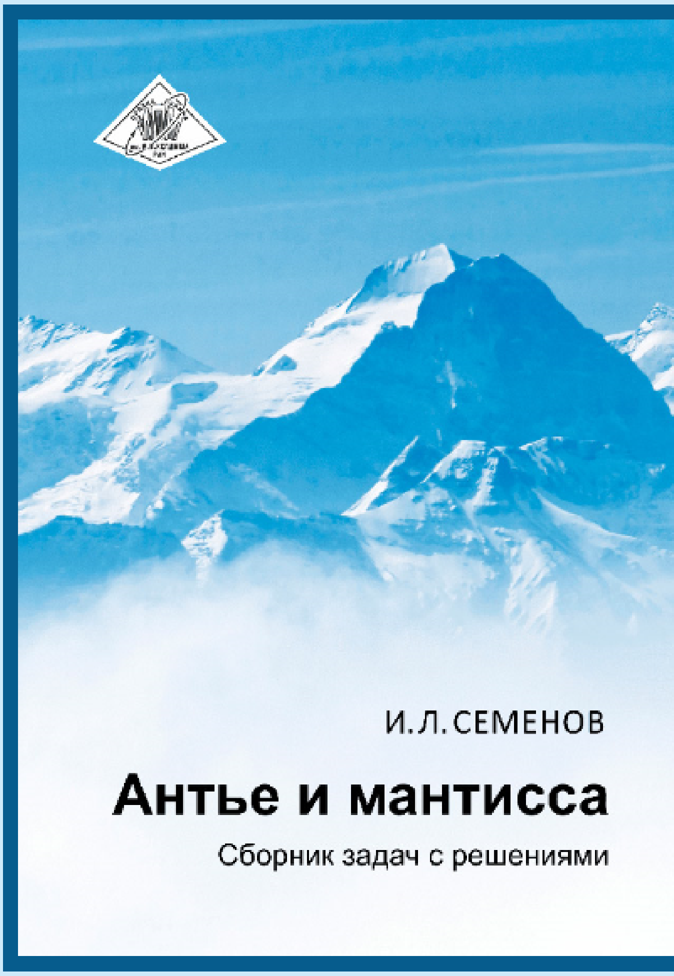

И.Л. СЕМЕНОВ
Антье и мантисса
Сборник задач с решениями

Уважаемые читатели,

приглашаю вас ознакомиться с новыми задачами на антье и мантиссу, которые я выкладываю в своем блоге http://entier.ilsemenov.ru.

И. Семенов

И. Л. Семенов

Антье и мантисса

Сборник задач с решениями

ИПМ им. М. В. Келдыша
2015

УДК 372.851
ББК 74.262.21
С30

Семенов И.Л.

С30 Антье и мантисса. Сборник задач с решениями / Под ред. Е. В. Хорошиловой. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. — 432 с.

ISBN 978-5-98354-014-9

Сборник содержит задачи по математике на тему антье и мантисса (целая и дробная части) действительного числа. Книга предназначена для учеников и учителей старших классов с углубленным изучением математики и может использоваться в качестве самоучителя. Представлены методы решения типовых задач, а также полные и подробные решения ко всем задачам. Любители математики найдут в сборнике довольно сложные олимпиадные задачи.

ББК 74.262.21

Рецензенты: д.ф.-м.н. А. И. Аптекарев, д.ф.-м.н. А. Д. Брюно

Электронная версия книги в формате PDF доступна по адресу
http://keldysh.ru/e-biblio/entier

ISBN 978-5-98354-014-9

Содержание

От редактора

Дорогой читатель, вы держите перед собой сборник математических задач по одному из разделов теории вещественных чисел — книгу, которая появилась неожиданно: автор собирал задачи на тему целой и дробной частей вещественного числа для разрабатываемого облачного хранилища математических задач и так увлекся этой темой, что замыслил написать книгу. И не зря! Книга удалась, и мы — читатели — имеем возможность получить истинное удовольствие от знакомства с этой замечательной книгой, самоучителем по решению рассмотренного класса задач. В этой книге вы найдете большое количество интересных, порой уникальных, увлекательных задач на тему целой и дробной частей вещественного числа, ознакомитесь с разнообразными приемами их решения. Во время работы над книгой, переработав большое количество источников (см. список литературы и перечень интернет-ресурсов), автор нашел, собрал, вывел и доказал многие свойства антье и мантиссы, продемонстрировав на практике и в теории, с одной стороны, разнообразие задач по этой теме, а с другой — существующие стандартные, а также оригинальные подходы к их решению. Проделана большая работа, переработаны и перерешаны другими способами многие из представленных здесь задач.

Игорь Леонидович Семенов — выпускник факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, после окончания университета и до настоящего времени — научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Тема, которой посвящена эта книга, очень специфическая, и надо быть хорошим специалистом и проявить недюжинное упорство, чтобы за полтора года глубоко разобраться в теме, представляющей редкий, но достаточно интересный раздел теории чисел, и написать книгу как результат исследования.

Мы выносим на ваш суд это пособие. Оно окажется полезным как старшеклассникам средних школ с углубленным изучением математики, так и специалистам по теории чисел в данной области, *разработчикам олимпиадных заданий и просто ценителям математических головоломок. Хочется надеяться, что издание порадует любителей оригинальных решений, которые смогут оценить красоту многих задач и задуматься в очередной раз над разнообразием возможностей математики.*

Е. В. Хорошилова
http://istina.msu.ru/profile/KhoroshilovaEV
к.ф.-м.н., доцент ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
2015 год, Москва

Предисловие

До недавнего времени задачи на антье[1] и мантиссу[2] (целую и дробную части) относились к довольно узкой олимпиадной тематике. Не слишком сложные задачи на эту тему встречались в математических сборниках профильного уровня, задачи потруднее изредка появлялись на вступительных экзаменах, например, в МГУ им. М. В. Ломоносова, а задачи повышенной трудности предлагались на национальных и международных олимпиадах.

Активизация олимпиадного движения (спасибо ЕГЭ!) как способа привлечения и отбора наиболее одаренных абитуриентов привела к тому, что задачи на антье и мантиссу стали регулярно появляться как на очных олимпиадах, так и на отборочных этапах, обычно проводимых дистанционно. На таких заочных конкурсах предлагается подчас по два и более десятка задач, в перечень которых включаются задачи как традиционной тематики, так и необычные задачи.

Чем привлекательны задачи на антье и мантиссу?

Если рассматривать антье и мантиссу как функции, то эти функции не являются непрерывными, точнее, они кусочно непрерывные. Присутствие таких функций резко меняет привычный контекст решения, что неудивительно — задачи находятся на стыке различных тем.

Интересной особенностью решения задач на антье и мантиссу является встречающийся практически в каждой задаче равносильный переход к серии неравенств с целочисленным параметром с дальнейшим отбором по этому параметру.

Тема «Антье и мантисса» специфична не более, чем любая другая тема. И трудности, возникающие при решении задач на антье и мантиссу, обычно связаны с недостаточной тренированностью. Далеко не всегда решения бывают слишком длинными, скорее, для этой темы характерны краткость аналитического решения, напичканного логическими рассуждениями.

Антье и мантисса обладают рядом неочевидных свойств, знание

[1] от фр. *entier* — целый
[2] от лат. *mantissa* — прибавка

которых подчас сводит решение задачи к нескольким действиям. При всей своей необычности многие свойства могут быть выведены по ходу решения задачи, правда, для этого придется абстрагироваться от условия задачи. Однако есть такие утверждения и формулы с антье и мантиссой, например, тождество Эрмита, формула Лежандра или теорема Битти, знакомиться с которыми все же рекомендуется заранее.

В сборнике приводятся задачи на антье и мантиссу в основном по теории чисел и алгебре. Используемые в решениях задач факты из этих разделов математики (понятия, определения, утверждения и некоторые доказательства) вынесены для удобства в соответствующие приложения, размещенные в конце книги.

Представляемый сборник задач рассчитан на старшеклассников и учителей профильных математических классов. Помимо обширного задачного материала, в книге представлены методы решения типовых заданий на антье и мантиссу.

Любители математики найдут в книге довольно сложные олимпиадные и конкурсные задачи, перечень которых приводится в соответствующем указателе. Ко всем задачам приводится полное и подробное решение.

Будучи оптимистом по жизни, автор — скептик в том, что большая работа может быть сделана безошибочно, и сожалеет, если в книге встретятся опечатки или даже ошибки. Автор будет благодарен читателям за содействие в исправлении этих недочетов, а также за отзывы, критические замечания, предложения и новые задачи на антье и мантиссу.

Благодарности

Автор выражает глубочайшую признательность редактору книги Е. В. Хорошиловой. От обсуждения замысла сборника задач до заключительного прочтения рукописи Елена Владимировна щедро делилась своими идеями, знаниями и опытом. Предложение опубликовать решения для всех задач исходило от редактора. Автор будет сдержан в своих оценках редакторской правки, чтобы не оказаться персонажем известной басни, однако считает своим долгом отметить, что книга есть результат большой совместной работы автора и редактора. Автор выражает надежду продолжить сотрудничество с Еленой Владимировной и над другими книгами по математике.

Автор особо благодарит А. А. Симон за тщательно выполненную в сжатые сроки корректуру и стилистическую правку рукописи. Свои замечания и рекомендации Анна Александровна сопроводила поясне-

ниями, а ответы на вопросы были для автора интереснейшим и познавательным погружением в нюансы грамматики русского языка.

Издание подготовленной рукописи — ответственный и заключительный этап. Автор благодарит своих коллег М. М. Горбунова-Посадова и А. В. Ермакова за терпимость к авторским причудам, отзывчивость, оперативность и просто огромную помощь на завершающей стадии подготовки рукописи и издании книги и ... за те чувства переживания и волнения, которые автор испытал при получении сигнального экземпляра.

Автор гордится тем, что более тридцати лет работает в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, всегда получая в Институте компетентные советы, квалифицированную поддержку, дружескую опору. Автор благодарит коллектив Института и желает всем сотрудникам здоровья и успехов.

И. Л. Семенов
igor.l.semenov@gmail.com

Слова памяти

26 июня 2014 г. не стало Владимира Александровича Ильина, академика, профессора ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. Редактор и автор книги были студентами, которые, кажется, совсем недавно на первом курсе изучали математический анализ на замечательных лекциях В. А. Ильина, а редактор книги работает на кафедре Общей математики, которую с 1974 года бессменно возглавлял В. А. Ильин.

Эту книгу мы посвящаем памяти нашего Учителя.

Е. В. Хорошилова
И. Л. Семенов

Термины и обозначения

Использование термина «число» подразумевает, что речь идет о действительном числе. Обозначаются действительные числа строчными латинскими буквами: a, b, c, x, y, z. Целые числа обозначаются из набора других латинских букв: k, m, n. Целую и дробную части разделяет запятая «,».

Квадратные «$[\cdot]$» и фигурные «$\{\cdot\}$» скобки служат для обозначения целой и дробной частей выражения — функций антье и мантисса соответственно. Эти скобки никогда в данном сборнике не применяются в качестве математических скобок для задания приоритета выполнения арифметических операций.

Скобки «$[\ ]$» и «$\{\ \}$» используются во многих местах в традиционной математической нотации: для определения числовых отрезков (сегментов), числовых последовательностей и т.п. Впрочем, никакой путаницы не возникает, по контексту становится понятен вариант толкования скобок.

Зачастую решение задачи осуществляется упрощениями, которые обеспечиваются равносильными переходами. Обозначается такой переход для уравнений (неравенств) так: $A \iff B$. Это означает, что все решения уравнения A являются решениями уравнения B и наоборот ($\varnothing$ — пустое множество — также может быть решением).

Однако иногда приходится довольствоваться следованием $A \Longrightarrow B$, означающим, что решения уравнения B включают решения уравнения A. Разумеется, при продолжении такого решения в удобный момент отсекаются посторонние решения.

Перечислим другие обозначения, которые встречаются в книге:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	множества натуральных, простых, целых, рациональных и действительных чисел;
$\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$, $\mathbb{N}_{>2}$	подмножество, задаваемое условием в нижнем индексе;
$\left(\overline{a_n \ldots a_1 a_0}\right)_b$	запись натурального числа в b-ичной системе счисления;

$n \vdots k$	n кратно k (n делится на k нацело);
НОД $(n,\, k)$	наибольший общий делитель n и k;
НОК $(n,\, k)$	наименьшее общее кратное n и k;
$n \equiv k \pmod m$	n сравнимо с k по модулю m;
$n!$	факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$;
$\{x_n\}$	последовательность $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$;
C_n^k	биномиальный коэффициент $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
$f : X \to Y$	на множестве X задана функция f, принимающая значения из множества Y;
$f^{-1}(x)$	функция, обратная к функции $f(x)$, $f^{-1} : Y \to X$;
$D(f)$	область определения функции $f(x)$;
$E(f)$	область значений функции $f(x)$;
$M_1 \cup M_2$	объединение множеств M_1 и M_2;
$M_1 \cap M_2$	пересечение множеств M_1 и M_2;
$M_1 \setminus M_2$	разность множеств M_1 и M_2;
$M_1 \subset M_2$	множество M_1 является строгим подмножеством M_2;
$M_1 \subseteq M_2$	множество M_1 является нестрогим подмножеством M_2;
$\exists$ ($\nexists$)	существует (не существует);
$\forall$	для любого;
$C_1 \wedge C_2$	логическое «И», условия C_1 и C_2 выполняются одновременно;
$C_1 \vee C_2$	логическое «ИЛИ», выполняется хотя бы одно из условий C_1 или C_2;
ОДЗ	область допустимых значений.

В сборнике используется двойная нумерация выключенных (размещенных на отдельной строке) математических формул. Первая, обычная нумерация, состоит из номера раздела и, через точку, номера формулы в данном разделе. Вторая нумерация применяется для ссылок на формулы в задачах, поскольку практически всегда такие ссылки локализованы в решениях соответствующих задач. Эта нумерация использует помимо номера задачи буквенный индекс.

Сокращения и аббревиатуры математических конкурсов

Значительную часть представленных в сборнике задач составляют задачи, ранее предлагавшиеся на различных математических соревнованиях: математических олимпиадах (МО), университетских экзаменационных состязаниях, конкурсах решателей и т.д.

Национальные, городские и др. МО обозначаются наименованием соответствующего региона: «Россия», «Санкт-Петербург» и т.д. В наименованиях бинациональных МО указываются страны-участницы, например, «Австрия-Польша».

Университеты (институты) организуют математические соревнования обычно для отбора среди абитуриентов наиболее способных. Данные соревнования, как и экзаменационные состязания, обозначаются названием соответствующего учебного заведения.

Довольно широко распространены конкурсы (некоторым конкурсам уже много десятков лет) на решение трудных математических задач, размещаемых в научно-популярных математических журналах. Победителями таких конкурсов являются все, решившие определенную задачу, имена победителей публикуются вместе с оригинальными решениями. Сокращенные названия журналов используются для обозначения подобных конкурсов. Аналогичные конкурсы проводятся и другими организаторами: математическими обществами, учебными заведениями.

Символ «*» (звездочка) указывает, что задача предлагалась на отборочном (очном или дистанционном) туре соответствующего соревнования.

Знак градусной меры «$^\circ$» указывает, что задача взята из предварительного списка задач, который рассматривался жюри соответствующей олимпиады. В основном таким образом — IMO$^\circ$— обозначены задачи, поступившие в жюри IMO (International Mathematical Olympiad).

Ниже приведен список сокращений и аббревиатур наименований математических олимпиад:

ВМК	Факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
Всесибир.	Всесибирская МО
Курчатов	МО им. академика И. В. Курчатова НИЯУ «МИФИ»
Ломоносов	МО «Ломоносов» (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воробьевы горы	МО «Покори Воробьевы горы» (МГУ им. М. В. Ломоносова)
САММАТ	Самарская МО
Россия обл.	Всероссийская МО областной (республиканский, региональный) этап
Свердлов. обл.	Вузовско-академическая МО Свердловской области
Сорос	Соросовская МО
СПбГУ ИТМО	МО Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики
Туймаада	Международная МО школьников (Якутия)

AIME	American Invitational Mathematics Examinations
AHSME	American High School Mathematics Examinations
AMC	American Mathematics Contest
AMM	The American Mathematical Monthly (ISSN 0002-9890)
APMO	Asiatic Pacifc Mathematical Olympiad
Balkan	The Balkan Mathematical Olympiad
Baltic	The Baltic Way Mathematical Team Competition
ChMCSS	China Mathematical Competition for Secondary Schools
ChWMO	China Western MO
CMSNotes	CMS Notes (ISSN 1193-9273)
COMC	Sun Life Financial Canadian Open Mathematics Challenge
Cono Sur	International Competitions Cono Sur Olympiad
CRUX	Crux Mathematicorum (ISSN 1706-8142)
ELMO	Experimental Lincoln Mathematical Olympiad
HMMT	Harvard-MIT Math Tournament

IMC	International Mathematical Olympiad for University Students
IMO	International Mathematical Olympiad
JBMO	Junior Balkan Mathematical Olympiad
MedMC	Mediterranean Mathematical Competition
NIMO	National Internet Math Olympiad
Nordic	Nordic Mathematical Contest
Olymon	Mathematical Olympiads Correspondence Program (Canadian Mathematical Society)
Putnam	The William Lowell Putnam mathematical competition
RMM	Romanian Master in Mathematics Competition
SIMC	Samanyolu International Mathematics Competition (Turkey)
SMT	Stanford Math Tournament
StarsM	Stars of Mathematics (Romania)
USA Talent	USA Mathematical Talent Search
WMTC	World Mathematics Team Championship

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

1. Определения

В данном разделе вводятся понятия *антье* и *мантисса*, приведены свойства, примеры и графики функций антье и мантисса. Затем представлены задачи, для решения которых достаточно лишь понимания определений антье и мантиссы. Наряду с довольно простыми заданиями имеются несколько задач олимпиадного уровня. В конце раздела размещены указания, решения и ответы к представленным задачам.

1.1. Определение антье

$\left[x\right]$ — антье[3] x (или целая часть числа x) — это наибольшее целое число, не превосходящее x,

$$\left[x\right] = \max\left\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\right\}.$$

1.2. Определение мантиссы

$\left\{x\right\}$ — мантисса x (или дробная часть числа x) — это число, равное разности между числом x и антье x,

$$\left\{x\right\} = x - \left[x\right].$$

1.3. Разложение действительного числа на антье и мантиссу

Любое действительное число x представляется единственным способом в виде суммы целой и дробной частей

$$x = \left[x\right] + \left\{x\right\}. \tag{1.1}$$

[3] Становится довольно популярным использование другого названия антье — *пол*, обозначаемый $\lfloor x \rfloor$. Парный термин — *потолок*, обозначаемый $\lceil x \rceil$, — соответствует наименьшему целому, не меньшему x.

1.4. Примеры

$$\big[1{,}5\big] = 1,\ \big\{1{,}5\big\} = 0{,}5;$$

$$\left[-\frac{2}{3}\right] = -1,\ \left\{-\frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{3};$$

$$\big[\pi\big] = 3,\ \big\{\pi\big\} = \pi - 3;$$

$$\left[-\sqrt{2}\right] = -2,\ \left\{-\sqrt{2}\right\} = 2 - \sqrt{2};$$

$$\left\{-\sqrt{3}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} = 1.$$

Замечательный пример с неожиданным сочетанием антье трансцендентных чисел $\pi = 3{,}14159\ldots$ и $e = 2{,}71828\ldots$ [20, с. 68]:

$$[\pi]^{[e]} + [e] = [e]^{[\pi]} + [\pi]\,.$$

1.5. Исторические факты

Уже более двухсот лет используется термин *антье* (фр. *entier*), предложенный Лежандром[4] в 1798 г. Новое понятие понадобилось ему при выводе формулы количества вхождений простого числа p в каноническое разложение числа $n!$ (см. раздел 6. «Формула Лежандра»).

Обозначение антье числа x в виде $[x]$ ввел Гаусс[5] в 1808 г.

Легенда гласит, что П. Дирихле[6] сформулировал принцип, носящий его имя, при решении «задачи о расположении $\{n\alpha\}$» (задачи *438*-*439*). Если легенда является историческим фактом, то принцип Дирихле обязан своим появлением мантиссе!

Рассмотрим антье и мантиссу как функции действительного аргумента $f(x) = [x]$ и $f(x) = \{x\}$.

1.6. Свойства и график функции антье

Свойства функции антье:

1) $D\big([x]\big) = \mathbb{R}$;
2) $E\big([x]\big) = \mathbb{Z}$;

[4] А. Лежандр (A. Legendre, 1752-1833) — французский математик, известен блестящими результатами в геометрии и геодезии, теории чисел, теоретической механике.

[5] И. К. Ф. Гаусс (J. C. F. Gauss, 1777-1855) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист, с его именем связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики.

[6] П. Дирихле (P. Dirichlet, 1805-1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в теорию чисел, математический анализ, механику, математическую физику.

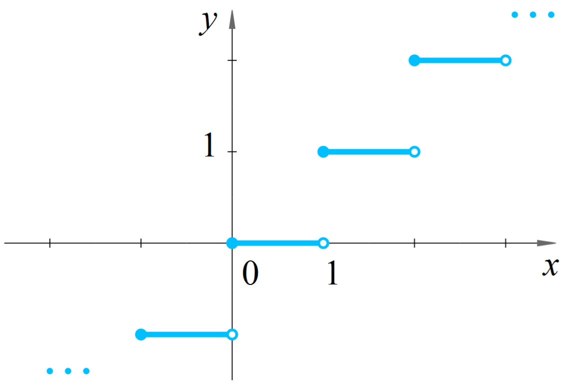


Рис. 1. График функции $y = [x]$

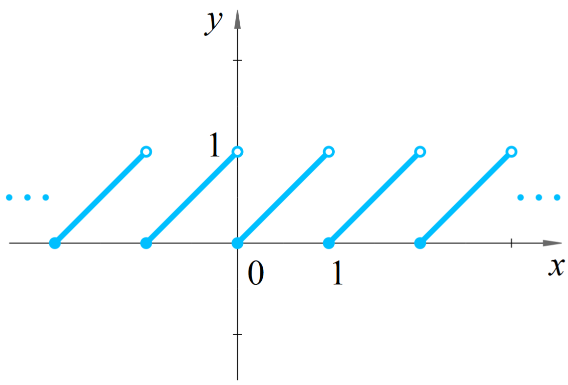


Рис. 2. График функции $y = \{x\}$

3) функция является кусочно-постоянной;
4) функция является неубывающей;
5) четность, нечетность, периодичность отсутствуют;
6) на рис. 1 изображен график $y = [x]$, который расположен в первой и третьей четвертях, график имеет форму ступеней бесконечной лестницы с наклоном 45° (здесь и далее: выколотые точки означают, что указанные точки не принадлежат графику).

1.7. Свойства и график функции мантиссы

Свойства функции мантисса:
1) $D\bigl(\{x\}\bigr) = \mathbb{R}$;
2) $E\bigl(\{x\}\bigr) = [0,\ 1)$;
3) функция является кусочно-линейной, кусочно-возрастающей, интервалами линейности и возрастания являются $[n,\ n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$;
4) является периодической с периодом 1;
5) четность и нечетность отсутствуют;
6) на рис. 2 изображен график $y = \{x\}$, который расположен в первой и второй четвертях, регулярный вид графика имеет форму сильно накренившегося забора, составленного из одинаковых штакетин.

1.8. Задачи по теме раздела

1. Вычислите $[2x]$, если известно, что $[x] = \underbrace{555\ldots55}_{100}$.

2. Вычислите $\{2x\}$, если известно, что $\{x\} = 0{,}\underbrace{555\ldots55}_{100}$.

3. Сравните $\left[\sqrt[3]{7}\right]$ и $\left[\sqrt[5]{33}\right]$.

4. Вычислите: а) $\left[\sqrt{13}-\sqrt{3}\right]$, б) $\left[\sqrt{14}-\sqrt{3}\right]$, в) $\left[\sqrt[3]{17}-\sqrt{7}\right]$.

5. Вычислите $\left[\dfrac{2017!+2014!}{2016!+2015!}\right]$.

6. Вычислите $[A]$, где

$$A = \sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\ldots+\sqrt[3]{24}}}.$$

A состоит из n вложенных арифметических корней.

7. Вычислите

$$\left[\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\sqrt{2}}}\right].$$

Число $\sqrt{2}$ присутствует в формуле $n \geqslant 1$ раз.

8. Докажите $\{\varphi\} = \dfrac{1}{\varphi}$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9. Сравните $\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$ и $\left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$.

10. Сравните: а) $\left\{\sqrt{13}\right\}$ и $\left\{-\sqrt{13}\right\}$, б) $\left\{\sqrt{19}\right\}$ и $\left\{-\sqrt{19}\right\}$.

11. Сравните $\left\{2\sin\dfrac{\pi}{5}\right\}$ и $\left\{2\sin\dfrac{2\pi}{5}\right\}$.

12. Сравните $\left\{\sqrt{1917}\right\}$ и $\left\{\sqrt{2014}\right\}$.

13. Упростите выражение $\left\{\dfrac{99^{99}}{1-99^{9}}\right\}$, освободившись от знака мантиссы.

14. Упростите выражение $\left\{\dfrac{n^3-n}{6}\right\}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

15. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что число $\left\{n\sqrt{\alpha}\right\}$ является иррациональным при любом $n \in \mathbb{N}$.

16. Вычислите $[S]$ и $\{S\}$, где

$$S = \frac{1}{(-99)\cdot(-89)} + \frac{1}{(-89)\cdot(-79)} + \ldots + \frac{1}{81\cdot 91} + +\frac{1}{91\cdot 101}.$$

17. Найдите хотя бы одну пару действительных чисел x_0 и y_0, для которых выполняются неравенства:

$$[x_0\, y_0] < [x_0]\cdot[y_0] < [x_0] + [y_0] < [x_0 + y_0]\,.$$

18. Найдите хотя бы одну пару действительных чисел x_0 и y_0, для которых выполняются неравенства:

а) $\dfrac{[x_0]+[y_0]}{2} < \left[\dfrac{x_0+y_0}{2}\right]$, б) $\dfrac{[x_0]+[y_0]}{2} > \left[\dfrac{x_0+y_0}{2}\right]$.

19. Найдите сумму антье всех действительных решений уравнения

$$x^3 - 8x^2 - 2x + 3 = 0.$$

20. Решите уравнение $\left[x^2\right] - 10\left[x\right] + 24 = 0$.

21. Докажите неравенство $\left[x^2\right] + \left[x^8\right] \geqslant 2\left[x^5\right]$, где $x \in \mathbb{R}$.

22. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

23. Определите такие натуральные значения n, при которых ненулевая сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{2}\right]$ — полный квадрат.

24. Пусть n, $m \in \mathbb{Z}$. Вычислите

$$\left\{\frac{n+m}{2}\right\} + \left\{\frac{n-m+1}{2}\right\} \text{ и } \left[\frac{n+m}{2}\right] + \left[\frac{n-m+1}{2}\right].$$

25. Сформулируйте необходимое и достаточное условие тождества

$$\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n+1}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

26. Найдите все натуральные значения n такие, что оба выражения

$$\frac{n+2016}{\left[\sqrt{n}\right]} \quad \text{и} \quad \frac{n+2015}{\left[\sqrt{n+1}\right]}$$

являются целыми числами.

27. Определите область значений функции $f(x) = \left[\dfrac{x}{12{,}5}\right] \cdot \left[-\dfrac{12{,}5}{x}\right]$ при $x > 0$.

28. Определите область значений выражения

$$\left[-\left\{\sqrt[2014]{n}\right\}\right], \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

29. Решите уравнение $\left\{2014^x\right\} = 2014^{\{x\}}$.

30. Найдите наименьшее число x, удовлетворяющее неравенствам:

$$\text{а)}\ \ [x] \cdot \{x\} \geqslant 2014, \quad \text{б)}\ \ [x] \cdot \left\{2014x\right\} \geqslant 2014.$$

31. Найдите хотя бы одно решение уравнения $\left[\sqrt{2014+x}\right] = x$.

32. Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее уравнению $x - \left[\sqrt{x}\right]^2 = 2014$.

33. Докажите, что $\sqrt{n^2+m} = n + \left\{\sqrt{n^2+m}\right\}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant m \leqslant 2n$.

34. Множество M состоит из натуральных чисел

$$M = \left\{m^2+1,\, m^2+2,\, \ldots,\, m^2+2m\right\}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что $\min\limits_{n \in M} \left\{\sqrt{n}\right\} = \left\{\sqrt{m^2+1}\right\}$.

35. Докажите, что $\left\{\sqrt{(n+1)^2+1}\right\} < \left\{\sqrt{n^2+1}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$.

36. Определите количество совмещений минутной и часовой стрелок на точно идущих часах с циферблатом на отрезке от 0 часов до 11 часов 59 минут и 59 секунд.

Используя обозначение мантиссы, предложите уравнение совмещения стрелок на часах.

37. Определите количество решений уравнения $x = \{32x\}$.

38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x] + [y] = 1, \\ x|x| + y|y| = 1. \end{cases}$$

39. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -[x]\{x\} + y\{y\} + z[z] = 0{,}49, \\ x[x] - [y]\{y\} + z\{z\} = 0{,}16, \\ x\{x\} + y[y] - [z]\{z\} = 0{,}25. \end{cases}$$

40. Определите $[A]$ и $\{A\}$, где $A = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

41. Определите значение выражения

$$\alpha - \alpha^2 + \alpha[\alpha], \quad \text{где } \alpha = \left(2+\sqrt{3}\right)^n.$$

42. Пусть $\alpha = 2+\sqrt{3}$. Докажите, что для любого натурального n выполняется $\alpha^n - [\alpha^n] = 1 - \alpha^{-n}$.

43. Вычислите сумму десятичных цифр числа

$$\left[\frac{5152535455\ldots979899}{50}\right].$$

44. Определите цифру, стоящую в младшем разряде числа $\left[\dfrac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$.

45. Докажите, что среди чисел $\left[2^n\sqrt{2}\right]$ бесконечно много составных.

46. Докажите, что среди чисел $\left[3^n\sqrt[3]{3}\right]$ бесконечно много составных.

47. Решите уравнение в натуральных числах

$$\left[\sqrt{4n^2+1}\right]+\left[\sqrt{4n^2+2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{4n^2+9n+4}\right]=18n^2+2012.$$

48. Упростите выражение

$$\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right], \text{ где } n\in\mathbb{N}.$$

49. Упростите выражение

$$\left[\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}\right], \text{ где } n\in\mathbb{N}.$$

50. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что если $p,q\neq 2$, то $\left[\dfrac{p^q+q^p}{pq}\right]$ — четное число.

51. Определите количество различных значений в конечной последовательности чисел

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\ \left[\frac{2^2}{1980}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{1980^2}{1980}\right].$$

52. Выведите рекуррентную формулу вычисления очередного элемента ряда Фарея n-го порядка F_n по двум предыдущим элементам (подробности о рядах Фарея см. А.11.).

53. Пусть $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[k\{x\}\right]$. Определите количество различных значений, которые принимает функция $f(x)$.

1.9. Указания, решения, ответы

1. Вычислите $[2x]$, если известно, что $[x] = \underbrace{555\ldots55}_{100}$.

Решение. Если $\{x\} < 0,5$, то $[2x] = 111\ldots10$ (сто «1»). Иначе $[2x]$ будет больше на 1.

Ответ: $\underbrace{111\ldots1}_{100}0$ или $\underbrace{111\ldots1}_{101}$.

2. Вычислите $\{2x\}$, если известно, что $\{x\} = 0{,}\underbrace{555\ldots55}_{100}$.

Ответ: $\{2x\} = 0{,}\underbrace{111\ldots11}_{99}$.

3. Сравните $\left[\sqrt[3]{7}\right]$ и $\left[\sqrt[5]{33}\right]$.

Решение. $\left[\sqrt[3]{7}\right] = 1 < 2 = \left[\sqrt[5]{32}\right] = \left[\sqrt[5]{33}\right]$.

Ответ: $\left[\sqrt[3]{7}\right] < \left[\sqrt[5]{33}\right]$.

4. Вычислите: а) $\left[\sqrt{13} - \sqrt{3}\right]$, б) $\left[\sqrt{14} - \sqrt{3}\right]$, в) $\left[\sqrt[3]{17} - \sqrt{7}\right]$.

Решение. а) Понятно, что $1 < \sqrt{13} - \sqrt{3} < 3$, поэтому сравним с числом 2

$$\begin{aligned}
\sqrt{13} - \sqrt{3} &\ \vee\ 2 && \text{возведем в квадрат,}\\
16 - 2\sqrt{39} &\ \vee\ 4 && \text{приведем подобные,}\\
12 &\ \vee\ 2\sqrt{39}, &&\\
6 &\ <\ \sqrt{39}, && \text{то есть число 2 больше.}
\end{aligned}$$

Ответ: а) 1, б) 2, в) -1.

5. (*LinkedIn/MO*) Вычислите $\left[\dfrac{2017! + 2014!}{2016! + 2015!}\right]$.

Решение. $\dfrac{2017! + 2014!}{2016! + 2015!} = 2016 + \dfrac{1}{2015 \cdot 2017}$.

Ответ: 2016.

6. (*LinkedIn/MO*) Вычислите $[A]$, где

$$A = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \ldots + \sqrt[3]{24}}}.$$

A состоит из n вложенных арифметических корней.

Решение. Очевидно, что $A > 2$.

Если заменить самое вложенное число 24 на 27, то в результате вычислений получим 3. Значит, $A < 3$.

Ответ: $[A] = 2$.

7. Вычислите

$$\left[\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\sqrt{2}}}\right].$$

Число $\sqrt{2}$ присутствует в формуле $n \geqslant 1$ раз.

Решение. Воспользуемся аналогичным приемом, который сработал в предыдущей задаче. Заменим правый показатель степени на 2 и т.д.

Ответ: 1.

8. Докажите $\{\varphi\} = \dfrac{1}{\varphi}$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доказательство. (Число φ известно как «золотое сечение», или число Фидия[7], см. п. А.24.) Оценим числовое выражение, стоящее под знаком мантиссы, $1 < \varphi < 2$. Тогда

$$\{\varphi\} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.$$

■

9. Сравните $\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$ и $\left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$.

Решение. $\left\{-\dfrac{2}{5}\right\} = -\dfrac{2}{5} - \left[-\dfrac{2}{5}\right] = -\dfrac{2}{5} - (-1) = \dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{2}{5}\right\} < \left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$.

[7] Фидий (приблизительно 490 до н.э.-430 до н.э.) — древнегреческий скульптор и архитектор. Золотое сечение называют числом Фидия, поскольку в его работах часто встречается данная пропорция.

10. Сравните: а) $\left\{\sqrt{13}\right\}$ и $\left\{-\sqrt{13}\right\}$, б) $\left\{\sqrt{19}\right\}$ и $\left\{-\sqrt{19}\right\}$.

Ответ: а) $\left\{\sqrt{13}\right\} > \left\{-\sqrt{13}\right\}$, б) $\left\{\sqrt{19}\right\} < \left\{-\sqrt{19}\right\}$.

11. Сравните $\left\{2\sin\frac{\pi}{5}\right\}$ и $\left\{2\sin\frac{2\pi}{5}\right\}$.

Решение.

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{5} < \sin\frac{2\pi}{5} < 1,$$

$$1 < 2\sin\frac{\pi}{5} < 2\sin\frac{2\pi}{5} < 2,$$

$$0 < 2\sin\frac{\pi}{5} - 1 < 2\sin\frac{2\pi}{5} - 1 < 1,$$

$$\left\{2\sin\frac{\pi}{5}\right\} < \left\{2\sin\frac{2\pi}{5}\right\},$$

так как $\left\{2\sin\frac{\pi}{5}\right\} = 2\sin\frac{\pi}{5} - 1$, а $\left\{2\sin\frac{2\pi}{5}\right\} = 2\sin\frac{2\pi}{5} - 1$.

Ответ: $\left\{2\sin\frac{\pi}{5}\right\} < \left\{2\sin\frac{2\pi}{5}\right\}$.

12. Сравните $\left\{\sqrt{1917}\right\}$ и $\left\{\sqrt{2014}\right\}$.

Решение. Оценим стоящие под мантиссами числовые выражения

$$43 < \sqrt{1917} < 44 < \sqrt{2014} < 45.$$

Благодаря оценке можем избавиться от знаков мантисс

$$\left\{\sqrt{1917}\right\} = \sqrt{1917} - 43, \quad \left\{\sqrt{2014}\right\} = \sqrt{2014} - 44.$$

Таким образом, исходное задание свелось к сравнению $\sqrt{1917} - 43$ и $\sqrt{2014} - 44$. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\left\{\sqrt{1917}\right\} < \left\{\sqrt{2014}\right\}$.

13. Упростите выражение $\left\{\dfrac{99^{99}}{1-99^9}\right\}$, освободившись от знака мантиссы.

Решение. Согласно (B.1) дробь $\dfrac{99^{99}-1}{99^9-1}$ сократима, то есть является целым числом. Тогда $\underbrace{\dfrac{99^{99}}{1-99^9}}_{\textit{число}} = \underbrace{-1-\dfrac{99^{99}-1}{99^9-1}}_{\textit{антье}} + \underbrace{1-\dfrac{1}{99^9-1}}_{\textit{мантисса}}$.

Ответ: $1-\dfrac{1}{99^9-1}$.

14. Упростите выражение $\left\{\dfrac{n^3-n}{6}\right\}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Дробь $\dfrac{n^3-n}{6}$ является целым числом, поскольку числитель $n\big(n-1\big)\big(n+1\big)$ всегда делится на 6.

Ответ: 0.

15. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что число $\left\{n\sqrt{\alpha}\right\}$ является иррациональным при любом $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Предположим обратное, $\left\{n\sqrt{\alpha}\right\} = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $q \in \mathbb{N}$). Тогда $\sqrt{\alpha} = \dfrac{p'}{q'}$ — рациональное, поскольку $p' = \dfrac{p}{q} + \left[n\sqrt{\alpha}\right] \in \mathbb{Q}$, $q' = qn \in \mathbb{N}$. Однако иррациональное число α не может равняться квадрату рационального числа, следовательно, получено противоречие. ∎

16. Вычислите $[S]$ и $\{S\}$, где

$$S = \frac{1}{(-99)\cdot(-89)} + \frac{1}{(-89)\cdot(-79)} + \ldots + \frac{1}{81\cdot 91} + + \frac{1}{91\cdot 101}.$$

Решение. В сумме S «спрятана» телескопическая сумма.

$$S = \sum_{k=-10}^{10} \frac{1}{(1+10n)(11+10n)} = \frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = -\frac{20}{99\cdot 101}.$$

Ответ: $[S] = -1$, $\{S\} = \dfrac{9979}{9999}$.

17. Найдите хотя бы одну пару действительных чисел x_0 и y_0, для которых выполняются неравенства:

$$[x_0\,y_0] < [x_0]\cdot[y_0] < [x_0]+[y_0] < [x_0+y_0]\,.$$

Ответ: $x_0 = 1{,}5,\ \ y_0 = -1{,}5.$

18. Найдите хотя бы одну пару действительных чисел x_0 и y_0, для которых выполняются неравенства:

$$\text{а)}\ \frac{[x_0]+[y_0]}{2} < \left[\frac{x_0+y_0}{2}\right],$$

$$\text{б)}\ \frac{[x_0]+[y_0]}{2} > \left[\frac{x_0+y_0}{2}\right].$$

Ответ: а) $x_0 = 0{,}6,\ \ y_0 = 1{,}6;$
б) $x_0 = 0{,}4,\ \ y_0 = 1{,}4.$

19. (на основе *LinkedIn/MO*) Найдите сумму антье всех действительных решений уравнения

$$x^3 - 8x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Решение. Обозначим $f(x) = x^3 - 8x^2 - 2x + 3$.

Поскольку $f(-1) < 0,\ f(0) > 0,\ f(1) < 0,\ f(8) < 0,\ f(9) > 0$, то нули функции $f(x)$ лежат в интервалах $(-1,\,0)$, $(0,\,1)$, $(8,\,9)$. Других нулей не может быть, так как исходное уравнение кубическое.

Ответ: 7.

20. (*LinkedIn/MO*) Решите уравнение

$$\left[x^2\right] - 10\left[x\right] + 24 = 0.$$

Решение. Обозначим $f(x) = \left[x^2\right] - 10\left[x\right] + 24$.

Нетрудно убедиться, что при $\left[x\right] \leqslant 3$ и $\left[x\right] \geqslant 7$ функция $f(x)$ принимает положительные значения.

Если $\left[x\right] = 4,\,5,\,6$, то $\left[x^2\right] = 16,\,25,\,36$ соответственно.

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\left[4,\,\sqrt{17}\right) \cup \left[\sqrt{26},\,\sqrt{27}\right) \cup \left[6,\,\sqrt{37}\right).$

21. (*LinkedIn/MO*) Докажите неравенство

$$\left[x^2\right] + \left[x^8\right] \geqslant 2\left[x^5\right], \quad \text{где } x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Случай $\boldsymbol{x < 1}$ не представляет интереса, все понятно.

Если $\boldsymbol{x \geqslant \sqrt[3]{2}}$, то

$$x^5(x^3 - 2) \geqslant 0, \quad x^8 \geqslant 2x^5, \quad \left[x^8\right] \geqslant \left[2x^5\right], \quad \left[x^8\right] \geqslant 2\left[x^5\right].$$

Очевидно, что при $\boldsymbol{1 \leqslant x < \sqrt[5]{2}}$ тождество выполняется.

При $\boldsymbol{\sqrt[5]{2} \leqslant x < \sqrt[5]{3}}$ имеем $\left[x^5\right] = 2$, $\left[x^8\right] \geqslant 3$.

При $\boldsymbol{\sqrt[5]{3} \leqslant x < \sqrt[5]{4}}$ имеем $\left[x^5\right] = 3$, $\left[x^8\right] \geqslant 5$.

Поскольку $\sqrt[5]{4} > \sqrt[3]{2}$, тождество доказано. ■

22. (HMMT/2002) Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество $\left[\dfrac{n}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \left[\dfrac{n^2}{4}\right]$.

Указание. Рассмотрите два случая, когда n является четным и нечетным числом.

23. (HMMT/2002) Определите такие натуральные значения n, при которых ненулевая сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{k}{2}\right]$ — полный квадрат.

Решение.

$$S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} \left[\frac{k}{2}\right] = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + n + n = n(n+1),$$

$$S_{2n} = S_{2n-1} + n + 1 = (n+1)^2.$$

См. также задачу *414*.

Ответ: n — четное число.

24. Пусть n, $m \in \mathbb{Z}$. Вычислите

$$\left\{\frac{n+m}{2}\right\} + \left\{\frac{n-m+1}{2}\right\} \text{ и } \left[\frac{n+m}{2}\right] + \left[\frac{n-m+1}{2}\right].$$

Решение. Поскольку $(n+m($ и $(n-m)$ одинаковой четности, то одна мантисса равна 0, а другая $\frac{1}{2}$. Таким образом, сумма мантисс всегда равна $\frac{1}{2}$.

Если выразить антье через мантиссу, то получается, что сумма антье равна n.

Ответ: $\left\{\frac{n+m}{2}\right\} + \left\{\frac{n-m+1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$,
$\left[\frac{n+m}{2}\right] + \left[\frac{n-m+1}{2}\right] = n$.

25. Сформулируйте необходимое и достаточное условие тождества

$$\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n+1}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: $\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n+1}\right] \iff n+1$ не является полным квадратом.

26. (*LinkedIn/MO*) Найдите все натуральные значения n такие, что оба выражения

$$\frac{n+2016}{\left[\sqrt{n}\right]} \text{ и } \frac{n+2015}{\left[\sqrt{n+1}\right]} \tag{26a}$$

являются целыми числами.

Решение. Рассмотрим два случая (согласно задаче *25*).

1) $\left[\boldsymbol{\sqrt{n}}\right] = \left[\boldsymbol{\sqrt{n+1}}\right]$.
Тогда знаменатели дробей (26a) должны равняться 1, т.е. $n=1$ и $n=2$.

2) $\left[\boldsymbol{\sqrt{n}}\right] + \mathbf{1} = \left[\boldsymbol{\sqrt{n+1}}\right]$.
Обозначим $m = \sqrt{n+1}$, или $n = m^2 - 1$. Тогда дроби (141.1) принимают вид

$$\frac{m^2-1+2016}{m-1} \text{ и } \frac{m^2-1+2015}{m}.$$

Осталось найти такие натуральные значения m, при которых

$$2016 \vdots (m-1) \quad \text{и} \quad 2014 \vdots m.$$

Поскольку $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$ и $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$, то перебор небольшой. Подходят только два значения $m=2$ и $m=19$, т.е. $n=3$ и $n=360$.

Ответ: $n = 1,\ 2,\ 3,\ 360.$

27. (На основе Нью-Йорк/1975) [39, с. 3] Определите область значений функции

$$f(x) = \left[\frac{x}{12{,}5}\right]\cdot\left[-\frac{12{,}5}{x}\right] \qquad \text{при } x > 0.$$

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < 12{,}5\,, \\ -n & \text{при } 12{,}5\,n \leqslant x < 12{,}5\,(n+1)\,, \ \text{ где } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ответ: $\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

28. Определите область значений выражения

$$\left[-\left\{\sqrt[2014]{n}\right\}\right], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Если $n = k^{2014}$ $(k \in \mathbb{N})$, то мантисса, затем и антье равны 0. В противном случае под мантиссой стоит иррациональное число, тогда под антье будет стоять отрицательное число, которое больше -1, следовательно, антье будет равно -1.

Ответ: -1 и 0.

29. Решите уравнение $\left\{2014^x\right\} = 2014^{\{x\}}$.

См. другой вариант решения — задача 307.

Решение. При любом значении x левая часть уравнения меньше 1, в то время как правая часть больше или равна 1.

Ответ: $\varnothing$.

30. Найдите наименьшее число x, удовлетворяющее неравенствам:

$$\text{а)}\ [x]\cdot\{x\} \geqslant 2014, \qquad \text{б)}\ [x]\cdot\left\{2014x\right\} \geqslant 2014.$$

Решение. Наименьшее среди чисел имеет наименьшую целую часть, а наименьшее среди чисел с равной целой частью имеет наименьшую дробную часть.

а) Если $[x] \leqslant 2014$, то неравенство не выполняется. Пусть $[x] = 2015$, тогда $\{x\} \leqslant \dfrac{2014}{2015}$.

б) Предлагаем решить самостоятельно.

Ответ: а) $2015\frac{2014}{2015}$, б) $2015\frac{1}{2015}$.

31. Найдите хотя бы одно решение уравнения $\left[\sqrt{2014+x}\right] = x$.

Решение. Так как

$$\left[\sqrt{45^2}\right] = \left[\sqrt{45^2+1}\right] = \left[\sqrt{45^2+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{46^2-1}\right] = 45$$

($45^2 = 2025 = 2014 + 11$, $46^2 - 1 = 2115 = 2014 + 101$), уравнение имеет решение 45. Это решение будет единственным, но обоснование этого не требуется.

Ответ: 45.

32. Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее уравнению $x - \left[\sqrt{x}\right]^2 = 2014$.

Решение. Попробуем выполнить замену $x = y + 2014$. Тогда уравнение примет вид $y = \left[\sqrt{y+2014}\right]^2$. Значением y является полный квадрат, значит, несколько лучшей заменой будет $x = y^2 + 2014$, где $y \in \mathbb{N}$. При такой замене исходное задание сведется к определению наименьшего значения y, удовлетворяющего уравнению

$$y = \left[\sqrt{y^2+2014}\right].$$

Согласно определению антье, $\sqrt{y^2+2014} < y+1$, или $y > 1006\frac{1}{2}$. Наименьшее значение y равно 1007. Тогда $x = 1007^2 + 2014$.

Ответ: $x = 1016\,063$.

33. Докажите, что $\sqrt{n^2+m} = n + \left\{\sqrt{n^2+m}\right\}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant m \leqslant 2n$.

Доказательство. $n^2 < \sqrt{n^2+m} < (n+1)^2$, $\left[\sqrt{n^2+m}\right] = n$. ■

34. Множество M состоит из натуральных чисел

$$M = \{m^2+1,\ m^2+2,\ \ldots,\ m^2+2m\}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что $\min\limits_{n\in M}\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{m^2+1}\}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in M$ и $a > b$, тогда $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Поскольку $[\sqrt{a}] = [\sqrt{b}]$, то $\sqrt{a} - [\sqrt{a}] > \sqrt{b} - [\sqrt{b}]$. ■

35. Докажите, что $\left\{\sqrt{(n+1)^2+1}\right\} < \left\{\sqrt{n^2+1}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуйтесь неравенством

$$\sqrt{(n+1)^2+1} < \sqrt{n^2+1}+1$$

и равенством

$$\left[\sqrt{(n+1)^2+1}\right] = \left[\sqrt{n^2+1}\right] + 1.$$
■

36. Определите количество совмещений минутной и часовой стрелок на точно идущих часах с циферблатом на отрезке от 0 часов до 11 часов 59 минут и 59 секунд.

Используя обозначение мантиссы, предложите уравнение совмещения стрелок на часах.

Решение. Минутная и часовая стрелки совмещены в начальный момент времени. В следующий раз они совместятся немногим позже после одного часа и 5 минут. Затем стрелки будут совмещаться один раз в час. Итого — 11 раз.

Уравнение совмещения минутной и часовой стрелок выглядит следующим образом $x = \{12x\}$, где x — это часть (доля) круга циферблата, которую проходит часовая стрелка. $0 \leqslant x < 1$, так как интервал времени составляет от 0:00:00 до 11:59:59, и часовая стрелка не пройдет полный круг. (Здесь имеет место непринципиальное допущение, что после 11:59:59 сразу наступает 12 часов.) Выражение $\{12x\}$ равно той части (доли) круга от начального положения минутной стрелки, которую она пробежала от начала текущего часа.

Таким образом, известно количество решений уравнения $x = \{12x\}$, равное 11.

Ответ: 11 раз, $x = \{12x\}$.

37. Определите количество решений уравнения $x = \{32x\}$.

См. другие варианты решений — задачи *97*, *255*.

Решение. Рекомендуем сначала ознакомиться с решением задачи *36*.

Исходное уравнение описывает условие совмещения минутной и часовой стрелок на необычных часах, рассчитанных на полный круг часовой стрелки за 32 часа (минутная стрелка ведет себя привычным образом).

Рассуждения, аналогичные задаче *36*, приведут к выводу, что стрелки на необычных часах совместятся 31 раз в течение интервала времени от 0 часов до 31 часа 59 минут 59 секунд.

Ответ: 31 решение.

38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x] + [y] = 1, \\ x|x| + y|y| = 1. \end{cases}$$

Решение. Система симметрична относительно x и y, тогда если (a, b) является решением системы, то и (b, a) также будет решением.

Пусть $x \geqslant y$.

Если $[x] = 1$, то $[y] = 0$. Второе уравнение примет вид $x^2 + y^2 = 1$. Очевидно, что в этом случае решением системы будет одна пара $(1, 0)$, которую отправляем в ответ вместе с симметричной ей парой $(0, 1)$.

Если $[x] = k$ $(k = 2, 3, \ldots)$, то $[y] < 0$. Из первого уравнения следует, что $x+y \geqslant 1$ и заведомо в данном случае $x-y > 1$. Поскольку второе уравнение примет вид $x^2 - y^2 = 1$, то других решений системы нет.

Ответ: $(0, 1)$, $(1, 0)$.

39. (*LinkedIn/MO*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -[x]\{x\} + y\{y\} + z[z] = 0{,}49, \\ x[x] - [y]\{y\} + z\{z\} = 0{,}16, \\ x\{x\} + y[y] - [z]\{z\} = 0{,}25. \end{cases}$$

Решение. Сумма первого, второго и третьего (с коэффициентом 4) уравнений после несложных манипуляций с применением формулы (1.1) дает

$$\left(x+\{x\}\right)^2+\left(y+[y]\right)^2+\left([z]-\{z\}\right)^2=1{,}65. \qquad (39a)$$

из чего следует либо $[y]=0$, либо $[y]=-1$.

1) $[\boldsymbol{y}]=\mathbf{0}$. Тогда из второго уравнения следует, что $[x]=0$, а из первого, что $[z]=0$. Дальнейшее очевидно.

2) $[\boldsymbol{y}]=-\mathbf{1}$. Тогда из (39$a$) следует, что $[x]=0$, а из первого уравнения, что $[z]=1$. При таких условиях сумма первых двух уравнений равна

$$\{y\}\left(1+\{y\}\right)+z\left(1+\{z\}\right)=0{,}65.$$

Однако данное равенство не выполняется при $[z]=1$. То есть этот случай не имеет решений.

Ответ: $x=0{,}5,\ \ y=0{,}7,\ \ z=0{,}4.$

40. Определите $[A]$ и $\{A\}$, где $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Обозначим сопряженное к A через $A'=\left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

Отметим очевидный факт: $0<A'<1$. Выражение $A+A'$ является целым числом, так как согласно биному Ньютона[8] все слагаемые с множителем $\sqrt{3}$ в нечетной степени сокращаются. Получается, что $A+A'$ — ближайшее сверху к A целое число. Следовательно,

$$[A]+1=A+A'.$$

Ответ: $[A]=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n-1,$
$\{A\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$

41. (*LinkedIn/MO*) Определите значение выражения

$$\alpha-\alpha^2+\alpha[\alpha],\qquad \text{где } \alpha=\left(2+\sqrt{3}\right)^n.$$

Решение. Поскольку $\{\alpha\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ (см. задачу *40*), то

$$\alpha-\alpha^2+\alpha[\alpha]=\alpha(1-\alpha+[\alpha])=$$

[8] И. Ньютон (I. Newton, 1643-1727) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Бином Ньютона, который изучается в школе, был известен еще индийским и арабским математикам. Ньютон вывел формулу бинома для более общего случая.

$$= \alpha(1 - \{\alpha\}) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 1.$$

Ответ: 1.

42. (Ирландия/2002) Пусть $\alpha = 2 + \sqrt{3}$. Докажите, что для любого натурального n выполняется $\alpha^n - \left[\alpha^n\right] = 1 - \alpha^{-n}$.

Доказательство. Согласно результатам задачи *40*

$$\alpha^n - \left[\alpha^n\right] = \left\{\alpha^n\right\} = 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Преобразуем правую часть исходного равенства

$$1 - \alpha^{-n} = 1 - \left(2+\sqrt{3}\right)^{-n} = 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

■

43. (NIMO/2014) Вычислите сумму десятичных цифр числа

$$\left[\frac{5152535455\ldots979899}{50}\right].$$

Решение. Введем обозначение $A = 5152535455\ldots979899$. Целую часть $\left[\dfrac{A}{50}\right]$ будет проще найти, если преобразовать к виду $\left[\dfrac{2A}{100}\right]$.

$$A = \sum_{n=1}^{49}(100-n)\cdot 100^{n-1} = 50\cdot\sum_{n=1}^{49}100^{n-1} + \sum_{n=1}^{49}(50-n)\cdot 100^{n-1},$$

$$2A = 100\cdot\sum_{n=1}^{49}100^{n-1} + \sum_{n=1}^{49}(100-2n)\cdot 100^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{50}100^{n-1} - 1 + \sum_{n=1}^{50}(100-2n)\cdot 100^{n-1} =$$

$$\sum_{n=1}^{50}(101-2n)\cdot 100^{n-1} - 1 = 10305070911\ldots959799 - 1.$$

Осталось вычислить сумму цифр числа $10305070911\ldots9597$. Небольшая хитрость — найдем сумму цифр нечетных чисел от 1 до 99 и вычтем 18.

Ответ: 457.

44. (ChMCSS/1993) [40, с. 44] Определите цифру, стоящую в младшем разряде числа $\left[\dfrac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$.

Решение. Обозначим число под знаком антье за N и $n = 10^{31}$.

$$[N] = \left[\frac{n^3}{n+3}\right] = \left[\frac{n^3+3^3}{n+3} - \frac{3^3}{n+3}\right] =$$

$$= \left[n^2 - 3n + 9 - \frac{3^3}{n+3}\right] = \Bigl[\underbrace{n^2 - 3n + 8}_{[N]} + \underbrace{1 - \frac{3^3}{n+3}}_{\{N\}}\Bigr].$$

Ответ: 8.

45. (Москва/1971) Докажите, что среди чисел $\left[2^n\sqrt{2}\right]$ бесконечно много составных.

Доказательство. Представим число $\sqrt{2}$ в двоичной системе счисления

$$\sqrt{2} = \left(\overline{1{,}b_1b_2\ldots b_i\ldots}\right)_2, \quad \text{где } b_i = 0 \text{ или } 1 \ (i \in \mathbb{N}). \qquad (45a)$$

Ввиду того, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число, в его двоичном представлении бесконечно много и 0, и 1.

Умножение на 2 дробного числа, представленного в двоичной системе счисления, есть перенос двоичной запятой на одну позицию вправо. Тогда согласно (45a)

$$\left[2^n\sqrt{2}\right] = \left(\overline{1b_1b_2\ldots b_n}\right)_2.$$

Следовательно, среди чисел $\left[2^n\sqrt{2}\right]$ бесконечно много четных. ■

46. Докажите, что среди чисел $\left[3^n\sqrt[3]{3}\right]$ бесконечно много составных.

Доказательство. Данная задача похожа на задачу 45. Однако имеется отличие: в троичной системе счисления — три цифры.

Представим число $\sqrt[3]{3}$ в троичной системе счисления

$$\sqrt[3]{3} = \left(\overline{1{,}t_1t_2\ldots t_i\ldots}\right)_3, \quad \text{где } t_i = 0,\ 1 \text{ или } 2 \ (i \in \mathbb{N}). \qquad (46a)$$

Очевидно, что поскольку $\sqrt[3]{3}$ — иррациональное число, в его троичном представлении бесконечно много хотя бы двух троичных цифр.

Умножение на 3 дробного числа, представленного в троичной системе счисления, есть перенос троичной запятой на одну позицию вправо.

Тогда согласно (46a)

$$\left[3^n\sqrt[3]{3}\right]=\left(\overline{1t_1t_2\ldots t_n}\right)_3.$$

Если среди t_i бесконечно много 0, то это означает, что среди чисел $\left[3^n\sqrt[3]{3}\right]$ бесконечно много кратных 3.

Если же среди t_i конечное количество 0, значит, среди t_i бесконечно много и 1, и 2, значит, среди сумм $t_1+t_2+\ldots+t_i$ бесконечно много и четных, и нечетных значений сумм (иначе конечное количество цифр 1). Следовательно, согласно п. А.16. среди чисел $\left[3^n\sqrt[3]{3}\right]$ бесконечно много четных.

■

47. (*LinkedIn/MO*) Решите уравнение в натуральных числах

$$\left[\sqrt{4n^2+1}\right]+\left[\sqrt{4n^2+2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{4n^2+9n+4}\right]=18n^2+2012.$$

Решение. Согласно п. Б.3.

$$\left[\sqrt{4n^2+1}\right]=\ldots=\left[\sqrt{4n^2+4n}\right]=2n,$$
$$\left[\sqrt{4n^2+4n+1}\right]=\ldots=\left[\sqrt{4n^2+8n+3}\right]=2n+1,$$
$$\left[\sqrt{4n^2+8n+4}\right]=\ldots=\left[\sqrt{4n^2+9n+4}\right]=2n+2.$$

Тогда

$$2n\cdot\left((4n^2+4n)-(4n^2+1)+1\right)+$$
$$+(2n+1)\cdot\left((4n^2+8n+3)-(4n^2+4n+1)+1\right)+$$
$$+(2n+2)\cdot\left((4n^2+9n+4)-(4n^2+8n+4)+1\right)=$$
$$=18n^2+2012.$$

Ответ: $n=144$.

48. Упростите выражение $\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$, где $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Заметим, что $n(n+1)(n+2)(n+3)=k(k+2)$, где $k=n^2+3n$ (см. п. В.7.).

Согласно п. Б.3. $k<\sqrt{k^2+2k}<k+1$, $\left[\sqrt{k^2+2k}\right]=k$.

Ответ: n^2+3n.

49. (В.Тебо) Упростите выражение
$\left[\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}\right]$, где $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Произведение, стоящее под корнем, сворачивается при замене $n^2+7n+6=k$ (см. п. B.7.):

$$\left[\sqrt[4]{k(k+4)(k^2-36)}\right], \quad \text{где } k \in \mathbb{N}_{\geqslant 14}.$$

Несложно доказать неравенство для $k \geqslant 7$

$$k < \sqrt[4]{k(k+4)(k^2-36)} < k+1.$$

Следовательно, $\left[\sqrt[4]{k(k+4)(k^2-36)}\right] = k$.

Ответ: n^2+7n+6.

50. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что если $p,\ q \neq 2$, то $\left[\dfrac{p^q+q^p}{pq}\right]$ — четное число.

