогональных вейвлетов и дополнительная обработка с использованием вещественных вейвлетов Добеши. Алгоритм использован для анализа структуры двумерных течений газа при управлении потоком с помощью локального тепловыделения.

При построении алгоритма предполагается, что заданная сеточная вектор-функция является малым возмущением проекции значений (обобщенного) решения уравнений Эйлера на множество узлов некоторой прямоугольной сетки. При этом предполагается, что решения являются гладкими вне достаточного регулярного множества поверхностей (кривых) разрывов самих функций и их производных, а на разрывах выполняются условия Ранкина-Гюгонио.

Предлагаемый алгоритм использует построенное в [81] семейство комплекснозначных симметричных ортогональных вейвлетов Добеши, а препро-

цессинг изучаемого поля использует соображения, близкие к примененным в [81] для повышения контрастности рентгеновских снимков. Существенным же отличием разработанного алгоритма является использование корректора, построенного на основе классических вейвлетов, и дополнительное использование соотношений на разрывах, наличие которых жестко связывает особенности различных компонент вектора газодинамических величин. Представленный алгоритм линеен по объему входных данных и непосредственно обобщается на случай трехмерных задач.

Разработанный алгоритм был апробирован на модельных данных и на расчете течения из класса задач, связанных с изучением управления потоком с помощью локального энерговыделения. Рассматриваемые течения представляют большой интерес с разных точек зрения. В них реализуются такие явления, как взаимодействие ударной волны с прогретым приповерхностным слоем и неустойчивость тангенциального разрыва под действием ударной волны. Сложная конфигурация разрывов нестационарных течений предъявляет высокие требования к численным алгоритмам и методам анализа и обработки результатов.

2.2.1 Применение вейвлетов для выделения и классификации особенностей газодинамических полей

Предполагается, что в результате расчета были получены значения компонент вектора скорости, давление, плотность и так далее, в узлах (или центрах ячеек) равномерной прямоугольной сетки.

Задача алгоритмического выделения сингулярностей поля состоит в том, чтобы каждому узлу сетки $m \in R^3$ сопоставить число $A(m) \in (0, 1, 2, \dots, k)$, где k — число исследуемых особенностей. Так, например, числу 1 соответствует разрыв первого рода соответствующей функции, числу 2 — разрыв производной, а в случае если функция гладкая, $f \in C^2(O_\delta(x_m))$, то $A(m) = 0$. При исследовании газодинамических задач среди разрывов первого рода требуется различать ударные волны, тангенциальные и контактные разрывы, и число k возрастает.

Естественно, что в такой постановке задача математически неразрешима. В более точной постановке необходимо рассматривать последовательности из-

мельчающихся сеток и говорить о нахождении разрыва в окрестности узла. Кроме того, необходимы и структурные предположения о функциональных компактах, которым принадлежит рассматриваемое решение. Однако поскольку математическая теория для многомерных задач газовой динамики пока разработана недостаточно, то подобного рода предельные переходы не рассматриваются, а задача о выделении сингулярностей рассматривается как задача математического моделирования.

2.2.1.1 Детектор на основе симметричных комплексных вейвлетов Добеши

Задача о выделении разрывов в поле газодинамических величин полученных с помощью численного моделирования рассматривалась неоднократно [78], [79]. Принципиальная новизна предлагаемого подхода по сравнению с этими работами состоит в том, что в нем используются фильтры, построенные на основе вейвлетов Добеши с компактными носителями (см. приложения 4, 4.2).

2.2.1.1.1 Симметричные комплексные вейвлеты Добеши

Известно, что в семействе вейвлетов Добеши не существует симметричных вещественных ортогональных вейвлетов с компактным носителем [101]. Это доставляет существенные неудобства в силу того, что продолжение расчетных данных с конечного набора узлов на всю числовую ось, производится из соображений симметрии. Кроме того, в исследуемой задаче использование несимметричных вейвлетов может привести к смещению результатов локализации. Однако комплексные ортогональные вейвлеты, у которых скейлинг-функция симметрична, а вейвлет антисимметричен, были построены [81] и [102] в рамках классической конструкции Добеши. Как обычно, симметричность и антисимметричность функции означает наличие сдвига аргумента, при котором она переходит в четную и, соответственно, нечетную функцию. В этих работах результаты, включая вычисление масок, были получены численно. Однако маски вейвлетов для небольшого числа ненулевых коэффициентов могут быть найдены в явном виде аналитически (приложение 4). Явный вид коэффициентов позволил существенно уточнить результаты, полученные численно в

работе [81], где в частности было показано, что для некоторых скейлинг-функции $\phi(x) = u(x) + i\nu(x)$ с высокой точностью выполняется соотношение:

$$\nu(x) \approx \alpha \partial_x^2 u(x), \text{ где } \alpha \in R. \quad (2.14)$$

Поскольку α мало (приложение 4.2), то можно рассматривать эту величину как малый параметр и получить, что сдвиги $u(x-k)$ с учетом (2.14) являются взаимно ортогональными с точностью до членов порядка α^2 . В этом можно убедиться, заменив в соотношении ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \bar{\phi}(x-k) dx = 0$$

функцию $\nu(x)$ ее выражением через вторую производную $u(x)$ из (2.14). Это свойство используется в следующем пункте при построении детектора.

2.2.1.1.2 Конструкция детектора

Соотношения рескейлинга для скейлинг-функции $\phi(x)$ и соответствующего вейвлета $\psi(x)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(x/2) = \sum_n h_n \phi(x-n), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x/2) = \sum_n g_n \phi(x-n), \end{cases} \quad (2.15)$$

где $h_k = \xi_k + i\eta_k$ и $g_n = (-1)^n h_{1-k}$ — соответствующие зеркальные фильтры, а нормировка функции $u(x)$ определяется условием $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = 1$. Из первого

уравнения системы (2.15) можно получить:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} u(x/2) = \sum_n \xi_n u(x-n) - \sum_n \eta_n \nu(x-n), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \nu(x/2) = \sum_n \eta_n u(x-n) + \sum_n \xi_n \nu(x-n). \end{cases}$$

Считая (с учетом (2.14), малости α и того, что ξ_n и η_n имеют одинаковый порядок малости (приложение 4)) мнимую часть $\nu(x)$ комплексной скейлинг-функции малой по сравнению с вещественной частью $u(x)$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}u(x/2) \approx \sum_n \xi_n u(x-n), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\nu(x/2) \approx \sum_n \eta_n u(x-n). \end{cases} \quad (2.16)$$

Эти соотношения по форме аналогичны обычным соотношениям рескейлинга для ортогональных скейлинг-функции и вейвлета. Описание стандартных алгоритмов разложения ("прямого преобразования") исходного поля по ортогональным вейвлетам и его восстановления ("обратного преобразования") из полученных компонент имеется в [85] (также см. 1.1.8). Прямое вейвлет-преобразование сводится к свертке полученного вектора коэффициентов разложения (для простоты обозначений считаем, что речь идет о бесконечных векторах; на практике часто применяется либо периодизация конечного набора коэффициентов, либо, как в нашем случае, симметризация относительно концов) с низкочастотным и высокочастотным фильтрами и последующему прореживанию полученных компонент разложения вдвое (см. (2.4)). Обратное преобразование состоит в свертке этих компонент с соответствующими транспонированными фильтрами и суммировании полученных сигналов.

Для функций $u(x)$ и $\nu(x)$ соотношения рескейлинга выполнены лишь приближенно (2.16), тем не менее, далее фильтры ξ и η используются для построения детектора, как если бы они были ортогональными вейвлетными низкочастотным и высокочастотным фильтрами, а функции $u(x)$ и $\nu(x)$ — скейлинг-функцией и вейвлетом соответственно.

В качестве исходных данных при использовании вейвлет-анализа служат коэффициенты разложения исходного поля по сдвигам функции $u(x)$. Однако из леммы о сходимости масштабирующих функций (приложение 4.3) следует, что, подбирая должным образом начальный масштаб m , можно добиться, чтобы

в равенстве $f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)u_m(x-k)dx + r_k$ разность между коэффициентами разложения и значениями исходного поля r_k была сколь угодно мала. Поэтому для задачи выделения особенностей газодинамических течений в качестве коэффициентов разложения принимаются значения самого исходного поля в узлах сетки (как уже отмечалось в пункте 2.1.1.7, данный подход широко распространен при использовании вейвлет-анализа).

Далее через A обозначается линейный оператор «свертки с прореживанием», отвечающий фильтру ξ , а через B — аналогичный оператор для фильтра η . Эти операторы действуют на произвольную последовательность f по формулам:

$$A(f) = c, \text{ где } c_n = \sum_m \xi_{m-2n} f_m, \quad (2.17)$$

$$B(f) = d, \text{ где } d_n = \sum_m \eta_{m-2n} f_m. \quad (2.18)$$

Если $\{f_m\}$ — последовательность скейлинг-коэффициентов исходного поля, то $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ задают представление этого поля с вдвое более грубым «разрешением» ([85], пункты 2.1.1.5, 2.1.1.6, 2.1.1.7). Переход от более грубого к более тонкому разрешению осуществляется с помощью операторов A^* и B^* применения транспонированных фильтров (т. е. умножение на соответствующие транспонированные матрицы):

$$A^*(c) = f^{(1)}, \text{ где } f_n^{(1)} = \sum_m \xi_{n-2m} c_m, \quad (2.19)$$

$$B^*(d) = f^{(2)}, \text{ где } f_n^{(2)} = \sum_m \eta_{n-2m} d_m. \quad (2.20)$$

Выражения (2.17-2.20) являются стандартными для кратномасштабного анализа (см. (2.4) и пункты 2.1.1.5, 2.1.1.6, 2.1.1.7). Для ортогональных вейвлетных фильтров h и g выполнено условие точного восстановления $f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)}$.

Предполагается, что исходное поле можно отождествить с коэффициентами $c = \{c_n^0\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ его вейвлет-разложения по системе функций $u(x-n)$. Для того чтобы повысить точность дальнейшей локализации особенностей, к этому полю применяется обратное вейвлет-преобразование A^* . Исходное поле при этом интерпретируется как низкочастотная составляющая некоторого поля $\{c_n^{-1}\}$, заданного на удвоенной сетке, высокочастотная же составляющая этого поля полагается равной нулю, т.е.:

$$c_n^{-1} = \sum_m \xi_{n-2m} c_m^0$$

К полученным данным $\{c_n^{-1}\}$ применяется прямое вейвлет-преобразование, и для дальнейшего анализа используется лишь «высокочастотная часть» отображения, что соответствует переходу к исходной сетке:

$$q_k = \sum_n \eta_{n-2k} c_n^{-1} = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_m \xi_{n-2m} c_m^0. \quad (2.21)$$

Во введенных обозначениях вся эта процедура записывается так:
 $j = BA^*(c^0)$.

При этом низкочастотная составляющая разложения $AA^*(c_n^0) \approx c_n^0$, в силу того, что сдвиги вещественной компоненты скейлинг-функции можно считать ортогональными друг другу.

Если бы в определении преобразований A и B участвовали фильтры h и g , соответствующие скейлинг-функции и вейвлету, то последовательность $\{q_k\}$ была бы тождественно нулевой. В данном случае, однако, целочисленные сдвиги функций $u(x)$ и $v(x)$ не ортогональны. В силу того что вещественная и мнимая части скейлинг-функции связаны соотношением (2.14), полученные значения $\{q_k\}$ можно рассматривать как сглаженную вторую производную от исходных данных в соответствующих точках. Близкие соображения были использованы в [81] в качестве составной части алгоритма, повышающего четкость рентгеновских снимков.

На языке функций вычисление $\{q_k\}$ (2.21) означает, что если рассматривать соответствующую компоненту исходного поля как гладкую функцию $f(x)$, то можно сказать, что полученные после преобразования данные являются коэффициентами разложения этой функции по системе функций $v(x-k)$. Пространства, порожденные наборами функций $u(x-k)$ и $v(x-k)$, неортогональны, и, используя специфическую структуру функций $v(x-k)$, можно получить:

$$q_k = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-k) f(x) dx \approx \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x-k) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-k) (\alpha \partial_x^2 f(x)) dx. \quad (2.22)$$

Последнее равенство получается, если два раза применить интегрирование по частям и учесть финитность функции $u(x)$.

Выражение (2.22) означает, что величины $r_n = q_n \alpha^{-1}$ представляют собой значения в целых точках свертки $\partial_x^2 f(x)$ со «сглаживающим ядром» $u(x)$. Поэтому можно считать, что эти величины задают коэффициенты разложения сглаженной функции $\partial_x^2 f(x)$.

В этих наводящих соображениях опущены уточнения, связанные с приближенной ортогональностью целочисленных сдвигов функций $u(x)$ и $v(x)$.

Итак, основную роль в рассматриваемом детекторе особенностей поля играют коэффициенты:

$$\alpha r_n = \sum_k \eta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m^0. \quad (2.23)$$

Интерпретация этих коэффициентов в терминах исходного поля такова: индексы n , при которых коэффициенты $\{r_n\}$ меняют знак, соответствуют перегибам сглаженной функции $f(x)$ (в частности, сильным разрывам исходного поля, которые при сглаживании превращаются в перегибы (рисунок 2.12 (а, б, г)); локальные экстремумы $\{r_n\}$ соответствуют разрывам первой производной исходного поля (рисунок 2.12 (е, и)).

В экспериментах при построении детектора использовались фильтры симметричного комплексного вейвлета Добеши $dcoms6$, имеющие по шесть ненулевых элементов (приложение 4.4).

2.2.1.1.3 Многомерная версия детектора

Алгоритм, описанный в предыдущем пункте, очевидным образом обобщается на случай поля произвольной размерности (на данном этапе предполагается, что точки поля соответствуют узлам некоторой прямоугольной расчетной сетки).

Для выделения в n -мерном поле разрывов, не параллельных заданному k -му направлению (индекс i_k), надо:

- разбить n -мерную таблицу на векторы (фиксируются все индексы, кроме i_k),
- провести фильтрацию каждого вектора по описанному выше алгоритму,
- в отфильтрованном поле выделить индексы, соответствующие характерным сингулярностям (нули, локальные экстремумы).

Так, в случае трехмерного поля отдельно производится фильтрация по каждому из направлений (x, y, z) и точки помечаются как особые, если отфильтрованное поле имеет в них по соответствующему направлению ноль или локальный экстремум.

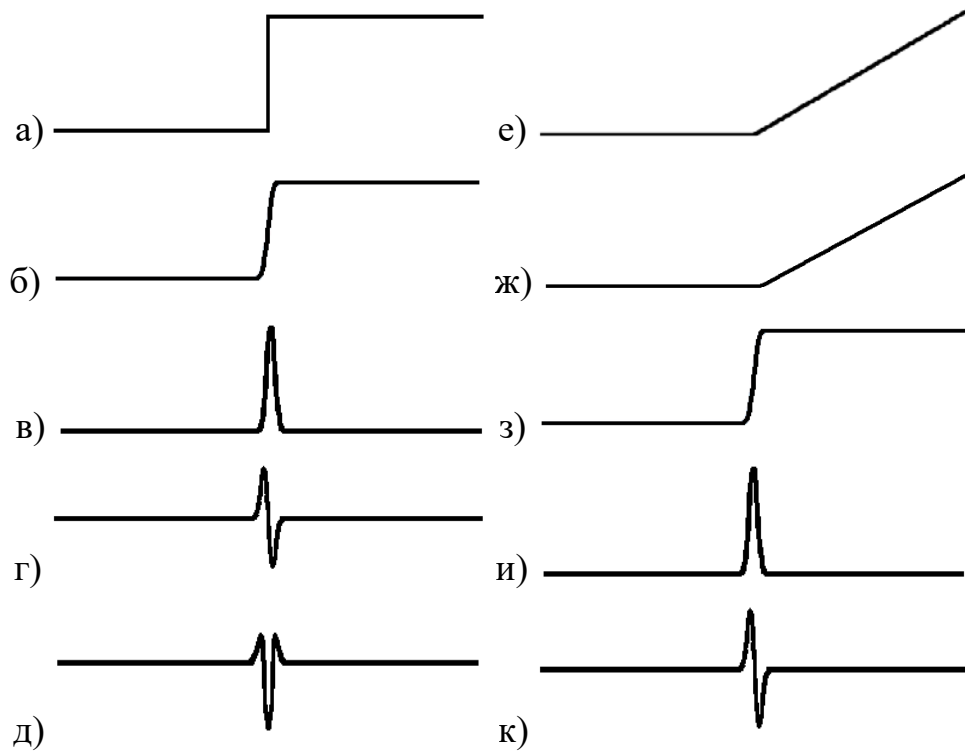


Рисунок 2.12 – Шаблоны разрывов: а) сильный разрыв; б) сглаженный сильный разрыв; в) первая производная сглаженного сильного разрыва; г) вторая производная сглаженного сильного разрыва; д) третья производная сглаженного сильного разрыва; е) слабый разрыв; ж) сглаженный слабый разрыв; з) первая производная сглаженного слабого разрыва; и) вторая производная сглаженного слабого разрыва; к) третья производная сглаженного слабого разрыва

При данном подходе не производится полное вычисление многомерного вейвлет-преобразования, что приводит к сокращению объема вычислений на данном этапе обработки поля. Так, в двумерном случае объем вычислений сокращается в 2,25 раза, а в трехмерном — 4 раза (по сравнению с ситуацией, где используется полное вейвлет-преобразование — как, например, в алгоритме из параграфа 2.1.6).

Таким образом, приведенный алгоритм непосредственно обобщается на произвольную размерность и может быть полезен в анализе широкого круга задач, где требуется быстро оценить расположение сингулярностей поля.

Тем не менее, указанный метод обобщения применим только при анализе расчетов, выполненных на прямоугольных расчетных сетках. Обобщение алгоритма на случай произвольных конформных расчетных сеток будет рассмотрено далее. Построение детектора-корректора

Детектор, описанный в предыдущем пункте, обладает существенным недостатком — разрывам первого рода функции $f(x)$ соответствуют нули последовательности $\{r_n\}$. Поэтому невозможно ввести пороговый параметр, который характеризовал бы интенсивность разрывов.

Кроме того, так как локализация слабых разрывов является гораздо более тонкой задачей в силу их высокой чувствительности к заданию пороговых значений детектора, необходима дополнительная информация об их расположении.

Поэтому дополнительно используется ещё один детектор (далее — «корректор»), который может порождать больше артефактов и приводить к смещению результатов локализации, но у которого сильным разрывам соответствуют локальные экстремумы, а слабым — нули. Из множества особенностей, выделенных посредством детектора, описанного в предыдущем пункте (далее — «основной детектор»), выбрасываются те, которые не обнаруживает корректор. Таким образом, результаты обработки существенно уточняются.

В качестве такого корректора используется свертка с вещественными вейвлетами Добеши подходящего порядка. Известно (см. пункт 2.1.1.4), что свертка с быстроубывающим вейвлетом эквивалентна композиции свертки исходного сигнала со сглаживающим ядром и взятию производной ровно того порядка, сколько нулевых моментов имеет вейвлет. Для корректора необходимо, чтобы порядок производной был нечетным и был больше двух (последнее требуется для локализации волн разрежения). Вещественные вейвлеты Добеши обладают всеми необходимыми свойствами, поэтому они были выбраны для построения корректора. Чтобы получить значения корректора на сетке исходного размера, исходный сигнал сначала интерполируется на более мелкую сетку с помощью обратного вейвлет-преобразования на основе комплексных вейвлетов Добеши, а затем вычисляется вейвлет-разложение с помощью фильтров, соответствующих классическим вещественным вейвлетам Добеши, и анализируется высокочастотная компонента разложения, то есть последовательность $\{s_n\}$:

$$s_n = \sum_k \zeta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m^0, \quad (2.24)$$

где $\{\xi_k\}$ — вещественная часть низкочастотного фильтра комплексного вейвлета Добеши, а $\{\zeta_k\}$ — высокочастотный фильтр классического вейвлета Добеши.

Следует отметить, что выбор указанного способа перехода к более мелкой сетке позволяет оптимизировать алгоритм, поскольку указанные вычисления уже произведены в основном детекторе (2.23).

Чем больше нулевых моментов имеет вейвлет, тем сильнее «размазывается» разрыв (другими словами, тем дальше от фактического положения разрыва начинают появляться нули или максимумы модуля детектора). Поэтому при расчетах использовался вейвлет daub (приложение 4.4) с наименьшим подходящим числом нулевых моментов (3 нулевых момента).

Свертка с выбранным вейвлетом эквивалентна композиции свертки исходного сигнала со сглаживающим ядром и взятию производной третьего порядка. При этом индексы n , при которых коэффициенты $\{s_n\}$ меняют знак, соответствуют разрывам первой производной сглаженной функции $f(x)$ (рисунок 2.12 (е, к)), а локальные экстремумы $\{s_n\}$ соответствуют сильным разрывам (рисунок 2.12 (а, д)).

По аналогии с основным детектором корректор также может быть обобщен на случай многомерного поля, заданного в узлах прямоугольной расчетной сетки.

2.2.1.2 Классификация разрывов

Используя построенные детекторы, можно провести классификацию особенностей течения.

2.2.1.2.1 Определения и обозначения

В результате применения детекторов, описанных в пунктах 2.2.1.1 и 0, к полям плотности и давления, каждый узел расчетной сетки получает некоторый набор из 8 возможных меток, обозначим их: mzd, ced, mzp, ser, med, czd, mer, czp. При этом символ ‘m’ означает, что метка относится к основному детектору, ‘с’ — к корректору, ‘d’ означает, что метка характеризует поле плотности, а ‘p’ — давления. Символы ‘z’ и ‘e’ определяют, какие структуры были выделены в детекторе: ‘z’ соответствует переходам через ноль, а ‘e’ — локальным экстре-

мумам модуля. В случае многомерных расчетных сеток обработка производится по каждому из направлений (подпункт 2.2.1.1.3), при этом для разных направлений один и тот же узел сетки может получить несовпадающие наборы меток. В этом случае итоговый набор меток для узла определяется как объединение всех наборов меток, полученных при обработке по различным направлениям.

Через MZD , CZD , MED , CED , MZP , CZP , MER , CER обозначим множества, состоящие из всех точек сетки имеющих соответствующие метки.

Поскольку существует некоторая погрешность при локализации разрывов, требуется определить новые операции над множествами точек, являющимися подмножествами узлов расчетной сетки.

Введем натуральный параметр R (при вычислениях R брался равным 4), характеризующий допустимую погрешность локализации.

Расстоянием между узлами сетки x_{i_1, \dots, i_n} и x_{j_1, \dots, j_n} будем называть $\max(|i_1 - j_1|, \dots, |i_n - j_n|)$.

Для операции пересечения ($C = A \tilde{\cap} B$): точка $a \in C$, если $a \in A$ и $\exists b \in B$, такое, что расстояние между a и b меньше R .

Для операции разности ($C = A \tilde{\setminus} B$): точка $a \in C$, если $a \in A$ и $\nexists b \in B$, такого, что расстояние между a и b меньше R .

Следует отметить, что при таком определении $A \tilde{\cap} B \neq B \tilde{\cap} A$. Поэтому в формулах следующего подпункта важен порядок выполнения операций над множествами, так как основной детектор обладает более высокой точностью локализации и выделенные с его помощью особенности лишь проверяются с помощью корректора.

2.2.1.2.2 Классификация

Известно, что для любого разрыва с нормальной скоростью распространения D выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_l(u_{n_l} - D) &= \rho_r(u_{n_r} - D); \\ \rho_l(u_{n_l} - D)^2 + p_l &= \rho_r(u_{n_r} - D)^2 + p_r; \\ \rho_l(u_{n_l} - D)u_{\tau_l} &= \rho_r(u_{n_r} - D)u_{\tau_r}; \end{aligned}$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D) \left[e_l + p_l / \rho_l + (u_{n_l} - D)^2 / 2 \right] = \rho_r(u_{n_r} - D) \left[e_r + p_r / \rho_r + (u_{n_r} - D)^2 / 2 \right],$$

которые являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии.

На ударных волнах существует поток массы через поверхность разрыва $\rho_l(u_{n_l} - D) = \rho_r(u_{n_r} - D) = J \neq 0$, в то время как на контактных разрывах $J=0$ и, следовательно, $p_l = p_r$. Таким образом, на ударных волнах рвется и плотность, и давление, а на контактных разрывах — только плотность.

В силу свойств детекторов, описанных в пунктах 2.2.1.1 и 0, ударным волнам соответствует множество точек:

$$(M Z D \tilde{\cap} C E D) \tilde{\cap} (M Z P \tilde{\cap} C E P).$$

Так как на контактных разрывах рвется плотность, но не рвется давление, им соответствует множество точек:

$$(M Z D \tilde{\cap} C E D) \tilde{\setminus} (M Z P \tilde{\cap} C E P).$$

Волнам разрежения соответствует множество точек:

$$(M E D \tilde{\cap} C Z D) \tilde{\cap} (M E P \tilde{\cap} C Z P).$$

Вычисления показали, что, кроме волн разрежения, структуры, которые детекторы локализируют как разрывы производных, возникают на границах, размазанных в результате счета сильных разрывов. Поэтому в последнее множество также входит множество точек, соответствующее границам размазывания ударных волн. Кроме того, дополнительно выделяется множество точек: $(M E D \tilde{\cap} C Z D) \tilde{\setminus} (M E P \tilde{\cap} C Z P)$ — образующих границы размазывания контактных разрывов.

2.2.1.3 Алгоритм локализации и классификации разрывов в двумерном случае, оценка числа необходимых вычислительных операций

На входе алгоритм получает две матрицы размера M на N , значения которых являются дискретизацией полей плотности $\{\rho_{i,j}\}_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ и давления $\{p_{i,j}\}_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ в узлах (или центрах ячеек) прямоугольной сетки.

На первом этапе производится независимая обработка строк и столбцов матриц в соответствии с пунктами 2.2.1.1.2 и 0. Так как все строки и столбцы обрабатываются независимо, алгоритм допускает очевидное распараллеливание.

Далее приводится подробная обработка i -й строки матрицы поля плотности (оценки числа операций приводятся без учета констант, не зависящих от размерности входных данных):

- вычисляется интерполяция данных на мелкую сетку $\hat{\rho}_{i,k} = \sum_m \xi_{k-2m} \rho_{i,m}$, требуется по $K_\xi N$ операций сложения и умножения, где K_ξ — число ненулевых элементов фильтра ξ ;
- вычисляется сглаженная вторая производная $q_{i,k} = \sum_n \eta_{n-2k} \hat{\rho}_{i,n}$, требуется по $K_\eta N$ операций сложения и умножения, где K_η — число ненулевых элементов фильтра η ;
- вычисляются данные для корректора $s_{i,k} = \sum_n \varsigma_{n-2k} \hat{\rho}_{i,n}$, требуется по $K_\varsigma N$ операций сложения и умножения, где K_ς — число ненулевых элементов фильтра ς ;
- локализуется множество переходов второй производной через ноль $\hat{A}_{MZD}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, q_{i,k} q_{i,n} < 0, |q_{i,k}| + |q_{i,n}| \neq 0, n = k - 1 \vee n = k + 1\}$, требуется $4N$ операций;
- локализуется множество переходов корректора через ноль $\hat{A}_{CZD}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, s_{i,k} s_{i,n} < 0, |s_{i,k}| + |s_{i,n}| \neq 0, n = k - 1 \vee n = k + 1\}$, требуется $4N$ операций;
- локализуется множество локальных экстремумов второй производной $A_{MED}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, |q_{i,k}| > \alpha_M, |j_{i,k}| \geq |q_{i,n}|, \forall n \in Z, k - R_M \leq n \leq k + R_M, |q_{i,k}| > |q_{i,k-1}| \vee |q_{i,k}| > |q_{i,k+1}|\}$, где α_M — порог чувствительности, R_M — радиус окрестности, в которой в точке множества A_{MED}^i должен достигаться максимум модуля, требуется $(2R_M + 4)N$ операций; локализуется множество локальных экстремумов корректора

$$A_{CED}^i = \{k \in Z : 1 \leq k \leq N, |s_{i,k}| > \alpha_C, |s_{i,k}| \geq |s_{i,n}|, \\ \forall n \in Z, k - R_C \leq n \leq k + R_C, |s_{i,k}| > |s_{i,k-1}| \vee |s_{i,k}| > |s_{i,k+1}|\},$$

где α_C — порог чувствительности, R_C — радиус окрестности, в которой в точке множества A_{CED}^i должен достигаться максимум модуля, требуется $(2R_C + 4)N$ операций;

- из множества \widehat{A}_{MZD}^i исключаются точки, соответствующие осцилляциям

$$A_{MZD}^i = \left\{ k \in \widehat{A}_{MZD}^i : \left(\forall n \in Z, k+1 \leq n \leq k+R_{MZ}, n \notin \widehat{A}_{MZD}^i \right) \vee \left(\forall m \in Z, k-R_{MZ} \leq m \leq k-1, m \notin \widehat{A}_{MZD}^i \right) \right\},$$

где R_{MZ} — заданный радиус окрестности, число необходимых операций зависит от мощности множества \widehat{A}_{MZD}^i , максимум — $2R_{MZ}N$ операций;

- из множества \widehat{A}_{CZD}^i исключаются точки, соответствующие осцилляциям

$$A_{CZD}^i = \left\{ k \in \widehat{A}_{CZD}^i : \left(\forall n \in Z, k+1 \leq n \leq k+R_{CZ}, n \notin \widehat{A}_{CZD}^i \right) \vee \left(\forall m \in Z, k-R_{CZ} \leq m \leq k-1, m \notin \widehat{A}_{CZD}^i \right) \right\},$$

где R_{CZ} — заданный радиус окрестности, число необходимых операций зависит от мощности множества \widehat{A}_{CZD}^i , максимум — $2R_{CZ}N$ операций;

- узлам сетки, соответствующим элементам множеств A^i , присваиваются соответствующие метки из подпункта 2.2.1.2.1.

Таким образом, для обработки одной строки матрицы поля плотности требуется $(2K_\xi + 2K_\eta + 2K_\varsigma + 4 + 4 + 2R_M + 4 + 2R_C + 4 + 2R_{MZ} + 2R_{CZ})N$ операций. На практике $K_\xi = K_\eta = K_\varsigma = 6$, а $R_M = R_C = R_{MZ} = R_{CZ} = 3$ и число операций соответственно равно $76N$. Для обработки всех строк и столбцов матрицы поля плотности требуется $152MN$ операций. Столько же операций требуется на обработку матрицы поля давления.

После обработки полей плотности и давления производится классификация узлов сетки в соответствии с подпунктом 2.2.1.2.2.

2.2.2 Численные эксперименты

В этом параграфе приведены результаты применения разработанного алгоритма к численным полям для модельной задачи и задачи о взаимодействии разрывов течения в канале, под действием импульсного вложения энергии [103].

Рассматриваемое течение представляет большой интерес с разных точек зрения. В нем реализуются такие явления, как взаимодействие ударной волны с прогретым приповерхностным слоем и неустойчивость тангенциального разрыва под действием ударной волны. Сложная конфигурация разрывов нестационарного течения предъявляет высокие требования к численным алгоритмам и методам анализа и обработки результатов.

2.2.2.1 Тестовый пример

Исходные данные заданы на прямоугольной сетке и содержат сильный разрыв вдоль кривой $(j-i)/1.4 = 60 \cdot \sin(\pi(i+j)/500)$, кроме того на данные наложен шум $\omega_{i,j} = 0.01 \cdot \sin(30i) \cdot \sin(30j)$:

$$c_{i,j} = \begin{cases} 3 + 0.01 \sin(30i) \sin(30j), & (j-i)/1.4 < 60 \cdot \sin(\pi(i+j)/500) \\ 2 + 0.01 \sin(30i) \sin(30j), & (j-i)/1.4 \geq 60 \cdot \sin(\pi(i+j)/500) \end{cases},$$

где $i, j \in Z$, $0 \leq i < 500$, $0 \leq j < 500$.

Результат локализации разрывов с помощью основного детектора представлен на рисунке 2.13. Сильный разрыв удалось успешно локализовать, ошибка точности локализации не превышает размер одной ячейки сетки.

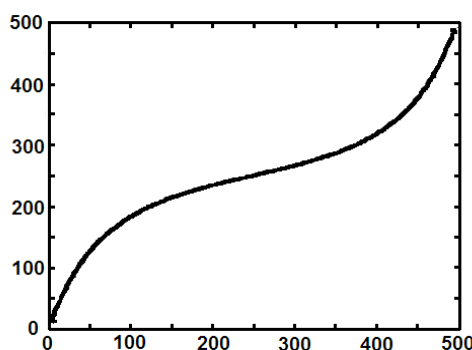


Рисунок 2.13 – Результаты обработки тестовых данных

2.2.2.2 Численное моделирование

Моделирование проводилось в рамках математической модели нестационарных 2D уравнений Эйлера. Расчет производился «сквозным» образом на неподвижной сетке с размазыванием разрывов. Постановка задачи представлена на рисунке 2.14. В начальный момент времени плоская ударная волна с числом Маха $M = 2.9$ располагается в сечении $x = 0$. В эксперименте в объемную

часть разряда $0 < x < 2$, $|y| < 1.1$ (область 2 на рисунке 2.14) вкладывалось 0.83 Дж, в листы около стенок $0 < x < 2$, $1.1 < |y| < 1.2$ (области 3 на рисунке 2.14) — по 0.11 Дж. На основании ранее проведенных исследований [104] предполагалось, что в поступательные степени свободы мгновенно переходит 50% вложенной энергии.

Равномерное по времени и пространству вложение энергии $\Delta E/V$ в постоянный поток приводит к росту давления на величину $\Delta p = (\gamma - 1) \Delta E/V$ при сохранении плотности и скорости. В расчетах плотность и давление были отнесены к величинам в невозмущенном газе — область 1 на рисунке 2.14.

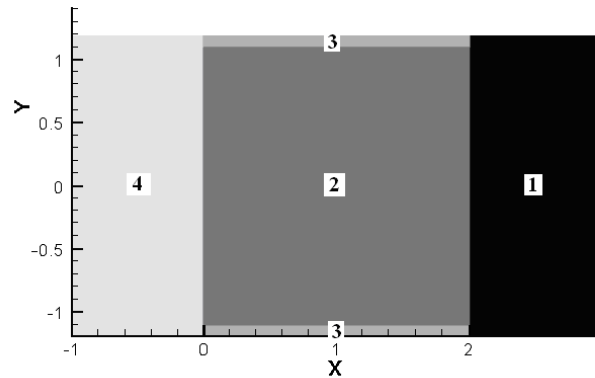


Рисунок 2.14 – Начальное распределение давления для 2D расчета

Таким образом, в начальный момент времени существуют 5 областей с постоянными значениями газодинамических величин:

- невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, |y| < 1.2, \rho_1 = 1.0, u_1 = 0.0, v_1 = 0.0, p_1 = 1.0,$$

- объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, |y| < 1.1, \rho_2 = 1.0, u_2 = 0.0, v_2 = 0.0, p_2 = 4.9309,$$

- пристеночные области («плазменные листы»):

$$0 < x < 2, |y| < 1.2, \rho_3 = 1.0, u_3 = 0.0, v_3 = 0.0, p_3 = 12.4625,$$

- область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, |y| < 1.2, \rho_4 = 3.7629, u_4 = 2.5194, v_4 = 0.0, p_4 = 9.6450.$$

Расчеты 2D течения проводились на сетке, содержащей 1280x256 ячеек в полуплоскости $y > 0$ с учетом симметрии течения.

2.2.2.3 Исследование одномерной задачи

На границах областей, описанных в предыдущем пункте, в начальный момент происходят распады разрывов с образованием волн разрежения, ударных волн и тангенциальных разрывов. В последующие моменты времени течение характеризуется достаточно сложным процессом движения и взаимодействия этих вторичных разрывов. Для исследования такого течения целесообразно предварительно рассмотреть упрощенную одномерную задачу. Поскольку большая часть энергии приходится на объемную часть разряда, можно ожидать, что в одномерном течении, возникающем при отсутствии вложения энергии в пристеночные листы (области 3 на рисунке 2.14), некоторые существенные детали реального двумерного течения будут выявлены. На рисунке 2.15 представлена начальная конфигурация разрывов.