Доказательство.

$$\left[\frac{p^q+q^p}{pq}\right] = \left[\frac{p^{q-1}}{q}+\frac{q^{p-1}}{p}\right] = \left[\frac{p^{q-1}-1}{q}+\frac{q^{p-1}-1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right].$$

Согласно малой теореме Ферма[9] (см. п. A.9.) каждая из дробей $\dfrac{p^{q-1}-1}{q}$ и $\dfrac{q^{p-1}-1}{p}$ — натуральное число. Сумма $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}<1$. Значит,

$$\left[\frac{p^q+q^p}{pq}\right] = \frac{p^{q-1}-1}{q}+\frac{q^{p-1}-1}{p}.$$

Поскольку $p,\ q \neq 2$, то $p,\ q$ — нечетные, тогда в числителях обеих дробей стоят четные числа, а в знаменателях — нечетные числа, то есть имеем сумму двух четных чисел. ■

[9] П. Ферма (P. Fermat, 1601-1665) — французский математик, один из создателей теории чисел, аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей.

51. (Ленинград/1980) Определите количество различных значений в конечной последовательности чисел

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right].$$

Решение. Обозначим $a_n = \dfrac{n^2}{1980}$. Тогда

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{1980} - \frac{n^2}{1980} = \frac{2n+1}{1980}.$$

Если $\dfrac{2n+1}{1980} < 1$, или $n \leqslant 989$, то среди первых 989 членов последовательности, задаваемых формулой $[a_n]$, встречаются с повторениями, но без пропусков, числа: $0,\ 1,\ \ldots,\ \left[\dfrac{989^2}{1980}\right]$, количество которых равно $\left[\dfrac{989^2}{1980}\right] + 1 = 495$.

Если $\dfrac{2n+1}{1980} > 1$, или $n \geqslant 990$, то все члены последовательности $[a_{990}], [a_{991}], \ldots, [a_{1980}]$ имеют различные значения. Количество таких различных чисел равно 991.

Несложно показать (без вычислений), что $[a_{989}] + 1 = [a_{990}]$.

Ответ: $495 + 991 = 1486$.

52. Выведите рекуррентную формулу вычисления очередного элемента ряда Фарея n-го порядка F_n по двум предыдущим элементам (подроности о рядах Фарея см. п. А.11.).

Решение. Пусть известны $\dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_2}{q_2}$ — соседние элементы ряда Фарея F_n. Обозначим через $\dfrac{x}{y}$ следующий элемент. Напомним, что элементы ряда Фарея[10] — правильные дроби. Поскольку средняя дробь является медиантой своих соседей, то имеем два равенства (k — некоторое натуральное число, которое требуется определить):

$$\begin{cases} kp_2 = p_1 + x, \\ kq_2 = q_1 + y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = kp_2 - p_1, \\ y = kq_2 - q_1. \end{cases}$$

[10] Дж. Фарей (J. Farey, 1766-1826) — английский геолог, писатель. Его вкладом в математику являются дроби, названные его именем.

Знаменатели дробей, входящих в ряд Фарея F_n, меньше или равны n, значит, $\boldsymbol{y \leqslant n}$. Сумма знаменателей соседних дробей ряда Фарея F_n всегда больше n, значит, $\boldsymbol{q_2 + y > n}$. Имеем двойное неравенство для y

$$n - q_2 < y \leqslant n, \quad \text{или} \quad n - q_2 < kq_2 - q_1 \leqslant n.$$

Выполним равносильные преобразования:

$$-n \leqslant q_1 - kq_2 < q_2 - n,$$

$$kq_2 \leqslant q_1 + n < q_2(k+1),$$

$$k \leqslant \frac{q_1 + n}{q_2} < k + 1. \tag{52a}$$

Неравенства (52a) определяют k как антье.

Ответ: $x = kp_2 - p_1$, $y = kq_2 - q_1$, где $k = \left[\dfrac{q_1 + n}{q_2}\right]$.

53. (На основе AMC/2016/10B) Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[k\{x\}\right]$. Определите количество различных значений, которые принимает функция $f(x)$.

Решение. Поскольку $f(x) = f(x+1)$, то функция $f(x)$ периодическая с периодом 1. Значит, достаточно определить количество различных значений, которые принимает функция $f(x)$ при $0 \leqslant x < 1$.

Развернем сумму

$$f(x) = [x] + [2x] + [3x] + \ldots + [nx], \quad x \in [0,\, 1), \ \text{или}$$

$$f(x) = [2x] + [3x] + \ldots + [nx].$$

На указанном полуинтервале функция $f(x)$ кусочно-постоянная, неубывающая, «прыгающая» в точках

$$x = \frac{a}{b}, \ \text{где } a,\, b \in \mathbb{Z}, \ 1 \leqslant a < b < n. \tag{53a}$$

Кстати, если $x_1 < x_2$ — соседние точки (53a), то размер «прыжка» $f(x_2) - f(x_1)$ больше или равен 1 и является целым значением.

Количество различных значений, которые принимает функция $f(x)$, на 1 больше количества «прыжков» функции $f(x)$.

Известно, что множество правильных дробей со знаменателями, не превосходящими k, образуют ряд Фарея k-го порядка (подробности см. п. А.11.) $F_k = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k}{k+1}, \frac{1}{1}\right\}$, количество элементов в котором (длина ряда F_k) равно $L_k = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера[11] (см. п. А.10.).

Заметим, что в ряде Фарея F_k последний элемент (дробь $1/1$) не должен участвовать в подсчете.

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера.

[11] Л. Эйлер (L. Euler, 1707-1783) — российский, швейцарский, немецкий математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие теории чисел, математического анализа, дифференциальной геометрии. Л. Эйлер является автором более чем 850 работ, в том числе, по приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению.

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

2. Основные свойства и утверждения

В разделе приводятся основные свойства, тождества, неравенства, равносильные утверждения и правила преобразований антье и мантиссы *действительного* числа. Использование антье и мантиссы в арифметике (теории чисел) и комбинаторике представлено в следующих разделах. Часть известных тождеств и неравенств опубликованы в виде задач.

Используются обозначения $x,\ y \in \mathbb{R}$ и $n,\ k \in \mathbb{Z}$, если не оговорено иное.

2.1. Простейшие свойства антье и мантиссы

$$0 \leqslant \{x\} < 1, \tag{2.1}$$

$$[x] \leqslant \ x \ < [x] + 1, \tag{2.2}$$

$$x - 1 < [x] \leqslant x, \tag{2.3}$$

$$[x + n] \ = \ [x] + n, \tag{2.4}$$

$$\{x + n\} = \{x\}\,. \tag{2.5}$$

Все достаточно очевидно. Обратим внимание на графическую интерпретацию двух последних свойств антье и мантиссы.

Свойство (2.5) — это свойство периодичности функции мантисса и совпадение графиков при сдвиге вправо или влево на n.

А какое толкование подходит к тождеству (2.4)? Если данное свойство представить в виде $f(x) = f(x + n) - n$, где $f(x) = [x]$, то это означает, что график антье совпадает со своим образом при параллельном переносе на вектор $(n,\ n)$.

2.2. Сумма антье и сумма мантисс противоположных чисел

Очевидно, что сумма антье противоположных целых чисел равна 0. Пусть $x \notin \mathbb{Z}$. Тогда свойство (2.3) для $[x]$ и $[-x]$ примет вид

$$\begin{aligned} x - 1 <& \quad [x] \ < \quad x, \\ -x - 1 <& \ [-x] \ < \ -x. \end{aligned}$$

Сложение неравенств дает $-2 < [x] + [-x] < 0$, или $[x] + [-x] = -1$.

Таким образом, получим правило сложения антье противоположных чисел

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{при } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Согласно определению антье

$$[x] + [-x] = x - \{x\} + \bigl(-x - \{-x\}\bigr) = -\bigl(\{x\} + \{-x\}\bigr),$$

$$\{x\} + \{-x\} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{при } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3. Неубывание антье

Переход от нестрогого неравенства чисел к нестрогому неравенству их целых частей является следствием

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad [x] \leqslant [y]\,. \tag{2.8}$$

Приведите контрпример, опровергающий обратное утверждение к (2.8).

2.4. Возрастание мантиссы на полуинтервале $\bigl[n,\ n+1\bigr)$

Если x и y удовлетворяют условиям $n \leqslant x,\ y < n+1$, то имеет место равносильный переход

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad \{x\} < \{y\}\,, \quad \text{если } x,\, y \in [\,n, n+1). \tag{2.9}$$

2.5. Равносильные неравенства с антье

Равносильные утверждения для антье часто используются при решении задач, фактически это типовой прием снятия знака целой части:

$$[x] = n \quad \Longleftrightarrow \quad n \leqslant x < n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 < n \leqslant x, \tag{2.10}$$

$$[x] > n \quad \Longleftrightarrow \quad [x] \geqslant n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant n+1, \tag{2.11}$$

$$[x] \leqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad [x] < n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < n+1. \tag{2.12}$$

Свойство (2.10) следует из определения антье.

Левая часть свойства (2.11) фактически является правилом сравнения целых чисел.

Обоснуем правое утверждение (2.11). Перепишем его в виде

$$[x] \geqslant n \iff x \geqslant n.$$

Прямое утверждение верно, так как $x = [x] + \{x\} \geqslant [x] \geqslant n$, обратное выполняется согласно (2.8).

Свойство (2.12) доказывается аналогично свойству (2.11).

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда свойства (2.11) и (2.12) могут быть расширены

$$[x] > \alpha \iff [x] > [\alpha] \iff [x] \geqslant [\alpha] + 1 \iff x \geqslant [\alpha] + 1. \quad (2.11')$$

$$[x] \leqslant \alpha \iff [x] \leqslant [\alpha] \iff [x] < [\alpha] + 1 \iff x < [\alpha] + 1. \quad (2.12')$$

2.6. Вынесение целочисленного множителя

Следующие неравенства демонстрируют поведение антье и мантиссы при умножении на целочисленный коэффициент

$$n\,[x] \leqslant [nx] \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad (2.13)$$

$$n\,[x] \geqslant [nx] \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}, \quad (2.13')$$

$$n\,\{x\} \geqslant \{nx\} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad (2.14)$$

$$n\,\{x\} \leqslant \{nx\} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}. \quad (2.14')$$

Обоснуем (2.13) и (2.13′)

$$[nx] - n\,[x] \overset{(2.4)}{=} \big[nx - n\,[x]\big] = \big[n\,[x] + n\,\{x\} - n\,[x]\big] = \big[n\,\{x\}\big],$$

то есть от знака n зависит знак сравнения исходного неравенства.

Оценим сверху выражение $\big[n\,\{x\}\big]$ при $n \in \mathbb{N}$. Так как $\{x\} < 1$, то $n\,\{x\} < n$ и, согласно (2.12), $\big[n\,\{x\}\big] \leqslant n - 1$. Таким образом,

$$[nx] - n\,[x] \leqslant n - 1. \quad (2.15)$$

Свойства (2.14) и (2.14′) легко выводятся из свойств (2.13) и (2.13′) соответственно.

Воспользовавшись левым неравенством (2.3), можно вывести такие цепочки неравенств:

$$n\,[x] \leqslant [nx] \leqslant nx \qquad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

$$[nx] \leqslant \; nx \; \leqslant n\,[x] \qquad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}.$$

2.7. Необходимое и достаточное условие $n[x] = [nx]$.

Выполним равносильные преобразования

$$n\,[x] = [nx] \quad \overset{(2.4)}{\Longleftrightarrow} \quad \big[nx - n\,[x]\big] = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \big[n\,\{x\}\big] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant n\,\{x\} < 1.$$

Таким образом, для любого действительного x

$$n\,[x] = [nx] \quad \Longleftrightarrow \quad \{x\} < \frac{1}{n} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Очевидно, что условие $n\,[x] = [nx]$ становится тождеством для любого натурального n, лишь когда x принимает целочисленные значения.

2.8. Снятие знака вложенной мантиссы

Для мантиссы имеет место тождество, не зависящее от знака целочисленного коэффициента,

$$\big\{n\,\{x\}\big\} = \{nx\} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Нагромождение фигурных скобок делает это тождество не совсем очевидным, но доказательство умещается в одну строку:

$$\big\{n\,\{x\}\big\} = \big\{n\big(x - [x]\big)\big\} = \big\{nx - n\,[x]\big\} \overset{(2.5)}{=} \{nx\}\,.$$

2.9. От неравенства антье к неравенству чисел

Равносильный переход от неравенства антье к неравенству чисел, между которыми найдется целое число, является вполне очевидным утверждением

$$[x] < [y] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}:\ x < k \leqslant y. \tag{2.18}$$

Для обоснования вполне достаточно взять $k = [y]$ и воспользоваться свойствами (2.11) и (2.12).

2.10. Снятие знака вложенного антье

Если $f(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция и выполняется условие $f(x_0) \in \mathbb{Z} \implies x_0 \in \mathbb{Z}$, то справедливо тождество

$$\big[f([x])\big] = \big[f(x)\big]. \tag{2.19}$$

Докажем правило снятия знака вложенного антье.

Если $x \in \mathbb{Z}$, то равенство (2.19) выпоняется.

Рассмотрим случай $[x] < x$. Тогда $f([x]) < f(x)$, так как $f(x)$ монотонно возрастает. В силу неубывания функции антье имеем $\big[f([x])\big] \leqslant \big[f(x)\big]$. Докажем от противного, что строгое неравенство никогда не выполняется.

Пусть при каком-то x_0 имеет место $\big[f([x_0])\big] < \big[f(x_0)\big]$. Согласно (2.18) существует целое k, для которого $f([x_0]) < k \leqslant f(x_0)$. Функция $f(x)$ обладает чудесным свойством, благодаря которому существует $\widehat{x} \in \mathbb{Z}$ такое, что $k = f(\widehat{x})$. И так как $f(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, то $[x_0] < \widehat{x} \leqslant x_0$. Полученное соотношение противоречит здравому смыслу и определению антье числа x_0.

Частные случаи снятия знака вложенного антье:

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}, \tag{2.20}$$

$$\left[\frac{[x]+m}{n}\right] = \left[\frac{x+m}{n}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N} \text{ и } m \in \mathbb{Z}, \tag{2.21}$$

$$\left[\sqrt[n]{[x]}\right] = \left[\sqrt[n]{x}\right], \tag{2.22}$$

$$\left[\sin\frac{\pi[x]}{2}\right] = \left[\sin\frac{\pi x}{2}\right] \quad \text{при } x \in [-1,\ 1], \tag{2.23}$$

$$\big[\log_a [x]\big] = \big[\log_a x\big] \quad \text{при } x \geqslant 1 \text{ и } a \in \mathbb{N}_{>1}. \tag{2.24}$$

2.11. От равенства $[x] = [y]$ к соотношению чисел

Данное утверждение вполне можно считать высказыванием отрицания к (2.18). Оба этих утверждения встречаются в доказательствах от противного, что в предыдущем пункте было продемонстрировано.

$$[x] = [y] \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = y, \\ x < y \ \text{ и } \ \nexists k \in \mathbb{Z}:\ x < k \leqslant y, \\ y < x \ \text{ и } \ \nexists k \in \mathbb{Z}:\ y < k \leqslant x. \end{array}\right. \tag{2.25}$$

2.12. От неравенства чисел к соотношению антье

Следующий неравносильный переход формализует утверждение: если расстояние между числами не больше 1, то антье этих чисел либо равны, либо отличаются на 1. Интересна интерпретация утверждения на графике антье — антье этих чисел располагаются либо на одной «ступеньке», либо на соседних:

$$|x-y| \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|[x]-[y]\big| \in \big\{0,\ 1\big\}. \tag{2.26}$$

Докажем (2.26) от противного. Пусть $\big|[x]-[y]\big| = k$, где $k \geqslant 2$, и для краткости обозначим $\alpha = \{x\} - \{y\}$, отметим, что $|\alpha| < 1$.

$|x-y| = \big|[x]-[y]+\alpha\big| \geqslant \big|[x]-[y]\big| - \big|\alpha\big| > k-1 > 1$ — противоречие.

Обобщение утверждения (2.26) доказывается сходным образом:

$$|x-y| \leqslant n \quad \Longrightarrow \quad \big|[x]-[y]\big| \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}. \tag{2.26$'$}$$

2.13. От равенства антье к модулю разности чисел

Почти обратное к (2.26) утверждение — переход от равенства целых частей к неравенству чисел

$$[x] = [y] \quad \Longrightarrow \quad |x-y| < 1, \tag{2.27}$$

обоснованием которого служит следующая цепочка:

$$|x-y| = \big|[x]+\{x\}-[y]-\{y\}\big| = \big|\{x\}-\{y\}\big| < 1.$$

Знакомая интерпретация свойства (2.27) на графике антье: если антье двух чисел разместились на одной ступеньке графика, то расстояние между числами будет меньше 1.

2.14. Эквивалентность равенств $\{x\} = \{y\}$ и $\{x-y\} = 0$

Докажем, что

$$\{x\} = \{y\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{x-y\} = 0. \tag{2.28}$$

Данное равносильное утверждение обосновывается следующей цепочкой преобразований:

$$\begin{aligned}
0 &= \{x\} - \{y\} = \\
&= x - [x] - \big(y - [y]\big) = x - y - \big([x]-[y]\big) = \\
&= [x-y] + \{x-y\} - \big([x]-[y]\big) = \\
&= \big[x - [x] - \big(y - [y]\big)\big] + \{x-y\} = \\
&= \big[\{x\} - \{y\}\big] + \{x-y\} = \{x-y\}\,.
\end{aligned}$$

2.15. Произведение антье и антье произведения

Докажем, что

$$[x]\cdot[y]\leqslant[xy]\quad \text{при } x,\ y\geqslant 0. \tag{2.29}$$

Воспользуемся разложением каждого из сомножителей xy на сумму антье и мантиссы

$$[xy]=\big[[x]\cdot[y]+[x]\cdot\{y\}+\{x\}\cdot[y]+\{x\}\cdot\{y\}\big]=[x]\cdot[y]+[\ldots]\geqslant[x]\cdot[y],$$

так как антье $[\ldots]$ содержит неотрицательные слагаемые.

2.16. Сумма антье и антье суммы

Докажем, что

$$[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1, \tag{2.30}$$

$$0\leqslant[x+y]-[x]-[y]\leqslant 1,$$

$$0\leqslant\big[x-[x]+y-[y]\big]\leqslant 1,$$

$$0\leqslant\big[\{x\}+\{y\}\big]\leqslant 1.$$

Поскольку $0\leqslant\{x\}+\{y\}\leqslant 1$, неравенство (2.30) доказано.

Неравенство (2.30) легко обобщается до n слагаемых (доказывается аналогичным способом)

$$\sum[x_i]\leqslant\Big[\sum x_i\Big]\leqslant\sum[x_i]+n-1\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.31}$$

2.17. Сумма мантисс и мантисса суммы

Неравенства суммы мантисс и мантиссы суммы отличаются лишь знаками сравнений от соответствующих неравенств антье, рассмотренных в предыдущем пункте.

$$\{x+y\}\leqslant\{x\}+\{y\}\leqslant\{x+y\}+1, \tag{2.32}$$

$$\Big\{\sum x_i\Big\}\leqslant\sum\{x_i\}\leqslant\Big\{\sum x_i\Big\}+n-1\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.33}$$

2.18. Разность антье и антье разности

Докажем, что

$$[x-y] \leqslant [x]-[y] \leqslant [x-y]+1, \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} \big[x-y+[y]\big] \leqslant &\quad [x] \quad \leqslant \big[x-y+[y]\big]+1, \\ \big[x-\{y\}\big] \leqslant &\quad [x] \quad \leqslant \big[x+1-\{y\}\big]. \end{aligned}$$

Поскольку $x-\{y\} \leqslant x \leqslant x+1-\{y\}$, и антье — неубывающая функция, то неравенство (2.34) доказано.

2.19. Утверждения $f(x) \vee 0$, где $f(x) = f(x+1)$

Если для функции $f(x)$ выполняется условие $f(x) = f(x+1)$ при $\forall x \in D\big(f(x)\big)$, то функция $f(x)$ является периодической с периодом 1.

Периодичность $f(x)$ позволяет провести доказательство утверждения $f(x) \vee 0$ лишь на полуинтервале, длина которого есть период функции $f(x)$, в данном случае на $\big[0,\, 1\big)$.

В общем-то, довольно очевидные рассуждения, основанные на периодичности $f(x)$, пригодятся не только при доказательстве утверждений вида $f(x) \vee 0$, но и могут существенно упростить решений уравнений и неравенств того же вида (с тем же условием). К решению, найденному на полуинтервале $\big[0,\, 1\big)$, потребуется лишь «добавить» периодичности в форме слагаемого — целочисленного параметра.

2.20. Тождество Эрмита

Докажем тождество Эрмита[12]

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Функция

$$f(x) = [nx] - [x] - \left[x + \frac{1}{n}\right] - \ldots - \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

периодическая с периодом 1, так как для любого x выполняется $f(x) = f(x+1)$. На этом основании докажем тождество (2.35) лишь при $0 \leqslant x < 1$.

[12] Ш. Эрмит (Ch. Hermite, 1822-1901) — французский математик, известен результатами в теории чисел, алгебре и других разделах математики.

Разобьем полуинтервал $[0,\ 1)$ на n равных промежутков:

$$\left[0,\ \frac{1}{n}\right),\quad \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right),\quad \ldots,\quad \left[\frac{n-1}{n},\ 1\right).$$

Пусть $x \in \left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right)$, где $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Тогда в левой части формулы $[nx] = i$. Первым ненулевым слагаемым в правой части будет $\left[x + \frac{n-i}{n}\right]$, последним — $\left[x + \frac{n-1}{n}\right]$, всего i слагаемых, равных 1.

Тождество (2.35) выполняется на любом полуинтервале $\left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right)$. Значит, формула для разложения $[nx]$ справедлива как на полуинтервале $[0,\ 1)$, так и при любом действительном x.

■

Ст*о*ит запомнить два частных случая. При $n = 2$ и $n = 3$ тождество (2.35) принимает вид соответственно

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right], \tag{2.36}$$

$$[3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]. \tag{2.37}$$

Еще один интересный случай. Пусть m — целое число, тогда при замене $x = \frac{m}{n}$ тождество (2.35) станет формулой разложения целого m

$$m = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right]. \tag{2.38}$$

2.21. Сумма антье + антье суммы

Докажем неравенство

$$[x] + [y] + [x+y] \leqslant [2x] + [2y]. \tag{2.39}$$

Функция $f(x, y) = [2x] + [2y] - [x] - [y] - [x+y]$ периодическая с периодом 1 и по x, и по y. Значит, задание сводится к доказательству неравенства

$$[x+y] \leqslant [2x] + [2y] \quad \text{при } 0 \leqslant x, y < 1. \tag{2.39$'$}$$

Выражение $[x+y]$ равно либо 0, либо 1 при условиях в (2.39′). Первый случай очевиден. Во втором случае выполняется $1 \leqslant x+y < 2$,

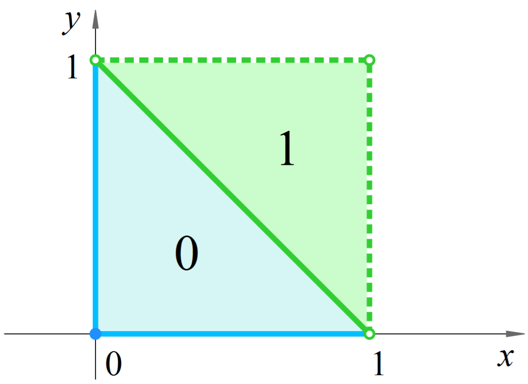


Рис. 3. Области значений $[x+y]$ при $0 \leqslant x, y < 1$

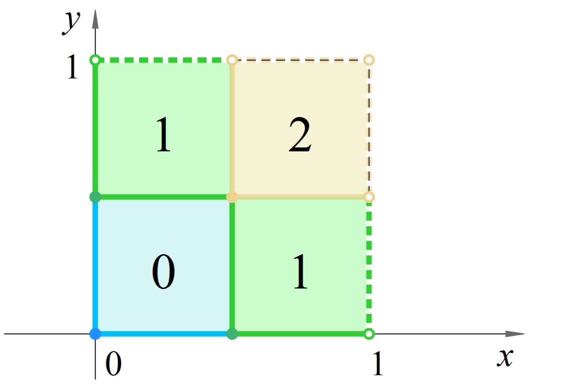


Рис. 4. Области значений $[2x]+[2y]$ при $0 \leqslant x, y < 1$

то есть хотя бы одно из слагаемых будет больше или равно $\frac{1}{2}$. Значит, $[2x] = 1$ и/или $[2y] = 1$. Утверждение (2.39′) доказано, тем самым доказано и неравенство (2.39), причем для любых действительных x и y.

Области постоянных значений выражений $\big[x+y\big]$ и $\big[2x\big]+\big[2y\big]$ при $0 \leqslant x, y < 1$ могут быть изображены на координатной плоскости xOy (см. рис. 3 и 4). Надеемся, что обозначения и использование цветовой схемы не требуют дополнительных пояснений. Отметим только, что если у некоторой области имеется западная, южная и/или юго-западная граница, то значение выражения на этой границе совпадает со значением выражения внутри указанной области (для обозначения граничного значения используется более темный оттенок цвета, который назначен области).

Сравнение значений соответствующих областей на рис. 3 и 4 графически обосновывает неравенство (2.39′). Идея графической интерпретации неравенства взята в [8, с. 609].

Неравенство (2.39) имеет несколько обобщенных формулировок. Первая формула интуитивно понятна

$$[x] + [y] + (n-1)\,[x+y] \leqslant [nx] + [ny] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}. \tag{2.40}$$

При использовании того же приема с периодичностью обоснование утверждения (2.40) сводится к доказательству

$$(n-1)\,[x+y] \leqslant [nx] + [ny] \quad \text{при } 0 \leqslant x, y < 1. \tag{2.40′}$$

Ясно, что при $[x+y] = 0$ неравенство (2.40′) выполняется.

Если $[x+y] = 1$, то левая часть неравенства равна $n-1$, а также $1 \leqslant x+y < 2$. Покажем, что правая часть неравенства (2.40′) больше

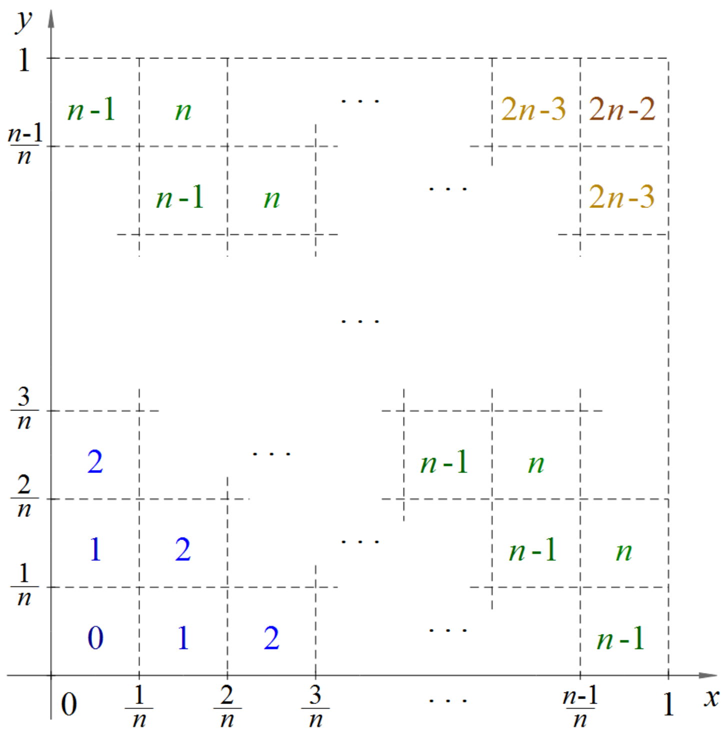


Рис. 5. Области значений $[nx] + [ny]$ при $0 \leqslant x, y < 1$

или равна $n - 1$. Пусть

$$\frac{i}{n} \leqslant x < \frac{i+1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{j}{n} \leqslant y < \frac{j+1}{n}, \quad \text{где} \quad i,\, j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1,$$

тогда известны значения слагаемых правой части неравенства $(2.40')$: $[nx] = i$ и $[ny] = j$. Кроме того,

$$1 \leqslant x + y < \frac{i+1}{n} + \frac{j+1}{n} = \frac{i+j+2}{n},$$

то есть $i + j > n - 2$, или $[nx] + [ny] \geqslant n - 1$.

Неравенство (2.40) доказано.

Области постоянных значений выражения $[nx]+[ny]$ при $0 \leqslant x, y < 1$ изображены на рис. 5. Графическая иллюстрация таких областей для выражения $(n-1)\,[x+y]$ повторяет рис. 3 с одним отличием: вместо значения 1 следует указать $n - 1$. Таким образом наглядно демонстрируется графическое обоснование неравенства $(2.40')$.

Другой обобщенной формулировкой (2.39) является неравенство, которое выполняется для всех действительных x и y при $n,\, k \in \mathbb{N}$ и дополнительном условии $k \leqslant n$:

$$n\big[x\big] + n\big[y\big] + \big[kx + ky\big] \leqslant \big[(n+k)x\big] + \big[(n+k)y\big]. \tag{2.41}$$

Воспользуемся периодичностью неравенства и по x и по y с периодом, равным 1. Тогда неравенство примет вид

$$\left[kx+ky\right] \leqslant \left[(n+k)x\right] + \left[(n+k)y\right] \quad \text{при } 0 \leqslant x,\, y < 1. \tag{2.41$'$}$$

Поскольку $k \leqslant n$, $\left[2kx\right] \leqslant \left[(n+k)x\right]$ при $x \geqslant 0$ (имеет место аналогичное неравенство для y), то

$$\underbrace{\left[kx+ky\right] \leqslant \left[2kx\right] + \left[2ky\right]}_{\text{см. } (2.39')} \leqslant \left[(n+k)x\right] + \left[(n+k)y\right].$$

Наиболее интересное обобщение неравенства (2.39) утверждает, что следующее неравенство

$$\left[nx\right] + \left[ny\right] + \left[kx+ky\right] \leqslant \left[(n+k)x\right] + \left[(n+k)y\right] \tag{2.42}$$

выполняется для всех действительных x и y тогда и только тогда, когда $k = n$, где k, $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что при $k = n$ неравенство (2.42) сводится с помощью двух замен к неравенству (2.39).

Доказательство существования контрпримера для случая $k \neq n$ вынесено в задачу *166*.

2.22. Цепные (непрерывные) дроби

Данный пункт включен в книгу, чтобы показать, как понятия антье и мантиссы используются для вычисления числовой последовательности, которая является цепной дробью.

Цепная дробь (или *непрерывная дробь*) — это выражение вида

$$[a_0;\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$.

Примеры: $\dfrac{5}{3} = \left[1;\, 1,\, 2\right] = \left[1;\, 1,\, 1,\, 1\right]$; $\dfrac{73}{37} = \left[1;\, 1,\, 36\right] = \left[1;\, 1,\, 35,\, 1\right]$; золотое сечение — $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \left[1;\, 1,\, 1,\, \ldots\right]$.

Несколько фактов о цепных дробях.

Любое действительное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной).

Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рациональное, причем, имеется два способа представления.

(*Теорема Лагранжа*) Число представляется в виде бесконечной периодической цепной дроби тогда и только тогда, когда оно является иррациональным решением квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Алгоритм вычисления цепной дроби

Вычисление элементов числовой последовательности, которые являются цепной дробью $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, состоит из четырех формул:

$$a_0 = [x]\,,\ a_i = \left[\frac{1}{x_{i-1}}\right], \quad \text{где } x_0 = \{x\}\,,\ x_i = \left\{\frac{1}{x_{i-1}}\right\} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

К сожалению, тема цепных дробей не входит в типовую школьную программу математики. Поэтому рекомендуем обратиться для изучения этой интересной темы к дополнительной литературе, например, см. [5].

2.23. Округление числа до ближайшего целого

В обыденной жизни мы сталкиваемся с ситуациями, когда требуется округлить числовые значения до ближайшего целого, например, на ценнике в магазине ставят более «низкую» цену для привлечения внимания покупателя к товару $99{,}90 \approx 100$, или для о-о-очень приблизительных расчетов $\pi \approx 3$. Если после запятой стоит «половинка» (дробная часть числа равна $0{,}5$), то преимущественно применяется правило округления $0{,}5$ до ближайшего большего целого, к примеру, $1{,}5 \approx 2$.

Оказывается, что с помощью антье можно выразить описанный вариант округления действительного числа x до ближайшего целого n формулой

$$n = \left[x + \frac{1}{2}\right],$$

поскольку

$$n \leqslant x + \frac{1}{2} < n + 1,$$

$$n - \frac{1}{2} \leqslant x < n + \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant x - n < \frac{1}{2}.$$

Однако известны и другие варианты округления «половинки», одним из которых является округление действительного числа x до ближайшего целого n, при котором мантисса, равная 0,5, считается нулем (см. задачу *90*)

$$n = -\left[\frac{1}{2} - x\right].$$

3. Задачи для разминки и погружения в тему

В пп. 3.1. и 3.2. представлены задачи, для решения которых вполне достаточно уяснить суть антье и мантиссы, а также уметь применять простейшие свойства.

В качестве разминки в пп. 3.3.-3.8. предлагаются задачи на использование различных свойств антье и мантиссы.

Для погружения в тему подойдут задачи и посложнее, включая задания начального олимпиадного уровня. В пп. 3.9. и 3.11. приведены задачи, в которых демонстрируются разнообразные приемы работы с антье и мантиссой, используемые для упрощения решения.

В конце раздела размещены указания, решения и ответы к представленным задачам.

3.1. Базовый уровень сложности

54. Решите уравнение $[x] = 0$.

55. Решите уравнение $x = \{x\}$.

56. Решите уравнение $\{x\} = 0$.

57. Решите уравнение $x = [x]$.

58. Решите уравнение $[x] = \{x\}$.

59. Решите неравенство $[x] < \dfrac{3}{2}$.

60. Докажите равносильность неравенств $[x] \leqslant \pi$ и $[x] \leqslant 3$.

61. Решите уравнение $\{x\} = \dfrac{2}{5}$.

62. Докажите равносильность уравнений $\{x\} = \dfrac{1}{2}$ и $\left\{x + \dfrac{1}{2}\right\} = 0$.

63. Решите неравенство $\{x\} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

64. Решите уравнение $\left[-\dfrac{2x}{3}\right] = -1$.

65. Решите уравнение $\left[\dfrac{3}{x}\right] = 4$.

66. Решите неравенство $[-x] > -\dfrac{10}{3}$.

67. Решите уравнение $\{-2x\} = \dfrac{1}{3}$.

68. Докажите равносильность уравнений при $0 \leqslant \alpha < 1$: $\{x\} = \alpha$, $\{x - \alpha\} = 0$ и $\{\alpha - x\} = 0$.

69. Решите уравнение $2[x] + \{x\} = 4{,}25$.

70. Решите уравнение $2[x] + \{x\} = -3{,}7$.

71. Решите уравнение $2[x] + \{x\} = 3{,}9$.

72. Решите уравнение $[x] + 2\{x\} = 1{,}3$.

73. Решите неравенство $[x] + 2\{x\} < 1{,}3$.

74. Решите уравнение $4[x] + 3\{x\} = 2x - \dfrac{5}{3}$.

75. Докажите неравенство $\left[\dfrac{2013}{2014} - x^2\right] < \left[x^2 + \dfrac{2015}{2014}\right]$.

3.2. Уравнения и неравенства вида $[x] \vee a$ и $\{x\} \vee a$

Простейшие уравнения и неравенства представлены в общем виде с параметром в правой части. Их решение демонстрирует необходимость анализа и определения области значений функций антье и мантиссы, что типично для многих задач на антье и мантиссу.

76. Решите уравнение $[x] = a$.

77. Решите уравнение $\{x\} = a$.

78. Решите неравенство $[x] \leqslant a$.

79. Решите неравенство $[x] < a$.

80. Решите неравенство $[x] \geqslant a$.

81. Решите неравенство $[x] > a$.

82. Решите неравенство $\{x\} < a$.

83. Решите неравенство $\{x\} \geqslant a$.

3.3. Задачи на свойства $[x] + [-x]$ и $\{x\} + \{-x\}$

84. Решите уравнение $\left[n \lg 2\right] + \left[n \lg 5\right] = 2010$ относительно натурального числа n.

85. Вычислите сумму

$$S = \left[2015 \sin \frac{\pi}{2014}\right] + \left[2015 \sin \frac{2\pi}{2014}\right] + \ldots + \left[2015 \sin \frac{4028\pi}{2014}\right].$$

86. Вычислите сумму

$$S = \left\{2015 \cos 1^\circ\right\} + \left\{2015 \cos 2^\circ\right\} + \ldots + \left\{2015 \cos 360^\circ\right\}.$$

87. Пусть x и y — действительные нецелые числа и $x + y$ — целое число. Докажите тождество $x + y = [x] + [y] + 1$.

88. Опишите, какая последовательность чисел задается формулой $a_n = \left[1 - \left\{\sqrt[k]{n}\right\}\right]$, где n, $k \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 2$.

89. Определите область значений выражения $\left[\dfrac{x-p}{p}\right] + \left[\dfrac{-x-1}{p}\right]$, где $x \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$.

90. Выведите формулу округления действительного числа до ближайшего целого с вариантом округления числа с 0,5 в дробной части до **меньшего** целого.

91. Выведите формулу функции знак действительного числа

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

92. Докажите тождество для взаимно простых чисел p и q

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[2 \cdot \frac{q}{p}\right] + \ldots + \left[(p-1) \cdot \frac{q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

3.4. Задачи на равносильные неравенства с антье

93. Для целых n и m выполняется условие $m < \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Докажите равносильность этого условия и неравенства $m + \frac{1}{2} < \sqrt{n}$.

94. Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

3.5. Задачи на равносильность $\{x\} = \{y\}$ и $\{x - y\} = 0$

95. Равны ли числа $\left\{\sqrt{22\ldots2}\right\}$ и $\left\{\sqrt{33\ldots3}\right\}$? Числа $22\ldots2$ и $33\ldots3$ состоят из ста одинаковых цифр.

96. Пусть α — иррациональное число и a — рациональное число. Могут ли равняться $\{\lg \alpha\}$ и $\{\lg a\}$?

97. Определите количество решений уравнения $x = \{32x\}$.

3.6. Задачи на свойство $\{n\{x\}\} = \{nx\}$

98. Решите уравнение $\left\{4\left\{\dfrac{x}{2}\right\}\right\} = 2x + 1$.

99. Решите уравнение $3\left\{2\left\{\dfrac{x}{3}\right\}\right\} = 2x - 6$.

100. Числовые последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ заданы условиями

$$x_0 \in [0,\ 1), \quad x_n = \begin{cases} 2x_{n-1} & \text{при } 2x_{n-1} < 1, \\ 2x_{n-1} - 1 & \text{при } 2x_{n-1} \geqslant 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Определите количество таких последовательностей, для которых выполняется равенство $x_0 = x_5$.

3.7. Задачи на периодичность функции

101. Решите уравнение $[2x] = 2[x]$.

102. Решите уравнение $x + \left[\dfrac{x}{6}\right] = \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{2x}{3}\right]$.

103. Докажите, что при любом действительном x справедливо неравенство $[3x] + 2[2x] \leqslant [6x] + [x]$.

104. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right].$$

105. Докажите, что при любом целом n выполняется равенство

$$\left[\frac{3n+8}{25}\right] = \left[\frac{n+2}{25}\right] + \left[\frac{n+11}{25}\right] + \left[\frac{n+19}{25}\right].$$

106. Докажите, что при любом целом n выполняется равенство

$$\left[\frac{8n+5}{25}\right] = \left[\frac{n - \left[\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right].$$

107. Решите уравнение в натуральных числах

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11\left[\frac{n}{36}\right].$$

3.8. Задачи на тождество Эрмита

108. Решите уравнение $x = \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x+1}{2}\right]$.

109. Решите уравнение $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] + \left[\dfrac{4x+1}{6}\right] = 101$.

110. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right].$$

111. Докажите, что $[x] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[\dfrac{x}{2^k} + \dfrac{1}{2}\right]$.

112. Для любого действительного x и любого натурального n вычислите сумму $S_n(x) = \sum\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \left[\dfrac{x+i}{j}\right]$.

3.9. Уровень сложности Базовый+

Ниже приводятся задачи, решаемые с использованием различных свойств антье и мантиссы. Среди примеров включены задачи, при решении которых важны вступительные рассуждения, упрощающие решение задачи. Рассуждения такого сорта являются характерной чертой многих заданий на антье и мантиссу.

113. Решите уравнение $2x = \{x\}$.

114. Решите уравнение $[2x] = 2[x]$.

115. Решите уравнение $2[x] = 3x$.

116. Решите уравнение $\{2x\} = x$.

117. Докажите тождество

$$\left[\frac{m-n}{m}\right] + \left[\frac{n-1}{m}\right] = 0, \quad \text{где } m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}.$$

118. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3{,}9, \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}5, \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

119. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1{,}1, \\ y + [z] + \{x\} = 2{,}2, \\ z + [x] + \{y\} = 3{,}3. \end{cases}$$

120. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = -1{,}8, \\ \{x\} + y + [z] = 1{,}7, \\ [x] + \{y\} + z = -0{,}7. \end{cases}$$

121. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x] - \{x + y\} = 20{,}09, \\ [x + y] - \{y\} = 20{,}11. \end{cases}$$

122. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x + y] - \{y + z\} = 2{,}3, \\ [y + z] - \{z + x\} = 2{,}6, \\ [z + x] - \{x + y\} = 3{,}1. \end{cases}$$

123. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x] + [y] + y = 43{,}8, \\ x + y - [x] = 18{,}4. \end{cases}$$

124. Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x - 1$.

125. Решите уравнение $\left[x+\dfrac{1}{3}\right]+\left[x+\dfrac{2}{5}\right]=3.$

126. Решите уравнение $\left[\dfrac{2x-1}{2}\right]+\left[\dfrac{1}{4}+x\right]=4.$

127. Решите уравнение $\left[\dfrac{11}{x}\right]+\left[\dfrac{12}{x}\right]=13.$

3.10. Вывод обратной функции

Обратной к функции $f(x)$ (пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) называется такая функция, обозначаемая $f^{-1}(x)$, для которой выполняются равенства $f^{-1}\big(f(x)\big)=f\big(f^{-1}(x)\big)=x$ для $\forall x\in\mathbb{R}$.

Обратимость функции $f(x)$ может использоваться, например, для доказательства того, что функция $f(x)$ задает взаимно-однозначное отображение, поскольку обратимость функции $f(x)$ является необходимым и достаточным условием наличия свойства взаимной однозначности функции $f(x)$.

Определите обратную функцию к функции:

128. $f(x)=\{x\}-[x].$

129. $f(x)=x-4\,[x]+[2x].$

130. $f(x)=x-3\,[2x]+2\,[3x].$

3.11. Профильный уровень сложности

Сложность следующих задач несколько выше предыдущих. Применение свойств антье и мантиссы не столь очевидны, как в продемонстрированных ранее заданиях. Особенность предлагаемых задач состоит в том, что надо еще догадаться, как использовать знакомые свойства антье и мантиссы.

131. Решите уравнение

$$2017^{[2x]}+2017^{x}=2018\cdot 2017^{[x]}.$$

132. Докажите, что для любых натуральных значений $n > 2$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n+1}{4}\right] = \left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right].$$

133. Докажите, что для всех натуральных $n, m \in \mathbb{N}$ таких, что $0 \leqslant m < n$, выполняется тождество

$$\left[\log_2 \frac{2n+1}{2m+1}\right] = \left[\log_2 \frac{2n}{2m+1}\right].$$

134. Упростите $\left[\dfrac{n\,[m\alpha]}{\alpha}\right]$, где $m, n \in \mathbb{N}$, α — иррациональное число, большее n.

135. Задана функция натурального числа

$$f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right] + \ldots$$

Докажите, что $f(n) = n - f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$.

136. Пусть a — действительное число, для которого выполняется равенство $\left[a + \dfrac{19}{100}\right] + \left[a + \dfrac{20}{100}\right] + \ldots + \left[a + \dfrac{91}{100}\right] = 546$. Найдите $[100a]$.

137. Найдите $\left[\dfrac{10^{2017}}{S_{2014}}\right]$, где $S_n = 1 + 11 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

138. Решите уравнение $[x] + [2x] + \ldots + [2014x] = 1$.

139. Решите уравнение $\left[\dfrac{x}{6}\right] + \left[\dfrac{x}{3}\right] + \left[\dfrac{x}{2}\right] = x$.

140. Решите уравнение $\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x}{4}\right] + \left[\dfrac{x}{8}\right] = \dfrac{7x}{8}$.

141. Решите уравнение

$$\left|x^2 - 5x + 5\right| + \frac{1}{\left|x^2 - 5x + 5\right|} + \left\{\frac{x+3}{2x}\right\} = 2.$$

142. Решите уравнение
$$\left[x+\frac{2}{\pi}\right]=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{x-x^2}\right).$$

143. Решите уравнение
$$\left|(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2003)\right|+\left\{\frac{x^2+2004}{x^2}\right\}=0.$$

144. Решите уравнение
$$\left\{\frac{2003+x}{1+[x]}\right\}=x-x^2+x^3.$$

145. Решите уравнение для $x\notin\mathbb{Z}$
$$x+\frac{2}{2x-1}=[x]+\frac{2}{2[x]-1}$$

146. Решите неравенство $x^2\leqslant[2x]\cdot\{2x\}$.

147. Решите уравнение $[x]\cdot\{x\}=1991x$.

148. Найдите все целые значения n, удовлетворяющие равенству
$$\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n(n-1)}{3}\right]=n.$$

149. Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие равенству
$$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right].$$

150. Решите уравнение $\dfrac{8}{\{x\}}=\dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{[x]}$.

151. Найдите такие $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, что $\left[\sqrt[n]{53}\right]$ делит без остатка 35.

152. Найдите такие $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, что $\left[\sqrt[n]{111}\right]$ делит без остатка 111.

153. Найдите все непустые множества $M\subset\mathbb{N}$ такие, что если $n\in M$, $n\geqslant 2$, то оба числа n^2+4 и $[\sqrt{n}+1]$ также принадлежат M.

154. Найдите такие $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 4}$, для которых $n-1$ делится нацело на $[\sqrt{n}]+1$, а $n+1$ делится нацело на $[\sqrt{n}]-1$.

155. Решите систему уравнений для положительных x, y, z

$$\begin{cases} [x]\,y\,z = 3, \\ x\,[y]\,z = 4, \\ x\,y\,[z] = 5. \end{cases}$$

156. Докажите, что разность $\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right]-2^{p+1}$ делится на p, если p — простое число и $p>2$.

157. Докажите, что число $\left[\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}\right]+1$ делится на 2^{n+1} при любом натуральном n.

158. Докажите, что $\left[(1+\sqrt{2})^n\right] \equiv n+1 \pmod 2$.

159. Докажите, что $n+\left[(1+\sqrt{2})^n\right]$ — нечетное число при $n \in \mathbb{N}$.

160. Докажите, что при любых натуральных m и n число

$$\left[\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n\right]$$

является нечетным.

161. Найдите все натуральные n, для которых число $\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$ является простым.

162. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $\left[\dfrac{n^2}{5}\right]$ является простым.

163. Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$. Определите количество действительных решений $(x,\,y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} [x]+2y = a, \\ [y]+2x = b. \end{cases}$$

164. Докажите неравенство

$$\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\} < \frac{1}{4}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

165. Докажите неравенство

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

166. Докажите, что неравенство

$$\left[nx\right] + \left[ny\right] + \left[kx + ky\right] \leqslant \left[(n+k)x\right] + \left[(n+k)y\right]$$

выполняется для любых действительных x и y тогда и только тогда, когда $k = n$ (k, $n \in \mathbb{N}$).

3.12. Указания, решения, ответы

54. Решите уравнение $[x] = 0$.

Указание. См. свойство антье (2.10).

Ответ: $\big[0,\ 1\big)$.

55. Решите уравнение $x = \{x\}$.

Указание. Согласно (1.1) уравнение сводится к $[x] = 0$.

Ответ: $\big[0,\ 1\big)$.

56. Решите уравнение $\{x\} = 0$.

Указание. Дробная часть равна 0 только у целых чисел.

Ответ: $\mathbb{Z}$.

57. Решите уравнение $x = [x]$.

Указание. Согласно (1.1) уравнение сводится к $\{x\} = 0$.

Ответ: $\mathbb{Z}$.

58. Решите уравнение $[x] = \{x\}$.

Указание. Мантисса равна целому числу, только когда выражение, стоящее под знаком мантиссы, равно 0.

Ответ: 0.

59. Решите неравенство $[x] < \dfrac{3}{2}$.

Указание. Перейдите к равносильному неравенству $[x] < 2$.

Ответ: $\big(-\infty,\ 2\big)$.

60. Докажите равносильность неравенств $[x] \leqslant \pi$ и $[x] \leqslant 3$.

Указание. Решения обоих неравенств идентичны и равны $\big(-\infty,\ 4\big)$.

61. Решите уравнение $\{x\} = \dfrac{2}{5}$.

Ответ: $n + \dfrac{2}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

62. Докажите равносильность уравнений $\{x\} = \dfrac{1}{2}$ и $\left\{x + \dfrac{1}{2}\right\} = 0$.

Указание. Решения обоих уравнений равны $n + \dfrac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

63. Решите неравенство $\{x\} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

Указание. Решите сначала неравенство при условии $x \in [0, 1)$, затем учтите периодичность.

Ответ: $n + \dfrac{1}{3} \leqslant x < n + 1$, где $n \in \mathbb{Z}$.

64. Решите уравнение $\left[-\dfrac{2x}{3}\right] = -1$.

Решение. Избавимся от знака антье $-1 \leqslant -\dfrac{2x}{3} < 0$, или $0 < x \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right]$.

65. Решите уравнение $\left[\dfrac{3}{x}\right] = 4$.

Решение. Перейдем к равносильному неравенству $4 \leqslant \dfrac{3}{x} < 5$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{4}\right]$.

66. Решите неравенство $[-x] > -\dfrac{10}{3}$.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству $-x \geqslant -3$. Число -3 — ближайшее целое, расположенное на числовой прямой правее $\left(-\dfrac{10}{3}\right)$.

Ответ: $(-\infty,\ 3]$.

67. Решите уравнение $\{-2x\} = \dfrac{1}{3}$.

Решение. $-2x = \dfrac{1}{3} + n$, где $n \in \mathbb{Z}$. При делении на -2 знак «+», стоящий перед n, можно не менять на «−», поскольку n пробегает все целые значения: $x = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{n}{2}$, или $x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

68. Докажите равносильность уравнений при $0 \leqslant \alpha < 1$: $\{x\} = \alpha$, $\{x - \alpha\} = 0$ и $\{\alpha - x\} = 0$.

Доказательство. Решая каждое из уравнений, получаем один и тот же ответ $x = \alpha + n$, где $n \in \mathbb{Z}$. ■

69. Решите уравнение $2[x] + \{x\} = 4{,}25$.

Решение. В правой части уравнения стоит сумма целого числа и мантиссы. Эта сумма возможна, только если $2[x] = 4$ и $\{x\} = 0{,}25$.

Ответ: $2{,}25$.

70. Решите уравнение $2[x] + \{x\} = -3{,}7$.

Решение. Перепишем уравнение для удобства (мантисса всегда неотрицательная) в следующем виде

$$2[x] + \{x\} = -4 + 0{,}3.$$

Откуда $2[x] = -4$, $[x] = -2$, $\{x\} = 0{,}3$.

Ответ: $-1{,}7$.

71. Решите уравнение $2[x] + \{x\} = 3{,}9$.

Решение. Чтобы уравнение выполнялось, должно иметь место равенство $2[x] = 3$, или $[x] = \dfrac{2}{3}$, что никогда не выполнимо.

Ответ: $\varnothing$.

72. Решите уравнение $[x]+2\{x\}=1{,}3$.

Решение. Так как $0\leqslant 2\{x\}<2$, то либо $[x]=0$, либо $[x]=1$. Исходное уравнение сводится к совокупности двух систем

$$\begin{cases}[x]=0,\\ 2\{x\}=1{,}3\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}[x]=1,\\ 2\{x\}=0{,}3.\end{cases}$$

Ответ: $0{,}65,\ 1{,}15$.

73. Решите неравенство $[x]+2\{x\}<1{,}3$.

Решение. При $[x]\geqslant 2$ исходное неравенство решений не имеет. При $[x]<0$ подходит любое значение x, т.е. в ответ сразу пишем $(-\infty,\ 0)$.

Рассмотрим вариант $[x]=1$.

$$\begin{cases}[x]=1,\\ 2\{x\}<0{,}3\end{cases}\iff\begin{cases}[x]=1,\\ \{x\}<0{,}15\end{cases}\iff\begin{cases}1\leqslant x<2,\\ n\leqslant x<0{,}15+n,\ \text{где } n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Таким образом, при $[x]=1$ решением исходного неравенства является полуинтервал $[1,\ 1{,}15)$.

Аналогично рассматривается вариант $[x]=0$ с решением $[0,\ 0{,}65)$.

Ответ: $(-\infty,\ 0{,}65)\cup[1,\ 1{,}15)$.

74. Решите уравнение $4[x]+3\{x\}=2x-\dfrac{5}{3}$.

Решение. Сократим в правой части уравнения $2[x]+2\{x\}$, а в левой части $2x$.

$$2[x]+\{x\}=-\frac{5}{3},\quad\text{или}\quad 2[x]+\{x\}=-2+\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$.

75. Докажите неравенство $\left[\dfrac{2013}{2014}-x^2\right]<\left[x^2+\dfrac{2015}{2014}\right]$.

Доказательство. Приведем оценки для обеих частей неравенства

$$1+\left[-\frac{1}{2014}-x^2\right]\leqslant 0<1\leqslant 1+\left[x^2+\frac{1}{2014}\right].$$

■

76. Решите уравнение $[x] = a$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \big[a,\ a+1\big) & \text{при } a \in \mathbb{Z}, \\ \varnothing & \text{при } a \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

77. Решите уравнение $\{x\} = a$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \big\{a+n \mid n \in \mathbb{Z}\big\} & \text{при } a \in \big[0,\ 1\big), \\ \varnothing & \text{при } a \notin \big[0,\ 1\big). \end{array}\right.$

78. Решите неравенство $[x] \leqslant a$.

Ответ: $\big(-\infty,\ [a]+1\big)$ при $\forall a \in \mathbb{R}$.

79. Решите неравенство $[x] < a$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \big(-\infty,\ a\big) & \text{при } a \in \mathbb{Z}, \\ \big(-\infty,\ [a]+1\big) & \text{при } a \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

80. Решите неравенство $[x] \geqslant a$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \big[a,\ +\infty\big) & \text{при } a \in \mathbb{Z}, \\ \big[1+[a],\ +\infty\big) & \text{при } a \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

81. Решите неравенство $[x] > a$.

Ответ: $\big[1+[a],\ -\infty\big)$ при $\forall a \in \mathbb{R}$.

82. Решите неравенство $\{x\} < a$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \varnothing & \text{при } a < 0, \\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \big[n,\ a+n\big) & \text{при } 0 \leqslant a < 1, \\ \big(-\infty,\ \infty\big) & \text{при } a \geqslant 1. \end{array}\right.$

83. Решите неравенство $\{x\} \geqslant a$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \big(-\infty,\ \infty\big) & \text{при } a < 0, \\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \big[a+n,\ 1+n\big) & \text{при } 0 \leqslant a < 1, \\ \varnothing & \text{при } a \geqslant 1. \end{array}\right.$

84. (Воробьевы горы*/2010) Решите уравнение

$$\big[n\lg 2\big] + \big[n\lg 5\big] = 2010$$

относительно натурального числа n.

Решение. Заметим, что

$$\big[n\lg 5\big] = \left[n\lg\frac{10}{2}\right] = \big[n\big(1-\lg 2\big)\big] = n + \big[-n\lg 2\big].$$

Тогда исходное уравнение сводится к виду

$$n + \big[n\lg 2\big] + \big[-n\lg 2\big] = 2010.$$

Поскольку $n\lg 2$ — иррациональное число при любом $n \in \mathbb{N}$, то согласно (2.6)

$$\big[n\lg 2\big] + \big[-n\lg 2\big] = -1.$$

Ответ: 2011.

85. Вычислите сумму

$$S = \left[2015\sin\frac{\pi}{2014}\right] + \left[2015\sin\frac{2\pi}{2014}\right] + \ldots + \left[2015\sin\frac{4028\pi}{2014}\right].$$

Решение. Поскольку $\sin\alpha = -\sin(\pi+\alpha)$, выполняется равенство

$$\sin\frac{k\pi}{2014} = -\sin\frac{2014\pi + k\pi}{2014} \quad \text{при } k \in K, \tag{85a}$$

где $K = \big\{1,\,2,\,\ldots,\,1006,\,1008,\,1009,\,\ldots,\,2013\big\}$, причем, что существенно, значениями всех синусов являются иррациональные числа. При $k = 1007$ синусы из (85a) равны 1 и -1 соответственно, а при $k = 2014$ — нулю.

Напомним свойство антье (2.6) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{иначе.} \end{cases}$

Согласно свойству (2.6) сумма всех слагаемых, составленных парами $\left[2015\sin\dfrac{k\pi}{2014}\right]$ и $\left[2015\sin\dfrac{2014\pi+k\pi}{2014}\right]$ при $k \in K$, равна -1006.

Осталась только одна ненулевая пара слагаемых $\left[2015\sin\dfrac{1007\pi}{2014}\right]$ и $\left[2015\sin\dfrac{2014\pi+1007\pi}{2014}\right]$, согласно (2.6) их сумма равна 0.

Ответ: -1006.

86. Вычислите сумму

$$S = \{2015\cos 1^\circ\} + \{2015\cos 2^\circ\} + \ldots + \{2015\cos 360^\circ\}.$$

Указание. Решение задачи, по сути, повторяет решение задачи *85*. Воспользуйтесь аналогичным свойством мантиссы (2.7).

Ответ: 178.

87. Пусть x и y — действительные нецелые числа и $x+y$ — целое число. Докажите тождество $x + y = [x] + [y] + 1$.

Доказательство. Поскольку $x + y = n$, где $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} x + y = [x] + \{x\} + [y] + \{y\} = \\ = [x] + [y] + [x] + [n - x] = \\ = [x] + [y] + [x] + [-x] = [x] + [y] + 1. \end{aligned}$$

■

88. Опишите, какая последовательность чисел задается формулой $a_n = \left[1 - \{\sqrt[k]{n}\}\right]$, где n, $k \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 2$.

Решение.

$$a_n = 1 + \left[-\{\sqrt[k]{n}\}\right] = 1 + \left[-\sqrt[k]{n}\right] + \left[\sqrt[k]{n}\right] = 1 + \begin{cases} 0 & \text{при } \sqrt[k]{n} \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ответ: Последовательность состоит из 0 и 1. Если номер элемента n удовлетворяет условию $n = m^k$ $(m \in \mathbb{N})$, то $a_n = 1$, иначе $a_n = 0$.

89. (Сингапур/1998-1999) Определите область значений выражения $A = \left[\dfrac{x - p}{p}\right] + \left[\dfrac{-x - 1}{p}\right]$, где $x \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$.

Решение.
1) $\boldsymbol{p = 1}$.

$$A = [x - 1] + [-x - 1] = [x] + [-x] - 2 = \begin{cases} -2, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ -3, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) $\boldsymbol{p=-1}$.

$$A=[-x-1]+[x+1]=[-x]+[x]=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\mathbb{Z},\\ -1, & \text{если } x\notin\mathbb{Z}.\end{cases}$$

3) $\boldsymbol{p\neq\pm1}$.

$$A=\left[\frac{x}{p}\right]-1+\left[\frac{-x-1}{p}\right]=\left[\frac{-x-1}{p}+\left[\frac{x}{p}\right]\right]-1=$$

$$=\left[\frac{-x-1}{p}+\frac{x}{p}-\left\{\frac{x}{p}\right\}\right]-1=\left[-\frac{1}{p}-\left\{\frac{x}{p}\right\}\right]-1=$$

$$=\begin{cases}-1, & \text{если } 0\leqslant-\dfrac{1}{p}-\left\{\dfrac{x}{p}\right\}<1,\\ -2, & \text{если } -1\leqslant-\dfrac{1}{p}-\left\{\dfrac{x}{p}\right\}<0,\\ -3, & \text{если } -2\leqslant-\dfrac{1}{p}-\left\{\dfrac{x}{p}\right\}<-1.\end{cases}$$

Ответ: $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0\}$.

90. Выведите формулу округления действительного числа до ближайшего целого с вариантом округления числа с 0,5 в дробной части до **меньшего** целого.

Решение. Отталкиваться будем от известной формулы округления до ближайшего целого (см. п. 2.23.) с округлением числа с мантиссой 0,5 в большую сторону $[x+0{,}5]$.

Вся проблема кроется в числах, у которых $\{x\}=0{,}5$. Подробнее, если мантисса x равна 0,5, то всего навсего надо вычесть 1 из этой формулы. В этом нам поможет свойство антье (2.6).

Рассмотрим функцию $f(x)=[x]+[-x]$. «Подвинем» эту функцию вверх на 1 и вправо на 0,5, после чего получим

$$f(x-0{,}5)+1=[x+0{,}5]+[-x-0{,}5]+1=\begin{cases}1 & \text{при } \{x\}=0{,}5,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$[x+0{,}5]-f\big(x-0{,}5\big)-1=-[-x-0{,}5]-1=-[0{,}5-x].$$

Ответ: $-\left[\dfrac{1}{2}-x\right]$.

91. Выведите формулу функции знак действительного числа

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Идея вывода формулы основана на том, что выражение $[x] - [-x]$ равно 0 только при $x = 0$ и больше или равно 1 (меньше или равно -1) при $x > 0$ ($x < 0$).

Чтобы избежать деления на 0 в знаменатель пришлось добавить слагаемое $\frac{1}{2}$, которое можно заменить любым другим положительным числом, меньшим 1.

Конечно, вид формулы получился довольно экзотическим.

Ответ: $\operatorname{sign}(x) = \left[\dfrac{[x] - [-x]}{\big|[x] - [-x]\big| + \frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2} \right]$.

92. Докажите тождество для взаимно простых чисел p и q

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[2 \cdot \frac{q}{p}\right] + \ldots + \left[(p-1) \cdot \frac{q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}. \qquad (92a)$$

См. другой вариант доказательства — задача 206.

Доказательство. Заметим, что при $i = 1, 2, \ldots, p-1$

$$\left[i \cdot \frac{q}{p}\right] + \left[(p-i) \cdot \frac{q}{p}\right] = \left[i \cdot \frac{q}{p}\right] + q + \left[-i \cdot \frac{q}{p}\right] = q - 1.$$

По условию p и q — взаимно простые числа, следовательно, все выражения, стоящие под знаками антье в ($92a$), не являются целыми числами, что важно для свойства $[x] + [-x] = 1$ при $x \notin \mathbb{Z}$.

Далее просуммируем дважды левую часть ($92a$), сгруппировав парами $\left[i \cdot \frac{q}{p}\right] + \left[(p-i) \cdot \frac{q}{p}\right]$. Тогда удвоенная сумма равна $(p-1)(q-1)$.

■

Примечание. Воспользуемся симметричностью тождества ($92a$) относительно переменных p и q и без каких-либо дополнительных выкладок получим другое тождество с взаимно простыми числами p и q

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[2 \cdot \frac{q}{p}\right] + \ldots + \left[(p-1) \cdot \frac{q}{p}\right] = \left[\frac{p}{q}\right] + \left[2 \cdot \frac{p}{q}\right] + \ldots + \left[(q-1) \cdot \frac{p}{q}\right].$$

93. [37, с. 6] Для целых n и m выполняется условие $m < \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$. Докажите равносильность этого условия и неравенства $m+\frac{1}{2}<\sqrt{n}$.

Доказательство. Согласно (2.11)

$$m < \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] \iff m+1 \leqslant \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] \iff m+1 \leqslant \sqrt{n}+\frac{1}{2}.$$

Заметим, что $\{\sqrt{n}\} \neq \frac{1}{2}$, так как $\sqrt{n}$ — либо целое, либо иррациональное число. Тогда продолжим равносильную цепочку неравенством $m+\frac{1}{2}<\sqrt{n}$. ■

Примечание. Возможна следующая интерпретация условия $m < \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$. Натуральное число m меньше числа, которое является округлением $\sqrt{n}$ до ближайшего целого. Следовательно, $m+\frac{1}{2}<\sqrt{n}$. Верно и обратное утверждение.

94. (Москва/1981, В. В. Прасолов) Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

Решение. Пусть $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = a$, где $a \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a \leqslant \sqrt{[\sqrt{x}]} < a+1, \quad a^2 \leqslant [\sqrt{x}] < (a+1)^2.$$

Согласно (2.11) и (2.12)

$$a^2 \leqslant \sqrt{x} < (a+1)^2, \quad a \leqslant \sqrt{\sqrt{x}} < a+1, \quad \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right] = a.$$

Ответ: да, при $x>1$ равенство $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$ является тождеством.

95. Равны ли числа $\left\{\sqrt{22\ldots2}\right\}$ и $\left\{\sqrt{33\ldots3}\right\}$? Числа $22\ldots2$ и $33\ldots3$ состоят из ста одинаковых цифр.

Решение. Докажем от противного, что имеет место неравенство. Предположим, что $\left\{\sqrt{22\ldots2}\right\} = \left\{\sqrt{33\ldots3}\right\}$. Тогда согласно (2.28)

$$\left\{\sqrt{22\ldots2} - \sqrt{33\ldots3}\right\} = 0,$$

что невозможно, так как выражение, стоящее под знаком мантиссы, — иррациональное число (докажите самостоятельно).

Ответ: $\left\{\sqrt{22\ldots2}\right\} \neq \left\{\sqrt{33\ldots3}\right\}$.

96. Пусть α — иррациональное число и a — рациональное число. Могут ли равняться $\{\lg\alpha\}$ и $\{\lg a\}$?

Решение. Пусть имеет место равенство при некоторых α_0 и a_0 $\{\lg\alpha_0\} = \{\lg a_0\}$. Тогда согласно (2.28)

$$\{\lg\alpha_0 - \lg a_0\} = 0, \quad \text{или} \quad \left\{\lg\frac{\alpha_0}{a_0}\right\} = 0.$$

Последнее равенство никогда не выполняется, так как дробь $\dfrac{\alpha_0}{a_0}$ — иррациональное число.

Ответ: $\{\lg\alpha\} \neq \{\lg a\}$.

97. Определите количество решений уравнения $x = \{32x\}$.

См. другие варианты решений — задачи 37, 255.

Решение. Найдем решения исходного уравнения.

$$\begin{cases} \{x\} = \{32x\}\,, \\ 0 \leqslant x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \{31x\} = 0\,, \\ 0 \leqslant x < 1\,. \end{cases}$$

Уравнение $\{31x\} = 0$ имеет решения вида $x = \dfrac{n}{31}$, где $n \in \mathbb{Z}$. При указанных ограничениях на x решениями исходного уравнения будут числовые значения

$$0,\ \frac{1}{31},\ \frac{2}{31},\ \ldots,\ \frac{30}{31}\,.$$

Ответ: 31 решение.

98. Решите уравнение $\left\{4\left\{\frac{x}{2}\right\}\right\} = 2x + 1.$

Решение. Сначала снимем знак вложенной мантиссы согласно свойству (2.17)

$$\{2x\} = 2x + 1, \quad \text{или} \quad 2x - \{2x\} = -1.$$

В правой части находится $[2x]$, то есть приходим к простейшему уравнению $[2x] = -1$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right)$.

99. Решите уравнение $3\left\{2\left\{\frac{x}{3}\right\}\right\} = 2x - 6.$

Указание. Воспользуйтесь свойством мантиссы (2.17).

Ответ: $\left[3,\ \frac{9}{2}\right)$.

100. (AHSME/1993) [29, с. 39] Числовые последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ заданы условиями

$$x_0 \in \big[0,\ 1\big), \quad x_n = \begin{cases} 2x_{n-1} & \text{при } 2x_{n-1} < 1, \\ 2x_{n-1} - 1 & \text{при } 2x_{n-1} \geqslant 1 \end{cases} \quad \big(n \in \mathbb{N}\big).$$

Определите количество таких последовательностей, для которых выполняется равенство $x_0 = x_5$.

Решение. Упростим запись исходной рекуррентной формулы

$$x_n = \{x_{n-1}\} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}\,.$$

Тогда формула n-го элемента числовой последовательности представляется согласно свойству снятия знака вложенной мантиссы (2.17)

$$x_n = \underbrace{\{2\{2\{\ldots 2\{2x_0\}\ \ldots\}\}\}}_{n \text{ вложенных мантисс}} = \{2^n x_0\} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}\,.$$

Таким образом, задание свелось к определению количества решений уравнения $x = \{32x\}$, которое разбирается в задаче 97. Отметим, что все последовательности различные $\left(x_0 = 0,\ \frac{1}{31},\ \frac{2}{31},\ \ldots,\ \frac{30}{31}\right)$.

Ответ: 31.

101. Решите уравнение $[2x] = 2[x]$.

См. другие варианты решений — задачи *114*, *268*.

Решение. Пусть $f(x) = [2x] - 2[x]$. Для этой функции выполняется условие периодичности $f(x) = f(x+1)$, то есть исходное уравнение достаточно решить на полуинтервале $[0,\ 1)$. Но на этом промежутке $[x] = 0$, тогда получим простейшее уравнение $[2x] = 0$, решением которого будет $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$. Остается «добавить» к решению периодичность.

Ответ: $n \leqslant x < n + \dfrac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

102. (Англия/2001) Решите уравнение $x + \left[\dfrac{x}{6}\right] = \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{2x}{3}\right]$.

Решение. Проанализируем исходное уравнение. Во-первых, если решения имеются, то решениями будут только целые числа. Во-вторых, предположим, что x_0 — решение, тогда решениями будут все числа из серии $x_0 + 6n$ $(n \in \mathbb{Z})$, то есть решения периодические с периодом 6.

На основании данного анализа сделаем вывод, что для решения исходного уравнения достаточно проверить, выполняется ли уравнение при $x = 0,\ 1, 2, 3, 4, 5$, и, если выполняется, то «добавить» к ответу периодичность.

Ответ: $\{k + 6n \mid k = 0, 2, 3, 4, 5;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

103. [17, с. 61] Докажите, что при любом действительном x справедливо неравенство $[3x] + 2[2x] \leqslant [6x] + [x]$.

См. другой вариант доказательства — задача *316*.

Доказательство. Функция

$$f(x) = [6x] + [x] - [3x] - 2[2x]$$

обладает свойством $f(x) = f(x+1)$. Следовательно, достаточно доказать исходное неравенство при $0 \leqslant x < 1$, см. п. 2.19. К тому же, на указанном полуинтервале неравенство немного упростится

$$[3x] + 2[2x] \leqslant [6x].$$

Разобьем полуинтервал $[0,\ 1)$ на шесть частей:

$$[0,\ 1/6), [1/6,\ 2/6), \ldots, [5/6,\ 1).$$

Рассмотрим один из случаев, например, $x \in \left[3/6,\ 4/6\right)$, тогда $[6x] = 3$, $[3x] = 1$, $[2x] = 1$, то есть неравенство выполняется. Остальные варианты рассмотрите самостоятельно. ■

104. [28, с. 4] Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $\left[\dfrac{n}{3}\right] + \left[\dfrac{n+2}{6}\right] + \left[\dfrac{n+4}{6}\right] = \left[\dfrac{n}{2}\right] + \left[\dfrac{n+3}{6}\right]$.

См. другой вариант решения — задача *110*.

Доказательство. В п. 2.19. приводятся рассуждения, основанные на периодичности функции $f(x)$ в соотношениях вида $f(x) \vee 0$. Воспользуемся сходными соображениями. Функция натурального аргумента

$$f(n) = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n+3}{6}\right]$$

периодическая с периодом 6, так как $f(n) = f(n+6)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для доказательства исходного равенства достаточно проверить его выполнение для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, в чем несложно убедиться. ■

105. [17, с. 61] Докажите, что при любом целом n выполняется равенство $\left[\dfrac{3n+8}{25}\right] = \left[\dfrac{n+2}{25}\right] + \left[\dfrac{n+11}{25}\right] + \left[\dfrac{n+19}{25}\right]$.

Указание. Функция целого аргумента

$$f(n) = \left[\frac{3n+8}{25}\right] - \left[\frac{n+2}{25}\right] - \left[\frac{n+11}{25}\right] - \left[\frac{n+19}{25}\right]$$

периодическая с периодом 25, так как $f(n) = f(n+25)$ при $\forall n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для доказательства равенства достаточно проверить его выполнение для $n = 0, 1, 2, \ldots, 24$, в чем несложно убедиться. ■

106. [17, с. 61] Докажите, что при любом целом n выполняется равенство

$$\left[\frac{8n+5}{25}\right] = \left[\frac{n - \left[\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим функцию целочисленного аргумента $f(n)$, которая является разностью левой и правой частей исходного утверждения. Эта функция периодическая с периодом 25, так как

$f(n) = f(n+25)$ при $\forall n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для доказательства равенства достаточно проверить его выполнение для $n = 0, 1, 2, \ldots, 24$.

Заметим, что дробь $\dfrac{n+7}{25}$ принимает целое значение только при $n = 18$, при остальных проверяемых значениях n от 0 до 24 это выражение $\dfrac{n+7}{25}$ не является целым числом.

Очевидно, что при $n = 18$ равенство выполняется.

Упростим выражение, стоящее в правой части исходного утверждения при $n \neq 18$. Данное условие важно для применения свойства (2.6).

$$\left[\frac{n - \left[\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right] \overset{(2.6)}{=} \left[\frac{n + 1 + \left[-\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right] = \left[\frac{\left[\frac{24n+18}{25}\right]}{3}\right] \overset{(5.1)}{=} \left[\frac{8n+6}{25}\right].$$

Ясно, что при $n = 0, 1, 2, \ldots, 17, 19, \ldots, 24$ имеет место равенство

$$\left[\frac{8n+5}{25}\right] = \left[\frac{8n+6}{25}\right].$$

■

107. (*LinkedIn/MO*) Решите уравнение в натуральных числах

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11\left[\frac{n}{36}\right].$$

Решение. Пусть

$$f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] - 11\left[\frac{n}{36}\right].$$

Функция $f(n)$ периодическая, так как $f(n) = f(n+36)$. $f(0) = 0$, значит, $n = 36k$ $(k \in \mathbb{Z})$ отправляется в ответ.

При $n = 1, 2, \ldots, 35$ функция $f(n)$ примет вид

$$f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right], \text{ или}$$

$$f(n) = \frac{n}{6} + \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right],$$

следовательно, $f(n) > 0$ при указанных значениях n.

Ответ: $36k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

108. Решите уравнение $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right]$.

Решение. x может быть быть только целым числом. Тогда перейдем к равносильному уравнению

$$[x] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] \quad \text{при } x \in \mathbb{Z}.$$

Но это уравнение является частным случаем тождества Эрмита (2.36), если сделать замену $x = 2x'$. Следовательно, решением исходного уравнения являются все целые числа.

Ответ: $x \in \mathbb{Z}$.

109. Решите уравнение $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = 101$.

Решение. Сделаем замену $y = \frac{2x-1}{3}$, $x = \frac{3y+1}{2}$, чтобы привести исходное уравнение к виду

$$[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = 101.$$

Согласно формуле (2.36) — частному случаю тождества Эрмита — получим простейшее уравнение

$$[2y] = 101.$$

Дальнейшие действия выполните самостоятельно.

Ответ: $\left[76\frac{1}{4},\ 77\right)$.

110. [28, с. 4] Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right]$.

См. другой вариант решения — задача 104.

Доказательство. В равенстве необходимо увидеть два частных случая тождества Эрмита (2.36) и (2.37). Предварительная замена $n = 6k$ способствует распознаванию указанных двух формул.

Отметим, что исходное равенство выполняется при любом $n \in \mathbb{R}$. ■

111. (На основе IMO/1968) [34, с. 51] Докажите, что

$$[x] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2} \right]. \tag{111a}$$

См. другой вариант решения — задача 429.

Доказательство. Заметим, что хотя сумма, стоящая в правой части утверждения, имеет в верхнем пределе бесконечность, сама сумма всегда конечна для конкретного x.

Частный случай тождества Эрмита (2.36) гласит

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x], \text{ или } \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x].$$

Выполним следующую цепочку преобразований

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left[2 \cdot \frac{x}{2^{k+1}} \right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}} \right] \right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left[\frac{x}{2^k} \right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}} \right] \right).$$

Раскрывая последнюю сумму, получим $[x]$, поскольку все слагаемые $\left[\dfrac{x}{2^k}\right]$ при $k \neq 0$ взаимно сокращаются. Кстати, такие суммы называются *телескопическими*. ■

112. Для любого действительного x и любого натурального n вычислите сумму

$$S_n(x) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \left[\frac{x+i}{j} \right].$$

Решение. $S_n(x) - S_{n-1}(x) =$

$$= \left[\frac{x+0}{n} \right] + \left[\frac{x+1}{n} \right] + \ldots + \left[\frac{x+n-1}{n} \right] \overset{(2.35)}{=} \left[\frac{x}{n} \cdot n \right] = [x].$$

Поскольку $S_1(x) = [x]$,

$$S_n(x) = \big(S_n(x) - S_{n-1}(x)\big) + \big(S_{n-1}(x) - S_{n-2}(x)\big) + \\ + \ldots + \big(S_2(x) - S_1(x)\big) + S_1(x) = n\,[x].$$

Ответ: $n\,[x]$.

113. Решите уравнение $2x = \{x\}$.

Решение. Избавимся от мантиссы с помощью разложения одного из x-ов в левой части уравнения

$$x + [x] + \{x\} = \{x\}, \quad x + [x] = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что x — целое число. Значит, получаем $2x = 0$.

Ответ: 0.

114. Решите уравнение $\big[2x\big] = 2\big[x\big]$.

См. другие варианты решений — задачи *101*, *268*.

Решение. В уравнении и справа, и слева стоит множитель 2. Продемонстрируем, как можно из этого извлечь пользу:

$$\big[2x\big] - 2\big[x\big] = 0, \quad \big[2x - 2\,[x]\big] = 0,$$

$$\big[2\big(x - [x]\big)\big] = 0, \quad \big[2\,\{x\}\big] = 0.$$

От простейшего уравнения с антье перейдем к простейшим неравенствам с мантиссой

$$0 \leqslant 2\,\{x\} < 1, \quad 0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{2}, \quad n \leqslant x < n + \frac{1}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[n,\ n + \dfrac{1}{2}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

115. Решите уравнение $2\,[x] = 3x$.

Решение. Проанализируем исходное уравнение. Выражение $3x$ должно быть целым и четным, то есть решения следует искать среди чисел вида $\dfrac{2n}{3}$ $\big(n \in \mathbb{Z}\big)$. Используя основное тождество (1.1), получим $x + 2\,\{x\} = 0$, откуда следует, что $-2 < x \leqslant 0$. Получается, что лишь три числа $-\dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$ и 0 удовлетворяют условиям для x. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что все три числа попадают в ответ.

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$, 0.

116. Решите уравнение $\{2x\} = x$.

Решение. Сведем исходное уравнение к виду $\{z\} = [z]$, решением которого является $z = 0$.

$$2\{2x\} = 2x, \quad 2\{2x\} = [2x] + \{2x\}, \quad \{2x\} = [2x].$$

Ответ: 0.

117. Докажите тождество

$$\left[\frac{m-n}{m}\right] + \left[\frac{n-1}{m}\right] = 0, \quad \text{где } m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство.

$$\left[\frac{m-n}{m}\right] + \left[\frac{n-1}{m}\right] = \left[\frac{m-n}{m} - \left[\frac{n-1}{m}\right]\right] = \left[\frac{m-1}{m} - \left\{\frac{n-1}{m}\right\}\right] = 0,$$

поскольку $0 \leqslant \left\{\dfrac{n-1}{m}\right\} \leqslant \dfrac{m-1}{m}$. ■

118. (Сорос/1998-1999). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3{,}9, \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}5, \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

Решение. Приведем схему решения (не теряя строгости изложения), чтобы избежать излишней детализации. Выразим уверенность, что в следующий раз вы решите подобную систему уравнений ... в уме.

1) Если сложить все три уравнения, то в левой части помимо суммы $x + y + z$ соберутся пары $[x] + \{x\}$, $[y] + \{y\}$ и $[z] + \{z\}$, которые сворачиваются в x, y и z соответственно. Таким образом, имеем $2x + 2y + 2z = 9{,}4$, или $x + y + z = 4{,}7$.

2) Складывая первые два уравнения, получим в левой части $x + y + z + [y] + \{x\} = 7{,}4$, или $[y] + \{x\} = 2{,}7$, что означает: $[y] = 2$ и $\{x\} = 0{,}7$.

3) Выполним аналогичные пункту 2) действия для второго и третьего уравнений: $[z] = 0$ и $\{y\} = 0{,}8$.

4) В заключение, складывая подобным образом первое и третье уравнение, найдем: $[x] = 1$ и $\{z\} = 0{,}2$.

Подытожим: $x = [x] + \{x\} = 1 + 0{,}7 = 1{,}7$, $y = 2{,}8$ и $z = 0{,}2$.

Ответ: $x = 1{,}7$, $y = 2{,}8$, $z = 0{,}2$.

119. (Нью-Йорк/1983) [39, с. 49] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1{,}1, \\ y + [z] + \{x\} = 2{,}2, \\ z + [x] + \{y\} = 3{,}3. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$, $y = 0{,}2$, $z = 2{,}1$.

120. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = -1{,}8, \\ \{x\} + y + [z] = 1{,}7, \\ [x] + \{y\} + z = -0{,}7. \end{cases}$$

Ответ: $x = -2{,}7$, $y = 0{,}4$, $z = 1{,}9$.

121. (САММАТ/2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x] - \{x + y\} = 20{,}09, \\ [x + y] - \{y\} = 20{,}11. \end{cases}$$

Ответ: $x = 21{,}02$, $y = 0{,}89$.

122. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x + y] - \{y + z\} = 2{,}3, \\ [y + z] - \{z + x\} = 2{,}6, \\ [z + x] - \{x + y\} = 3{,}1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2{,}3$, $y = 1{,}6$, $z = 2{,}1$.

123. (На основе AIME°) [29, с. 175] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} [x] + [y] + y = 43{,}8, \\ x + y - [x] = 18{,}4. \end{cases}$$

Указание. Из первого уравнения находится $\{y\} = 0{,}8$, затем из второго уравнения $\{x\} = 0{,}6$. Используя найденные значения, исходная система уравнений сводится к системе двух линейных уравнений относительно $[x]$ и $[y]$.

Ответ: $x = 9{,}6,\ \ y = 17{,}8.$

124. (ВМК/2003) Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x - 1.$

Указание. $[x] \cdot \{x\} = [x] + \{x\} - 1, \quad \big([x] - 1\big) \cdot \big(\{x\} - 1\big) = 0.$

Ответ: $\big[1,\ 2\big).$

125. Решите уравнение $\left[x + \dfrac{1}{3}\right] + \left[x + \dfrac{2}{5}\right] = 3.$

Решение. Модуль разности выражений, стоящих под знаками антье в левой части уравнения, меньше 1. Применим свойство (2.26), согласно которому либо антье равны, либо отличаются на 1. Ясно, что возможен лишь случай

$$\begin{cases} \left[x + \dfrac{1}{3}\right] = 1, \\ \left[x + \dfrac{2}{5}\right] = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\dfrac{8}{5},\ \dfrac{5}{3}\right).$

126. Решите уравнение $\left[\dfrac{2x - 1}{2}\right] + \left[\dfrac{1}{4} + x\right] = 4.$

См. аналогичное решение — задача 125.

Ответ: $\left[\dfrac{5}{2},\ \dfrac{11}{4}\right).$

127. Решите уравнение $\left[\dfrac{11}{x}\right] + \left[\dfrac{12}{x}\right] = 13.$

Решение. Очевидно, что значения $x \leqslant 0$ не могут быть решениями уравнения и что при $0 < x \leqslant 1$ также нет решений.

При $x > 1$ модуль разности выражений, стоящих под знаками антье в левой части уравнения, меньше 1. Тогда согласно свойству (2.26) антье либо равны, либо отличаются на 1. Поскольку антье — неубывающая функция, то $\left[\dfrac{11}{x}\right] \leqslant \left[\dfrac{12}{x}\right]$. Значит, возможен лишь случай

$$\begin{cases} \left[\dfrac{11}{x}\right] = 6, \\ \left[\dfrac{12}{x}\right] = 7. \end{cases}$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\left(\dfrac{11}{7}, \dfrac{12}{7}\right]$.

128. Определите обратную функцию к функции $f(x) = \{x\} - [x]$.

Решение. Выразим $y(x)$ из $x = \{y\} - [y]$. Очевидно, что $\{y\} = \{x\}$. Определим $[y]$: $[x] = -\big[[y] + \{y\}\big]$, или $[y] = -[x]$. Таким образом, $f^{-1}(x) = f(x)$.

Ответ: $f^{-1}(x) = \{x\} - [x]$.

129. (*LinkedIn/MO*) Определите обратную функцию к функции

$$f(x) = x - 4[x] + [2x].$$

См. аналогичное решение — задача *128*.

Ответ: $f^{-1}(x) = f(x)$.

130. (*AoPS*) Определите обратную функцию к функции

$$f(x) = x - 3[2x] + 2[3x].$$

Решение. Выразим $y(x)$ из $x = y - 3[2y] + 2[3y]$.
Очевидно, что $\{y\} = \{x\}$. Определим $[y]$:

$$[x] = [y] - 3\big[2\{y\}\big] + 2\big[3\{y\}\big],$$

$$[y] = [x] + 3\big[2\{x\}\big] - 2\big[3\{x\}\big].$$

Наведем «красоту»

$$y = x + 3\big[2\{x\}\big] - 2\big[3\{x\}\big],$$

$$y(x) = x + 3\,[2x] - 2\,[3x]\,.$$

Ответ: $f^{-1}(x) = x + 3\,[2x] - 2\,[3x]$.

131. (*LinkedIn/MO*) Решите уравнение

$$2017^{[2x]} + 2017^{x} = 2018 \cdot 2017^{[x]}.$$

Решение. Воспользуемся тождеством Эрмита (2.36)

$$2017^{[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]} + 2017^{[x]+\{x\}} = 2018 \cdot 2017^{[x]},$$

$$2017^{\left[x+\frac{1}{2}\right]} + 2017^{\{x\}} = 2018.$$

Уравнение будет иметь решения, если $\left[x + \dfrac{1}{2}\right] = 1$. Тогда $\{x\} = 0$, то есть x — целое число.

Ответ: $x = 1$.

132. (*LinkedIn/MO*) Докажите, что для любых натуральных значений $n > 2$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n+1}{4}\right] = \left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]. \tag{132a}$$

Доказательство. Поскольку при любых натуральных n имеет место неравенство $\dfrac{n+1}{4} < \dfrac{n(n+1)}{4n-2}$, то согласно (2.25) достаточно показать, что не существует такого целого значения K, для которого выполняется условие

$$\frac{n+1}{4} < K \leqslant \frac{n(n+1)}{4n-2}, \tag{132б}$$

$$n+1 < 2K \leqslant \frac{2n^2+2n}{2n-1},$$

$$n+1 < 4K \leqslant n+1+\frac{n+1}{2n-1}. \tag{132в}$$

Двойное неравенство (132*в*) показывает, что ни для одного целого K при $n > 2$ не выполняется условие (132*б*), тем самым, тождество доказано. ■

133. Докажите, что для всех $n, m \in \mathbb{N}$ таких, что $0 \leqslant m < n$, выполняется тождество

$$\left[\log_2 \frac{2n+1}{2m+1}\right] = \left[\log_2 \frac{2n}{2m+1}\right].$$

Доказательство. Согласно (2.24) достаточно доказать, что

$$\left[\log_2 \left[\frac{a-1}{b}\right]\right] = \left[\log_2 \left[\frac{a}{b}\right]\right].$$

Пусть $\left[\log_2 \left[\frac{a}{b}\right]\right] = k$. Тогда

$$k \leqslant \log_2 \left[\frac{a}{b}\right] < k+1,$$

$$2^k \leqslant \left[\frac{a}{b}\right] < 2^{k+1},$$

$$2^k < \frac{a}{b} < 2^{k+1},$$

$$2^k \leqslant \frac{a-1}{b} < 2^{k+1},$$

$$2^k \leqslant \left[\frac{a-1}{b}\right] < 2^{k+1},$$

$$k \leqslant \log_2 \left[\frac{a-1}{b}\right] < k+1.$$

■

134. [8, с. 127] Упростите $\left[\dfrac{n\,[m\alpha]}{\alpha}\right]$, где $m, n \in \mathbb{N}$, α — иррациональное число, большее n.

Решение. Нюанс данной задачи состоит в том, что $\{m\alpha\} \neq 0$.

$$\left[\frac{n\,[m\alpha]}{\alpha}\right] = mn + \left[-\frac{n\,\{m\alpha\}}{\alpha}\right] = mn - 1.$$

Ответ: $mn - 1$.

135. Задана функция натурального числа

$$f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right] + \ldots$$

Докажите, что $f(n) = n - f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Доказательство. Согласно (2.20)

$$f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{[n/2]}{2}\right] + \left[\frac{[n/2]}{4}\right] - \ldots =$$

$$= \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] - \ldots = f(n) - n.$$

См. также задачу *393*. ■

136. (AIME/1991) Пусть a — действительное число, для которого выполняется равенство

$$\left[a + \frac{19}{100}\right] + \left[a + \frac{20}{100}\right] + \ldots + \left[a + \frac{91}{100}\right] = 546.$$

Найдите $[100a]$.

Решение. Антье — возрастающая функция, поэтому

$$\left[a + \frac{19}{100}\right] \leqslant \left[a + \frac{20}{100}\right] \leqslant \ldots \leqslant \left[a + \frac{91}{100}\right].$$

Согласно (2.26) разность антье $\left[a + \frac{91}{100}\right] - \left[a + \frac{19}{100}\right]$ равна 0 или 1. Всего в сумме 73 слагаемых-антье, и поскольку 546 не делится нацело на 73, то часть антье равны 7, остальные — 8. Несложно определить, что

$$\left[a + \frac{19}{100}\right] = \left[a + \frac{20}{100}\right] = \ldots = \left[a + \frac{56}{100}\right] = 7,$$

$$\left[a + \frac{57}{100}\right] = \left[a + \frac{48}{100}\right] = \ldots = \left[a + \frac{91}{100}\right] = 8.$$

Тогда $a + \frac{56}{100} < 8$ и $a + \frac{57}{100} \geqslant 8$. Откуда получим $743 \leqslant 100a < 744$.

Ответ: $[100a] = 743$.

137. (SMT/2014) Найдите

$$\left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}}\right], \text{ где } S_n = 1 + 11 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Решение. Поскольку $\underbrace{11\ldots1}_{n} = \dfrac{10^n - 1}{9}$, то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n} 10^k - n\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n\right) = \frac{10^{n+1} - 1 - 9n}{81}.$$

Перейдем к вычислениям

$$\left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}}\right] = \left[\frac{81 \cdot 10^{2017}}{10^{2015} - 1 - 9 \cdot 2014}\right] =$$

$$= \left[8100 \cdot \frac{10^{2015}}{10^{2015} - 9217}\right] =$$

$$= \left[8100 \cdot \left(1 + \frac{9217}{10^{2015} - 9217}\right)\right] =$$

$$= 8100 + \left[\frac{9217}{10^{2015} - 9217}\right] = 8100.$$

Ответ: 8100.

138. Решите уравнение $[x] + [2x] + \ldots + [2014x] = 1$.

Решение. Рассмотрим общее уравнение

$$[x] + [2x] + \ldots + [nx] = 1, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}. \tag{138a}$$

Если $x < 0$, то все слагаемые в правой части (138a) отрицательные. Значит, $x \geqslant 0$.

Функция антье неубывающая при указанных n, то есть $[x] \leqslant [2x] \leqslant \ldots \leqslant [nx]$. Тогда уравнение (138$a$) равносильно системе простейших уравнений $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$

$$\begin{cases} [nx] = 1, \\ [kx] = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \leqslant nx < 2, \\ 0 \leqslant kx < 1. \end{cases}$$

Решением уравнения (138a) является полуинтервал $\left[\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n-1}\right)$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2014},\ \dfrac{1}{2013}\right)$.

139. Решите уравнение $\left[\dfrac{x}{6}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{2}\right]=x.$

Решение. Заметим, что $x=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{2}$. Перенесем все антье в правую часть уравнения

$$\frac{x}{6}-\left[\frac{x}{6}\right]+\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]+\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]=0,$$

$$\left\{\frac{x}{6}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{2}\right\}=0.$$

Мантисса всегда неотрицательная, следовательно, одновременно выполняются три уравнения $\left\{\dfrac{x}{6}\right\}=\left\{\dfrac{x}{3}\right\}=\left\{\dfrac{x}{2}\right\}=0.$

Решив первое уравнение $x=6n$, убеждаемся, что данная серия числовых значений является решениями двух других уравнений.

Отметим, что не при всех решениях второго (третьего) уравнения выполняется $\left\{\dfrac{x}{6}\right\}=0.$

Ответ: $6n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

140. Решите уравнение $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{4}\right]+\left[\dfrac{x}{8}\right]=\dfrac{7x}{8}.$

См. аналогичное решение — задача *139*.

Ответ: $8n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

141. (Ульяновск/2003-2004) [12, с. 15] Решите уравнение

$$\left|x^2-5x+5\right|+\frac{1}{\left|x^2-5x+5\right|}+\left\{\frac{x+3}{2x}\right\}=2.$$

Решение. Сумма $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$, причем равенство имеет место только при $a=1$. Перейдем к равносильной системе уравнений

$$\begin{cases}\left|x^2-5x+5\right|=1,\\ \left\{\dfrac{x+3}{2x}\right\}=0.\end{cases}$$

Далее проще всего решить первое уравнение и выбрать из решений такие значения, для которых выполняется уравнение с мантиссой.

Ответ: $1,\ 3.$

142. (Ульяновск/2003-2004) [12, с. 16] Решите уравнение

$$\left[x+\frac{2}{\pi}\right]=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{x-x^2}\right).$$

Решение. ОДЗ уравнения — сегмент $[0,\ 1]$. При данных значениях x левая часть уравнения может равняться либо 0, либо 1. Решите самостоятельно два уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{x-x^2}\right)=0 \text{ или } 1$$

и затем проверьте, будет ли равняться этому же значению левая часть уравнения. ($x=1$ — постороннее решение.)

Ответ: $0,\ \frac{1}{2}.$

143. (Ульяновск/2003-2004) [12, с. 16] Решите уравнение

$$\bigl|(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2003)\bigr|+\left\{\frac{x^2+2004}{x^2}\right\}=0.$$

Решение. В левой части уравнения оба слагаемых принимают неотрицательные значения, следовательно, эти слагаемые должны равняться 0. Модуль произведения равен 0 при $x=1,\ 2,\ \ldots,\ 2003$. Осталось выяснить, при каких из этих значений дробь, стоящая под знаком мантиссы, будет целым числом:

$$\frac{x^2+2004}{x^2}=1+\frac{2004}{x^2}=1+\frac{2^2\cdot 3\cdot 167}{x^2},\quad x=1,\ 2.$$

Ответ: $1,\ 2.$

144. (Ульяновск/2003-2004) [12, с. 17] Решите уравнение

$$\left\{\frac{2003+x}{1+[x]}\right\}=x-x^2+x^3.$$

Решение. Поскольку мантисса принимает значения от 0 до 1, то имеет место условие

$$0\leqslant x-x^2+x^3<1,$$

то есть решения исходного уравнения удовлетворяют условию $0 \leqslant x < 1$. Это означает, что $[x] = 0$ и, соответственно, $\{2003 + x\} = \{x\} = x$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$x = x - x^2 + x^3$$

($x = \pm 1$ — посторонние корни).

Ответ: 0.

145. Решите уравнение для $x \notin \mathbb{Z}$

$$x + \frac{2}{2x-1} = [x] + \frac{2}{2[x]-1}.$$

См. другой вариант решения — задача *348*.

Решение.

$$x - [x] + \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{2[x]-1} = 0,$$

$$\{x\} + 2\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2[x]-1}\right) = 0,$$

$$\{x\} - \frac{4\{x\}}{(2x-1)(2[x]-1)} = 0.$$

Поскольку исходное уравнение решается для $x \notin \mathbb{Z}$, получаем равносильное уравнение

$$(2x-1)(2[x]-1) = 4.$$

Очевидно, что если $x < 1$ или $x \geqslant 2$, то левая часть будет больше 4. То есть возможны три случая $[x] = -1,\ 0,\ 1$. Рассмотрим первый случай

$$(-2 + 2\{x\} - 1) \cdot (-3) = 4, \quad \{x\} = \frac{5}{6}, \quad x = -\frac{1}{6}.$$

При решении двух других вариантов нарушается условие $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Ответ: $-\dfrac{1}{6}$.

146. (Екатеринбург/2010-2011) Решите неравенство

$$x^2 \leqslant [2x] \cdot \{2x\}.$$

Решение. Страшновато выглядит задание, не так ли? Впрочем, на самом деле все наоборот — надо вовремя применить основное тождество (1.1)

$$(2x)^2 \leqslant 4[2x] \cdot \{2x\},$$

$$\big([2x] + \{2x\}\big)^2 \leqslant 4\,[2x] \cdot \{2x\}\,,$$
$$\big([2x] - \{2x\}\big)^2 \leqslant 0,$$
$$\big[2x\big] = \big\{2x\big\}.$$

Ответ: 0.

147. (Baltic/1991) Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = 1991x$.

Решение. Очевидно, что среди целых чисел лишь 0 является решением. Также нетрудно определить, что еще решения могут быть только при $-1 < x < 0$.

Пусть $x \in \big(-1,\, 0\big)$, $[x] = -1$. Тогда уравнение примет вид

$$-\{x\} = 1991\big(-1 + \{x\}\big), \quad \{x\} = \frac{1991}{1992}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{1992}$, 0.

148. (*LinkedIn/MO*) Найдите все целые значения n, удовлетворяющие равенству

$$\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n(n-1)}{3}\right] = n. \tag{148а}$$

Решение. Воспользуемся тождеством Эрмита (2.36)

$$n - 1 = \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right],$$

чтобы представить (148*а*) в виде равенства двух антье

$$\left[\frac{n(n-1)}{3}\right] = \left[\frac{n+2}{2}\right]. \tag{148б}$$

Согласно (2.27), если уравнение (148*б*) имеет решения, то эти решения должны удовлетворять условию

$$\left|\frac{n(n-1)}{3} - \frac{n+2}{2}\right| < 1, \text{ или}$$

$$\big|2n^2 - 5n - 6\big| < 6. \tag{148в}$$

Остается проверить подстановкой в (148*б*) целые значения n, которые являются решением (148*в*), а именно $n \in \{-2,\, -1,\, 3\}$ (выясняется, что $n = -2$ не подходит).

Ответ: $n \in \{-1,\, 3\}$.

149. (Ломоносов/2008) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие равенству

$$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right] = n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right].$$

Решение. Введем параметр $a = 1004$. С параметром a уравнение и выглядит проще, и решается легче. Рассмотрим уравнение в натуральных числах при $a \in \mathbb{N}$

$$2a\left[n\sqrt{a^2+1}\right] = n\left[2a\sqrt{a^2+1}\right]. \qquad (149a)$$

Нетрудно догадаться, что

$$\left[2a\sqrt{a^2+1}\right] = 2a^2$$

(для доказательства данного тождества при $a \in \mathbb{N}$ достаточно перейти от антье к равносильному двойному неравенству). Тогда из уравнения (149a) получим

$$\left[n\sqrt{a^2+1}\right] = an. \qquad (149б)$$

Простейшее уравнение с антье (149$б$) имеет следующие решения $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2a$.

Ответ: $1,\ 2,\ \ldots,\ 2008$.

150. (Ломоносов*/2012-2013) Решите уравнение $\dfrac{8}{\{x\}} = \dfrac{9}{x} + \dfrac{10}{[x]}$.

См. другой вариант решения — задача 231.

Решение. ОДЗ уравнения — все действительные нецелые числа, за исключением интервала $(0,\ 1)$. Левая часть всегда положительная, при $\boldsymbol{x < 0}$ правая часть становится отрицательной. Итак, если имеются решения исходного уравнения, то решения удовлетворяют условию $\boldsymbol{x > 1}$.

Выражение $\dfrac{8}{\{x\}} > 8$. То есть следствием исходного уравнения является неравенство

$$\frac{9}{x} + \frac{10}{[x]} > 8,$$

которое при $\boldsymbol{x \geqslant 3}$ не имеет решений.

Таким образом, поиск решений исходного уравнения сузился до интервала $(1,\ 3)$. Разобьем его на интервалы $(1,\ 2)$ и $(2,\ 3)$.

В случае $\boldsymbol{1 < x < 2}$ имеем $[x] = 1$ и $\{x\} = x - 1$. Тогда исходное уравнение сводится к
$$\frac{8}{x-1} = \frac{9}{x} + 10,$$
решением которого будет $\dfrac{3}{2}$, второй корень не попадает в интервал.

При $\boldsymbol{2 < x < 3}$ получаем $[x] = 2$ и $\{x\} = x - 2$. Соответствующее уравнение
$$\frac{8}{x-2} = \frac{9}{x} + 5$$
не имеет решений при указанном условии на x.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

151. Найдите такие $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, что $\left[\sqrt[n]{53}\right]$ делит без остатка 35.

Решение. Заметим, что $35 = 5 \cdot 7$, где 5 и 7 — простые числа. Тогда уравнение сводится к четырем простейшим уравнениям
$$1)\ \left[\sqrt[n]{53}\right] = 1, \quad 2)\ \left[\sqrt[n]{53}\right] = 5,$$
$$3)\ \left[\sqrt[n]{53}\right] = 7, \quad 4)\ \left[\sqrt[n]{53}\right] = 35.$$

Первое уравнение равносильно двойному неравенству $1 \leqslant \sqrt[n]{53} < 2$, решая которое, получим $n \geqslant 6$. Третье уравнение дает ответ $n = 2$. Остальные два уравнение не имеют решений при натуральных n.

Ответ: $n = 2$ и $n \geqslant 6$.

152. [26, с. 49] Найдите такие $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, что $\left[\sqrt[n]{111}\right]$ делит без остатка 111.

См. аналогичное решение — задача 151.

Ответ: $n = 4$, $n \geqslant 7$.

153. [38, с. 23] (M. Turea) Найдите все непустые множества $M \subset \mathbb{N}$ такие, что если $n \in M$, $n \geqslant 2$, то оба числа n^2+4 и $[\sqrt{n}+1]$ также принадлежат M.

Решение. Поскольку $\left[\sqrt{n^2+4}+1\right] = n+1$, то можно утверждать, что все натуральные числа, начиная с n, $\{n, n+1, n+2 \ldots\}$ принадлежат множеству M, если $n \in M$.

С другой стороны, $\left[\sqrt{n}+1\right] < n$ при $n > 2$ и $\left[\sqrt{n}+1\right] = n$ при $n = 2$, то есть 2 — наименьшее число, которое принадлежит M.

Таким образом, сформулированные в задаче условия принадлежности натуральных чисел множеству M задают множество $\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Ответ: $M = \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

154. [38, с. 21] (M. Andronache) Найдите такие $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 4}$, для которых $n-1$ делится нацело на $[\sqrt{n}]+1$, а $n+1$ делится нацело на $[\sqrt{n}]-1$.

Решение. Пусть $k = [\sqrt{n}]$, $\left(k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}\right)$. Тогда $k^2 \leqslant n < \left(k+1\right)^2$. Представим n в виде суммы $n = k^2 + m$, где $m = 0, 1, \ldots, 2k$.

Рассмотрим сначала случай $\boldsymbol{n = k^2}$, то есть когда n — полный квадрат. Дробь

$$\frac{n-1}{[\sqrt{n}]+1} = \frac{k^2-1}{k+1}$$

сократима всегда, а дробь

$$\frac{n+1}{[\sqrt{n}]-1} = \frac{k^2+1}{k-1} = k+1+\frac{2}{k-1}$$

сократима лишь при $k = 2, 3$. Значит, в ответ пишем $n = 4, 9$.

Перейдем к случаю $\boldsymbol{n = k^2 + m}$, где $\boldsymbol{1 \leqslant m \leqslant 2k}$.
Дробь

$$\frac{n-1}{[\sqrt{n}]+1} = \frac{k^2+m-1}{k+1} = k-1+\frac{m}{k+1}$$

сократима только при $m = k+1$. Тогда дробь

$$\frac{n+1}{[\sqrt{n}]-1} = \frac{k^2+m+1}{k-1} = \frac{k^2+k+2}{k-1} = k+2+\frac{4}{k-1}$$

сократима при $k = 2, 3, 5$. Этим значениям соответствуют $m = 3, 4, 6$ и $n = 7, 13, 31$.

Ответ: $\left\{4, 7, 9, 13, 31\right\}$.

155. Решите систему уравнений для положительных x, y, z

$$\begin{cases} [x]\,y\,z = 3, \\ x\,[y]\,z = 4, \\ x\,y\,[z] = 5. \end{cases} \qquad (155а)$$

Решение. Сначала найдем значения $[x]$, $[y]$, $[z]$.

Произведение трех уравнений дает условие $x^2y^2z^2\,[x]\,[y]\,[z] = 60$, тогда $[x]^3\,[y]^3\,[z]^3 \leqslant 60$. Значит, $[x]^3\,[y]^3\,[z]^3 = 1$, 2 или 3. Но произведение антье не может равняться 1, так как не будет выполняться третье уравнение.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{[x]\,[y]\,[z] = 2}$. Имеем три варианта.

1) $[x] = 2$, $[y] = 1$, $[z] = 1$. Тогда система (155$а$) примет вид

$$\begin{cases} yz = \dfrac{3}{2}, \\ xz = 4, \\ xy = 5. \end{cases} \qquad (155б)$$

Но при условиях $2 \leqslant x < 3$ и $1 \leqslant y$, $z < 2$ система (155$б$) не имеет решений.

2) $[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = 1$. В этом варианте система (155$а$) примет вид

$$\begin{cases} yz = 3, \\ xz = 2, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Тогда $x = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$, $y = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$, $z = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$. Проверкой убеждаемся, что числовые значения удовлетворяют условиям: $1 \leqslant x$, $z < 2$ и $2 \leqslant y < 3$.

3) $[x] = 1$, $[y] = 1$, $[z] = 2$. Решения определяются аналогично предыдущему случаю: $x = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$, $y = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$, $z = \dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

Рассмотрение случая $\boldsymbol{[x]\,[y]\,[z] = 3}$ также приводит к трем вариантам, каждый из которых не имеет решений. Разберите эти варианты самостоятельно.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{3}, \dfrac{\sqrt{30}}{2}, \dfrac{\sqrt{30}}{5}\right), \left(\dfrac{\sqrt{30}}{3}, \dfrac{\sqrt{30}}{4}, \dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right).$

156. Докажите, что разность $\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right] - 2^{p+1}$ делится на p, если p — простое число и $p > 2$.

Доказательство. Обозначим $S = \left(2+\sqrt{5}\right)^p$, а сопряженное к нему как $S' = \left(2-\sqrt{5}\right)^p$. Рассмотрим сумму $S + S'$.

Во-первых, применив формулу бинома Ньютона, определим, что выражение $S + S'$ является целым числом. Во-вторых, поскольку $2 - \sqrt{5} < 0$ и p — нечетное число, имеет место условие $-1 < S' < 0$.

Эти два факта дают основание утверждать, что выражение $S + S'$ есть наибольшее целое, не превосходящее сумму S, то есть $[S] = S + S'$. Таким образом, имеем

$$\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right] = \left(2+\sqrt{5}\right)^p + \left(2-\sqrt{5}\right)^p.$$

Далее остается раскрыть скобки и привести подобные члены

$$\begin{aligned}
&\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right] - 2^{p+1} = \\
&\qquad = 2\left(2^p + C_p^2 \cdot a_2 + C_p^4 \cdot a_4 + \ldots + C_p^{p-1} \cdot a_{p-1}\right) - 2^{p+1} = \\
&\qquad\qquad = 2\sum_n C_p^n \cdot a_n, \text{ где } a_n = 2^{p-n} \cdot 5^{n/2},\ n = 2,\ 4,\ \ldots,\ p-1.
\end{aligned}$$

Поскольку C_p^n кратны p, вся сумма делится на p. ∎

157. [28, с. 15] Докажите, что число $\left[\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}\right] + 1$ делится на 2^{n+1} при любом натуральном n.

Доказательство. Обозначим $S = \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}$, а сопряженное к нему как $S' = \left(\sqrt{3}-1\right)^{2n}$.

Отметим очевидный факт: $0 < S' < 1$.

Выражение $S + S'$ является целым числом, так как согласно биному Ньютона все слагаемые с множителем $\sqrt{3}$ в нечетной степени сокращаются. Таким образом, $[S] + 1 = S + S'$. Преобразуем сумму

$$\begin{aligned}
&[S] + 1 = \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{3}-1\right)^{2n} = \\
&\qquad = \left(4+2\sqrt{3}\right)^n + \left(4-2\sqrt{3}\right)^n = \\
&\qquad\qquad = 2^n\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Выражение $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ не только целое, оно еще четное, потому что слагаемые, которые не сократились, встречаются дважды. Следовательно, делимость на 2^{n+1} доказана. ■

Примечание. Интересно, а почему в условии задачи фигурирует 2^{n+1}? При каких значениях n число $\left[(\sqrt{3}+1)^{2n}\right]+1$ будет ли делиться на 2^{n+2} и 2^{n+3}?

Оказывается, это не такой сложный вопрос. Все зависит от делимости на 2 и 4 суммы M в выражении

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n=2\underbrace{\sum_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}\,2^{n-2k}\,3^k}_{M}.$$

Если n — четное число, то сумма M — нечетная (в M лишь последнее слагаемое, равное $3^{n/2}$, — нечетное).

Если n — нечетное число, то последнее слагаемое в M равно $n\cdot 2\cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$ — четное, но на 4 уже не делится, в то время как остальные слагаемые в M делятся на 4.

Таким образом, исходное выражение
1) делится на 2^{n+1} и не делится на 2^{n+2} при четных n;
2) делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3} при нечетных n.

158. Докажите, что $\left[(1+\sqrt{2})^n\right]\equiv n+1 \pmod 2$, где $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Выражение $(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$ является целым числом при любом $n\in\mathbb{N}$, более того, это выражение четное (все слагаемые с множителем $\sqrt{2}$ сокращаются, а остальные слагаемые — парные). Тогда

$$\left[(1+\sqrt{2})^n\right]=\left[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]=$$
$$=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n+\left[-(1-\sqrt{2})^n\right]\equiv\left[-(1-\sqrt{2})^n\right] \pmod 2.$$

Поскольку выполняются следующие условия:

$$\left[-(1-\sqrt{2})^n\right]=\begin{cases}-1 & \text{при чет. } n,\\ \ \ 0 & \text{при нечет. } n,\end{cases}\qquad n+1\equiv\begin{cases}1\pmod 2 & \text{при чет. } n,\\ 0\pmod 2 & \text{при нечет. } n,\end{cases}$$

сравнение из условия задачи доказано. ■

159. (Германия/1997-1998) Докажите, что $n + \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$ — нечетное число для всех $n \in \mathbb{N}$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи *158*.

160. (CRUX, задача 2060, N. Jurič) Докажите, что при любых натуральных m и n число

$$\left[\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n\right]$$

является нечетным.

Доказательство. При $\boldsymbol{m = 1}$ исходное число равно 1.

Пусть далее $\boldsymbol{m > 1}$. Рассмотрим сумму

$$S = \left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n + \left(m-\sqrt{m^2-1}\right)^n.$$

Сумма S всегда принимает целые и **четные** значения при любых натуральных n. Тогда

$$\left[\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n\right] = S + \left[-\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)^n\right] \equiv 1 \pmod 2,$$

поскольку $0 < m - \sqrt{m^2-1} < 1$ и антье равно -1.

■

161. (Нью-Йорк/1983) [39, с. 48] Найти все натуральные n, для которых число $\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$ является простым.

Решение. Рассмотрим следующее разбиение натуральных чисел, которое сводится к трем случаям: $n = 3k,\ 3k \pm 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

1) $n = 3k$: $\quad \left[\dfrac{n^2}{3}\right] = \left[\dfrac{9k^2}{3}\right] = 3k^2.$

Число $3k^2$ должно быть простым по условию задачи, что выполнимо только при $k = 1$. В ответ записываем $n = 3$.

2) $n = 3k \pm 1$: $\quad \left[\dfrac{n^2}{3}\right] = \left[\dfrac{9k^2 \pm 6k + 1}{3}\right] = 3k^2 \pm 2k = k(3k \pm 2).$

Число $k\,(3k \pm 2)$ должно быть простым. При $k \geqslant 2$ число будет составным, а при $k = 1$ простым числом будет только 5, то есть в ответ пишем $n = 4$. (Число 1 не является простым.)

Ответ: $3,\ 4.$

162. (Украина/1996) Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $\left[\dfrac{n^2}{5}\right]$ является простым.

Указание. См. аналогичную задачу *161*. Рассмотрите разбиение натуральных чисел: $n = 5k,\ 5k \pm 1,\ 5k \pm 2$, где $k \in \mathbb{N}$.

Ответ: 6.

163. (Olymon/2000/июнь) Пусть $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Определите количество действительных решений $(x,\ y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} [x] + 2y = a, \\ [y] + 2x = b. \end{cases}$$

Решение. Выражения $2x$ и $2y$ должны принимать целые значения. Значит, каждая из мантисс $\{x\}$ и $\{y\}$ равна либо 0, либо $\dfrac{1}{2}$. То есть имеются четыре случая:

$$1)\ \begin{cases} x + 2y = a, \\ y + 2x = b, \\ \{x\} = \{y\} = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} [x] + 2\,[y] = a, \\ [y] + 2\,[x] + 1 = b. \\ \{x\} = \dfrac{1}{2},\ \{y\} = 0, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} [x] + 2\,[y] + 1 = a, \\ [y] + 2\,[x] = b. \\ \{x\} = 0,\ \{y\} = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} [x] + 2\,[y] + 1 = a, \\ [y] + 2\,[x] + 1 = b. \\ \{x\} = \{y\} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, что в каждой из четырех систем, если решение и существует, то оно единственное. Условиями существования решений являются:

1) $(a + b) \vdots 3$,

2), 3) $(a + b - 1) \vdots 3$,

4) $(a + b - 2) \vdots 3$.

Ответ: два решения при $(a + b - 1) \vdots 3$, иначе — одно решение.

164. (Румыния/2003) Докажите неравенство

$$\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\} < \frac{1}{4}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. $\left[\sqrt{4n^2+n}\right] = 2n$ при $\forall n \in \mathbb{N}$, поскольку

$$2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n + \frac{1}{4}.$$

Из правого неравенства получим

$$\sqrt{4n^2+n} < \left[\sqrt{4n^2+n}\right] + \frac{1}{4}, \quad \left\{\sqrt{4n^2+n}\right\} < \frac{1}{4}.$$

■

165. (Фрагмент IMO$^\circ$/1979) Докажите неравенство

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

См. другой вариант доказательства — задача 453.

Доказательство. Согласно свойству антье (2.3) $\left[n\sqrt{2}\right] \leqslant n\sqrt{2}$, а с учетом иррациональности $n\sqrt{2}$ неравенство становится строгим

$$\left[n\sqrt{2}\right] < n\sqrt{2}.$$

Возведение в квадрат превращается в изящный трюк

$$\left[n\sqrt{2}\right]^2 + 1 \leqslant 2n^2.$$

Обоснование кроется в том, что если для целых чисел m и k выполняется условие $m < k$, то имеет место неравенство $m + 1 \leqslant k$.

Заключительные шаги приведем без комментариев

$$1 \leqslant 2n^2 - \left[n\sqrt{2}\right]^2 =$$
$$= \left(n\sqrt{2} + \left[n\sqrt{2}\right]\right) \cdot \left(n\sqrt{2} - \left[n\sqrt{2}\right]\right) < 2n\sqrt{2} \cdot \left\{n\sqrt{2}\right\}.$$

■

166. (Хорватия/2000) Докажите, что неравенство

$$\left[nx\right] + \left[ny\right] + \left[kx + ky\right] \leqslant \left[(n+k)x\right] + \left[(n+k)y\right] \qquad (166a)$$

выполняется для любых действительных x и y тогда и только тогда, когда $k = n$ (k, $n \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Достаточное условие $k = n$ приводит неравенство (166a) к виду

$$\big[kx\big] + \big[ky\big] + \big[kx + ky\big] \leqslant \big[2kx\big] + \big[2ky\big],$$

которое согласно (2.39) выполняется для любых действительных значений kx и ky.

Докажем необходимое условие. Далее будем считать, что k и n — взаимно простые числа, поскольку если k и n не являются таковыми, то с помощью замены $x' = xd$, $y' = yd$, где $d = \text{НОД}\,(n,\, k)$, совершается переход к неравенству с взаимно простыми коэффициентами.

Применим метод от противного.

Пусть неравенство (166a) выполняется для любых x, y, но $k \neq n$. Подберем такие значения x и y, что неравенство не будет выполняться. Сначала упростим неравенство, предполагая $x = y$:

$$2\big[nx\big] + \big[2kx\big] \leqslant 2\big[nx + kx\big],$$

вычтем справа и слева $2\,[nx] + 2\,[kx]$

$$\big[2kx - 2\,[kx]\big] \leqslant 2\big[nx + kx - [nx] - [kx]\big],$$

$$\big[2\,\{kx\}\big] \leqslant 2\big[\{nx\} + \{kx\}\big]. \qquad (166б)$$

Определим значение x как обыкновенную дробь $x = \dfrac{m}{n}$, где m — натуральное число, которое доопределим чуть позднее (кстати, дробь $\dfrac{m}{n}$ может быть и сократимой). Тогда неравенство (166$б$) примет вид

$$\left[2\left\{\frac{km}{n}\right\}\right] \leqslant 2\left[\left\{\frac{km}{n}\right\}\right]. \qquad (166в)$$

Поскольку k и n — взаимно простые числа, согласно п. А.8. среди натуральных чисел из множества $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n-1\}$ найдется такое значение m, при котором $\left\{\dfrac{km}{n}\right\} = \dfrac{n-1}{n}$. Это означает, что неравенства (166$в$), (166$б$) и (166a) не выполняются.

Следовательно, предположив, что неравенство (166a) выполняется для любых действительных x, y и $k \neq n$, получили противоречие с условием задачи при определенных значениях x и y. ■

4. Деление по модулю и арифметика остатков

Пусть при делении k и $n \in \mathbb{Z}$ на $m \in \mathbb{N}_{>1}$ получаются частные q_k и $q_n \in \mathbb{Z}$ соответственно и одинаковый остаток $r \in \mathbb{Z}_{[0,\,m-1]}$, то есть $k = q_k\,m + r$ и $n = q_n\,m + r$. Тогда говорят, что числа k и n сравнимы по модулю m и обозначают $k \equiv n \pmod{m}$.

Еще запись $n \equiv r \pmod{m}$ используется для обозначения остатка r от деления целого числа n по модулю m. Оказывается, что с помощью мантиссы можно выразить r через n и m:

$$r = n - q\,m = m \cdot \frac{n - q\,m}{m} = m \cdot \left\{\frac{n - q\,m}{m}\right\} = m \cdot \left\{\frac{n}{m} - q\right\} = m\left\{\frac{n}{m}\right\}.$$

$$n \equiv r \pmod{m} \quad \Longleftrightarrow \quad r = m\left\{\frac{n}{m}\right\}. \tag{4.1}$$

(Далее будем называть правую формулу *формулой остатка*).

Из утверждения (4.1) следует также

$$k \equiv n \pmod{m} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\frac{k}{m}\right\} = \left\{\frac{n}{m}\right\}. \tag{4.2}$$

С помощью формулы остатка можно «перепроверить» арифметику остатков.

Пусть $n_1 \equiv r_1 \pmod{m}$ и $n_2 \equiv r_2 \pmod{m}$, тогда очевидны равенства

$$\left\{\frac{n_1 + n_2}{m}\right\} = \left\{\frac{r_1 + r_2}{m}\right\},$$

$$\left\{\frac{n_1 \cdot n_2}{m}\right\} = \left\{\frac{r_1 \cdot r_2}{m}\right\}.$$

Таким образом, остатки можно складывать (вычитать) и умножать.

Вообще говоря, формулы (4.1) и (4.2) являются лишь переобозначением других известных формул с помощью знака мантиссы, то есть самостоятельного смысла они не несут.

4.1. Задачи по теме раздела

167. Упростите выражение

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} + \left\{-\frac{n+1}{m}\right\}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}.$$

168. Найдите сумму

$$S_n = \left\{\frac{1}{3}\right\} + \left\{\frac{2}{3}\right\} + \ldots + \left\{\frac{n^2}{3}\right\}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

169. Найдите сумму

$$S = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

170. Обозначим дни недели цифрами: «1» — понедельник, «2» — вторник, ..., «7» — воскресенье. Пусть первое число месяца выпадает на день недели F. По какой формуле вычисляется день недели для любого числа месяца N?

171. Покажите, что уравнение $\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$ имеет бесконечное количество решений на множестве рациональных нецелых чисел.