Энергия вкладывается на отрезке АВ. В результате распада разрыва в точке А формируются ударная волна АІ, тангенциальный разрыв АН, ударная волна АG. Распад разрыва в точке В дает волну разрежения ЕВF, тангенциальный разрыв ВD, ударную волну ВС. Начальные интенсивности перечисленных разрывов зависят от двух факторов — числа Маха падающей ударной волны и количества вложенной энергии.

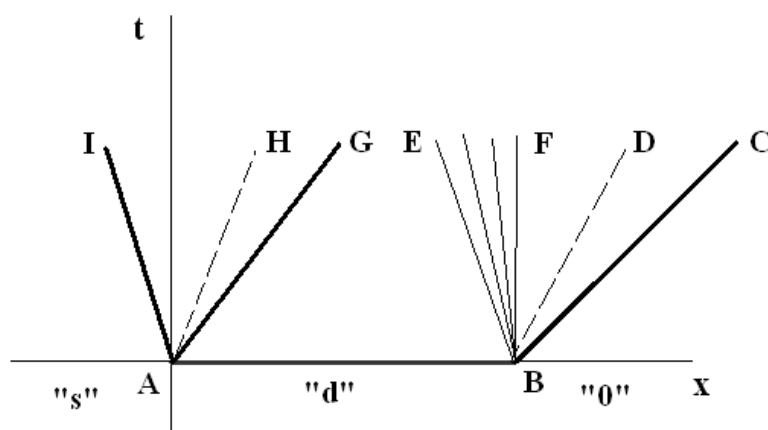


Рисунок 2.15 – Начальное расположение разрывов в одномерной задаче

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. Ос-

новная часть расчетов проводилась без выделения разрывов на сетке, содержащей 2048 ячеек. Использовался одномерный вариант обобщенной разностной схемы С. К. Годунова 2-го порядка аппроксимации. Линии постоянной плотности представлены на рисунке 2.16.

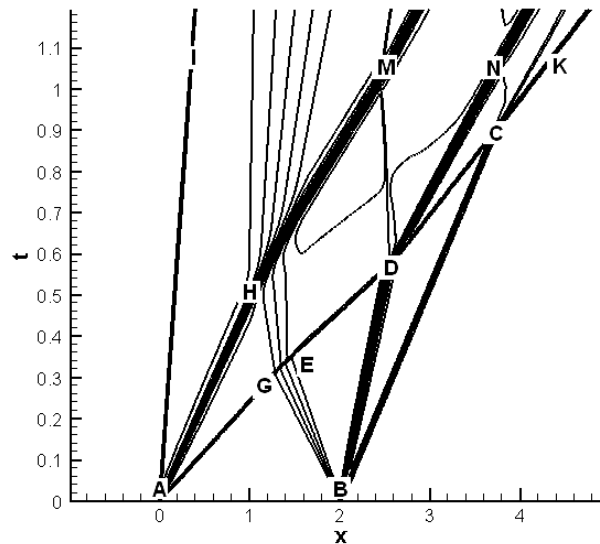


Рисунок 2.16 – Линии постоянной плотности в одномерном продольном течении

Отрезок АВ соответствует области энерговыведения в момент времени $t=0$. С течением времени ударная волна АG последовательно взаимодействует с волной разрежения GBE и тангенциальным разрывом BD. В более поздний момент времени эта волна догоняет ударную волну BC, в результате чего формируется ударная волна СК, являющаяся правой границей области возмущенного течения. Интенсивность этой результирующей ударной волны с течением времени выходит на уровень исходной падающей ударной волны. Вложенная энергия расходуется главным образом на формирование прогретой области между тангенциальными разрывами M,N.

2.2.2.4 Исследование двумерной задачи

Начальные стадии двумерного течения, возникающего при одновременном вложении энергии в объемную область и плазменные листы, можно условно охарактеризовать как суперпозицию одномерных течений (продольного и поперечного).

Вблизи плоскости симметрии ($y=0$) течение близко к продольному одномерному (пункт 2.2.2.3). Однако около стенок ударные волны I_1I , C_1C , G_1G и тангенциальные разрывы H_1H , D_1D (рисунок 2.17) движутся с более высокими скоростями. Кроме того, на границах плазменных листов в начальный момент образуются разрывы, распространяющиеся и взаимодействующие в поперечном направлении. Линия тангенциального разрыва D_1D , которая в начальный момент совпадала с правой границей области энерговыведения, достаточно быстро оказывается искривленной в силу ускоренного движения вблизи стенок. Эта стадия течения изображена на рисунках 2.18(а) и 2.18 (б).

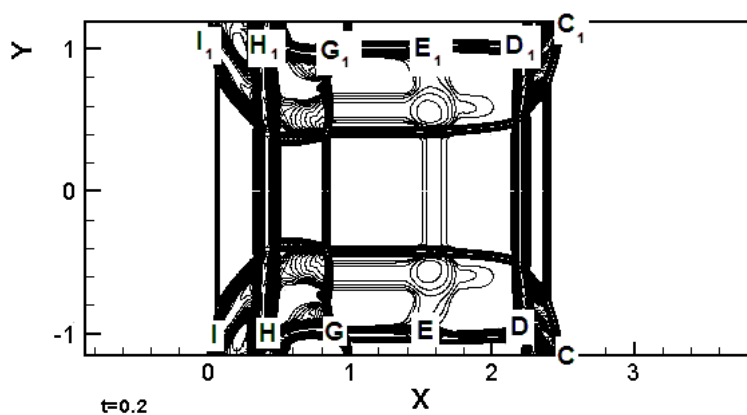


Рисунок 2.17 – Изолинии модуля градиента плотности

В некоторый момент времени ударная волна G_1G (также искривленная) догоняет контактный разрыв D_1D . В результате взаимодействия этих разрывов образуются две ударные волны: отраженная и проходящая. Амплитуда возмущений тангенциального разрыва D_1D увеличивается — рисунки 2.18(в)–(е).

Такие свойства течения позволяют говорить о своеобразном проявлении неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [105], [106].

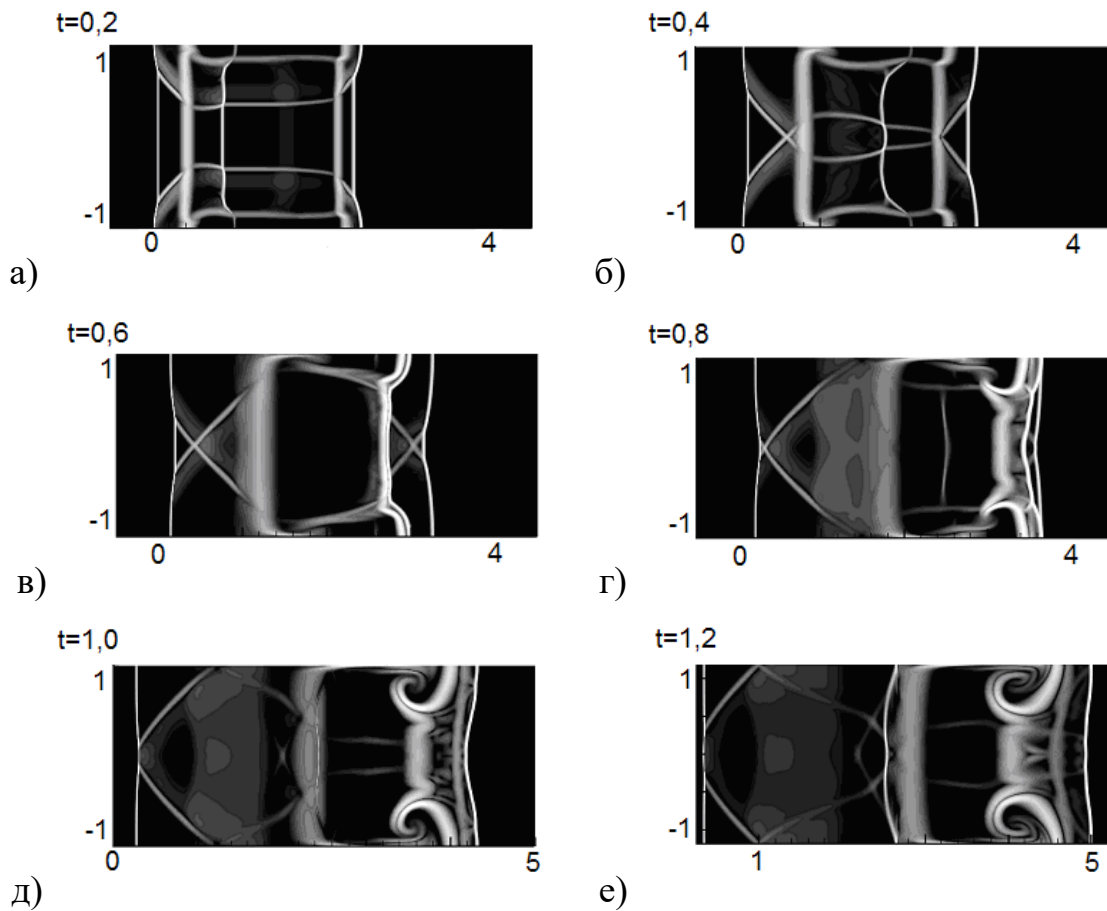


Рисунок 2.18 – Распределение модуля градиента плотности в последовательные моменты времени

2.2.2.5 Выделение и классификация разрывов

В результате применения детектора к исходной дискретной функции получается матрица, ячейки которой соответствуют центрам ячеек расчетной сетки. Нулевые элементы матрицы соответствуют гладкому течению, ненулевые — характеризуют тип особенности. Полученный в таком виде результат может быть использован в вычислительных алгоритмах без непосредственного (визуального) анализа.

На рисунках 2.19, 2.20 и 2.21 представлены результаты локализации разрывов плотности течения в различные моменты времени. Соответствующие распределения модуля градиента плотности представлены на рисунках 2.18 (а)–(в). Черные линии соответствуют сильным разрывам, серые — слабым разрывам и границам размазывания сильных разрывов, поскольку результаты получены без анализа поля давления, классификация разрывов неполна. При локализации разрывов в корректоре использовался нулевой порог чувствительности

$\alpha_c = 0$, поэтому на рисунках присутствуют артефакты (структуры и шумы, которые не соответствуют реальным разрывам). Влияние порога чувствительности на результат локализации представлены будут представлены в следующих разделах

Четко локализируются вертикальные ударные волны. Сильные разрывы, окруженные серыми линиями, соответствуют размазанному контактному разрыву. В области между проходящей ударной волной и контактным разрывом (рисунок 2.19 $x \in [0.4, 0.8]$, рисунок 2.20 $x \in [0.9, 1.7]$, рисунок 2.21 $x \in [1.2, 2.6]$) формируется зона шумов. Для локализации особенностей течения в этой области требуется использовать разностную схему более высокого порядка аппроксимации при проведении расчетов течения.

Очевидно, что отдельным точкам на рисунках не соответствуют никакие физические объекты. В следующем пункте показано, что при более точном расчете в окрестности этих точек могут быть локализованы новые структуры.

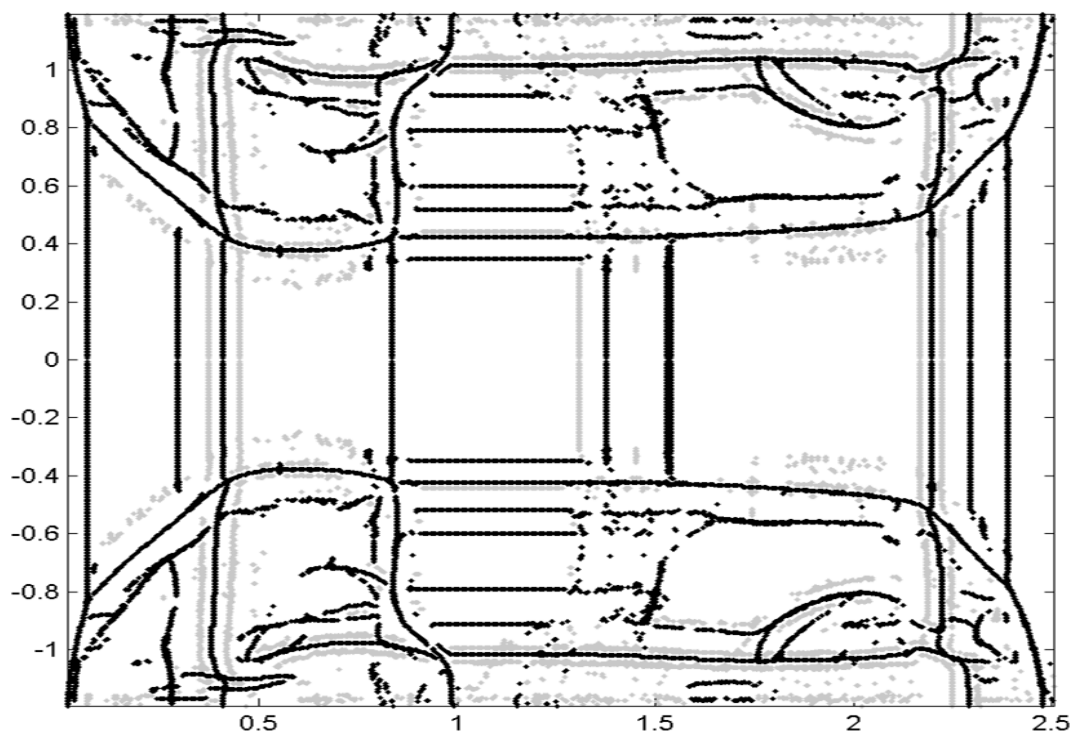


Рисунок 2.19 – Локализация разрывов поля плотности в момент времени 0.2

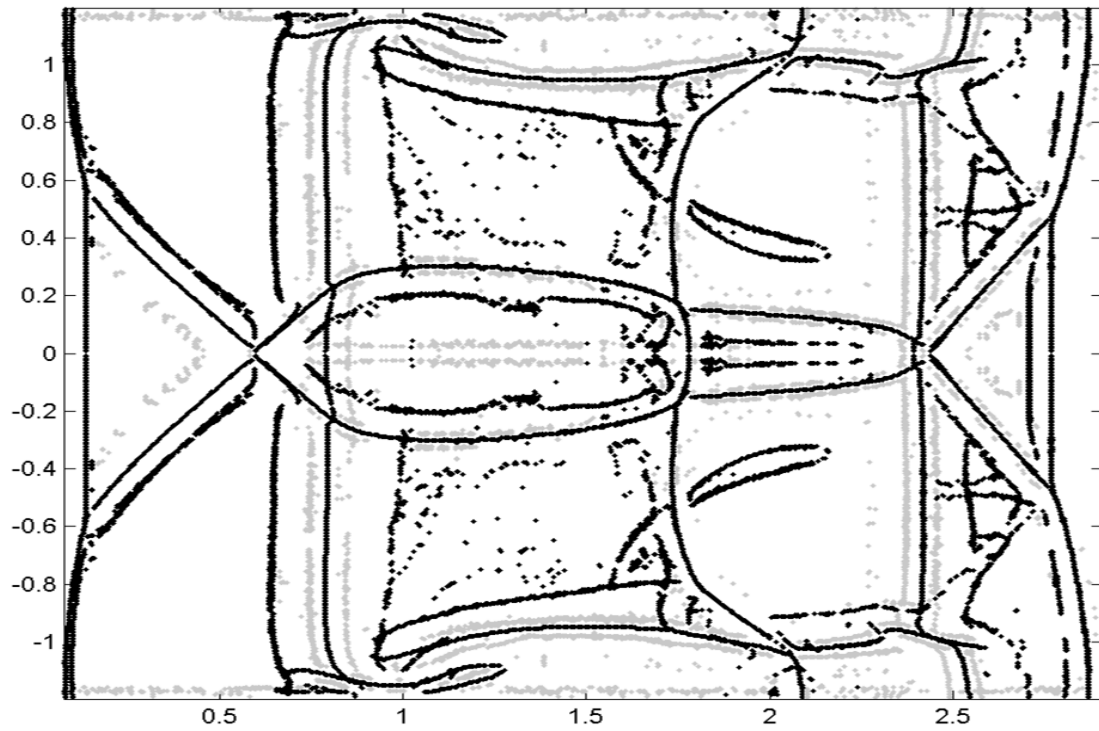


Рисунок 2.20 – Локализация разрывов поля плотности в момент времени 0.4

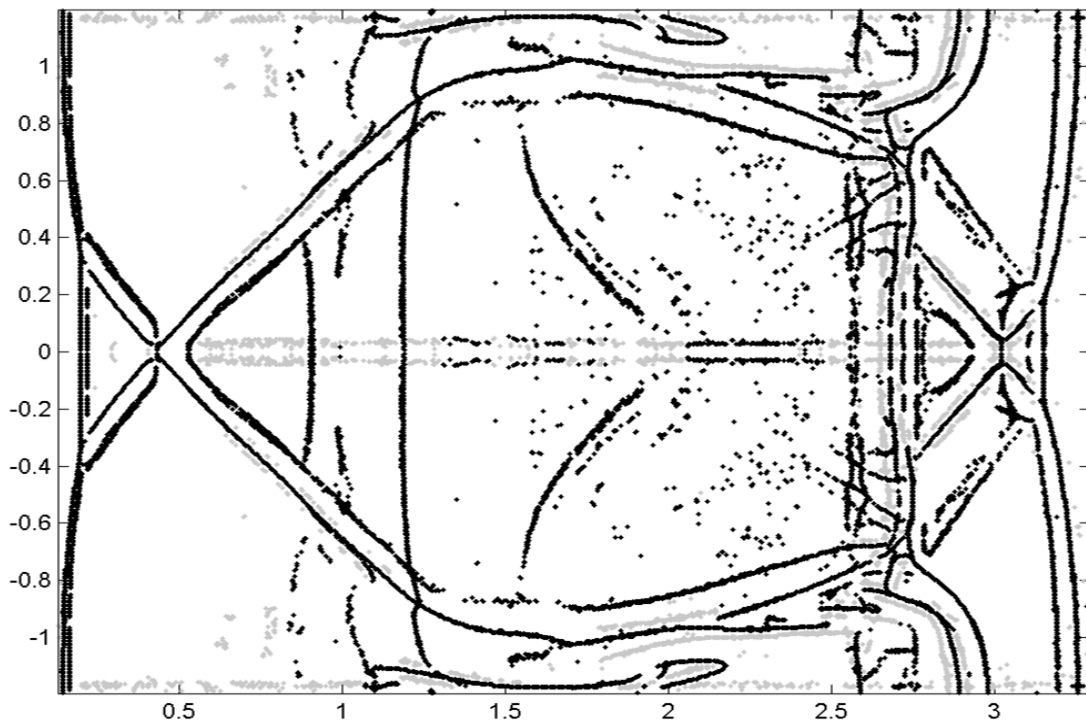


Рисунок 2.21 – Локализация разрывов поля плотности в момент времени 0.6

2.2.2.6 Сравнение результатов локализации разрывов в расчетах, полученных по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации

Представленный алгоритм выделения особенностей может быть использован для исследования свойств различных разностных схем. В частности, был выполнен сравнительный анализ разностных решений, полученных по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации (рисунки 2.22, 2.23). Поскольку течение симметрично относительно середины трубы, на последующих рисунках представлены данные только для верхней половины расчета.

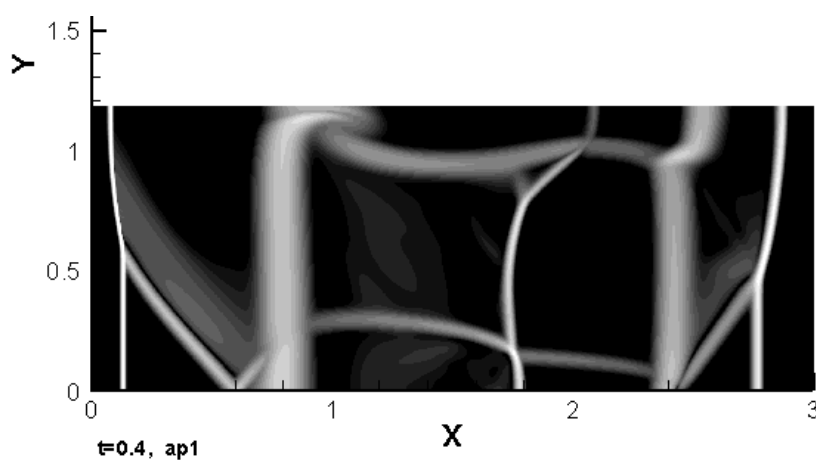


Рисунок 2.22 – Распределение градиента плотности в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации

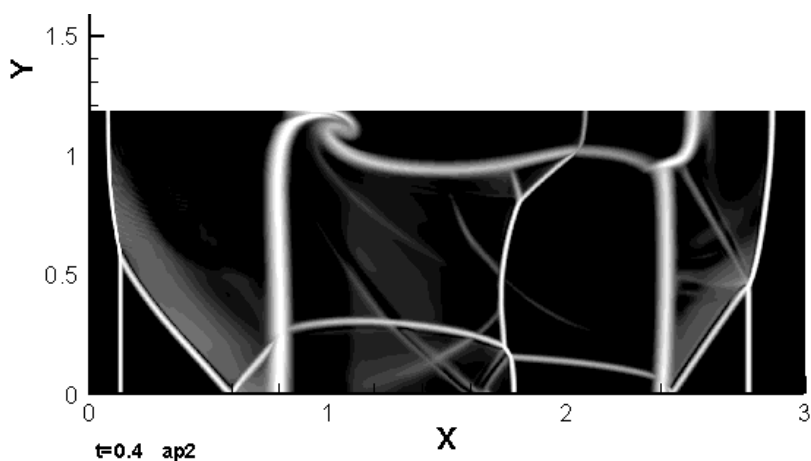


Рисунок 2.23 – Распределение градиента плотности в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации

В расчете, выполненном по схеме первого порядка аппроксимации, контактные разрывы сильно размазываются (рисунок 2.22). На рис 2.24 показано положение разрывов, а на рисунке 2.25 — границы размазывания разрывов.

В расчете, выполненном по схеме второго порядка аппроксимации, разрывы размазываются значительно слабее (рисунок 2.23). Все «вертикальные» разрывы локализируются в тех же точках, что в расчете, выполненном по схеме первого порядка, однако «горизонтальные» разрывы локализованы более точно. В зоне $[0.9, 1.7] \times [0.3, 0.8]$ на рисунке 2.24 наблюдается зашумление, а в расчете, выполненном по схеме второго порядка аппроксимации (рисунок 2.26), в этой области локализованы новые структуры, которые носят характер разрывов плотности (контактные).

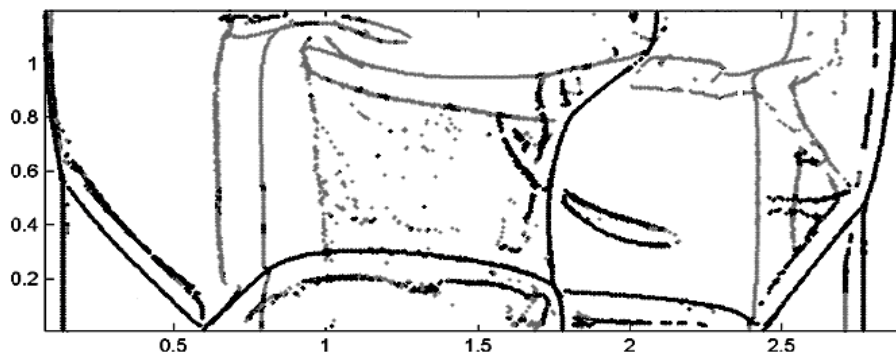


Рисунок 2.24 – Разрывы, локализованные в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации. Черные линии — ударные волны, серые — контактные разрывы

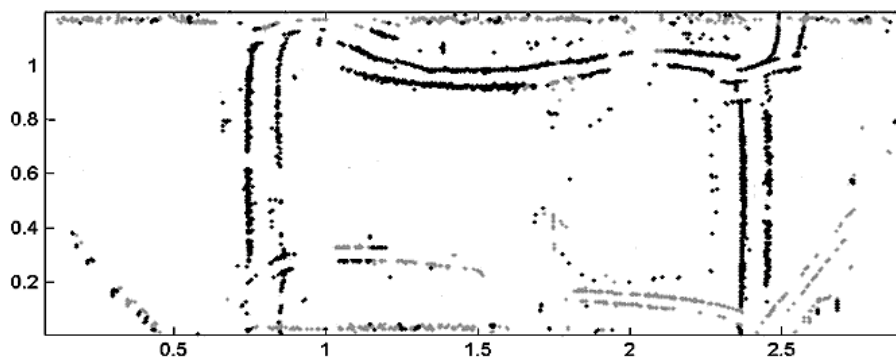


Рисунок 2.25 – Разрывы, локализованные в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации. Светлые линии — границы размазывания ударных волн, темные — границы размазывания контактных разрывов

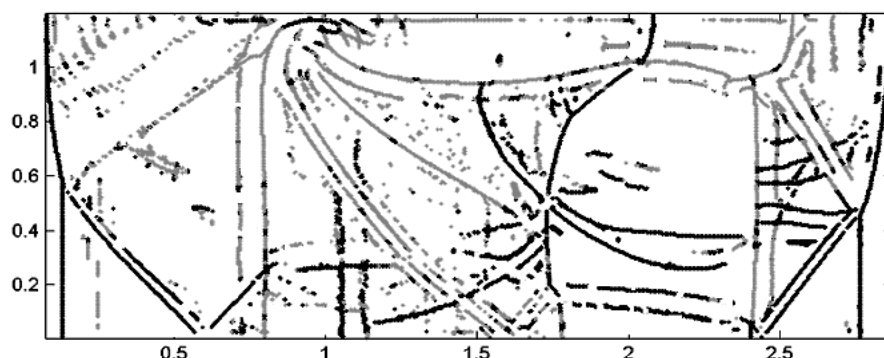


Рисунок 2.26 – Разрывы, локализованные в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации. Черные линии — ударные волны, серые — контактные разрывы

2.2.2.7 Обработка исходных данных методом С.Б. Базарова

Для сравнения в этом параграфе представлены результаты локализации разрывов методом, описанным в параграфе 2.1.8, в полях плотности расчетов, выполненных по схемам первого и второго порядков аппроксимации. Для удобства в алгоритме выделяются два этапа. На первом этапе выделяются все “подозрительные точки” (множество N_1) и из этого множества выбираются те точки, в которых по некоторому направлению достигается максимум градиента плотности (множество N_2). Окончательный результат локализации (множество N_3) получается на втором этапе после удаления ложных структур из множества N_2 .

При сравнении результатов локализации методом Базарова с результатами, полученными в пункте 2.2.2.5 (рисунки 2.24–2.30), видно, что на втором этапе обработки исчезает ряд важных структур, например, фронт ударной волны в зоне $[2.7, 2.9] \times [0, 0.4]$ и часть контактного разрыва в зоне $[0.7, 0.8] \times [0.4, 1]$. При этом сохраняется часть артефактов. В то же время часть артефактов, присутствующих на рисунках 2.24–2.26, отсутствует на рисунках 2.27–2.30. Для удаления этих артефактов требуется введение порога в корректоре (параграф 2.3.4).

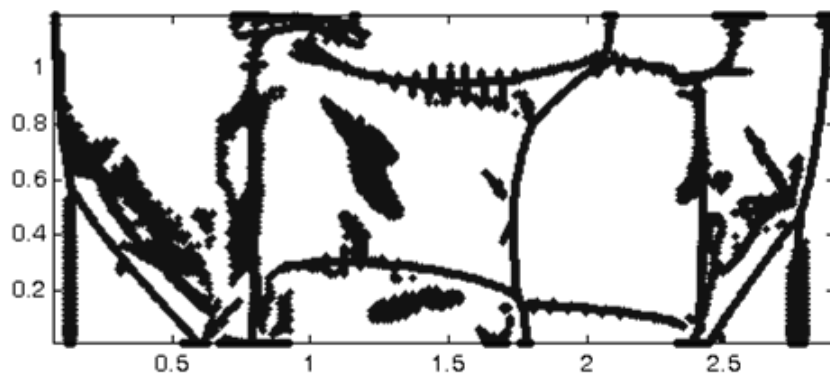


Рисунок 2.27 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации (первый этап)

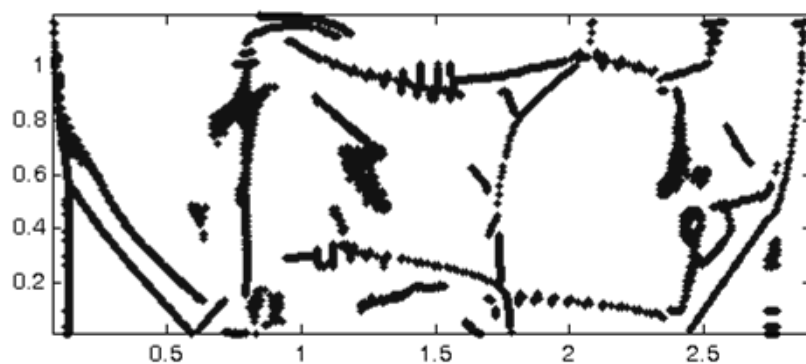


Рисунок 2.28 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 1-го порядка аппроксимации (второй этап)

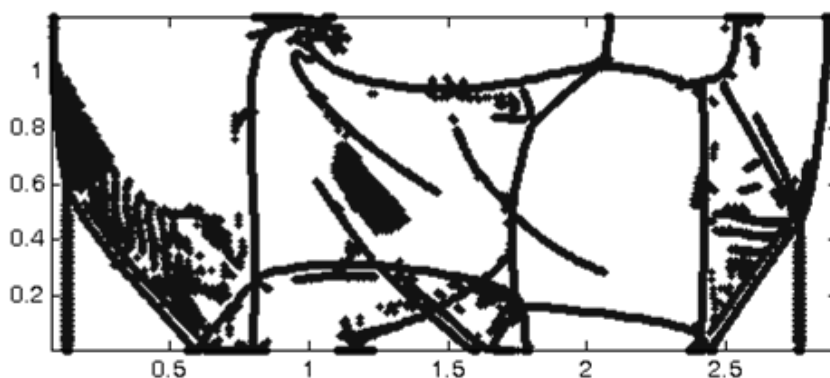


Рисунок 2.29 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации (первый этап)

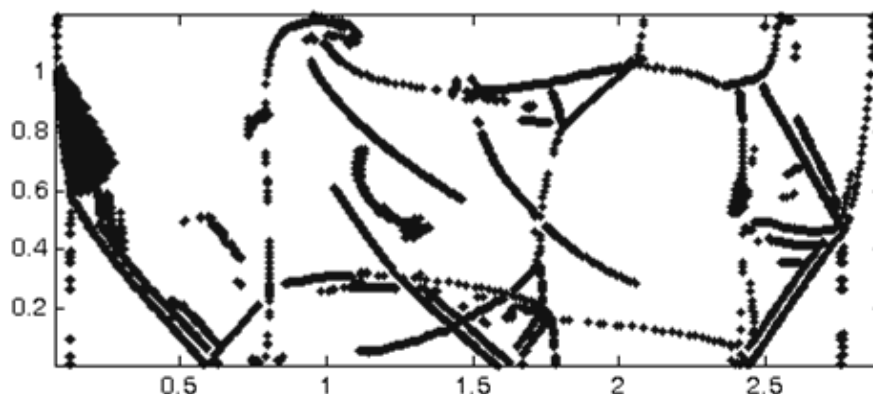


Рисунок 2.30 – Разрывы, локализованные в поле плотности методом Базарова в расчете, полученном по схеме 2-го порядка аппроксимации (второй этап)

Представленный в этом разделе алгоритм позволяет проводить локализацию и классификацию разрывов в расчетах газодинамических течений, полученных методом сквозного счета на прямоугольной сетке. Достоинством этого алгоритма является то, что он не требует тонкой настройки и оказывается эффективным (выделяет все разрывы при умеренном числе артефактов) даже при задании нулевых порогов чувствительности. Это особенно важно для приложений, требующих автоматизированного использования детектора и задач, в которых в одном расчете могут присутствовать разрывы разной интенсивности. В следующих главах будут более подробно рассмотрены свойства построенного детектора, а детектор будет обобщен на случай произвольных расчетных сеток.

2.3 Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей и оценка качества работы детектора

Большой интерес представляет проведение сравнительного анализа особенностей, проявляющихся на различных уровнях вейвлет-разложений полей газодинамических величин, найденных методом сквозного счета. Численные эксперименты показывают, что использование нескольких шагов кратномасштабного анализа позволяет получить дополнительную информацию о структуре разрывов в течении. Кроме того, оказалось, что построенный детектор позволяет локализовать артефакты течения, возникающие из-за локальных

неточностей в дискретизации. При решении задачи локализации сингулярностей следует учитывать, что в одном и том же расчете могут присутствовать эффекты, соответствующие разным масштабам, такие как разрывы разных интенсивностей, шумы разных частот и амплитуд, структуры обусловленные типом разностной схемы и численных методов. Поэтому перед решением задачи о выделении и классификации особенностей необходимо решить задачу о разложении исходных данных по уровням, так что на каждом уровне разложения остаются только структуры соответствующего масштаба. После разложения можно либо исключить из обработки структуры, соответствующие мелким масштабам, как несущественные, либо проводить полный анализ.

Вейвлетный анализ предлагает естественный метод многомасштабного разложения исходного сигнала. На каждом шаге разложения сигнал разлагается на две компоненты: сглаженную низкочастотную и зашумленную высокочастотную. На каждом последующем шаге происходит разложение низкочастотной компоненты разложения. При этом каждый последующий уровень разложения соответствует более грубой сетке.

Ниже проведен сравнительный анализ сингулярностей и артефактов, проявляющихся на различных уровнях вейвлетного разложения исходного поля, выполненного при помощи различных вещественных и комплексных вейвлетов. Также исследован вопрос о том, особенности какого типа и интенсивности выделяются детектором наиболее надежно. Для определения интенсивности особенностей при локализации разрывов вводились различные пороги чувствительности.

Кроме того, большой интерес представляет сравнительный анализ разрывов, локализованных в расчетах одной и той же задачи, произведенных на различных сетках, таких, что при разложении расчета, проведенного на более мелкой сетке, переходим на сетку, соответствующую расчету, проведенному на грубой сетке. При этом можно определить: насколько точно локализованы разрывы на грубой сетке, в каких областях чаще проявляются счетные артефакты, а также исследовать вопрос о допустимости отождествления поля с коэффициентами его вейвлет-разложения.

2.3.1 Численное моделирование

В качестве объекта, на котором отработывалась методика, была выбрана задача об эволюции и взаимодействии разрывов в канале под действием импульсного вложения энергии из пункта 2.3.2.

В разделе «Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа» и в [103] был проведен подробный анализ этого течения для расчета, выполненного по разностной схеме первого порядка аппроксимации на сетке, содержащей 1280x256 ячеек. Там также представлено решение одномерного варианта этой задачи, при исключении вложений энергии в областях 3. Это решение позволило проследить эволюцию вертикальных разрывов в начальные моменты времени и теоретически обосновать полученные результаты.

Для данной главы были выполнены еще два варианта расчета этой же задачи. Оба расчета выполнены по схеме второго порядка аппроксимации. Расчет 1 выполнен на сетке, содержащей 2048x256 ячеек, а расчет 2 — на сетке, содержащей 4096x512 ячеек.

Для получения более точных оценок были проведены расчеты упрощенного варианта этой задачи, в котором отсутствуют дополнительные вложения энергии в областях $0 < x < 2$, $1.1 < |y| < 1.2$. Моделирование проводилось в рамках уравнений Эйлера. Расчеты были выполнены в области $-1 < x < 3$, $0 < y < 1.2$. На границе $y = 0$ было задано условие симметричности течения относительно горизонтальной оси, на границе $y = 1.2$ — условие твердой стенки, а на границах $x = -1$, $x = 3$ — условия свободной границы.