172. Докажите, что $\dfrac{1}{25}\displaystyle\sum_{k=0}^{2001}\left[\frac{2^k}{25}\right]$ является целым числом.

173. Докажите, что ни при каком натуральном $n \geqslant 3$ сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^3}{9}\right]$$

не является полным квадратом.

4.2. Указания, решения, ответы

167. Упростите выражение

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} + \left\{-\frac{n+1}{m}\right\}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Решение.

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} = \frac{k_1}{m},$$

где $n \equiv k_1 \pmod{m}$, причем $0 \leqslant k_1 < m$.

$$\left\{\frac{-(n+1)}{m}\right\} = \frac{k_2}{m},$$

где $-(n+1) \equiv -k_1 - 1 \equiv m - k_1 - 1 \pmod{m}$ и $k_2 = m - k_1 - 1$.

Тогда

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} + \left\{-\frac{n+1}{m}\right\} = \frac{m-1}{m}.$$

Ответ: $\dfrac{m-1}{m}$.

168. Найдите сумму

$$S_n = \left\{\frac{1}{3}\right\} + \left\{\frac{2}{3}\right\} + \ldots + \left\{\frac{n^2}{3}\right\}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Известно, что $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ или $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

В первом случае слагаемые разбиваются на повторяющиеся тройки (после вычисления мантисс) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + 0 = 1$. Поэтому

$$S_n = \frac{n^2}{3}.$$

Во втором случае, если отбросить последнее слагаемое $\left\{\dfrac{n^2}{3}\right\} = \dfrac{1}{3}$, согласно (4.2), то имеет место уже рассмотренная ситуация с суммированием повторяющихся троек. Тогда

$$S_n = \frac{n^2-1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{n^2}{3}.$$

Ответ: $S_n = \dfrac{n^2}{3}$.

169. (Россия/2000, А. С. Голованов) Найдите сумму

$$S = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

Решение.

$$S = \sum_{n=0}^{1000}\left[\frac{2^n}{3}\right] = \sum_{n=1}^{1000}\left[\frac{2^n}{3}\right] = \sum_{n=1}^{500}\left(\left[\frac{2^{2n-1}}{3}\right] + \left[\frac{2^{2n}}{3}\right]\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{500}\left(\frac{2^{2n-1}}{3} + \frac{2^{2n}}{3} - \left\{\frac{2^{2n-1}}{3}\right\} - \left\{\frac{2^{2n}}{3}\right\}\right) = \sum_{n=1}^{500}\left(2^{2n-1} - 1\right),$$

поскольку $4^n \equiv 1 \pmod 3$, то $2^{2n-1} \equiv 2 \pmod 3$ и $2^{2n} \equiv 1 \pmod 3$, значит, $\left\{\frac{2^{2n-1}}{3}\right\} + \left\{\frac{2^{2n}}{3}\right\} = 1$.

Сумму членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{500} 2^{2n-1}$ вычислите самостоятельно.

Ответ: $\dfrac{2^{1001} - 2}{3} - 500$.

170. Обозначим дни недели цифрами: «1» — понедельник, «2» — вторник, ..., «7» — воскресенье. Пусть первое число месяца выпадает на день недели F. По какой формуле вычисляется день недели для любого числа месяца N?

Решение. Задание упростится, если вести счет дней недели и чисел месяца с 0. Математики и, особенно, программисты так поступают довольно часто.

Введем обозначения n — число месяца и f — день недели такие, что $n = N - 1$ и $f = F - 1$, то есть первый день месяца имеет номер 0, а $f = 0$ — понедельник. Тогда требуемая формула имеет вид

$$n + f \pmod 7 = 7 \cdot \left\{\frac{n + f}{7}\right\}.$$

Ответ: $1 + 7 \cdot \left\{\dfrac{N + F - 2}{7}\right\}$.

171. (Беларусь/1999-2000) Покажите, что уравнение

$$\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\} \tag{171а}$$

имеет бесконечное количество решений на множестве рациональных нецелых чисел.

Решение. Для начала найдем частное решение уравнения (171*а*). В общем виде частное решение можно представить в виде

$$x = \frac{a}{m},\ y = \frac{b}{m},\ z = \frac{c}{m},\ \text{где } a, b, c \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}_{>1} \text{ и } a, b, c \not\vdots\, m. \tag{171б}$$

Отметим, что, во-первых, частное решение вида (171*б*) существует, что следует из условия задачи. Во-вторых, на основе частного решения можно построить бесконечную серию решений следующим образом:

$$x = \frac{a}{m}\left(nm^3 + 1\right),\ y = \frac{b}{m}\left(nm^3 + 1\right),\ z = \frac{c}{m}\left(nm^3 + 1\right).$$

Чтобы упростить исходное уравнение, сузим область поиска частного решения условиями

$$\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \left(\frac{b}{m}\right)^3 < 1 \quad \text{при } 0 < a,\ b < m. \tag{171в}$$

Тогда уравнение (171*а*) примет вид

$$\left\{\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \left(\frac{b}{m}\right)^3\right\} = \left\{\left(\frac{c}{m}\right)^3\right\},$$

что согласно (4.2) равносильно

$$a^3 + b^3 \equiv c^3 \pmod{m^3}. \tag{171г}$$

Сравнение (171*г*) имеет место для некоторого набора значений a, b, c и m, если найдется такое целое k, что выполняется равенство

$$a^3 + b^3 - c^3 = km^3,$$

которое при $k = -1$ примет вид

$$a^3 + b^3 + m^3 = c^3.$$

В данном равенстве можно увидеть известную сумму $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, то есть при $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$ и $m = 5$ удалось найти частное решение вида (171*б*) при условии (171*в*).

Способ построения бесконечной серии решений приведен выше.

Ответ: $x = \dfrac{3}{5}\big(125n+1\big),\ y = \dfrac{4}{5}\big(125n+1\big),\ z = \dfrac{6}{5}\big(125n+1\big),\ n \in \mathbb{Z}.$

172. (Австрия/2001) Докажите, что сумма $S = \dfrac{1}{25}\displaystyle\sum_{k=0}^{2001}\left[\dfrac{2^k}{25}\right]$ является целым числом.

Доказательство. В дальнейшем пригодятся следующие факты из арифметики остатков по модулю 25:

$$2^0 \equiv 1 \pmod{25}, \qquad 2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25},$$

следовательно, $2^{n+10} = 2^n \cdot 2^{10} \equiv -2^n \pmod{25}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Сумма двух мантисс нецелых значений с противоположными знаками равна -1, значит,

$$\left\{\frac{2^n}{25}\right\} + \left\{\frac{2^{n+10}}{25}\right\} = -1.$$

Воспользуемся данным свойством, чтобы избавиться от знаков антье в сумме S, расставляя парами соответствующие слагаемые:

$$\left[\frac{2^n}{25}\right] + \left[\frac{2^{n+10}}{25}\right] = \frac{2^n}{25} + \frac{2^{n+10}}{25} - \left(\left\{\frac{2^n}{25}\right\} + \left\{\frac{2^{n+10}}{25}\right\}\right) = \frac{2^n + 2^{n+10}}{25}.$$

Разобьем сумму S на серии по двадцать слагаемых, установив начало суммы на 2-е слагаемое, поскольку 0-е и 1-е слагаемые равны 0 (3-е и 4-е слагаемые также равны 0, но они пригодятся для парности).

$$S = \frac{1}{25}\sum_{k=2}^{2001}\left[\frac{2^k}{25}\right] = \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\sum_{j=0}^{19}\left[\frac{2^{2+j+20m}}{25}\right] =$$

$$= \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\sum_{i=0}^{9}\left(\left[\frac{2^{2+i+20m}}{25}\right] + \left[\frac{2^{2+i+20m+10}}{25}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{2^{2+i+20m} + 2^{2+i+20m+10}}{25} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\left(2^{20m}\underbrace{\sum_{i=0}^{9}\frac{2^2\cdot 2^i\cdot 1025}{25}}_{\textit{целое число } A} + 10\right) =$$

$$= \frac{A}{25}\sum_{m=0}^{99} 2^{20m} + 40 = \frac{A\left(2^{2000}-1\right)}{25} + 40,$$

$2^{2000} - 1 \equiv 0 \pmod{25}$, следовательно, сумма S — натуральное число. ■

173. (HMMT/2002) Докажите, что ни при каком натуральном $n \geqslant 3$ сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{k^3}{9}\right]$ не является полным квадратом.

Доказательство. Легко проверить, что $S_3 = 3$, $S_4 = 10$, $S_5 = 23$ — неполные квадраты.

Докажем, что $9S_n$ не будет полным квадратом для $\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$ (следовательно, и S_n не является полным квадратом).

$$9S_n = 9\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^3}{9}\right] = 9\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^3}{9} - \left\{\frac{k^3}{9}\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} 9\left\{\frac{k^3}{9}\right\} = \ldots$$

согласно (В.7) и (4.1)

$$\ldots = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \pmod 9 = \ldots$$

(воспользуемся тем, что количества слагаемых вида $(3k-2)^3 \equiv 1 \pmod 9$ и $(3k-1)^3 \equiv 8 \pmod 9$ равны $\left[\dfrac{n+2}{3}\right]$ и $\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$ соответственно, слагаемые $(3k)^3 \equiv 0 \pmod 9$ не представляют интереса)

$$\ldots = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+2}{3}\right] - 8\left[\frac{n+1}{3}\right].$$

Покажем, что числовые выражения $9S_n$ при $\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant 4}$ располагаются на числовой прямой строго между соседними полными квадратами, то есть $9S_n$ не может быть полным квадратом:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)^2 < 9S_n < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \text{ где } n \in \mathbb{N}_{\geqslant 4}, \tag{173a}$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+2}{3}\right] - 8\left[\frac{n+1}{3}\right] < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Правое неравенство (173*а*) очевидно. Докажем левое неравенство (173*а*).

$$\left[\frac{n+2}{3}\right]+8\left[\frac{n+1}{3}\right]<\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)^2. \qquad (173б)$$

Сумма антье меньше антье суммы, тогда

$$\left[\frac{n+2}{3}\right]+8\left[\frac{n+1}{3}\right]\leqslant\left[3n+\frac{10}{3}\right]=3n+3.$$

После упрощения правой части (173*б*) получим неравенство, которое выполняется при $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 4}$:

$$3n+3<n^2+n-1. \qquad (173в)$$

Таким образом, (173*в*) $\Longrightarrow$ (173*б*) $\Longrightarrow$ (173*а*) $\Longrightarrow$ S_n не является полным квадратом при $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 3}$.

■

5. Подсчет кратных

Доказательство математического утверждения методом интерпретаций всегда выглядит нетривиально и элегантно, даже если это не слишком сложное утверждение. В данном разделе таким методом доказывается свойство антье $\left[\dfrac{[x]}{d}\right] = \left[\dfrac{x}{d}\right]$. Впрочем, затем приводится аналитическое доказательство формулы. Напомним, что ранее приведен еще один способ доказательства, см. п. 2.10.

В п. 5.2. выводятся формулы для решения различных комбинаторных задач на подсчет кратных.

5.1. Комбинаторный смысл $\left[\dfrac{x}{d}\right]$

Пусть $x \in \mathbb{R}_{>0}$ и $d \in \mathbb{N}$. Выражение $\left[\dfrac{x}{d}\right]$ определяет количество натуральных чисел, меньших или равных x, кратных d.

Обоснуем этот факт. Пусть $\left[\dfrac{x}{d}\right] = k$. Тогда

$$k \leqslant \frac{x}{d} < (k+1), \quad k\,d \leqslant x < (k+1)\,d,$$

что позволяет сделать вывод: числа d, $2d$, ..., kd, и только они, удовлетворяют критерию отбора натуральных чисел, меньших или равных x, кратных d.

Приведенная выше интерпретация выражения $\left[\dfrac{x}{d}\right]$ помогает доказать следующее равенство

$$\left[\frac{[x]}{d}\right] = \left[\frac{x}{d}\right] \quad \text{при } x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \text{ и } d \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Действительно, количество натуральных чисел, кратных d, меньших или равных как x, так и $[x]$, будет тем же. ■

На самом деле, ограничение положительности x является вовсе не обязательным.

Докажем (5.1) для $x \in \mathbb{R}$. Для любого $x < 0$ найдется натуральное число k, кратное d ($kd = n$), такое, что $k + x > 0$. Тогда

$$\left[\frac{x}{d}\right] = \left[k + \frac{x}{d}\right] - k = \left[\frac{n+x}{d}\right] - k =$$
$$= \left[\frac{[n+x]}{d}\right] - k = \left[k + \frac{[x]}{d}\right] - k = \left[\frac{[x]}{d}\right].$$

5.2. Подсчет кратных

Пусть a, $b \in \mathbb{N}$ и a, b — взаимно простые числа. Подсчет количества натуральных чисел, не превосходящих x и кратных a или b, выполняется по формуле

$$N(a \vee b) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] - \left[\frac{x}{ab}\right]. \tag{5.2}$$

Присутствие вычитаемого $\left[\frac{x}{ab}\right]$ в формуле (5.2) объясняется тем, что в сумме $\left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right]$ дважды подсчитаны числа, кратные и a, и b.

При подсчете чисел, кратных a, но не кратных b, применяется очевидная формула

$$N(a \wedge \bar{b}) = \left[\frac{x}{a}\right] - \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{ab}\right] \tag{5.3}$$

(«$\bar{b}$» указывает на отрицание, то есть кратность b не разрешена).

Если подсчет чисел ведется при условии альтернативной кратности, то есть допускаются числа либо кратные a, либо кратные b, то формула будет следующей

$$N(a \wedge \bar{b} \ \vee \ b \wedge \bar{a}) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] - 2\left[\frac{x}{ab}\right]. \tag{5.4}$$

Приведем аналогичные формулы для трех попарно взаимно простых чисел a, b, c

$$N(a \vee b \vee c) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{c}\right] -$$
$$- \left(\left[\frac{x}{ab}\right] + \left[\frac{x}{bc}\right] + \left[\frac{x}{ac}\right]\right) + \left[\frac{x}{abc}\right]. \tag{5.5}$$

$$N(a\wedge\bar b\wedge\bar c\ \vee\ b\wedge\bar a\wedge\bar c\ \vee\ c\wedge\bar a\wedge\bar b)=\left[\frac{x}{a}\right]+\left[\frac{x}{b}\right]+\left[\frac{x}{c}\right]-$$
$$-2\left(\left[\frac{x}{ab}\right]+\left[\frac{x}{bc}\right]+\left[\frac{x}{ac}\right]\right)+3\left[\frac{x}{abc}\right]. \qquad (5.6)$$

Можно вывести и другие формулы для n делителей, но они довольно громоздкие. На приведенных примерах уже видны правила и закономерности их составления.

174. В ряду натуральных чисел 1, 2, 3, ..., 100 вычеркнули числа, которые делятся на 2, 3 и 5. Сколько осталось чисел?

Решение. Согласно формуле (5.5) было вычеркнуто (пояснения и обозначения см. п. 5.1.)

$$N(2\vee 3\vee 5)=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{5}\right]-$$
$$-\left(\left[\frac{100}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{100}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{100}{3\cdot 5}\right]\right)+\left[\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=$$
$$=50+33+20-(16+10+6)+3=74.$$

Обратите внимание, что почти три четверти чисел от 1 до 100 делятся на одно из чисел 2, 3 и 5.

Ответ: 26.

175. Определите количество целых положительных чисел, не превосходящих 100 и взаимно простых с числом 36.

Решение. Так как $36=2^2\cdot 3^3$, по формуле (5.2) найдем количество целых чисел от 1 до 100 включительно, которые кратны 2 и 3 (пояснения и обозначения см. п. 5.1.)

$$N(2\vee 3)=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]-\left[\frac{100}{2\cdot 3}\right]=67.$$

Ответ: 33.

176. Сколько чисел в интервале от 1 до 100 делится на одно и только одно какое-нибудь из чисел 2, 3 или 5?

Указание. Примените формулу (5.6).

Ответ: 48.

5.3. Задачи по теме раздела

В задачах данного раздела используются две функции натурального числа (см. также пп. А.4.-А.5.):

$\tau(n)$ — функция, определяющая количество делителей натурального числа n,

$\sigma(n)$ — функция, определяющая сумму всех делителей натурального числа n.

177. В натуральном ряду вычеркнули числа, не кратные 2 и 3. Определите число, которое стоит на 1000-ом месте.

178. Вычислите сумму

$$S = [2\pi] + \left[\frac{[3\pi]}{2}\right] + \left[\frac{[4\pi]}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{[2015\pi]}{2014}\right].$$

179. Функция $F(x)$ задана формулой $F(x) = \underbrace{f\big(f\big(\ldots f\big(}_{2015}x\big)\ldots\big)\big)$, где $f(x) = \dfrac{[x]}{5}$. Вычислите $F(x)$ при $x = \dfrac{2\cdot 5^{2015}}{3}$.

180. Сформулируйте необходимое и достаточное условие равенства

$$\left[\frac{k+1}{n}\right] = \left[\frac{k+n}{n}\right], \quad \text{где } k,\ n \in \mathbb{N}.$$

181. Докажите неравенство

$$\left[\frac{k}{n}\right] \geqslant \left[\frac{k+1}{n}\right] - 1, \text{ где } k,\ n \in \mathbb{N}.$$

182. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n+1}{1}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+1}{n+1}\right] =$$
$$= \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] + \tau(n+1).$$

183. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$1 \cdot \left[\frac{n+1}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] + \ldots + (n+1) \cdot \left[\frac{n+1}{n+1}\right] =$$
$$= 1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n \cdot \left[\frac{n}{n}\right] + \sigma(n+1).$$

184. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n).$$

185. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n \cdot \left[\frac{n}{n}\right] = \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n).$$

186. Имеется несколько натуральных чисел, каждое из которых меньше чем 1951. Наименьшее общее кратное любых двух из них больше чем 1951. Доказать, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

187. Определите наибольшее значение натурального числа n, для которого выполняется неравенство

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{11}\right] + \left[\frac{n}{13}\right] < n.$$

5.4. Указания, решения, ответы

177. В натуральном ряду вычеркнули числа, не кратные 2 и 3. Определите число, которое стоит на 1000-ом месте.

Решение. Воспользуемся формулой (5.2)

$$N(2 \vee 3) = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] = 1000.$$

Найдем натуральное решение данного уравнения, кратное и 2, и 3.

$$\left[\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{6}\right]\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1000,$$

$$\left[\frac{x}{3} + \left\{\frac{x}{6}\right\}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1000,$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x}{3} + \left\{\dfrac{x}{6}\right\}\right] = 500, \\ \left[\dfrac{x}{3}\right] = 500, \end{cases}$$

$$x = 1500,\ 1501,\ 1502.$$

Лишь число 1500 делится на 2 и 3 нацело.

Ответ: 1500.

178. Вычислите сумму

$$S = [2\pi] + \left[\frac{[3\pi]}{2}\right] + \left[\frac{[4\pi]}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{[2015\pi]}{2014}\right].$$

Решение. Согласно свойству (5.1) знаки антье, стоящие в числителях, снимаются

$$\left[\frac{[(n+1)\pi]}{n}\right] = \left[\frac{(n+1)\pi}{n}\right] = \left[\pi + \frac{\pi}{n}\right], \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2014.$$

Тогда $S = 6 + 4 + 4 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{2011} = 6047.$

Ответ: 6047.

179. Функция $F(x)$ задана формулой $F(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{2015}x)\ldots))$, где $f(x) = \dfrac{[x]}{5}$. Вычислите $F(x)$ при $x = \dfrac{2\cdot 5^{2015}}{3}$.

Указание. Согласно свойству (5.1) $F(x) = \dfrac{1}{5}\cdot\left[\dfrac{x}{5^{2014}}\right]$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}$.

180. Сформулируйте необходимое и достаточное условие равенства

$$\left[\frac{k+1}{n}\right] = \left[\frac{k+n}{n}\right], \quad \text{где } k,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Преобразуем предполагаемое равенство

$$\left[\frac{k+1}{n}\right] = \left[\frac{k}{n}\right] + 1.$$

Сравним количества кратных числу n соседних натуральных чисел $k+1$ и k. Во-первых, количества кратных могут отличаться только на 1. Во-вторых, если $k+1$ делится нацело на n, тогда k не делится на n. Причем данные рассуждения справедливы и при $n = 1$.

Очевидно, что верно и обратное утверждение.

Ответ:

$$\left[\frac{k+1}{n}\right] = \left[\frac{k+n}{n}\right] \iff (k+1)\,\vdots\, n. \tag{180a}$$

181. Докажите неравенство

$$\left[\frac{k}{n}\right] \geqslant \frac{k+1}{n} - 1, \quad \text{где } k,\ n\in\mathbb{N}. \tag{181a}$$

Доказательство. Согласно утверждению, доказанному в задаче *180*, если $(k+1)\,\vdots\, n$, то имеет место равенство в (181a).

Поскольку упомянутое утверждение является необходимым и достаточным, то при $(k+1)\not\vdots\, n$

$$\left[\frac{k}{n}\right] > \left[\frac{k+1}{n}\right] - 1, \text{ или } \left[\frac{k}{n}\right] \geqslant \frac{k+1}{n} - 1.$$

■

182. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n+1}{1}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+1}{n+1}\right] = \\ = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] + \tau(n+1). \tag{182a}$$

Доказательство. Переформулируем утверждение, доказанное в задаче *180*. Для любых q, $p \in \mathbb{N}$

$$\left[\frac{q+1}{p}\right] = \left[\frac{q}{p}\right] + \begin{cases} 1, & \text{если } (q+1) \vdots p, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что из этого условия следует тождество (182a). ■

183. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$1 \cdot \left[\frac{n+1}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] + \ldots + (n+1) \cdot \left[\frac{n+1}{n+1}\right] = \\ = 1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n \cdot \left[\frac{n}{n}\right] + \sigma(n+1). \tag{183a}$$

Доказательство. Будем рассуждать аналогично объяснениям из задачи *182*.

Если $(n+1) \vdots d$ $(d = 1, 2, \ldots, n)$, то соответствующее слагаемое $d \cdot \left[\frac{n}{d}\right]$ из правой части (183a) увеличится на d.

Последнее слагаемое из левой части (183a) равно $(n+1)$ — это больший делитель числа $(n+1)$. ■

184. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n). \tag{184a}$$

Доказательство. Тождество (184a) следует из тождества (182a). ■

185. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$1 \cdot \left[\frac{n}{1}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n \cdot \left[\frac{n}{n}\right] = \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n). \quad (185a)$$

Доказательство. Тождество (185a) следует из тождества (183a). ■

186. (Москва/1951) Имеется несколько натуральных чисел, каждое из которых меньше чем 1951. Наименьшее общее кратное любых двух из них больше чем 1951. Доказать, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

Доказательство. Обозначим натуральные числа из условия задачи $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $m = 1951$.

Поскольку для любых a_i, $a_j \in A$ выполняется условие

$$\text{НОК}\,(a_i, a_j) > m$$

(здесь и далее $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $i \neq j$), то все a_i — различные, и не существует k_i, $k_j \in \mathbb{N}$ таких, что $a_i k_i = a_j k_j < m$.

Сделаем вывод, что числа из множества A обладают следующим свойством: каждый из элементов множества $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ может делиться нацело только на одно из чисел a_i. То есть множество M содержит без повторений все не превосходящие m делители чисел a_1, a_2, … a_n. Тогда

$$\left[\frac{m}{a_1}\right] + \left[\frac{m}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{a_n}\right] \leqslant m,$$

$$\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \ldots + \frac{m}{a_n} \leqslant$$
$$\leqslant m + \left\{\frac{m}{a_1}\right\} + \left\{\frac{m}{a_2}\right\} + \ldots + \left\{\frac{m}{a_n}\right\} <$$
$$< m + n < 2m,$$

что доказывает $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} < 2$. ■

187. (USA Talent/2007-2008) Определите наибольшее значение натурального числа n, для которого выполняется неравенство

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{11}\right]+\left[\frac{n}{13}\right]<n. \qquad (187a)$$

Решение. Обозначим сумму антье, стоящую в левой части неравенства ($187a$), через S.

Воспользуемся утверждением, доказанным в задаче (181),

$$\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant\frac{n+1}{2}-1,\quad \left[\frac{n}{3}\right]\geqslant\frac{n+1}{3}-1 \quad \text{и т. д.}$$

$$S\geqslant\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{3}+\frac{n+1}{11}+\frac{n+1}{13}-4=\frac{859n}{858}-\frac{3\cdot 858-1}{858}$$

$$\big(858=2\cdot 3\cdot 11\cdot 13,\ 859=3\cdot 11\cdot 13+2\cdot 11\cdot 13+2\cdot 3\cdot 13+2\cdot 3\cdot 11\big).$$

Поскольку неравенство ($187a$) целочисленное, то перейдем к равносильному нестрогому неравенству

$$S\leqslant n-1.$$

Тогда $n\leqslant 2\cdot 858-1$. Подстановкой значения $n=2\cdot 858-1=1715$ в неравенство ($187a$) убеждаемся, что при данном значении неравенство выполняется.

Ответ: 1715.

6. Формула Лежандра

Для вывода формулы Лежандра понадобится формула канонического разложения натурального числа на простые сомножители.

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число n можно представить в виде

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — простые числа, причем такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей.

Нам пригодится другая формулировка теоремы.

Каждое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k},$$

где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Такое разложение числа n на простые сомножители называют *каноническим*.

Формула Лежандра. Число вхождений простого числа p в каноническое разложение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ определяется суммой

$$e_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ \ldots\ . \tag{6.1}$$

Доказательство. Если число $n < p$, то в $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ отсутствуют множители, кратные p, то есть формула Лежандра справедливо дает 0.

Предположим, что $n \geqslant p$. Тогда нам известны все делители числа n, кратные p: p, $2p$, $3p$ и т. д. Также известно их количество — $\left[\frac{n}{p}\right]$ делителей. Таким образом, $n!$ можно представить в виде

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = p \cdot 2p \cdot 3p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] p \cdot N_1 = p^{\alpha_1} \cdot \alpha_1! \cdot N_1,$$

где $\alpha_1 = \left[\dfrac{n}{p}\right]$ и N_1 не делится на p.

Итак, в представлении $n!$ помимо p^{α_1} имеются:

$\alpha_1!$ — в этом произведении могут быть сомножители, кратные p (этими сомножителями являются оставшиеся фрагменты от кратных p^2 множителей, составляющих $n!$), и

N_1 — число, которое не делится на p.

Повторим рассуждения с начала доказательства, но уже для $\alpha_1!$

$$\alpha_1! = p^{\alpha_2} \cdot \alpha_2! \cdot N_2, \text{ где } \alpha_2 = \left[\frac{\alpha_1}{p}\right] = \left[\frac{[n/p]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right] \text{ и } N_2 \not\vdots\, p.$$

Отметим, что используется тождество (5.1) $\left[\dfrac{[x]}{p}\right] = \left[\dfrac{x}{p}\right]$.

Таким образом, получим после двух проходов, на которых выделены p^{α_1} и p^{α_2} из $n!$:

$$n! = p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \cdot \alpha_2! \cdot N_1 \cdot N_2.$$

Повторяя описанный алгоритм конечное число итераций, получим

$$n! = p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p^{\alpha_k} \cdot M = p^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k} \cdot M,$$

где $\alpha_i = \left[\dfrac{n}{p^i}\right]$ и M не делится на p. Комбинаторный смысл α_i заключается в том, что α_i равно количеству делителей числа $n!$, кратных p^i.

Согласно основной теореме арифметики, каноническое представление $n!$ единственно, то есть формула из предыдущего абзаца выражает единственным способом $n!$ в виде произведения $p^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots}$ и числа M, не кратного p.

■

Зададимся вопросом, а сколько ненулевых слагаемых в сумме (6.1)? Обоснуйте самостоятельно, что их количество равно $\left[\log_p n\right]$.

Заметим, что вычисление $e_p(n)$ можно оптимизировать

$$e_p(n) = \sum_{k=1}^{\left[\log_p n\right]} n_k, \quad \text{где } n_1 = \left[\frac{n}{p}\right],\ n_{k+1} = \left[\frac{n_k}{p}\right] \tag{6.2}$$

(см. задачу 189, в которой продемонстрирована данная оптимизация).

Согласно основной теореме арифметики и формуле Лежандра, число $n!$ представимо в виде канонического разложения на простые сомножители как

$$n! = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{b_m}, \tag{6.3}$$

где $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$ — простые числа, $b_i = e_{q_i}(n)$ — число вхождений простого числа q_i $\big(i = 1,\, 2,\, \ldots, m\big)$ в каноническое разложение $n!$.

Представляет интерес следующая оценка для показателей степеней b_i простых чисел q_i из формулы (6.3)

$$b_i = e_{q_i}(n) = \left[\frac{n}{q_i}\right] + \left[\frac{n}{q_i^2}\right] + \ldots \leqslant \left[\frac{n}{q_i} + \frac{n}{q_i^2} + \ldots\right] = \left[\frac{n}{q_i - 1}\right]. \tag{6.4}$$

188. Определите, на какую наибольшую степень чисел: а) 7, б) 77, в) 777 делится выражение 7777!.

Решение. По формуле Лежандра $e_7(7777) = \left[\frac{7777}{7}\right] + \left[\frac{7777}{49}\right] + \left[\frac{7777}{343}\right] + \left[\frac{7777}{2401}\right] = 1111 + 158 + 22 + 3 = 1294.$

Так как $77 = 7 \cdot 11$, считаем степени числа 11 (числа, кратные 11, встречаются реже): $e_{77}(7777) = e_{11}(7777) = \left[\frac{7777}{11}\right] + \left[\frac{7777}{121}\right] + \left[\frac{7777}{1331}\right] = 707 + 64 + 5 = 776.$

Аналогично предыдущему случаю, $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$: $e_{777}(7777) = e_{37}(7777) = \left[\frac{7777}{37}\right] + \left[\frac{7777}{1369}\right] = 210 + 5 = 215.$

Ответ: а) 1294, б) 776, в) 215.

189. Сколькими нулями оканчивается число 2014!?

Решение. Небольшая хитрость данной задачи заключается в определении простого числа, кратные которому множители ответственны за все нули на конце числа 2014!. Например, число $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ оканчивается двумя нулями.

Пусть число $n!$ оканчивается на m нулей. Тогда в каноническом разложении этого числа присутствует произведение $2^k \cdot 5^m$, причем $k > m$, поскольку никакие другие простые числа не участвуют в образовании нулей на конце числа $n!$. Таким образом, какова будет степень простого числа 5 в разложении числа 2014!, столькими нулями и будет оканчивается число 2014!.

Воспользуемся формулой (6.2)

$$e_5(2014) = \left[\frac{2014}{5}\right] + \ldots = 402 + \left[\frac{402}{5}\right] + \ldots =$$

$$= 402 + 80 + \left[\frac{80}{5}\right] + \ldots = 402 + 80 + 16 + \left[\frac{16}{5}\right] + \ldots =$$

$$402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

Ответ: 501 нуль.

190. Найдите наименьшее n такое, что $n!$ оканчивается на 100 нулей.

Решение. Согласно оценке (6.4) $100 = e_5(n) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]$ (считаем, как и в задаче *189*, степени простого числа 5). Число n должно быть не меньше 400. Проверкой убеждаемся, что $e_5(400) = 99$, то есть необходим еще один множитель, кратный 5.

Ответ: $n = 405$.

6.1. Задачи по теме раздела

191. Найдите такое наибольшее натуральное число n, что число $\big((3!)!\big)!$ кратно 3^n.

192. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $2014!$ не делится на 37^n.

193. Может ли $n!$ оканчиваться ровно а) 2014, б) 2015 нулями?

194. Найдите знаменатель дроби, полученной после сокращения:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 99\cdot 100}{6^{100}}.$$

195. Докажите, что число C_{33}^{11} делится на 144.

196. Докажите, что произведение чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

197. Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ — натуральные числа и $a_1+a_2+\ldots+a_m=\ n$. Докажите, что $\dfrac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots\,a_m!}$ — целое число.

198. Докажите, что число $\dfrac{n!}{2^n}$ — нецелое. При каком натуральном m число $\dfrac{n!}{2^{n-m}}$ будет целым при всех натуральных n?

199. Докажите, что при $n\in\mathbb{N}$ число $\dfrac{n!\cdot(6n!)}{(2n!)^2\cdot(3n!)}$ будет целым.

200. Докажите, что при $m,n\in\mathbb{N}$ число $\dfrac{(2m)!\cdot(2n)!}{m!\cdot n!\cdot(m+n)!}$ будет целым.

201. Определите наименьшее количество нулей, на которые заканчивается число $a!\cdot b!\cdot c!$ при условии $a+b+c=2006$ (a, b и c — натуральные числа).

202. Пусть при $x\in\mathbb{R}_{>0}$ определена функция $T(x)=\sum\limits_{k\leqslant x,\,k\in\mathbb{N}}\ln k$.

Докажите, что $T(x)=\sum\limits_{p\leqslant x,\,p\in\mathbb{P}}e_p(x)\cdot\ln p$.

203. Докажите, что

$$p^n\big(p^n-1\big)\ldots\big(p^2-1\big)\big(p-1\big)\,\vdots\,n!,\quad \text{где } p\in\mathbb{P},\ n\in\mathbb{N}.$$

6.2. Указания, решения, ответы

191. Найдите такое наибольшее натуральное число n, что число $\big((3!)!\big)!$ кратно 3^n.

Указание. $\big((3!)!\big)! = (6!)! = 720!$.
Согласно формуле Лежандра $e_3(720) = 356$.

Ответ: $n = 356$.

192. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $2014!$ не делится на 37^n.

Решение. Число 37 — простое, тогда по формуле Лежандра $e_{37}(2014) = 55$. Следовательно, 37^{56} не делит $2014!$.

Ответ: $n = 56$.

193. Может ли $n!$ оканчиваться ровно а) 2014, б) 2015 нулями?

Указание. $e_5(8074) = 2014$, $e_5(8075) = 2016$.

Ответ: а) может, б) не может.

194. (Украина/1958) Найдите знаменатель дроби, полученной после сокращения:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100}{6^{100}}.$$

Указание. $e_2(100) = 97$, $e_3(100) = 48$.

Ответ: $2^3\cdot 3^{52}$.

195. Докажите, что число C_{33}^{11} делится на 144.

Доказательство. $144 = 2^4\cdot 3^2$. Подсчитаем, в каких степенях входят простые числа 2 и 3 в числитель и знаменатель дроби, которой является C_{33}^{11}, и затем сократим дробь

$$C_{33}^{11} = \frac{33!}{11!\cdot 22!} = \frac{2^{31}\cdot 3^{15}\cdot K}{(2^8\cdot 3^4\cdot L)\cdot(2^{19}\cdot 3^9\cdot M)} = 2^4\cdot 3^2\cdot N,$$

где K, L, M, N — натуральные числа, не кратные числам 2 и 3. Число $N = \dfrac{K}{L\cdot M}$ будет натуральным, так как C_n^k всегда натуральное число. ■

196. Докажите, что произведение чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

Доказательство. Заметим, что $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n = \dfrac{(2n)!}{n!}$. Согласно формуле Лежандра количества вхождений числа 2 в разложения $(2n)!$ и $n!$ равны $e_2(2n)$ и $e_2(n)$ соответственно. Распишем $e_2(2n)$:

$$e_2(2n) = \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \left[\frac{2n}{8}\right] + \ldots = n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots = n + e_2(n).$$

Наибольшая степень числа 2, на которую будет делиться произведение от $n+1$ до $2n$, равняется $e_2(2n) - e_2(n)$, то есть n. ■

197. Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ — натуральные числа и $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$. Докажите, что $\dfrac{n!}{a_1!\, a_2!\ \ldots\ a_m!}$ — целое число.

Доказательство. Пусть p — простое число, которое встречается в разложении числа n.

Согласно свойству «антье суммы не меньше суммы антье» (2.33)

$$e_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] =$$

$$= \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{p}\right] + \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{p^k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{a_1}{p}\right] + \left[\frac{a_1}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_1}{p^k}\right] +$$

$$+ \left[\frac{a_2}{p}\right] + \left[\frac{a_2}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_2}{p^k}\right] +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \left[\frac{a_m}{p}\right] + \left[\frac{a_m}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_m}{p^k}\right] =$$

$$= e_p(a_1) + e_p(a_2) + \ldots + e_p(a_m).$$

Следовательно, $e_p(n) \geqslant e_p(a_1) + e_p(a_1) + \ldots + e_p(a_m)$. ■

198. Докажите, что число $\dfrac{n!}{2^n}$ — нецелое. При каком натуральном m число $\dfrac{n!}{2^{n-m}}$ будет целым при всех натуральных n?

Доказательство. Если $n \neq 2^k$, то

$$e_2(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots < \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots \leqslant n.$$

Если же $n = 2^k$, то

$$e_2(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + 1 = n - 1.$$

Таким образом, число 2^n не является делителем числа $n!$.

Перейдем ко второй части задания. Дробь $\dfrac{n!}{2^{n-m}}$ будет целым числом при всех натуральных n, если

$$e_2(n) \geqslant n - m,$$
$$m \geqslant n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right] - \ldots\ ,$$
$$m \geqslant \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{4}\right\} + \left\{\frac{n}{8}\right\} + \ldots\ .$$

Напомним, что требуется найти такое натуральное число m, при котором последнее условие выполняется при любом натуральном n. Заметим, что сумма мантисс достигает наибольшего значения, если мантиссы принимают следующие значения

$$\left\{\frac{n}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{3}{4}, \quad \left\{\frac{n}{8}\right\} = \frac{7}{8}, \quad \ldots\ ,$$

то есть $n = 2^k - 1$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$e_2(n) = e_2(2^k - 1) = \left[\frac{2^k - 1}{2}\right] + \left[\frac{2^k - 1}{4}\right] + \ldots =$$
$$= (2^{k-1} - 1) + (2^{k-2} - 1) + \ldots + (1 - 1) =$$
$$= 2^k - 1 - k = n - k = n - \log_2(n+1).$$

Таким образом, для чисел вида $n = 2^k - 1$ выполняется условие $m \geqslant \log_2(n+1)$. Значит, не существует таких натуральных значений m, чтобы число $\dfrac{n!}{2^{n-m}}$ было целым для любого n. ∎

199. [17, с. 61] Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ число

$$\frac{n! \cdot (6n!)}{(2n!)^2 \cdot (3n!)}$$

будет целым.

Доказательство. Ясно, что любое простое число, которое входит в каноническое разложение чисел $n!$, $(2n)!$ или $(3n)!$, входит и в каноническое разложение числа $(6n)!$.

Пусть p — простое число, входящее в каноническое разложение числа $(6n)!$. Тогда число $\dfrac{n! \cdot (6n)!}{(2n!)^2 \cdot (3n)!}$ будет целым, если

$$e_p(n) + e_p(6n) - 2e_p(2n) - e_p(3n) \geqslant 0. \qquad (199a)$$

Преобразуем выражение, стоящее в левой части утверждения (199a):

$$e_p(n) + e_p(6n) - 2e_p(2n) - e_p(3n) =$$

$$= \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots\right) + \left(\left[\frac{6n}{p}\right] + \left[\frac{6n}{p^2}\right] + \ldots\right) -$$

$$-2\left(\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \ldots\right) - \left(\left[\frac{3n}{p}\right] + \left[\frac{3n}{p^2}\right] + \ldots\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{6n}{p}\right] - 2\left[\frac{2n}{p}\right] - \left[\frac{3n}{p}\right]\right) +$$

$$+ \left(\left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{6n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{2n}{p^2}\right] - \left[\frac{3n}{p^2}\right]\right) + \ldots\ .$$

Обратим внимание, что если доказать справедливость неравенства

$$[x] + [6x] - 2[2x] - [3x] \geqslant 0 \qquad (199б)$$

для любого $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, то утверждение, приведенное в условии задачи, можно считать доказанным.

Доказательство неравенства (199$б$) приведено в задачах *103* и *316*.

■

200. Докажите, что при m, $n \in \mathbb{N}$ число

$$\frac{(2m)! \cdot (2n)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!}$$

будет целым.

См. аналогичное решение — задача *199*.
Указание. Задание сводится к доказательству неравенства (п. 2.21.)

$$\left[2x\right] + \left[2y\right] - \left[x\right] - \left[y\right] - \left[x+y\right] \geqslant 0.$$

201. (На основе AMC/2006/12B) [32, с. 56] Определите наименьшее количество нулей, на которые заканчивается число $a! \cdot b! \cdot c!$ при условии $a+b+c = 2006$ (a, b и c — натуральные числа).

Решение. Так как $2006 < 5^5$, по формуле Лежандра

$$e_5(a) + e_5(b) + e_5(c) = \sum_{n=1}^{4}\left(\left[\frac{a}{5^n}\right] + \left[\frac{b}{5^n}\right] + \left[\frac{c}{5^n}\right]\right).$$

Согласно свойству (2.31) $[x_1] + [x_2] + [x_3] \geqslant [x_1 + x_2 + x_3] - 2$

$$e_5(a) + e_5(b) + e_5(c) =$$
$$= \sum_{n=1}^{4}\left(\left[\frac{a}{5^n}\right] + \left[\frac{b}{5^n}\right] + \left[\frac{c}{5^n}\right]\right) \geqslant \sum_{n=1}^{4}\left(\left[\frac{a+b+c}{5^n}\right] - 2\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{4}\left(\left[\frac{2006}{5^n}\right] - 2\right) = 492.$$

Число 492 является нижней оценкой, а не ответом, то есть требуется удостовериться, что есть такие значения чисел a, b и c, при которых $e_5(a) + e_5(b) + e_5(c) = 492$. Принципиально несложный подбор, но требующий определенной арифметической сноровки, помогает найти искомые числа $a = b = 624$ и $c = 758$.

Ответ: 492.

202. Пусть при $x \in \mathbb{R}_{>0}$ определена функция $T(x) = \sum\limits_{k \leqslant x,\, k \in \mathbb{N}} \ln k$. Докажите, что

$$T(x) = \sum_{p \leqslant x,\, p \in \mathbb{P}} e_p(x) \cdot \ln p. \tag{202a}$$

Доказательство.

$$T(x) = \sum_{k \leqslant x,\, k \in \mathbb{N}} \ln k = \ln\, [x]! = \ln \prod_{p \leqslant x,\, p \in \mathbb{P}} p^{e_p(x)} = \sum_{p \leqslant x,\, p \in \mathbb{P}} e_p(x) \cdot \ln p.$$

Утверждение (202a) называется тождеством Чебышёва[13]. ■

203. (CRUX, задача 2097, F. Ardila) Докажите, что

$$p^n\big(p^n - 1\big)\ldots\big(p^2 - 1\big)\big(p - 1\big) \,\vdots\, n!, \quad \text{где } p \in \mathbb{P},\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть каноническое разложение числа $n!$ на простые сомножители имеет вид $n! = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{b_m}$, здесь и далее в решении используются обозначения, принятые в формуле (6.3).

1) Если $\boldsymbol{p} \,\vdots\, \boldsymbol{q_i}$, то $p^n \,\vdots\, q_i^n$. Очевидно, что $n \geqslant \left[\dfrac{n}{q_i - 1}\right] \geqslant b_i$, правое неравенство см. (6.4). Значит, $M_p(n) = p^n\big(p^n - 1\big)\ldots\big(p^2 - 1\big)\big(p - 1\big)$ делится на $q_i^{b_i}$ нацело.

2) Если $\boldsymbol{p} \not\vdots\, \boldsymbol{q_i}$, то $p^2 \not\vdots\, q_i, \ \ldots, \ p^{k_i} \not\vdots\, q_i$, где $k_i = \left[\dfrac{n}{q_i - 1}\right]$. Согласно малой теореме Ферма (см. п. A.9.)

$$p^{q_i - 1} - 1 \equiv 0 \pmod{q_i},$$

$$p^{2(q_i - 1)} - 1 \equiv 0 \pmod{q_i},$$

$$\ldots,$$

$$p^{k_i(q_i - 1)} - 1 \equiv 0 \pmod{q_i}.$$

Значит, и в этом случае $M_p(n)$ делится на $q_i^{b_i}$ нацело. ■

[13] П. Л. Чебышёв (1821-1894) — великий русский математик и механик, получил фундаментальные результаты в теории чисел и теории вероятностей.

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

7. Целочисленные точки под графиком функции $f(x)$

Отметим на координатной плоскости xOy *целочисленные точки*, то есть точки с целочисленными координатами. Получается своеобразная решетка — *целочисленная решетка*, узлами которой являются целочисленные точки. А ведь узлы на целочисленной решетке можно сосчитать. Так, например, задачи подсчета узлов в круге и под гиперболой привлекали внимание известных математиков еще в позапрошлом веке.

Рассмотрим начальную задачу по «узловой» тематике — задачу подсчета числа узлов внутри и на границе криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми, параллельными оси Oy. Точки, лежащие на нижней границе — оси Ox, считать не будем, поскольку это слишком простая задача.

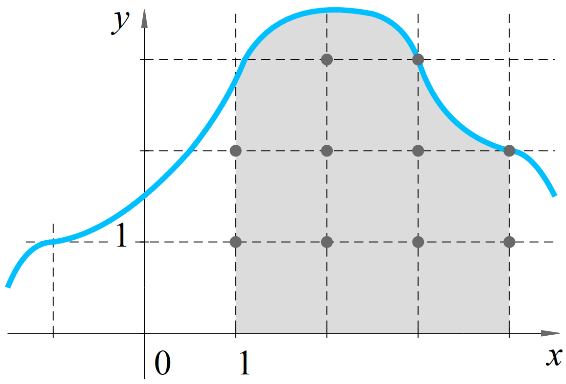


Рис. 6. График $f(x)$ на решетке

Изобразим на рис. 6 график некоторой функции $f(x)$ и обозначим серым цветом криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

Для положительной в точке x_0 функции $f(x)$ значение $\left[f(x_0)\right]$ равно количеству узлов решетки, принадлежащих вертикальному фрагменту решетки между точками $\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ и $\left(x_0,\ 0\right)$, включая верхнюю и исключая нижнюю границу.

Для изображенной на рис. 6 функции $f(x)$

$$\left[f(2)\right] = 3, \ \ \left[f(4)\right] = 2.$$

Воспользуемся комбинаторно-геометрическим смыслом $\left[f(x)\right]$ для подсчета целочисленных точек, расположенных на и под графиком положительной непрерывной функции $f(x)$. В данном разделе будем обозначать подсчитываемое количество точек в сегменте $[a,\,b]$ как $N_{[a,\,b]}\big(f(x)\big)$. Итак, сумма

$$N_{[a,\,b]}\big(f(x)\big) = \sum\big[f(x_i)\big], \quad \text{где } x_i \in \{a,\ a+1,\ \ldots,\ b\} \text{ и } a,\,b \in \mathbb{Z},$$

равна количеству узлов решетки, расположенных на и под графиком $f(x)$ между прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 1$, включая все границы. Иными словами, $\sum\big[f(x_i)\big]$ равна количеству узлов в криволинейной трапеции, определяемой условиями $a \leqslant x \leqslant b$ и $1 \leqslant y \leqslant f(x)$. Будьте внимательны! Точки на оси абсцисс — «персоны нон грата» — их не считают!

В приведенном примере

$$N_{[1,\,4]}\big(f(x)\big) = \big[f(1)\big] + \big[f(2)\big] + \big[f(3)\big] + \big[f(4)\big] = 10.$$

На рис. 6 узлы, из которых состоит криволинейная трапеция на сегменте $\big[1,\ 4\big]$, обозначены жирными точками, включая точки $\big(3,\,3\big)$ и $\big(4,\,2\big)$, лежащие на графике $f(x)$.

Воспользуемся подсчетом целочисленных точек, лежащих под графиком некоторой функции, для решения следующих двух задач, результаты которых пригодятся в дальнейшем.

204. Исследуйте область значений выражения

$$\big[\sqrt[k]{n+1}\big] - \big[\sqrt[k]{n}\big], \quad \text{где } k,\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}.$$

Решение. Постройте фрагмент графика функции $f(x) = \sqrt[k]{x}$ на отрезке $\big[n,\, n+1\big]$.

Понятно, что количество целочисленных точек под графиком функции $y = f(x)$ в точках $x_1 = n+1$ и $x_2 = n$ отличается на 1 лишь в случае, если $\sqrt[k]{n+1}$ — целое число, то есть $N_{\{n+1\}}\left(\sqrt[k]{x}\right) - N_{\{n\}}\left(\sqrt[k]{x}\right) = 1$.

Ответ:

$$\big[\sqrt[k]{n+1}\big] - \big[\sqrt[k]{n}\big] = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } \sqrt[k]{n+1} \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad k,\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}. \tag{204a}$$

205. Исследуйте область значений выражения

$$\left[\log_k\left(n+1\right)\right] - \left[\log_k n\right], \quad \text{где } k,\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}.$$

См. аналогичное решение — задача 204.
Ответ:

$$\left[\log_k\left(n+1\right)\right] - \left[\log_k n\right] =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если } \log_k\left(n+1\right) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad k,\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}. \tag{205a}$$

7.1. Задачи по теме раздела

206. Докажите тождество для взаимно простых чисел p и q

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[2 \cdot \frac{q}{p}\right] + \ldots + \left[(p-1) \cdot \frac{q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

207. Натуральные числа m и n взаимно простые и $n < m$. Какое число больше:

$$S_n = \left[1 \cdot \frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \ldots + \left[n \cdot \frac{m}{n}\right]$$

или

$$S_m = \left[1 \cdot \frac{n}{m}\right] + \left[2 \cdot \frac{n}{m}\right] + \ldots + \left[m \cdot \frac{n}{m}\right]?$$

208. Докажите, что количество целочисленных точек, расположенных на и под гиперболой $y = \dfrac{n}{x}$ $(n > 0)$, вычисляется по формуле

$$2 \cdot \sum_{x=1}^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x}\right] - \left[\sqrt{n}\right]^2.$$

209. Вычислите $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{10\,000}\right]$.

210. Функция $f(n) = \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right]$ определена при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Исследуйте область значений выражения

$$f(n+1) - f(n).$$

211. Функция $f(n) = \left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \ldots + \left[\log_n n\right]$ определена при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Исследуйте область значений выражения

$$f(n+1) - f(n).$$

212. Докажите тождество для $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right] = \left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \ldots + \left[\log_n n\right].$$

7.2. Указания, решения, ответы

206. Докажите тождество для взаимно простых чисел p и q

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[2 \cdot \frac{q}{p}\right] + \ldots + \left[(p-1) \cdot \frac{q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}. \qquad (206a)$$

См. другой вариант доказательства — задача 92.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{q}{p} \cdot x$ на отрезке $\left[0,\ p\right]$. Подсчитаем число узлов целочисленной решетки, расположенных ***внутри*** прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является $\frac{q}{p} \cdot x$, катетами — прямые $y = 0$ и $x = p$.

Формула (206a) демонстрирует такой подсчет: в правой части формулы идет суммирование узлов по столбцам $(x = 1, 2, \ldots, p-1)$, в левой части — полупроизведение длины на высоту треугольной решетки, состоящей из внутренних узлов треугольника $0 < x < p$ и $0 < y \leqslant f(x)$.

А при чем здесь условие, устанавливающее p и q взаимно простыми числами? Все дело в том, что именно из-за этого условия на гипотенузе отсутствуют узлы решетки, не считая концов гипотенузы. Напомним, что узлы на катетах не участвуют в подсчете. Таким образом, подсчет узлов ведется только внутри треугольника. ■

207. (Москва/1972) [6, с. 121] Натуральные числа m и n взаимно простые и $n < m$. Какое число больше:

$$S_n = \left[1 \cdot \frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \ldots + \left[n \cdot \frac{m}{n}\right]$$

или

$$S_m = \left[1 \cdot \frac{n}{m}\right] + \left[2 \cdot \frac{n}{m}\right] + \ldots + \left[m \cdot \frac{n}{m}\right]?$$

Решение. Согласно тождеству (92a)

$$S_n = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + m, \quad S_m = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + n.$$

Следовательно,

$$S_n - S_m = m - n > 0,$$

хотя количество слагаемых в сумме S_n меньше, чем в сумме S_m. Но, как всегда, дело не в количестве ...

Ответ: $S_n > S_m$.

208. Докажите, что количество целочисленных точек, расположенных на и под гиперболой $y = \frac{n}{x}$ $(n > 0)$, вычисляется по формуле

$$2 \cdot \sum_{x=1}^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2. \tag{208a}$$

Указание. $N_{[1,n]}\left(\frac{n}{x}\right) = \sum\limits_{x=1}^{n} \left[\frac{n}{x}\right]$. Далее предлагаем разбить с помощью прямой $y = x$ множество целочисленных точек, расположенных на и под гиперболой, на два равных по количеству подмножества точек. Не подсчитайте дважды точки на прямой $y = x$.

Примечание. В середине девятнадцатого века П. Дирихле воспользовался формулой суммы (208a), чтобы вывести асимптотическую формулу, известную как *формула Дирихле для числа делителей*,

$$D(N) = \sum_{k=1}^{N} \tau(k) = N \ln N + (2C - 1)N + O(\sqrt{N}), \tag{208б}$$

где $\tau(k)$ — количество делителей числа k, C — постоянная Эйлера-Маскерони, O — O-большое.

При выводе формулы Дирихле для числа делителей, которое следует прямо из (208a), используются элементы высшей математики, поэтому приводиться здесь не будет. Однако отметим, что при выводе используется ранее доказанное равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]$, см. задачу *184*.

209. Вычислите $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{10\,000}\right]$.

См. другой вариант решения — задача 410.

Решение. В дальнейшем применим приведенный в начале раздела способ подсчета целочисленных точек, расположенных на и под графиком положительной непрерывной функции.

Рассмотрим на координатной плоскости прямоугольную область с вершинами

$$A(1,\,1),\ B(1,\,10\,000),\ C(100,\,10\,000),\ D(100,\,1).$$

Пусть N_{ABCD} — количество целочисленных точек внутри и на границе некоторой области $ABCD$, в данном случае прямоугольника $ABCD$. Ясно, что N_{ABCD} равно $1\,000\,000$.

График функции $f(x) = x^2$ разбивает прямоугольник $ABCD$ на два криволинейных треугольника ABC и ACD. Очевидно, что $N_{ABC} > N_{ACD}$, и, кроме того,

$$N_{ABC} + N_{ACD} = N_{ABCD} - 100,$$

так как ровно 100 целочисленных точек лежит на кривой AC — общей стороне этих треугольников.

Для какой цели приведены выше комбинаторно-геометрические рассуждения? Для короткого и красивого решения исходной задачи. Оказывается, что

$$N_{ABC} = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{10\,000}\right]. \tag{209a}$$

Обоснуем данное утверждение.

В правой части (209a) сумма антье равна количеству целочисленных точек, расположенных на и под графиком функции $g(x) = \sqrt{x}$ при $x \in [1,\,10\,000]$. Пусть точка $M(x_0;\,y_0)$ — одна из пересчитанных точек, то есть $0 < y_0 \leqslant \left[\sqrt{x_0}\right]$. Тогда точка $M'(y_0;\,x_0) \in \triangle ABC$, так как $0 < y_0^2 \leqslant x_0$. Очевидно, что имеет место и обратное соответствие между точками M' и M. В данном случае работает свойство антье

$$y_0 \leqslant [\sqrt{x_0}] \iff y_0 \leqslant \sqrt{x_0} \iff y_0^2 \leqslant x_0.$$

Таким образом, удалось установить взаимно однозначное соответствие между точками, расположенными на и под графиком функции $g(x) = \sqrt{x}$, и точками треугольника ABC.

Вычислим N_{ACD}.

$$N_{ACD} = N_{[1,\,100]}(x^2) = \left[1^2\right] + \left[2^2\right] + \left[3^2\right] + \ldots + \left[100^2\right] =$$
$$= \sum_{m=1}^{100} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 338\,350.$$

Тогда

$$N_{ABC} = N_{ABCD} - N_{ACD} + 100 = 1\,000\,000 - 338\,350 + 100 = 661\,750.$$

Ответ: 661 750.

210. Функция $f(n) = \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right]$ определена при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Исследуйте область значений выражения

$$f(n+1) - f(n).$$

Решение.

$$f(n+1) - f(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\sqrt[k]{n+1}\right] - \left[\sqrt[k]{n}\right] \right) + \left[\sqrt[n+1]{n+1}\right].$$

Свободное слагаемое легко определяется $\left[\sqrt[n+1]{n+1}\right] = 1$.

Согласно (204a) количество ненулевых слагаемых суммы равно количеству таких различных значений $\boldsymbol{k \geqslant 2}$, что выполняется условие $n + 1 = m^k$ $\left(k,\ m \in \mathbb{N}\right)$. Отметим, что если таких значений k не менее двух, то наибольшее значение k_{max} кратно остальным значениям k.

Введем функцию $\nu(n)$, задающую количество различных значений $\boldsymbol{k \geqslant 1}$ таких, что $n = m^k$ $\left(k,\ m \in \mathbb{N}\right)$. Понятно, что $\nu(n) \geqslant 1$, ведь всегда есть пара $k = 1$, $m = n$. Тогда

$$f(n+1) - f(n) = \nu(n+1).$$

Однако можно воспользоваться более привычной арифметической функцией — $\tau(a)$, определяющей количество делителей числа a. Нетрудно видеть, что $\nu(n+1) = \tau(\kappa)$, если κ — наибольшее из чисел k таких, что $n + 1 = m^k$ $\left(k,\ m \in \mathbb{N}\right)$.

Ответ: $f(n+1) - f(n) = \tau(\kappa)$, где
$\tau(a)$ — количество делителей числа a $\left(\text{считаем, что } \tau(1) = 1\right)$,
κ — наибольшее из чисел k таких, что $n + 1 = m^k$ $\left(k,\ m \in \mathbb{N}\right)$.

211. Функция $f(n) = \left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \ldots + \left[\log_n n\right]$ определена при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Исследуйте область значений выражения

$$f(n+1) - f(n).$$

Решение этой задачи во многом повторяет решение задачи *210*. Сравните, тексты решений почти совпадает. Но в данной задаче присутствует специфика, которая может потребовать дополнительного внимания (например, можно рассмотреть примеры с конкретными числовыми значениями). Соответствующие фрагменты решения выделены, чтобы указать ключевые моменты решения.

Решение.

$$f(n+1) - f(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\log_k (n+1)\right] - \left[\log_k n\right]\right) + \left[\log_{n+1}(n+1)\right].$$

Свободное слагаемое легко определяется $\left[\log_{n+1}(n+1)\right] = 1$.

Согласно (205a) количество ненулевых слагаемых суммы равно количеству таких различных значений $k \geqslant 2$, что выполняется условие $\boldsymbol{\log_k (n+1) = m}$, или $n+1 = \boldsymbol{k^m}$, $(k, m \in \mathbb{N})$. Отметим, что если таких значений k не менее двух, то наибольшее значение k_{max} кратно остальным значениям k.

Введем функцию $\nu(n)$, задающую количество различных значений $k \geqslant 1$ таких, что $n = \boldsymbol{k^m}$ $(k, m \in \mathbb{N})$. Понятно, что $\nu(n) \geqslant 1$, ведь всегда есть пара $\boldsymbol{k = n}$, $\boldsymbol{m = 1}$. Тогда

$$f(n+1) - f(n) = \nu(n+1).$$

Однако можно воспользоваться более привычной арифметической функцией — $\tau(a)$, определяющей количество делителей числа a. Нетрудно видеть, что $\nu(n+1) = \tau(\kappa)$, если κ — наибольшее из чисел k таких, что $n+1 = \boldsymbol{k^m}$ $(k, m \in \mathbb{N})$.

Ответ: $f(n+1) - f(n) = \tau(\kappa)$, где
$\tau(a)$ — количество делителей числа a (считаем, что $\tau(1) = 1$),
κ — наибольшее из чисел k таких, что $n+1 = \boldsymbol{k^m}$ $(k, m \in \mathbb{N})$.

212. [7, с. 14] Докажите тождество для $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right] = \left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \ldots + \left[\log_n n\right].$$

Доказательство. Введем обозначения: $f(n)$ — функция, стоящая в левой части утверждения, $g(n)$ — функция, стоящая в правой части утверждения.

Докажем с помощью метода математической индукции, что

$$f(n) = g(n) \quad \text{при } n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}.$$

Очевидно, что $f(2) = g(2)$.

Докажем индуктивный переход $f(k) = g(k) \implies f(k+1) = g(k+1)$. Понятно, что достаточно показать $f(k+1) - f(k) = g(k+1) - g(k)$. Воспользуемся результатами задач *210* и *211*.

Рассмотрим разность $f\big(k+1\big)-f\big(k\big)$.

Пусть имеются различные $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m$ и соответственно различные $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_m$ такие, что $k+1=b_1^{a_1}=b_2^{a_2}=\ldots=b_m^{a_m}$ $\big(a_i,\, b_i\in\mathbb{N}\big)$. Тогда $f\big(k+1\big)-f\big(k\big)=m$, причем $m\geqslant 1$.