В начальный момент времени существуют три области с постоянными значениями газодинамических величин:

- невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, |y| < 1.2, \rho_1 = 1.0, u_1 = 0.0, v_1 = 0.0, p_1 = 1.0,$$

- объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, |y| < 1.2, \rho_2 = 1.0, u_2 = 0.0, v_2 = 0.0, p_2 = 4.9309,$$

- область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, |y| < 1.2, \rho_3 = 3.7629, u_3 = 2.5194, v_3 = 0.0, p_3 = 9.6450.$$

Очевидно, что задача по сути является одномерной. Указанный подход к расчету обусловлен желанием проследить за реальными счетными эффектами на примере достаточно простой для анализа задачи. В начальный момент времени происходит распад разрывов в начальных данных. Разрыв при $x = 0$ распадается на две ударные волны и контактный разрыв между ними, а разрыв при $x = 2$ — на идущую вправо ударную волну, идущую влево волну разрежения и контактный разрыв между ними (пункт 2.2.2.3).

Расчеты проводились в трех блоках, соответствующих различным начальным условиям. Были осуществлены два варианта расчета: в первом каждому расчетному блоку соответствует сетка, содержащая 400×400 ячеек, а во втором — сетка, содержащая 200×200 ячеек. Анализ расчетов проводился в блоке $0 < x < 2, 0 < y < 1.2$ в момент времени $t = 0.2$, когда разрывы, порожденные разрывами в начальных данных, еще не начали взаимодействовать. В этом случае положение разрывов можно определить аналитически. Ударные волны и контактный разрыв, порожденные разрывом в начальных данных при $x = 0$, расположены в окрестностях прямых $x = 0.068$, $x = 0.827$ и $x = 0.412$ соответственно.

Поскольку все расчеты проводились в верхней половине области симметрии, дальнейшие результаты обработки также представлены только для области $0 < y < 1.2$.

2.3.2 Многомасштабный вейвлет-анализ

Основными соотношениями вейвлет-анализа являются соотношения рескейлинга:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(x/2) = \sum_n h_n \phi(x-n), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x/2) = \sum_n g_n \phi(x-n). \end{cases} \quad (2.25)$$

Эти соотношения устанавливают связь между сдвигами и растяжениями вейвлета $\psi(x)$ и масштабирующей функции $\phi(x)$. Здесь h_n и $g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}$ —

соответствующие низкочастотный и высокочастотный зеркальные фильтры [109], пункты 2.1.1.5, 2.1.1.6.

Из соотношения (2.25) следует, что проекцию $f^0(x)$ разложения произвольной функции $f(x)$ на базис сдвигов масштабирующей функции $\phi(x-n)$ можно разложить на две компоненты:

$$f^0(x) = \sum_n c_n^0 \phi(x-n) = f^1(x) + d^1(x), \quad (2.26)$$

где

$$f^1(x) = \sum_n c_n^1 \phi\left(\frac{x}{2} - n\right), \quad d^1(x) = \sum_n d_n^1 \psi\left(\frac{x}{2} - n\right),$$

а

$$c_n^0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{\phi}_n(x-n) dx, \quad c_n^1 = \sum_m \bar{h}_{m-2n} c_m^0, \quad d_n^1 = \sum_m \bar{g}_{m-2n} c_m^0.$$

Соотношение (2.26) можно интерпретировать как разложение исходного сигнала $f^0(x)$ на сглаженную компоненту $f^1(x)$ и высокочастотную $d^1(x)$ компоненту. Аналогично сглаженную компоненту $f^1(x)$ можно разложить на $f^2(x)$ и $d^2(x)$, и так далее (пункт 2.1.1.7). Таким образом, применение вейвлет-анализа позволяет разложить исходный сигнал по масштабам.

В приложениях при работе с дискретным исходным сигналом $\{f_n\}$ на первом шаге дискретизацию функции обычно отождествляют с коэффициентами её вейвлет-разложения $\{c_n^0\}$. Этот подход широко распространен, поскольку множество целочисленных сдвигов масштабирующей функции $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ близко к разбиению единицы (приложение 4.3).

Вещественные вейвлеты с компактным носителем сильно несимметричны. В исследуемой задаче применение таких вейвлетов может привести к смещению разрывов, однако можно воспользоваться симметричными комплексными вейвлетами, которые, кроме того, являются более гладкими. Получаемая в этом случае в результате разложения комплекснозначная функция нефизична,

в приложениях при этом анализируют только ее вещественную компоненту [85].

Предполагается, что при переходе к следующему уровню вейвлет-разложения при локализации будут исключаться наименее значимые для текущего уровня особенности. Кроме того, за счет удаления шумов, могут проявиться тонкие структуры, которые ранее не удавалось выделить.

Чтобы определить, какие вейвлеты могут быть использованы для разложения данных по масштабам в исследуемой задаче, сравним результаты локализации разрывов на первом уровне вейвлет-разложений поля плотности, полученные с использованием различных вейвлетов, для расчета, выполненного на сетке содержащей 4096×512 ячеек.

При разложении использовались три различных вейвлета:

- симметричный комплексный вейвлет Добеши, фильтр которого содержит шесть ненулевых коэффициентов — $dcoms6$,
- вещественный вейвлет Добеши, фильтр которого содержит двадцать ненулевых коэффициентов — $dau20$,
- симметричный комплексный вейвлет Добеши, фильтр которого содержит двадцать два ненулевых коэффициента — $dcoms22$.

Низкочастотные фильтры этих вейвлетов приведены в разделе «Справочные материалы».

При использовании комплексных вейвлетов анализировалась только вещественная компонента вейвлет-разложения.

Каждый из детекторов, введенных в разделе «Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа», может быть независимо использован для локализации разрывов. На рисунках 2.31, 2.32 представлены результаты, полученные при локализации разрывов на нескольких уровнях вейвлет-разложения расчета, выполненного на сетке, содержащей 4096×512 ячеек, с использованием только основного детектора, без корректора. Линии, представленные на рисунках, соответствуют сильным разрывам поля плотностей, то есть ударным волнам и контактными разрывам.

Основной детектор выделяет точку n , если:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n = \left(\sum_k \eta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m \right), \\ j_n j_j \leq 0 \\ |j_n| + |j_j| \neq 0 \\ (j = n - 1) \vee (j = n + 1), \end{array} \right.$$

где $\{c_m\}$ — исследуемое поле, $\{\xi_k\}$ — вещественная компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши (dcomsb), $\{\eta_k\}$ — мнимая компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши (dcomsb).

Кроме того, для удаления артефактов проводилась дополнительная постобработка, основанная на эвристических алгоритмах, которые будут подробно описаны в разделе «Обобщение алгоритма локализации особенностей на неструктурированные расчетные сетки, локализация структур в идеальной и вязкой моделях, адаптация расчетной сетки к положению разрывов».

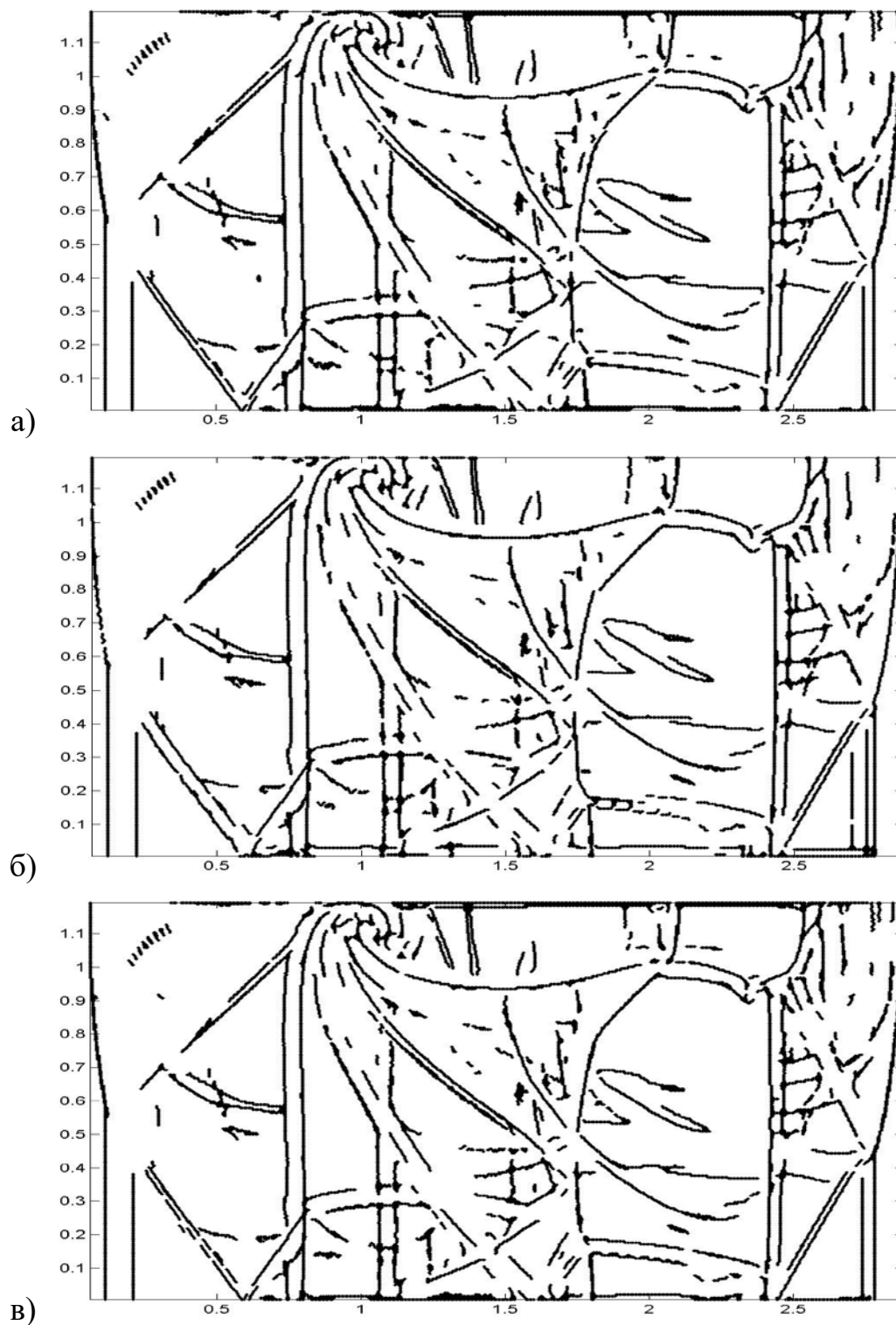


Рисунок 2.31 – Разрывы, локализованные основным детектором на первом уровне вейвлет-разложения поля плотности. Разложение выполнялось с помощью вейвлетов а) dcoms6, б) dau20, в) dcoms22

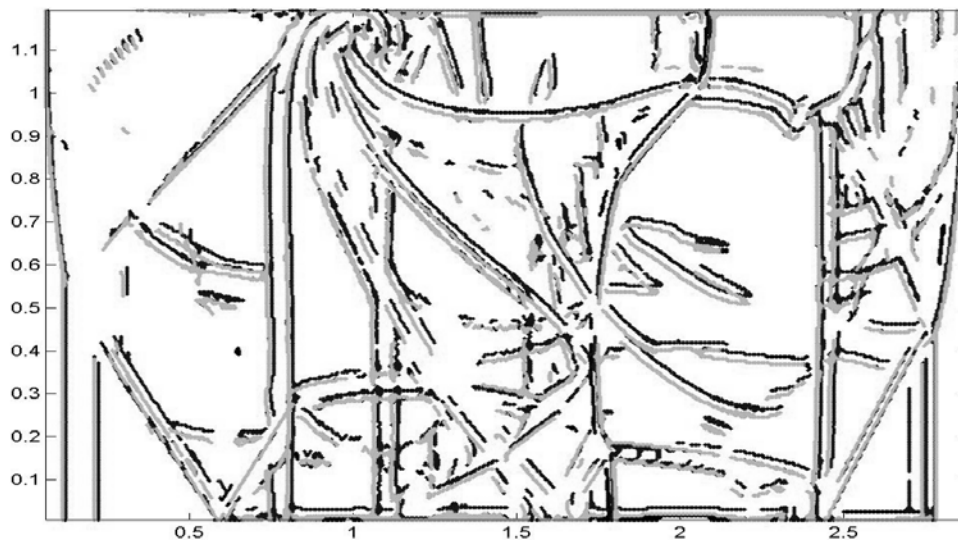


Рисунок 2.32 – Разрывы, локализованные основным детектором на первом уровне вейвлет-разложения поля плотности. Разложение выполнялось с помощью вейвлетов: `dau20` — черный, `dcoms22` — серый

Для задачи выделения разрывов и совместного анализа результатов локализации на различных масштабах необходимо, чтобы переход к вейвлет-разложению поля не вызвал смещения разрывов, поэтому при анализе результатов локализации особое внимание уделялось оценке смещения разрывов.

Основные сильные разрывы (пункт 2.2.2.3) выделяются во всех вариантах вейвлет-разложения исходного поля (рисунки 2.31, Рисунок 2.32), однако использование для вейвлет-разложения вещественного несимметричного вейвлета приводит к смещению разрывов внутри области возмущенного течения ($0 < x < 3$) относительно разрывов, локализованных в разложениях, полученных с использованием симметричных вейвлетов. При этом положение разрывов, локализованных у границы области возмущенного течения, для всех вариантов разложения практически совпадает.

Применение симметричных комплексных вейвлетов `dcoms6` и `dcoms22` для вычисления вейвлет-разложения при локализации разрывов дает практически эквивалентный результат, однако использование вейвлета `dcoms22` все же приводит к небольшому сокращению количества артефактов, а линии разрывов, выделенные в разложении, полученном с помощью этого вейвлета, являются более гладкими.

Для получения более точных оценок смещения разрывов была проведена локализация разрывов во втором блоке расчета упрощенной задачи, выполнен-

ного на сетке, содержащей 400x400 ячеек в каждом расчетном блоке, и первых уровнях его вейвлет-разложения, полученных с использованием вейвлетов $dcoms22$ и $dau20$. Результаты выделения разрывов показали, что правая ударная волна, локализованная на первом уровне вейвлет-разложения, выполненного с помощью вейвлета $dcoms22$, смещена на 0.0029 относительно положения правой ударной волны, локализованной в исходном поле, а при использовании для вычисления вейвлет-разложения вейвлета $dau20$ смещение составляет 0.037. Для контактного разрыва смещения равны 0.0029 и 0.033 соответственно.

Таким образом, применение несимметричного вещественного вейвлета $dau20$ приводит к заметному смещению разрывов. Анализ других расчетов показал, что это смещение не является постоянным и, следовательно, не может быть скомпенсировано. В то же время использование при вычислении вейвлет-разложения симметричных комплексных вейвлетов приводит к минимальному смещению разрывов.

Теперь сравним результаты локализации разрывов с помощью основного детектора на нулевом, первом и втором уровнях вейвлет-разложения поля плотности. Для разложения использовался симметричный комплексный вейвлет Добеши $dcoms22$. При анализе следует помнить, что каждый следующий уровень разложения соответствует вдвое более грубой сетке, по сравнению с предыдущим. Таким образом, нулевому уровню вейвлет-разложения (исходное поле) $c_{i,j}^0$ соответствует сетка, содержащая 4096x512 ячеек ($1 \leq i \leq 4096$, $1 \leq j \leq 512$, $i, j \in Z$), первому уровню $c_{i,j}^1$ — сетка, содержащая 2048x256 ячеек ($1 \leq i \leq 2048$, $1 \leq j \leq 256$, $i, j \in Z$), второму уровню $c_{i,j}^2$ — сетка, содержащая 1024x128 ячеек ($1 \leq i \leq 1024$, $1 \leq j \leq 128$, $i, j \in Z$).

В первую очередь следует отметить, что на втором уровне разложения (рисунок 2.33(в)) выделяется только часть существенных разрывов, причем достаточно грубо и обрывочно. Это может быть вызвано уже достаточно грубой сеткой, тем, что при вычислении вейвлет-разложения отбрасывается мнимая часть коэффициентов, и сильной размазанностью разрывов.

Более информативным является сравнение особенностей, локализованных на нулевом (рисунок 2.33 (а)) и первом (рисунок 2.33 (б)) уровнях вейвлет-разложения. При переходе к первому уровню разложения сокращается число

артефактов (область $[0, 0.5] \times [1, 1.2]$). Часть двойных линий стали одинарными $[1, 2] \times [0.8, 1]$, и наоборот $[1, 1.7] \times [0.5, 0.8]$. Пропадают некоторые разрывы $[0, 0.2] \times [0.4, 0.6]$, но появляются и новые структуры $[1.7, 2.2] \times [0.5, 0.7]$.

Большинство новых структур появляется в областях, которые раньше были сильно зашумлены (на рисунках эти шумы отсутствуют, поскольку они были удалены с помощью эвристических алгоритмов, которые будут подробно описаны в разделе «Обобщение алгоритма локализации особенностей на неструктурированные расчетные сетки, локализация структур в идеальной и вязкой моделях, адаптация расчетной сетки к положению разрывов»). Тем не менее, возникает вопрос о физичности этих структур. Структура, выделенная в области $[1.7, 2.2] \times [0.5, 0.7]$, проявляется и при анализе поля давления (рисунок 2.34). Тем не менее, этой структуре не соответствуют никакие разрывы, а лишь перегибы плотности (рисунок 2.35).

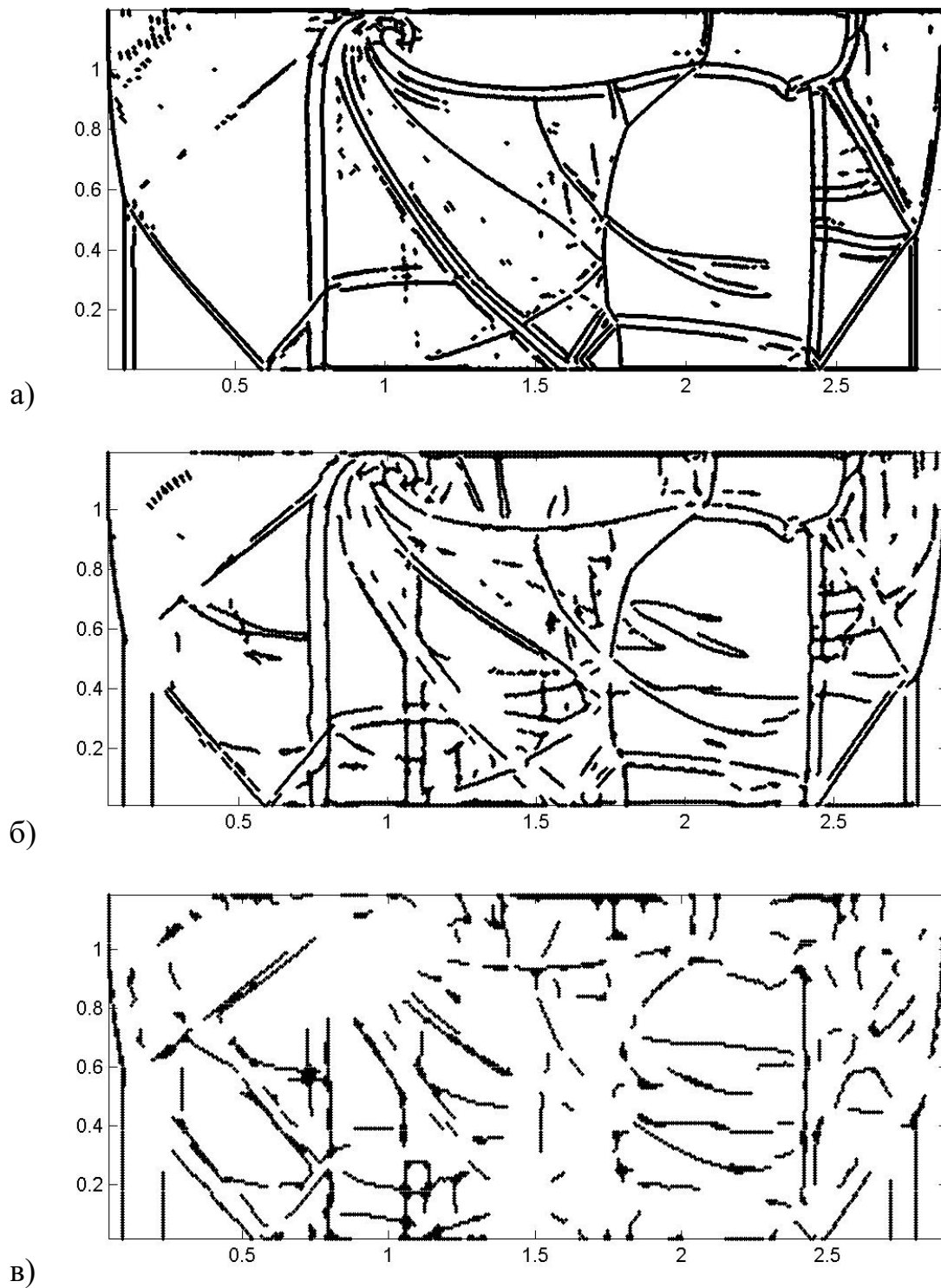


Рисунок 2.33 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом (а), первом (б) и втором (в) уровнях вейвлет-разложения поля плотности. Расчет течения проводился на сетке, содержащей 4096x512 ячеек

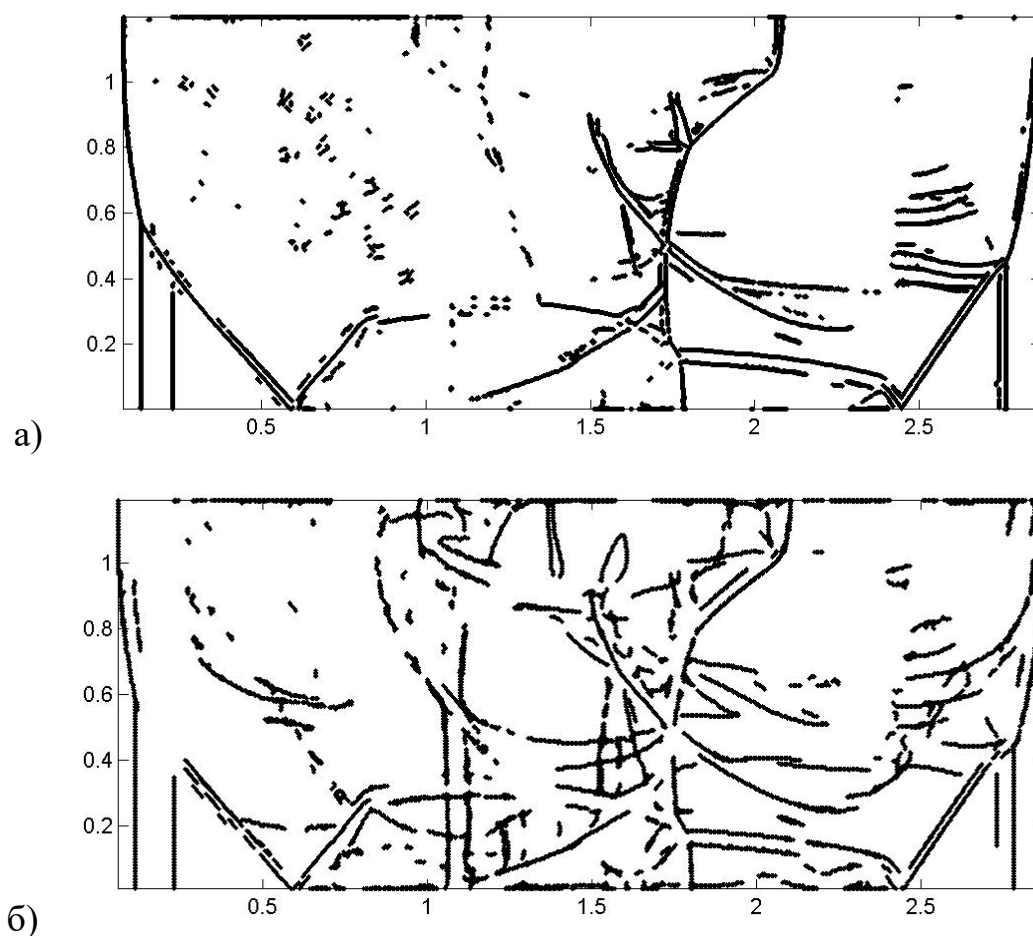


Рисунок 2.34 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом (а) и первом (б) уровнях вейвлет-разложения поля давления.

Расчет течения проводился на сетке, содержащей 4096x512 ячеек

Поскольку пороги чувствительности не вводились, детектор «воспринимает» и выделяет эти перегибы как разрывы пусть и очень слабой интенсивности. Этот недостаток детектора может быть устранен только анализом интенсивности разрывов и введением порогов чувствительности. Для этих целей и был разработан корректор (пункт 0), который позволяет провести дополнительную отбраковку разрывов, выделенных основным детектором.

Анализ упрощенной задачи показал, что сравнение результатов локализации разрывов на нескольких уровнях вейвлет-разложения позволяет избавиться от части артефактов. При выделении разрывов во втором блоке расчета, содержащего 400x400 ячеек в каждом блоке, ошибка локализации не превышает одну ячейку расчетной сетки, однако кроме разрывов выделяется и ряд артефактов, которые представляют собой вертикальные линии, расположенные между раз-

рывами. В правой части области находится волна разрежения, которая в данном случае не приводит к появлению артефактов.

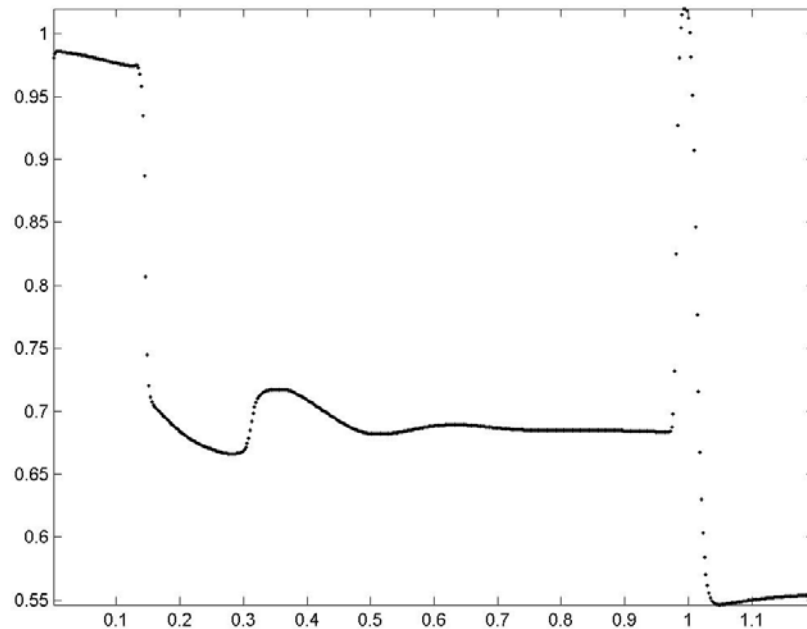


Рисунок 2.35 – Распределение плотности в сечении $x = 2$

Если для выделения разрывов используется только основной детектор, то при локализации выделяется достаточно много артефактов, которые, как и разрывы, представляют собой вертикальные линии и поэтому не могут быть удалены только из логических соображений. Так, при локализации разрывов в исходном поле отношение числа выделенных точек к числу точек, соответствующих трем линиям разрывов, равно 6.7. При локализации разрывов на первом уровне вейвлет-разложения, выполненного с помощью вейвлета `dcoms22`, отношение равно 4.4, а при локализации разрывов на первом уровне вейвлет-разложения, выполненного с помощью вейвлета `dau20`, отношение равно 5.3.

Это говорит о том, что переход к первому уровню вейвлет-разложения позволяет сократить число артефактов. При локализации разрывов в исходном поле все артефакты расположены в области между левой ударной волной и контактным разрывом, а при локализации разрывов на первом уровне вейвлет-разложения, выполненного с помощью вейвлета `dcoms22`, большая часть артефактов находится в области между контактным разрывом и правой ударной волной. Поэтому совместный анализ результатов локализации позволяет убрать

почти все артефакты даже без использования корректора и введения порога чувствительности, что очень важно для задач, работающих без участия аналитика.

2.3.3 Структуры, локализуемые у границы расчетной области

Особого внимания заслуживают структуры, выделенные в окрестности границы расчетной области. Поскольку ось $y = 0$ является осью симметрии течения, а поле при обработке вейвлет фильтрами на границе продолжается из соображений симметрии, в данной задаче на этой оси не должно возникать стационарных разрывов. Более тщательный анализ показал, что там, где в окрестности оси симметрии локализуются артефакты, поле плотностей имеет «излом» (рисунок 2.36).

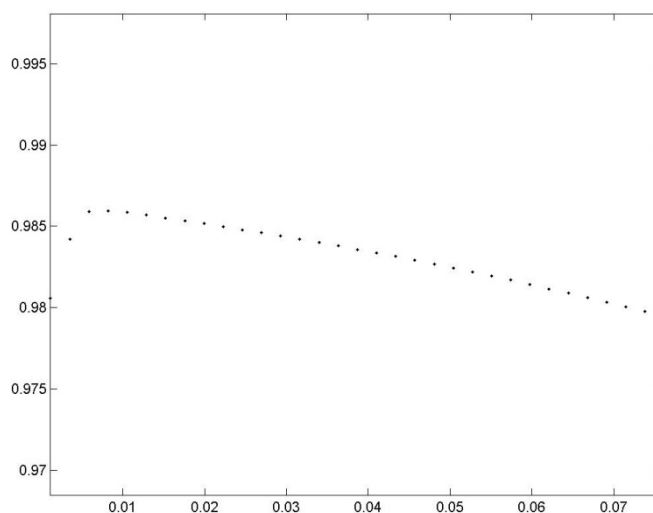


Рисунок 2.36 – Распределение плотности в сечении $x = 2$ в окрестности оси $y = 0$

Этот эффект может быть объяснен некорректностью постановки граничных условий на оси симметрии. Аналогичные эффекты имеют место и на границе $y = 1.2$.

Таким образом, дефекты расчета оказывают непосредственное влияние на результаты локализации, поэтому детектор может быть использован для оценки качества расчета и проверки корректности постановки граничных условий при моделировании течений.

2.3.4 Локализация разрывов с помощью корректора

Хотя корректор (пункт 0) выдает больше артефактов, он также позволяет вводить порог чувствительности, который эти артефакты отсеивает. Результаты локализации разрывов с помощью на первом уровне вейвлет-разложения расчета, проведенного на сетке содержащей 4096x512 ячеек, приведены на рисунке 2.37. а)

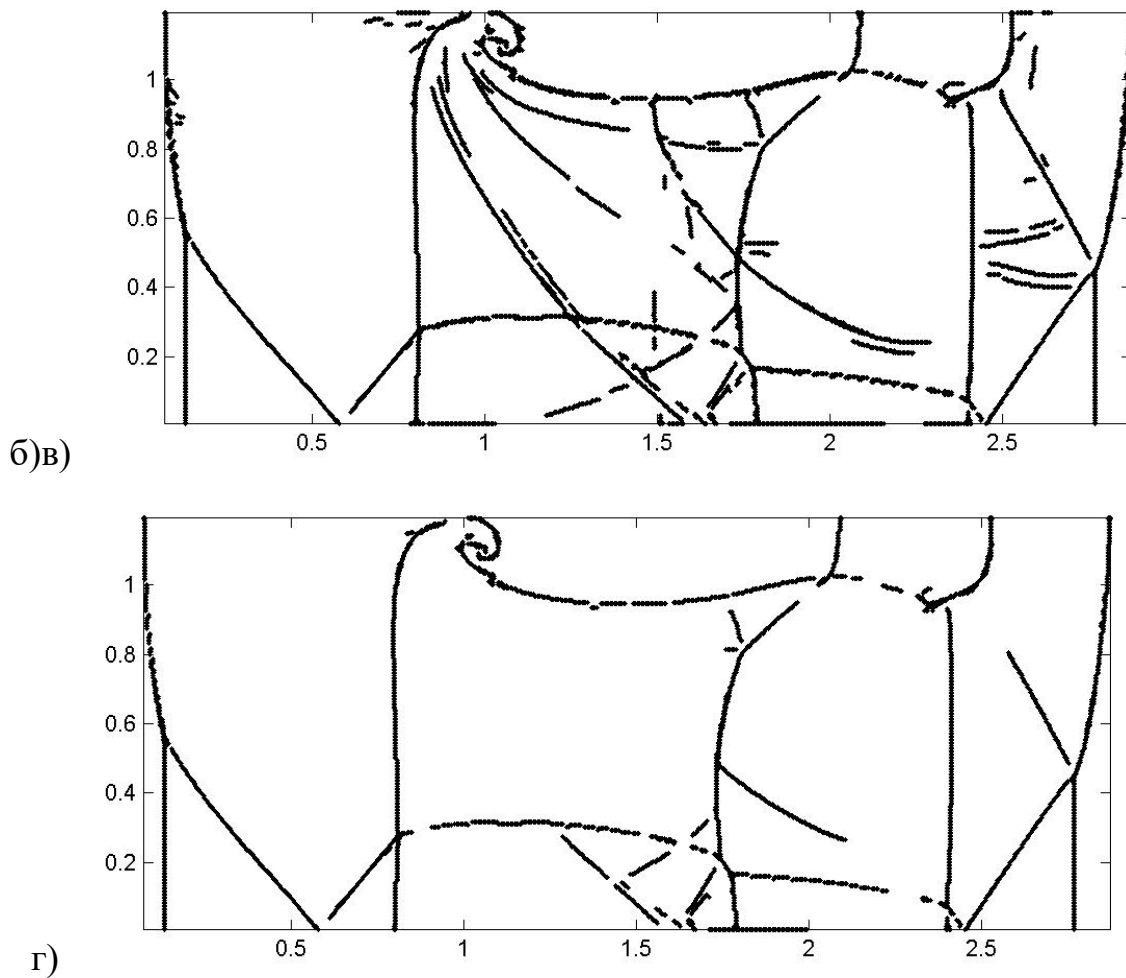


Рисунок 2.37 – Разрывы, локализованные корректором на первом уровне вейвлет-разложения поля плотностей для расчета, выполненного на сетке, содержащей 4096x512 ячеек. Разложение выполнялось с помощью вейвлета `dcms22`. Порог чувствительности равен а) 0, б) 0.00002, в) 0.00005, г) 0.0005

Корректор выделяет точку n с порогом чувствительности α , если:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_n = \left| \left(\sum_k \zeta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} c_m \right) / c_n \right|, \\ s_n > \alpha, s_n \geq s_j, \forall j \in Z, n-3 \leq j \leq n+3, \\ (s_n > s_{n-1}) \vee (s_n > s_{n+1}), \end{array} \right.$$

где $\{c_m\}$ — исследуемое поле, $\{\xi_k\}$ — вещественная компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши (dcoms6), $\{\zeta_k\}$ — высокочастотный фильтр вещественного вейвлета Добеши (dau6). В отличие от (2.24), здесь при определении корректора после вычисления свертки производится обезразмеривание полученной величины за счет деления на c_n . Данный подход допустим, поскольку элементы обрабатываемых полей плотности и давления являются положительными, и более корректен с точки зрения введения порога чувствительности.

Результат обработки с порогом чувствительности $\alpha = 0$ сильно зашумлен (рисунок 2.37 (а)), особенно в области между ударной волной и контактными разрывом $0 < x < 0.7$. Следует отметить, что на практике корректор используется только для отбраковки части ложных разрывов, локализованных основным детектором, а следовательно, артефакты корректора напрямую не входят в окончательный результат локализации.

После введения порога $\alpha = 0.00002$ артефакты слабой интенсивности исчезают (рисунок 2.37 (б)). Видно, что наибольшей интенсивностью обладают те артефакты и “ложные” структуры, которые локализуются основным детектором (рисунок 2.37 (б)) области $[0, 0.5] \times [1, 1.2]$, $[1.7, 2.2] \times [0.4, 0.7]$.

Эти артефакты исчезают при дальнейшем увеличении порога $\alpha = 0.00005$, хотя по-прежнему сохраняется ряд двойных и сомнительных линий (рисунок 2.37 (в)). Последующее увеличение порога $\alpha = 0.0005$, однако, приводит к исключению части наклонных разрывов (рисунок 2.37 (г)), в то время как все горизонтальные и вертикальные разрывы выделяются почти идеально.

2.3.5 Сравнение расчетов, выполненных на различных сетках

Перейдем к сравнительному анализу результатов выделения разрывов в расчетах, выполненных на различных сетках (рисунки 2.33, 2.34, 2.38, 2.39).

Следует отдельно отметить, что сравнение рисунков 2.33 (в) и 2.38 (б) показывает, что одной из причин достаточно плохого результата на рисунке 2.33 (в) в действительности является довольно грубая сетка. Тем не менее, структура разрывов на рисунке 2.38 (б) все же более четкая, чем на рисунке 2.33 (в), откуда следует, что переход на следующий уровень разложения сглаживает данные сильнее, чем переход на более грубую сетку при расчете.

Наибольший интерес представляет сравнение результатов локализации, представленных на рисунках 2.33(б), 2.34(б), с результатами, представленными на рисунках 2.38(а), 2.39. Эти рисунки соответствуют одной и той же сетке, содержащей 2048x256 ячеек.

При сравнении рисунков 2.33(б) и 2.38(а) видно, что выделяются практически одни и те же структуры, но на рисунке 2.33(б) они более четкие. Но, с точки зрения представления разрывов (сдвоенные или одинарные линии), рисунок 2.38(а) ближе к рисунку 2.33(а). Однако на рисунке 2.33(б) выделяется ряд структур, соответствующих перегибам слабой интенсивности. Эти структуры отсутствуют на рисунке 2.38(а) или выделены менее четко и полностью отсутствуют на рисунке 2.33(а). Это в очередной раз подтверждает тот факт, что и переход на следующий уровень разложения, и переход на более грубую сетку при расчете сглаживают данные, при переходе на следующий уровень вейвлет-разложения данные сглаживаются сильнее. Таким образом, большинство артефактов, выделяемых при грубом расчете, локализуются в областях, соответствующих зашумленным зонам в расчете, выполненном на мелкой сетке. Аналогичная картина имеет место и при сравнении рисунков 2.34(б) и 2.39.

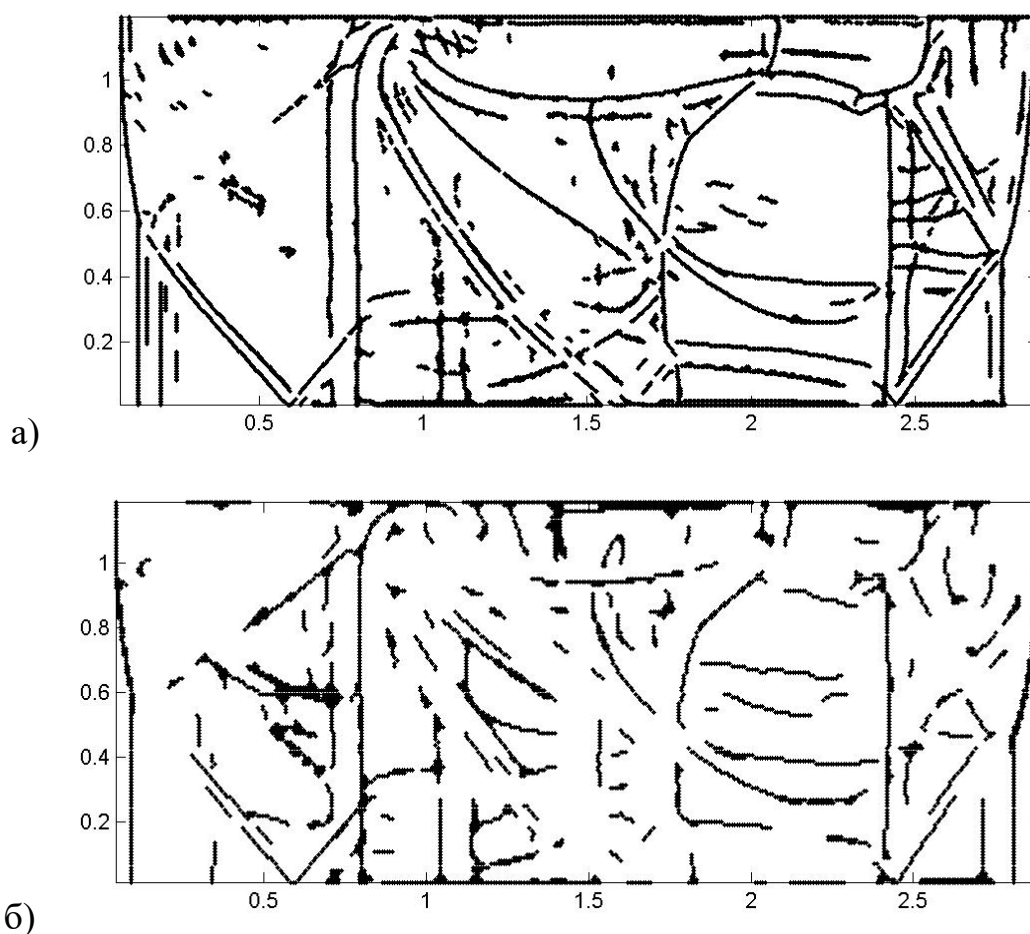


Рисунок 2.38 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом (а) и первом (б) уровнях вейвлет-разложения поля плотности. Расчет течения проводился на сетке, содержащей 2048x256 ячеек. Для вычисления разложения использовался вейвлет `dcoms22`

Для проверки корректности отождествления поля с коэффициентами его вейвлет-разложения сравнивались результаты выделения разрывов во втором блоке расчетов упрощенной задачи. Локализация разрывов проводилась для первого уровня вейвлет-разложения (при вычислении разложения использовался вейвлет `dcoms22`) расчета, выполненного на сетке, содержащей 400x400 ячеек в каждом расчетном блоке, и для расчета, выполненного на сетке, содержащей 200x200 ячеек в каждом расчетном блоке. Результаты локализации соответствуют одной и той же сетке. Мелкомасштабные эффекты должны подавляться за счет использования более грубой расчетной сетки в первом случае и перехода на более грубый уровень вейвлет-разложения во втором случае. Положения контактного разрыва и левой ударной волны в обоих случаях совпадают, а правая ударная волна в первом случае смещается ровно на одну ячейку

вправо. Такая погрешность допустима, если разрыв находится между ячейками. Эти факты позволяют говорить о допустимости указанного подхода.

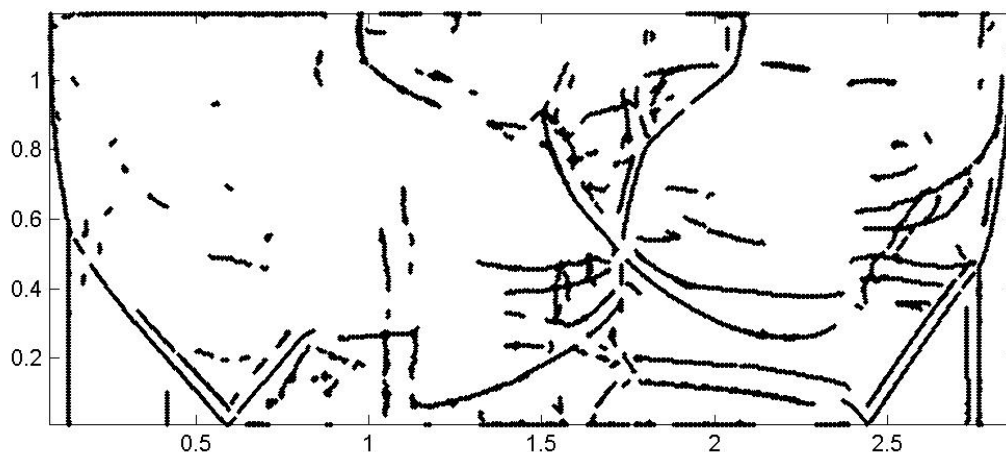


Рисунок 2.39 – Разрывы, локализованные основным детектором на нулевом уровне вейвлет-разложения поля давления. Расчет течения проводился на сетке, содержащей 2048x256 ячеек. Для вычисления разложения использовался вейвлет `dcoms22`

Эксперименты показали, что использование многомасштабного анализа позволяет получить дополнительную информацию о структуре разрывов в течении, а совместный анализ нескольких уровней вейвлет-разложения дает возможность значительно сократить количество артефактов при локализации разрывов в расчете без дополнительного введения порога чувствительности. Однако это возможно только в том случае, если расчет выполнен на достаточно мелкой сетке.

Для многомасштабного разложения целесообразно использовать симметричные и достаточно гладкие вейвлеты. Использование же несимметричных вейвлетов приводит к смещению разрывов на различных уровнях разложения.

Переход от анализа исходного поля к анализу его вейвлет-разложения позволяет исключить часть шумовых эффектов, но приводит к проявлению слабых структур соответствующих перегибам. Эти структуры могут быть удалены совместным анализом исходного поля и вейвлет-разложения либо использованием корректора.

Эксперименты также показали, что детектор чувствителен к дефектам расчета, благодаря чему может использоваться для оценки его корректности и качества.

Структура разрывов, выделенных в вейвлет-разложении расчета, выполненного на мелкой сетке, в целом соответствует структуре разрывов, локализованных в расчете, выполненном на грубой сетке. Однако при обработке расчета, выполненного на грубой сетке, выделяется больше артефактов.

Опыты также позволили убедиться в допустимости отождествления газодинамических полей с коэффициентами их вейвлет-разложения.

Эксперименты показали, что построенный в предыдущих разделах детектор, является эффективным инструментом для анализа расчетов газодинамических полей, полученных методом сквозного счета. И хотя для получения наиболее полной и качественной информации о течении требуется подбор порогов чувствительности, алгоритм остается эффективным и без привлечения аналитика и поэтому может использоваться в автоматическом режиме непосредственно в ходе расчета газодинамических течений.

Алгоритм выделения и классификации особенностей газодинамических полей, представленный в предыдущих разделах, может использоваться только для анализа расчетов, выполненных на прямоугольных сетках. На практике же, особенно в расчетах, использующих технологии адаптивного построения сеток, используются сетки более сложной структуры. В следующем разделе алгоритм будет адаптирован для выделения особенностей в расчетах, выполненных на произвольных расчетных сетках. Также будут введены дополнительные эвристические алгоритмы, позволяющие сократить количество артефактов.

2.4 Обобщение алгоритма локализации особенностей на неструктурированные расчетные сетки, локализация структур в идеальной и вязкой моделях, адаптация расчетной сетки к положению разрывов

При работе с неструктурированными сетками и их адаптации алгоритм, предложенный ранее для конформных прямоугольных расчетных сеток, нуждается в модификации. Ниже этот алгоритм обобщается на произвольные расчет-

ные сетки. Также приведен набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации.

Большой интерес представляет локализация структур в вязких течениях. Исследования показали, что в вязкой среде при числах Рейнольдса $R \sim 10^6$ четко проявляются структуры, соответствующие ударным волнам в идеальной среде, при этом на них с высокой точностью выполняются соотношения Гюгонио. Кроме того, в вязкой среде выделяются дополнительные структуры, соответствующие вихрям, пограничному слою и слоям смешения.

Для сравнения структуры разрывов в вязкой и идеальной среде была выбрана осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Расчеты выполнялись с помощью пакета NSC2KE на треугольной сетке, в области с криволинейными границами. Для анализа этих расчетов предложенный в ранее метод обобщается на произвольные расчетные сетки. Также был разработан набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации. Метод излагается со всеми существенными для реализации и распараллеливания деталями, но без обоснования, которое достаточно подробно представлено ранее.

В качестве входных данных представленный алгоритм получает поля физических величин плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. В результате работы алгоритма каждому узлу сетки сопоставляется натуральное число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Особенностью метода является то, что он не требует тонкой настройки (одни и те же пороги чувствительности и наборы фильтров могут быть эффективно использованы для множества различных задач), что позволяет использовать его в автоматическом режиме. В то же время возможность тонкой настройки также заложена в алгоритм, что позволяет получить более качественные результаты в постобработке (параграф 2.3.4).

В результате применения алгоритма обработки удалось выделить характерные структуры в расчетах для вязкой и идеальной среды, убедиться, что для структур, локализованных в расчете по уравнениям Рейнольдса с $k-\varepsilon$ [114], [115] моделью турбулентности и соответствующих ударным волнам в идеальной среде, условия Гюгонио выполняются с высокой точностью. Также был

установлен критерий, позволяющий выделить структуры, имеющие исключительно вязкую природу.

Алгоритм оказался эффективным и при обработке трехмерных данных. Он был апробирован как на модельных трехмерных данных, так и на расчете задачи о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Детектор продемонстрировал высокую точность локализации разрывов. Кроме того, оказалось, что он может быть использован для выделения тонких структур и разрывов слабой интенсивности, обнаружить которые другими средствами достаточно трудоемко. Наконец, представлен и апробирован простейший способ применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Использование адаптивного метода позволило повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов и сократить время расчета в 2,5 раза.

2.4.1 Алгоритм

В качестве исходных данных используются результаты расчета полей плотности и давления, заданных в узлах или центрах ячеек расчетной сетки. Сетка состоит из ячеек (треугольники, четырехугольники, тетраэдры и т.д.), которые задаются координатами узлов, являющихся их вершинами, и гранями (ребра или поверхности). В трехмерном случае для ячейки дополнительно задаются ребра её граней. Для повышения качества локализации и удобства обработки вместо исходной расчетной сетки при локализации может быть использована другая сетка с тем же набором узлов.

Структура сетки, с которой работает алгоритм локализации, определяется тем, что для качества локализации важно, чтобы сетку можно было разбить на достаточно регулярные ломаные, не обрывающиеся внутри области. Этого часто трудно достичь на неконформных или неструктурированных сетках, поэтому иногда имеет смысл перейти от произвольной, к примеру, прямоугольной неконформной сетки к треугольной конформной, полученной из исходной, например, с помощью триангуляции Делоне [116], [117]. Такой переход приводит к увеличению объёма вычислений, но позволяет получить более качественный результат (уменьшается число артефактов и уточняется локализация разрывов). Кроме того, поскольку от любой сетки можно перейти к треугольной, с

алгоритмической точки зрения формат, в котором данные задаются на треугольной сетке, является наиболее универсальным.

В результате обработки расчета каждому узлу сетки необходимо сопоставить число, которое характеризует течение в окрестности узла (нет разрывов, ударная волна, контактный разрыв, волна разрежения и т.д.).

Обработку расчета можно условно разделить на четыре этапа:

- разделение расчетной сетки на ломаные,
- обработка ломаных с помощью вейвлетов и выделение особенностей,
- объединение результатов обработки ломаных,
- фильтрация артефактов и классификация особенностей.

Первый этап заключается в том, чтобы свести многомерную задачу к набору одномерных задач. Из сетки выбирается произвольное ребро. Затем из его соседей выбираются те ребра, которые образуют минимальный угол с этим ребром, причем угол должен быть меньше заданной величины, которая определяет гладкость строящейся ломаной. Если подходящего ребра нет, ломаная на этом конце обрывается, иначе это ребро добавляется в ломаную и на его свободном конце повторяется аналогичная процедура. Чтобы избежать заикливания, каждое ребро может быть добавлено в ломаную только один раз. После того как на обоих концах ломаной не удалось подобрать подходящих ребер, начинается построение следующей ломаной. Ее построение начинается с ребра, не входящего ни в одну ломаную, но ребра других ломаных могут быть в нее добавлены. Это делается для того, чтобы ломаные, по возможности, не обрывались внутри области, поскольку обработка границ ломаных может приводить к появлению артефактов или пропуску разрывов. Первый этап завершается, если каждое ребро включено в некоторую ломаную.

На втором этапе производится независимая обработка ломаных. Обрабатываются только ломаные, у которых число узлов N больше 6, это число определяется количеством ненулевых элементов в фильтрах вейвлетов, используемых при обработке. Массивы плотности d_k и давления p_k , где $0 \leq k < N$, заданные в узлах ломаной, также обрабатываются независимо. Для каждого из массивов вычисляется два преобразования $m(x)$ и $c(x)$:

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \zeta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N.$$

При этом x_i — элементы массивов плотности или давления, продолженных на границах ломаных из соображений симметрии, ξ_i и η_i — вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши 6 (dcoms6), ζ_i — вещественный фильтр классического вейвлета Добеши 6 (daub6). Цифра 6 обозначает, что фильтры имеют 6 ненулевых элементов. Низкочастотные фильтры указанных вейвлетов приведены в приложении 4.4. Указанные преобразования соответствуют двум детекторам (пункты 2.2.1.1, 0), которые используются совместно для повышения точности локализации разрывов (основной детектор более точен и выдает меньше артефактов, а корректор помогает уточнить локализацию и избавиться от дополнительных артефактов за счет введения порога чувствительности). В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа узлов:

‘нули’ — если значения массива в двух соседних узлах имеют разный знак или только одно из значений нулевое, то выделяется узел с минимальным по модулю значением. Два первых и два последних узла не выделяются;

‘локальные экстремумы модуля’ — узел выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности α , он не меньше модулей значений четырех его левых и правых соседей и строго больше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Из множества *нулей* исключаются точки, соответствующие осцилляциям. Считается, что точка соответствует осцилляциям, если слева и справа от нее в радиусе трех точек есть выделенные *нули*.

Таким образом, каждый узел ломаной получает некоторый набор из 8 возможных меток: mzd, sed, mzp, ser, med, czd, mer, czp. Символ ‘m’ означает, что метка относится к основному детектору, ‘с’ — к корректору, ‘d’ означает, что метка характеризует поле плотности, а ‘р’ — давления. Символы ‘z’ и ‘e’ определяют, какие структуры были выделены в детекторе: ‘z’ соответствует *переходам через ноль*, а ‘e’ — *локальным экстремумам модуля*. При этом первые четыре метки соответствуют сильным разрывам, а последние — слабым разрывам (рисунок 2.12). Классификация разрывов производится в соответствии с пунктом 2.2.1.2.

В общем случае через узел проходит более одной ломаной, и наборы меток, которые получает узел на втором этапе, при обработке каждой из них могут отличаться (так, например, разрыв не будет выделен при обработке расположенной вдоль него ломаной, но будет выделен при обработке пересекающей его ломаной).

На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают узлы сетки. Набор меток, которые получает узел, определяется как объединение всех меток, которые он получил при обработке каждой из содержащих его ломаных.

Из первых трех этапов наиболее вычислительно затратным является второй, однако, поскольку каждая ломаная обрабатывается независимо, этот этап допускает легкое распараллеливание. Первый же этап тривиален для широкого класса сеток. По сути, при реализации алгоритма на многопроцессорной машине первый этап служит для распределения данных по процессорам, а третий — для слияния результатов.

Алгоритм обработки данных на первых этапах не зависит от структуры сетки и размерности задачи, однако на этапе удаления артефактов и классификации особенностей эти факторы начинают оказывать существенное влияние. Далее приводится описание алгоритмов фильтрации для случая двумерных сеток.

Предварительно необходимо ввести ряд *определений*.

Узлы называются **соседними**, если они являются вершинами одной и той же ячейки сетки (треугольника, четырехугольника, тетраэдра и т.д.). Например, противолежащие вершины четырехугольника являются соседними.

Путь — ломаная, состоящая из отрезков, соединяющих соседние узлы.

Расстояние между узлами — минимальное число ребер в пути, соединяющем эти узлы.

Дискретный набор точек называется **связанным**, если для любой пары точек набора существует путь, соединяющий эти точки и состоящий только из ребер, вершинами которых являются точки из данного набора.

Для удаления артефактов разработан набор из следующих фильтров.

1. Узел помещается в список кандидатов на удаление метки, если его соседи с такой же меткой образуют связное множество и их число не

больше половины общего числа соседей. Данная проверка проводится для всех узлов. Из списка кандидатов удаляются точки, исключение которых привело к тому, что их соседи с данной меткой перестали быть связными. Наконец, все кандидаты теряют рассматриваемую метку. Фильтр позволяет удалять неровности на линиях разрывов.

2. Первый фильтр применяется M раз. Если какой-либо связанный набор точек, имеющих заданную метку, не был полностью удален, то все его точки возвращают исходные метки. В отличие от первого фильтра, второй служит для удаления крупных артефактов.
3. Точка с меткой A получает дополнительную метку B , если существует путь длины не больше заданного параметра K , соединяющий эту точку, с точкой, имеющей метку B . Фильтр убирает несоответствия, вызванные неточностью локализации.
4. Точка с меткой A теряет её, если расстояние от нее до любой из точек, имеющих метку B , больше заданного параметра K . Фильтр служит для уточнения данных одного детектора с помощью данных другого.
5. Точка получает метку, если она входит в путь, состоящий из 2 или 3 ребер, соединяющий несвязанные узлы, имеющие ту же метку. Фильтр служит для восстановления целостности разрывов.

Двухмерность сетки существенна только для фильтров 1, 2. Фильтры 3 — 5, очевидно, применимы и к трехмерным задачам.

Порядок и параметры фильтров, вообще говоря, индивидуальны для каждой задачи и расчетного метода. Фильтр 4 используется для модификации данных основного детектора с помощью корректора, а фильтр 3 позволяет различить разрывы, на которых рвется только плотность, от тех, на которых рвется и давление, тем самым отличая контактные разрывы от ударных волн.

2.4.2 Численное моделирование

Рассматривается осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Были проведены расчеты, соответствующие уравнениям Эйлера (рисунок 2.40) и Рейнольдса с $k - \varepsilon$ моделью турбулентности (рисунок 2.41). Параметры набегающего потока в обоих случаях одинаковы и соответствуют числу Маха 1.5. Число Рейнольдса для вязкой среды приближенно равно 3 000 000.

Геометрия расчетной области представлена на рисунках 2.40, 2.41 (расчет проводился в подобласти $y \geq 0$). Расчеты проводились на треугольной сетке, полученной из четырехугольной сетки, содержащей 400×200 ячеек, за счет добавления диагоналей в четырехугольники, при этом сетка равномерно сгущается вблизи обтекаемого тела.

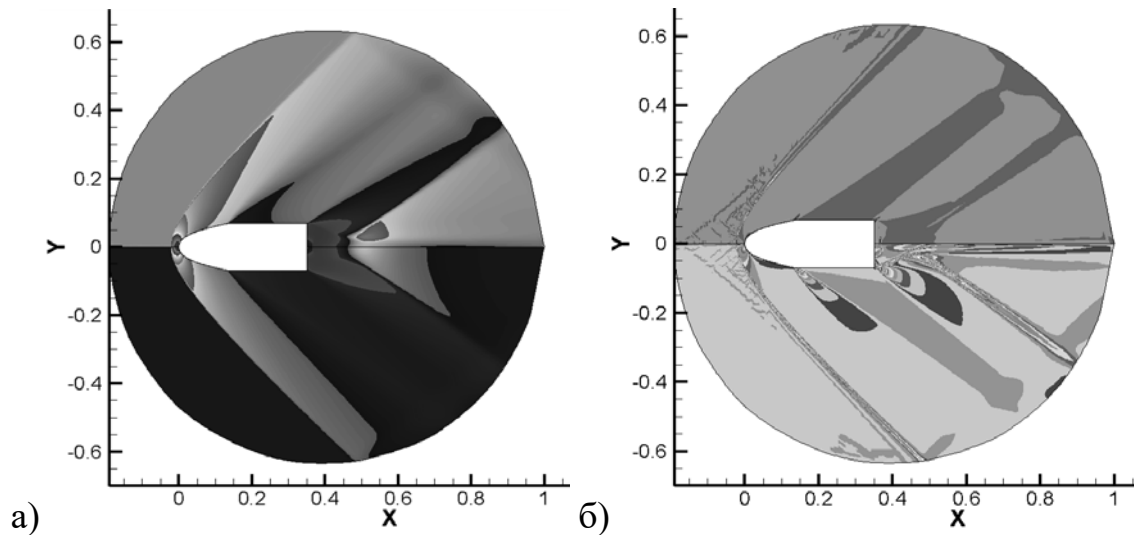


Рисунок 2.40 – Распределение полей физических величин в расчете, выполненном по идеальной модели: а) распределение плотности (сверху) и давления (снизу), б) распределение x (сверху) и y (снизу) компонент градиента плотности

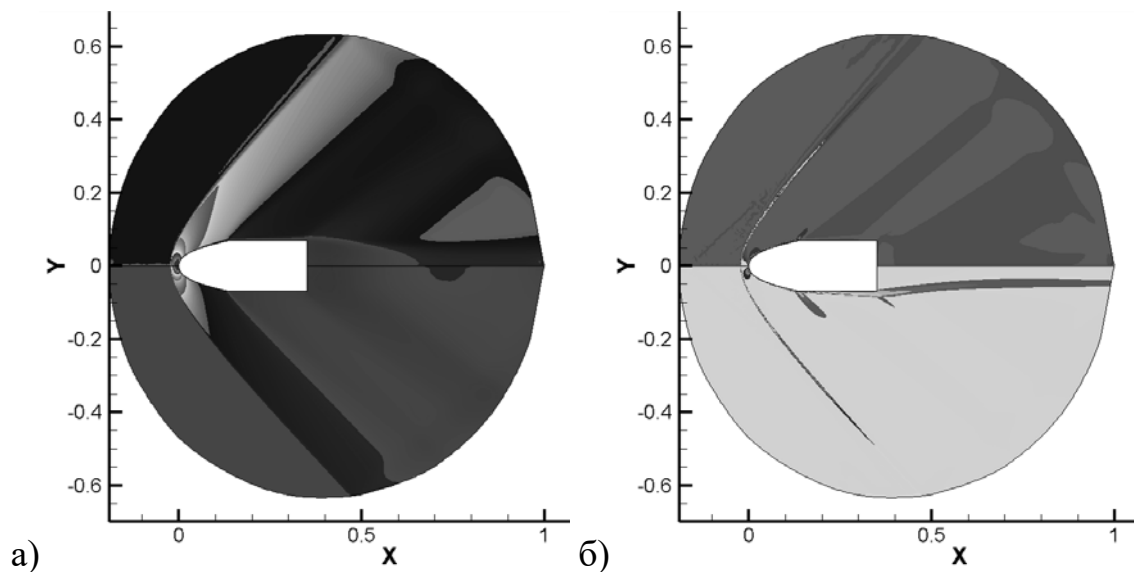


Рисунок 2.41 – Распределение полей физических величин в расчете, выполненном по вязкой модели: а) распределение плотности (сверху) и

давления (снизу), б) распределение x (сверху) и y (снизу) компонент градиента плотности

2.4.3 Анализ расчетов

Известно, что в идеальной среде для любого разрыва с нормальной скоростью распространения D выполняются 4 соотношения:

$$\rho_l(u_{n_l} - D) = \rho_r(u_{n_r} - D); \quad (2.1)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)^2 + p_l = \rho_r(u_{n_r} - D)^2 + p_r; \quad (2.2)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)u_{\tau_l} = \rho_r(u_{n_r} - D)u_{\tau_r}; \quad (2.3)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D) \left[e_l + p_l / \rho_l + (u_{n_l} - D)^2 / 2 \right] = \rho_r(u_{n_r} - D) \left[e_r + p_r / \rho_r + (u_{n_r} - D)^2 / 2 \right], \quad (2.4)$$

которые являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии.

Проверка этих соотношений на разрывах в расчете нетривиальна, поскольку некоторая ошибка вносится алгоритмом локализации и за счет размазывания разрывов. В экспериментах для проверки соотношений выбирались точки, лежащие на нормали к разрыву вне области размазывания максимально близко к ее границе (она определялась визуально).

При выделении разрывов в корректоре использовался порог чувствительности $\alpha = 0$.

При обработке использовались следующие фильтры в указанном порядке: фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей;

фильтр 4, для $A = \text{mzd}$, $B = \text{sed}$, $K = 1$, удаляет из множества сильных разрывов плотности, выделенных основным детектором, те, которые не выделил корректор;

фильтр 4, для $A = \text{mzr}$, $B = \text{ser}$, $K = 1$, удаляет из множества сильных разрывов давления, выделенных основным детектором, те, которые не выделил корректор;

фильтр 3, для $A = \text{mzd}$, $B = \text{mzr}$, $K = 2$, компенсирует неточности локализации, что необходимо на этапе классификации разрывов, поскольку решение о типе разрыва в точке принимается на основании всех ее меток. В то же время

возможны ситуации, когда за счет неточности локализации точка имеет, например, метку mzd , но не имеет метку mzr (то есть в точке есть разрыв плотности, но не давления), хотя ее имеет одна из соседних точек;

фильтр 2, для $M = 1$, удаление только мелких артефактов;

фильтр 5 применяется для восстановления целостности разрывов, так как при локализации возможны ситуации, в которых линия разрыва локализуется как несколько несвязных множеств;

фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей, которые могли появиться на этапах 2–6;

фильтр 2, для $M = 3$, удаление крупных артефактов;

Обработка в этом примере направлена только на локализацию сильных разрывов. Узлы, которые по результатам фильтрации имеют и метку mzd , и метку mzr , классифицируются как ударные волны, а имеющие метку mzd , но не имеющие метки mzr — как контактные разрывы.

В расчете, выполненном по модели Эйлера (рисунок 2.42), контактные разрывы (серый цвет) присутствуют только в виде артефактов. Четко выделяется головная ударная волна, однако в области волны разрежения остаются артефакты, избавиться от которых можно, подобрав соответствующий порог чувствительности α . Также выделяется некая структура разрывов за обтекаемым телом.

В расчете, выполненном с учетом вязкости, четко выделяется линия, соответствующая головной ударной волне в идеальной среде (рисунок 2.43). Артефактов в зоне волны разрежения в расчете, выполненном по вязкой модели, стало меньше. Четко выделяется пограничный слой и граница следа за моделью, эти линии классифицированы детектором частично как ударные волны, а частично как контактные разрывы.

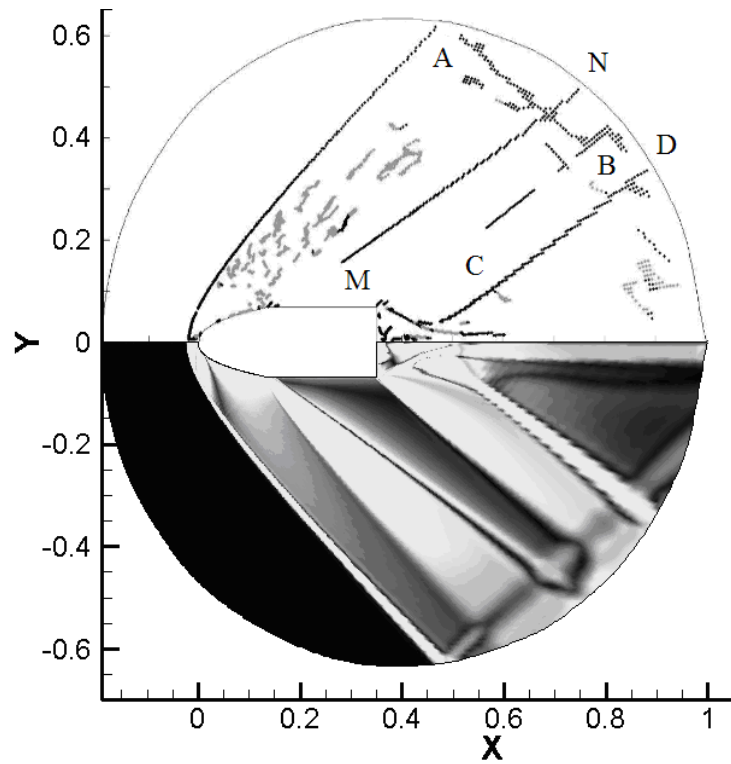


Рисунок 2.42 – Разрывы, локализованные в расчете, выполненном по идеальной модели, (сверху) и распределение градиента плотности (снизу)

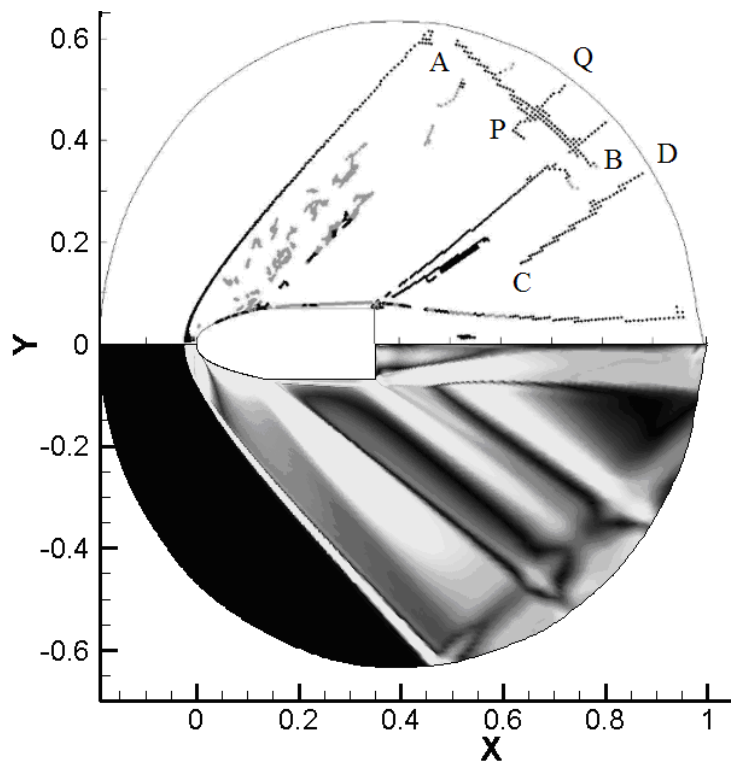


Рисунок 2.43 – Разрывы, локализованные в расчете, выполненном по вязкой модели, (сверху) и распределение градиента плотности (снизу)

При наложении результатов локализации структур в двух расчетах (рисунок 2.44) видно, что положение головной ударной волны в расчетах в точности совпадает. Также в обоих расчетах присутствует разрыв АВ, порожденный взаимодействием головной ударной волны с границей области, и разрыв CD: (0.63, 0.12)–(0.9, 0.33).

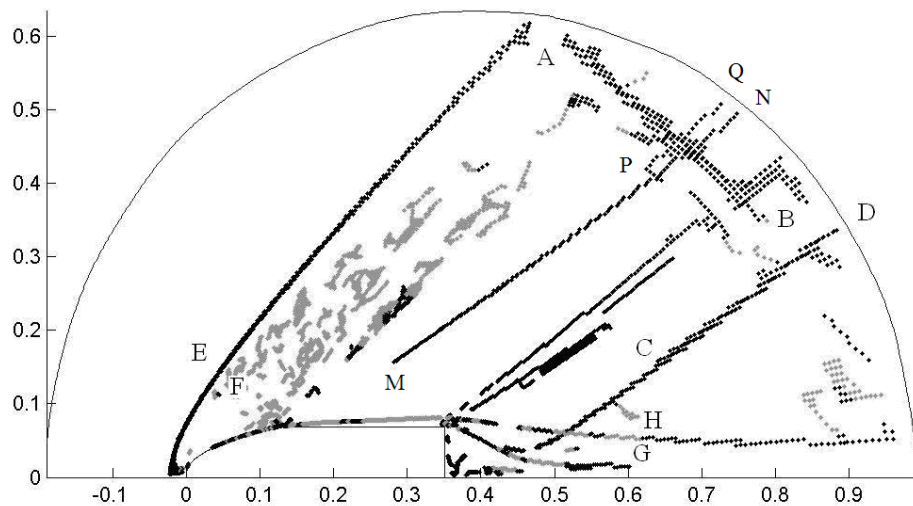


Рисунок 2.44 – Наложение результатов локализации разрывов

В идеальной среде за волной разрежения локализуется «разрыв» MN, соответствующий перегибу плотности (рисунок 2.45), вызванному ростом плотности за волной разрежения, возникающим при обтекании цилиндрических тел [118], [119]. Аналогичный эффект имеет место и в вязкой среде, однако соответствующий «разрыв» PQ локализуется на значительном удалении от тела, практически у границы расчетной области.