А теперь кульбит! Именно на этом же наборе $b_1^{a_1},\, b_2^{a_2},\, \ldots,\, b_m^{a_m}$ и только при данных значениях $g\big(k+1\big)-g\big(k\big)=m$.

Таким образом, индуктивный переход доказан, а вместе с ним доказано и тождество.

■

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

8. Уравнения и неравенства вида $\bigl[f(x)\bigr] \vee a$ и $\bigl\{f(x)\bigr\} \vee \alpha$

В данном разделе представлены равносильные преобразования соотношений вида $\bigl[f(x)\bigr] \vee a$ и $\bigl\{f(x)\bigr\} \vee \alpha$ к уравнениям или неравенствам без знаков антье и мантиссы. В большинстве случаев результатом равносильных переходов является параметрическое неравенство, причем параметр — целое число, что во многих случаях упрощает решение.

Далее используются обозначения: $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant \alpha < 1$.

8.1. Уравнения и неравенства вида $\bigl[f(x)\bigr] \vee a$

$$\bigl[f(x)\bigr] = n \quad\Longleftrightarrow\quad n \leqslant f(x) < n+1$$

$$\begin{aligned}
\bigl[f(x)\bigr] > a \quad&\Longleftrightarrow\quad f(x) \geqslant [a]+1\\
\bigl[f(x)\bigr] \geqslant n \quad&\Longleftrightarrow\quad f(x) \geqslant n\\
\bigl[f(x)\bigr] \geqslant a\ (a \notin \mathbb{Z}) \quad&\Longleftrightarrow\quad f(x) \geqslant [a]+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigl[f(x)\bigr] \leqslant a \quad&\Longleftrightarrow\quad f(x) < [a]+1\\
\bigl[f(x)\bigr] < n \quad&\Longleftrightarrow\quad f(x) < n\\
\bigl[f(x)\bigr] < a\ (a \notin \mathbb{Z}) \quad&\Longleftrightarrow\quad f(x) < [a]+1
\end{aligned}$$

8.2. Уравнения и неравенства вида $\bigl\{f(x)\bigr\} \vee \alpha$

$$\bigl\{f(x)\bigr\} = \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) = n+\alpha$$

$$\begin{aligned}
\bigl\{f(x)\bigr\} > \alpha \quad&\Longleftrightarrow\quad n+\alpha < f(x) < n+1\\
\bigl\{f(x)\bigr\} \geqslant \alpha \quad&\Longleftrightarrow\quad n+\alpha \leqslant f(x) < n+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigl\{f(x)\bigr\} < \alpha \quad&\Longleftrightarrow\quad n \leqslant f(x) < n+\alpha\\
\bigl\{f(x)\bigr\} \leqslant \alpha \quad&\Longleftrightarrow\quad n \leqslant f(x) \leqslant n+\alpha
\end{aligned}$$

8.3. Задачи по теме раздела

213. Решите уравнение $\left[\dfrac{x^2-x+2}{4}\right]=1.$

214. Решите уравнение $\left[x+\dfrac{3}{4x}\right]=1.$

215. Решите уравнение $\left[x^2-\dfrac{1}{4}\right]<\dfrac{11}{2}.$

216. Решите уравнение $\left[\sqrt{2}\sin x\right]=1.$

217. Решите уравнение $\left[\sqrt{2}\cos x\right]=0.$

218. Решите уравнение $\left[\lg x\right]=-1.$

219. Решите уравнение $\left\{2^{x-1}\right\}=\dfrac{1}{2}.$

220. Решите уравнение $2^{\{x\}}=\dfrac{3}{2}.$

221. Решите уравнение $\{\cos x\}=\dfrac{1}{3}$ при $x\in[0,\ \pi].$

222. Решите неравенство $\{\sin x\}>\dfrac{3}{4}$ при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right].$

8.4. Указания, решения, ответы

213. Решите уравнение $\left[\dfrac{x^2-x+2}{4}\right]=1.$

Решение. Исходное уравнение равносильно двойному неравенству

$$1\leqslant\frac{x^2-x+2}{4}<2.$$

Дальнейшие действия не требуют пояснений

$$4\leqslant x^2-x+2<8 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-x-2\geqslant 0,\\ x^2-x-6<0 \end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

Ответ: $(-2,\ -1]\cup[2,\ 3).$

214. Решите уравнение $\left[x + \dfrac{3}{4x}\right] = 1.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right).$

215. Решите неравенство $\left[x^2 - \dfrac{1}{4}\right] < \dfrac{11}{2}.$

Решение. Исходное неравенство равносильно $x^2 - \dfrac{1}{4} < 6.$

Ответ: $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right).$

216. Решите уравнение $\left[\sqrt{2}\sin x\right] = 1.$

Решение. Перейдем к равносильному тригонометрическому неравенству

$$1 \leqslant \sqrt{2}\sin x < 2, \quad \text{или} \quad \sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right].$

217. Решите уравнение $\left[\sqrt{2}\cos x\right] = 0.$

Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \bigcup \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right]\right).$

218. Решите уравнение $[\lg x] = -1.$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{10},\ 1\right).$

219. Решите уравнение $\left\{2^{x-1}\right\} = \dfrac{1}{2}.$

Решение. Выполним равносильный переход к уравнению с целочисленным параметром

$$2^{x-1} = \frac{1}{2} + n, \quad \text{или} \quad 2^x = 1 + 2n, \ \text{где } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Обратите внимание на то, что имеет место условие $n \geqslant 0$. Перед логарифмированием уравнения $2^x = 1 + 2n$ надо быть начеку — правая часть должна принимать положительные значения!

$$x = \log_2(1 + 2n), \text{ где } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Ответ: $\log_2(1 + 2n)$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

220. Решите уравнение $2^{\{x\}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\log_2 3 + n$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

221. Решите уравнение $\{\cos x\} = \dfrac{1}{3}$ при $x \in [0, \pi]$.

Решение. Равносильное уравнение

$$\cos x = \frac{1}{3} + n, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z},$$

разваливается на два простейших тригонометрических уравнения для $n = 0$ и $n = -1$ (для других значений n тригонометрическое уравнение не имеет смысла)

$$\cos x = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{2}{3} \quad \text{при } x \in [0, \pi].$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{3}$, $\pi - \arccos\dfrac{2}{3}$.

222. Решите неравенство $\{\sin x\} > \dfrac{3}{4}$ при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Исходное неравенство равносильно серии двойных неравенств

$$\frac{3}{4} + n < \sin x < 1 + n, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z},$$

среди которых имеют смысл лишь случаи при $n = -1$ и $n = 0$. Таким образом, задача свелась к совокупности тригонометрических неравенств

$$-\frac{1}{4} < \sin x < 0 \quad \text{и} \quad \frac{3}{4} < \sin x < 1 \quad \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ответ: $\left(-\arcsin\dfrac{1}{4}, 0\right) \cup \left(\arcsin\dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. Уравнения вида $x = f\big([x]\big)$

Некоторые уравнения удается привести к виду

$$x = f\big([x]\big). \tag{9.1}$$

В этом случае можно воспользоваться свойством антье $[x] \leqslant x < [x]+1$ и перейти к равносильному двойному неравенству

$$[x] \leqslant f\big([x]\big) < [x] + 1. \tag{9.2}$$

Смысл равносильного перехода в том, что неравенство (9.2) целочисленное и нередко решается достаточно просто. Тогда при наличии решений неравенства (9.2) остается их подставить в (9.1).

Данный прием перехода к равносильному неравенству (9.2) может быть эффективно использован и при решении параметрических уравнений вида

$$x = f\big([x]\,,\, a\big),$$

где a — параметр. См. задачи *224*, *227*.

223. (Всесибир./2010-2011) Решите уравнение $x^2 - [x] - 2 = 0$.

См. другой вариант решения — задача *256*.

Решение. Обозначим $[x] = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) и выразим x через n

$$x = \pm\sqrt{n+2}. \tag{223a}$$

Перейдем к равносильному неравенству

$$n \leqslant \pm\sqrt{n+2} < n+1,$$

решениями которого являются: в случае «$-$» перед радикалом $n = -1$, при «$+$» — $n = 1, 2$. Затем из (223a) находим соответствующие значения x.

Ответ: $\left\{-1,\ \sqrt{3},\ 2\right\}$.

224. (Эстония/1998-1999) Решите уравнение $[x] = kx + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

См. другой вариант решения — задача *347*.

Решение. Случаи $\boldsymbol{k = 0, \pm 1}$ очевидные, поэтому разберите их самостоятельно.

Приведем уравнение к виду $x = \dfrac{[x]-1}{k}$ и перейдем к равносильному неравенству, выполнив замену $n = [x]$:

$$n \leqslant \frac{n-1}{k} < n+1. \tag{224a}$$

Решим данное неравенство относительно n.

Рассмотрим сначала случай $\boldsymbol{k \geqslant 2}$. Тогда

$$kn \leqslant n - 1 < k\big(n+1\big),$$

$$1 \leqslant n\big(1-k\big) < k+1,$$

$$-\frac{k+1}{k-1} < n \leqslant -\frac{1}{k-1},$$

$$-1 - \frac{2}{k-1} < n \leqslant -\frac{1}{k-1},$$

$$\left[\begin{array}{ll} n = -2,\ -1, & \text{если } \boldsymbol{k = 2}, \\ n = -1, & \text{если } \boldsymbol{k \geqslant 3}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим другой случай $\boldsymbol{k \leqslant -2}$. Преобразования неравенства (224a) немного отличаются, но неравенство относительно n будет таким же

$$\frac{k+1}{1-k} < n \leqslant \frac{1}{1-k}, \quad \text{значит, } n = 0.$$

Остается подставить найденные значения $n = [x]$ и соответствующие значения k в формулу $x = \dfrac{[x]-1}{k}$.

Ответ: при $k = \pm 1$ решений нет,

при $k = 0$ $\quad 1 \leqslant x < 2$,

при $k \leqslant -2$ $\quad x = -\dfrac{1}{k}$,

при $k = 2$ $\quad x = -1,\ -\dfrac{3}{2}$,

при $k \geqslant 3$ $\quad x = -\dfrac{2}{k}$.

9.1. Задачи по теме раздела

225. Решите уравнение $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{5[x]-7}{7[x]-5}$.

226. Решите уравнение $\left[2x\right] = x^3 - 3$.

227. Сколько решений в зависимости от значений параметра t имеет уравнение $x + \dfrac{\{x\}}{2} = t$ при условии $2004 \leqslant t \leqslant 2005$?

9.2. Указания, решения, ответы

225. (Чехия/2004-2005) Решите уравнение $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{5[x]-7}{7[x]-5}$.

Решение. Обозначим $[x] = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ и выразим x через n

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5n-7}{7n-5},$$

$$7nx - 5x = 5nx - 7x + 20n - 28,$$

$$x = \frac{10n-14}{n+1}. \qquad (225a)$$

Поскольку $n \leqslant x < n+1$, перейдем к двойному неравенству относительно целого n

$$n \leqslant \frac{10n-14}{n+1} < n+1.$$

Решениями этого неравенства являются три значения $n = 2,\ 6,\ 7$, подставив которые в $(225a)$, определим решения уравнения.

Ответ: $\left\{2,\ \dfrac{46}{7},\ 7\right\}$.

226. Решите уравнение $\left[2x\right] = x^3 - 3$.

См. другие варианты решений — задачи 265, 351.

Решение. Приведем уравнение к виду (9.1)

$$x^3 = \left[2x\right] + 3,$$

$$x = \sqrt[3]{\left[2x\right] + 3},$$

$$y = 2\sqrt[3]{[y] + 3}, \quad \text{где } x = \frac{y}{2}.$$

Переходим к равносильному неравенству

$$n \leqslant 2\sqrt[3]{n+3} < n+1,$$

$$n^3 \leqslant 8\bigl(n+3\bigr) < \bigl(n+1\bigr)^3.$$

Данное целочисленное неравенство выполняется лишь при $n = 3$. Тогда $y = 2\sqrt[3]{6}$.

Ответ: $\sqrt[3]{6}$.

227. (Ульяновск/2004-2005) [12, с. 24] Сколько решений в зависимости от значений параметра t имеет уравнение $x + \dfrac{\{x\}}{2} = t$ при условии $2004 \leqslant t \leqslant 2005$?

См. другой вариант решения — задача 352.

Решение. Исходное уравнение сводится к виду (9.1)

$$2x + \{x\} = 2t, \quad 3x = [x] + 2t, \quad x = \frac{[x]+2t}{3}.$$

Переформулируем условие задачи. Определите количество решений целочисленного неравенства $n \leqslant \dfrac{n+2t}{3} < n+1$ при $2004 \leqslant t \leqslant 2005$.

Поскольку $t - \dfrac{3}{2} < n \leqslant t$, то вопрос состоит в том, сколько целых чисел попадает в полуинтервал $\left(t - \dfrac{3}{2},\, t\right]$ в зависимости от значений параметра t.

Изобразим на числовой прямой n полуинтервал длины $\dfrac{3}{2}$, правый конец которого располагается в сегменте $\bigl[2004,\, 2005\bigr]$. На рис. 7-9 представлены три случая, наглядно демонстрирующие принадлежность чисел 2003, 2004 и 2005 полуинтервалу $\left(t - \dfrac{3}{2},\, t\right]$.

Ответ: при $2004 \leqslant t < 2004{,}5$ — два решения,
при $2004{,}5 \leqslant t < 2005$ — одно решение,
при $t = 2005$ — два решения.

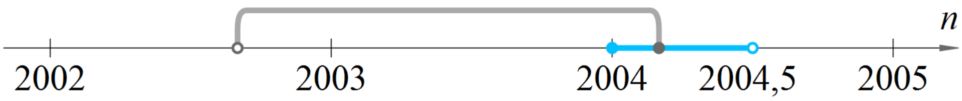


Рис. 7. Расположение полуинтервала $t-\frac{3}{2} \leqslant n < t$ при $2004 \leqslant t < 2004{,}5$ (два решения — 2003, 2004)

Рис. 8. Расположение полуинтервала $t-\frac{3}{2} \leqslant n < t$ при $2004{,}5 \leqslant t < 2005$ (одно решение — 2004)

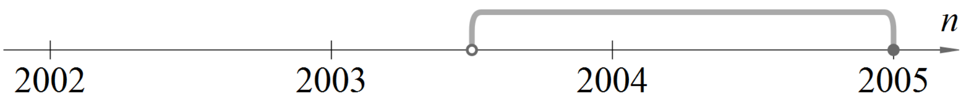


Рис. 9. Расположение полуинтервала $t-\frac{3}{2} \leqslant n < t$ при $t = 2005$ (два решения — 2004, 2005)

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

10. Универсальный равносильный переход

Рассмотрим уравнения и неравенства вида

$$F\bigl(x,\ \bigl[f(x)\bigr]\bigr)\ \vee\ 0. \tag{10.1}$$

Например,

$$\bigl[2x\bigr] - x^2 = 0\,,$$
$$\log_2\bigl(2\bigl\{x\bigr\}+1\bigr) + \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \geqslant 0\,,$$
$$[x] - \sqrt{2014}\cdot\{x\} = 0\,.$$

В формуле (10.1) отсутствует $\bigl\{f(x)\bigr\}$. Но общности формула не теряет, поскольку мантисса выражается через антье: $\bigl\{f(x)\bigr\} = f(x) - \bigl[f(x)\bigr]$.

10.1. Универсальный равносильный переход

Универсальный равносильный переход заключается в разбиении области значений функции $f(x)$ на полуинтервалы $\bigl[n,\ n+1\bigr)$ и соответствующей замене $\bigl[f(x)\bigr] = n$

$$F\bigl(x,\ \bigl[f(x)\bigr]\bigr)\ \vee\ 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} F\bigl(x,\ n\bigr)\ \vee\ 0, \\ n \leqslant f(x) < n+1, \end{cases} \quad \text{где } n\in\mathbb{Z}. \tag{10.2}$$

Система (10.2) зависит от целочисленного параметра n. Решение этой системы будет решением исходного задания (10.1).

Применимость метода (10.2) осложняется параметрическими соотношениями, решение которых может оказаться столь затруднительным, что придется искать другие подходы к выполнению задания.

10.2. Особенности применения метода

Важную роль в решении системы (10.2) играет целочисленность параметра n, допустимые значения которого зачастую являются конечным набором целых чисел. В этом случае сначала определяется множество допустимых значений параметра n, а затем вычисляются значения неизвестного. См. задачи: *228*, *229*, *231*, *232*.

Другим распространенным случаем является такой тип заданий вида (10.1), решения которых зависят от параметра n. Запись ответа для таких заданий следует «разворачивать» на прямой параметра, чтобы ответ явно выражал зависимость от параметра. См. задачи: *233*, *235*.

Встречаются задачи на определение количества решений, например, задача *230*. Решение подобных задач, скорее всего, будет заключаться в определении диапазона значений параметра и, благодаря целочисленности параметра, в вычислении количества его допустимых значений.

10.3. Аналогичные уравнения и неравенства

Пусть имеется уравнение или неравенство вида

$$F_2\big(x,\ [f(x)],\ [kf(x)]\big)\ \vee\ 0,\quad \text{где } k\in\mathbb{N}. \tag{10.3}$$

Тогда для (10.3) возможен равносильный переход к системе

$$(10.3)\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} F_2\big(x,\ n,\ kn+m\big)\ \vee\ 0,\\ n+\dfrac{m}{k}\leqslant f(x)<n+\dfrac{m+1}{k},\\ m=0,\,1,\,\ldots,\,k-1,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Если уравнение или неравенство имеет вид

$$F_3\left(x,\ [f(x)],\ \left[\frac{f(x)}{k}\right]\right)\ \vee\ 0,\quad \text{где } k\in\mathbb{N}, \tag{10.4}$$

то для соотношения (10.4) равносильный переход будет выглядеть следующим образом:

$$(10.4)\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} F_3\big(x,\ kn+m,\ n\big)\ \vee\ 0,\\ kn+m\leqslant f(x)<kn+m+1,\\ m=0,\,1,\,\ldots,\,k-1,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Не будем приводить равносильные системы для более сложных сочетаний антье и мантисс кратных функций. Идея синхронизации полуинтервалов понятна. См. задачу *232*, демонстрирующую описанный выше метод.

10.4. Задачи по теме раздела

228. Решите уравнение $x^2 = \left[2x\right]$.

229. Решите уравнение $2^x = 3^{[x]} \cdot 4^{\{x\}}$.

230. Определите количество решений уравнения $[x] = \{x\}\sqrt{2014}$.

231. Решите уравнение

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]}.$$

232. Решите уравнение

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}.$$

233. Решите неравенство $[x]^2 \cdot \{x\} < 1$.

234. Решите неравенство $3\left[\log_2 x\right] \geqslant x - 1$.

235. Решите неравенство $\dfrac{\{x\}^2}{\{x\} - 1} \geqslant x$.

236. Решите уравнение $[x] = x - \dfrac{1}{x}$.

10.5. Указания, решения, ответы

228. Решите уравнение $x^2 = \left[2x\right]$.

См. другой вариант решения — задача 258.

Решение. Заметим, что $\left[2x\right] \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, так как левая часть уравнения неотрицательная. Выполним равносильный переход (10.2)

$$x^2 = \left[2x\right] \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 = n, \\ n \leqslant 2x < n + 1, \end{cases} \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Понятно, что параметр $n \geqslant 0$. Решениями исходного уравнения будут значения $x = \sqrt{n}$, удовлетворяющие условию $x \in \left[n, n+1\right)$.

Выясним, для каких n будет выполняться данное условие

$$n \leqslant 2\sqrt{n} < n+1, \quad n^2 \leqslant 4n < n^2+2n+1.$$

Оказывается, что лишь четыре значения $n = 0,\ 2,\ 3,\ 4$ являются допустимыми.

Ответ: $0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2.$

229. Решите уравнение $2^x = 3^{[x]} \cdot 4^{\{x\}}$.

Решение. Уравнение подходит для равносильного перехода (10.2), но для удобства сначала прологарифмируем по основанию 2

$$x = [x]\log_2 3 + 2\{x\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = n\log_2 3 + 2(x-n), \\ n \leqslant x < n+1, \\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Итак, допустимые значения целочисленного параметра n определяются следующими условиями:

$$\begin{cases} x = 2n - n\log_2 3, \\ n \leqslant x < n+1. \end{cases}$$

После несложных преобразований становятся известными значения параметра n

$$n \leqslant 2n - n\log_2 3 < n+1,$$
$$0 \leqslant n(1-\log_2 3) < 1,$$
$$\frac{1}{1-\log_2 3} < n \leqslant 0,$$
$$n_1 = -1,\ n_2 = 0.$$

Отметим, что использовались следующие оценки:

$$1 - \log_2 3 < 0 \quad \text{и} \quad -2 < \frac{1}{1-\log_2 3} < -1.$$

Таким образом, $x_1 = \log_2 3 - 2$ (при $n_1 = -1$) и $x_2 = 0$ (при $n_2 = 0$).

Ответ: $\log_2 3 - 2,\ 0.$

230. Определите количество решений уравнения

$$[x] = \{x\}\sqrt{2014}.$$

См. другой вариант решения — задача 247.

Решение. В задании не требуется искать решения уравнения, поэтому определим количество значений целочисленного параметра, которые соответствуют решениям исходного уравнения.

Заметим, что $[x] \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, так как правая часть уравнения неотрицательная. Выполним равносильный переход (10.2)

$$[x] = \{x\}\sqrt{2014} \iff \begin{cases} n = (x-n)\cdot\sqrt{2014}, \\ n \leqslant x < n+1, \\ n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача свелась к определению количества целочисленных решений неравенства

$$n \leqslant n + \frac{n}{\sqrt{2014}} < n+1.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: 45 решений $\left(\text{при } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 44 = \left[\sqrt{2014}\right]\right)$.

231. (Ломоносов*/2012-2013) Решите уравнение

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]}.$$

См. другой вариант решения — задача 150.

Указание. Согласно равносильному переходу (10.2)

$$\begin{cases} \dfrac{8}{x-n} = \dfrac{9}{x} + \dfrac{10}{n}, \\ n \leqslant x < n+1. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

232. (Всесибир./2012-2013) Решите уравнение

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}.$$

Решение. Прямое применение равносильного перехода (10.2) затруднено тем, что помимо $[x]$ и $\{x\}$ имеется $[2x]$. Однако воспользуемся кратностью x и $2x$ и разобьем полуинтервал $\big[n,\ n+1\big)$ на два промежутка $\big[n,\ n+1/2\big)$ и $\big[n+1/2,\ n+1\big)$, на которых $[2x]=2n$ и $[2x]=2n+1$ соответственно.

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n}=x-n+\dfrac{1}{3},\\ n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2},\end{cases}\\ &\begin{cases}\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n+1}=x-n+\dfrac{1}{3},\\ n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1,\end{cases}\end{aligned}\right. \qquad \text{где } n\in\mathbb{Z}.$$

В первой системе $x=n+\dfrac{3}{2n}-\dfrac{1}{3}$. Подставив в условие для x, получим $n=2,\,3,\,4$, для которых вычисляются числовые решения исходного уравнения.

Во второй системе $x=n+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{3}$. Подстановка в условие $n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1$ приводит после упрощений к неравенству

$$5\leqslant\frac{6}{n}+\frac{6}{2n+1}<8,$$

которое не имеет решений в целых числах.

Ответ: $\dfrac{29}{12},\ \dfrac{19}{6},\ \dfrac{97}{24}$.

233. Решите неравенство $[x]^2\cdot\{x\}<1$.

См. другой вариант решения — задача *248*.

Решение. Неравенство выполняется при $0\leqslant x<1$ и $x\in\mathbb{Z}$, так как левая часть неравенства обращается в нуль при $[x]=0$ и $\{x\}=0$ соответственно.

Также неравенство выполняется при $-1\leqslant x<0$ и $1\leqslant x<2$, поскольку $[x]^2=1$, и неравенство свелось к известному свойству мантиссы $\{x\}<1$.

Воспользуемся равносильным переходом (10.2)

$$[x]^2\cdot\{x\}<1 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}n^2\,(x-n)<1,\\ n\leqslant x<n+1,\\ n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Случаи $n = -1,\ 0,\ 1$ рассмотрены ранее, поэтому получим

$$\begin{cases} x < n + \dfrac{1}{n^2}, \\ n \leqslant x < n+1, \end{cases} \qquad n \leqslant x < n + \frac{1}{n^2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,\ 0,\ 1.$$

Нетрудно заметить, что полуинтервалы $\left[-1,\ 2\right)$ и $\left[2,\ 2\dfrac{1}{4}\right)$ объединяются в один.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x < \dfrac{9}{4}, \\ n \leqslant x < n + \dfrac{1}{n^2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, 0, 1, 2. \end{array}\right.$

234. Решите неравенство $3\left[\log_2 x\right] \geqslant x - 1$.

Решение. Вспомним, что логарифмируемое выражение должно быть положительным. Это означает, что ОДЗ неравенства — $\left(0,\ +\infty\right)$.

Согласно (10.2) перейдем к равносильному параметрическому неравенству

$$3\left[\log_2 x\right] \geqslant x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3n \geqslant x - 1, \\ n \leqslant \log_2 x < n + 1, \\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Благодаря ранее определенной ОДЗ, смеем утверждать, что $n \geqslant 0$, иначе условие $3n \geqslant x - 1 \geqslant -1$ не выполняется, так как n — целое.

Дальнейшие упрощения приведут к системе

$$\begin{cases} x \leqslant 3n + 1, \\ 2^n \leqslant x < 2^{n+1}, \\ n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \end{cases}$$

Решить данную систему неравенств — значит найти пересечение полуинтервалов $\left(0,\ 3n+1\right]$ и $\left[2^n,\ 2^{n+1}\right)$ при целых неотрицательных n. При $n \geqslant 4$ полуинтервалы не пересекаются. Следовательно, остается рассмотреть четыре случая $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\left\{1\right\} \cup \left[2,\ 7\right] \cup \left[8,\ 10\right]$.

235. Решите неравенство $\dfrac{\{x\}^2}{\{x\}-1} \geqslant x$.

Решение. Очевидно, что при $x = 0$ неравенство выполняется, а при $x > 0$ не имеет смысла (левая часть меньше или равна 0).

Далее рассматриваем только отрицательные x. Отметим заодно, что все отрицательные целые числа являются решениями исходного неравенства.

Воспользуемся равносильным переходом (10.2)

$$\frac{\{x\}^2}{\{x\}-1} \geqslant x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(x-n)^2}{x-(n+1)} \geqslant x, \\ n \leqslant x < n+1, \\ n \in \mathbb{Z}_{<0}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы $\dfrac{(x-n)^2}{x-(n+1)} - x \geqslant 0$. Так как $-1 \leqslant x-(n+1) < 0$, то

$$x^2 - 2nx + n^2 - x^2 + nx + x \leqslant 0,$$

$$x\,(1-n) + n^2 \leqslant 0,$$

$$x \leqslant -\frac{n^2}{1-n},$$

$$x \leqslant n+1-\frac{1}{1-n}.$$

Прокомментируем выполненные преобразования. Первым делом, мы избавились от знаменателя, так как $-1 \leqslant x-(n+1) < 0$, пришлось менять знак неравенства. Затем, после приведения подобных, поделили неравенство на $1-n > 0$.

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \leqslant n+1-\dfrac{1}{1-n}, \\ n \leqslant x < n+1, \\ n \in \mathbb{Z}_{<0}. \end{cases}$$

Оценка дроби $\dfrac{1}{1-n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ помогает вывести ответ.

Ответ: $n \leqslant x < n+1-\dfrac{1}{1-n}$, где $n \in \mathbb{Z}_{<0}$.

236. (ВМК/2004) [23, с. 93] Решите уравнение $[x] = x - \dfrac{1}{x}$.

Решение.

$$[x] = x - \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = n, \\ n \leqslant x < n + 1. \end{cases} \tag{236a}$$

Корни квадратного уравнения $x^2 - nx - 1 = 0$ имеют вид

$$x_1 = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \qquad x_2 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}.$$

Подставим эти корни в неравенство из (236a), чтобы определить диапазон значений параметра n. Для корня x_1 нет таких значений n, при которых выполнялось бы условие $n \leqslant x_1 < n + 1$. Для корня x_2 такими значениями являются $n > 0$.

Ответ: $\dfrac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

11. Типовая замена $n + \alpha$

Замена выражения для упрощения формулы — заурядный прием, используемый при решении различных математических задач. Настоятельно рекомендуется делать замену, если заменяемое выражение повторяется. Бывают случаи, когда цель замены — скрыть фрагмент формулы до обратной замены, чтобы этот фрагмент «не мешался».

При решении уравнений и неравенств с участием антье и мантиссы используется специфическая замена выражения, которое обычно находится под знаком антье и/или мантиссы, на сумму

$$n + \alpha, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z} \text{ и } 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{11.1}$$

Довольно часто замена имеет простейший вид

$$x = n + \alpha,\ [x] = n,\ \{x\} = \alpha. \tag{11.2}$$

К замене $n + \alpha$ не стоит относиться как к шаблонному приему. Такая замена подходит далеко не для всех задач. Но если в задаче данная замена, как говорится, к месту, то после замены $n + \alpha$ проявляется суть задачи, как будто становится видимым водяной знак на просвет.

237. Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = 1$.

Решение. Воспользуемся типовой заменой (11.2). Тогда исходное уравнение примет вид

$$n\alpha = 1.$$

Очевидно, что $n \geqslant 2$. Тогда $\alpha = \dfrac{1}{n}$.

Ответ: $n + \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

238. Найдите такое наименьшее положительное число x, что

$$[x^2] - [x]^2 = 2014.$$

Решение. Пусть $x = n + \alpha$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $n + \alpha \neq 0$). Попытаемся сначала найти наименьшее n, а затем для найденного n определим наименьшее α. Перепишем исходное уравнение после замены

$$\left[n^2 + 2n\alpha + \alpha^2\right] - [n + \alpha]^2 = 2014,$$
$$\left[2n\alpha + \alpha^2\right] = 2014.$$

Очевидно, что для $n < 1007$ последнее уравнение не выполняется. Предположим, $n = 1007$, тогда

$$\left[2014\alpha + \alpha^2\right] = 2014.$$

Итак, требуется найти наименьшее α с учетом условий

$$\begin{cases} 0 \leqslant \alpha < 1, \\ 2014 \leqslant 2014\alpha + \alpha^2 < 2015. \end{cases}$$

Такое α существует и равно $\alpha = -1007 + \sqrt{1007^2 + 1007}$.

Ответ: $\sqrt{1007^2 + 1007}$.

11.1. Задачи по теме раздела

239. Решите уравнение $x^2 + 2[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 4$.

240. Решите уравнение $[x] + \dfrac{1}{[x]} = \{x\} + \dfrac{1}{\{x\}}$.

В задачах *241*-*243* найдите такое наименьшее положительное число x, что

241. $\{x^2\} - \{x\}^2 = \dfrac{1}{2014}$.

242. $\dfrac{1}{\{x^2\}} + \dfrac{1}{\{x\}^2} = 2014$.

243. $\{x\}^2 = \dfrac{2}{[x^2]}$.

244. Число x удовлетворяет неравенству $[x]^2 - x \cdot [x] + 3 \leqslant 0$. Докажите, что $x \geqslant 4{,}75$.

245. Число x удовлетворяет неравенству $[x]^2 - x \cdot [x] + 4 \leqslant 0$. Докажите, что $x \geqslant 5{,}8$.

246. Число x удовлетворяет неравенству $\lg[x] + \lg\{x\} \geqslant 3$. Докажите, что $x > 1001{,}998$.

247. Определите количество решений уравнения $[x] = \{x\}\sqrt{2014}$.

248. Решите неравенство $[x]^2 \cdot \{x\} < 1$.

249. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 = [x]^3 - 3[x]^2$.

250. Найдите такие значения x, $[x]$ и $\{x\}$, которые образуют арифметическую прогрессию из трех членов с ненулевой разностью.

251. Найдите такие значения x, $[x]$ и $\{x\}$, которые образуют геометрическую прогрессию из трех членов с ненулевым знаменателем.

252. Пусть x, $y \in \mathbb{R}$. Докажите, что два равенства

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{и} \quad [-x] + [-y] = [-x - y]$$

являются тождествам тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из чисел x или y — целое.

11.2. Указания, решения, ответы

239. (Румыния/2015) Решите уравнение

$$x^2 + 2[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 4.$$

Решение. С помощью типовой замены (11.2) исходное уравнение приводится к виду

$$n + 2\alpha = \pm 2.$$

Поскольку 2α — целое число, то $\alpha = 0$ или $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-2,\ -\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 2.$

240. Решите уравнение $[x] + \dfrac{1}{[x]} = \{x\} + \dfrac{1}{\{x\}}$.

Решение. Воспользуемся типовой заменой (11.2). Тогда исходное уравнение примет вид

$$n + \frac{1}{n} = \alpha + \frac{1}{\alpha},$$

$$n - \alpha = \frac{n - \alpha}{n\alpha}.$$

Сократим на $n-\alpha$, поскольку это выражение не равно 0, и получим уравнение $n\alpha = 1$, рассмотренное в задаче 237.

Ответ: $n + \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

241. Найдите такое наименьшее положительное число x, что

$$\{x^2\} - \{x\}^2 = \frac{1}{2014}.$$

Решение. Пусть $x = n + \alpha$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $n + \alpha \neq 0$). Попытаемся сначала найти наименьшее n, а затем для найденного n определим наименьшее α. Выполнив замену, получим

$$\{n^2 + 2n\alpha + \alpha^2\} - \{n + \alpha\}^2 = \frac{1}{2014},$$
$$\{2n\alpha + \alpha^2\} - \alpha^2 = \frac{1}{2014}.$$

Если $n = 0$, то уравнение $\{\alpha^2\} - \alpha^2 = \dfrac{1}{2014}$ не имеет смысла.

Предположим, $n = 1$, тогда

$$\{2\alpha + \alpha^2\} - \alpha^2 = \frac{1}{2014}.$$

Значение выражения $2\alpha + \alpha^2$ может попасть в один из трех полуинтервалов: $[0,\ 1)$, $[1,\ 2)$ или $[2,\ 3)$. Очевидно, что при наименьшем значении α выполняется условие $0 \leqslant 2\alpha + \alpha^2 < 1$, то есть знак мантиссы просто снимается. Тогда $\alpha = \dfrac{1}{4028}$.

Ответ: $\dfrac{4029}{4028}$.

242. Найдите такое наименьшее положительное число x, что

$$\frac{1}{\{x^2\}} + \frac{1}{\{x\}^2} = 2014.$$

См. аналогичные варианты решений — задачи 238 и 241.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{1007}}$.

243. Найдите такое наименьшее положительное число x, что

$$\{x\}^2 = \frac{2}{[x^2]}.$$

См. аналогичные варианты решений — задачи 238 и 241.

Ответ: $1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

244. (Санкт-Петербург/1998, А. Храбров) Число x удовлетворяет неравенству

$$[x]^2 - x \cdot [x] + 3 \leqslant 0.$$

Докажите, что $x \geqslant 4{,}75$.

Доказательство. С помощью типовой замены преобразуем исходное неравенство к виду

$$n \cdot \alpha \geqslant 3.$$

Наименьшее значение, которое может принимать n, равно 4, так как $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда $\alpha \geqslant 0{,}75$, то есть $x = n + \alpha \geqslant 4{,}75$. ■

245. (Санкт-Петербург/1998, А. Храбров) Число x удовлетворяет неравенству $[x]^2 - x \cdot [x] + 4 \leqslant 0$. Докажите, что $x \geqslant 5{,}8$.

Указание. Используя типовую замену, получим $n \cdot \alpha \geqslant 4$.

246. (Санкт-Петербург/1998, А. Храбров) Число x удовлетворяет неравенству $\lg [x] + \lg \{x\} \geqslant 3$. Докажите, что $x > 1001{,}998$.

Указание. Используя типовую замену, получим $n \cdot \alpha \geqslant 1000$.

247. Определите количество решений уравнения

$$[x] = \{x\} \sqrt{2014}.$$

См. другой вариант решения — задача 230.

Решение. Сделаем замену $x = n + \alpha$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$n = \alpha\sqrt{2014}.$$

Чтобы выполнялось условие целочисленности n, значение α должно быть дробью, в знаменателе которой стоит $\sqrt{2014}$, а в числителе — целые числа от 0 до $\left[\sqrt{2014}\right]$. Всё, задача решена!

Ответ: 45 решений $\left(\text{при } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 44 = \left[\sqrt{2014}\right]\right)$.

248. Решите неравенство $[x]^2 \cdot \{x\} < 1$.

См. другой вариант решения — задача 233.

Решение. Замена $x = n + \alpha$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant \alpha < 1$, приводит к неравенству

$$n^2\alpha < 1.$$

Очевидно, что при $n = -1,\ 0,\ 1$ неравенство выполняется при любом допустимом значении α. Значит, пишем сразу в ответ $x \in \big[-1,\ 2\big)$.

При $n \neq -1,\ 0,\ 1$ решением будет $\alpha < \dfrac{1}{n^2}$, то есть $n \leqslant x < n + \dfrac{1}{n^2}$. Заметим, что полуинтервал $\left[2,\ 2\dfrac{1}{4}\right)$, который является решением при $n = 2$, объединяется с ранее найденным ответом $\big[-1,\ 2\big)$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x < \dfrac{9}{4}, \\ n \leqslant x < n + \dfrac{1}{n^2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, 0, 1, 2. \end{array}\right.$

249. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 = [x]^3 - 3\,[x]^2$.

См. другой вариант решения — задача 354.

Решение.

$$x^3 - [x]^3 - 3\left(x^2 - [x]^2\right) = 0,$$

$$\big(x - [x]\big)\left(x^2 + x\,[x] + [x]^2 - 3x - 3\,[x]\right) = 0.$$

Поскольку $x - [x] = 0$ при любом целом x, в ответ заносим $x \in \mathbb{Z}$. Для оставшегося выражения применим замену (11.2)

$$(n+\alpha)^2 + (n+\alpha)\cdot n + n^2 - 3(n+\alpha) - 3n = 0,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < \alpha < 1$ (случай $\alpha = 0$ уже рассмотрен).

Сгруппируем слагаемые, чтобы рассмотреть это уравнение как квадратное относительно α

$$\alpha^2 + \alpha\cdot 3\big(n-1\big) + 3\big(n^2 - 2n\big) = 0.$$

Условием существования решений является $D \geqslant 0$, где

$$D = 3^2\big(n-1\big)^2 - 4\cdot 3\big(n^2 - 2n\big) = 3\big(-n^2 + 2n + 3\big) = 3\big(3-n\big)\big(n+1\big).$$

Так как n — целые числа, $n \in \big\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\big\}$. Среди этих значений нет ни одного такого, чтобы $0 < \alpha < 1$. Следовательно, решением исходного уравнения являются только целые значения x.

Ответ: $x \in \mathbb{Z}$.

250. Найдите такие значения x, $[x]$ и $\{x\}$, которые образуют арифметическую прогрессию из трех членов с ненулевой разностью.

Решение. Воспользуемся типовой заменой (11.2). Тогда числа $n+\alpha$, n и α образуют арифметическую прогрессию $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, где $a_2 = \dfrac{a_1+a_3}{2}$. Возможны три варианта:

$$1)\ n = \frac{\alpha+(n+\alpha)}{2}, \quad 2)\ \alpha = \frac{n+(n+\alpha)}{2}, \quad 3)\ n+\alpha = \frac{\alpha+n}{2},$$

причем $n \neq 0$ и $\alpha \neq 0$, поскольку разность прогрессии не равна 0.

Рассмотрим первый случай. Решением уравнения

$$n = \frac{\alpha+(n+\alpha)}{2}, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}_{\neq 0},\ 0 < \alpha < 1,$$

являются значения $n=1$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда арифметическая прогрессия с разностью $d = \dfrac{1}{2}$ имеет вид

$$a_1 = \{x\} = \frac{1}{2},\ a_2 = [x] = 1,\ a_3 = x = \frac{3}{2}.$$

Второй и третий случаи решений не дают.

Ответ: $x = \dfrac{3}{2}, \quad [x] = 1, \quad \{x\} = \dfrac{1}{2}$.

251. (На основе Канада/1975) Найдите такие значения x, $[x]$ и $\{x\}$, которые образуют геометрическую прогрессию из трех членов с ненулевым знаменателем. (В оригинальной задаче $x > 0$).

Решение. Воспользуемся типовой заменой (11.2). Тогда числа $n+\alpha$, n и α образуют геометрическую прогрессию $\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, где $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Возможны три варианта:

$$1)\ \alpha^2 = n(n+\alpha), \quad 2)\ n^2 = \alpha(n+\alpha), \quad 3)\ (n+\alpha)^2 = n\alpha,$$

причем $n \neq 0$ и $\alpha \neq 0$, поскольку знаменатель прогрессии не равен 0.

Рассмотрим первый случай. Решением уравнения

$$\alpha^2 = n(n+\alpha), \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}_{\neq 0},\ 0 < \alpha < 1,$$

являются значения $n = -1$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тогда геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ имеет вид

$$b_1 = [x] = -1,\ b_2 = \{x\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ b_3 = x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Второй случай определяет другую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$b_1 = \{x\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ b_2 = [x] = 1,\ b_3 = x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

В третьем случае решений нет.

Ответ: $\left[\begin{array}{llll} 1) & x_1 = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}, & [x_1] = -1, & \{x_1\} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ 2) & x_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, & [x_2] = 1, & \{x_2\} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{array}\right.$

252. (Иран/1985) Пусть x, $y \in \mathbb{R}$. Докажите, что два равенства

$$[x]+[y]=[x+y] \quad \text{и} \quad [-x]+[-y]=[-x-y]$$

являются тождествам тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из чисел x или y — целое.

Доказательство. Очевидно, что если одно из чисел x или y — целое, тождества выполняются.

Утверждение в обратную сторону докажем от противного. Пусть x и y не являются целыми числами. Представим $x = n + \alpha$ и $y = m + \beta$, где m, $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < \alpha$, $\beta < 1$. Тогда

$$\begin{cases} [n+\alpha]+[m+\beta] = [n+\alpha+m+\beta], \\ [-n-\alpha]+[-m-\beta] = [-n-\alpha-m-\beta] \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} [\alpha]+[\beta] = [\alpha+\beta], \\ [-\alpha]+[-\beta] = [-\alpha-\beta] \end{cases} \iff \begin{cases} [\alpha+\beta] = 0, \\ [-\alpha-\beta] = -2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leqslant \alpha+\beta < 1, \\ -2 \leqslant -\alpha-\beta < -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha+\beta < 1, \\ \alpha+\beta > 1. \end{cases}$$

Полученное противоречие доказывает, что по крайней мере одно из чисел x или y — целое. ■

12. Уравнения вида $\left[f(x)\right] = g(x)$

Уравнения данного вида встречаются довольно часто среди конкурсных задач на антье и мантиссу. Также к данному виду сводятся и другие уравнения, например, с мантиссой.

Характерной чертой уравнения

$$\left[f(x)\right] = g(x) \tag{12.1}$$

является целочисленность правой части. Следовательно, уравнению удовлетворяют только те значения неизвестной, при которых $g(x)$ принимает целые значения. Если к тому же области значений $f(x)$ или $g(x)$ ограничены, то уравнение (12.1) может распасться на несколько простейших уравнений.

12.1. Использование обратной функции к $g(x)$

Так как уравнению (12.1) удовлетворяют значения неизвестной, при которых $g(x)$ целочисленная, выполним замену

$$n = g(x), \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Предположим, что функция $g(x)$ строго монотонная. Тогда функция $g(x)$ обратима, то есть можно однозначно выразить x через n:

$$x = g^{-1}(n).$$

В результате двойной замены уравнение (12.1) становится уравнением с целочисленной неизвестной

$$\left[f\left(g^{-1}(n)\right)\right] = n, \quad \left[f\left(g^{-1}(n)\right) - n\right] = 0. \tag{12.2}$$

Последнее уравнение равносильно двойному целочисленному неравенству

$$0 \leqslant f\left(g^{-1}(n)\right) - n < 1, \tag{12.3}$$

решая которое, находим значения n и можем определить количество решений уравнения (12.1), а после обратной замены вычисляем решения исходного уравнения.

Применимость описанного метода ограничена обратимостью функции $g(x)$, также может сказаться сложность функции $f\big(g^{-1}(x)\big)$, при которой неравенство (12.3) и последующая обратная замена могут быть сопряжены с излишними вычислительными трудностями по сравнению с другими методами решения уравнения (12.1).

253. Решите уравнение $\left[\dfrac{x+1994}{81}\right] = \dfrac{x+2011}{101}$.

Решение. Пусть $n = \dfrac{x+2011}{101}$, тогда $x = 101n - 2011$. Пропустим подстановку, упрощения и выпишем сразу двойное целочисленное неравенство

$$0 \leqslant \frac{101n-17}{81} - n < 1.$$

Левое неравенство дает $n \geqslant \dfrac{17}{20}$, или $n \geqslant 1$ (ведь n принимает только целые значения).

Правое неравенство упрощается до $n < \dfrac{49}{10}$, или $n \leqslant 4$, то есть уравнение имеет четыре решения при $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Ответ: $-1910,\ -1809,\ -1708,\ -1607$.

254. Решите уравнение $[x] = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

См. другой вариант решения — задача *346*.

Решение. Сделаем замену $n = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$, выразим $x = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ и перейдем к двойному неравенству относительно вспомогательной целочисленной неизвестной n

$$n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n} < n+1.$$

Сначала рассмотрим вариант, при котором n принимает положительные значения. Тогда неравенство примет вид $n^2 \leqslant \sqrt{2} < n^2 + n$. Нетрудно видеть, что лишь $n = 1$ входит в целочисленные решения.

Вариант с отрицательными n приводит к неравенству $n^2+n < \sqrt{2} \leqslant n^2$, которое не имеет решений среди $n \in \mathbb{Z}_{<0}$: при $n = -1$ «подводит» правое неравенство, при $n \leqslant -2$ не выполняется левое неравенство.

Итак, при $n = 1$ имеем единственное решение исходного уравнения.

Ответ: $\sqrt{2}$.

255. Определите количество решений уравнения $x = \left\{32x\right\}$.

См. другие варианты решений — задачи *37*, *97*.
Указание. Представьте уравнение в виде $\left[32x\right] = 31x$.
Замена $n = 31x$ приведет к условию $0 \leqslant n < 31$, то есть количество решений исходного уравнения равно 31.

Ответ: 31 решение.

12.2. Равносильный переход к $0 \leqslant f(x) - g(x) < 1$

Основное свойство мантиссы для функции $f(x)$ гласит

$$0 \leqslant \left\{f(x)\right\} < 1, \quad \text{или} \quad 0 \leqslant f(x) - \left[f(x)\right] < 1.$$

Тогда для уравнения $[f(x)] = g(x)$ имеет место равносильный переход

$$\left[f(x)\right] = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant f(x) - g(x) < 1, \\ g(x) \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{12.4}$$

Решением неравенства из (12.4) будет, скорее всего, числовой интервал или даже несколько интервалов, причем решения уравнения (12.1) входят во множество решений этого неравенства. То есть неравенство (12.4) является **следствием** уравнения (12.1). Заметим также, что если неравенство из (12.4) не имеет решений, то это означает отсутствие решений у уравнения (12.1).

Равносильность перехода обеспечивается условием $g(x) \in \mathbb{Z}$. А как применить данное условие?

Наиболее приемлемый вариант заключается в том, чтобы перейти с помощью равносильных преобразований от условий для x к условиям для $g(x)$ и далее воспользоваться $g(x) \in \mathbb{Z}$.

Другим вариантом может оказаться обоснованный подбор значений x с учетом целочисленности $g(x)$. Разумеется, надо быть уверенным в том, что часть решений не будет упущена при таком подборе.

В заключение останется решить одно или несколько уравнений типа $g(x) = n$.

256. (Всесибир./2010-2011) Решите уравнение $x^2 - [x] - 2 = 0$.

См. другой вариант решения — задача 223.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида $\big[f(x)\big] = g(x)$. Перейдем к неравенству (12.4)

$$0 \leqslant x - x^2 + 2 < 1.$$

Решением левого неравенства будет сегмент $[-1,\ 2]$. (Из-за «не слишком удобного» дискриминанта не будем искать решения для правого неравенства.) Это означает, что $[x] \in \big\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\big\}$. Подставляя каждое из четырех значений в исходное уравнение, определяем, что $x_1 = -1$ (если $[x] = -1$), $x_1 = \sqrt{3}$ (если $[x] = 1$) и $x_2 = 2$ (если $[x] = 2$) — решения исходного уравнения.

Ответ: $-1,\ \sqrt{3},\ 2.$

257. Решите уравнение $x^2 - 3x = \big[3 - 2x\big]$.

Решение. Использование обратной функции к $g(x) = x^2 - 3x$ сопряжено с явными трудностями, поэтому попробуем проанализировать неравенство

$$0 \leqslant (3 - 2x) - (x^2 - 3x) < 1,$$
$$-1 < x^2 - x - 3 \leqslant 0.$$

Напомним, что если имеются решения исходного уравнения, то эти решения удовлетворяют указанному двойному неравенству.

Левое неравенство $x^2 - x - 2 > 0$ имеет решение $x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$.

Решением правого неравенства $x^2 - x - 3 \leqslant 0$ будет сегмент $[x_1,\ x_2]$, где $x_1 < -1$, а $x_2 < 2$ ($x_1,\ x_2$ — корни квадратного уравнения $x^2 - x - 3 = 0$). Порядок размещения на оси абсцисс $x_1 < -1 < 2 < x_2$ предопределен тем, что парабола $y = x^2 - x - 3$ смещена на 1 вниз относительно параболы $y = x^2 - x - 2$.

Таким образом, вычислив значения x_1 и x_2, получим два полуинтервала

$$L = \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2},\ -1\right) \quad \text{и} \quad R = \left(2,\ \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right],$$

внутри которых скрывается решение задачи, если таковое существует.

На полуинтервалах L и R антье из правой части исходного уравнения однозначно вычисляется

$$\big[3 - 2x\big] = \begin{cases} 5 & \text{при } x \in L, \\ -2 & \text{при } x \in R. \end{cases}$$

Задача свелась к решению двух квадратных уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 5, \\ x \in L \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - 3x = -2, \\ x \in R. \end{cases}$$

Подходит лишь один корень из первого уравнения.

Ответ: $\dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}$.

258. Решите уравнение $[2x] = x^2$.

См. другой вариант решения — задача *228*.

Решение. Равносильный переход приводит к неравенству

$$0 \leqslant 2x - x^2 < 1,$$

решением которого является $x \in [0,\ 1) \cup (1,\ 2]$. Подбор таких значений x из этих двух коротких полуинтервалов, чтобы x^2 было целым числом, не должен вызвать затруднений.

Ответ: $\{0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2\}$.

259. Решите уравнение $[2x] = x - \dfrac{1}{x}$.

Решение. Оказывается, что с помощью метода (12.4) легко доказывается отсутствие решений.

Выпишем неравенство-следствие

$$0 \leqslant 2x - \left(x - \frac{1}{x}\right) < 1, \quad 0 \leqslant x + \frac{1}{x} < 1.$$

Первый вывод, который можно сделать, — решения исходного уравнения не могут быть отрицательными, как и нулем, не входящим в ОДЗ уравнения. Второй вывод — решений нет, так как при $x > 0$ всегда выполняется известное неравенство $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Ответ: $\varnothing$.

12.3. Использование ограниченности $f(x)$ и $g(x)$

Если функции $f(x)$ (или $g(x)$) ограничены, то правая (или левая) часть уравнения (12.1) принимает ограниченное количество целых значений. В этом случае решение уравнения (12.1) сводится к совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} \big[f(x)\big] = n_1, \\ g(x) = n_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \big[f(x)\big] = n_2, \\ g(x) = n_2, \end{cases} \qquad \ldots \qquad \begin{cases} \big[f(x)\big] = n_k, \\ g(x) = n_k, \end{cases} \tag{12.5}$$

где $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ — область значений $\big[f(x)\big]$ и/или целые числа из области значений $g(x)$, или формально

$$\{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k\} = E\big([f(x)]\big) \cap E\big(g(x)\big) \cap \mathbb{Z}. \tag{12.6}$$

Другим случаем ограниченности функций $f(x)$ и $g(x)$ является ограниченность одной функции сверху, а другой — снизу. Рассмотрение этого случая ведет к той же совокупности (12.5).

Отметим, что переход к совокупности систем (12.5) является равносильным при условии (12.6). Однако не всегда практично тратить время на определение множества $\{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k\}$. В таких случаях совокупность (12.5) будет следствием для уравнения (12.1).

260. Решите уравнение $\big[\log_2 x\big] = \cos x$.

Решение. Сыграем на том, что функция $\cos x$ ограничена и принимает только три целых значения -1, 0 и 1. Переходим к совокупности (12.5)

$$\begin{cases} \big[\log_2 x\big] = -1, \\ \cos x = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \big[\log_2 x\big] = 0, \\ \cos x = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \big[\log_2 x\big] = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим вторую систему, которая даст единственное решение исходного уравнения. Решением уравнения $\big[\log_2 x\big] = 0$ является полуинтервал $\big[1,\ 2\big)$, решением уравнения $\cos x = 0$ — серия $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Проверкой определяем, что $\left[\log_2 \dfrac{\pi}{2}\right] = 0$.

Другие системы не имеют решений.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

261. Решите уравнение $\left[3\sqrt{x-x^2}\right] = 2^{x-\frac{1}{2}}$.

Решение. Исследуем область определения и область значений функции, стоящей под знаком антье

$$D\left(3\sqrt{x-x^2}\right) = [0,\ 1],$$

$$E\left(3\sqrt{x-x^2}\right) = \left[0,\ \frac{3}{2}\right],$$

$$E_{\mathbb{Z}}\left(\left[3\sqrt{x-x^2}\right]\right) = \{0,\ 1\}$$

($E_{\mathbb{Z}}$ означает множество значений на множестве целых чисел.) Значит, переходим к совокупности систем простейших уравнений (12.5)

$$\begin{cases} \left[3\sqrt{x-x^2}\right] = 0, \\ 2^{x-\frac{1}{2}} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[3\sqrt{x-x^2}\right] = 1, \\ 2^{x-\frac{1}{2}} = 1. \end{cases}$$

Сначала решим вторые уравнения и затем подставим для проверки найденные значения в уравнения с антье.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

262. Решите уравнение $\left[x^6 - 1\right] = -\frac{9(x-1)^2}{4}$.

Решение. Поскольку

$$E(x^6-1) = [-1,\ +\infty),$$

$$E\left(-\frac{9(x-1)^2}{4}\right) = (-\infty,\ 0],$$

имеем случай ограниченности одной функции снизу, а другой сверху. Значит, переходим к совокупности (12.5)

$$\begin{cases} \left[x^6-1\right] = -1, \\ -\frac{9(x-1)^2}{4} = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[x^6-1\right] = 0, \\ -\frac{9(x-1)^2}{4} = 0. \end{cases}$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\frac{1}{3}$, 1.

12.4. Использование особенного поведения $f(x)$ и $g(x)$

Рассмотрим первый из особенных вариантов поведения функций $f(x)$ и $g(x)$, когда $f(x)$ неубывающая (невозрастающая), а $g(x)$ монотонно убывающая (возрастающая). Для определенности будем считать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются таковыми на множестве допустимых значений для (12.1).

Пусть функция $f(x)$ неубывающая, тогда для $x_1 \leqslant x_2$ выполняется $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Согласно свойству антье (2.8): $\big[f(x_1)\big] \leqslant \big[f(x_2)\big]$, т.е. $\big[f(x)\big]$ неубывающая. Вариант с невозрастанием $f(x)$ разбирается аналогично.

Теперь сформулируем очевидное правило.

Если на некотором множестве $M \subseteq D\big(f(x)\big) \cap D\big(g(x)\big)$ функция $f(x)$ не убывает (не возрастает), а функция $g(x)$ монотонно убывает (возрастает), то уравнение $\big[f(x)\big] = g(x)$ имеет на множестве M не более одного решения, которое зачастую угадывается (подбирается).

Второй особенностью при сопоставлении функций $f(x)$ и $g(x)$ является значительное различие в росте (убывании) при возрастании (убывании) обеих функций, например, при $x > 1$ функция $f_1(x) = x^2$ растет существенно быстрее, чем функция $f_2(x) = x$.

Основываясь на значительном росте (убывании) одной из функций, можно рассматривать вопрос о наличии решений уравнения $\big[f(x)\big] = g(x)$ лишь на каком-то ограниченном множестве, так как на другой части числовой прямой функции $f(x)$ и $g(x)$ «разбежались». Понятно, что данный неформальный подход должен принимать вид строгих рассуждений, например, с использованием метода оценок, см. задачу *265*.

263. Решите уравнение $\big[3x\big] = \log_{0,5} x$.

Решение. ОДЗ уравнения — полупрямая $\big(0,\ +\infty\big)$. Поскольку на этом интервале функция $f(x) = 3x$ возрастает, а функция $g(x) = \log_{0,5} x$ убывает, исходное уравнение имеет не более одного решения. Подбором находим $x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

264. Решите уравнение $\big[2 - x\big] = 2\sin x$.

Решение. Функция $f(x) = 2 - x$ убывает, а функция $g(x) = 2\sin x$

местами возрастает, местами убывает. Но нам известны интервалы монотонности функции $2\sin x$. На сегменте $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $2\sin x$ возрастает. Согласно правилу, если решение уравнения на данном сегменте есть, то это решение единственное. Первым делом проверим $x = \dfrac{\pi}{6}$, так как при этом значении правая часть уравнения равна 1. Предположение подтвердилось: $x = \dfrac{\pi}{6}$ — решение исходного уравнения на сегменте $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

А что же делать с другой частью числовой прямой?

Оказывается, что благодаря ограниченности функции $g(x) = 2\sin x$ $(-2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2)$ несложно обосновать отсутствие решений исходного уравнения на других интервалах. Предложим выполнить эту часть решения самостоятельно. Рекомендуем рассматривать не синусные интервалы, а интервалы, на которых $[2-x]$ будет константой, например, на сегменте $[3,\ 4]$ области значений правой и левой части исходного уравнения различны: $[2-x] = -2$, а $2\sin x > -2$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$.

265. Решите уравнение $[2x] = x^3 - 3$.

См. другие варианты решений — задачи *226*, *351*.

Решение. Функции $f(x) = 2x$ и $g(x) = x^3 - 3$, обе возрастающие, заметно отличаются своим ростом (по-разному возрастают), первая — линейная функция, а вторая — третьей степени. Поэтому не составляет труда подобрать оценки, чтобы отбросить интервалы, на которых левая и правая части исходного уравнения не могут равняться друг другу.

$$\begin{array}{rr}
x < -1: & x^3 - 3 < 2x - 1 < [2x], \\
-1 \leqslant x < 0: & x^3 - 3 < -3 < [2x], \\
0 \leqslant x < 1: & x^3 - 3 < \ 0 \ \leqslant [2x], \\
1 \leqslant x < \dfrac{3}{2}: & x^3 - 3 < \ 2 \ \leqslant [2x], \\
2 < x: & [2x] \leqslant 2x < x^3 - 3.
\end{array}$$

Благодаря проведенным оценкам, исходное уравнение свелось к решению лишь на полуинтервале $\left[\dfrac{3}{2},\ 2\right)$, на котором $[2x] = 3$.

Ответ: $\sqrt[3]{6}$.

12.5. Уравнения вида $\big[f(x)\big] = f\big([x]\big)$

Интерес к уравнениям вида

$$\big[f(x)\big] = f\big([x]\big) \tag{12.7}$$

вызван несколькими причинами.

Во-первых, для данного вида уравнений можно сформулировать необходимое и достаточное условие **существования** решений.

Во-вторых, процедура решения таких уравнений может быть детально рассмотрена для уравнения в общем виде, причем именно в общем виде удобнее вести рассуждения, не отвлекаясь на специфику представления функции $f(x)$.

В-третьих, графический метод решения уравнений вида (12.7) настолько убедителен, что рекомендуем читателю, мало-мальски знакомому с графическим методом, забегая вперед, посмотреть п. 18.3. В этом пункте наглядно сопоставляются графики функций $y = \big[f(x)\big]$ и $y = f\big([x]\big)$ для решения уравнения (12.7).

И наконец, такие уравнения надо еще распознать, а иногда и догадаться, как привести исходное уравнение к «начальному» виду.

Итак, рассмотрим уравнение (12.7).

Стоящая в правой части уравнения функция $f\big([x]\big)$ должна принимать хотя бы одно целое значение, чтобы уравнение имело смысл. Более того, целые значения $f(x)$ должна принимать лишь при целочисленных значениях аргумента. То есть нам известно достаточное условие существования решений уравнения (12.7)

$$\exists x \in \mathbb{Z}: \;\; f(x) \in \mathbb{Z}. \tag{12.8}$$

Очевидно, что если имеются такие значения x, для которых выполняется условие (12.8), то эти значения x являются решениями уравнения (12.7).

Таким образом, **необходимым и достаточным условием существования решений уравнения $\big[f(x)\big] = f\big([x]\big)$ является условие целочисленности функции $f(x)$ хотя бы при одном целом значении аргумента.**

Пусть $x = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ такое, что $f(n) \in \mathbb{Z}$. Тогда для $[x] = n$ уравнение (12.7) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(n) \leqslant f(x) < f(n) + 1, \\ n \leqslant x < n + 1, \\ f(n) \in \mathbb{Z} \;\; \text{при } n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{12.9}$$

То есть уравнение (12.7) распадается на совокупность систем неравенств. Каждая система этой совокупности соответствует одному из целых значений аргументов, при котором $f(x)$ принимает целое значение.

Проанализируем совокупность систем (12.9) для монотонно убывающей функции $f(x)$. Оказывается, в этом случае сразу определяются решения уравнения (12.7). Ими являются те самые целые значения x, при которых $f(x)$ принимает целые значения.

Рассмотрим систему (12.9) для монотонно возрастающей непрерывной функции $f(x)$ при $x \in \big[n,\ n+1\big)$. Тогда решением системы (12.9) будет полуинтервал $[n,\ x_0)$, где x_0 — наименьшее значение, для которого либо $f(x_0) = f(n) + 1$, либо $f(x_0) = f(n+1)$.

Перейдем к примерам, демонстрирующим описанный подход к решению уравнений вида (12.7).

266. Решите уравнение $2^{[x]} \cdot \big[2^{-x}\big] = 1$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду (12.7)

$$\big[2^{-x}\big] = 2^{-[x]}.$$

Поскольку функция $f(x) = 2^{-x}$ монотонно убывает, то решения следует искать среди целых x, в которых $f(x)$ принимает целые значения.

Ответ: $x \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

267. Решите уравнения а) $[\sin x] = \sin [x]$, б) $[\cos x] = \cos [x]$.

Решение. Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ таковы, что среди целых значений аргумента лишь при $x = 0$ принимают целые значения. На полуинтервале $x \in \big[0,\ 1\big)$ функция $\sin x$ возрастает, а функция $\cos x$ убывает.

Ответ: а) $x \in \big[0,\ 1\big)$, б) $x = 0$.

268. Решите уравнение $\big[2x\big] = 2\,[x]$.

См. другие варианты решений — задачи *101*, *114*.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (12.7), где $f(x) = 2x$. При целых значениях x функция $f(x)$ принимает целые значения. Тогда согласно (12.9) перейдем к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} 2n \leqslant 2x < 2n+1, \\ n \leqslant x < n+1. \end{cases}$$

Ответ: $\left[n,\ n+\dfrac{1}{2}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

12.6. Задачи по теме раздела

269. Решите уравнение $\left[\dfrac{6x+5}{8}\right] = \dfrac{15x-7}{5}$.

270. Решите уравнение $\left[\dfrac{x+2013}{5}\right] = \dfrac{x+2015}{2}$.

271. Решите уравнение $[x] = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$.

272. Решите уравнения: а) $\left[\dfrac{1}{x}\right] = x\sqrt{5}$; б) $\left[\dfrac{1}{x}\right] = x\sqrt{2014}$.

273. Решите уравнение $\left[\dfrac{x\sqrt{2}+2}{3}\right] = x\sqrt{3}-1$.

274. Решите уравнение $\left[\dfrac{2}{x}\right] = \dfrac{3}{x}$.

275. Решите уравнение $x^2 - 8\,[x] + 7 = 0$.

276. Решите уравнение $x^2 - 10\,[x] + 9 = 0$.

277. Решите уравнение $9x^2 + 3\,[x] = 19$.

278. Определите количество решений уравнения $4x^2 - 40\,[x] + 51 = 0$.

279. Решите уравнение $x^2 - 2 = \big[2 - 3x\big]$.

280. Решите уравнение $x^3 - 3 = [x]$.

281. Решите уравнение $\big[\log_2 x\big] = \sin x - 1$.

282. Решите уравнение $\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{4x-x^2}\right] = x\sqrt{2}$.

283. Решите уравнение $[-2013x] = \log_{2014} x$.

284. Решите уравнение $\left[8x + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{1}{x}$.

285. Решите уравнение $\left[\dfrac{6-x}{2}\right] = \dfrac{1}{3^x}$.

286. Решите уравнение $\left[\dfrac{4|x|}{3}\right] = \left|\dfrac{4[x]}{3}\right|$.

287. Решите уравнение $[x] = 10^{[\lg x]}$.

288. Решите уравнение $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$.

289. Решите уравнение $[x^2] = [x]^2$ для неотрицательных x.

290. Решите уравнение $\left[\dfrac{3}{x-1}\right] = \dfrac{3}{[x]-1}$.

291. Решите уравнение $\left[\dfrac{2x-1}{3x+2}\right] = \dfrac{80}{9} + \dfrac{4x}{3} - 4x^2$.

292. Задано уравнение $[x]\left(x^2+1\right) = x^3$.

1) Докажите, что уравнение имеет по одному решению на каждом интервале $x \in \left(n, n+1\right)$, где $n \in \mathbb{N}$.

2) Докажите, что все действительные положительные решения данного уравнения являются иррациональными числами.

293. Решите уравнение $x^2 + \left[\sqrt{5-x^2}\right]^2 = 5$.

12.7. Указания, решения, ответы

Задачи *269-274* решаются с использованием обратной функции (п. 12.1.), см. решения аналогичных задач *253*, *254*.

269. (Ленинград/1965) Решите уравнение $\left[\dfrac{6x+5}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$.

Ответ: $\dfrac{7}{15}$, $\dfrac{4}{5}$.

270. Решите уравнение $\left[\dfrac{x+2013}{5}\right]=\dfrac{x+2015}{2}$.

Ответ: -2019, -2017.

271. Решите уравнение $[x]=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

272. Решите уравнения: а) $\left[\dfrac{1}{x}\right]=x\sqrt{5}$; б) $\left[\dfrac{1}{x}\right]=x\sqrt{2014}$.

Ответ: а) $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; б) $-\dfrac{7}{\sqrt{2014}}$.

273. Решите уравнение $\left[\dfrac{x\sqrt{2}+2}{3}\right]=x\sqrt{3}-1$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

274. Решите уравнение $\left[\dfrac{2}{x}\right]=\dfrac{3}{x}$.

Ответ: -3, $-\dfrac{3}{2}$.

275. (САММАТ*/2011) Решите уравнение $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

Решение. Продемонстрируем рассуждения, которые приведут к неравенству (12.4). Оттолкнувшись от свойства антье $x - 1 < [x] \leqslant x$, выполним следующие преобразования:

$$-8x \leqslant -8[x] < 8 - 8x,$$

$$x^2 - 8x + 7 \leqslant x^2 - 8[x] + 7 < x^2 - 8x + 15,$$

$$x^2 - 8x + 7 \leqslant 0 < x^2 - 8x + 15,$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 15 > 0. \end{cases}$$

Решением системы является объединение двух полуинтервалов $[1,\ 3) \cup (5,\ 7]$, на которых известны значения $[x]$: $[x] \in \{1,\ 2,\ 6,\ 7\}$. Далее подставляем эти числа в исходное уравнение и определяем решения.

Ответ: $1,\ \sqrt{39},\ 7$.

276. (Сорос/1995-1996) Решите уравнение $x^2 - 10[x] + 9 = 0$.

См. аналогичное решение — задача *275*.

Ответ: $1,\ \sqrt{61},\ \sqrt{71},\ 9$.

277. (СПбГУ ИТМО/2009-2010) Решите уравнение $9x^2 + 3[x] = 19$.

См. аналогичное решение — задача *275*.

Ответ: $-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3}$.

278. (AHSME/1985) [29, с. 18] Определите количество решений уравнения $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

Указание. Довольно эффективен бесхитростный подход — прямым решением исходного уравнения по аналогии с задачей *275*.

В процессе решения должно получиться, что $[x] \in \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$, два значения $\{1,\ 3\}$ из которых будут посторонними.

Ответ: 4 решения — $\left\{\dfrac{\sqrt{29}}{2},\ \dfrac{\sqrt{189}}{2},\ \dfrac{\sqrt{229}}{2},\ \dfrac{\sqrt{269}}{2}\right\}$.

279. Решите уравнение $x^2 - 2 = \left[2 - 3x\right]$.

Указание. $x^2 - 4 = \left[-3x\right] \overset{(12.4)}{\Longrightarrow} 0 \leqslant -3x - x^2 + 4 < 1 \Longrightarrow x \in \left[-4,\ 1\right]$, чтобы не иметь дело с иррациональными числами (на самом деле x принадлежит объединению двух полуинтервалов). Так как x^2 — целое число, то удается сузить диапазон значений x до $\left[-4,\ -3\right)$. Далее $x \in \left[-4,\ -3\right) \Longrightarrow \left[-3x\right] \in \left\{10,\ 11,\ 12\right\} \Longrightarrow x \in \left\{-\sqrt{15},\ -4\right\}$.

Ответ: $-4,\ -\sqrt{15}$.

280. (Москва/1957) Решите уравнение $x^3 - 3 = [x]$.

Указание. $x^3 - 3 = [x] \overset{(12.4)}{\Longrightarrow} 0 \leqslant x - x^3 + 3 < 1 \Longrightarrow 1 < x < 2 \Longrightarrow [x] = 1 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{4}$.

Ответ: $\sqrt[3]{4}$.

281. Решите уравнение $\left[\log_2 x\right] = \sin x - 1$.

См. аналогичное решение — задача 260.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

282. Решите уравнение $\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{4x - x^2}\right] = x\sqrt{2}$.

См. аналогичное решение — задача 261.

Ответ: $0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

283. Решите уравнение $\left[-2013x\right] = \log_{2014} x$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x > 0$. На этом множестве функция $\log_{2014} x$ возрастает, а функция $\left[-2013x\right]$ не возрастает. Следовательно, если имеется решение исходного уравнения, то это решение будет единственным, см. также рассуждения и примеры, приведенные в п. 12.4. Не составляет труда подобрать подходящее значение, так как логарифм должен быть целым отрицательным числом.

Ответ: $\dfrac{1}{2014}$.

284. Решите уравнение $\left[8x + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{1}{x}$.

Решение. В левой части уравнения — неубывающая функция, в то время как функция $\dfrac{1}{x}$ убывает на каждом из двух интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. Значит, исходное уравнение может иметь не более двух решений. Подбором устанавливаем, что числа $\pm\dfrac{1}{3}$ являются решениями.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3}$.

285. Решите уравнение $\left[\dfrac{6-x}{2}\right] = \dfrac{1}{3^x}$.

Решение. Проанализируем исходное уравнение. Выражение $\dfrac{1}{3^x}$ должно быть целым, следовательно, $x \in \{0,\ -1,\ -2,\ \ldots\}$. Антье, стоящее в левой части уравнения, не возрастает, а функция $\dfrac{1}{3^x}$ убывает. При $x = 0$ левая и правая части уравнения не равны, при $x = -1$ имеет место равенство. Покажем, что $x = -1$ — единственное решение.

Рассмотрим две бесконечных последовательности $(n \in \mathbb{N})$

$$a_n = 3 + \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad b_n = 3^n.$$

$\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью $\dfrac{1}{2}$, $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем 3. Очевидно, что $a_n < b_n$ при $n \geqslant 2$. Следовательно,

$$\left[3 + \frac{n}{2}\right] \leqslant 3 + \frac{n}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left[3 + \frac{n}{2}\right] < 3^n \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

Если сделать замену $n = -x$, то последнее неравенство подтверждает, что кроме $x = -1$ других решений нет.

Ответ: -1.

286. Решите уравнение $\left[\dfrac{4\,|x|}{3}\right] = \left|\dfrac{4\,[x]}{3}\right|$.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (12.7), где $f(x) = \dfrac{4\,|x|}{3}$ (множитель $\dfrac{4}{3}$ выносится из-под модуля в правой части уравнения). Функция $f(x)$ принимает целые значения при $x = 3k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

При отрицательных x функция $f(x)$ убывает, значит, в ответ пишем $x = 3k$, где $k \in \mathbb{Z}_{<0}$.

При $x \geqslant 0$ знак модуля снимается и согласно (12.9) перейдем к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{4n}{3} \leqslant \dfrac{4x}{3} < \dfrac{4n}{3} + 1, \\ n \leqslant x < n + 1, \\ n = 3k \text{ при } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} x = 3k, & \text{где } k \in \mathbb{Z}_{<0}, \\ 3k \leqslant x < 3k + \dfrac{3}{4}, & \text{где } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \end{array}\right.$

287. Решите уравнение $[x] = 10^{[\lg x]}$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду (12.7)

$$\lg [x] = \big[\lg x\big].$$

Согласно анализу решения уравнений вида (12.7) и тому, что функция $f(x) = \lg x$ непрерывная и возрастающая, решением исходного уравнения будет совокупность полуинтервалов, см. обоснование в п.12.5.

Ответ: $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \big[10^n,\ 10^n + 1\big)$.

288. (Швеция/2003) Решите уравнение $\big[x^2 - 2x\big] + 2\,[x] = [x]^2$.

См. другой вариант решения — задача *349*.

Решение. Если перенести слагаемое $2\,[x]$ в правую часть уравнения, то видно, что уравнение является уравнением вида (12.7), где $f(x) = x^2 - 2x$ — квадратичная (непрерывная) функция. При всех целых значениях аргумента $f(x)$ принимает целые значения. На правой ветви параболы функция возрастает, на левой — убывает, вершина параболы — точка с координатами $\big(1,\ -1\big)$.

На интервале $\big(-\infty,\ 1\big)$ функция $f(x)$ монотонно убывает. Следовательно, все отрицательные целые числа и нуль пишем в ответ.

На полупрямой $\big[1,\ +\infty\big)$ функция $f(x)$ возрастает. На каждом из полуинтервалов $\big[n,\ n + 1\big)$, где $n \in \mathbb{N}$, решением будет промежуток

$\left[n,\ 1+\sqrt{n^2-2n+2}\right)$. Заметим, что два первых полуинтервала объединяются в один.

Ответ: $\mathbb{Z}_{\leqslant 0} \cup \left[1,\ 1+\sqrt{2}\right) \bigcup\limits_{n=3}^{+\infty} \left[n,\ 1+\sqrt{n^2-2n+2}\right)$.

289. Решите уравнение $[x^2] = [x]^2$ для неотрицательных x.

См. аналогичное решение — задача *288*.

Ответ: $\left[0,\ \sqrt{2}\right) \bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} \left[n,\ \sqrt{n^2+1}\right)$.

290. Решите уравнение $\left[\dfrac{3}{x-1}\right] = \dfrac{3}{[x]-1}$.

Решение. Исходное уравнение имеет вид

$$[f(x)] = f([x]), \quad \text{где } f(x) = \frac{3}{x-1},$$

которая монотонно убывает на каждом из двух интервалов: $(-\infty,\ 1)$ и $(1,\ +\infty)$. Значит, решениями являются целые значения x, при которых монотонно убывающая функция $f(x)$ принимает целые значения.

Ответ: $-2,\ 0,\ 2,\ 4$.

291. (Молдавия/1998) Решите уравнение

$$\left[\frac{2x-1}{3x+2}\right] = \frac{80}{9} + \frac{4x}{3} - 4x^2.$$

Решение. Представим уравнение в виде

$$\Bigg[\underbrace{\frac{2}{3} - \frac{7}{3(3x+2)}}_{f(x)}\Bigg] = \underbrace{\frac{4}{9}(5-3x)(3x+4)}_{g(x)}.$$

График функции $f(x)$ является гиперболой с асимптотами $x = -2/3$ и $y = 2/3$. На каждом из интервалов $(-\infty, -2/3)$ и $(2/3, +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает.

График функции $g(x)$ — парабола, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке $(1/6, 9)$. На интервалах $(-\infty, 1/6)$ и $(1/6, +\infty)$ функция $g(x)$ возрастает и убывает соответственно.

При $\boldsymbol{x \geqslant 1/6}$ исходное уравнение может иметь не более одного решения ($f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает, см. п. 12.4.). При $x \geqslant 1/2$

$$0 \leqslant f(x) < 2/3 \quad \Longrightarrow \quad [f(x)] = 0.$$

Поскольку $g(5/3) = 0$, одно из решений исходного уравнения $x = 5/3$ найдено.

При $\boldsymbol{-2/3 < x < 1/6}$ функции $f(x)$ и $g(x)$ противоположных знаков, значит, функции $[f(x)]$ и $g(x)$ также противоположных знаков. При указанных x решения отсутствуют.

При $\boldsymbol{-3/4 < x < -2/3}$

$$0 < g(x) < g(-2/3) = 56/9 < 7,$$

$$f(x) > f(-3/4) = 10 \quad \Longrightarrow \quad [f(x)] \geqslant 10.$$

Следовательно, на указанном промежутке решения также отсутствуют.

При $\boldsymbol{x \leqslant -3/4}$ функции $f(x)$ и $g(x)$ противоположных знаков, и на данном интервале решений нет.

Таким образом, исходное уравнение имеет лишь одно решение.

Ответ: $\dfrac{5}{3}$.

292. (Baltic/2012) Задано уравнение $[x]\left(x^2+1\right) = x^3$.

1) Докажите, что уравнение имеет по одному решению на каждом интервале $x \in \left(n,\, n+1\right)$, где $n \in \mathbb{N}$.

2) Докажите, что все действительные положительные решения данного уравнения являются иррациональными числами.

Доказательство. Пусть $n < x < n+1$, тогда $[x] = n$, и уравнение принимает вид $n\left(x^2+1\right) = x^3$.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - nx^2 - n$.

$f(n) < 0$, $f(n+1) > 0$, функция $f(x)$ возрастает на указанном интервале. Поскольку $f(x)$ — непрерывная функция, то существует единственное значение $x_0 \in \left(n,\, n+1\right)$ такое, что $f(x_0) = 0$.

2) Очевидно, что уравнение $[x]\left(x^2+1\right) = x^3$ не имеет целых положительных решений. Предположим, что имеется некоторое положительное рациональное решение $x = \dfrac{p}{q}$, где p, q — натуральные взаимно простые числа и $q > 1$. Заметим, что выражение $\dfrac{x^3}{x^2+1}$ должно быть

целым. Однако дробь

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{p^3}{q^3\left(\frac{p^2}{q^2}+1\right)} = \frac{p^3}{q\left(p^2+q^2\right)}$$

не может быть сократима до целого значения, так как p^3 не делится на q. Следовательно, все положительные решения уравнения являются иррациональными числами.

293. Решите уравнение $x^2 + \left[\sqrt{5-x^2}\right]^2 = 5$.

Решение. Представим исходное уравнение следующим образом

$$\left[\sqrt{5-x^2}\right] = \sqrt{5-[x]^2},$$

то есть имеем уравнение вида (12.7), где $f(x) = \sqrt{5-x^2}$.

Графиком функции $f(x)$ (см. рис. 10) является полуокружность, радиус которой равен $\sqrt{5}$, с центром в начале координат.

На этой полуокружности лежат четыре целочисленные точки

$A(-2,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(1,\ 2)$ и $D(2,\ 1)$.

На полуинтервале $\left[-\sqrt{5},\ 0\right)$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, решением исходного уравнения при указанных x будут два полуинтервала, которые объединяются в один промежуток $[-2,\ 0)$.

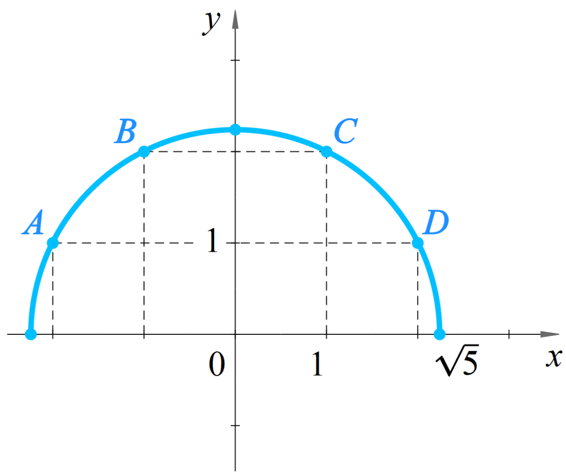


Рис. 10. График $f(x) = \sqrt{5-x^2}$

Так как на отрезке $\left[0,\ \sqrt{5}\right]$ функция $f(x)$ убывает, в ответ заносим положительные абсциссы двух целочисленных точек C и D.

Ответ: $[-2,\ 0) \cup \{1,\ 2\}$.

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

13. Уравнения вида $\left[f(x)\right] = \left[g(x)\right]$

Уравнения данного вида также нередко появляются среди конкурсных задач на антье и мантиссу. При решении уравнений

$$\left[f(x)\right] = \left[g(x)\right] \tag{13.1}$$

используются как свои отличительные методы решения, так и приемы, сходные с теми, которые продемонстрированы при обсуждении решения уравнений $\left[f(x)\right] = g(x)$.

13.1. Использование свойства антье $n \leqslant [x] < n+1$

И в правой, и в левой частях уравнения (13.1) стоит функция антье. Воспользуемся свойством антье $n \leqslant [x] < n+1$ и выполним равносильный переход к системе неравенств с целочисленным параметром n:

$$\begin{cases} n \leqslant f(x) < n+1, \\ n \leqslant g(x) < n+1. \end{cases} \tag{13.2}$$

Далее приходится решать данную систему неравенств, и не факт, что она легко поддастся. Поэтому рассмотрим один из случаев, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ линейные (такие задачи часто встречаются). Данный вид функций приводит к решению каждого из неравенств системы

$$\begin{cases} l_1(n) \leqslant x < r_1(n), \\ l_2(n) \leqslant x < r_2(n), \end{cases} \tag{13.3}$$

где $l_1(n)$, $l_2(n)$, $r_1(n)$, $r_2(n)$ — функции целочисленной переменной n. Знаки сравнения расставлены для определенности одним из четырех возможных вариантов. Чтобы система (13.3) была совместна, должны выполняться одновременно следующие условия

$$\begin{cases} l_1(n) < r_2(n), \\ l_2(n) < r_1(n). \end{cases} \tag{13.3$'$}$$

Одно из условий может быть нестрогим, что зависит от расстановки знаков сравнений в системе (13.3).

В завершение предлагаемого метода, решения (13.3′) — множество целых значений параметра n — подставляются по очереди в систему (13.3). После применения метода интервалов формируется ответ исходного уравнения.

294. Решите уравнение $\left[\dfrac{x}{2}\right] = \left[x - \dfrac{1}{2}\right]$.

Решение. Переходим к (13.2) — системе неравенств с целочисленным параметром n

$$\begin{cases} n \leqslant \dfrac{x}{2} < n+1, \\ n \leqslant x - \dfrac{1}{2} < n+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2n \leqslant x < 2n+2, \\ n + \dfrac{1}{2} \leqslant x < n + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Последняя система совместна, если

$$\begin{cases} 2n < n + \dfrac{3}{2}, \\ n + \dfrac{1}{2} < 2n+2, \end{cases} \qquad -\frac{3}{2} < n < \frac{3}{2}, \text{ то есть } n \in \{-1,\ 0,\ 1\}.$$

Таким образом, одно из решений исходного уравнения (для $n = -1$) определяется в системе

$$\begin{cases} 2n \leqslant x < 2n+2, \\ n + \dfrac{1}{2} \leqslant x < n + \dfrac{3}{2} \end{cases} \overset{n=-1}{\Longrightarrow} \begin{cases} -2 \leqslant x < 0, \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant x < 0.$$

Два оставшихся случая $n = 0$ и $n = 1$ рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right) \cup \left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$.

295. (Германия/2006-2007) Определите количество неотрицательных целых решений уравнения $\left[\dfrac{x}{a}\right] = \left[\dfrac{x}{a+1}\right]$, где параметр a — натуральное число.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе неравенств (13.2), причем n — целый параметр, принимающий только неотрицательные числа (под знаком антье стоят положительные выражения):

$$\begin{cases} n \leqslant \dfrac{x}{a} < n+1, \\ n \leqslant \dfrac{x}{a+1} < n+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} na \leqslant x < a(n+1), \\ n(a+1) \leqslant x < (n+1)(a+1). \end{cases}$$

Поскольку $na < n(a+1) < (n+1)a < (n+1)(a+1)$, натуральные решения исходного уравнения определяются неравенствами

$$n(a+1) \leqslant x < (n+1)a,$$

где $n \in \mathbb{Z}$, причем $0 \leqslant n < a$ — следует из $n(a+1) < x < (n+1)a$.

Теперь для каждого значения n подсчитаем количество решений:

$$\begin{array}{lcr}
\text{при } n = 0 & 0 \leqslant x < a & a \text{ решений;}\\
\text{при } n = 1 & a+1 \leqslant x < 2a & a-1 \text{ решений;}\\
\text{при } n = 2 & 2(a+1) \leqslant x < 3a & a-2 \text{ решений;}\\
\quad\ldots & \ldots \qquad \ldots & \ldots\\
\text{при } n = a-2 & (a-2)(a+1) \leqslant x < (a-1)a & 2 \text{ решения;}\\
\text{при } n = a-1 & (a-1)(a+1) \leqslant x < a^2 & 1 \text{ решение.}
\end{array}$$

Очевидно, что все решения различны. Поэтому остается вычислить сумму $1 + 2 + \ldots + (a-1) + a$.

Ответ: $\dfrac{a(a+1)}{2}$.

13.2. Переход к неравенству-следствию $|f(x) - g(x)| < 1$

Метод решения уравнения $[f(x)] = [g(x)]$, использующий неравносильный переход к неравенству

$$|f(x) - g(x)| < 1 \tag{13.4}$$

не только может оказаться спасительным в случае трудоемкости применения ранее рассмотренного метода, но и демонстрирует эффективность при доказательстве отсутствия решений уравнения (13.1).

Условие неравносильного перехода гласит, что все решения уравнения (13.1) входят во множество решений неравенства (13.4). Рассуждая дальше, делаем вывод, что если у неравенства (13.4) отсутствуют решения, то не имеет решений и уравнение (13.1).

Выполнив переход к неравенству-следствию (13.4), приходится соглашаться с наличием посторонних решений ради попытки выявить ограниченность функции $f(x)$ и/или функции $g(x)$ на множестве решений этого неравенства. Именно в этом заключается идея предлагаемого метода.

Если удается определить ограниченность функций, входящих в уравнение (13.1), то уравнение можно заменить совокупностью систем уравнений с антье, равным целым числам:

$$\begin{cases} [f(x)] = n_1, \\ [g(x)] = n_1, \end{cases} \quad \begin{cases} [f(x)] = n_2, \\ [g(x)] = n_2, \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} [f(x)] = n_k, \\ [g(x)] = n_k, \end{cases}$$

где $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ — область значений $\big[f(x)\big]$ или $\big[g(x)\big]$ (или их пересечение) на множестве решений неравенства (13.4).

296. Решите уравнение $\left[\dfrac{x^2+2x}{3}\right] = [x+3]$.

Решение. Перейдем к неравенству-следствию (13.4)

$$\left|\frac{x^2+2x}{3} - (x+3)\right| < 1,$$

решением которого будет $x \in (-3,\ -2) \cup (3,\ 4)$.

Определим области значений правой части исходного уравнения на множестве решений неравенства-следствия: $\big[x+3\big] = 0$ при $x \in (-3,\ -2)$, $\big[x+3\big] = 6$ при $x \in (3,\ 4)$. Тратить время и силы на область значений $\left[\dfrac{x^2+2x}{3}\right]$ не имеет особого смысла. Совокупность двух систем простых уравнений антье — достойный результат применения метода, основанного на переходе к неравенству-следствию:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x^2+2x}{3}\right] = 0, \\ [x+3] = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\dfrac{x^2+2x}{3}\right] = 6, \\ [x+3] = 6. \end{cases}$$

Каждому уравнению с антье соответствует двойное неравенство. Самостоятельно доведите решение до конца.

Ответ: $(-3,\ -2) \cup \left[-1+\sqrt{19},\ -1+\sqrt{22}\right)$.

297. Решите уравнение $\big[2x^2 - x + 1\big] = \big[x^2 + x - 1\big]$.

Решение. Перейдем к неравенству-следствию (13.4)

$$\left|x^2 - 2x + 2\right| < 1, \quad \text{или} \quad \left|(x-1)^2 + 1\right| < 1.$$

Неравенство не имеет решений. Следовательно, исходное уравнение также не имеет решений

Ответ: $\varnothing$.

13.3. Задачи по теме раздела

298. Решите уравнение $[x-1] = \left[\dfrac{x+2}{2}\right]$.

299. Решите уравнение $[2x-1] = [2-3x]$.

300. Решите уравнение $\left[\dfrac{3-x}{3}\right] = \left[\dfrac{1-x}{2}\right]$.

301. Решите уравнение $[\lg x^2] = \left[\lg \dfrac{3}{x^3}\right]$.

302. Решите уравнение $\left[\dfrac{x^2}{2} + x\right] = \left[x - \dfrac{1}{2x^2}\right]$.

303. Определите количество натуральных решений уравнения

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a-1}\right],$$

где параметр $a > 1$ — целое число.

13.4. Указания, решения, ответы

298. [23, с. 91] Решите уравнение $[x-1] = \left[\dfrac{x+2}{2}\right]$.

Решение. Перейдем к системе (13.2)

$$\begin{cases} n \leqslant x-1 < n+1, \\ n \leqslant \dfrac{x+2}{2} < n+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} n+1 \leqslant x < n+2, \\ 2n-2 \leqslant x < 2n. \end{cases}$$

Определим значения натурального n, при которых существует решение исходного уравнения:

$$\begin{cases} n+1 < 2n, \\ 2n-2 < n+2, \end{cases} \qquad 1 < n < 4, \text{ то есть } n \in \{2,\ 3\}.$$

При $n = 2$ $x \in [3,\ 4)$, а при $n = 3$ $x \in [4,\ 5)$.

Ответ: $[3,\ 5)$.

Примечание. Решение будет еще короче, если применить один из вариантов тождества Эрмита (2.35)

$$[2t] = [t] + [t + 1/2].$$

В этом случае исходное уравнение сразу приводится к простейшему виду $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2$.

299. Решите уравнение $[2x-1]=[2-3x]$.

См. аналогичное решение — задача 298.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}\right]$.

300. Решите уравнение $\left[\dfrac{3-x}{3}\right]=\left[\dfrac{1-x}{2}\right]$.

См. аналогичное решение — задача 298.
Ответ: $(-7,\ -6]\cup(-5,\ -1]\cup(0,\ 1]$.

301. Решите уравнение $[\lg x^2]=\left[\lg\dfrac{3}{x^3}\right]$.

Решение. Сделаем замену $z=\lg x$. Получим уравнение
$$[2z]=[3-3z],$$
которое уже ранее встречалось, см. задачу 299. Воспользуемся ответом этой задачи
$$\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\frac{2}{3},\qquad\sqrt{10}\leqslant x\leqslant\sqrt[3]{100}.$$

Ответ: $\left[\sqrt{10},\ \sqrt[3]{100}\right]$.

302. Решите уравнение $\left[\dfrac{x^2}{2}+x\right]=\left[x-\dfrac{1}{2x^2}\right]$.

См. аналогичное решение — задача 297.
Ответ: $\varnothing$.

303. (Хорватия/2000) Определите количество натуральных решений уравнения $\left[\dfrac{x}{a}\right]=\left[\dfrac{x}{a-1}\right]$, где параметр $a>1$ — целое число.

См. аналогичное решение — задача 295.

Ответ: $\dfrac{a(a-1)}{2}$.

14. Уравнения вида $\{f(x)\} = \{g(x)\}$ и $\{f(x)\} = f(\{x\})$

Большинство заданий с мантиссой сводятся к задачам с антье. В данном разделе собраны такие задания с мантиссой, при решении которых кратчайшим путем следует использовать специфические для мантиссы свойства.

14.1. Уравнения вида $\{f(x)\} = \{g(x)\}$

Рассмотрим уравнение вида

$$\{f(x)\} = \{g(x)\}. \tag{14.1}$$

Так как дробные части $f(x)$ и $g(x)$ равны, то разность $f(x)$ и $g(x)$ — целое число, верно и обратное высказывание, то есть $\{f(x)-g(x)\} = 0$. Таким образом, смеем утверждать равносильность уравнений

$$\{f(x)\} = \{g(x)\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{f(x) - g(x)\} = 0. \tag{14.2}$$

См. также п. 2.14. и вывод формулы (2.28).

Данный прием позволяет свести уравнение (14.1) к простейшему уравнению с мантиссой.

304. (Украина/1995) Про некоторое число x известно, что

$$\{32x\} = \{200x\} \text{ и } \{2x\} = \{100x\}. \tag{304a}$$

Докажите, что $\{x\} = \{155x\}$.

Доказательство. Воспользуемся равносильным переходом (14.2)

$$\begin{cases} \{32x\} = \{200x\}, \\ \{2x\} \;\;= \{100x\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \{168x\} = 0, \\ \{98x\} \;\;= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{168}, \\ x = \dfrac{n}{98} \end{cases} \quad (k,\, n \in \mathbb{Z}).$$

Определим k (или n): $\dfrac{k}{168} = \dfrac{n}{98}$, $\dfrac{k}{12} = \dfrac{n}{7}$, то есть k кратно 12 (или n кратно 7). Пусть $k = 12m$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда $x = \dfrac{m}{14}$ является решением обоих уравнений (304a).

Покажем, что $\{x\} = \{155x\}$ для $x = \dfrac{m}{14}$ при $m \in \mathbb{Z}$:

$$\{155x\} = \left\{155 \cdot \frac{m}{14}\right\} = \left\{11m + \frac{m}{14}\right\} = \left\{\frac{m}{14}\right\} = \{x\}.$$

■

305. Пусть p и q — взаимно простые числа, целое число k принимает значения от 0 до $pq-1$ включительно. Докажите, что все упорядоченные пары $\left(\left\{\dfrac{k}{p}\right\}, \left\{\dfrac{k}{q}\right\}\right)$ различны.

Доказательство. Воспользуемся методом от противного.

Предположим, что существуют два целых числа n и m такие, что $0 \leqslant n < m \leqslant pq - 1$ и

$$\left\{\frac{n}{p}\right\} = \left\{\frac{m}{p}\right\}, \qquad \left\{\frac{n}{q}\right\} = \left\{\frac{m}{q}\right\}.$$

Согласно (14.2) имеем

$$\left\{\frac{m-n}{p}\right\} = 0, \qquad \left\{\frac{m-n}{q}\right\} = 0,$$

то есть $m-n$ делится нацело и на p, и на q. Тогда $m-n$ является общим кратным для p и q. Следовательно, $m - n \geqslant \text{НОК}\,(p;\, q) = pq$. Условие $m \geqslant pq$ противоречит предположению.

■

306. Пусть p и q — взаимно простые числа, целое число k принимает значения от 0 до $pq-1$ включительно, p_k и q_k — остатки от деления k на p и q соответственно. Докажите, что точки с координатами $(p_k,\, q_k)$ образуют целочисленную решетку $p \times q$ без пропусков и наложений.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{p_k}{p} = \left\{\frac{k}{p}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{q_k}{q} = \left\{\frac{k}{q}\right\},$$

то можно говорить об идентичности формулировок данной задачи и задачи *305*.

■

14.2. Уравнения вида $\{f(x)\} = f\bigl(\{x\}\bigr)$

Уравнение вида

$$\{f(x)\} = f\bigl(\{x\}\bigr) \tag{14.3}$$

примечательно тем, что для него можно определить условия существования решений.

Поскольку левая часть уравнения (14.3) — мантисса, правая часть должна удовлетворять условию $0 \leqslant f\bigl(\{x\}\bigr) < 1$. То есть условие

$$\begin{cases} 0 \leqslant f(x) < 1, \\ 0 \leqslant x < 1 \end{cases} \tag{14.3$'$}$$

является достаточным для существования решений уравнения (14.3).

Нетрудно видеть, что если условие (14.3′) выполняется, то уравнение (14.3) имеет решение, в которое входят значения x, удовлетворяющие данному условию.

Таким образом, **необходимым и достаточным условием существования решений уравнения $\{f(x)\} = f\bigl(\{x\}\bigr)$ является выполнение условий (14.3′).**

В графической интерпретации данное утверждение гласит: график функции $f(x)$ должен проходить через единичный квадрат, левый нижний угол которого — начало координат, а правый верхний — точка $(1,\ 1)$. См. также п. 18. «Графический метод решения уравнений $\{f(x)\} = f\bigl(\{x\}\bigr)$».

Если задание заключается в решении уравнения (14.3), то возможно использование универсального равносильного перехода (10.2), см. п. 10.1. Такой подход позволяет избавиться от одной из мантисс, например,

$$\{f(x)\} = f\bigl(\{x\}\bigr) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \{f(x)\} = f\bigl(x - n\bigr), \\ n \leqslant x < n + 1. \end{cases}$$

307. Решите уравнение $\{2014^x\} = 2014^{\{x\}}$.

См. другой вариант решения — задача 29.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (14.3), где $f(x) = 2014^x$. Так как не выполняется условие (14.3′), решений нет.

Ответ: $\varnothing$.

308. При каких значениях параметра a уравнение $\{x^2 + a\} = \{x\}^2 + a$ не имеет решений?

См. другой вариант решения — задача 350.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (14.3), где $f(x) = x^2 + a$. Поскольку условие существования решений уравнений данного вида является необходимым и достаточным, найдем сначала, при каких значениях параметра a исходное уравнение имеет решения, и затем исключим из числовой прямой найденное множество значений. Выпишем условие (14.3′)

$$\begin{cases} 0 \leqslant x^2 + a < 1, \\ 0 \leqslant x < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -a \leqslant x^2 < 1 - a, \\ 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Пусть $a \geqslant 0$. Тогда из первого неравенства следует, что $1 - a > 0$ и, следовательно, система имеет решения при $0 \leqslant a < 1$.

При $a < 0$ должно выполняться условие $\sqrt{-a} < 1$, то есть решения имеются при $-1 < a < 0$.

Ответ: $(-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$.

14.3. Задачи по теме раздела

309. Докажите, что если для некоторого действительного числа x выполнено равенство $\{8x\} = \{15x\}$, то $\{26x\} = \{75x\}$.

310. Пусть p и q — взаимно простые числа. Целое число k принимает значения от 0 до $pq - 1$ включительно, p_k (q_k) — остаток от деления k на p (q). Докажите, что точки с координатами $(p_k,\ q_k)$ образуют целочисленную решетку $p \times q$ без пропусков и наложений.

311. Решите уравнение $\alpha\{x\} = \{\alpha x\}$, где α — иррациональное число.

312. Решите уравнение $x^3 = \left\{(x+1)^3\right\}$.

313. Пусть α является решением уравнения $\dfrac{1}{x} = \{x\}$. Докажите, что α — иррациональное число.

314. Найдите все действительные значения параметра a, при которых функция $f(x) = \{ax + \sin x\}$ будет периодической.

14.4. Указания, решения, ответы

309. (Украина/1995) Докажите, что если для некоторого действительного числа x выполнено равенство $\{8x\} = \{15x\}$, то $\{26x\} = \{75x\}$.

См. аналогичное решение — задача 304.

310. Пусть p и q — взаимно простые числа. Целое число k принимает значения от 0 до $pq-1$ включительно, p_k (q_k) — остаток от деления k на p (q). Докажите, что точки с координатами $(p_k,\ q_k)$ образуют целочисленную решетку $p \times q$ без пропусков и наложений.

Доказательство. Поскольку $\dfrac{p_k}{p} = \left\{\dfrac{k}{p}\right\}$ и $\dfrac{q_k}{q} = \left\{\dfrac{k}{q}\right\}$, то доказательство сводится к задаче 305. ■

311. Решите уравнение $\alpha\{x\} = \{\alpha x\}$, где α — иррациональное число.

См. другой вариант решения — задача 356.

Решение. При $n \leqslant x < n+1$ $(n \in \mathbb{Z})$ исходное уравнение равносильно $\alpha(x-n) = \{\alpha x\}$, или

$$[\alpha x] = \alpha n.$$

Так как αn будет целым лишь при $n = 0$, остается решить систему относительно иррационального параметра α

$$\begin{cases} 0 \leqslant \alpha x < 1, \\ 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{array}{ll} \text{при } \alpha < 0 & x = 0, \\ \text{при } 0 < \alpha < 1 & x \in [0,\ 1), \\ \text{при } \alpha > 1 & x \in \left[0,\ \dfrac{1}{\alpha}\right). \end{array}$$

312. Решите уравнение $x^3 = \left\{(x+1)^3\right\}$.

Решение. Поскольку $0 \leqslant x^3 < 1$, или $0 \leqslant x < 1$, то уравнение приводится к виду

$$\{x^3\} = \left\{(x+1)^3\right\}.$$

Согласно (14.2) $\left\{\left(x+1\right)^3-x^3\right\}=0$, или $\left\{3x\left(x+1\right)\right\}=0$.

Освободившись от мантиссы, получим параметрическое квадратное уравнение, равносильное исходному уравнению при условии $0\leqslant x<1$

$$3x\left(x+1\right)=k, \quad \text{где } k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{-3+\sqrt{9+12k}}{6}$, где $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5$.

313. (Эстония/1998) Пусть α является решением уравнения $\dfrac{1}{x}=\{x\}$. Докажите, что α — иррациональное число.

Доказательство. Очевидно, что $x\notin\mathbb{Z}$ и $x>1$. Тогда исходное уравнение представим в виде $\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=\{x\}$, или согласно (14.2)

$$\left\{\frac{1}{x}-x\right\}=0.$$

Предположим, что $x\in\mathbb{Q}$, то есть $x=\dfrac{p}{q}$, где q, p — взаимно простые числа и $0<q<p$. Выполнив замену, получим

$$\left\{\frac{q}{p}-\frac{p}{q}\right\}=0, \quad \text{или} \quad \left\{\frac{(q-p)(q+p)}{pq}\right\}=0.$$

Но дробь, стоящая под знаком мантиссы, не сократима, то есть не является целым числом, поскольку числа $(q-p)$, $(q+p)$, q, p — попарно взаимно простые.

Предположение $x\in\mathbb{Q}$ неверно, следовательно, все решения исходного уравнения — иррациональные числа.

■

314. (Беларусь/1999-2000) Найдите все действительные значения параметра a, при которых функция $f(x)=\{ax+\sin x\}$ будет периодической.

Решение. Функция $f(x)$ будет периодической с периодом $T\neq 0$, если выполняется равенство

$$\{ax+\sin x\}=\left\{a\left(x+T\right)+\sin\left(x+T\right)\right\} \text{ при } \forall x\in\mathbb{R},$$

или согласно (14.2)

$$aT+\sin\left(x+T\right)-\sin x=k, \text{ где } k\in\mathbb{Z},$$

$$\sin\left(x+T\right)-\sin x=k-aT. \tag{314a}$$

Последнее равенство порождает бесконечное количество равенств:

$$\sin\bigl(x + 2T\bigr) - \sin\bigl(x + T\bigr) = k - aT,$$
$$\sin\bigl(x + 3T\bigr) - \sin\bigl(x + 2T\bigr) = k - aT \quad \text{и т. д.}$$

Суммирование n равенств приведет к равенству, которое должно выполняться при любом натуральном n:

$$\sin\bigl(x + nT\bigr) - \sin x = n\bigl(k - aT\bigr).$$

Поскольку левая часть ограничена, то $k - aT = 0$, $a = \dfrac{k}{T}$. Тогда разность синусов в $(314a)$ также должна быть нулевой для любого $x \in \mathbb{R}$, значит, применив формулу разности синусов, получим $\sin\dfrac{T}{2} = 0$. Таким образом, периодом функции $f(x)$ являются значения $T = 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, и, следовательно, $a = \dfrac{k}{2m\pi}$, или $a = \dfrac{q}{2\pi}$, где q — рациональное число.

Ответ: $a = \dfrac{q}{2\pi}$, где $q \in \mathbb{Q}$.

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

15. Метод интервалов (областей)

Методом интервалов называют такой метод решения заданий вида $f(x) \vee 0$, при котором ОДЗ неизвестного разбивается на непересекающиеся интервалы при условии знакопостоянства $f(x)$ на этих интервалах.

Например, при решении дробно-рациональных неравенств $f(x)$ — это алгебраическая дробь с одним неизвестным. На границах интервалов числитель и знаменатель этой дроби «переходят» через 0.

При решении методом интервалов обычно используется графическая интерпретация на числовой прямой неизвестного.

Метод областей — обобщение метода интервалов на случай решения заданий с двумя неизвестными — $g(x, y) \vee 0$, включая задачи с одним неизвестным и параметром.

Применение метода областей сопровождается, как правило, изображением на координатной плоскости (для этих двух неизвестных) таких геометрических фигур — областей, внутри которых принимаемые значения неизвестных обеспечивают знакопостоянство $g(x, y)$.

Отметим, что метод интервалов (областей) может использоваться не только при исследовании левой части соотношения на сравнение с 0, в решении существенным может быть постоянство значений, принимаемых функциями $f(x)$ или $g(x, y)$ внутри интервалов (областей).

15.1. Применение метода интервалов

Метод базируется на кусочно-постоянном виде функции антье, поскольку на определенных интервалах функция антье не меняет своих значений, а на концах этих интервалов значение антье изменяется скачкообразно. Тогда для решения уравнения (неравенства) вида $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ включает несколько антье, остается вычислить значения $f(x)$ на каждом из таких интервалов.

Применимость метода интервалов определяется возможностью разбиения ОДЗ уравнения (неравенства) на разумное количество подходящих интервалов и сложностью вычислений значений входящих в

$f(x)$ антье. Довольно часто используется периодичность функции $f(x)$ для ограничения числа рассматриваемых интервалов.

Рассмотрим на простых заданиях применение метода интервалов.

315. Решите уравнение $[4x]+[3x]=[5x]+2[x]+2$.

Решение. Обозначим $f(x)=[4x]+[3x]-[5x]-2[x]$. Поскольку $f(x)=f(x+1)$, функция $f(x)$ — периодическая с периодом 1. Значит, достаточно решить уравнение для $0 \leqslant x < 1$ и затем придать ответу периодичности, прибавив к ответу целочисленный параметр n. Исследуем выражение

$$g(x)=[4x]+[3x]-[5x] \quad \text{при } 0 \leqslant x < 1$$

(слагаемое $2[x]$ равно 0 на указанном промежутке).

На числовой прямой Ox на полуинтервале $[0,\ 1)$ отметим точки, в которых меняется значение $g(x)$ (см. рис. 11). Это происходит в точках:

$x=1/4,\ 1/2,\ 3/4$ «по вине» $[4x]$,

$x=1/3,\ 2/3$ — $[3x]$ и

$x=1/5,\ 2/5,\ 3/5$ и $4/5$ — $[5x]$ соответственно.

Для удобства обозначим оранжевым цветом точки увеличения на 1 значений $g(x)$, голубым — точки уменьшения на 1 значений $g(x)$. Тогда легко вычислить значения $g(x)$ на полуинтервале $[0,\ 1)$, двигаясь вдоль числовой прямой Ox слева направо, стартовав с полуинтервала $x \in [0,\ 1/5)$, на котором $g(x)=0$. Полуинтервалы постоянных значений $g(x)$ изображены на рис. 11 своеобразной лесенкой.[14]

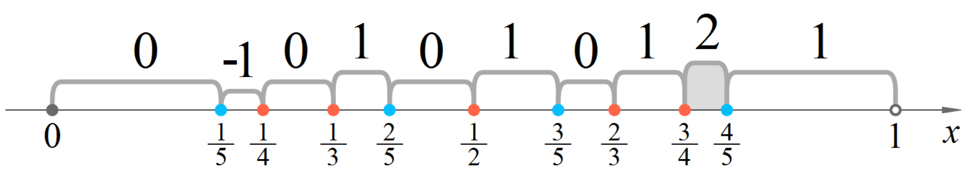


Рис. 11. Значения $g(x)=[4x]+[3x]-[5x]$ при $x \in [0,\ 1)$

Для решения задачи существенно, что $g(x)=2$ при $3/4 \leqslant x < 4/5$.

Ответ: $\dfrac{3}{4}+n \leqslant x < \dfrac{4}{5}+n$, где $n \in \mathbb{N}$.

[14] Понятно, что на рис. 11 фактически получился стилизованный график функции $g(x)=[4x]+[3x]-[5x]$ при $0 \leqslant x < 1$. Но в этом графике нет надобности, да и представление с помощью интервалов удобнее и нагляднее.

316. Докажите неравенство $[6x] + [x] \geqslant [3x] + 2[2x]$.

См. другой вариант доказательства — задача *103*.

Решение. Поступим аналогично задаче *315*, сведем уравнение к исследованию соответствующего выражения

$$g(x) = [6x] - [3x] - 2[2x] \quad \text{при } 0 \leqslant x < 1.$$

На рис. 12 изображен полуинтервал $[0, 1)$ числовой прямой Ox, на котором отмечены точки изменения значений $g(x)$ и обозначены полуинтервалы постоянных значений $g(x)$. Обратим внимание на то, что точки $x = 1/3$ и $2/3$ игнорируются при определении интервалов, поскольку $[6x]$ увеличивает на 1, а $[3x]$ уменьшает на 1 значение $g(x)$. В точке $x = 1/2$ слагаемое $-2[2x]$ уменьшает значение $g(x)$ сразу на 2, чтобы не упустить данную особенность, на рис. 12 отмечены две голубые точки.

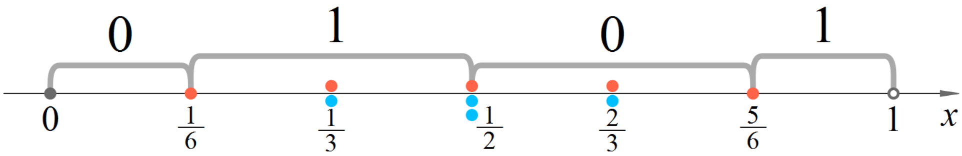


Рис. 12. Значения $g(x) = [6x] - [3x] - 2[2x]$ при $x \in [0, 1)$

На всех четырех полуинтервалах, на которые разбивается полуинтервал $[0, 1)$, $g(x)$ принимает неотрицательные значения. Следовательно, исходное неравенство доказано.

■

317. Докажите тождество Эрмита

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать тождество при $0 \leqslant x < 1$. Функция

$$g(x) = [nx] - [x] - \left[x + \frac{1}{n}\right] - \ldots - \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

тождественно равна 0 при $x \in [0, 1)$, поскольку в точках $x_k = 1/k$, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$, антье $[nx]$ увеличивает значение $g(x)$ на 1, а отрицательные антье $\left[x+1/k\right]$ по очереди уменьшают значение $g(x)$ на 1.

Значение функции $g(x)=0$ при $0\leqslant x<1/k$, тогда и на всем полуинтервале $\left[0,\ 1\right)$ функция $g(x)$ сохраняет нулевое значение. ■

15.2. Применение метода областей

Метод областей является фактически тем же методом интервалов, но для уравнений (неравенств) с двумя неизвестными вида $f(x,\,y)\vee 0$.

Порядок применения метода областей выглядит следующим образом. На координатной плоскости проводятся прямые или кривые (границы областей), на которых происходит скачок значений антье, входящих в $f(x,\,y)$. В точках, расположенных внутри каждой из областей, $f(x,\,y)$ принимает одни и те же значения. Но вычислять все эти значения нет необходимости, поскольку проще определить значения только в одной области и затем, последовательно преодолевая все границы, менять значение $f(x,\,y)$ в соответствии со скачком значения того антье, согласно которому проведена пересекаемая граница. Обычно, как в следующей задаче *318*, происходит увеличение или уменьшение на 1.

318. Решите уравнение

$$\left[3x\right]+\left[3y\right]=\left[2x\right]+\left[2y\right]+\left[x+y\right]-1.$$

Решение. Функция $f(x)=\left[3x\right]+\left[3y\right]-\left[2x\right]-\left[2y\right]-\left[x+y\right]$ периодическая с периодом 1 как по x, так и по y, значит, достаточно решить уравнение при $0\leqslant x,\,y<1$ и затем добавить к решению периодичности по x и по y.

На рис. 13 представлены области постоянных значений функции $f(x)$ в единичном квадрате $0\leqslant x,\,y<1$ на координатной плоскости xOy.

Границы областей, изображенные оранжевым цветом, $3x=1$, $3x=2$, $3y=1$ и $3y=2$ соответствуют положительным антье $\left[3x\right]$ и $\left[3y\right]$. При переходе этих границ, двигаясь в сторону увеличения x или y, значение функции $f(x)$ увеличивается на 1.

Голубым цветом обозначены границы $2x=1$, $2y=1$ и $x+y=1$, соответствующие отрицательным антье $\left[2x\right]$, $\left[2y\right]$ и $\left[x+y\right]$. При переходе этих границ, двигаясь также в сторону увеличения x или y, значение функции $f(x)$ уменьшается на 1.

$f(x)=0$ в области, примыкающей к началу координат. Последовательная расстановка значений $f(x)$ в других областях выполняется

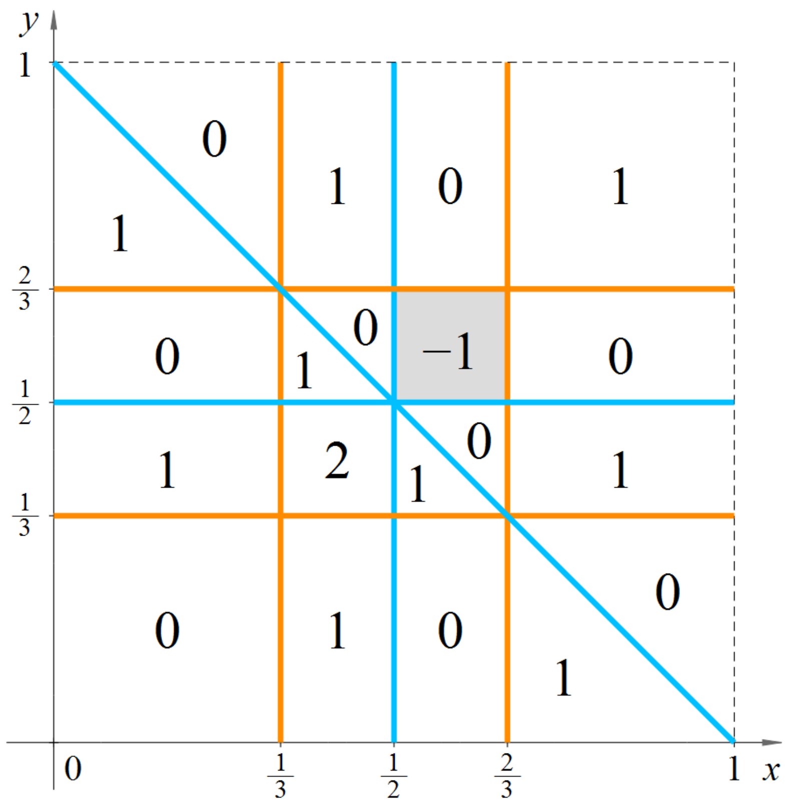


Рис. 13. Области значений $f(x) = [3x] + [3y] - [2x] - [2y] - [x+y]$

элементарно. Лишь в одной области $f(x) = -1$. Эта область является решением уравнения при условии $0 \leqslant x,\ y < 1$.

Ответ: $\dfrac{1}{2} + m \leqslant x < \dfrac{2}{3} + m,\ \dfrac{1}{2} + n \leqslant y < \dfrac{2}{3} + n$, где $m,\ n \in \mathbb{N}$.

319. Докажите неравенство

$$[3x + 2y] + [x + 2y] \geqslant [2x + y] + 2[x + y] + 2[y].$$

Доказательство. Поскольку функция

$$f(x) = [3x + 2y] + [x + 2y] - [2x + y] - 2[x + y] - 2[y]$$

периодическая с периодом 1 как по x, так и по y, достаточно доказать неравенство при $0 \leqslant x,\ y < 1$.

На рис. 14 представлены области постоянных значений функции $f(x)$ в единичном квадрате $0 \leqslant x,\ y < 1$ на координатной плоскости xOy.

Границы областей, изображенные оранжевым цветом, соответствуют положительным антье $[3x+2y]$ и $[x+2y]$: $3x+2y = 1$, $3x+2y = 2$, $3x + 2y = 3$, $3x + 2y = 4$ и $x + 2y = 1$, $x + 2y = 2$. При переходе этих

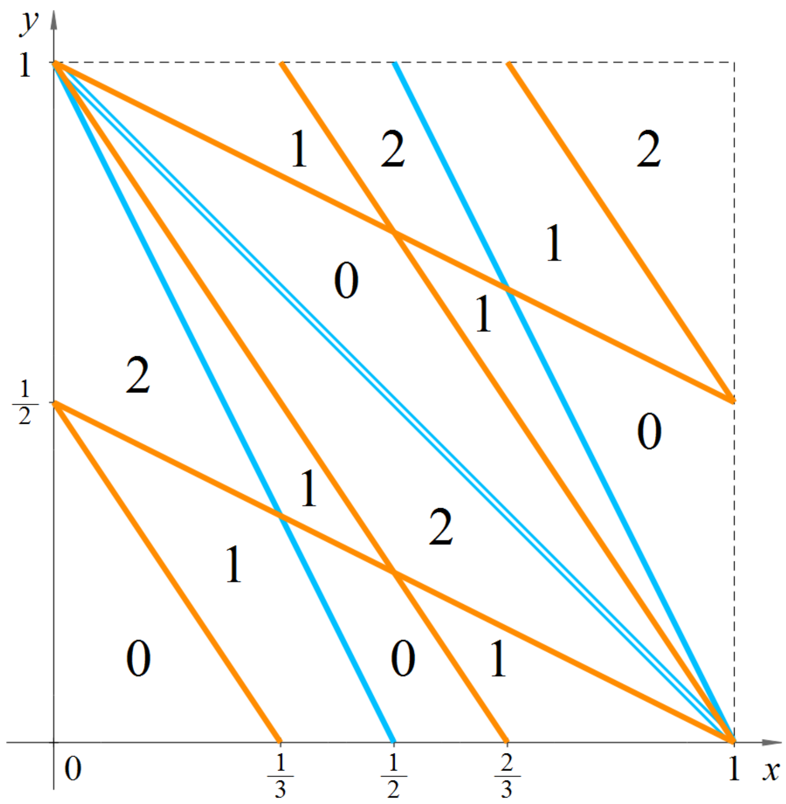


Рис. 14. Области значений
$f(x) = \left[3x+2y\right] + \left[x+2y\right] - \left[2x+y\right] - 2\left[x+y\right] - 2\left[y\right]$

границ, двигаясь в сторону увеличения x или y, значение функции $f(x)$ увеличивается на 1.

Голубым цветом обозначены границы $2x + y = 1$, $2x + y = 2$ и $x+y = 1$ (двойное начертание), соответствующие отрицательным антье $\left[2x + y\right]$ и $2\left[x + y\right]$. Отметим, что при переходе границы $x + y = 1$, двигаясь в сторону увеличения x или y, значение функции $f(x)$ уменьшается сразу на 2 из-за коэффициента 2, стоящего перед антье.

Последнее слагаемое $-2\left[y\right]$ равно 0 в единичном квадрате, поэтому отсутствует на рис. 14.

$f(x) = 0$ в области, примыкающей к началу координат. Последовательная расстановка значений $f(x)$ в других областях выполняется согласно указанным выше условиям. Поскольку во всех областях единичного квадрата $f(x)$ принимает неотрицательные значения, исходное неравенство выполняется при $0 \leqslant x, y < 1$, значит, неравенство верно и при $x, y \in \mathbb{R}$. ■

320. Докажите неравенство $\left[x + y\right] > \left[2x - y\right] + \left[y - x\right] + \left[y\right]$.

Доказательство. Поскольку функция
$$f(x) = \left[x + y\right] - \left[2x - y\right] - \left[y - x\right] - \left[y\right]$$
периодическая с периодом 1 как по x, так и по y, достаточно доказать неравенство при $0 \leqslant x,\ y < 1$.

На рис. 15 представлены области постоянных значений функции $f(x)$ в единичном квадрате $0 \leqslant x,\ y < 1$ на координатной плоскости xOy.

Границы областей, изображенные оранжевым цветом, соответствуют антье $\left[x + y\right]$ (см. объяснения в предыдущих задачах).

Зеленым цветом обозначены границы $2x - y = 0$ и $2x - y = 1$, соответствующие антье $\left[2x - y\right]$. При переходе этих границ, двигаясь в сторону увеличения x, значение функции $f(x)$ увеличивается на 1, а двигаясь в сторону увеличения y, значение функции $f(x)$ уменьшается на 1.

Серым цветом обозначена граница $y - x = 0$ (антье $\left[y - x\right]$). При переходе этой границы значения функции $f(x)$ уменьшаются и увеличиваются на 1 при увеличении x и y соответственно.