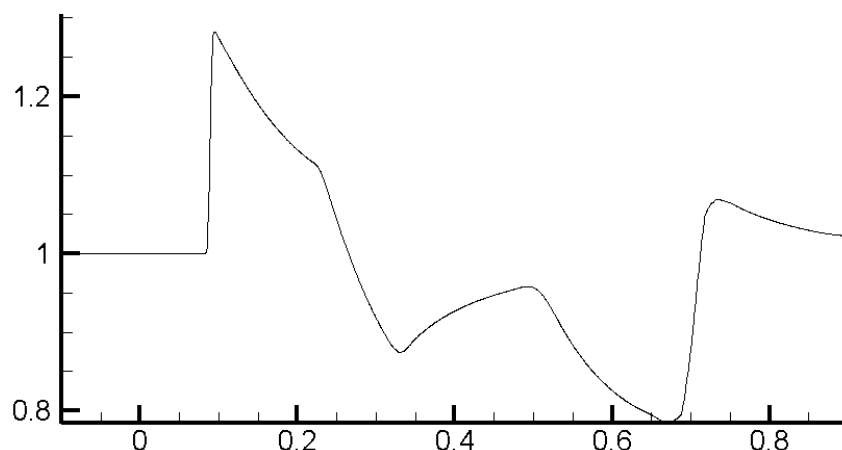


Рисунок 2.45 – Распределение плотности в вязкой среде в сечении $y = 0.2$

Таким образом, при обработке расчета, полученного по уравнениям Рейнольдса с $k - \varepsilon$ моделью турбулентности, выделяются два типа структур: структуры, которым в идеальной среде соответствуют ударные волны, и структуры, имеющие исключительно вязкую природу. Для того чтобы иметь возможность алгоритмически определять, к какой из групп относится структура, была выполнена проверка соотношений на разрывах для структур каждого типа.

Ошибки в соотношениях (2.1-2.4) на разрыве для точек E(0.02, 0.16) и F(0.07, 0.14) (слева и справа от головной ударной волны) для идеальной среды составляют 0.039, 0.00075, 0.077 и 0.063, а для вязкой среды — 0.038, 0.0011, 0.078 и 0.061. В обоих случаях отношения ошибок к значениям выражений в точке E составляют примерно 0.04, 0.001, 0.18 и 0.04. Таким образом, наиболее точно выполняются соотношения, следующие из закона сохранения массы (2.1), нормальной компоненты импульса (2.2) и энергии (2.4). Подобная картина наблюдается вдоль всего разрыва.

Если же в расчете, выполненном по уравнениям Рейнольдса с $k - \varepsilon$ моделью турбулентности, проверить соотношения на структурах, которые локализируются только в вязком течении, например, для точек G(0.6, 0.05) и H(0.6, 0.065) (внутри и вне следа за моделью), то отношения ошибок к значениям выражений в точке G составят 0.058, 0.007, 0.7 и 0.57 соответственно. В отличие от предыдущего случая, нарушение уже значительно. Из этого можно заключить, что выделяемая детектором линия не является ударной волной, а имеет вязкую природу, что также подтверждается тем, что для этой линии не суще-

ствуется аналога в расчете, выполненном по модели Эйлера. Таким образом, нарушение соотношений (2.3, 2.4) может быть использовано для определения природы структур выделяемых в расчетах вязких течений.

Для того чтобы разрешить вязкую структуру ударной волны, требуется сетка с гораздо более мелким шагом по пространству, чем та, что использовалась в расчете. Тем не менее, в расчете, проведенном по вязкой модели, удалось локализовать положение ударной волны, причем ее положение совпало с положением ударной волны в соответствующем расчете для идеальной модели, а также положение пограничного слоя и границу следа за моделью. Кроме того, удалось убедиться в выполнении соотношений Гюгонио на ударной волне.

2.4.4 Локализация разрывов в трехмерных расчетах

Рассматриваются модельные поля:

$$\rho_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ 1, & i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \end{cases},$$

$$p_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & \begin{cases} i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j \geq 50 \end{cases} \\ 1, & \begin{cases} i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j < 50 \end{cases} \end{cases},$$

где $i, j, k \in Z$, $0 \leq i < 50$, $0 \leq j < 100$, $0 \leq k < 100$. Таким образом, на одной половине чаши параболоида существует разрыв и плотности и давления, моделирующий ударную волну, а на другой — только разрыв плотности, моделирующий контактный разрыв. В плоскости $j = 50$ рвется только давление, но данный разрыв не имеет газодинамических аналогов и не должен выделяться.

На рисунке 2.46 представлены результаты локализации разрывов. Темная поверхность соответствует ударной волне, а светлая — контактному разрыву. Поверхность, на которой рвется только давление, не была выделена. Ошибка локализации не превышает одну ячейку сетки.

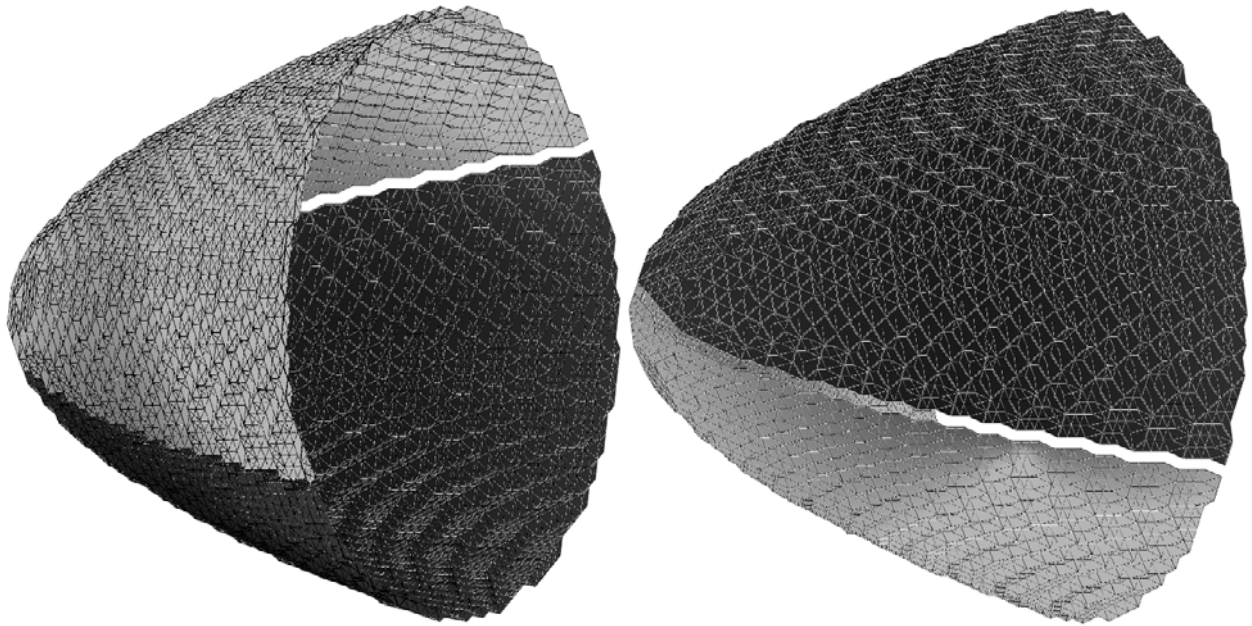


Рисунок 2.46 – Разрывы, локализованные в модельных данных

Для анализа была выбрана задача о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Расчет выполнялся методом установления по модели Навье-Стокса на сетке, состоящей из 25 блоков (рисунок 2.47).

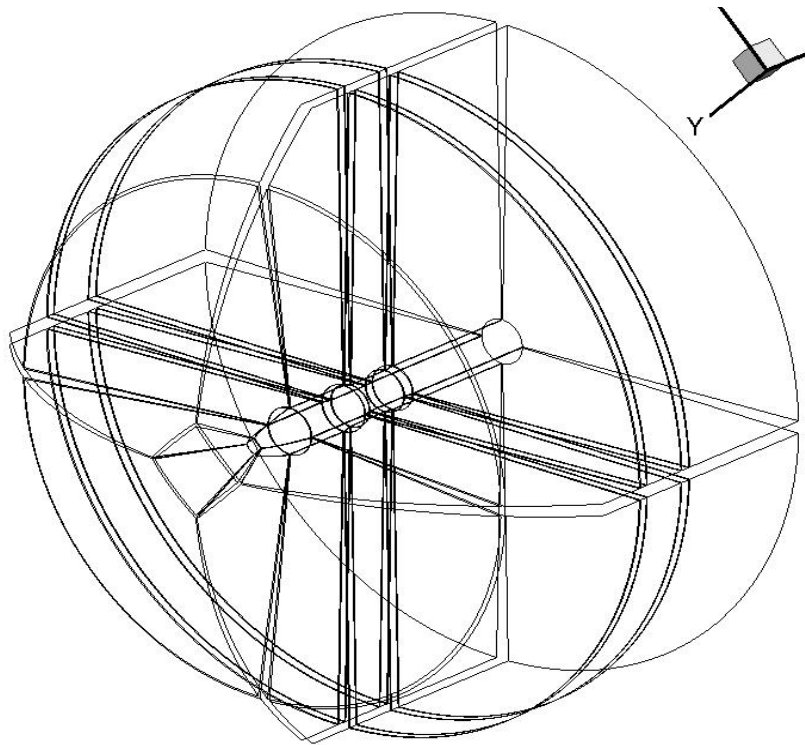


Рисунок 2.47 – Схема расположения блоков расчетной сетки

На рисунке 2.48 представлены результаты локализации ударных волн в трех блоках расчетной сетки для двух моментов времени.

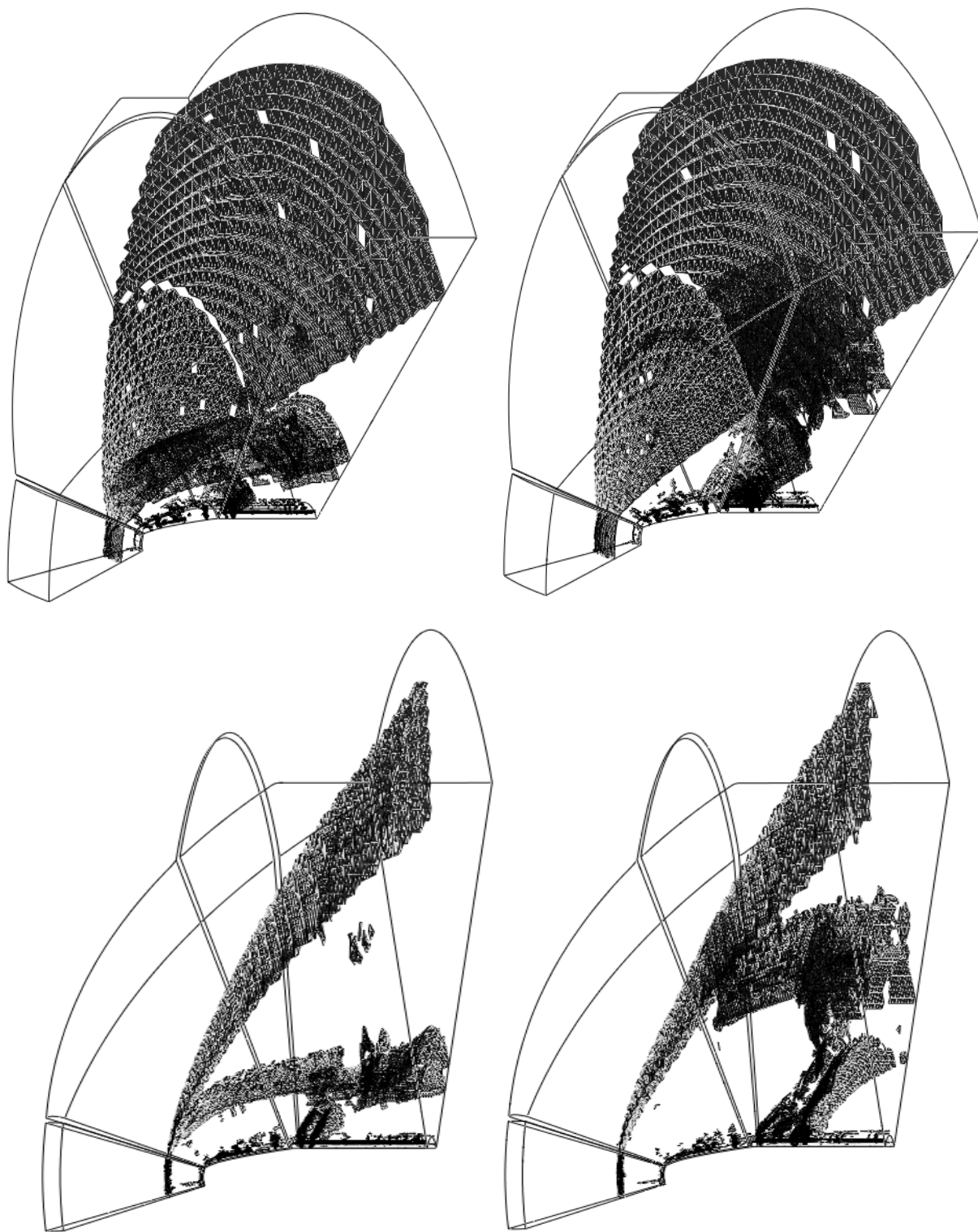


Рисунок 2.48 – Результаты локализации ударных волн на шаге 176000 (слева) и 239200 (справа)

Четко локализируются структуры, соответствующие головной ударной волне и уплотнению, возникающему за волной разрежения при обтекании цилиндрических тел.

В течении также наблюдается нестационарный процесс. За головной ударной волной был выделен разрыв слабой интенсивности (рисунок 2.48 слева). Этот скачок постепенно удаляется от тела (рисунок 2.48 справа) и при дальнейшем установлении течения должен покинуть расчетную область. Указанный факт свидетельствует о том, что течение еще не установилось и требуется продолжение расчета.

В силу слабой интенсивности установить наличие указанного нестационарного разрыва стандартными средствами может быть достаточно трудоемко. Так, на шаге 176000 его наличие может быть визуально установлено по распределению поля плотности (рисунок 2.49).

Однако на шаге 239200 визуально установить наличие разрыва уже невозможно (рисунок 2.50). Приходится прибегать к дополнительным средствам, например, использованию «дикой палитры» (рисунок 2.51). Однако интерпретация результатов, полученных с использованием подобных средств, (как и выбор самих средств) требует определенного опыта и навыков в анализе расчетов газодинамических течений.

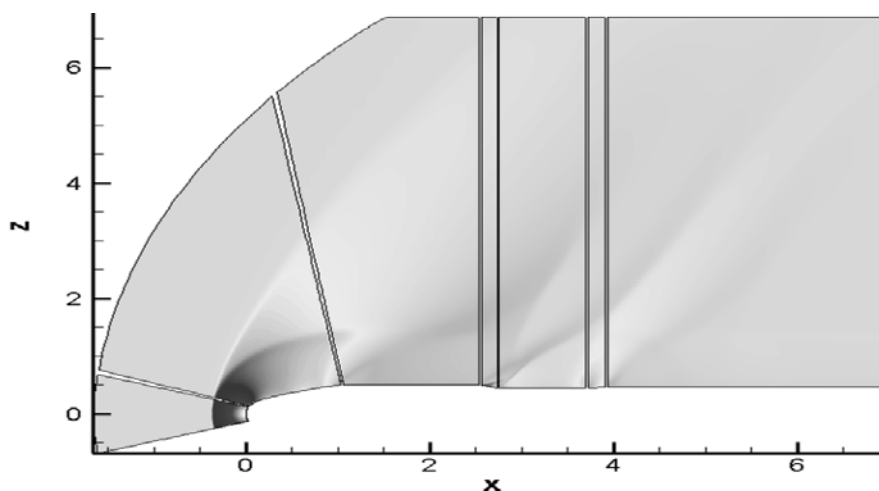


Рисунок 2.49 – Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 176000

В то же время представленный в данной работе детектор позволяет с легкостью обнаружить и локализовать указанный разрыв. Таким образом, детектор может применяться для анализа качества расчета, а при построении дополни-

тельной логики (сравнение положения разрывов, локализованных в различные моменты времени) может быть использован для проверки того, что течение установилось.

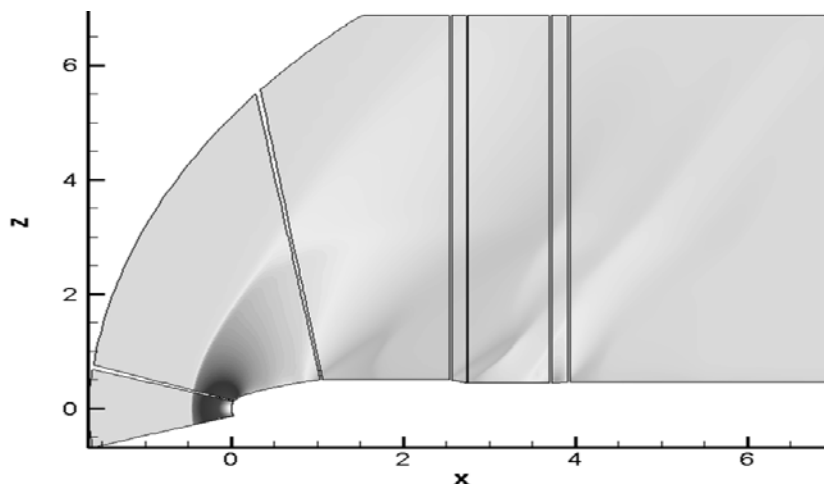


Рисунок 2.50 – Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 239200

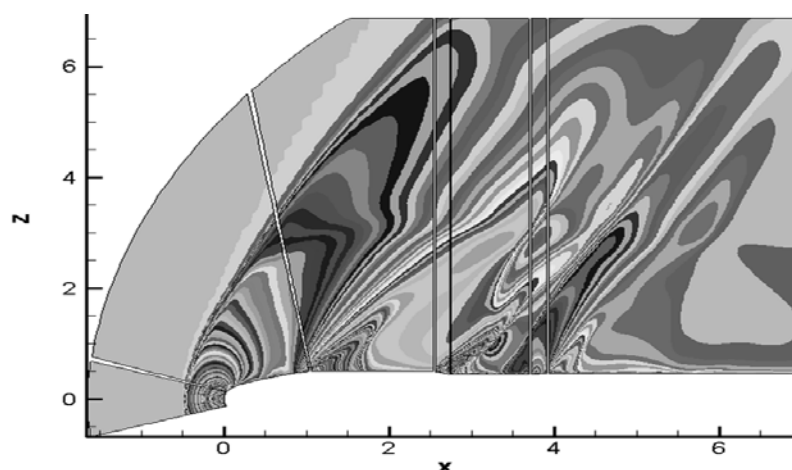


Рисунок 2.51 – Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 239200
(«дикая палитра»)

2.4.5 Применение детектора для адаптации расчетной сетки к положению разрывов

В заключение, на примере одномерной задачи о распаде и взаимодействии разрывов в трубе под действием импульсного вложения энергии (пункт 2.2.2.3), рассмотрим простейший вариант применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов.

В начальный момент времени существуют три области с постоянными значениями газодинамических величин:

- невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, \rho_1 = 1.0, u_1 = 0.0, p_1 = 1.0,$$

- объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, \rho_2 = 1.0, u_2 = 0.0, p_2 = 12.4625,$$

- область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, \rho_3 = 3.7629, u_3 = 2.5194, p_3 = 9.6450.$$

В результате распада разрыва в точке $x = 0$ формируются две ударных волны и контактный разрыв между ними. Распад разрыва в точке $x = 2$ дает идущую влево волну разрежения, идущую вправо ударную волну и контактный разрыв между ними. Начальная конфигурация разрывов представлена на рисунке 2.42. Начальные интенсивности перечисленных разрывов зависят от двух факторов: числа Маха падающей ударной волны и количества вложенной энергии.

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. Использовался одномерный вариант обобщенной разностной схемы Годунова 2-го порядка аппроксимации. Изначально расчеты проводились на равномерной подвижной сетке, границы которой соответствуют положению крайней левой и крайней правой ударных волн. Результаты расчета на сетке, содержащей 2048 ячеек, представлены на рисунке 2.52.

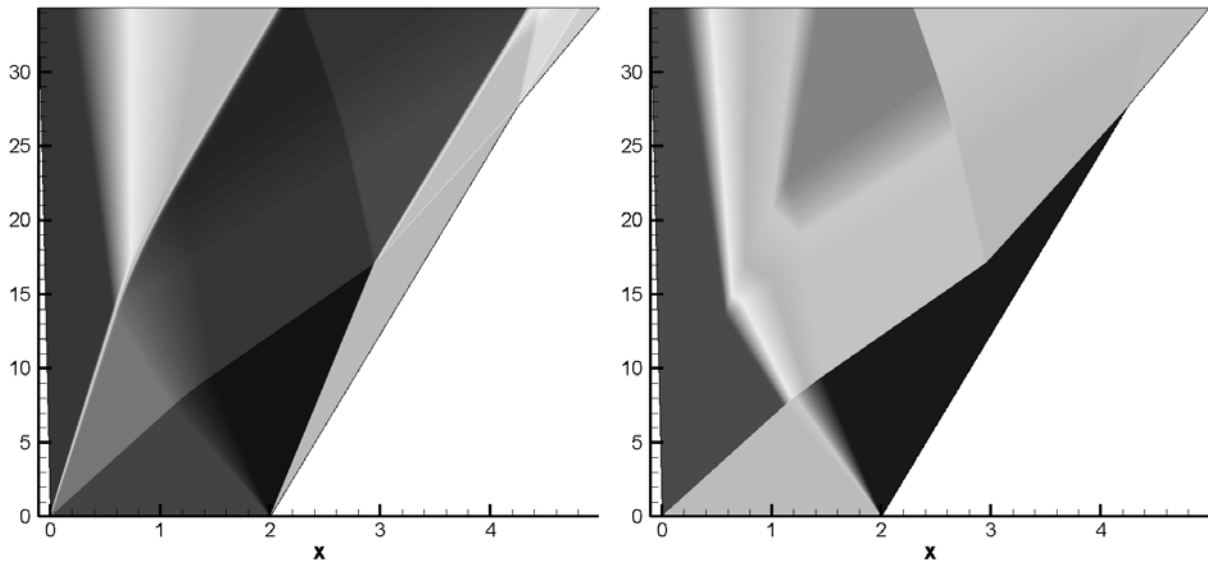


Рисунок 2.52 – Распределение плотности и давления в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 2048 ячеек

Затем в расчет был внедрен алгоритм выделения особенностей течения. Локализация разрывов проводилась на каждом шаге расчета. Результаты локализации представлены на рисунке 2.53.

Чтобы проверить качество выделения разрывов, для начального интервала времени было проведено сравнение полученных результатов локализации с точным решением (таблица 4.1).

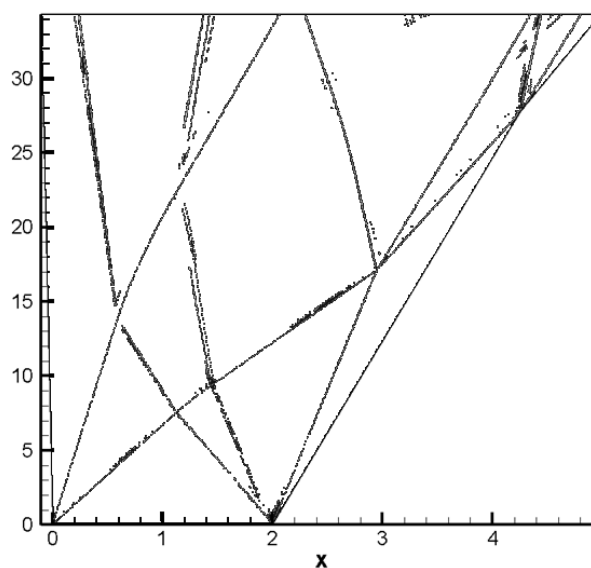


Рисунок 2.53 – Разрывы, локализованные в расчете

Таблица 2.1
Сравнение точных и полученных скоростей разрывов

Распад слева	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Контактный разрыв	1.468936	1.462891
Ударная волна	5.150371	5.131882
Распад справа	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Волна разрежения — левая граница	-4.177036	-3.928539
Волна разрежения — правая граница	-1.87936	-1.953756
Контактный разрыв	1.91473	1.911167

Для контактных разрывов и ударной волны получено достаточно точное совпадение, локализованные границы волны разрежения смещены внутрь волны разрежения.

После этого был реализован адаптивный вариант расчета, использующий информацию о положении разрывов, полученную от детектора. На каждом шаге расчета сначала проводилась локализация разрывов в исходных данных (начальных или данных с предыдущего шага). Затем ячейки, в которых были локализованы разрывы, и две соседние с ними ячейки разбивались на восемь равных частей. Таким образом формировалась неравномерная сетка, на которой выполнялся очередной шаг расчета. Значения полей газодинамических величин в ячейках этой сетки задавались в зависимости от того, какая сетка использовалась на предыдущем шаге:

- если в обоих случаях ячейка разбивалась на части, то значения для каждой части, полученные на предыдущем шаге, используются как исходные на текущем шаге;
- если в обоих случаях ячейка не разбивалась, то значения, полученные для этой ячейки на предыдущем шаге, используются как исходные на текущем шаге;

- если на текущем шаге ячейка разбивается на части, а на предыдущем нет, то для каждой из частей ячейки в качестве исходных данных используются одни и те же величины, полученные в результате расчета на предыдущем шаге для целой ячейки;
- если на предыдущем шаге ячейка разбивается на части, а на текущем нет, то в качестве исходных данных для ячейки используются осредненные по всем частям ячейки величины.

Результаты неадаптивного расчета, проведенного на равномерной сетке, содержащей 256 ячеек, и адаптивного расчета, проведенного с использованием информации о положении разрывов на неравномерной сетке (изначально сетка состоит из 256 ячеек, но каждая может разбиваться на 8 частей), представлены на рисунках 2.54 и 2.55 соответственно.

Использование адаптивного подхода позволило существенно повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов, особенно контактных (рисунок 2.56).

Использование адаптивной сетки позволяет сократить время расчета по сравнению с расчетом на равномерной мелкой сетке. Чтобы оценить ускорение, были проведены различные варианты расчета данной задачи и получены оценки времени, необходимого для расчета каждого из вариантов. Для каждого из вариантов оценивалось время, необходимое для 100 циклов расчета. При этом отсутствовала запись файлов, то есть определялось именно время счета.

Расчет без локализации разрывов и без адаптации сетки, исходная сетка содержит 256 ячеек (рисунок 2.54). Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 12 секунд, однако разрывы сильно размазываются.

Расчет без локализации разрывов и без адаптации сетки, исходная сетка содержит 2048 ячеек (рисунок 2.52). Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 662 секунды. Разрывы уже не размазаны. Такое существенное замедление вызвано не только увеличением числа ячеек, но и уменьшением шага по времени, необходимым для устойчивости расчета.

Расчет с локализацией разрывов, но без адаптации сетки, исходная сетка содержит 256 ячеек. Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 22 секунды, таким образом, на определение положения разрывов в расчете тратится 10 секунд.

Расчет с локализацией разрывов и адаптацией сетки, исходная сетка содержит 256 ячеек, каждая из ячеек может разбиваться на 8 равных частей (рисунок 2.55). Расчет проводился с различным шагом по времени для мелких и крупных ячеек, локализация разрывов проводилась только на шаге времени, соответствующем грубой сетке. Для расчета 100 циклов данной задачи требуется 268 секунд. Качество расчета эквивалентно варианту 2, разрывы почти не размазаны (рисунок 2.56).

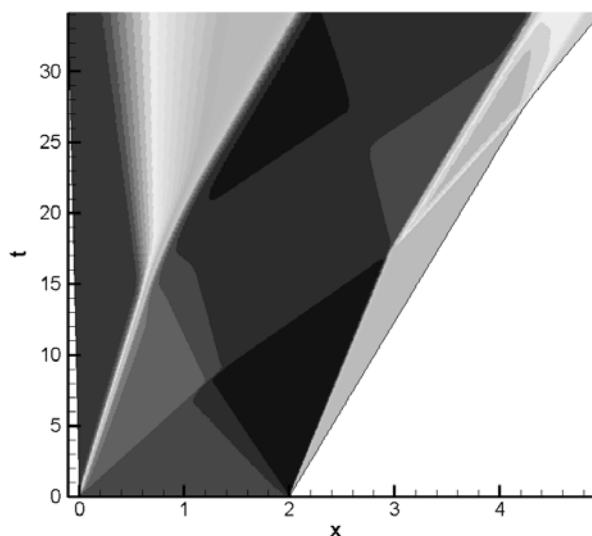


Рисунок 2.54 – Распределение плотности в расчете на равномерной сетке

Таким образом, использование адаптивного подхода позволило ускорить расчет данной задачи в 2.5 раза. Поскольку исходная сетка содержит всего 256 ячеек, а разрывов, к которым адаптируется сетка, достаточно много (7 в начальный момент времени), то такой результат является весьма успешным.

Данный пример демонстрирует точность выделения сингулярностей течения и высокий потенциал использования детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Естественно, описанный выше подход является одним из простейших. На практике могут использоваться методы, связанные не только с построением адаптивных сеток, но и с модификацией в окрестности разрывов самого разностного алгоритма. Однако описанный в данной работе детектор сингулярностей остается универсальным элементом, который может быть эффективно использован для локализации разрывов при любом из подходов к адаптации расчетов газодинамических течений к положению разрывов.

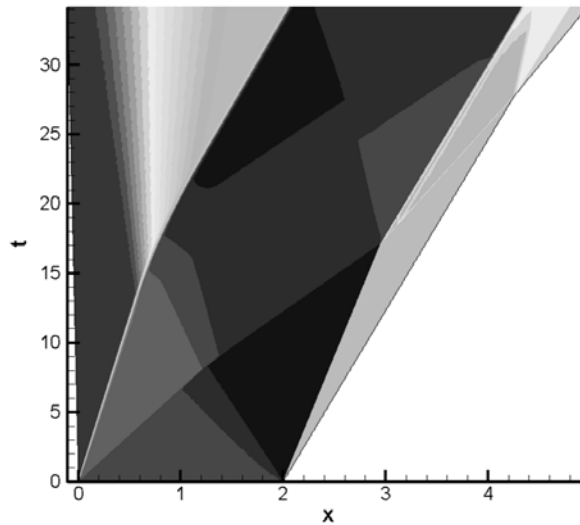


Рисунок 2.55 – Распределение плотности в расчете, выполненном на адаптивной сетке

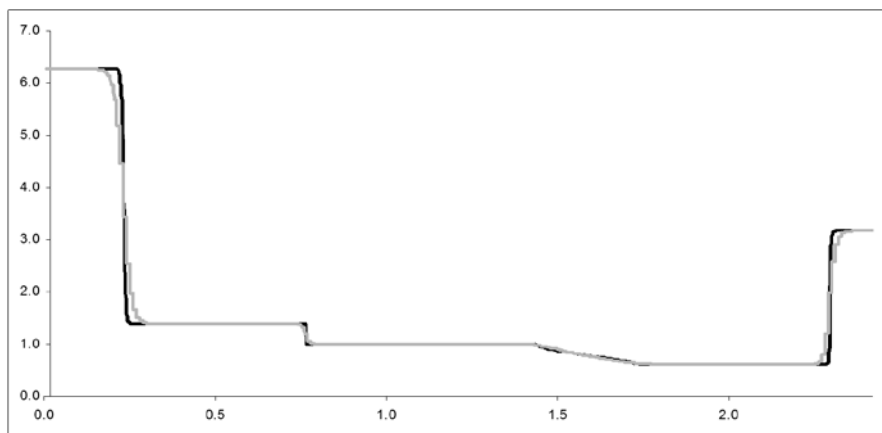


Рисунок 2.56 – Распределение плотности в момент $t = 5$ для адаптивного (черный) и неадаптивного (серый) расчетов

Таким образом, показано, что модифицированный алгоритм локализации особенностей позволяет эффективно обрабатывать двумерные и трехмерные расчеты в областях со сложной геометрией и подавлять значительную часть артефактов. Кроме того, детектор может быть успешно использован для ускорения и повышения качества расчета за счет его адаптации к положению разрывов. Сравнительная обработка расчетов, соответствующих уравнениям Эйлера и Рейнольдса, показала, что в расчете для вязкой среды выделяются как особенности, соответствующие ударным волнам в расчете по уравнениям Эйлера, так и особенности, соответствующие вязким эффектам. Для особенностей, соответствующих ударным волнам, с достаточно высокой точностью выполняют-

ся соотношения на разрывах для идеальной среды. При численной проверке на границе следа за моделью с высокой точностью выполняется только соотношение для нормальной компоненты импульса (2.2), а остальные соотношения (2.3, 2.4) нарушаются. Данные факты позволяют разделить особенности, соответствующие вязким и невязким эффектам.

Глава 3

Численное моделирование задач на адаптивных сетках

3.1 Численное моделирование на адаптивных сетках взаимодействия ударных волн с пограничными слоями

Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем является часто встречающимся элементом течения в задачах транс- и сверхзвукового обтекания различных летательных аппаратов. Так, в работе [120] представлены «канонические» конфигурации таких взаимодействий — рисунок 3.1. Для этих конфигураций имеются подробные экспериментальные и численные данные.

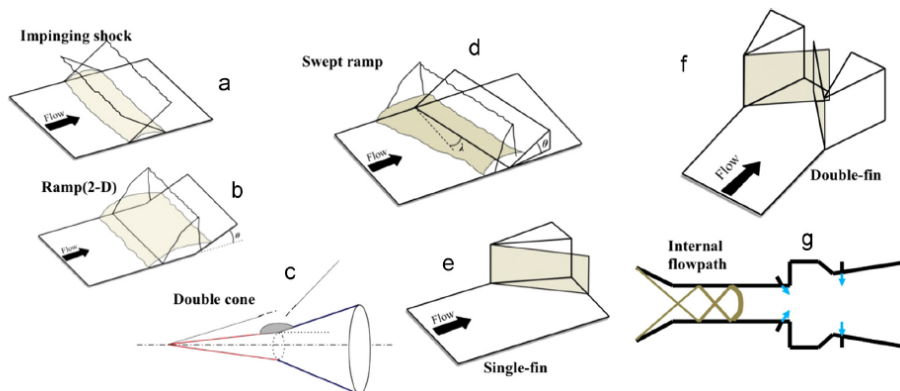


Рисунок 3.1 – «Канонические» конфигурации взаимодействия ударных волн с пограничными слоями

Численные и экспериментальные исследования этой задачи активно ведутся во всем мире, начиная приблизительно с окончания Второй мировой войны. Несмотря на огромный объем полученных результатов [120–131], многие вопросы требуют дальнейших исследований и привлекают пристальное внимание многих ученых в РФ и за рубежом. В настоящее время эти исследования приобретают особую актуальность в связи с разработкой прямоточных реактивных двигателей для гиперзвуковых летательных аппаратов.

Характерной особенностью рассматриваемых течений является наличие элементов, существенно различающихся по пространственным и временным

масштабам. Для численного исследования таких течений весьма эффективным является подход с использованием локально-адаптивных сеток.

В качестве примера рассмотрим течение в угле сжатия (вариант б на рис. 3.1). Экспериментальные исследования этой задачи были выполнены в ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН [131]. Наличие подробных экспериментальных данных позволяет провести валидацию и верификацию алгоритма.