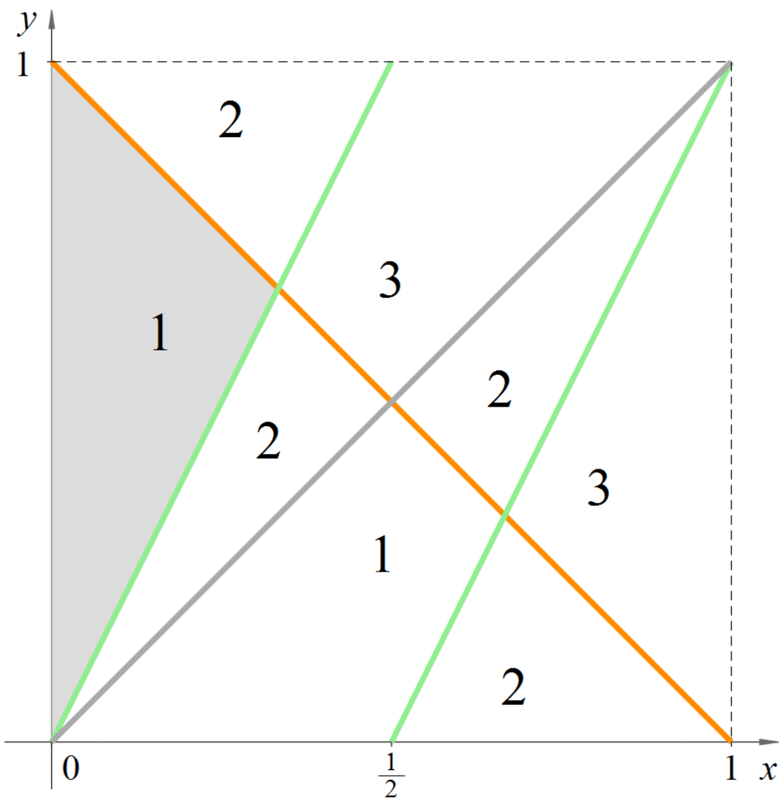


Рис. 15. Области значений $f(x) = \left[x+y\right]-\left[2x-y\right]-\left[y-x\right]-\left[y\right]$

$f(x) = 1$ в треугольнике, одна из сторон которого лежит на оси

Oy. Эта область затонирована на рис. 15. Последовательная расстановка значений $f(x)$ в других областях выполняется согласно указанным выше условиям. Поскольку во всех областях единичного квадрата $f(x)$ принимает положительные значения, исходное неравенство выполняется при $0 \leqslant x,\ y < 1$, значит, неравенство верно и при $x,\ y \in \mathbb{R}$. ■

15.3. Задачи по теме раздела

321. Решите уравнение $[4x] + [x] = [3x] + [2x] + 1$.

322. Решите неравенство $[7x] + [x] < 2[3x] + [2x]$.

323. Докажите неравенство $[10x] + [x] \geqslant [5x] + 3[2x]$.

324. Докажите неравенство

$$[3x + 2y] + [x + 3y] \geqslant [2x + y] + [3y] + [2x] + [y].$$

325. Определите множество значений, которые принимает функция

$$f(x) = [2x - 3y] + [3y - x] - \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

15.4. Указания, решения, ответы

Объяснения решений методом интервалов (областей) во многом схожи. Поэтому приведем лишь соответствующие чертежи с обозначениями, которые использовались ранее в этом разделе.

321. Решите уравнение $[4x] + [x] = [3x] + [2x] + 1$.

Решение.

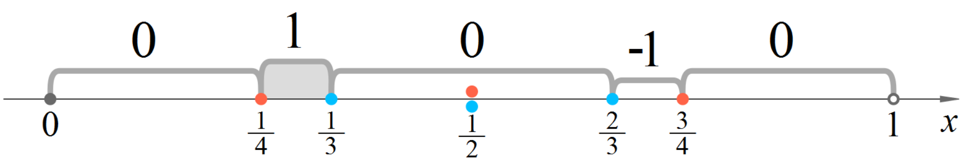


Рис. 16. Значения $g(x) = [4x] - [3x] - [2x]$ при $x \in [0,\ 1)$

Ответ: $\dfrac{1}{4} + n \leqslant x < \dfrac{1}{3} + n$, где $n \in \mathbb{N}$.

322. Решите неравенство $[7x] + [x] < 2[3x] + [2x]$.

Решение.

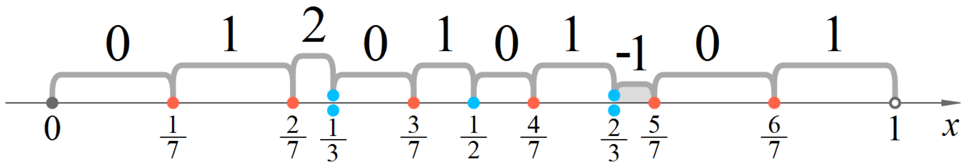


Рис. 17. Значения $g(x) = [7x] - 2[3x] - [2x]$ при $x \in [0,\, 1)$

Ответ: $\dfrac{2}{3} + n \leqslant x < \dfrac{5}{7} + n$, где $n \in \mathbb{N}$.

323. Докажите неравенство $[10x] + [x] \geqslant [5x] + 3[2x]$.

Доказательство.

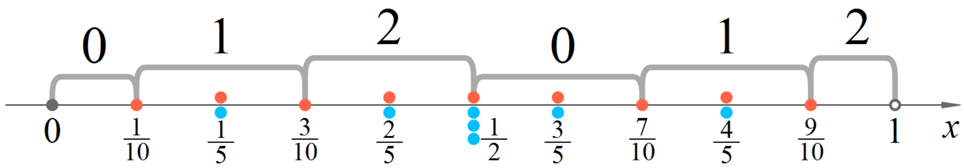


Рис. 18. Значения $g(x) = [10x] - [5x] - 3[2x]$ при $x \in [0,\, 1)$ ■

324. Докажите неравенство

$$[3x + 2y] + [x + 3y] \geqslant [x + 2y] + [3y] + [2x] + [x].$$

Доказательство. Рис. 19 демонстрирует выполнение неравенства при $0 \leqslant x,\, y < 1$. В некоторых областях не указаны значения функции $f(x)$ из-за малых размеров этих областей. Вычислите отсутствующие значения и убедитесь, что они неотрицательные. ■

325. Определите множество значений, которые принимает функция $f(x) = [2x - 3y] + [3y - x] - \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$.

Решение. Поскольку функция $f(x)$ периодическая и по x, и по y с одним и тем же периодом 1, достаточно определить значения $f(x)$ в единичном квадрате $0 \leqslant x,\, y < 1$. На рис. 20 изображены области постоянных значений функции $f(x)$ с указанием самих значений.

Ответ: $\{-2,\, -1,\, 0\}$

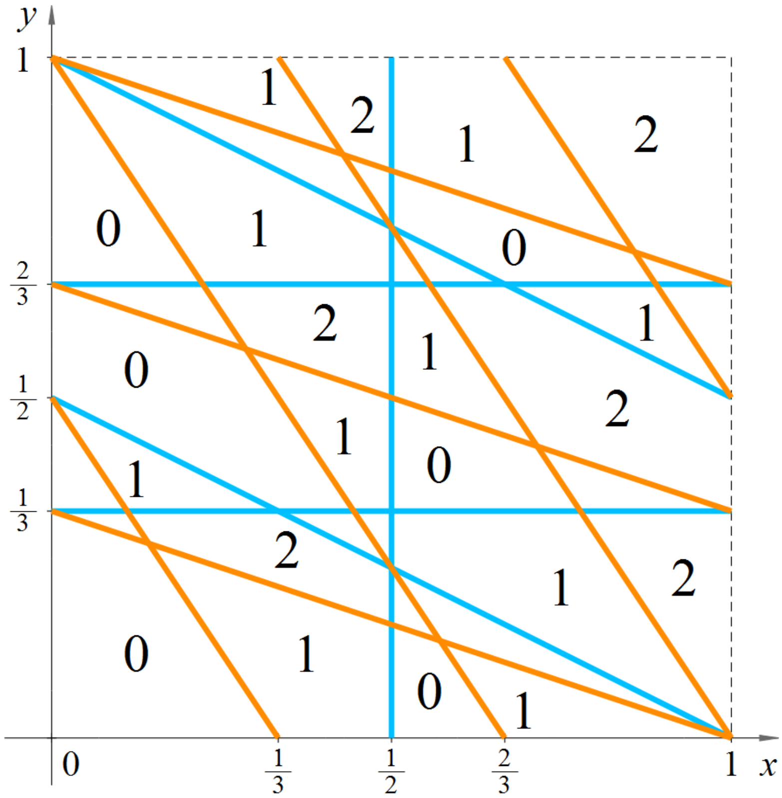


Рис. 19. Области значений
$f(x) = [3x + 2y] + [x + 3y] - [x + 2y] - [3y] - [2x] - [x]$

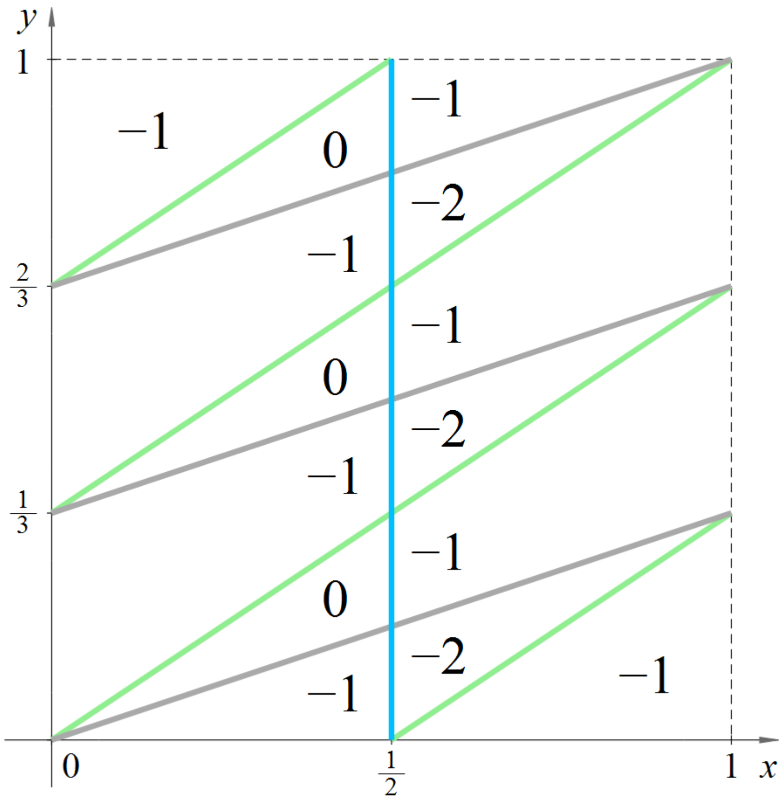


Рис. 20. Области значений $f(x) = [2x - 3y] + [3y - x] - \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

16. Графики сложных функций

Приступим к построению графиков сложных функций с участием антье и мантиссы. Под «сложной» функцией подразумевается суперпозиция двух или более функций, например, $\left[x^2\right]$, $\{\sin 2x\}$, $x + \dfrac{\{x\}}{2}$.

Используя в качестве основы график функции $y = f(x)$, разберем соответствующие последовательности шагов, которые приведут к построению графиков функций

$$y = \left[f(x)\right],\ y = f([x]),\ y = \left\{f(x)\right\},\ y = f(\{x\}).$$

Для каждой из этих сложных функций приведем основные свойства, неопределяемые характеристики указываться не будут.

Умение строить из графика $y = f(x)$ графики сложных функций с участием антье и мантиссы — не только занятная и визуально привлекательная тема, такое умение пригодится для эффективного использования графического метода решения задач.

Более широко известны другие геометрические преобразования графика $y = f(x)$ относительно осей координат: симметричное отражение, сжатие, растяжение, см. п. Г.2.

Обычно указанные трансформации графика функции $y = f(x)$ выполняются последовательно для нескольких преобразований.

Наряду с этими геометрическими преобразованиями типовым считается прием построения графика функции, являющейся суммой двух функций, графики которых известны или их несложно построить (см. задачу *329*).

16.1. Построение графика $y = \big[f(x)\big]$

Перечислим свойства функции $y = [f(x)]$:

1) $D\big([f]\big) = D\big(f\big)$;

2) $E\big([f]\big) \subset E\big(f\big)$, $E\big([f]\big) \subset \mathbb{Z}$;

3) если $y = f(x)$ неубывающая (невозрастающая) функция, то $y = \big[f(x)\big]$ также будет неубывающей (невозрастающей) функцией, для обоснования обратитесь к свойству (2.8);

4) если $y = f(x)$ четная функция, то $y = \big[f(x)\big]$ также будет четной функцией;

5) если $y = f(x)$ периодическая функция, то $y = [f(x)]$ также будет периодической функцией.

Пусть на координатной плоскости имеется график функции $y = f(x)$ (см. рис. 21).

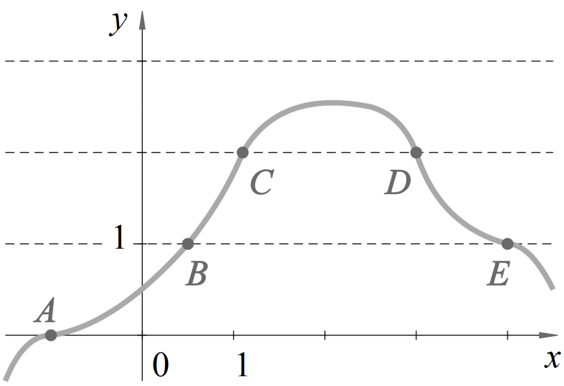


Рис. 21. График функции $y = f(x)$

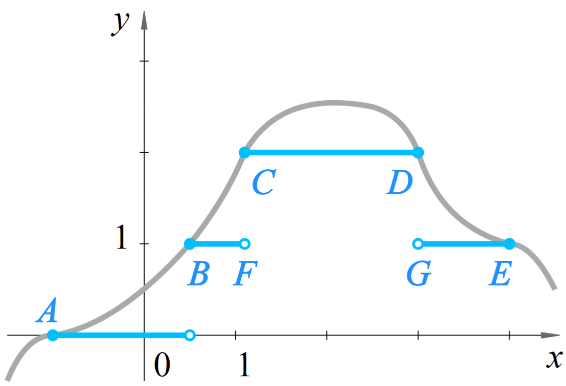


Рис. 22. График функции $y = \big[f(x)\big]$

Рассечем координатную плоскость вспомогательными прямыми $y = n$ и отметим точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$ (точки A, B, C, D и E на рис. 21).

График функции $y = \big[f(x)\big]$ состоит из лежащих на прямых $y = n$ линейных участков, которые являются проекциями фрагментов графика функции $y = f(x)$, заключенными между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$, причем точки пересечения с верхней границей (прямой $y = n + 1$) не проецируются.

Например, рассмотрим график $y = f(x)$, расположенный между прямыми $y = 1$ и $y = 2$. В эту полосу попадают два фрагмента графика $y = f(x)$: кривые BC и DE. Их проекции — отрезки BF и GE (см. рис. 22) — являются соответствующими фрагментами графика функции $y = \big[f(x)\big]$.

326. Постройте графики функций а) $y = \left[\frac{1}{x}\right]$, б) $y = \left[x^2 - 2x\right]$, в) $y = [\sin x]$.

Решение. На рис. 23-25 приведены графики гиперболы, параболы и синуса под знаком антье.

Графики состоят из бесконечного количества отрезков. В графике $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ еще присутствуют два луча, концами которых являются точки $(-1,\ -1)$ и $(1,\ 0)$, причем вторая точка выколотая. Помимо отрезков фрагментами графика $y = [\sin x]$ являются также отдельные точки с координатами $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 1\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

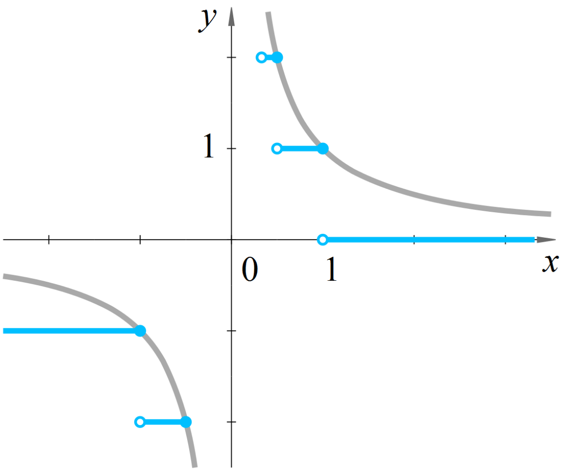


Рис. 23. Графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \left[\frac{1}{x}\right]$

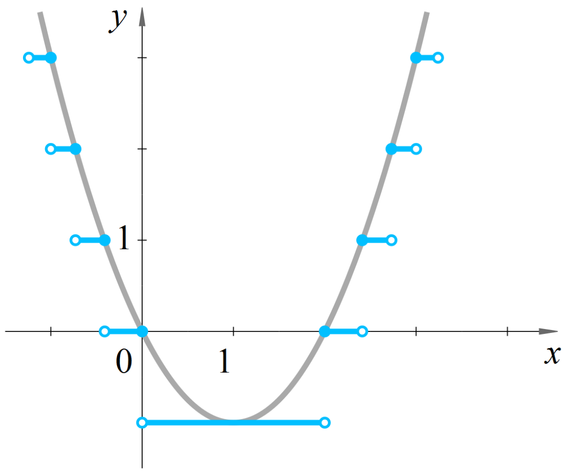


Рис. 24. Графики функций $y = x^2 - 2x$ и $y = \left[x^2 - 2x\right]$

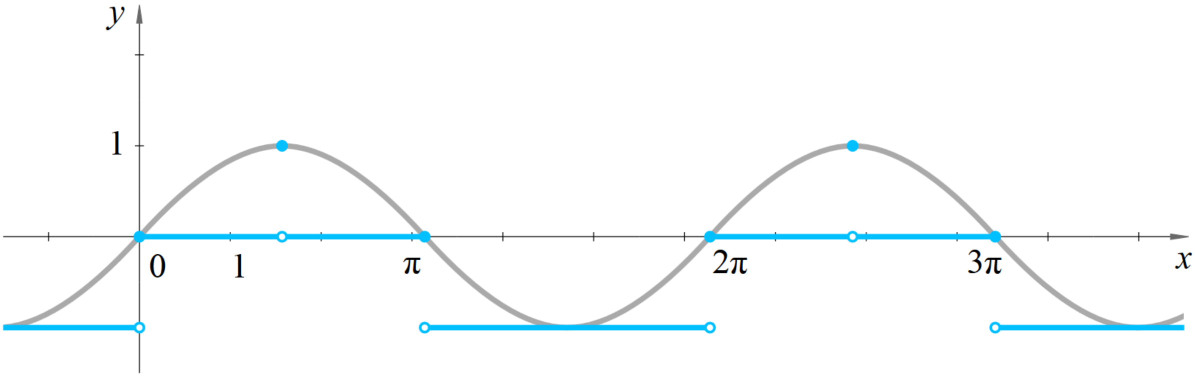


Рис. 25. Графики функций $y = \sin x$ и $y = [\sin x]$

16.2. Построение графика $y = f\big([x]\big)$

Перечислим свойства функции $y = f\big([x]\big)$:

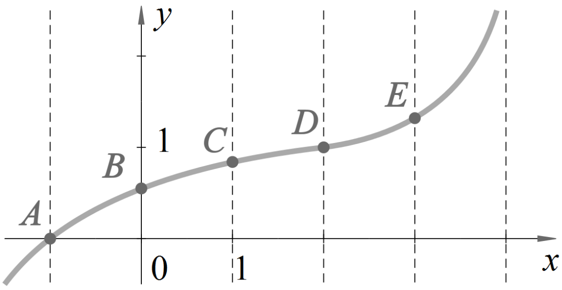
1) в общем случае как $D\big(f(x)\big) \not\subset D\big(f([x])\big)$, так и $D\big(f([x])\big) \not\subset D\big(f(x)\big)$;

2) $E\big(f([x])\big) \subset E\big(f(x)\big)$;

3) если $y = f(x)$ — неубывающая (невозрастающая) функция, то $y = f\big([x]\big)$ также будет неубывающей (невозрастающей) функцией, для обоснования обратитесь к свойству (2.8);

4) если $y = f(x)$ — периодическая функция с целочисленным периодом, то $y = f\big([x]\big)$ также будет периодической функцией.

Пусть на координатной плоскости имеется график функции $y = f(x)$ (см. рис. 26).



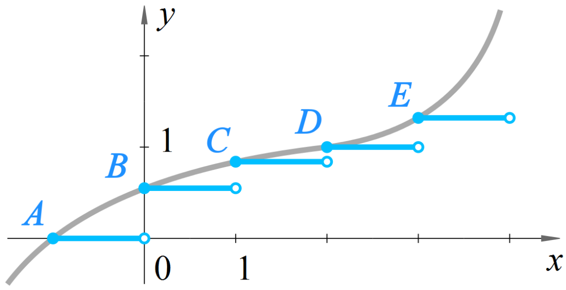


Рис. 26. График функции $y = f(x)$ Рис. 27. График функции $y = f\big([x]\big)$

Рассечем координатную плоскость вспомогательными прямыми $x = n$ и отметим точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$ (точки A, B, C, D и E на рис. 26). Вообще говоря, график функции $y = f(x)$ как таковой не нужен, требуется определить лишь точки с координатами $\big(n,\ f(n)\big)$.

График функции $y = f\big([x]\big)$ состоит из единичных полуотрезков с концами в точках $\big(n,\ f(n)\big)$ и $\big(n+1,\ f(n)\big)$, причем правый конец выкалывается. Единичные полуотрезки могут состыковываться и образовывать полуотрезки большей длины, лучи и даже прямую $y = f(n)$.

Например, график функции $y = f(x)$ пересекает прямую $x = 3$ в точке $E\big(3,\ f(3)\big)$. Тогда отрезок с концами в точках $\big(3,\ f(3)\big)$ и $\big(4,\ f(3)\big)$ (см. рис. 27) будет соответствующим фрагментом графика функции $y = f\big([x]\big)$.

327. Постройте графики функций а) $y = \dfrac{1}{[x]}$, б) $y = [x]^2 - 2[x]$, в) $y = \operatorname{tg}[x]$.

Решение. На рис. 28-30 приведены графики гиперболы, параболы и тангенса, в которых в качестве аргумента стоит его целая часть $[x]$.

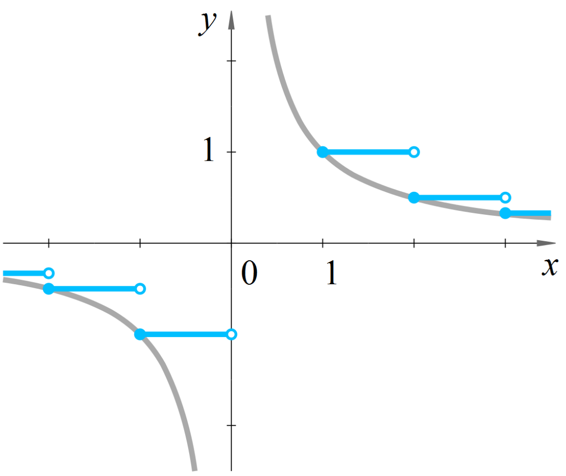


Рис. 28. Графики функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{1}{[x]}$

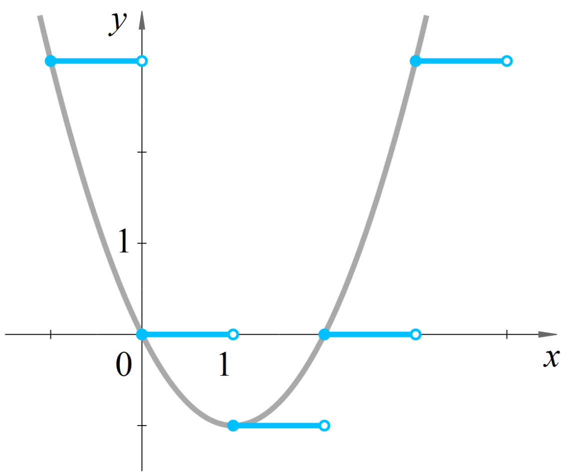


Рис. 29. Графики функций $y = x^2 - 2x$ и $y = [x]^2 - 2[x]$

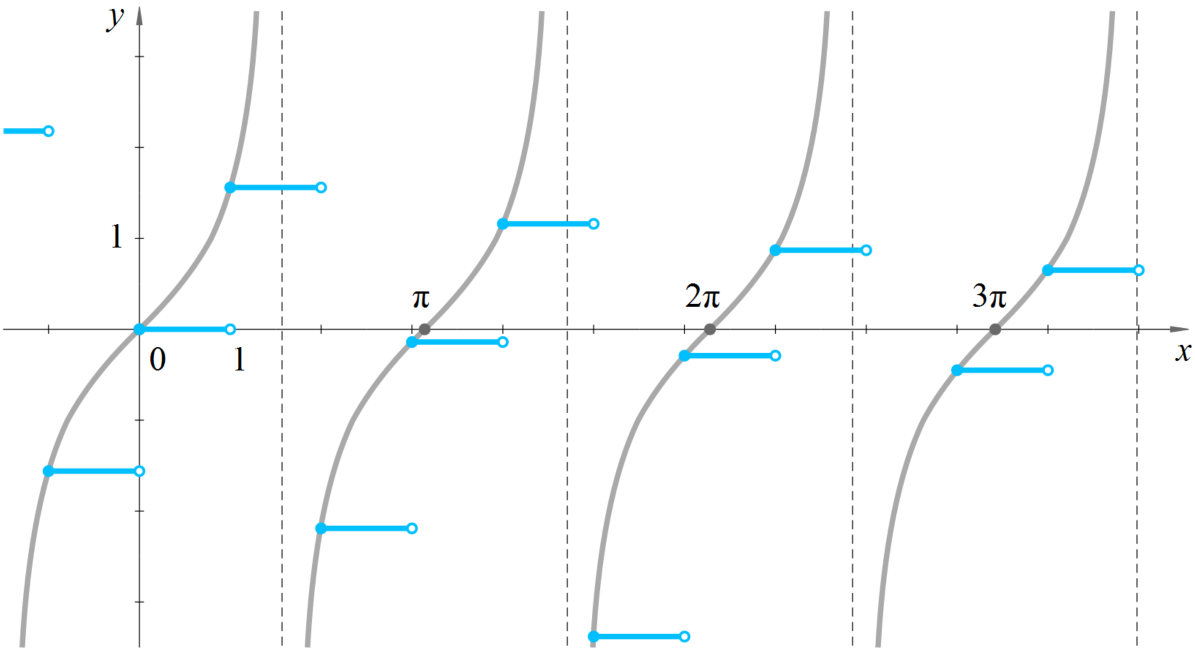


Рис. 30. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}[x]$

16.3. Построение графика $y = \{f(x)\}$

Перечислим свойства функции $y = \{f(x)\}$:

1) $D(\{f\}) = D(f)$;
2) $E(\{f\}) \subset [0,\ 1)$;
3) если $y = f(x)$ — четная функция, то $y = \{f(x)\}$ также будет четной функцией;
4) если $y = f(x)$ — периодическая функция, то $y = \{f(x)\}$ также будет периодической функцией.

Пусть на координатной плоскости имеется график функции $y = f(x)$ (см. рис.31).

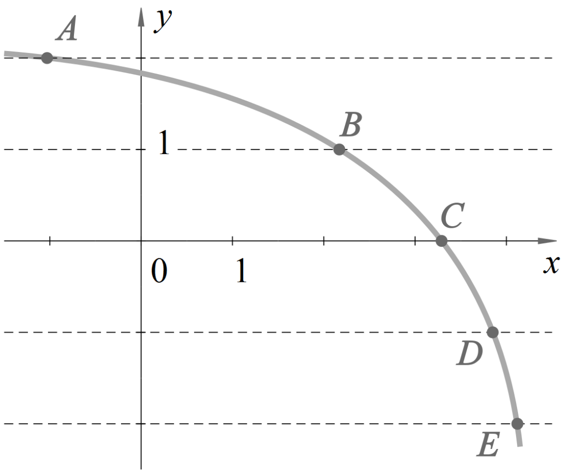


Рис. 31. График функции $y = f(x)$

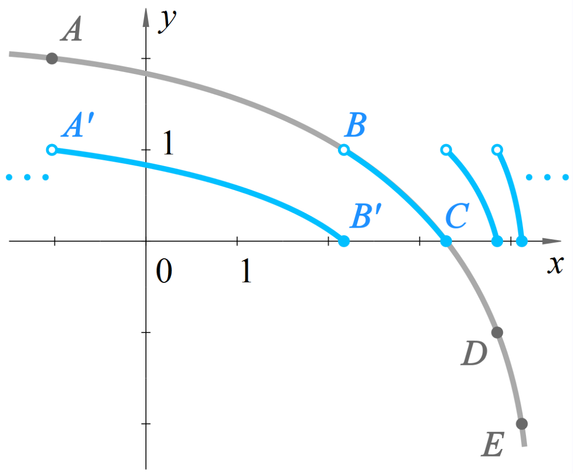


Рис. 32. График функции $y = \{f(x)\}$

Рассечем координатную плоскость горизонтальными полосами с помощью вспомогательных прямых $y = n$ и отметим точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$ (точки A, B, C, D и E на рис.31).

Графиком функции $y = \{f(x)\}$ является набор фрагментов графика функции $y = f(x)$, заключенных между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$, и перенесенных параллельно на вектор $(0,\ -n)$, причем точка пересечения с верхней границей (прямой $y = n + 1$) всегда выкалывается.

Для примера рассмотрим полосу, которую пересекает график $y = f(x)$, например, полосу между прямыми $y = 1$ и $y = 2$. В эту полосу попадает фрагмент графика $y = f(x)$ кривая AB. График функции $y = \{f(x)\}$ (см. рис. 32) содержит кривую $A'B'$, которая получена параллельным переносом кривой AB. Фрагмент графика функции $y = f(x)$ кривая BC остался на месте.

328. Постройте графики функций а) $y = \{\sqrt{x+2}\}$, б) $y = \{-x\}$, в) $y = \{\sin x\}$.

Решение. На рис. 33-35 приведены графики указанных функций и их прототипы без знака мантиссы.

Обратим внимание на график функции $y = \{\sin x\}$, а именно на точки с абсциссами $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Данные точки — проекции точек графика $y = \sin x$, в которых $\sin x = 1$.

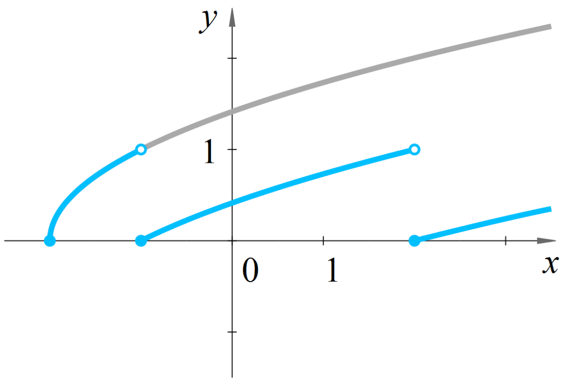


Рис. 33. Графики функций $y = \sqrt{x+2}$ и $y = \{\sqrt{x+2}\}$

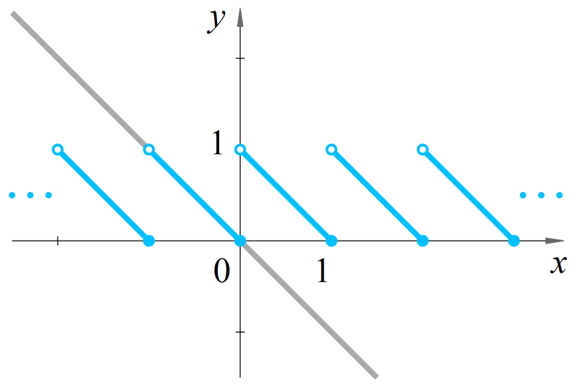


Рис. 34. Графики функций $y = -x$ и $y = \{-x\}$

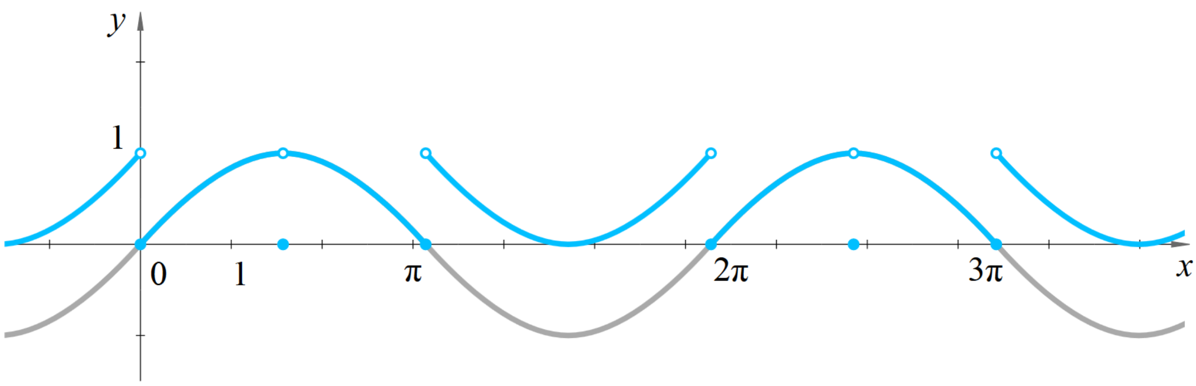


Рис. 35. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \{\sin x\}$

16.4. Построение графика $y = f\big(\{x\}\big)$

Перечислим свойства функции $y = f\big(\{x\}\big)$:

1) в общем случае соотношение между множествами $D\big(f(\{x\})\big)$ и $D\big(f(x)\big)$ может быть любым;

2) $E\big(f(\{x\})\big) \subset E\big(f(x)\big)$;

3) $y = f\big(\{x\}\big)$ — периодическая функция.

Пусть на координатной плоскости имеется график функции $y = f(x)$ (см. рис. 36).

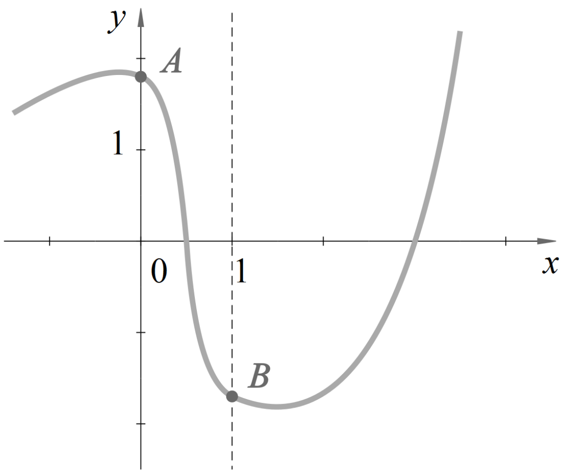


Рис. 36. График функции $y = f(x)$

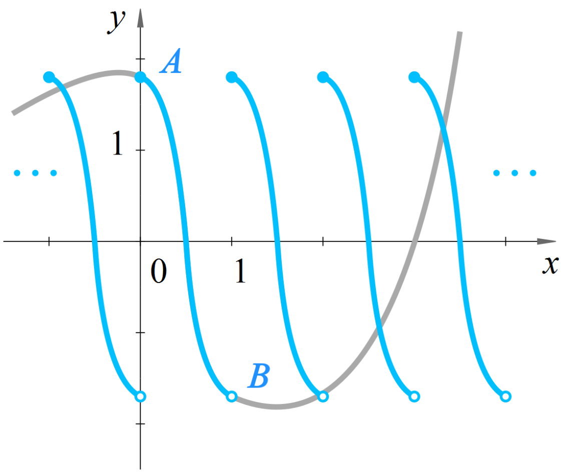


Рис. 37. График функции $y = f\big(\{x\}\big)$

Выделим на координатной плоскости вертикальную полосу, расположенную между прямыми $x = 0$ и $x = 1$, и отметим точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$ (точки A и B на рис.36).

Графиком функции $y = f\big(\{x\}\big)$ является график периодической функции, периодом которой служит фрагмент графика $y = f(x)$ на полуинтервале $\big[0,\ 1\big)$.

В демонстрационном примере изображенный на рис. 37 график функции $y = f\big(\{x\}\big)$ состоит из идентичных кривой AB фрагментов, сама точка B и ее клоны выколоты.

Отметим важную особенность функции $y = f\big(\{x\}\big)$. Какой бы сложной ни была функция $y = f(x)$, существенным является лишь поведение функции $y = f(x)$ на единичном полуинтервале $\big[0,\ 1\big)$.

329. Постройте графики функций:

$$\text{а) } y = \sqrt{\{x\}}, \qquad \text{б) } y = \left(2\{x\} - 1\right)^2.$$

Решение. На рис. 38-39 приведены графики указанных функций и их прототипы без знака мантиссы.

Отметим, что функция $y = \sqrt{x}$ определена только при положительных значениях x. В то время как область определения функции $y = \sqrt{\{x\}}$ — вся числовая прямая (см. рис. 38).

На рис. 39 представлен незамысловатый орнамент, составленный из фрагментов параболы, — график функции $y = \left(2\{x\} - 1\right)^2$.

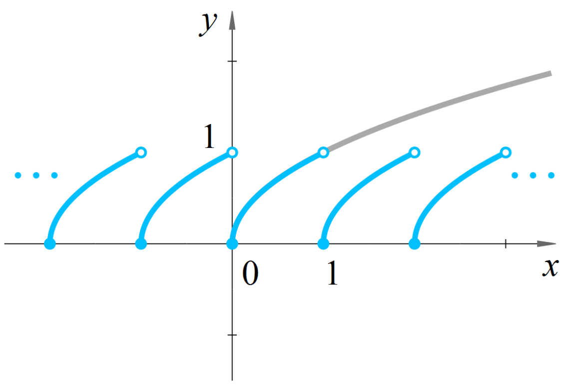


Рис. 38. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{\{x\}}$

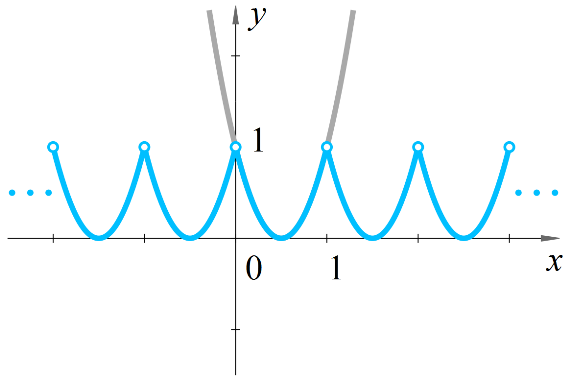


Рис. 39. Графики функций $y = (2x - 1)^2$ и $y = \left(2\{x\} - 1\right)^2$

16.5. Построение графика суммы двух функций

Еще одним важным приемом построения графиков сложных функций является построение графика функции, представленной в виде суммы двух функций, графики которых известны или их несложно построить. Понятно, что область определения «суммарной» функции есть пересечение областей определения функций-слагаемых, то есть точки разрыва наследуются.

Если функции-слагаемые — линейные (кусочно-линейные), то сложная функция будет этого же типа и построение ее графика может быть выполнено достаточно точно, график состоит из отрезков и лучей.

Если же график одной из функций-слагаемых является кривой (например, парабола или гипербола), то обычно изображают эскиз графика сложной функции. При этом следует определить точки локальных экстремумов, точки разрывов и обозначить асимптоты.

Классический пример — построение графика функции $y = x + \dfrac{1}{x}$.

При положительных x локальный минимум достигается в точке $(1,\ 2)$. При $x \longrightarrow +0$ график функции асимптотически приближается справа к прямой $x = 0$ $\left(\text{точнее, к гиперболе } y = \dfrac{1}{x}\right)$, при $x \longrightarrow +\infty$ — сверху к прямой $y = x$. Так как функция $y = x + \dfrac{1}{x}$ — нечетная, ее график центрально симметричен относительно начала координат. На рис. 41 изображена одна из ветвей графика подобной функции $f(x) = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3}{2x}$ (кривая оранжевого цвета).

330. Постройте график функции $y = x + \dfrac{\{x\}}{2}$.

Решение. Рассмотрим единичный полуинтервал $x \in [n,\ n+1)$, на котором целиком помещается один из отрезков графика мантиссы.

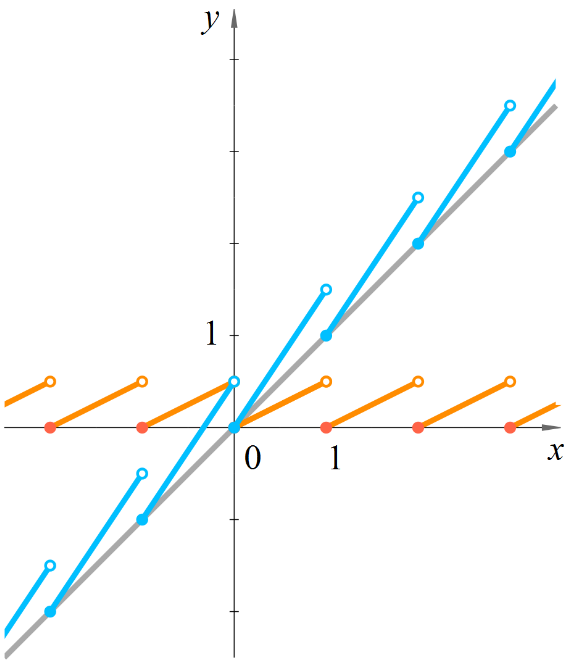


Рис. 40. Графики функций $y_1 = x$, $y_2 = \dfrac{\{x\}}{2}$ и $y = x + \dfrac{\{x\}}{2}$

На данном полуинтервале графики функций

$y_1 = x$ (серый цвет) и

$y_2 = \dfrac{\{x\}}{2}$ (оранжевый цвет)

являются полуотрезками с выколотыми верхними концами (см. рис. 40).

График суммы этих функций на единичном полуинтервале также будет полуотрезком, координаты концов которого легко вычисляются

$$y_1(n) + y_2(n) = n,$$

$$y_1(n+1) + y_2(n+1) = n + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, график функции $y = x + \dfrac{\{x\}}{2}$ (голубой цвет) состоит из равных полуотрезков, причем соседние отрезки смещены относительно друг друга на вектор $(1,\ 1)$. ■

331. Постройте графики функций $f(x)$ и $f\big([x]\big)$ при $x<0$, где $f(x)=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{2x}$. Имеют ли эти графики общие точки помимо тех, у которых абсциссы — отрицательные целые числа?

Решение. Построим сначала график функции $f(x)$ как график суммы двух функций $f_1(x)=\dfrac{2x}{3}$ и $f_2(x)=\dfrac{3}{2x}$. Затем построим график функции $f\big([x]\big)$, воспользовавшись преобразованием, описанным в п. 16.2.

Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — прямая, проходящая через начало координат, и гипербола соответственно. Поскольку в условии задачи имеется ограничение $x<0$, весь чертеж будет размещаться в III-ей четверти координатной плоскости.

Функция $f(x)$ непрерывна при $x<0$, достигает локального максимума в точке $M\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ (отметим, что $f(x)$ — сумма двух взаимно обратных отрицательных величин). Область возрастания $f(x)$ лежит левее $x=-\dfrac{3}{2}$, $f(x)$ убывает при $-\dfrac{3}{2}\leqslant x<0$.

При $x\longrightarrow 0-$ график функции $f(x)$ асимптотически приближается слева к кривой $f_2(x)=\dfrac{3}{2x}$, при $x\longrightarrow-\infty$ — снизу к прямой $f_1(x)=\dfrac{2x}{3}$.

На рис. 41 представлен график функции $f(x)$ — кривая оранжевого цвета и две асимптоты $f_1(x)=\dfrac{2x}{3}$ и $f_2(x)=\dfrac{3}{2x}$, изображенные пунктирной линией.

На этом же рисунке построен график функции $f\big([x]\big)$ — единичные полуотрезки голубого цвета, параллельные оси Ox, левые концы которых лежат на графике функции $f(x)$ в точках с целочисленными абсциссами, а правые — выколоты.

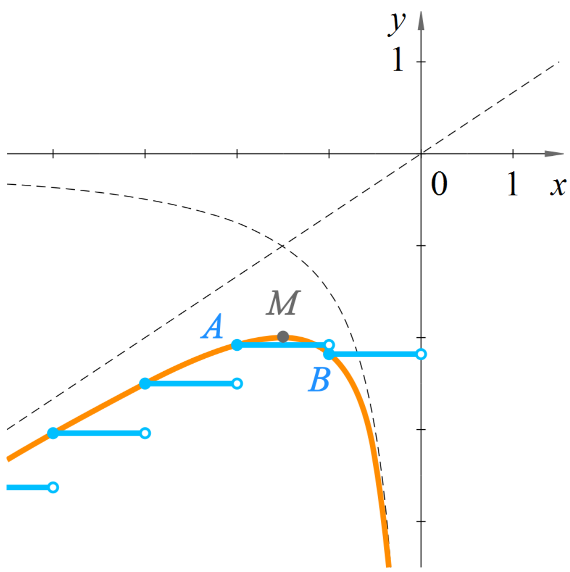


Рис. 41. Графики функций $f(x)$ и $f\big([x]\big)$ при $x<0$, где $f(x)=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{2x}$

Чтобы ответить на вопрос задачи об общих точках, вычислим координаты точек A и B: $A\left(-2,\ -2\frac{1}{12}\right)$, $B\left(-1,\ -2\frac{1}{6}\right)$.

Сопоставление координат точек A, M и B позволяет сделать вывод о пересечении графика функции $f(x)$ и фрагмента графика функции $f\big([x]\big)$ в точке с ординатой, равной $-2\frac{1}{12}$, и абсциссой, не являющейся целым числом. Несложные вычисления дают $x = -\dfrac{9}{8}$. ■

17. Геометрические места точек

Одним из увлекательных типов заданий на координатной плоскости являются задания на геометрическое место точек (ГМТ). Далее будем предполагать, что *геометрическое место точек* — это геометрическая фигура, задаваемая определенной формулой (уравнением, неравенством или их системой).

В формулах ГМТ переменные x и y равноправны — в отличие от функций, в которых одному значению x соответствует не более одного значения y. ГМТ для двух переменных x и y является, по сути, графическим решением задания с этими переменными, например, системы уравнений или даже одного уравнения или неравенства. Именно поэтому довольно часто применяют построение ГМТ при исследовании параметрических задач.

Если в ГМТ имеется область (например, квадрат или полуплоскость) важно не упустить определение статуса границ — периметра области.

Для обозначения ГМТ на координатной плоскости xOy будем использовать голубой цвет. Если граница области входит в ГМТ, то граница этой области обозначается сплошной линией, в противном случае — пунктирной линией. Точки координатной плоскости, лежащие на границе или в области ГМТ и не принадлежащие ГМТ, обозначаются традиционным способом — выколотыми точками.

Обычно из областей состоят ГМТ, заданные неравенствами, а поскольку антье сводится к параметрическим неравенствам, такие ГМТ имеют формы мозаик или повторяющихся геометрических фигур.

ГМТ, в формуле которых используется мантисса, как правило, состоят из прямых, полупрямых и/или отрезков.

332. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[x] \cdot [y] = 2$.

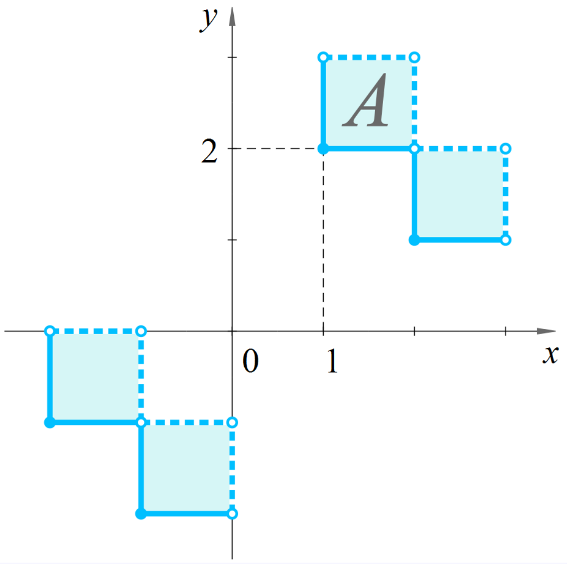


Рис. 42. ГМТ $[x] \cdot [y] = 2$

Решение. Произведение двух целых чисел равно 2, если одно из них равно ± 2, а другое ± 1 — всего четыре случая.

Рассмотрим вариант $[x] = 1$ и $[y] = 2$, что является, согласно свойству антье, квадратом A на рис. 42:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ 2 \leqslant y < 3. \end{cases}$$

Включение в ГМТ и исключение из ГМТ вершин и сторон квадрата обозначено на рисунке.

Три оставшихся случая разберите самостоятельно.

17.1. Регулярный вид ГМТ

ГМТ, определяемое формулой с антье или мантиссой, чаще всего имеет регулярный вид, то есть ГМТ состоит из повторяющихся фрагментов (обычно вдоль некоторой прямой).

Регулярность ГМТ обуславливается двумя свойствами: $[x+n] = [x]+n$ и $\{x+n\} = \{x\}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим равенство вида

$$f(y) = g(x). \tag{17.1}$$

(Данный вид равенства выбран для краткости объяснений.)

Пусть $f(y)$ обладает свойством $f(y) = f(y + T_y)$, то есть функция $f(y)$ — периодическая с периодом T_y. Это свойство означает, что изображение ГМТ будет «полосатым», полоса изображения высотой T_y будет повторяться по вертикали. В таком случае построение ГМТ сводится к чертежу при $a \leqslant y < a+T_y$, где значение a, не обязательно целое, выбирается из геометрических соображений, например, чтобы геометрическая фигура не разрывалась.

Аналогично, свойство $g(x) = g(x + T_x)$ означает горизонтальную «полосатость» ГМТ.

Если же выполняется условие $f(y + T_y) = g(x + T_x)$, то из этого условия следует, что ГМТ равенства $f(y) = g(x)$ заполняет встык всю координатную плоскость одинаковыми плитками размером T_x на T_y.

333. Постройте ГМТ, удовлетворяющее неравенству

$$\{y\} + \{x\} \geqslant 1.$$

Решение. Построим ГМТ для $0 \leqslant x,\ y < 1$ (см. рис. 43). При заданных ограничениях на x и y исходное неравенство превращается в $y + x \geqslant 1$.

ГМТ на всей координатной плоскости представляет собой мозаику, состоящую из прямоугольных треугольников (см. рис. 44). Объясняется это периодичностью выражения $\{y\} + \{x\}$ как по вертикали, так и по горизонтали.

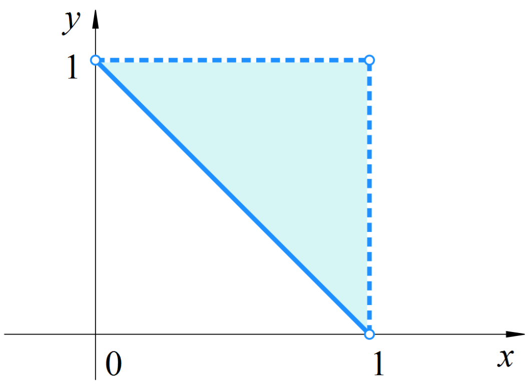


Рис. 43. ГМТ $\{y\} + \{x\} \geqslant 1$ при $0 \leqslant x,\ y < 1$

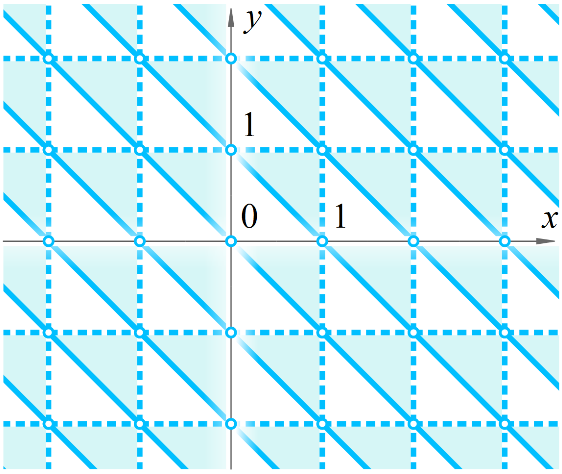


Рис. 44. ГМТ $\{y\} + \{x\} \geqslant 1$

Примечание. Некоторые «потертости» рядом с осями координат на рис. 44 выполнены для удобства их обозначения.

17.2. Задачи по теме раздела

Во всех задачах требуется построить или определить (описать) ГМТ, удовлетворяющее соответствующему условию.

334. $[x-y]=0.$

335. $[x-y]=a.$

336. $[x+y]=0.$

337. $[y-x]=-1.$

338. $[y]=[x]\,.$

339. $[y]\geqslant[x]\,.$

340. $\{y\}=\{x\}\,.$

341. $[y]=\{x\}\,.$

342. $[xy]=0.$

343. $\{xy\}=0.$

345. $[x]\cdot[y]=2^n.$

344. $[x+y]=[x-y]\,.$

17.3. Указания, решения, ответы

334. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[x-y]=0$.

Решение. Исходное условие равносильно двойному неравенству

$$0\leqslant x-y<1.$$

Значит, ГМТ (см. рис. 45) будет пересечением двух областей на координатной плоскости, задаваемых условиями

$$y\leqslant x \quad \text{и} \quad y>x-1.$$

Этими областями являются полуплоскости, лежащие под прямой $y=x$ и над прямой $y=x-1$. Верхняя граница ($y=x$) включена в ГМТ, нижняя граница ($y=x-1$) исключена из ГМТ.

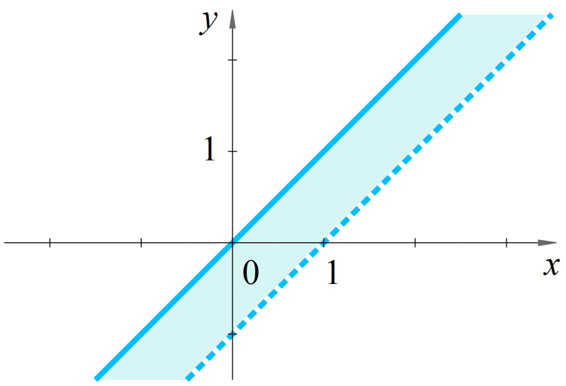


Рис. 45. ГМТ $[x-y]=0$

335. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[x-y]=a$, где a — целое число.

Ответ: ГМТ равенства $[x-y]=a$ является параллельным переносом образа ГМТ $[x-y]=0$ на вектор $(a,\ 0)$.

336. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[x+y]=0$.

Ответ: ГМТ $[x+y]=0$ — это образ ГМТ $[x-y]=0$ (см. рис. 45) с поворотом на 90° вокруг начала координат против часовой стрелки.

337. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[y-x]=-1$.

Ответ: ГМТ $[y-x]=-1$ и ГМТ $[x-y]=0$ (см. рис. 45) совпадают, не считая границ. Меняется «статус» принадлежности обеих границ ГМТ: верхняя граница $y=x$ исключена, нижняя граница $y=x-1$ включена.

338. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[y]=[x]$.

Решение. Согласно универсальному равносильному переходу (см. п. 10.1.), исходное равенство равносильно условию

$$\begin{cases} n \leqslant y < n+1, \\ n \leqslant x < n+1, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

ГМТ данного условия изображено на рис. 46.

Поскольку выполняется равенство $[y+1]=[x+1]$, ГМТ совпадает со своим образом при параллельном переносе на вектор $(1,\ 1)$.

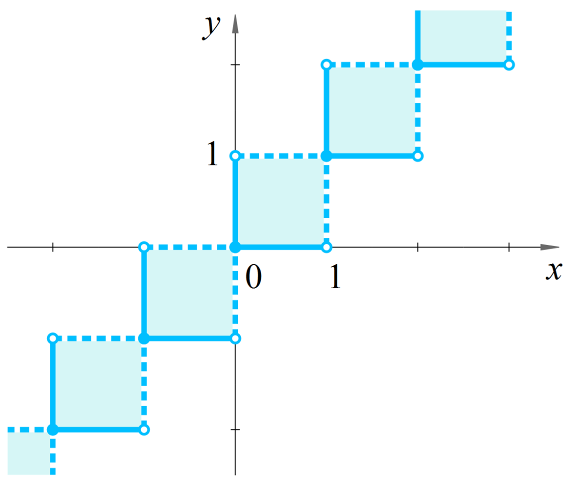


Рис. 46. ГМТ $[y]=[x]$

339. Постройте ГМТ, удовлетворяющее равенству $[y] \geqslant [x]$.

Ответ: ГМТ занимает область, состоящую из ГМТ равенства $[y]=[x]$ (см. рис. 46) и полуплоскости, лежащей над этим ГМТ. Исключенными останутся лишь восточные вертикальные отрезки.

340. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $\{y\} = \{x\}$.

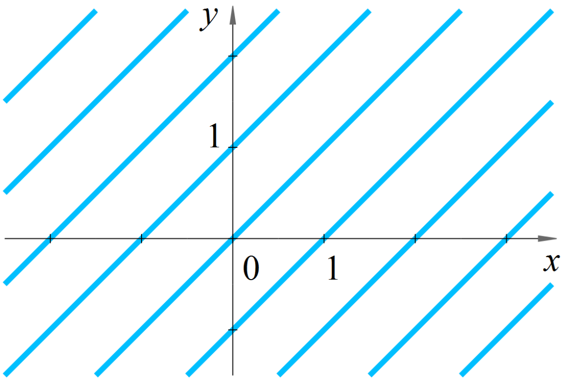


Рис. 47. ГМТ $\{y\} = \{x\}$

Решение. Согласно (2.28) исходное равенство $\{y\} = \{x\}$ равносильно $\{y - x\} = 0$, то есть разность $y - x$ должна быть целой.

Задание свелось к построению ГМТ, удовлетворяющего условию (см. рис. 47):

$$y - x = n, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

341. Постройте ГМТ, удовлетворяющее условию $[y] = \{x\}$.

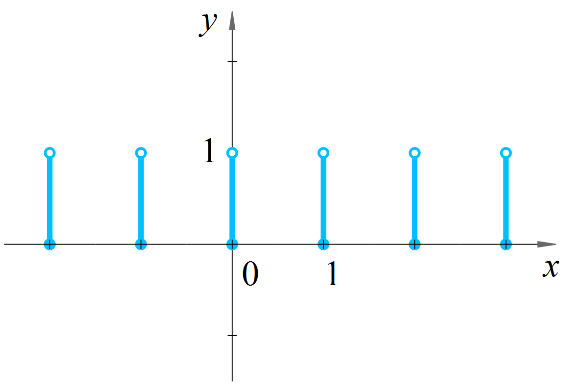


Рис. 48. ГМТ $[y] = \{x\}$

Решение. Выражение $\{x\}$ должно быть целым, значит, $\{x\} = 0$, или $x \in \mathbb{Z}$.

$[y] = 0$ выполняется при условии $0 \leqslant y < 1$. Следовательно, следующее условие (ГМТ на рис. 48)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}, \\ 0 \leqslant y < 1 \end{cases}$$

равносильно исходному равенству.

342. Постройте ГМТ, удовлетворяющее равенству $[xy] = 0$.

Решение. Так как $0 \leqslant xy < 1$, то положительная область ГМТ расположена под положительной веткой гиперболы $xy = 1$ и ограничена осями координат, отрицательная область ГМТ симметрична положительной части относительно начала координат. Оси координат входят в ГМТ, обе ветки гиперболы не входят.

343. Постройте ГМТ, удовлетворяющее равенству $\{xy\} = 0$.

Решение. Произведение xy должно быть целым числом, включая 0. Значит, ГМТ состоит из всех гипербол вида $xy = n$, где $n \in \mathbb{Z}$, и осей координат.

344. Постройте ГМТ, удовлетворяющее равенству

$$[x + y] = [x - y]\,.$$

Решение. Исходное равенство равносильно системе с целочисленным параметром a

$$\begin{cases} [x + y] = a, \\ [x - y] = a. \end{cases}$$

В задачах *335* и *337* обсуждается построение ГМТ для равенств из приведенной системы. Остается найти пересечение этих ГМТ.

Таким пересечением при $a = 0$ будет квадрат с диагональю, концами которой являются точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$.

При $a = 1$ пересечением будет такой же квадрат, расположенный правее.

Продолжая рассуждать подобным образом, построим ГМТ исходного равенства (см. рис. 49).