Рисунок 3.2 – Модель в аэродинамической трубе Т-326 (ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН)

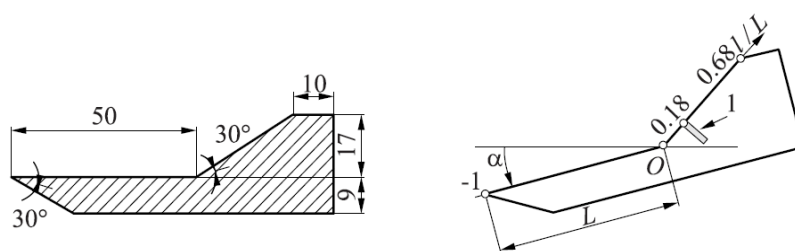


Рисунок 3.3 – Геометрические характеристики модели. Размеры и положение относительно набегающего потока

Общий вид модели, размещенной в аэродинамической трубе Т-326, и геометрические характеристики представлены на рис. 3.2, 3.3. Модель состоит из плиты с практически острой передней кромкой. На модели установлен уступ (клин с углом 30°). Вся модель может поворачиваться на угол α по отношению к направлению набегающего потока. В настоящей работе рассмотрены варианты $\alpha=0^\circ$ и $\alpha=10^\circ$. Длина плиты от передней кромки до начала клина составляет

$d=50$ мм. Число Рейнольдса, вычисленное по этой длине, составляет $Re L = 6 \cdot 10^5$. Число Маха набегающего потока $M=6.01$.

Расчеты выполнены с использованием метода свободной границы (см. Главу 1) на локально-адаптивных сетках. Исходная (базовая) декартова сетка содержала 516 шагов в продольном направлении и 132 в поперечном. Базовая сетка выбиралась достаточно грубой, таким образом, чтобы эффекты вязкости (образование пограничного слоя и его отрыв) не могли быть адекватно воспроизведены.

В эксперименте наблюдалось ламинарное течение, поэтому в расчете использовалась математическая модель уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа.

3.1.1 Режим $\alpha=0^\circ$

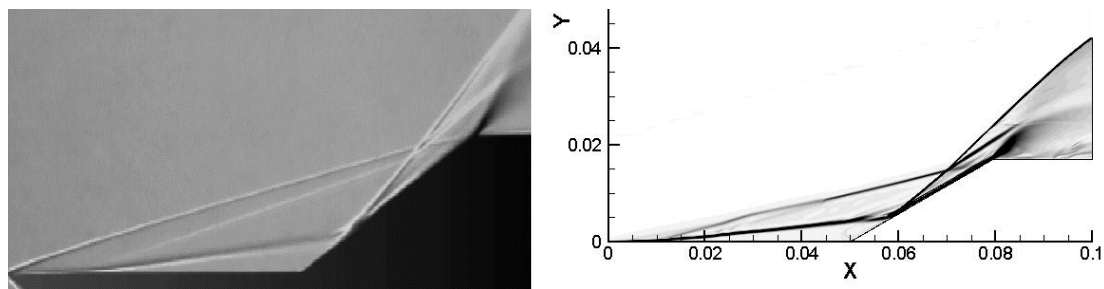


Рисунок 3.4 – $\alpha=0^\circ$. Структура решения. Основные разрывы.
Экспериментальные данные слева, расчет справа

На рис. 3.4 изображены основные детали течения (экспериментальные данные слева, расчет справа). За счет резкого торможения потока около передней кромки пластины образуется ударная волна S1. На некотором расстоянии вниз по потоку около пластины образуется протяженная область отрыва. В начале области отрыва формируется ударная волна S2. На рис. 3.4 видна граница области отрыва — тангенциальный разрыв (фактически, достаточно узкий слой смешения). Около точки присоединения на поверхности клина формируется ударная волна S3, которая приводит к росту давления на поверхности модели. Ударная волна S3 пересекается с ударной волной S2. При $\alpha=0^\circ$ на небольшом расстоянии вниз по потоку происходит взаимодействие с ударной волной S1, в результате чего образуются висячий скачок S4 и тангенциальные разрывы.

Наличие указанных разрывов в поле течения приводит к соответствующему дроблению ячеек сетки в их окрестности. На рис. 3.5 красным цветом изображены ячейки, разбитые на 2 части по каждому направлению. Как видно, расположение измельченных ячеек в значительной степени воспроизводит описанную выше структуру разрывов. Количество мелких ячеек составляет 39560, число неразбитых ячеек базовой сетки 55646. Однородная сетка во всей области с шагом, соответствующим мелким ячейкам, содержала бы 262144 ячеек. Таким образом, при использовании локальной адаптации объем вычислений уменьшается в 2.65 раза.

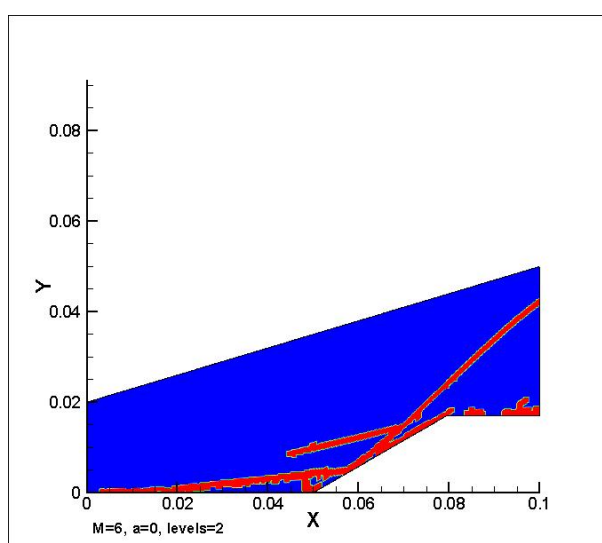


Рисунок 3.5 – Адаптация сетки к разрывам решения

Рассматриваемое течение обладает интересным свойством, которое иногда называют «динамическим» слоем. На рис. 3.6 изображено распределение полного давления (отнесенного к величине в набегающем потоке) и линии тока. Красная зона высоких значений полного давления соответствует невозмущенному набегающему потоку. Синяя область низких значений полного давления отражает падение полного давления в пограничном слое и области отрыва. Полное давление в области между ударными волнами S1 и S2 выше, чем в области над волной S2. Часть потока из этой области проходит через волну сжатия над точкой присоединения, и полное давление здесь не уменьшается. Как уже отмечалось, выше располагается висячий скачок, при переходе через который полное давление сильно уменьшается. То же самое происходит с невозму-

щенным потоком. Таким образом, узкая полоса потока со сравнительно высоким полным давлением обусловлена волной сжатия под висячим скачком.

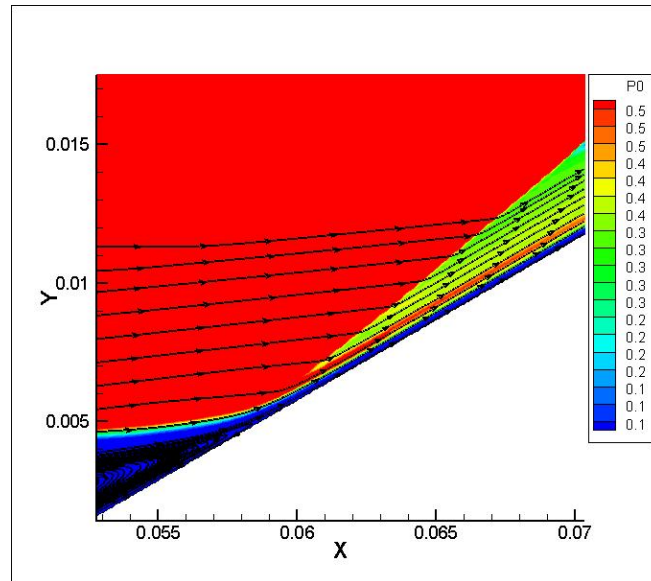


Рисунок 3.6 – «Динамический» слой вблизи поверхности модели

Эффект адаптации отчетливо проявляется в характере распределения давления на поверхности модели — рис. 3.7. Черным цветом изображено аналитическое решение для модели уравнений Эйлера с ударной волной, присоединенной к началу клина. Решение на базовой сетке (зеленая кривая) действительно оказывается близким к решению уравнений Эйлера. Адаптация сетки (локальное уменьшение шага в 2 раза по каждому направлению) позволяет существенно повысить согласие с экспериментальными данными.

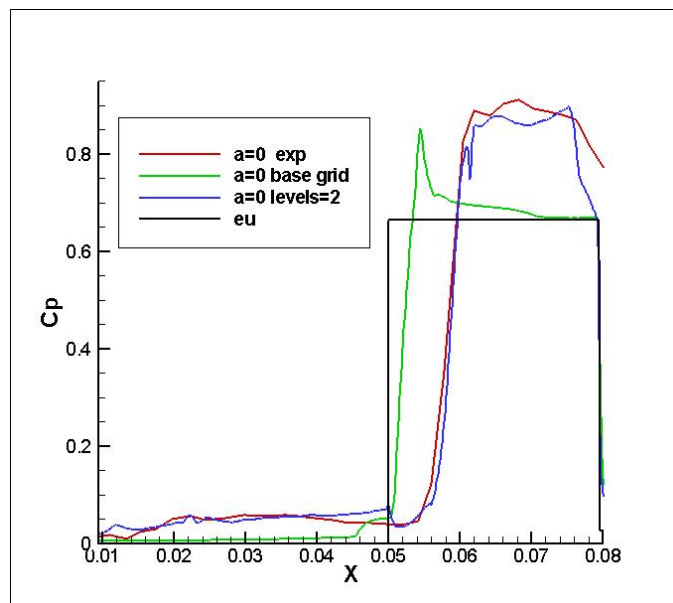


Рисунок 3.7 – Коэффициент давления на поверхности

3.1.2 Режим $\alpha=10^\circ$

В случае $\alpha=10^\circ$ картина течения во многом аналогична рассмотренной выше (см. рис. 3.5 и рис. 3.8). Однако здесь набегающий поток направлен под углом к пластине и ударная волна $S1$ у передней кромки имеет значительно большую интенсивность.

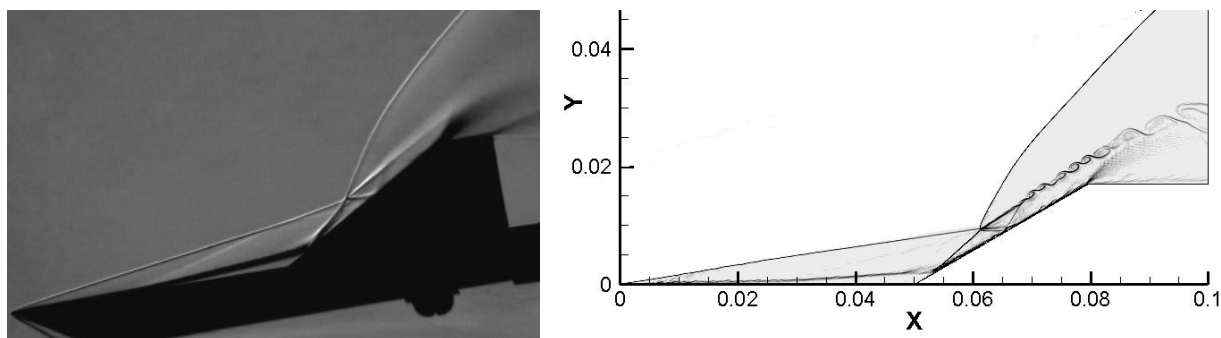


Рисунок 3.8 – $\alpha=10^\circ$. Структура решения. Основные разрывы.
Экспериментальные данные слева, расчет справа

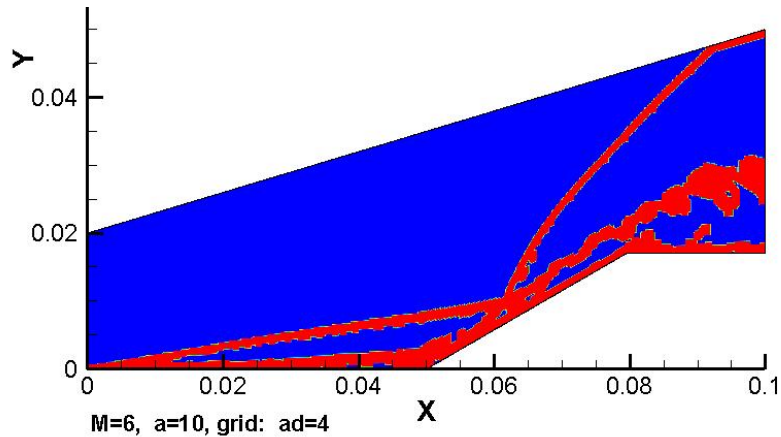


Рисунок 3.9 – Адаптация сетки к разрывам решения

В процессе адаптации ячейки базовой сетки разбивались на 4 по каждому направлению. Количество разбитых ячеек 176944, 54477 ячеек базовой сетки не подверглись разбиению. Равномерная сетка с шагом, соответствующим самым мелким ячейкам, содержала бы 1048576 ячеек. Таким образом, локальная адаптация позволила сократить объем вычислений в 4.5 раза.

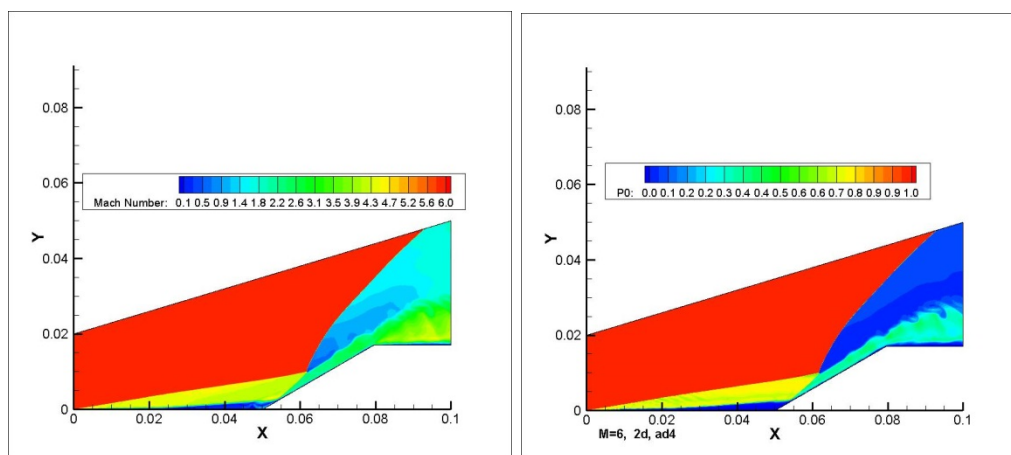


Рисунок 3.10 – Распределение числа Маха и полного давления

Механизм формирования полосы течения с относительно высоким полным давлением («динамический» слой) (рис. 3.11) около поверхности клина аналогичен режиму $\alpha=0^\circ$. Он обусловлен тем, что часть потока над пограничным слоем проходит через волну сжатия. Выше располагается висячий скачок, приводящий к большим потерям полного давления.

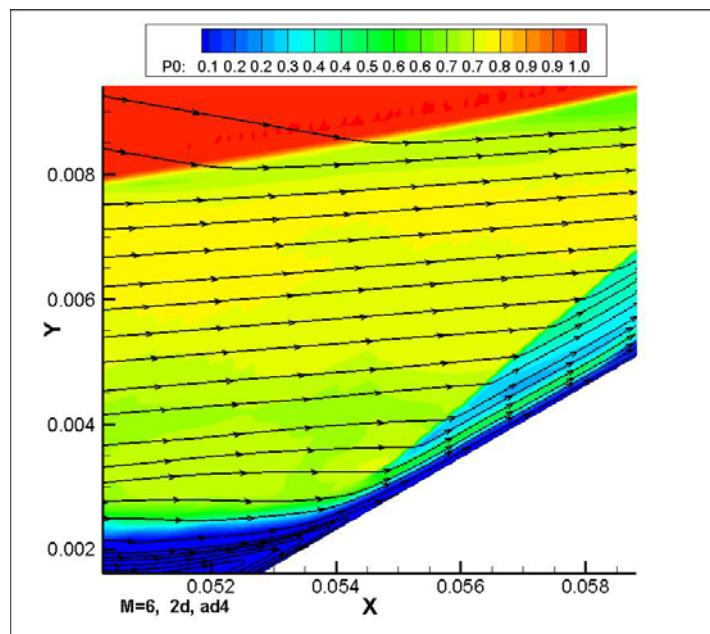


Рисунок 3.11 – «Динамический» слой около поверхности клина

Как уже отмечалось, интенсивность всех разрывов при $\alpha=10^\circ$ значительно выше, чем для рассмотренного ранее варианта $\alpha=0^\circ$. Это обстоятельство значительно повышает требования к точности. Удовлетворительного согласования с экспериментальными данными по коэффициенту давления удалось добиться при разбиении базовых ячеек на 4 части по каждому направлению. Напомним, что для $\alpha=0^\circ$ оказалось достаточным разбивать ячейки на 2 части.

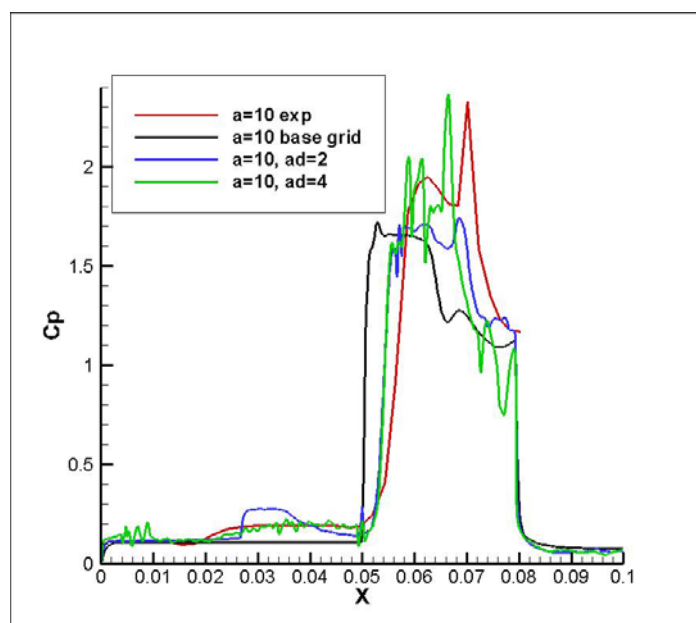


Рисунок 3.12 – Коэффициент давления на поверхности модели

Стоит отметить, что в расчете положение максимума давления смещено по отношению к экспериментальным данным. Максимум давления при $x \sim 0.075$ в эксперименте связывается с образованием около клина локальной области отрыва [131]. Предусмотрены дальнейшие исследования с целью уточнения механизмов течения в этой зоне.

3.2 Численное моделирование неустойчивости контактного разрыва. Разрушение «застойной» зоны

Хорошо известен факт неединственности решения задачи об обтекании тела в классической газовой динамике [132]. Для любого затупленного тела, наряду с решением с отошедшей ударной волной, формально возможно бесконечное количество решений передним клином («застойная» область), заполненным покоящимся газом, имеющим постоянное давление (рис. 3.13) и с присоединенной к нему ударной волной. Давление в застойной области определяется в соответствии с условиями на этой волне. Угол клина может меняться в достаточно большом диапазоне, соответствующем области существования решений с присоединенной ударной волной [133]. Для такого решения сопротивление тела будет значительно ниже, чем в случае отошедшей головной ударной волны. Подобные решения, однако, не наблюдаются ни в расчетах, ни в эксперименте. Причиной является неустойчивость контактного разрыва [133]–[135]. Если на контактном разрыве имеется достаточная разность скоростей, развивается неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, приводящая к разрушению застойной области и переходу к «стандартному» решению.

Тем не менее, следует отметить, что при определенных внешних воздействиях на поток такое «нестандартное» решение может быть реализовано. Именно этот факт лежит в основе методов улучшения аэродинамических характеристик летательных аппаратов путем направленного вложения энергии в поток [136]–[142].

Целью данной работы являлось рассмотрение процесса разрушения «застойной» области с помощью численного моделирования.

В силу динамического характера задачи весьма желательно адаптировать сетку в соответствии с эволюцией решения. В представленных расчетах ис-

пользовалась декартова локально-адаптивная сетка с вейвлетным анализатором гладкости (см. Главу 1) с 4 уровнями дробления ячеек. Базовая сетка 136×240 с $h=0.025$, минимальная ячейка адаптивной сетки эквивалентна ячейке равномерной сетки 1088×1920 . Измельчение проводилось на каждом шаге, огрубление — каждые 2000 шагов.

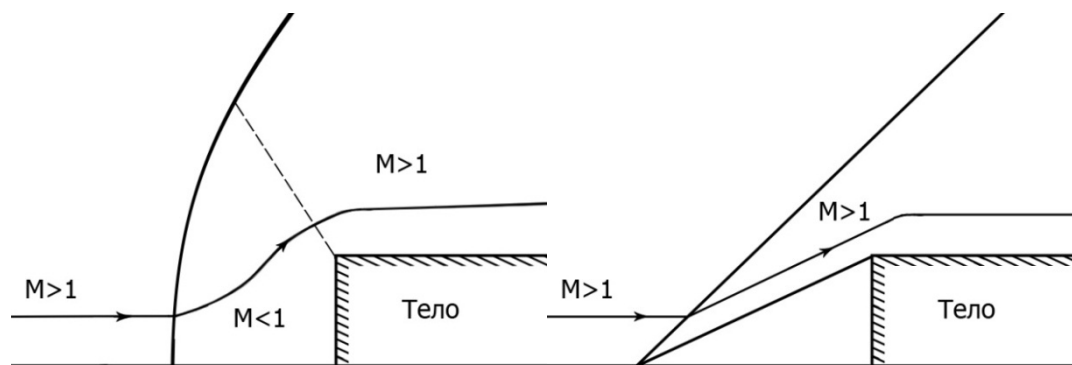


Рисунок 3.13 – Неединственность решения задачи обтекания затупленных тел в рамках модели уравнений Эйлера

Постановка задачи

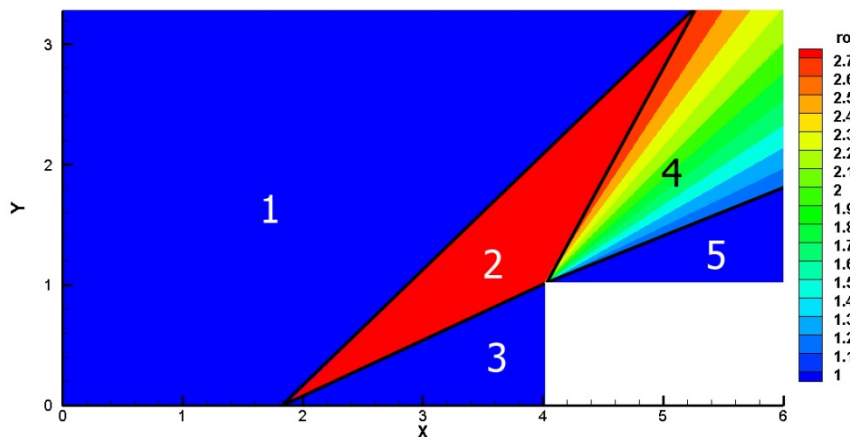


Рисунок 3.14 – Постановка задачи

Задавались следующие начальные данные (рис. 3.14).

Набегающий поток, $M = 3$, $\rho = 1.0$, $u = 3.5496$, $v = 0.0$, $p = 1$.

Величины за фронтом плоской ударной волны, формирующейся при обтекании клина 25° , $\rho = 2.7963412$, $u = 2.4439015$, $v = 1.1396102$, $p = 4.9250083$.

Клин 25° , заполненный покоящимся газом, $\rho = 1$, $u = 0$, $v = 0$, $p = 4.9250083$. Данные выбраны так, чтобы между зонами 2 и 3 был контактный разрыв — скачок плотности и касательной скорости.

Веер волны разрежения, образующийся при обтекании совокупного тела 3 и 6.

Поток после волны разрежения, $\rho = 0.95543545$, $u = 3.402438$, $v = 0$, $p = 1.0951226$.

Тело в виде прямоугольника, представлено с помощью метода свободной границы [148].

Амплитуда начальных возмущений соответствует шагу $h=0.003125$ сетки на контактном разрыве.

В настоящей работе используется модель уравнений Эйлера, описывающих движение идеальной сжимаемой жидкости, для решения которых применяется метод конечного объема с потоками, вычисленными по С. К. Годунову.

Результат расчетов

Рассмотрим различные стадии развивающегося при таких начальных данных течения.

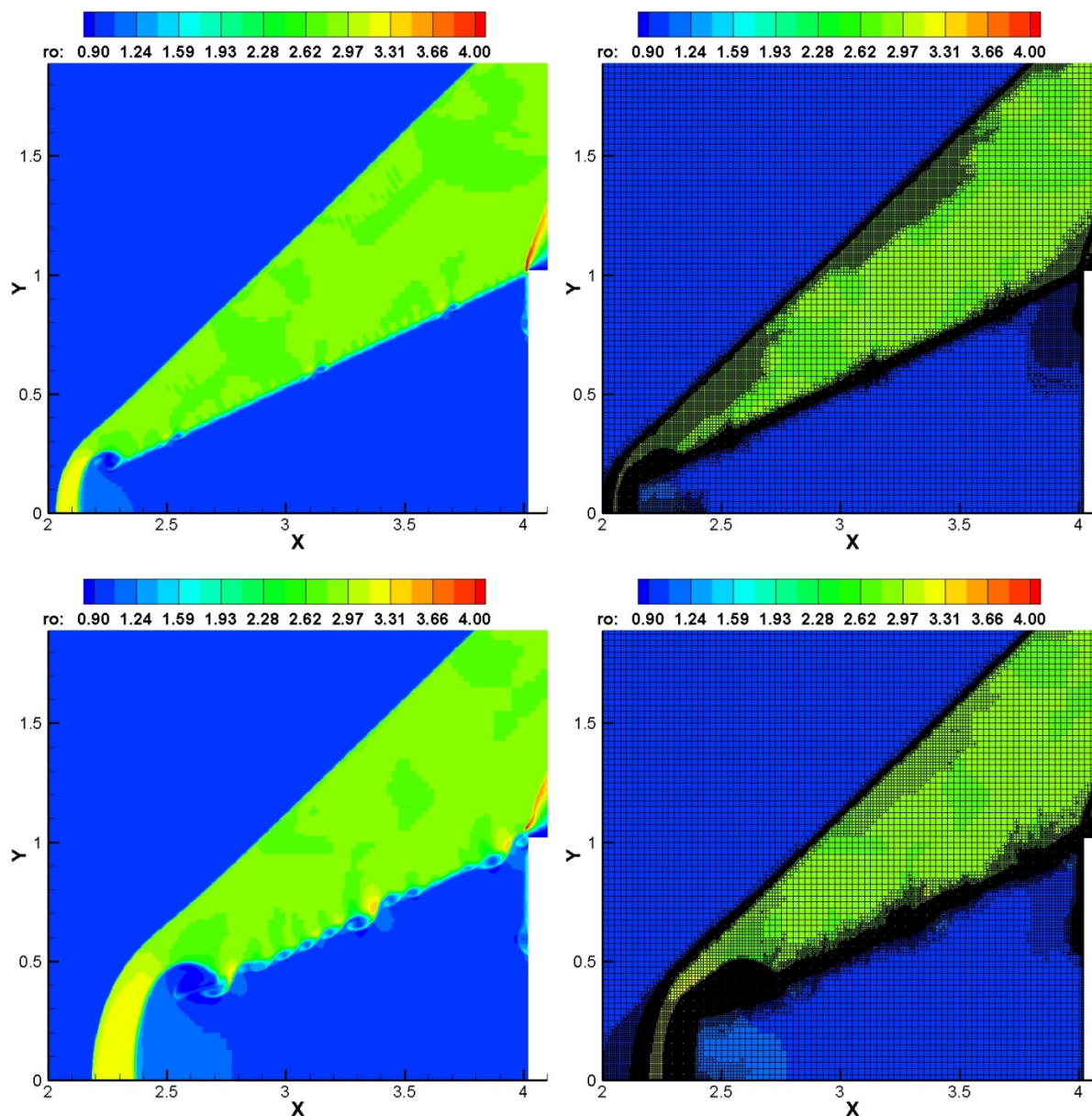


Рисунок 3.15 – Распределение давления и структура сеток, момент времени t_1 (сверху) и t_2 (снизу)

Как можно заметить на рис. 3.15, на границе 2 и 3 зон начала развиваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (К.-Г.). Со временем ширина слоя смешения увеличивается, возрастает амплитуда возмущений, что согласуется с [133]–[135], где утверждается, что синусоидальное возмущение граничной поверхности возрастает по экспоненциальному закону. Характер возмущений на этом этапе близок к гармоническому (рис. 3.16). Согласно [133]–[135], поверхность разрыва испытывает возмущение, при котором все величины — координаты точек самой поверхности, давление и скорость жидкости — являются пе-

риодическими функциями, пропорциональными $e^{i(kx-\omega t)}$ (в системе координат, где ось Ox направлена по тангенциальному разрыву). В связи с чем давление можно выразить как $p = p_0 + p'$. Тогда

$$p = 4.9250083 + \text{const Re}(e^{i(kx-\omega t)}) = 4.9250083 + 0.5 \cos(135x - 3.2),$$

$$k = 2\pi / \lambda.$$

Как видно из рис. 2.4, характер возмущений близок к теоретическому.

Многоуровневая адаптивная сетка мельчится в местах разрывов и больших градиентов плотности, благодаря чему неустойчивость К.-Г. можно хорошо отследить. Использование подобных сеток также существенно сокращает время расчета, т.к. расчет на равномерной сетке, соответствующей высшему (в данном случае, четвертому) уровню адаптивной, занимает гораздо большее время.

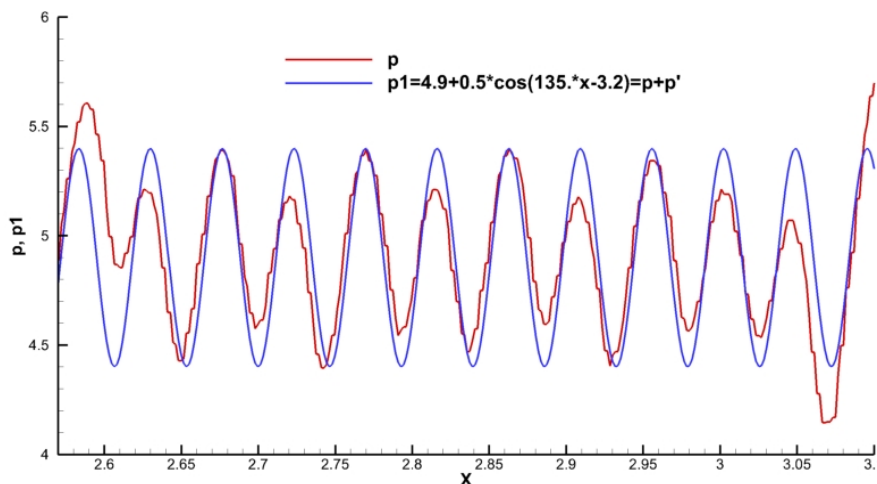


Рисунок 3.16 – Давление в слое смешения, момент времени t_1

В расчете до момента времени t_2 течение сходно с линейной стадией неустойчивости К.-Г. Далее же начинает формироваться классическое течение с отошедшей ударной волной. Передние края ударной волны и клина с покоящимся газом под воздействием набегающего потока искривляются и начинают взаимодействовать с неустойчивостью К.-Г. (рис. 3.15 и 3.17). Возникшие на границе вихри сдвигаются ближе к телу и с течением времени переходят на его передний срез.

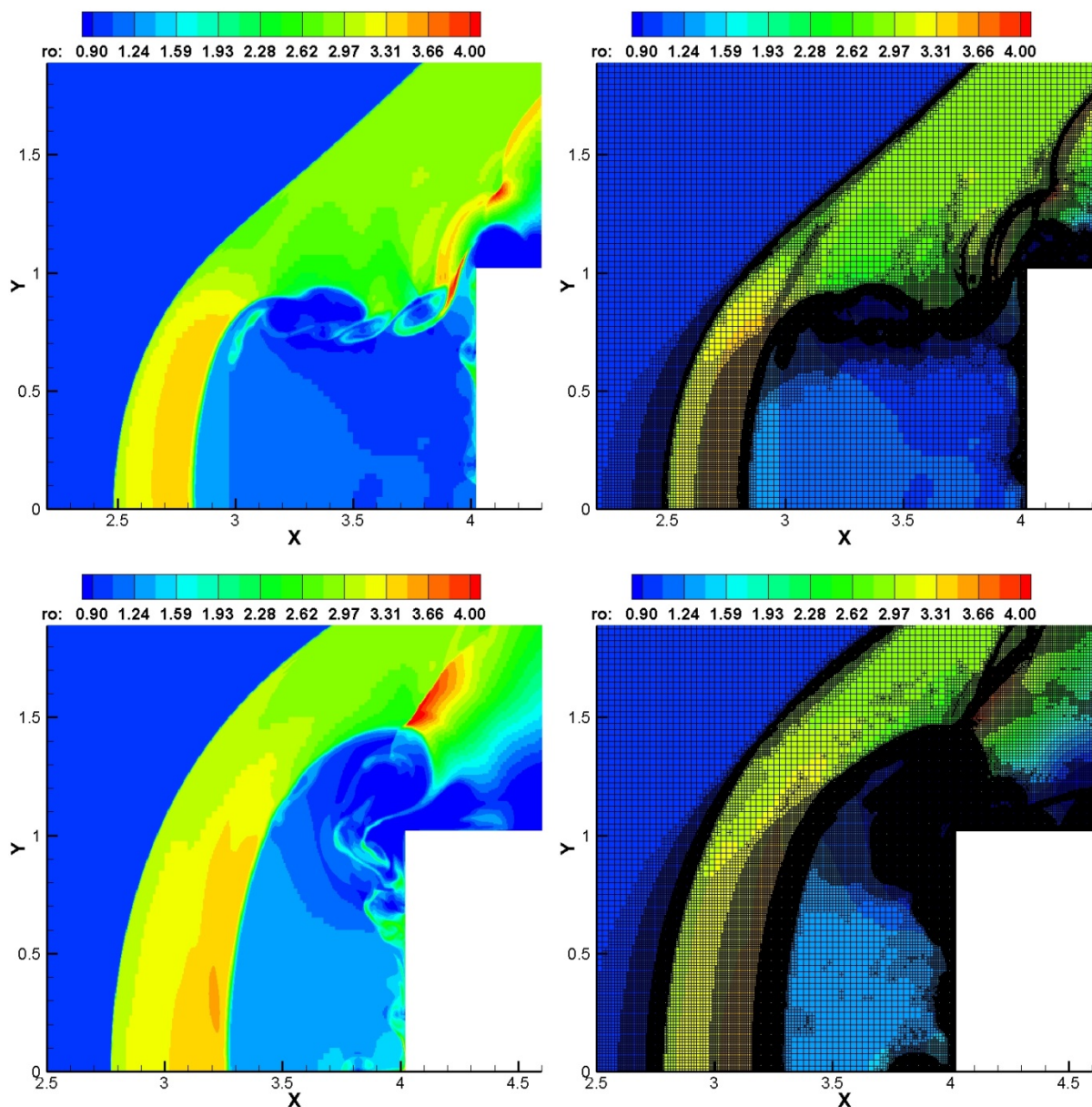


Рисунок 3.17 –. Распределение давления и структура сеток, момент времени t_3 (сверху) и t_4 (снизу)

Фронт ударной волны перемещается ближе к телу, сжимая покоящуюся область и остатки вихрей к переднему срезу (рис. 3.18). После он начинает отодвигаться от тела и отходит на расстояние, характерное для обтекания данного прямоугольника.

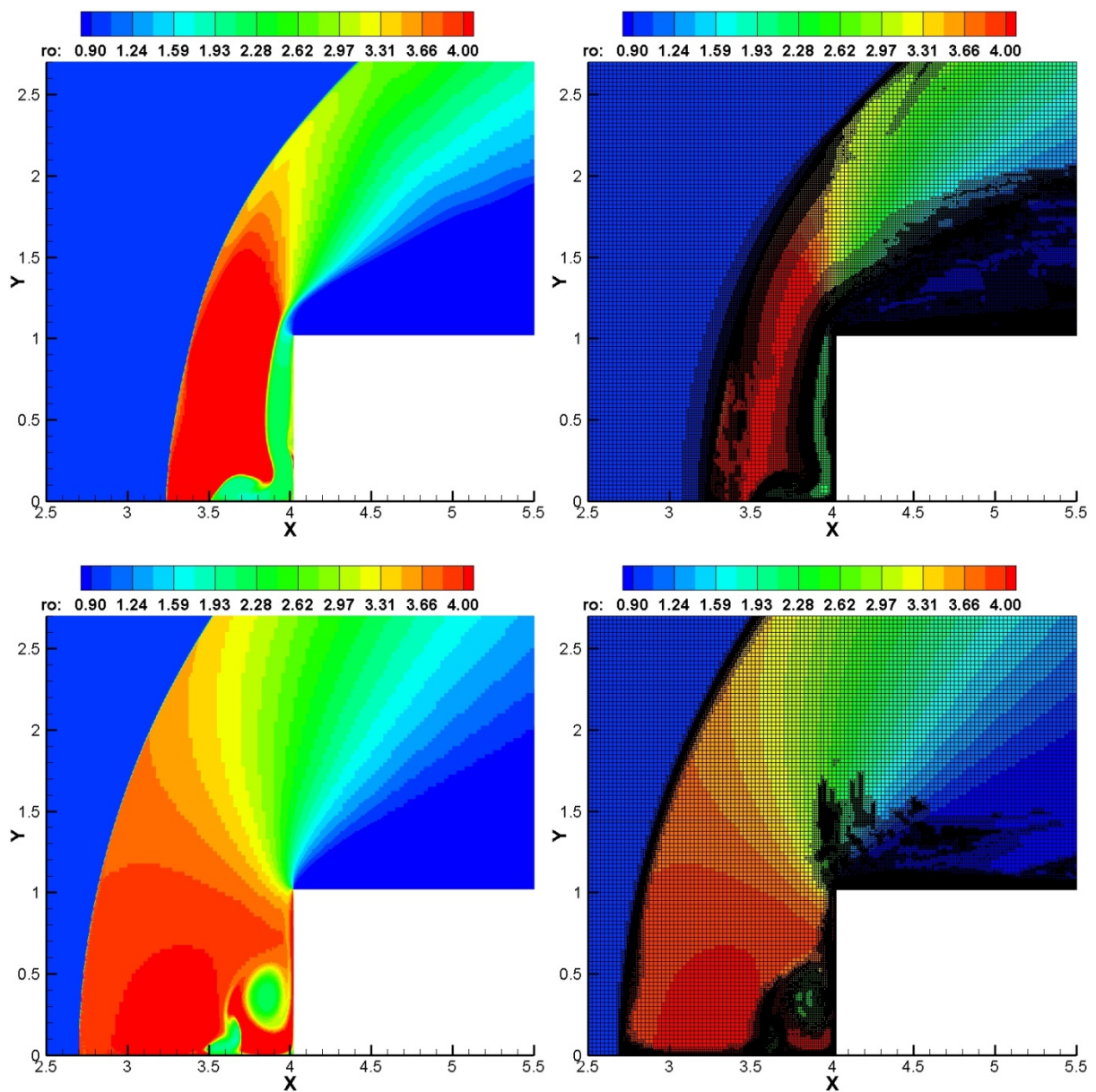


Рисунок 3.18 – Распределение давления и структура сеток, момент времени t_5 (сверху) и t_6 (снизу).

В конечном итоге, устанавливается течение, характерное для обтекания прямоугольного торца (рис. 3.19).

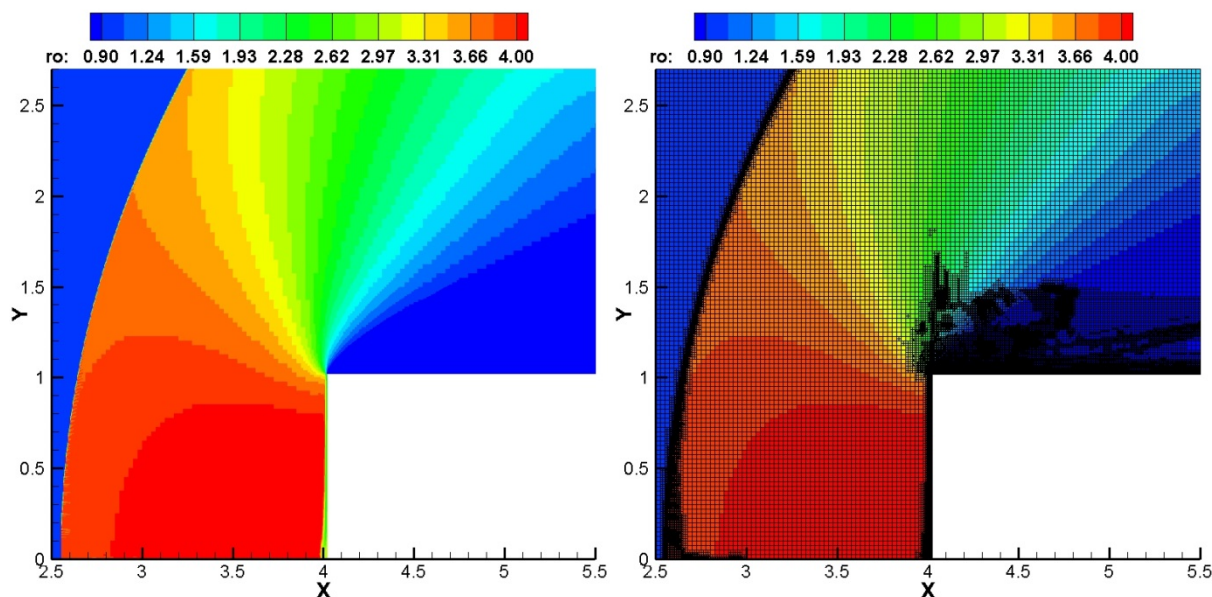


Рисунок 3.19 – Распределение давления и структура сетки

В результате выполненных расчетов исследован процесс дестабилизации течения с присоединенной ударной волной и передним конусом, заполненным покоящимся газом, имеющим постоянное давление, что является одним из решений задачи об обтекании тела в классической газовой динамике. Выявлена неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, отслежен процесс перехода течения к классическому решению с отошедшей ударной волной. Также можно заметить, что использование адаптивных многоуровневых сеток существенно сократило время получения результата.

3.3 Исследование обтекания движущихся тел

Изучение особенностей течения около группы тел, движущихся относительно друг друга, представляет большой теоретический и практический интерес. Одним из практических применений является процесс разделения ступеней многоблочных ракет-носителей (РН) различного класса. При обтекании многоблочных РН до-, транс- и сверхзвуковыми потоками и в процессе разделения ступеней возникает сложная картина течения, вызванная наличием развитых отрывных зон, нестационарность которых приводит к высокому уровню пульсационных нагрузок. При больших сверхзвуковых скоростях сложная конфигурация пересекающихся скачков уплотнения приводит также к резкому возрастанию тепловых потоков и силовых нагрузок в областях взаимодействия.

При разделении последовательно расположенных тел вращения в зависимости от расстояния между телами могут наблюдаться два режима обтекания [143]–[146]. В начальной стадии разделения, когда расстояние между телами меньше критического, внешний поток обтекает образовавшееся пространство между телами с замкнутым течением как “жесткое” продолжение переднего тела. При увеличении расстояния до критического замкнутое отрывное течение между телами разрушается. Происходит перестройка течения, за передним телом образуется донное течение, а перед задним телом образуется головной скачок уплотнения. Образуется второй режим обтекания. Аналогичные режимы возникают при обтекании группы неподвижных тел.

В результате анализа различных факторов установлено [143]–[146], что критическое расстояние между телами, при котором происходит перестройка, зависит от относительных размеров и формы тел, числа Маха и Рейнольдса. Кроме того, критическое расстояние зависит от того, происходит сближение тел или удаление. В [145] на основании большого количества экспериментальных данных была выявлена зависимость, согласно которой с увеличением числа Рейнольдса критическое расстояние увеличивается.

Все вышеперечисленные моменты установлены для неподвижных тел и тел, движущихся с малой относительно друг друга скоростью. В случае быстрого движения картина течения может быть более сложной.

Исследованию описанных выше явлений посвящено много работ как численного, так и экспериментального характера. В [147] было проведено численное моделирование разделения двух соосно расположенных друг за другом тел, но в ней в связи с медленным движением тела течение было квазистационарным. Большой интерес, однако, представляют течения с большей скоростью взаимного движения.

В настоящей работе рассматриваются результаты численного моделирования обтекания тупого конуса с выдвигающимся из него со скоростью $M=0.1$ цилиндром. Для расчета такого типа течений хорошо подходит метод свободной границы [148], который позволяет довольно просто моделировать движение тел. Используется декартовая сетка, покрывающая как область течения, так и область, занятую твердым телом. Для выполнения граничного условия на поверхности тела вводятся компенсационные потоки массы, импульса и энергии.

Одно из главных преимуществ подхода — простота построения сетки, которая не зависит от сложности геометрии исследуемого тела и его движения.

В силу динамического характера задачи имеет смысл адаптировать сетку к движущимся особенностям. Для этого использовались многоуровневые декартовы сетки с локальной адаптацией на основе вейвлет-анализа [151]. Для локальной оценки гладкости сеточного решения применяется критерий на основе вейвлетных разложений на локальных шаблонах, что позволяет четче видеть расположение разрывов и больших градиентов, что в свою очередь помогает в понимании физики течения.

Постановка задачи

Обтекаемое тело (тело 2) представляет собой цилиндр с головной частью в виде усеченного конуса. Диаметр цилиндра равен 30 мм, полуугол раствора конуса равен 20° , диаметр меньшего основания конуса равен 10 мм. Скорость набегающего потока $M=3$.

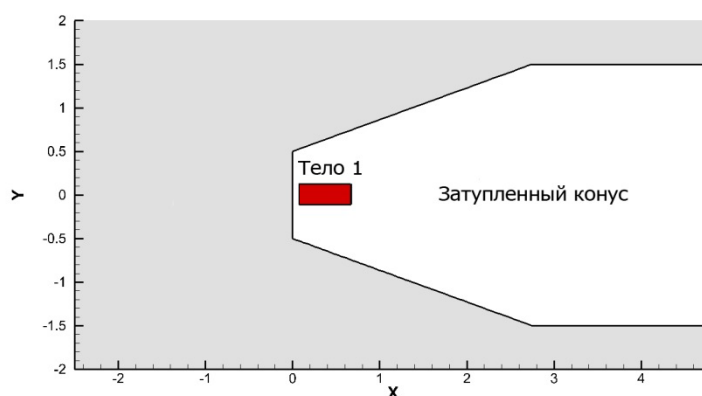


Рисунок 3.20 — Постановка задачи

Тело 1 представляет собой цилиндр с диаметром 12 мм и длиной 60 мм и выдвигается из тела 2 со скоростью $0.1M$. Все тела представлены с помощью метода свободной границы. В настоящей работе используется модель уравнений Эйлера, описывающих движение идеальной сжимаемой жидкости, для решения которых применяется метод конечного объема с потоками, вычисленными по С. К. Годунову, а также модель осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса. Задача решалась в осесимметричной постановке. Используемый численный алгоритм прошел тщательное тестирование, см. [30].

Результаты расчетов обтекания неподвижных тел

В рамках модели усредненных уравнений Навье-Стокса был проведен расчет обтекания неподвижных тел 1 и 2, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Сетки были согласованы с телами. На рис. 3.21 и 3.22 показаны мгновенные картины течения при $Re = 10^{15}$ и $Re = 10^{10}$.

Для $Re = 10^{15}$ был получен нестационарный режим течения с возникновением, движением и разрушением множества вихрей в области между телами. В некоторые моменты времени течение близко к первому режиму (рис. 3.21). Для $Re = 10^{10}$ реализуется стационарное течение с двумя отдельными отрывными зонами за дном переднего тела и перед задним телом, соответствующее второму режиму (рис. 3.22).

Полученные результаты согласуются с изложенными во введении и в [145] положениями, согласно которым с увеличением числа Рейнольдса критическое расстояние увеличивается.

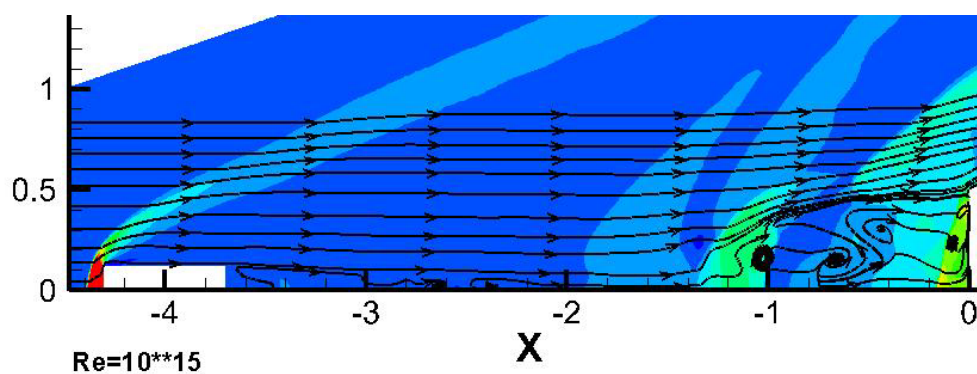


Рисунок 3.21 – Распределение плотности и линии тока при обтекании двух неподвижных тел, $Re = 10^{15}$

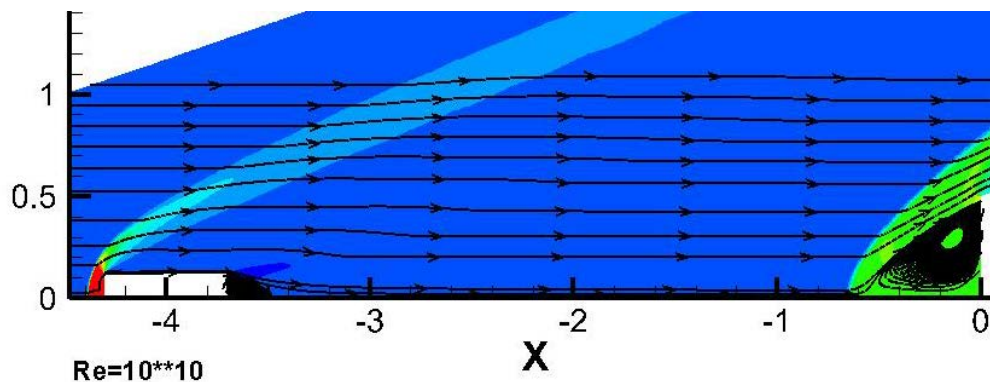


Рисунок 3.22 – Распределение плотности и линии тока при обтекании двух неподвижных тел, $Re = 10^{10}$

В связи с этим не должен вызывать удивления тот факт, что в данных, представленных ниже, наблюдается только первый режим обтекания, поскольку они были получены при решении уравнений Эйлера, где $Re \rightarrow \infty$.

Результаты расчетов на локально-адаптивных декартовых сетках

Вначале рассмотрим обтекание только тела 2 — усеченного конуса.

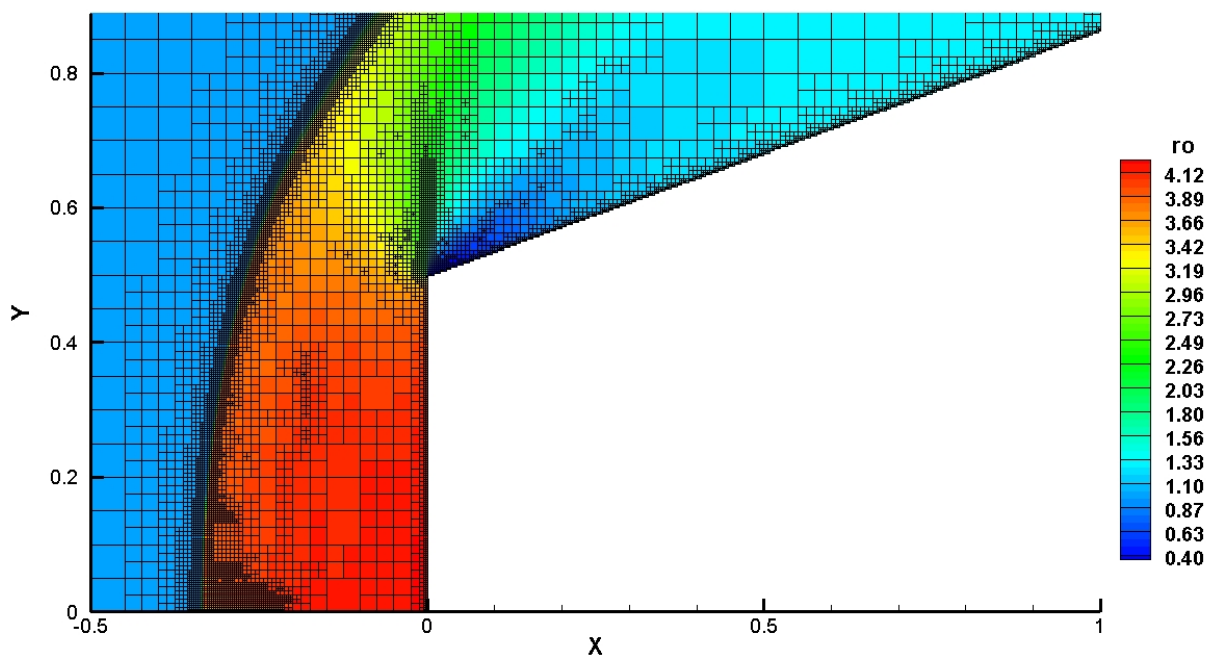


Рисунок 3.23 – Распределение плотности и структура сетки при обтекании усеченного конуса

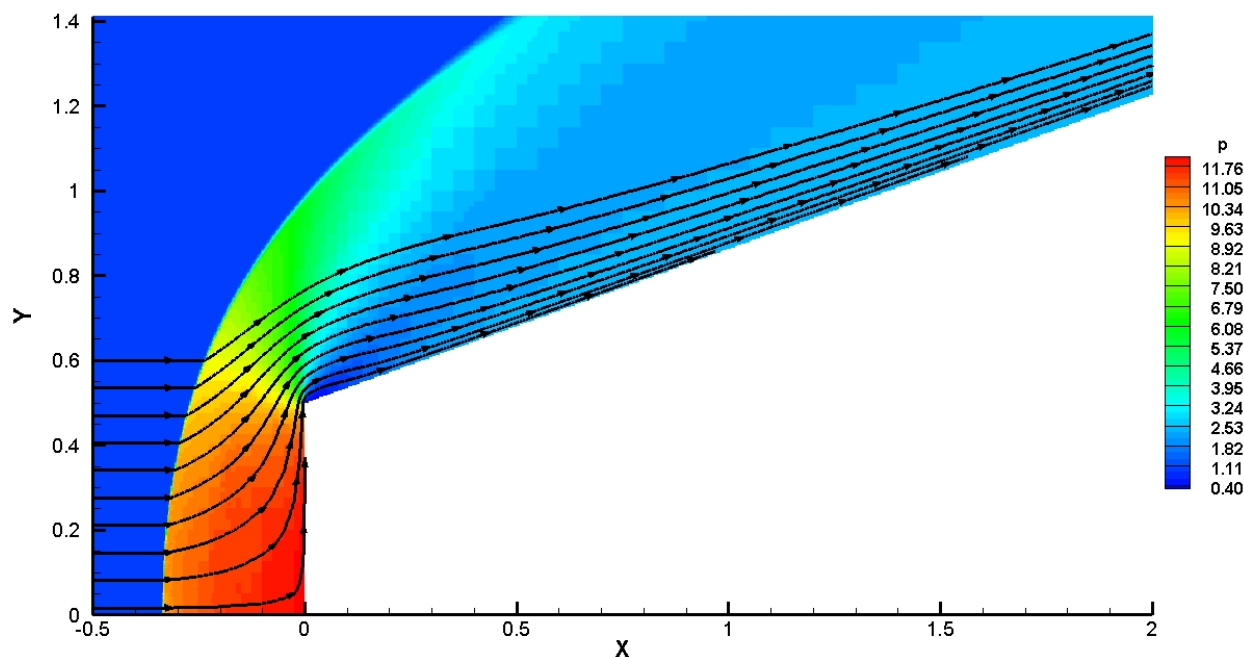
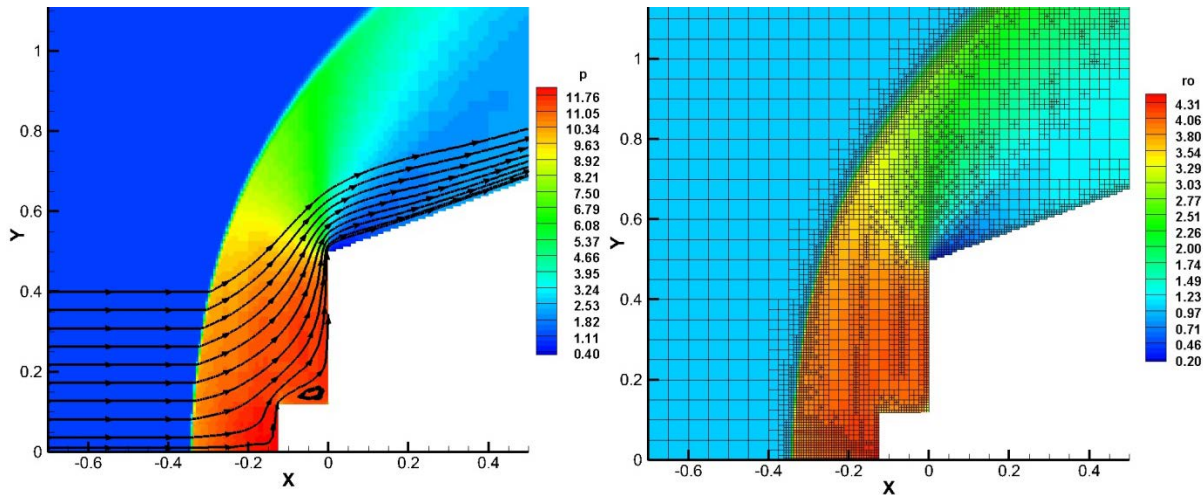


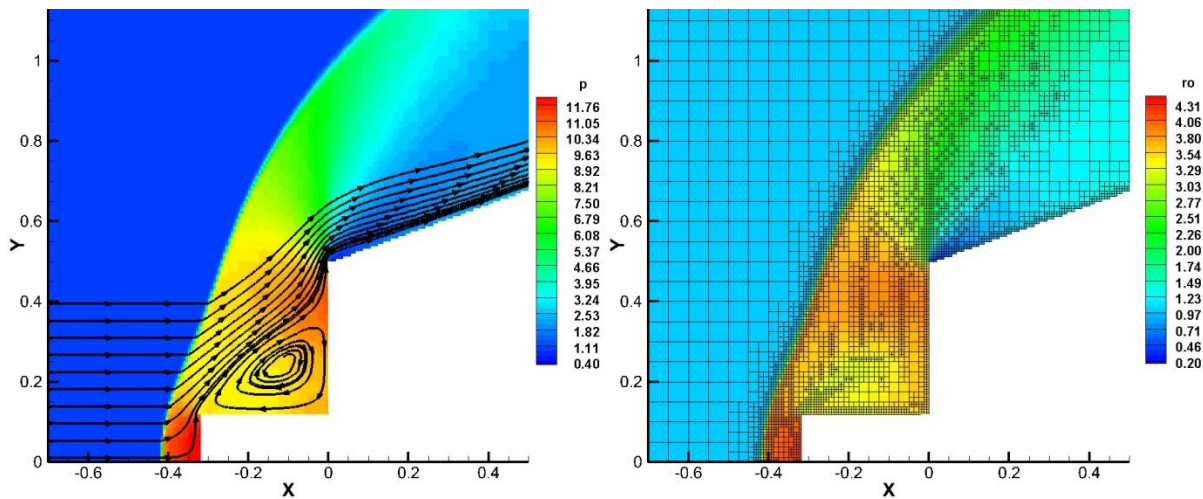
Рисунок 3.24 – Распределение давления и линии тока при обтекании усеченного конуса

Адаптация к решению ведется по анализу поля плотностей. Как видно на рис. 3.23, вейвлет-анализ хорошо фиксирует как разрывы (полоса мелких ячеек на фронте ударной волны), так и волну разрежения, ограниченную линиями разрыва производных — характеристиками. Невозмущенный поток адаптации не требует, поэтому снаружи головной ударной волны ячейки базового уровня. Для наилучшей аппроксимации геометрии на границе тела ячейки максимального уровня.

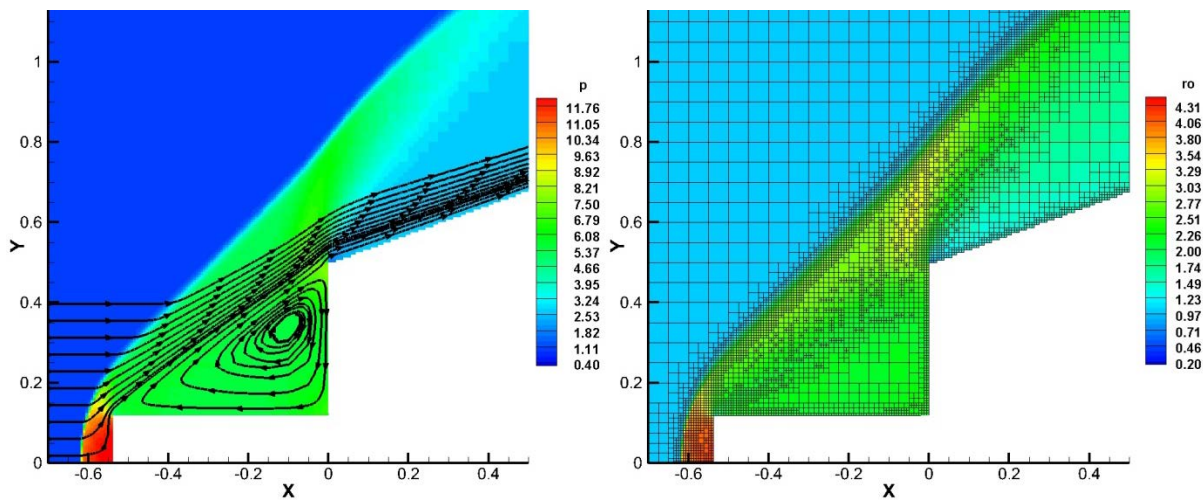
Теперь рассмотрим случай с выдвигающимся из тела 2 со скоростью $0.1M$ телом 1. Предполагается, что в начальный момент времени тело 1 полностью находится внутри усеченного конуса и мгновенно начинает двигаться со скоростью $0.1 M$ навстречу потоку. На рис. 3.25 представлены мгновенные картины течения на различных стадиях выдвигения.



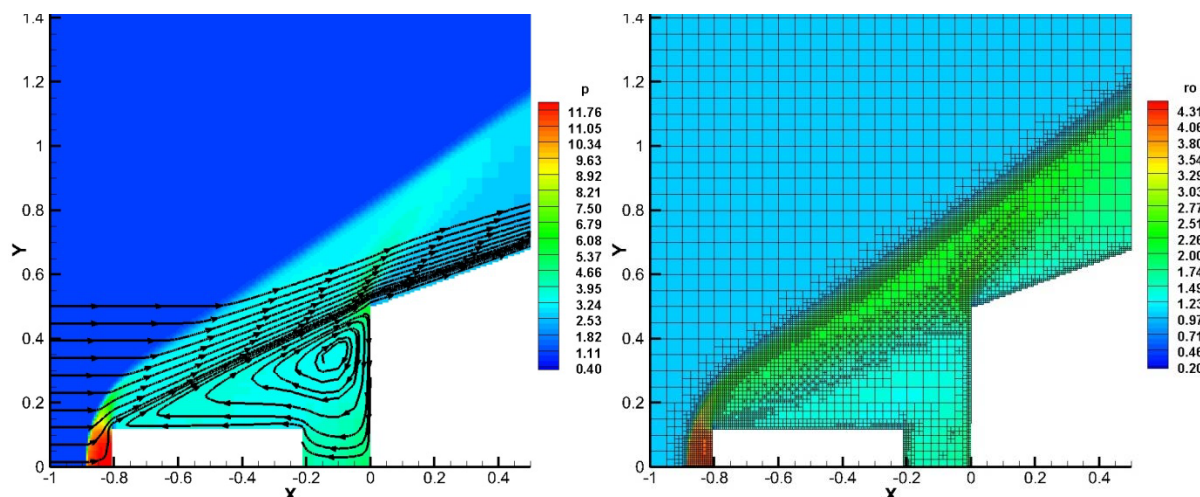
a



б



B



Г

Рисунок 3.25 – Распределения давления с линиями тока (слева) и соответствующие им сетки с распределениями плотности при обтекании усеченного конуса с выдвигающимся из него телом 1 в различные моменты времени

В целом характер течения схож с описанным в [149], где результаты были получены без локальной адаптации.

На рис. 3.25а тело 1 находится в дозвуковом потоке за фронтом головной ударной волны от усеченного конуса. Между верхней стенкой тела 1 и передней частью усеченного конуса образуется область возвратного течения с дозвуковыми скоростями. На данный момент практически все изменения в сетке происходят только за счет адаптации к границе тела.

Дальше тело 1 пересекает фронт головной ударной волны и искривляет его (рис. 3.25б). Область возвратного течения начинает расти в размерах, до тех пор пока не заполняет все пространство между телом 1 и боковой частью усеченного тела. Искривление фронта головной ударной волны ведет к перестроению сетки.

В итоге тело 1, область возвратного течения и усеченный конус обтекаются внешним потоком как одно целое. Так как эта область практически изолирована от внешнего потока, то с увеличением ее размеров давление и плотность в ней падают, что показано на рис. 3.25в. В данном случае видно, как сетка мельчится на границе области возвратного течения, где начинает образовываться контактный разрыв.

На рис. 3.25г тело 1 полностью вышло из усеченного конуса. Область возвратного течения заполняет пространство между телом 1 и передним срезом усеченного конуса. Давление и плотность в ней продолжают падать. Поскольку заднее тело имеет больший диаметр, то перед его выступающими в поток краями образовывается отсоединенный скачок уплотнения.

Далее замкнутая область отрывного течения между двумя телами обтекается внешним потоком как продолжение переднего тела.

Можно наблюдать интересный момент, когда от головной ударной волны от тела 1 за передней угловой точкой отрывается побочная ударная волна, которая сдвигается вниз по потоку до донного среза тела 1. Она же ограничивает передний край области возвратного течения между телами.

Таким образом, рассмотрены особенности течения соосного обтекания пары тел. Используемые в данной работе средства визуализации позволили достаточно подробно исследовать структуру течения.

Нестационарное течение около разделяющихся тел является весьма сложным. В этом процессе можно выделить несколько характерных стадий. Когда передний край выдвигаемого тела расположен между головной ударной волной и усеченным конусом в дозвуковой области, оно оказывает незначительное влияние на течение. Далее происходит взаимодействие маленького тела с головной ударной волной и формирование области возвратного течения. В течение некоторого времени оба тела с областью возвратного течения между ними обтекаются сверхзвуковым потоком практически как одно целое.

Отмеченные выше особенности течения около разделяющихся тел требуют серьезных дальнейших исследований. Практическое значение этой задачи связано, в частности, с аэродинамикой разделения ступеней ракетно-космических систем.

Глава 4

Справочные материалы

4.1 Симметричные комплексные вейвлеты Добеши

При построении фильтров для симметричных комплексных вейвлетов Добеши считаются выполненными следующие условия:

1. скейлинг-функция $\phi(x)$ (а следовательно, и вейвлет $\psi(x)$) имеет компактный носитель в интервале $(-J, J+1)$, для некоторого целого J (это условие означает, что коэффициенты h_k , где $k \in Z$, соответствующего низкочастотного фильтра равны нулю, если $k < -J$ или $k > J+1$),

2. сдвиги $\phi(x-k)$ взаимно ортогональны, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-i) \overline{\phi(x-j)} dx = \delta_{i,j} \quad (\text{если определить полином } F(z) = \sum_{n=-J}^{J+1} h_n z^n,$$

где $F(1) = 1$, а z принадлежит единичной окружности $|z| = 1$, то ор-

тонормированность набора $\{\phi(x-k), k \in Z\}$ может быть установлена следующим тождеством: $P(z) - P(-z) = z$, где полином $P(z)$ определяется как $P(z) = zF(z)\overline{F(z)}$,

3. вейвлет $\psi(x)$ имеет J нулевых моментов (в терминах полинома $P(z)$ данное условие записывается в виде: $P'(-1) = P''(-1) = \dots = P^{(J)}(-1) = 0$),

4. скейлинг-функция симметрична, то есть $\phi\left(x - \frac{1}{2}\right) = \phi\left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$

(это условие означает, что $h_k = h_{1-k}$).

Эти условия порождают систему полиномиальных уравнений на коэффициенты фильтра [81]. Для небольшого числа J уравнения могут быть решены аналитически рисунки 4.1, 4.2 и 4.3.

Следует отметить, что для 10 ненулевых коэффициентов существует ровно два симметричных решения.

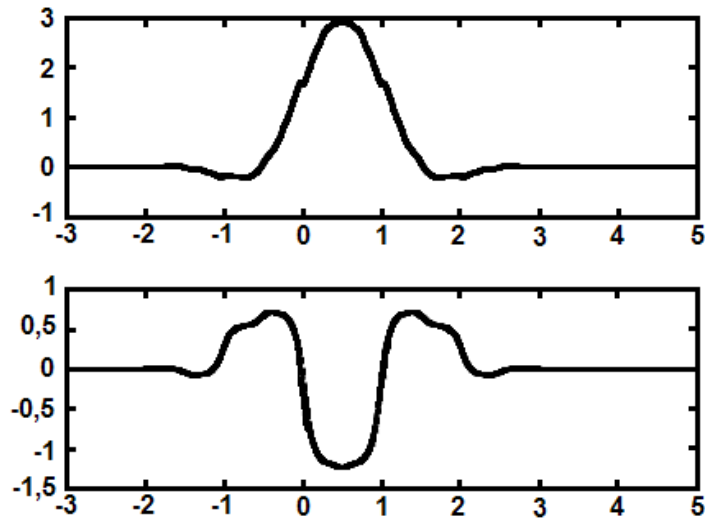


Рисунок 4.1 – Вещественная и мнимая части скейлинг-функции для 6 ненулевых коэффициентов

$$h_{-2} = h_3 = -\frac{3}{64} - i\frac{\sqrt{15}}{64}, h_{-1} = h_2 = \frac{5}{64} - i\frac{\sqrt{15}}{64}, h_0 = h_1 = \frac{15}{32} + i\frac{\sqrt{15}}{32}$$

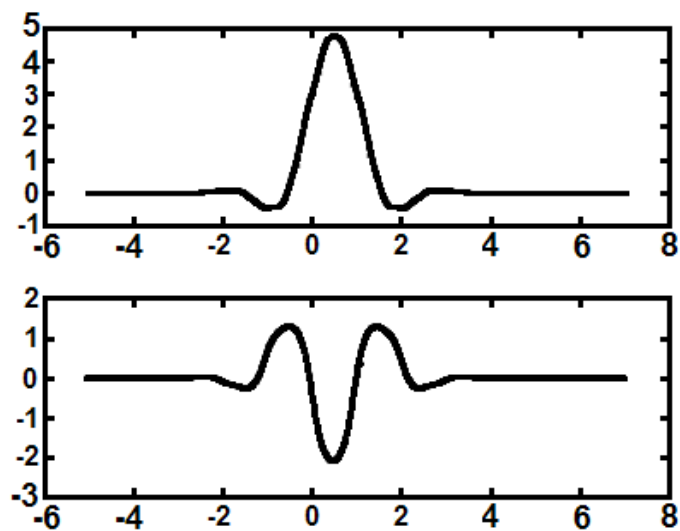


Рисунок 4.2 – Вещественная и мнимая части скейлинг-функции для 10 ненулевых коэффициентов (решение 1)

$$\left\{ \begin{aligned}
 h_{-4} = h_5 &= \frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}} + i\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}, \\
 h_{-3} = h_4 &= \frac{t}{2^{10}} + i\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}}, \\
 h_{-2} = h_3 &= -\frac{27}{256} - \frac{t}{256} + i\left(3\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} - 7\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\
 h_{-1} = h_2 &= \frac{15}{256} - \frac{t}{256} + i\left(\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} - 5\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\
 h_0 = h_1 &= \frac{135}{256} + \frac{3t}{512} + i\left(-5\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} - 11\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right),
 \end{aligned} \right.$$

$$t = -15 - \frac{2 \cdot 15^{2/3} (1 - i\sqrt{3})}{(-15 + 7i\sqrt{15})^{1/3}} - \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) (15(-15 + 7i\sqrt{15}))^{1/3}$$

где

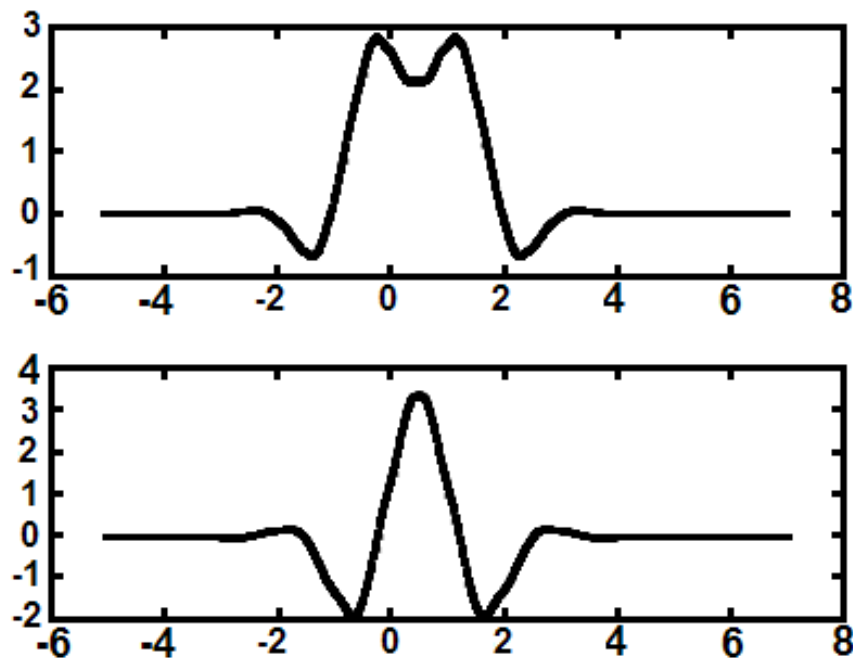


Рисунок 4.3 – Вещественная и мнимая части скейлинг-функции для 10 ненулевых коэффициентов (решение 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{-4} = h_5 = \frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}} - i\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}, \\ h_{-3} = h_4 = \frac{t}{2^{10}} + i\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}}, \\ h_{-2} = h_3 = -\frac{27}{256} - \frac{t}{256} + i\left(3\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} + 7\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\ h_{-1} = h_2 = \frac{15}{256} - \frac{t}{256} + i\left(\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} + 5\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \\ h_0 = h_1 = \frac{135}{256} + \frac{3t}{512} + i\left(-5\sqrt{-\frac{t}{2^{14}} - \frac{75}{2^{17}} - \frac{t^2}{2^{20}}} + 11\sqrt{\frac{35}{2^{17}} - \left(\frac{5}{256} + \frac{t}{2^{10}}\right)^2}\right), \end{array} \right.$$

$$t = -15 - \frac{2 \cdot 15^{2/3} (1 + i\sqrt{3})}{(-15 + 7i\sqrt{15})^{1/3}} - \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) (15(-15 + 7i\sqrt{15}))^{1/3}$$

где

4.2 Связь между вещественной и мнимой частями скейлинг-функции

Симметричные комплексные вейвлеты Добеши, фильтры которых приведены в приложении 4, обладают следующим важным свойством.

Для скейлинг-функции $\phi(x) = u(x) + iv(x)$, для подходящей константы α , с высокой точностью выполняется соотношение:

$$v(x) \approx \alpha \partial_x^2 u(x). \quad (4.1)$$

Справедливость этого соотношения проиллюстрирована на рисунке 4.4 log-log графиком, изображающим отношение $r(\omega) = \frac{\hat{v}(\omega)}{\hat{u}(\omega)}$ образов Фурье вещественной и мнимой частей скейлинг-функции. Величина $r(\omega)$ является вещественной в силу симметричности функций $u(x)$ и $v(x)$. Ее log-log график близок к линейному графику с угловым коэффициентом 2, как это показано на рисунке 4.4.

Другими словами, Фурье-образы мнимой и вещественной частей связаны приближенным соотношением $\hat{v}(\omega) \approx \alpha \omega^2 \hat{u}(\omega)$, откуда и вытекает соотношение (4.1).

Кроме того, в [81] показано, что вещественная часть симметричной комплексной скейлинг-функции удовлетворяет соотношениям на моменты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = 1 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} u(x)(x-1/2)^m dx = 0 \text{ (при } m=1,2,3). \quad (4.2)$$

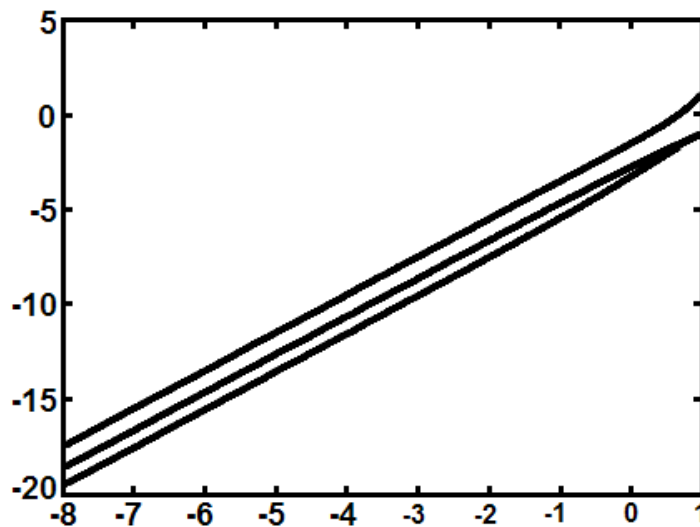


Рисунок 4.4 – Величина $r(\omega)$ в логарифмическом масштабе (графики для нескольких вейвлетов построенного в [81] семейства)

Если считать, что равенство (4.1) выполняется точно, то, используя соотношения (4.2), можно найти параметр α . Для симметричных комплексных вейвлетов Добеши величина α сравнительно мала (например, для 6 ненулевых коэффициентов $\alpha_6 = -\sqrt{15}/24$, а для 10, с учетом наличия двух решений,

$$\alpha_{10,j} = \frac{32}{3} \text{Im}(h_4 - h_5), \text{ где } j=1, 2 \text{ или } \alpha_{10,1} \approx -0.089468, \alpha_{10,2} \approx 0.35625).$$

4.3 Лемма о сходимости масштабирующих функций

В теории вейвлет-анализа множество сдвигов и растяжений скейлинг-функции вводится как

$$\phi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right).$$

Из такого определения следует, что $\|\phi_{n,j}\|_{L_2} = \text{const}$.

Для того чтобы выполнялось соотношение $\|\tilde{\phi}_{n,j}\|_{L_1} = \text{const}$, достаточно положить:

$$\tilde{\phi}_{n,j}(t) = \frac{1}{2^j} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right), \quad (4.3)$$

то есть различие заключается только в умножении на число, которое зависит от масштаба, но не зависит от сдвига.

В случае, когда масштабирование определено формулой (4.3), верно следующее утверждение:

Лемма. Пусть для функции $\phi(x)$ с компактным носителем выполнены соотношения $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| dx = M < \infty$. Функция $f(x) \in C(x_0)$ и $f(x)$ интегрируема по Лебегу. Тогда для семейства функций $\phi_m(x) = \frac{1}{2^m} \phi\left(\frac{x}{2^m}\right)$ существует такое $M \in \mathbb{Z}$, что существует $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+x_0)\phi_m(x) dx = I_m < \infty$, при $m < M$, и $\lim_{m \rightarrow -\infty} I_m = f(x_0)$.

Доказательство

Так как функция $\phi(x)$ имеет компактный носитель, то существует такое $A \in \mathbb{R}$, что $\phi(x) = 0$, при $|x| > A$. Поэтому $\int_{-A}^A \phi(x) dx = 1$, $\int_{-A}^A |\phi(x)| dx = M$. А для функций $\phi_m(x)$ выполняется $\int_{-2^m A}^{2^m A} \phi_m(x) dx = 1$, $\int_{-2^m A}^{2^m A} |\phi_m(x)| dx = M$.

Из условия $f(x) \in C(x_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $d = d(\varepsilon, x_0)$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/M$, при $|x - x_0| < d$.

Так как для любого $d > 0$ существует такое $m_0 \in \mathbb{Z}$, что $|2^m A| < d$, при $m < m_0$, то определен интеграл:

$$\int_{-2^m A}^{2^m A} f(x + x_0) \phi_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + x_0) \phi_m(x) dx = I_m,$$

и при $m < m_0$ выполняется оценка:

$$\begin{aligned} |I_m - f(x_0)| &= \left| \int_{-2^m A}^{2^m A} (f(x + x_0) - f(x_0)) \phi_m(x) dx \right| < \\ &< \int_{-2^m A}^{2^m A} |f(x + x_0) - f(x_0)| |\phi_m(x)| dx < \frac{\varepsilon}{M} \int_{-2^m A}^{2^m A} |\phi_m(x)| dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

Откуда и следует требуемое утверждение.

4.4 Низкочастотные фильтры использованных в работе вейвлетов

dcoms6 =

$$\{-0.066291 - i * 0.085582; \quad 0.11049 - i * 0.085582;$$

$$0.66291 + i * 0.17116; \quad 0.66291 + i * 0.17116;$$

$$0.11049 - i * 0.085582; \quad -0.066291 - i * 0.085582\}.$$

dau6 =

$$\{0.33267; \quad 0.806891; \quad 0.459877; \quad -0.135011, \quad -0.085441; \quad 0.035226\}.$$

dcoms22 =

$$\{-2.843587e-4 - i * 5.619067e-5; \quad 3.943661e-5 - i * 1.995730e-4;$$

$$3.503067e-3 - i * 6.987157e-6; \quad 2.610443e-4 + i * 1.162351e-3;$$

$$-1.826877e-2 + i * 3.762785e-3; \quad -2.986205e-3 + i * 5.055616e-3;$$

$$5.069295e-2 - i * 1.130173e-2; \quad -1.211437e-2 - i * 5.680614e-2;$$

$$-1.204103e-1 - i * 7.712723e-2; \quad 1.474823e-1 + i * 6.042637e-3;$$

$$6.59192e-1 + i * 1.294744e-1; \quad 6.59192e-1 + i * 1.294744e-1;$$

$$1.474823e-1 + i * 6.042637e-3; \quad -1.204103e-1 - i * 7.712723e-2;$$

$$-1.211437e-2 - i * 5.680614e-2; \quad 5.069295e-2 - i * 1.130173e-2;$$

$$-2.986205e-3 + i * 5.055616e-3; \quad -1.826877e-2 + i * 3.762785e-3;$$

$$2.610443e-4 + i * 1.162351e-3; \quad 3.503067e-3 - i * 6.987157e-6;$$
$$3.943661e-5 - i * 1.99573e-4; \quad -2.843587e-4 - i * 5.619067e-5}.$$

dau20 =

$$\{0.026670057901; 0.188176800078; .527201188932; 0.688459039454;$$
$$0.281172343661; -0.249846424327; -0.195946274377; 0.127369340336;$$
$$0.093057364604; -0.071394147166; -0.029457536822; 0.033212674059;$$
$$0.003606553567; -0.010733175483; 0.001395351747; 0.001992405295;$$
$$-0.000685856695; -0.000116466855; 0.000093588670; -0.000013264203}.$$

Список литературы

1. Z. Wang, V. Parthasarathy. A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems, 2000. pp. 919-938.
2. A. Dadone, B. Grossman. Efficient Fluid Dynamic Design Optimization Using Cartesian Grids, June 2003. pp. 2003–3959.
3. H. Forrer, M. Berger. Flow simulations on Cartesian grids involving complex moving geometries // Proc. 7'th Intl. Conf. on Hyperbolic Problems. 1998. pp. 315-324.
4. K. Pekkan. Multiple Stationary and Moving Boundary Handling in Cartesian Grids // Proceedings, 12th International Meshing Roundtable. Sept. 2003. pp. 285-292.
5. W.D. Henshaw. Ogen: An Overlapping Grid Generator for Overture, Lawrence Livermore National Laboratory, Technical Report UCRLMA-132237 1998.
6. Xu ZF, Shu CW. Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes // Journal of Computational Physics, Vol. 205 (2), MAY 2005. pp. 458-485.
7. C.S. P. Numerical analysis of blood flow in the heart // J. Comput.Phys, Vol. 25, 1977. pp. 220-252.
8. Randall J. LeVeque, Donna Calhoun. Cartesian Grid Methods for Fluid Flow in Complex Geometries // Computational Modeling in Biological Fluid Dynamics, Vol. 124, 1999. pp. 117-143.
9. H. Bandringa. Immersed boundary methods. Institute of Mathematics and Computing Science, Netherlands, 2010.
10. И. В. Семенов, И. Ф. Ахмедьянов. Разработка параллельного алгоритма LU-SGS для решения многомерных задач вычислительной газодинамики // Материалы Четвертой Сибирской школы-семинара по параллельным и высокопроизводительным вычислениям. Томск. 2008. С. 122-129.
11. C.W. Hirt, B.D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics, Vol. 39 (1). pp. 201–225.
12. W.J. Rider, D.B. Kothe. Reconstructing volume tracking // Journal of Computational Physics, Vol. 141 (2), 1998. pp. 112–152.

13. J.E. Pilliod Jr., E.G. Puckett. Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces // *Journal of Computational Physics* , Vol. 199, 2004. pp. 465–502.
14. B. Bihari, A. Harten. Application of generalized wavelets: An adaptive multiresolution scheme // *J. Comp. Appl. Math*, Vol. 61, 1995. pp. 275-321.
15. B. Bihari, A. Harten. Multiresolution schemes for the numerical solution of 2-D conservation laws // *I. SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 18(2), 1997. pp. 315-354.
16. A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.* , Vol. 48(12) , 1995. pp. 1305-1342.
17. A. Harten. Multiresolution representation of data: A general framework // *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 33(3), 1996. pp. 1205-1256.
18. Cohen, N. Dyn, S.M. Kaber, M. Postel. Multiresolution finite volume schemes on triangles // *J. Comp. Physics*, Vol. 161, 2000. pp. 264-286.
19. B. Gottschlich-Muller, S. Mueller. On multi-scale concepts for multidimensional conservation laws. W. Hackbusch and G. Wittum, editors, *Numerical Treatment of Multi-scale Problems* ed. Vieweg, 1999. 119-133 pp.
20. S. Mueller. Adaptive multiresolution schemes. B. Herbin, editor, *Finite Volumes for Complex Applications* ed. Paris: Hermes Science, 2002.
21. S. Mueller. Adaptive Multiscale Schemes for Conservation Laws. *Lecture Notes on Computational Science and Engineering* ed. Vol 27. Springer, 2002.
22. B. Cockburn. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics)* ed. Vol 1697. 1998. 151-268 pp.
23. L. Krivodonova. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods // *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, 2007. pp. 879-896.
24. М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2012. № 34.

25. М.П. Галанин, Е.В. Грищенко, Е.Б. Савенков, С.А. Токарева. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 52.
26. F. Iacono, G. May, R. Schäfer. A Discontinuous Galerkin Discretization with Multiwavelet-Based Grid Adaptation for Compressible Flows // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Orlando, Florida. Jan. 4-7, 2011.
27. K. Schneider, O.V. Vasilyev. Wavelet methods in computational fluid dynamics // Ann. Rev. FluidMech, Vol. 42, 2010. pp. 473-000.
28. M. Farge Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis // Phys. Fluids, Vol. 11, No. 8, 1999. pp. 2187-2201.
29. S. U. Islam, B. Sarler, I. Aziz , F. I. Haq. Haar wavelet collocation method for the numerical solution of boundary layer fluid flow problems // International Journal of Thermal Sciences, Vol. 50, 2011. pp. 686-697.
30. I. Aziz, S. Islam, W. Khan. Quadrature rules for numerical integration based on Haar wavelets and hybrid functions // Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61, 2011. pp. 2770-2781.
31. M.Wang, F. Zhao. Haar Wavelet Method for Solving Two-Dimensional Burger's Equation // Advances in Intelligent and Soft Computing, Vol. 145, 2012. pp. 381-387.
32. Б.С. Кашин, А.А. Саакян. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
33. P.M. Lemarie-Rieusset. Recent developments in the Navier-stokes problem // Research Notes in Math. 2002. No. 431.
34. Lin Fu, Zhenghong Gao, Kan Xu, Fang Xu. A multi-block viscous flow solver based on GPU parallel methodology // Computers & Fluids 95, 2015. pp. 19-39.
35. A. Jameson, E. Turkel. Implicit schemes and LU decomposition // Math. of Comp, Vol. 37, No. 156, 1981. pp. 385-397.
36. W. K. Anderson, J. L. Thomas, B. Van Leer. Comparison of finite volume flux vector splitting for the Euler equations // AIAA Journal, Vol. 24, No. 9, 1986. pp. 1453-1460.

37. B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comp. Phys*, No. 32, 1979. pp. 101-136.
38. J. E. Fromm. A method for reducing dispersion in convective difference schemes // *J. Comp. Phys.*, No. 3, 1968. pp. 176-187.
39. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Разностные схемы. Москва: Наука, 1977. 440 с.
40. В. П. Колган. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ*, Т. 3, № 6, 1972. С. 68-77.
41. G. D. van Albada B.V.L.W.R. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // *Astron. Astrophys.*, Vol. 108, 1982. pp. 76-84.
42. С. К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат. сборник*, Т. 47, № 3, 1957. С. 271–306.
43. С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва: Наука, 1976. 400 с.
44. E. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 2009. 719 pp.
45. В. В. Русанов. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // *Доклады АН СССР*, Т. 180, № 6, 1968. С. 1303–1305.
46. I. Menshov, Y. Nakamura. Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 3, 2004. pp. 551-559.
47. И. С. Меньшов, М. А. Корнев. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // *Математическое моделирование*, Т. 26, № 5, 2014. С. 99-112.
48. И. С. Меньшов, П. В. Павлухин. Численное решение задач газовой динамики на декартовых сетках с применением гибридных вычислительных систем // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 92. С. 1-24.

49. O. Boiron, G. Chiavassa, R. Donat. A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // *Computers & Fluids*, Vol. 38, 2009. pp. 703-714.
50. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Гидродинамика. 3-е изд. Москва: Наука, 1986. 736 с.
51. I. Menshov, Y. Nakamura. An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium // *Collection of technical papers of 6th Int. Symp. on CFD. Lake Tahoe, Nevada. 1995.* pp. 815-821.
52. П. В. Павлухин. Реализация параллельного метода LU-SGS для задач газовой динамики на кластерных системах с графическими ускорителями // *Вестник ННГУ*, № 1, 2013. С. 213-218.
53. A. Jameson. Airfoil admitting non-unique solutions to the Euler equations // *AIAA Paper*, Vol. 91, 1991. pp. 16-25.
54. M. M. Hafez and W. H. Guo. Nonuniqueness of transonic flows // *Acta Mech*, No. 138, 1999. pp. 177-184.
55. A. G. Kuzmin. Instability and bifurcation of transonic flow over airfoils // *AIAA Paper*, 2004.
56. K. R. Laflin, S. M. Klausmeyer, T. Zickuhr, et al. Data Summary from Second AIAA Computational Fluid Dynamics Drag Prediction Workshop // *JOURNAL OF AIRCRAFT*, Vol. 42, No. 5, 2005. pp. 1165–1178.
57. В. Е. Борисов, А. А. Давыдов, И. Ю. Кудряшов, А. Е. Луцкий, И. С. Меньшов. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трехмерных турбулентных течений // *Математическое моделирование*, Т. 26, № 10, 2014. С. 64–78.
58. А. Е. Луцкий, А. В. Северин. Простейшая реализация метода пристеночных функций // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2013. № 38. С. 1-22.
59. F. Bramkamp, Ph. Lamby, and S. Mueller. An adaptive multiscale finite volume solver for unsteady an steady state flow computations // *J. Comp. Phys.*, Vol. 197, No. 2, 2004. pp. 460-490.

60. A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 48, No. 12, 1995. pp. 1305-1342.
61. A. Harten. Multiresolution representation of data: A general framework // *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 33, No. 3, 1996. pp. 1205-1256.
62. G. Zumbusch. Parallel multilevel methods. Adaptive mesh refinement and loadbalancing. *Advances in Numerical Mathematics* ed. Wiesbaden: Teubner, 2003.
63. S. Osher and R. Sanders. Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids // *Math. Comp.*, Vol. 41, 1983. pp. 321-336.
64. O. V. Vasilyev. Solving multi-dimensional evolution problems with localized structures using second generation wavelets // *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, Vol. 17, 2003. pp. 151–168.
65. А. А. Сухинов. Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению // *Математическое моделирование*, Т. 22, № 1, 2010. С. 86–98.
66. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, Т. 1, № 2, 1961. С. 267-279.
67. Chi-Wang Shu. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics. *High-order methods for computational physics* ed. Heidelberg: Springer, 1999. 438-480 pp.
68. В. Ф. Тишкин, Е. Е. Пескова, Р. В. Жалнин, В. А. Горюнов. О построении WENO-схем для гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках // *Известия высших учебных заведений. Приволжский регион. Физико-математические науки*, № 1 (29), 2014.
69. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Москва: Наука, 1977. 243-274 с.
70. M. Pandolfi, D. D'Ambrosio. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomena // *J. Comput. Phys.*, Vol. 166, No. 2, 2001. pp. 271–301.

71. R. Liska, B. Wendroff. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 25, No. 3, 2003. pp. 995-1017.
72. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Гидродинамика. Москва: Физматлит, 2003. 732 с.
73. Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров. Повышение точности решений разностных схем. Москва: Наука, 1979. 320 с.
74. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1977. 456 с.
75. В. И. Мажукин, А. А. Самарский, О. Кастельянос, А. В. Шапранов. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // *Математическое Моделирование*, Т. 4, 1993. С. 32–56.
76. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // *Математическое Моделирование*, Т. 12, 1995. С. 48–78.
77. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин. Динамически адаптирующиеся сетки для взаимодействующих разрывных решений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, Т. 4, 2007. С. 717–737.
78. Е. В. Ворожцов, Н. Н. Яненко. Методы локализации особенностей в вычислительной газодинамике. Москва: Наука, 1985. 224 с.
79. С. Б. Базаров. Применение методов обработки изображений в вычислительной газодинамике // *Труды GraphiCon 98*. 1998. С. 258–264.
80. A. Plattner, H.-R. Maurer, J. Vorloeper, W. Dahmen. Three-dimensional geoelectric modelling with optimal work/accuracy rate using an adaptive wavelet algorithm // *Geophysical Journal International*, Vol. 182, No. 2, 2010. pp. 741–752.
81. J.-M. Lina, L. Gagnon. Image enhancement with symmetric Daubechies wavelets // *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*. Vol. 2569. pp. 196–207.
82. А. Л. Афендииков, В. В. Горбунова, Л. И. Левкович-Маслюк, А. В. Плёнкин. Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи комплексных и вещественных вейвлетов // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2005. № 98. С. 1-32.

83. А. Л. Афенди́ков, Л. И. Левкович-Маслюк. Локализация особенностей газодинамических полей при помощи комплексных ортогональных вейвлет-разложений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 101. С. 1-15.
84. A. L. Afendikov, L. I. Levkovich-Maslyuk. Localization of Singularities of Gas-Dynamic Fields by Using Complex Orthogonal Wavelet Expansions // Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 11, No. 3, 2004. pp. 250–258.
85. С. Малла. Вэйвлеты в обработке сигналов. Москва: Мир, 2005. 672 с.
86. E. J. Candes, D. L. Donoho. Curvelets — A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation For Objects with Edges. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 2000. 16 pp.
87. A. Bultheel. Learning to swim in a sea of wavelets // Bulletin of the Belgian Mathematical Society — Simon Stevin, Vol. 2, No. 1, 1995. pp. 1-45.
88. P. Duhamel, M. Vetterli. Fast fourier transforms: A tutorial review and a state of the art // Signal Processing, Vol. 19, No. 4, 1990. pp. 259–299.
89. H. J. Nussbaumer. Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 276 pp.
90. Y. Meyer. Wavelets and Operators. Cambridge university press, 1995. 244 pp.
91. J. M. Bony. Second Microlocalization and Propagation of Singularities for Semi-linear Hyperbolic Equations // Hyperbolic Equations and Related Topics: Proceedings of the Taniguchi International Symposium. 1984. pp. 11–49.
92. S. Jaffard. Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients // Publications Mathematiques, Vol. 35, No. 1, 1991. pp. 155–168.
93. S. Mallat, W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets // IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 38, No. 2, 1992. pp. 617–643.
94. Д. Марр. Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов. Москва: Радио и связь, 1987. 400 с.
95. A. Rosenfeld, M. Thurston. Edge and curve detection for visual scene analysis // IEEE Transactions on Computers, Vol. C-20, No. 5, 1971. pp. 562–569.
96. J. Canny. Characterization of signal from multiscale edges // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-8, No. 8, 1986. pp. 679–698.

97. S. Mallat, S. Zhong. Characterization of signal from multiscale edges // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No. 7, 1992. pp. 710–732.
98. C. Taswell. Constraint-selected and search-optimized families of Daubechies wavelet filters computable by spectral factorization // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 121, No. 1, 2000. pp. 179–195.
99. Л. И. Седов. *Механика сплошной среды. Т. 2.* Москва: Наука, 1970.
100. А. Л. Афондинов, Л. И. Левкович-Маслюк, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа // *Математическое Моделирование*, № 7, 2008. С. 65–84.
101. И. Добеши. *Десять лекций по вейвлетам.* Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 464 с.
102. W. Lawton. Application of complex valued wavelet transform to subband decomposition // *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 41, No. 12, 1993. pp. 3566–3568.
103. И. А. Знаменская, А. Е. Луцкий. Исследование эволюции и взаимодействия разрывов течения в канале под действием импульсного вложения энергии // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2005. № 88. С. 1-21.
104. И. А. Знаменская, А. Е. Луцкий, И. В. Мурсенкова. Исследование поверхностного энерговклада в газ при иницировании импульсного разряда типа «плазменный лист» // *Письма в ЖТФ*, № 24, 2004. С. 38–42.
105. R. D. Richtmyer. Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids // *Communications on Pure and Applied Mathematic*, Vol. 13, No. 2, 1960. pp. 297–319.
106. Е. Е. Мешков. О Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // *Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов*, № 5, 1968. С. 151–158.
107. А. Л. Афондинов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2008. № 98. С. 1-17.
108. А. В. Плёнкин. Кратно-масштабный анализ газодинамических полей // *Вестник Московского университета Серия 1. Математика. Механика.*, № 2, 2011. С. 56–59.

109. К. Чуи. Введение в вэйвлеты. Москва: Мир, 2001. 416 с.
110. А. Л. Афендииков, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Локализованные структуры в идеальной и вязкой моделях. Вейвлетный анализ // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2009. № 78. С. 1-10.
111. А. Л. Афендииков, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях // Математическое Моделирование, № 1, 2011. С. 41-50.
112. А. Л. Афендииков, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Применение вейвлет анализа для выделения структур в расчетах газодинамических течений и для адаптации сеток // Научная визуализация, № 12, 2012. С. 8-25.
113. А. Л. Афендииков, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Локализация особенностей газодинамических полей и адаптация расчетной сетки к положению разрывов // Математическое Моделирование, № 12, 2012. С. 49-54.
114. W. P. Jones, B. E. Launder. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence // International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, No. 2, 1972. pp. 301–312.
115. B. E. Launder, B. I. Sharma. The Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc // Letters in Heat and Mass Transfer, Vol. 1, No. 2, 1974. pp. 131–138.
116. Б. Н. Делоне. О пустоте сферы // Изв. АН СССР. ОМЭН, № 4, 1934. С. 793–800.
117. А. В. Скворцов. Триангуляция Делоне и её применение. Томск: Издательство Томского университета, 2002. 128 с.
118. Н. Ф. Краснов. Аэродинамика. Часть 2: Методы аэродинамического расчета. 4-е изд. Москва: Либроком, 2010. 418 с.
119. К. П. Петров. Аэродинамика тел простейших форм. Москва: Физматлит, 1998. 428 с.
120. Datta V. Gaitonde. Progress in shock wave/boundary layer interactions // Progress in Aerospace Sciences, Vol. 72, 2015. pp. 80-99.
121. Green J. Interactions between shock waves and turbulent boundary layers // Progress in Aerospace Sciences, Vol. 11, 1970. pp. 235–340.

122. Jean Déleroy, Jean-Paul Dussauge. Some physical aspects of shock wave/boundary layer interactions // *Shock Waves*, Vol. 19, 2009. pp. 453–468.
123. Боровой В.Я. Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. Москва: Машиностроение, 1983. 144 с.
124. Dolling D. Fifty years of shock wave/boundary layer interaction research: what next? // *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 8, 2010.
125. А. А. Бабулин, С. М. Босняков, В. В. Власенко, М. Ф. Енгулатова, С. В. Матяш, С. В. Михайлов. Опыт валидации и настройки моделей турбулентности применительно к задаче об отрыве пограничного слоя на клине конечной ширины // *ЖВМ и МФ*, Т. 56, № 6, 2016. С. 1034–1048.
126. И. И. Липатов, Р. Я. Тугазаков. Механизм образования пульсаций давления при падении ударной волны на пограничный слой // *УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ*, Т. XLIV, № 1, 2013. С. 62-75.
127. В. Е. Борисов, А. Е. Луцкий. Моделирование течений в воздухозаборнике ПВРД // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, Т. 16, № 1, 2015.
128. Holden M. S. Experimental studies of separated flow of hypersonic speed. II.: Two dimensional wedge separated flow studies // *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 5, 1966. pp. 790-799.
129. Schulein E., Krogmann P., Stanewsky E. Documentation of two-dimensional impinging shock/turbulent boundary layer interaction flow. Gottingen: DLR, 1996. 69 pp.
130. Федорова Н. Н., Федорченко И. А. Расчет взаимодействия падающего косоугольного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине // *ПМТФ*, Т. 45, № 3, 2004. С. 61-71.
131. V. I. Zapryagaev, I.N. Kavun, I. I. Lipatov. Supersonic laminar separated flow structure at a ramp for a free-stream Mach number of 6 // *Progress in Flight Physics*, Vol. 5, 2013. pp. 349-362.
132. Г. Г. Черный. Газовая динамика: Учебник для университетов и вузов. Москва: Наука, 1988. 424 с.
133. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика: Учебное пособие для вузов. Т. VI. Гидродинамика. Москва: Физматлит, 2001. 736 с.

134. Г. Биркгоф. Методы, факты, подобие. Москва: Изд-во иностр. лит., 1969.
135. R. Gerwin. Stability of the interface between two fluids in relative motion // *Rev. Modern Phys.*, Vol. 40, No. 3, 1968. pp. 652–658.
136. П. Ю. Георгиевский, В. А. Левин. Сверхзвуковое обтекание тел при наличии внешних источников тепловыделения // *Письма в ЖТФ*, Т. 14, № 8, 1988. С. 684–687.
137. П. Ю. Георгиевский, В. А. Левин. Управление обтеканием различных тел с помощью локализованного подвода энергии в сверхзвуковой набегающий поток // *Изв. РАН. МЖГ*, № 5, 2003. С. 154–167.
138. В. Н. Зудов, П. К. Третьяков, А. В. Тупикин, В. И. Яковлев. Обтекание сверхзвукового источника сверхзвуковым потоком // *Изв. РАН. МЖГ*, № 5, 2003. С. 140–153.
139. В. П. Гордеев., А. В. Красильников, В. И. Лагутин, В. Н. Отменников. Экспериментальное исследование возможности снижения аэродинамического сопротивления при сверхзвуковых скоростях с использованием плазменной технологии // *Изв. РАН, МЖГ*, № 2, 1996. С. 177–182.
140. В. А. Левин, В. Г. Громов, Н. Е. Афолина. Численное исследование влияния локального энергоподвода на аэродинамическое сопротивление и теплообмен сферического затупления в сверхзвуковом потоке воздуха // *ПМТФ*, Т. 41, № 5, 2000. С. 171–179.
141. Т. А. Коротаева, В. М. Фомин., А. П. Шашкин. Пространственное сверхзвуковое обтекание заостренного тела при подводе энергии перед ним // *Прикладная математика и техническая физика*, 1998. С. 116-121.
142. V. M. Fomin, A. A. Maslov, T. A. Korotaeva, A. P. Shashkin. Numerical simulation of a supersonic spatial nonuniform flow // *CFD Journal Special Issue*, Vol. 12, No. 2, 2003. pp. 367-382.
143. К. П. Петров. Аэродинамика тел простейших форм. Москва: Факториал, 1998. 432 с.
144. В. С. Хлебников. Картина сверхзвукового обтекания пары тел и перестройка течения между ними // *Механика жидкости и газа*, № 1, 1994.

145. В. С. Хлебников. Перестройка течения между парой тел, одно из которых расположено в следе другого, при сверхзвуковом обтекании // Ученые записки ЦАГИ, Т. 7, № 3, 1976. С. 133-136.
146. В. С. Хлебников. Осесимметричное обтекание пары тел сверхзвуковым потоком газа // Ученые записки ЦАГИ, Т. 9, № 6, 1978. С. 108-114.
147. Л. Г. Васенев, Д. А. Внучков, В. И. Звегинцев, С. В. Лукашевич, А. Н. Шиплюк. Измерение сопротивления двух последовательно расположенных тел вращения при их разделении в сверхзвуковом потоке // Перспективные технологии самолетостроения в России и в мире: труды IV-й Всероссийской научно-практической конференции молодых специалистов и ученых. Новосибирск. 2012. С. 19-24.
148. И.С. Меньшов, М. А. Корнев. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Математическое моделирование, Т. 26, № 5, 2014. С. 99-112.
149. А.Е. Луцкий, И. С. Меньшов, Я. В. Ханхасаева. Влияние неоднородности набегающего потока на сверхзвуковое обтекание затупленного тела // Математическое моделирование, Vol. 28, No. 6-7, 2016.
150. Kirill Merkulov. Wavelet-Based Local Mesh Adaptation with Application to Gas Dynamics Parallel Computing Technologies // Proceedings of the 13th International Conference, PaCT 2015. Petrozavodsk, Russia. 2015. pp. 426-435.
151. А. Л. Афондииков, А. А. Давыдов, И. С. Меньшов, К. Д. Меркулов, А. В. Пленкин. Алгоритм многоуровневой адаптации сеток по критериям на основе вейвлет-анализа для задач газовой динамики // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2015. №. 97. 22 с.
152. А. Л. Афондииков, А. Е. Луцкий, И. С. Меньшов, К. Д. Меркулов, А. В. Пленкин, Я. В. Ханхасаева. Алгоритм динамической локальной адаптации сеток на основе вейвлет-анализа с использованием метода свободной границы // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 94. 20 с.
153. Igor Menshov. Treating Complex Geometries with Cartesian Grids in Problems for Fluid Dynamics Parallel Computing Technologies // Proceedings of the 13th International Conference, PaCT 2015. Petrozavodsk, Russia. 2015. pp. 528-535.