Отметим, что периодичность ГМТ объясняется тем, что выполняется равенство

$$[(x + n) + y] = [(x + n) - y]\,,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

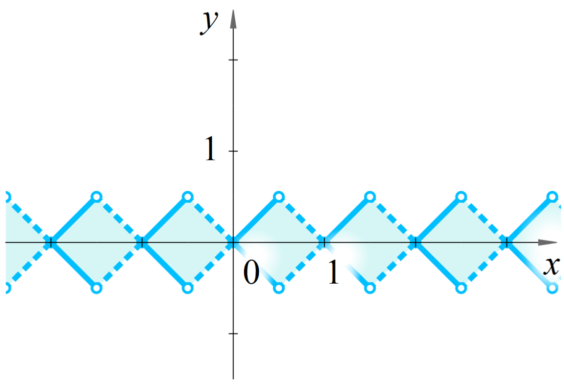


Рис. 49. ГМТ $[x + y] = [x - y]$

345. Определите ГМТ, удовлетворяющее равенству $[x] \cdot [y] = 2^n$.

Решение. Целые числа, произведение которых дает 2^n, являются целочисленными координатами точек, лежащих на гиперболе $yx = 2^n$. Таких целочисленных точек на каждой из двух веток гиперболы — ровно $n + 1$ точка.

Рассмотрим любую пару целых чисел, произведение которых дает 2^n. Для этой пары равенству $[x] \cdot [y] = 2^n$ соответствует ГМТ в виде единичного квадрата, левая нижняя вершина которого лежит на гиперболе. Координатами этой вершины является рассматриваемая пара целых чисел. Периметр квадрата изображен на квадрате A (см. рис. 42).

Таким образом, ГМТ равенства $[x]\cdot[y] = 2^n$ есть $2(n+1)$ единичных квадратов, «приклеенных» за левую нижнюю вершину к гиперболе $yx = 2^n$ в целочисленных точках: $(1,\ 2^n)$, $(2,\ 2^{n-1})$, ..., $(2^n,\ 1)$, и аналогичный набор точек с теми же отрицательными координатами.

18. Графический метод решения

Суть графического метода решения задач заключается в обосновании решения с помощью графиков функций и/или областей на координатной плоскости xOy.

Графический метод решения уравнений сводится к построению графиков функций левой и правой частей уравнения и определению точек пересечения этих двух графиков. Значения абсцисс точек пересечения являются решениями уравнения.

При решении неравенств графическим методом повторяются действия на координатной плоскости, характерные для решения уравнений, и затем определяются области значений x, при которых один из графиков расположен выше другого, что равносильно одному из вариантов строгого условия неравенства.

Главное достоинство графического метода — наглядность. Поэтому чертеж, соответствующий заданию, может играть и вспомогательную роль при аналитическом решении.

Важно отметить, что использование чертежа и в основном, и во вспомогательном качестве требует доказательных рассуждений о количестве и координатах точек пересечения фрагментов чертежа. Отсутствие точек пересечения на чертеже также требует подкрепления аргументированными доводами.

Часто встречающаяся фраза «видно из чертежа» означает, что ключевые элементы чертежа легко определяются и их взаимное расположение очевидно.

«Видно из чертежа» не является следствием созерцания графических построений, ведь рука может дрогнуть при построении графиков, что приведет к искажению расположения фрагментов чертежа.

Графический метод решения имеет отличительную особенность — существенное значение для обоснования решения приобретают точки на графиках, которые не являются точками пересечения. С помощью этих ключевых точек становится «виден из чертежа» порядок размещения фрагментов графиков вблизи ключевых точек.

346. Решите уравнение $[x] = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

См. другой вариант решения — задача *254*.

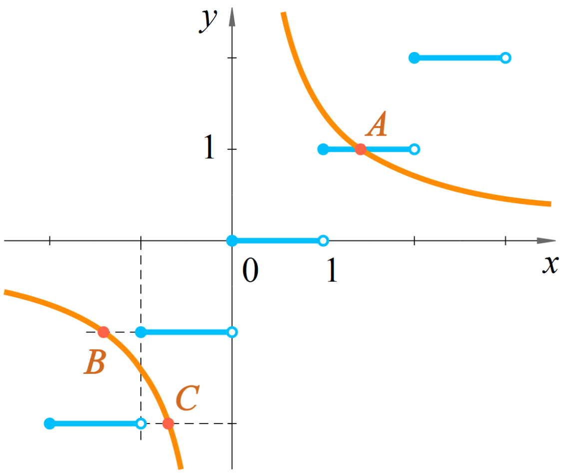


Рис. 50. Уравнение $[x] = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$

Решение. На рис. 50 изображены графики функций $y = [x]$ (голубой цвет) и $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ (оранжевый цвет).

При положительных значениях x возможно лишь одно пересечение графиков этих функций, так как функция $y = [x]$ неубывающая, а функция $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ убывает. Аналогично, возможно лишь одно пересечение графиков при отрицательных x. Точка пересечения A определяется довольно просто — $\left(\sqrt{2}, 1\right)$.

При $x < 0$ графики функций $y = [x]$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ не пересекаются, поскольку точка $B\left(-\sqrt{2}, -1\right)$ лежит левее, а точка $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right)$ — правее соответствующих фрагментов графика функции $y = [x]$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

18.1. Графический метод решения задач с параметром

Одним из методов решения задач с параметром является графический (координатный) метод.

Рассмотрим, к примеру, задание на определение количества решений уравнения $f(x) = a$, где a — параметр. Графический метод состоит в подсчете точек пересечений прямой $y = a$ и графика функции $f(x)$, при построении которого следует быть особенно аккуратным при изображении графика в точках разрывов и экстремумов.

При оформлении ответов к задаче с параметром обычно их разворачивают вдоль прямой параметра, то есть «при $a \in M_1$ ответ первый, при $a \in M_2$ ответ второй и т. д.». Таким образом выражается зависимость результатов решения от значений параметра.

Обратите внимание на задачу *350*, в которой графическим методом решается задание на уравнение вида $\{f(x)\} = f\left(\{x\}\right)$. Используя особенности данного вида уравнений, графический метод демонстрирует исключительно эффективный способ решения.

347. (Эстония/1998-1999) Решите уравнение $[x] = kx + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

См. другой вариант решения — задача 224.

Решение. Приведем уравнение к виду $[x] - 1 = kx$. Найдем точки пересечения графиков функций $f(x) = [x] - 1$ и $g(x) = kx$ $(k \in \mathbb{Z})$. На рис. 51 изображены графики функций $f(x)$ и $g(x)$, причем семейство прямых $g(x) = kx$ представлено «основными» для данной задачи значениями параметра k, за исключением $k = 0$. При $k = 0$ график функции $g(x) = 0$ — это прямая, совпадающая с осью абсцисс.

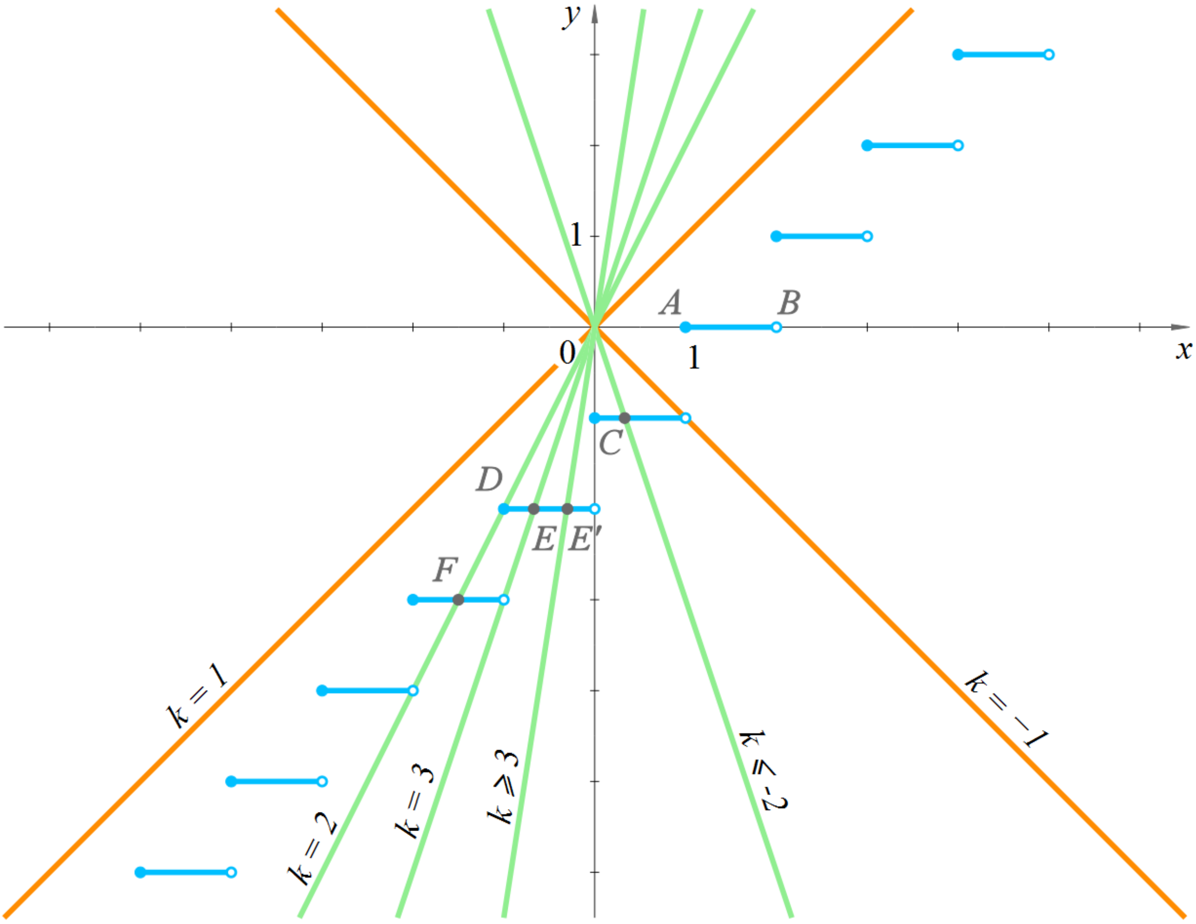


Рис. 51. Графики функций $f(x) = [x] - 1$ — голубой цвет, $g(x) = kx$ $(k \in \mathbb{Z})$ — оранжевый и зеленый цвет

Ответ: при $k = \pm 1$ решений нет,

$$
\begin{array}{lll}
\text{при } k = 0 & 1 \leqslant x < 2 & \text{— отрезок } AB,\ A(1,\, 0),\ B(2,\, 0), \\
\text{при } k \leqslant -2 & x = -\dfrac{1}{k} & \text{— точка } C\left(-\dfrac{1}{k},\, -1\right), \\
\text{при } k = 2 & x = -1,\ -\dfrac{3}{2} & \text{— точки } D\,(-1,\, -2) \text{ и } F\left(-\dfrac{3}{2},\, -3\right), \\
\text{при } k \geqslant 3 & x = -\dfrac{2}{k} & \text{— точка } E(E'),\ E\left(-\dfrac{2}{k},\, -2\right).
\end{array}
$$

18.2. Графический метод решения уравнений $f(x) = f([x])$

Уравнения вида

$$f(x) = f\big([x]\big). \tag{18.1}$$

примечательны тем, что часть решений определяется сразу — это все целые числа, входящие в область определения $f(x)$. Причем в случае монотонного возрастания (убывания) функции $f(x)$ очевидно, что других решений нет.

А как же решать уравнение (18.1) при нецелых значениях аргумента? В этом случае, если график функции $f(x)$ несложно построить, достаточно эффективным может оказаться графический метод решения — требуется лишь определить точки пересечения графиков $f(x)$ и $f\big([x]\big)$ при $x \notin \mathbb{Z}$. (Порядок построения графика функции $f\big([x]\big)$ приводится в п. 16.2.)

348. Решите уравнение $x + \dfrac{2}{2x-1} = [x] + \dfrac{2}{2\,[x]-1}$ для $x \notin \mathbb{Z}$.

См. другой вариант решения — задача 145.

Решение. Сложность (если это можно назвать сложностью) применения графического метода решения данного задания заключается в умении изобразить график функции $f(x) = x + \dfrac{2}{2x-1}$, то есть построить график функции, которая является суммой двух функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \dfrac{2}{2x-1}$. На рис. 52 изображены две кривые оранжевого цвета, которые являются графиком функции $f(x)$.

Точки $M_1\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ и $M_2\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ — локальные максимум и минимум функции $f(x)$. Также проведены асимптоты $y = x$ и $x = \dfrac{1}{2}$. Значения функции $f(x)$ при целых x находятся несложно. Эти значения используются при построении графика функции $f([x])$.

Среди единичных отрезков синего цвета — фрагментов графика функции $f([x])$ — лишь отрезок AB пересекается с нижней ветвью графика функции $f(x)$. Такой вывод можно сделать на основании сравнения координат точек $A\left(-1,\ -\dfrac{5}{3}\right)$, M_2, $B\left(0,\ -\dfrac{5}{3}\right)$ и $C(0,\ -2)$.

Таким образом, остается решить уравнение $x + \dfrac{2}{2x-1} = -\dfrac{5}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{6}$.

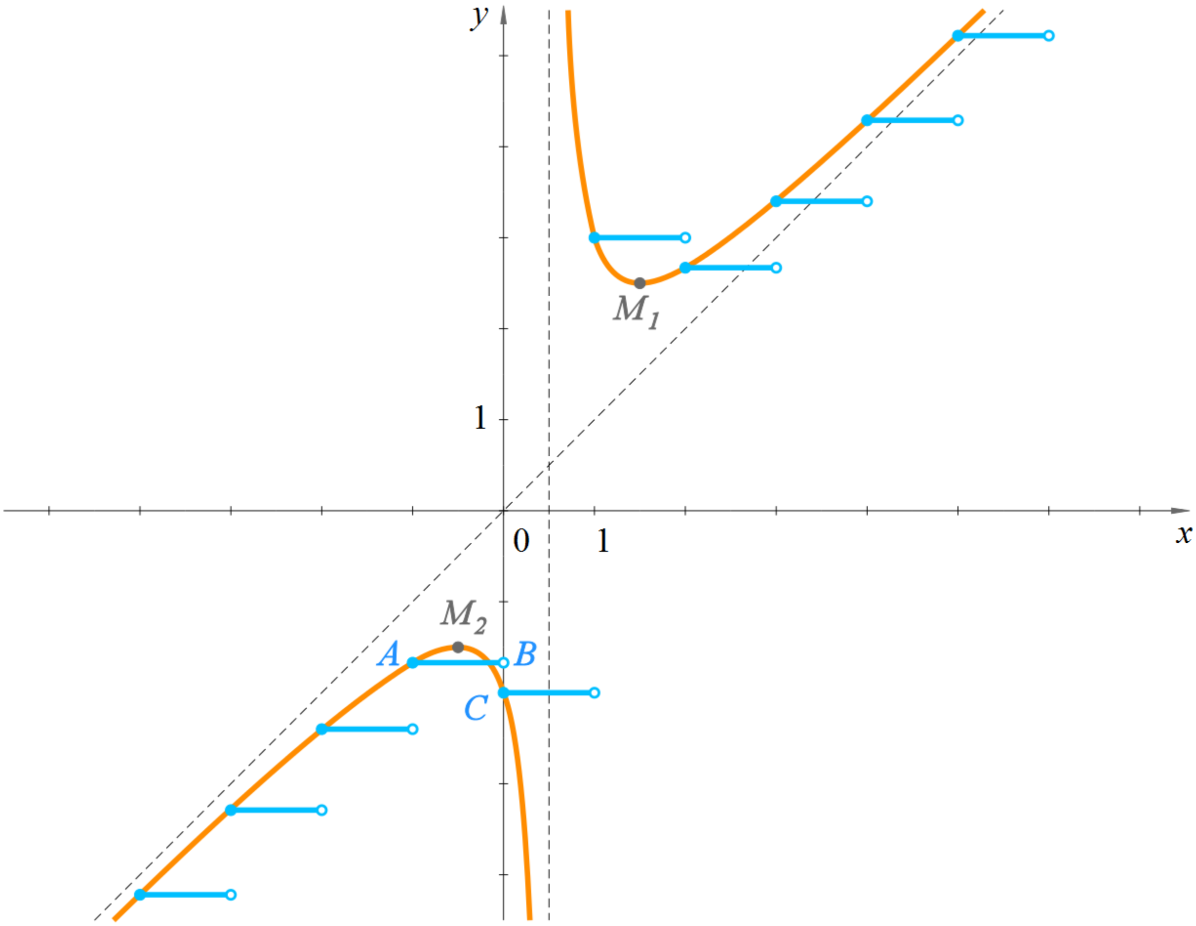


Рис. 52. Графики функций $f(x) = x + \dfrac{2}{2x-1}$ и $f([x]) = [x] + \dfrac{2}{2[x]-1}$

18.3. Графический метод решения уравнений $\boldsymbol{[f(x)] = f([x])}$

В п. 12.5. уже обсуждался аналитический подход к решению уравнений вида

$$[f(x)] = f\bigl([x]\bigr). \tag{18.2}$$

Напомним, что **уравнение (18.2) имеет решения, если функция $\boldsymbol{f(x)}$ принимает целые значения при целочисленном аргументе. Верно и обратное высказывание.** Рассмотрим графическую иллюстрацию данного утверждения.

На рис. 53 и 54 изображены графики функций $y = f(x)$ — серым, $y = \bigl[f(x)\bigr]$ — оранжевым и $y = f\bigl([x]\bigr)$ — голубым цветами. Графики представлены для одного из целочисленных полуинтервалов $\bigl[n,\ n+1\bigr)$. Отметим, что совпадающие фрагменты графиков на рис. 54-56 смещены относительно друг друга по вертикали. Такая «поправка» внесена для удобства восприятия. (Порядок построения графиков сложных функций с участием антье подробно обсуждается в пп. 16.1.-16.2.)

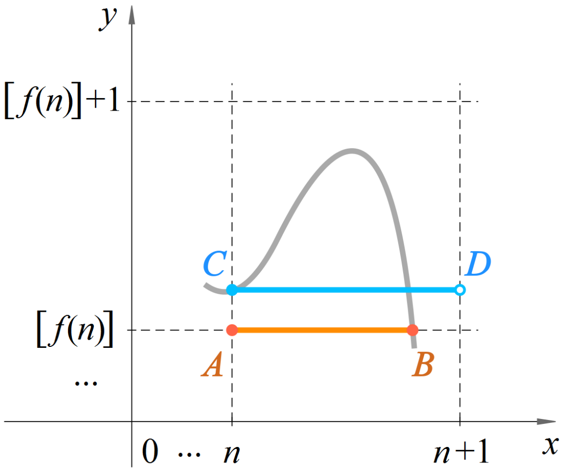


Рис. 53. $f(x)$ при $x \in [n,\ n+1)$: $\left[f(x)\right] \neq f\left([x]\right)$, так как $f(n) \notin \mathbb{Z}$

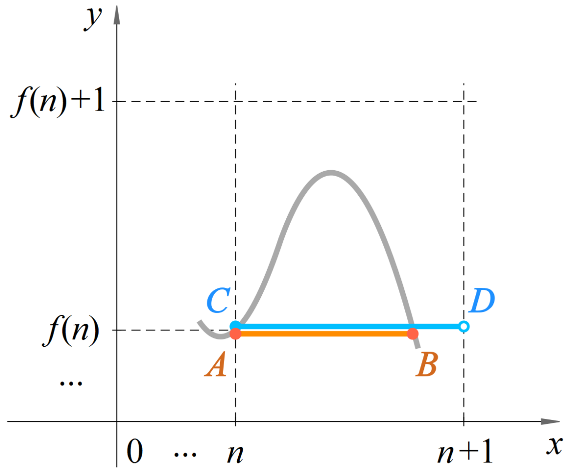


Рис. 54. $f(x)$ при $x \in [n,\ n+1)$: $\left[f(x)\right] = f\left([x]\right)$ имеет решения, так как $f(n) \in \mathbb{Z}$

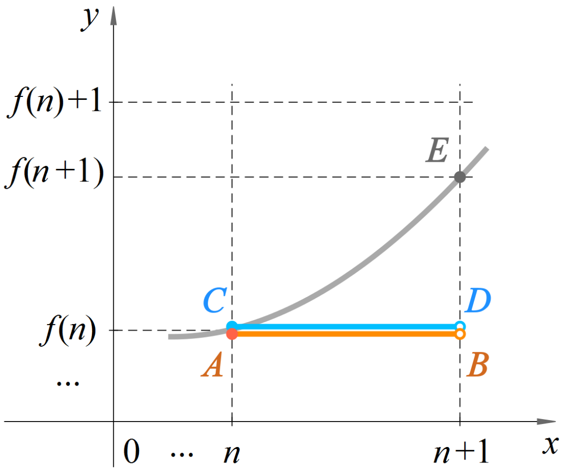


Рис. 55. $f(x)$ при $x \in [n,\ n+1)$: $f(n) < f(n+1) \leqslant f(n)+1$

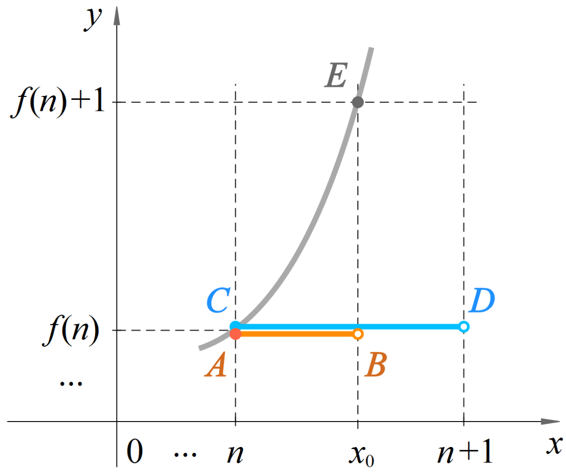


Рис. 56. $f(x)$ при $x \in [n,\ n+1)$: $f(x_0) = f(n)+1$, где $n < x_0 < n+1$

На левом рисунке показан случай $f(n) \notin \mathbb{Z}$, что означает невозможность пересечения фрагментов графиков функций $\left[f(x)\right]$ и $f\left([x]\right)$ — отрезков AB и CD соответственно.

На правом рисунке видно, что уравнение (18.2) обязательно будет иметь решение, так как $f(n) \in \mathbb{Z}$, то есть наверняка выполняется равенство $\left[f(n)\right] = f\left([n]\right)$.

Очевидно, что если функция $y = f(x)$ монотонно убывает на полуинтервале $[n,\ n+1)$ и выполняется условие $f(n) \in \mathbb{Z}$, то на указанном промежутке уравнение (18.2) имеет единственное решение ($x = n$) — график функции $f(x)$ пройдет через левый нижний угол единичного квадрата, ограниченного прямыми $x = n$, $x = n+1$, $y = f(n)$ и $y = f(n)+1$.

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная и возрастающая функция на полуинтервале $\big[n,\ n+1\big)$ и выполняется условие $f(n) \in \mathbb{Z}$. В этом случае решением уравнения (18.2) будет полуинтервал $\big[n,\ x_0\big)$, где либо x_0 равно $n+1$, либо $f(x_0) = f(n)+1$ (см. рис. 55 и 56). Если расположение точки E графика функции $y = f(x)$ определить затруднительно, то значение x_0 определяется меньшим из двух указанных значений.

349. (Швеция/2003) Решите уравнение $\big[x^2 - 2x\big] + 2\,[x] = [x]^2$.

См. другой вариант решения — задача 288.

Решение. Очевидно, исходное уравнение является уравнением вида (18.2). Воспользуемся ранее построенными графиками функций

$$f(x) = \big[x^2 - 2x\big] \text{ (рис. 24) и } g(x) = [x]^2 - 2\,[x] \text{ (рис. 29).}$$

Графическое решение исходного уравнения представлено на рис. 57 (точки и отрезки голубого цвета).

При $x < 1$ пересечением графиков $f(x)$ и $g(x)$ являются целочисленные точки, лежащие на левой ветви параболы.

При $x \geqslant 1$ пересечением графиков $f(x)$ и $g(x)$ являются отрезки, левые концы которых расположены в целочисленных точках правой ветви параболы.

Абсциссы правых концов отрезков определяются из соотношения $x^2 - 2x = n^2 - 2n + 1$ (выражение в правой части есть ордината точки параболы, абсциссы этой точки и искомого конца отрезка совпадают). Например, вычислим координаты точек $A\big(0,\ 1+\sqrt{2}\big)$ и $B\big(3,\ 1+\sqrt{5}\big)$.

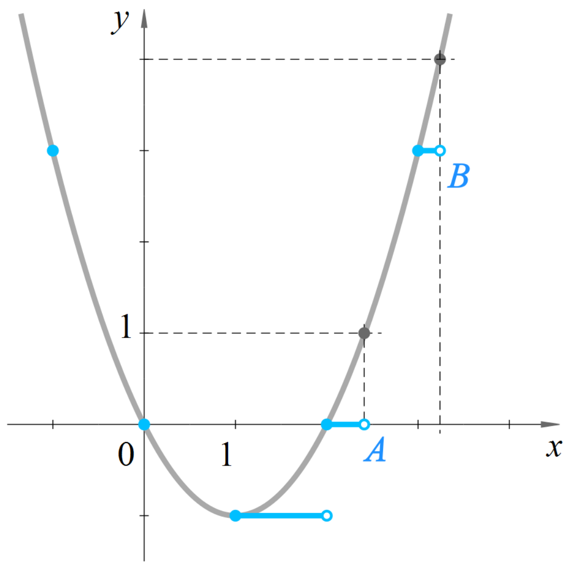


Рис. 57. Графическое решение уравнения $\big[x^2 - 2x\big] = [x]^2 - 2\,[x]$

Ответ: $\mathbb{Z}_{\leqslant 0} \cup \Big[1,\ 1+\sqrt{2}\Big) \bigcup\limits_{n=3}^{+\infty} \Big[n,\ 1+\sqrt{n^2 - 2n + 2}\Big)$.

18.4. Графический метод решения уравнений $\{f(x)\} = f(\{x\})$

Графическая интерпретация условия существования решений уравнений вида

$$\{f(x)\} = f(\{x\}) \tag{18.3}$$

формулируется следующим образом:

необходимым и достаточным условием существования решений данного уравнения является прохождение графика функции $f(x)$ через единичный квадрат, левый нижний угол которого — начало координат, а правый верхний — точка $(1,\ 1)$.

Аналитическое определение указанного единичного квадрата (см. также п. 14.2.)

$$\begin{cases} 0 \leqslant f(x) < 1, \\ 0 \leqslant x < 1. \end{cases} \tag{18.3$'$}$$

Уточнение границ квадрата: в условие существования включены левая и нижняя стороны квадрата и лишь одна из четырех вершин — начало координат.

Для обоснования графической интерпретации достаточно сопоставить графики функций $\{f(x)\}$ и $f(\{x\})$ (см. пп. 16.3.-16.4.). График функции $\{f(x)\}$ лежит в горизонтальной полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 1$, причем включается только нижняя граница. График функции $f(\{x\})$ является клонированными вправо и влево фрагментами части графика, расположенного между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ (включена левая граница). Очевидно, что если графики функций $\{f(x)\}$ и $f(\{x\})$ пересекаются, то они должны пересекаться в квадрате (18.3$'$). Верно и обратное утверждение.

350. При каких значениях параметра a уравнение

$$\{x^2 + a\} = \{x\}^2 + a$$

не имеет решений?

См. другой вариант решения — задача *308*.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (18.3), где $f(x) = x^2 + a$ — семейство идентичных парабол, вершины которых расположены на оси ординат. Воспользуемся необходимым и достаточным условием существования решений уравнений вида (18.3).

Несложно видеть (см. рис. 58), что параболы с параметром $a \leqslant -1$ и $a \geqslant 1$ не проходят через единичный квадрат (18.3$'$).

Ответ: $(-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$.

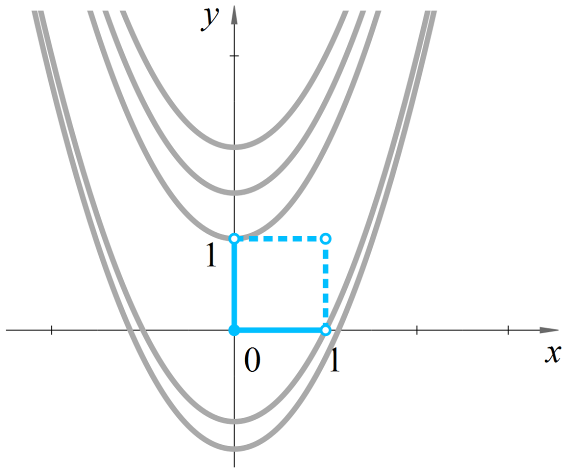


Рис. 58. Графики функций $y = x^2 + a$ при $a \leqslant -1$ и $a \geqslant 1$

18.5. Задачи по теме раздела

351. Решите уравнение $\left[2x\right] = x^3 - 3$.

352. Сколько решений в зависимости от значений параметра t имеет уравнение $x + \dfrac{\{x\}}{2} = t$ при условии $2004 \leqslant t \leqslant 2005$?

353. Решите уравнение $\left[\dfrac{1}{x}\right] = x\sqrt{2}$.

354. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 = [x]^3 - 3\,[x]^2$.

355. Решите уравнение $\dfrac{4x}{9} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4\,[x]}{9} + \dfrac{1}{[x]}$ для $x \notin \mathbb{Z}$.

356. Решите уравнение $\alpha\{x\} = \{\alpha x\}$, где α — иррациональное число.

357. При каких значениях параметра a система с двумя неизвестными

$$\begin{cases} [x] = [y]\,, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет не более двух решений?

18.6. Указания, решения, ответы

351. Решите уравнение $\lceil 2x \rceil = x^3 - 3$.

См. другие варианты решений — задачи 226, 265.

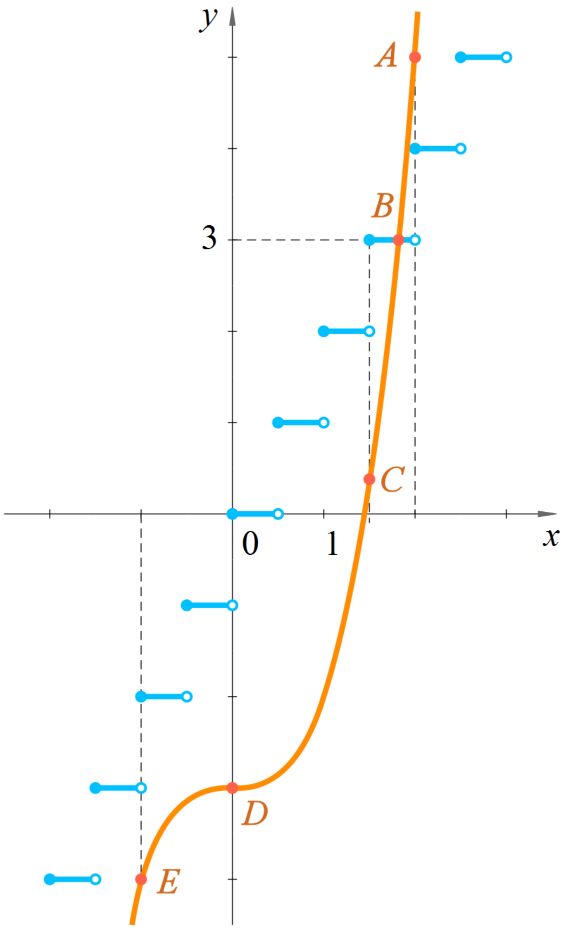


Рис. 59. Графики функций $y = \lceil 2x \rceil$ и $y = x^3 - 3$

Решение. При построении графиков функций для правой и левой частей исходного уравнения (см. рис. 59) важно отметить ключевые точки на графиках, по которым можно судить о пересечениях графиков $y = \lceil 2x \rceil$ (голубой цвет) и $y = x^3 - 3$ (оранжевый цвет).

Точки A, B и C лежат в полосе $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$. Поэтому очевидно, что графики пересекаются только в точке $B\left(\sqrt[3]{6}, 3\right)$.

В четвертой четверти координатной плоскости расположен один из графиков.

В третьей четверти оранжевая кривая расположена под голубыми отрезками, так как точки $D(0, -3)$ и $E(-1, -4)$ находятся правее соответствующих фрагментов графика функции $y = \lceil 2x \rceil$. А при других отрицательных значениях x график функции $y = x^3 - 3$ стремительно «уходит» вниз.

Ответ: $\sqrt[3]{6}$.

352. (Ульяновск/2004-2005) [12, с. 24] Сколько решений в зависимости от значений параметра t имеет уравнение $x + \dfrac{\{x\}}{2} = t$ при условии $2004 \leqslant t \leqslant 2005$?

См. другой вариант решения — задача 227.

Решение. Построение графика функции $f(x) = x + \dfrac{\{x\}}{2}$ (см. рис. 40 на с. 233) как суммы двух функций обсуждается в п. 16.5. Так как график имеет регулярный вид, проанализируем его при $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

На рис. 60 изображено несколько прямых $y = a$ при $1 \leqslant a \leqslant 2$. Очевидно, что при $1 \leqslant a < 1{,}5$ и $a = 2$ прямые дважды пересекают график функции $f(x)$, а при $1{,}5 \leqslant a < 2$ наблюдается лишь одно пересечение.

Такая зависимость количества решений на единичных целочисленных сегментах сохраняется для всех значений, принимаемых функцией $f(x)$.

Отметим, что регулярность графика функции $f(x)$ подтверждается равенством $f(x+1) = f(x) + 1$, то есть при параллельном переносе на вектор $(1,\ 1)$ график накладывается сам на себя.

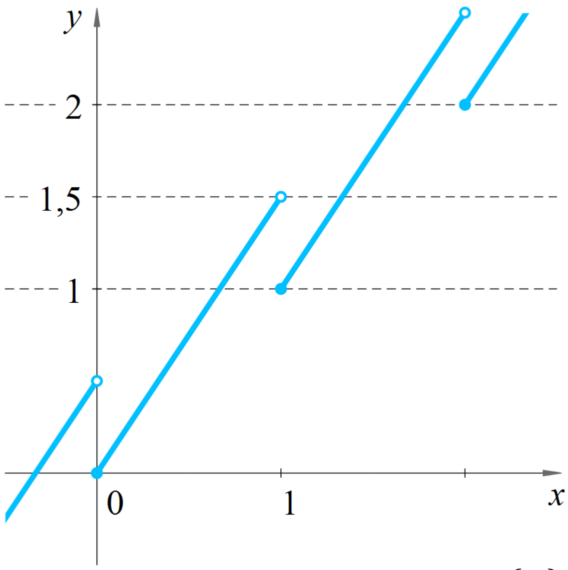


Рис. 60. График функции $x + \dfrac{\{x\}}{2}$

Ответ: при $2004 \leqslant t < 2004{,}5$ два решения,
при $2004{,}5 \leqslant t < 2005$ одно решение,
при $t = 2005$ два решения.

353. Решите уравнение $\left[\dfrac{1}{x}\right] = x\sqrt{2}$.

Решение. На рис. 61 изображены графики функций $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ (голубой цвет) и $y = x\sqrt{2}$ (оранжевый цвет). Рассуждения о том, что единственной точкой пересечения этих графиков будет точка $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$, во многом схожи с объяснениями, приведенными в задаче *346*.

Заметим, что в исходном уравнении возможна замена $z = \frac{1}{x}$, упрощающая построение графиков (см. задачу *346*).

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

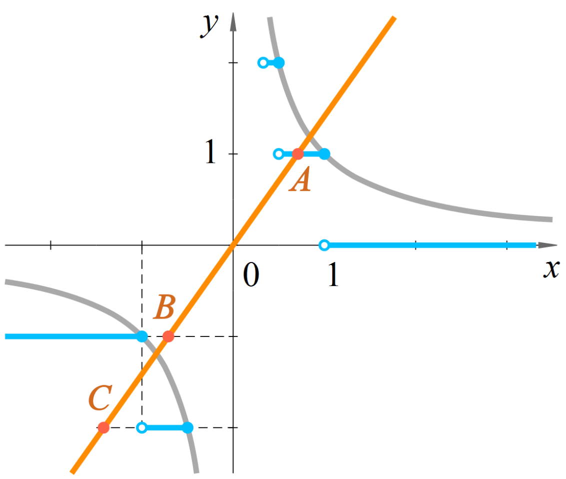


Рис. 61. Уравнение $\left[\dfrac{1}{x}\right] = x\sqrt{2}$

354. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 = [x]^3 - 3[x]^2$.

См. другой вариант решения — задача *249*.

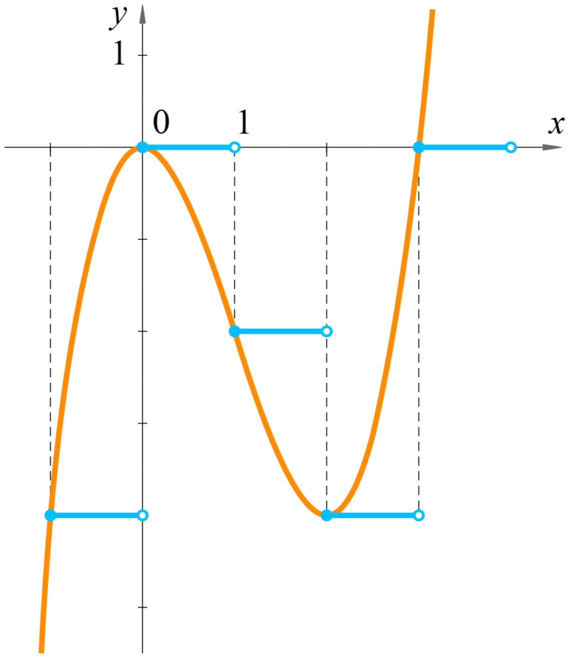


Рис. 62. Графики функций $f(x) = x^3 - 3x^2$ и $f([x]) = [x]^3 - 3[x]^2$

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (18.1). Значит, все целые числа можно сразу занести в ответ.

Для обоснования того, что других решений нет, достаточно рассмотреть графики функций (см. рис. 62) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (кубическая парабола оранжевого цвета) и $f([x]) = [x]^3 - 3[x]^2$ (единичные отрезки голубого цвета) на сегменте $[-1,\ 3]$, где вполне возможны пересечения этих графиков.

Представленный чертеж убедительно демонстрирует, что только при целых значениях x графики функций $f(x)$ и $f([x])$ имеют общие точки.

Ответ: $x \in \mathbb{Z}$.

355. Решите уравнение $\dfrac{4x}{9} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4[x]}{9} + \dfrac{1}{[x]}$ для $x \notin \mathbb{Z}$.

См. другой вариант решения — задача *145*.

Указание. См. решение аналогичной задачи *348*. Заметим, что удобнее работать с уравнением $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3}{2x} = \dfrac{2[x]}{3} + \dfrac{3}{2[x]}$. См. рис. 41 (задача *331*).

Ответ: $-\dfrac{9}{8}$.

356. Решите уравнение $\alpha\{x\} = \{\alpha x\}$, где α — иррациональное число.

См. другой вариант решения — задача *311*.

Решение. Исходное уравнение является уравнением вида (18.3), где $f(x) = \alpha x$ — семейство прямых, проходящих через начало координат. Прямые расположены в первой и третьей четвертях при $\alpha > 0$, и во второй и четвертой четвертях при $\alpha < 0$. Рассмотрим первый случай.

Графики функций $\alpha\{x\}$ и $\{\alpha x\}$ представлены на рис. 63-64. (См. порядок построения этих графиков в пп. 16.3.-16.4.)

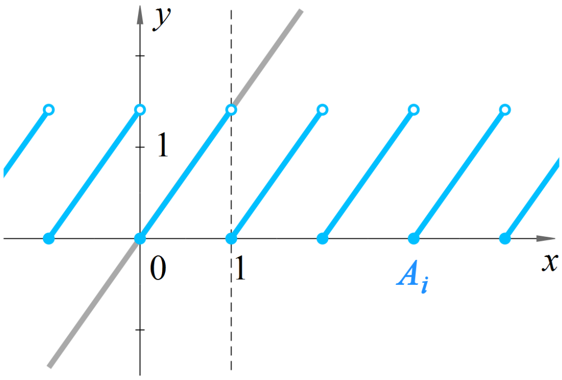


Рис. 63. График функции $\alpha\{x\}$ при $\alpha > 0$

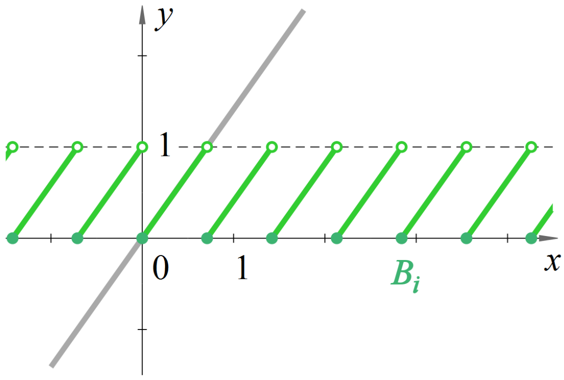


Рис. 64. График функции $\{\alpha x\}$ при $\alpha > 0$

Абсциссы точек A_i — целые числа, абсциссы точек B_i — иррациональные числа, за исключением одной точки $x = 0$. Следовательно, графики функций $\alpha\{x\}$ и $\{\alpha x\}$ пересекаются только по отрезкам, одним из концов которых является начало координат. Другой конец общего отрезка имеет абсциссу, равную $\min\left(1,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Случай $\alpha < 0$ проще (см. рис. 65-66). График функции $\alpha\{x\}$ размещается под осью абсцисс. Аналогичные рассуждения приводят к единственному ответу $x = 0$.

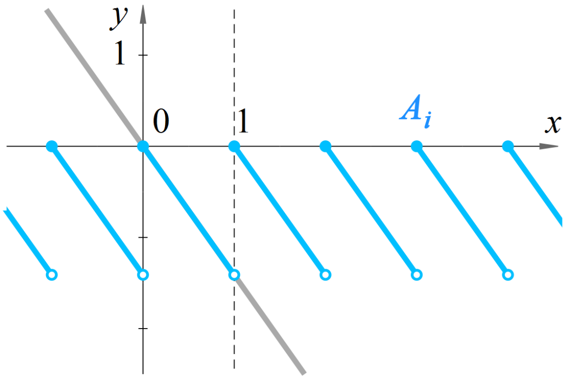


Рис. 65. График функции $\alpha\{x\}$ при $\alpha < 0$

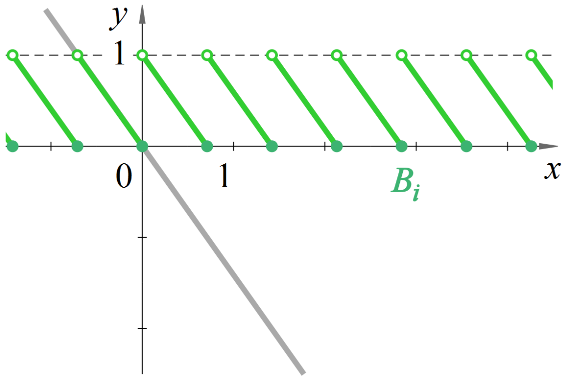


Рис. 66. График функции $\{\alpha x\}$ при $\alpha < 0$

Ответ: при $\alpha < 0$ $x = 0$,
при $0 < \alpha < 1$ $x \in [0,\ 1)$,
при $\alpha > 1$ $x \in \left[0,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

357. (САММАТ/1997) [4, с. 18] При каких значениях параметра a система с двумя неизвестными

$$\begin{cases} [x] = [y], \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет не более двух решений?

Решение. Построение ГМТ, удовлетворяющего первому уравнению, разбирается в задаче *353*. ГМТ обозначено голубым цветом на рис. 67.

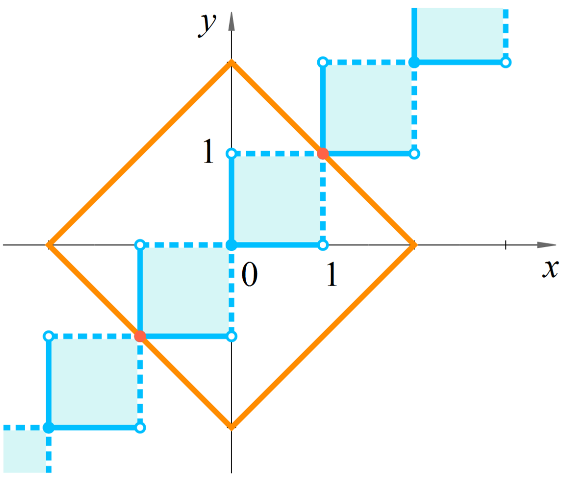


Рис. 67. ГМТ для $[x] = [y]$ и $|x| + |y| = 2$

Фигура, соответствующая второму уравнению, — квадрат оранжевого цвета, диагонали которого лежат на осях координат.

Задание свелось к ответу на вопрос: при каких значениях параметра a ГМТ обоих уравнений имеют лишь две общие точки?

Очевидно, что именно два пересечения возможны, когда оранжевый квадрат проходит через точки с координатами $(n,\ n)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, a — четное положительное число.

Ответ: $a = 2n$, где $n \in \mathbb{N}$.

19. Натуральные тождества с арифметическим корнем

Характерной особенностью доказываемых в данном разделе тождеств с натуральной переменной (натуральных тождеств) является наличие под знаками антье арифметического корня. При первом знакомстве эти тождества выглядят странновато — без антье некоторые тождества вообще не являются равенствами!

Приведем перечень таких тождеств (далее в разделе $n \in \mathbb{N}$):

358. $\left[\sqrt{n}\right] = \left[\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2}\right].$

359. $\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right] = \left[\dfrac{\sqrt{4n-3}+1}{2}\right].$

360. $\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n+\left[\sqrt{n}\right]}\right].$

361. $\left[\sqrt{2n}+\dfrac{1}{2}\right] = \left[\dfrac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right].$

362. $\left[\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right] = \left[\sqrt{4n^2+3}\right].$

363. $\left[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}\right] = \left[\sqrt{4n^2-1}\right].$

364. $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{8n+3}\right].$

365. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{9n+8}\right].$

366. $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}\right] = \left[\sqrt[3]{27n+26}\right].$

367. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\right] = \left[\sqrt{25n+49}\right].$

368. $\left[\sqrt{2n^2-1}\right]=\left[n\sqrt{2}\right]$.

369. $\left[\sqrt{3n+1}\right]=\left[\sqrt{3n+2}\right]$.

370. $\left[\sqrt{3n^2-2}\right]=\left[\sqrt{3n^2-1}\right]=\left[n\sqrt{3}\right]$.

371. $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$.

372. $\left[\sqrt{7n+2}\right]=\left[\sqrt{7n+3}\right]$,

$\left[\sqrt{7n+4}\right]=\left[\sqrt{7n+5}\right]=\left[\sqrt{7n+6}\right]$.

373. $\left[\sqrt{7n^2-3}\right]=\left[\sqrt{7n^2-2}\right]=\left[\sqrt{7n^2-1}\right]=\left[n\sqrt{7}\right]$.

374. $\left[\sqrt[3]{9n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{9n+2}\right]=\ldots=\left[\sqrt[3]{9n+7}\right]$.

375. $\left[\sqrt[3]{8n+a}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+a+1}\right]$.

376. $\left[\sqrt{16n+4}\right]=\left[\sqrt{16n+5}\right]=\ldots=\left[\sqrt{16n+4+a}\right]$.

377. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{16n+20}\right]$.

378. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

379. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$.

Завершает раздел параметрическая задача, обобщающая тождества, доказываемые в задаче *379*.

380. Определите, при каких значениях параметра $a\in\mathbb{R}$ утверждение $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+a}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$ будет тождеством при любых натуральных n.

19.1. Приемы, используемые при доказательстве

Нетрудно заметить, что тождества имеют подобный вид, значит, должны быть общие идеи доказательства.

Рассмотрим тождество вида

$$\left[S(n)\right] = \left[\sqrt[k]{an+b}\right], \quad \text{где } a,\, b \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}. \tag{19.1}$$

$S(n)$ обозначает сумму арифметических корней степени k. Впрочем $S(n)$ может быть и одиночным арифметическим корнем степени k.

Оказывается, для доказательства тождества (19.1) достаточно вывести неравенство

$$\sqrt[k]{an+b} \leqslant S(n) < \sqrt[k]{an+b+1}, \tag{19.2}$$

$$an+b \leqslant S^k(n) < an+b+1, \tag{19.3}$$

поскольку из (19.3) следует $\left[S^k(n)\right] = an+b$, далее выполняются равносильные преобразования

$$\sqrt[k]{\left[S^k(n)\right]} = \sqrt[k]{an+b}, \quad \left[\sqrt[k]{\left[S^k(n)\right]}\right] = \left[\sqrt[k]{an+b}\right], \quad \left[S(n)\right] = \left[\sqrt[k]{an+b}\right].$$

(Условия снятия знака вложенного антье обсуждается в п. 2.10.)

Насколько легко вывести неравенство (19.3)? В задачах *364* и *365* демонстрируется, как можно получить соответствующее неравенство с помощью оценок. При другом подходе используются известные неравенства (см. примечания к указанным задачам). Перечень использованных в книге неравенств приведен в Приложении А.

В задаче *378* значения выражений, стоящих под антье, слишком близко расположены друг к другу. В этом случае приходится прибегнуть к другому методу, для объяснения которого рассмотрим тождество вида

$$\left[f(n)\right] = \left[g(n)\right]. \tag{19.4}$$

Пусть для определенности $f(n) < g(n)$ при $n \in \mathbb{N}$, данное условие обычно имеет место и несложно обосновывается. Чтобы выполнялось равенство антье (19.4), необходимо доказать, что не существует такого натурального числа k, которое можно поместить между $f(n)$ и $g(n)$ (подробнее см. п. 2.11.), то есть для случая $f(n) < g(n)$:

$$\left[f(n)\right] = \left[g(n)\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \nexists\, k \in \mathbb{N}: \ f(n) < k \leqslant g(n). \tag{19.5}$$

Несложные тождества вида (19.4) могут быть доказаны с помощью еще одного приема. Пусть для любого натурального n найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что выполняется условие $k < f(n),\, g(n) < k+1$, тогда сразу следует $\big[f(n)\big] = \big[g(n)\big] = k$.

Рассмотрим интересный случай цепочки из нескольких натуральных тождеств с арифметическим корнем (задачи *368*-*373*). Пусть числа

$$f(n)+1,\ f(n)+2,\ \ldots,\ f(n)+i, \quad \text{где } f(n),\, i \in \mathbb{N},$$

не являются полными квадратами, а число $f(n)$ может быть полным квадратом, то есть

$$k^2 \leqslant f(n) < f(n)+1 < f(n)+2 < \ldots < f(n)+i < \big(k+1\big)^2.$$

Тогда

$$k \leqslant \sqrt{f(n)} < \sqrt{f(n)+1} < \sqrt{f(n)+2} < \ldots < \sqrt{f(n)+i} < k+1,$$

$$\left[\sqrt{f(n)}\right] = \left[\sqrt{f(n)+1}\right] = \left[\sqrt{f(n)+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{f(n)+i}\right]. \quad (19.6)$$

Понятно, что данный метод доказательства цепочки тождеств обобщается на случай полного куба и более высоких степеней (см. задачи *374*, *375*).

Отметим, что при выводе тождеств вида (19.6) часто используются математические факты из п. A.7. «Деление по модулю и остатки».

Упомянем один занимательный факт. При составлении тождеств, подобных приведенным в этом разделе, возможно использование компьютерной программы для проверки корректности равенства на достаточно большом массиве натуральных значений. Разумеется, такой подход допускает лишь формулировку соотношения, которое нельзя называть тождеством, по крайней мере, до тех пор, пока это соотношение не будет доказано одним из математических методов. В интернете встречаются сообщения о таких тождествах (например, см. задачу *367*) с предложением-просьбой их доказательства.

19.2. Задачи по теме раздела

358. Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Обозначим $L(n) = \sqrt{n}$ и $R(n) = \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2}$. Используя неравенство для среднего арифметического и среднего квадратичного, имеем, что для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$L(n) < R(n) < \sqrt{n+1}.$$

Если $\sqrt{n}$ — полный квадрат, то

$$L(n) = \left[R(n)\right].$$

Если же $\sqrt{n+1}$ является полным квадратом, то значения выражений $L(n)$ и $R(n)$ заключены между соседними целыми числами, поскольку

$$\sqrt{n+1} - 1 < L(n) < R(n) < \sqrt{n+1}.$$

В оставшихся случаях $L(n)$ и $R(n)$ также расположены между соседними целыми числами.

■

359. Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Несложно убедиться, что

$$\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2} < \sqrt{n}+\frac{1}{2}.$$

Пусть $\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right] = k$, тогда,

$$k < \sqrt{n}+\frac{1}{2} < k+1.$$

Число $\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}$ не может быть целым.

Левое неравенство сводится к виду $k^2-k+\dfrac{1}{4}<n$, или $k^2-k+1\leqslant n$, из которого с помощью равносильных преобразований получается

$$4k^2-4k+4\leqslant 4n,\quad 4k^2-4k+1\leqslant 4n-3,$$

$$2k-1\leqslant\sqrt{4n-3},\quad 2k\leqslant\sqrt{4n-3}+1,$$

$$k\leqslant\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}.$$

Таким образом, имеем условие выполнения тождества

$$k\leqslant\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}<\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

■

360. Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n+[\sqrt{n}]}\right]\quad\text{при } n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ $(k\in\mathbb{N})$. Тогда

$$k\leqslant\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1,$$

$$k^2-k+\frac{1}{4}\leqslant n<k^2+k+\frac{1}{4}.$$

Поскольку неравенство целочисленное, то

$$k^2-k+1\leqslant n\leqslant k^2+k. \qquad (360a)$$

Выражение $[\sqrt{n}]$ равно либо $k-1$, либо k. Запишем данное условие в виде неравенства

$$k-1\leqslant[\sqrt{n}]\leqslant k. \qquad (360б)$$

После сложения неравенств (360a) и (360$б$) получим

$$k^2\leqslant n+[\sqrt{n}]\leqslant k^2+2k.$$

Следовательно, $k\leqslant\sqrt{n+[\sqrt{n}]}<k+1$, или $\left[\sqrt{n+[\sqrt{n}]}\right]=k$. ■

361. Докажите тождество

$$\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right] \quad \text{при } n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\left[\dfrac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]=k$ $\left(k\in\mathbb{N}\right)$. Поскольку

$$\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}<\sqrt{2n}+\frac{1}{2},$$

то достаточно доказать, что $\sqrt{2n}+\dfrac{1}{2}<k+1$.

Освободимся от знака антье

$$k\leqslant\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}<k+1.$$

Преобразуем правое неравенство

$$\sqrt{8n-7}+1<2k+2,\quad 8n-7<4k^2+4k+1,$$

$$2n<k^2+k+2.$$

И в левой, и в правой частях целочисленного неравенства стоят выражения, принимающие четные значения, значит, $2n\leqslant k^2+k$. Тогда

$$2n<k^2+k+\frac{1}{4},\quad \sqrt{2n}<k+\frac{1}{2},\quad \sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

■

362. Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right]=\left[\sqrt{4n^2+3}\right] \quad \text{при } n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Поскольку при $n\in\mathbb{N}$

$$n-\frac{1}{2}<\sqrt{n^2-n+1}\leqslant n,$$

$$n+\frac{1}{2}<\sqrt{n^2+n+1}<n+1,$$

и левая, и правая части тождества равны $2n$

$$2n<\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}<2n+1,$$

$$2n < \sqrt{4n^2+3} < 2n+1,$$

следовательно, тождество доказано. ■

363. Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}\right] = \left[\sqrt{4n^2-1}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Тождество аналогичное предыдущему.

$$n-1 \leqslant \sqrt{n^2-n} < n - \frac{1}{2},$$

$$n < \sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}.$$

Значит, левая часть утверждения равна $2n-1$. Очевидно, что правая часть равна $\left[\sqrt{4n^2-1}\right] = 2n-1$. ■

364. Докажите тождество

$$\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{8n+3}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Согласно (19.2) выведем неравенство

$$8n+3 < \left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)^3 < 8n+4. \tag{364a}$$

После возведения в третью степень и приведения подобных членов получим

$$2n+\frac{2}{3} < \sqrt[3]{n^2(n+1)} + \sqrt[3]{n(n+1)^2} < 2n+1. \tag{364$б$}$$

Подберем оценки (выполняются при $n \geqslant 1$) для подкоренных выражений

$$\left(n+\frac{1}{9}\right)^3 < n^2(n+1) < \left(n+\frac{1}{3}\right)^3,$$

$$\left(n+\frac{5}{9}\right)^3 < n(n+1)^2 < \left(n+\frac{2}{3}\right)^3.$$

Очевидно, что из этих двух неравенств следует (364*б*), значит, тождество доказано.

Примечание. Левая и правая части неравенства (364*а*) выводятся с помощью известных неравенств (Б.2) и (Б.3′)

$$\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n+1}} \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)^3 \geqslant 8\sqrt{n^2+n} > 8n+3$$

$$\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}}{2} < \sqrt[3]{\frac{2n+1}{2}} \iff \left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)^3 > 8n+4.$$

365. (Иран/1996) Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{9n+8}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Обозначим $f(n)=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$. Согласно (19.2) выведем неравенство

$$9n+8 < f^2(n) < 9n+9. \qquad (365а)$$

Возведем в квадрат и приведем подобные члены

$$3n+\frac{5}{2} < \sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)} < 3n+3. \qquad (365б)$$

Для произведений $n(n+1)$, $n(n+2)$ и $(n+1)(n+2)$ можно подобрать верхние и нижние оценки (для $n \geqslant 1$), являющиеся полными квадратами:

$$\left(n+\frac{4}{10}\right)^2 < n(n+1) < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left(n+\frac{7}{10}\right)^2 < n(n+2) < (n+1)^2,$$

$$\left(n+\frac{14}{10}\right)^2 < (n+1)(n+2) < \left(n+\frac{3}{2}\right)^2.$$

Очевидно, что из этих трех неравенств следует (365*б*), значит, тождество доказано.

Примечание. Левая и правая части неравенства (365*а*) выводятся с помощью известных неравенств (Б.3) и (Б.2)

$$\frac{f(n)}{3} \geqslant \sqrt[3]{n(n+1)(n+2)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad f^2(n) \geqslant 9\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)} > 9\sqrt[3]{(n+8/9)^3} > 9n+8,$$

$$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2} < \sqrt{n+1} \iff f(n) < 3\sqrt{n+1} \iff f^2(n) < 9n+9. \qquad \blacksquare$$

366. (CMSNotes, задача P11, M. Bencze) Докажите тождество

$$\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}\right] = \left[\sqrt[3]{27n+26}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Несколько удобнее работать с тождеством

$$\left[\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{27n-1}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}, \qquad (366a)$$

которое идентично исходному («дополнительное» значение n не меняет сути дела), поэтому далее приводим доказательство тождества (366a). Для краткости обозначим сумму трех корней, стоящих под знаком антье слева, через $S(n)$.

Согласно (Б.3′), $\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{n+1} < 2\sqrt[3]{n}$. Тогда

$$S(n) < 3\sqrt[3]{n}, \quad S^3(n) < 27n.$$

Чтобы подогнать под условие (19.2), надо еще показать, что выполняется условие $\sqrt[3]{27n-1} < S(n)$, или $\sqrt[3]{27n-1} < 3\sqrt[3]{n} - \dfrac{1}{27\sqrt[3]{n^2}} < S(n)$, здесь применено неравенство Бернулли[15] (Б.9)

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x, \text{ где } x = -\frac{1}{27\sqrt[3]{n^2}}, \ \alpha = \frac{1}{3}.$$

Выделим в сумме $S(n)$ выражение $3\sqrt[3]{n}$

$$S(n) = 3\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) - \left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right).$$

Согласно (Б.7) для оценки $S(n)$ имеем следующую цепочку неравенств

$$\sqrt[3]{27n-1} < 3\sqrt[3]{n} - \underbrace{\frac{1}{27\sqrt[3]{n^2}} < 3\sqrt[3]{n} - \frac{4\sqrt[3]{n}}{9(n^2-1)}}_{\textit{выполняется при } n \geqslant 13} < S(n), \qquad (366б)$$

[15] Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1700-1782) — швейцарский математик, механик, физик.

которая выполняется ... не при всех n, а только при $n \geqslant 13$. Наверняка значение 13 — порог для n — можно уменьшить, например, если взять более точные оценки для входящих в $S(n)$ выражений. Но тогда выкладки могут значительно усложниться.

Что делать со значениями $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 12$? Проверять вручную выполнимость тождества? Проверка при $n = 1$ подтверждает, что тождество верно. К сожалению, при остальных значениях n нарастают вычислительные трудности.

Оказывается, при $n = 2,\ 3,\ \ldots,\ 12$ выполняется условие

$$k^3 < 27n - 9 < S^3(n) < 27n \leqslant (k+1)^3, \quad \text{где } k = 3,\ 4,\ 5,\ 6. \tag{366в}$$

Обоснуем данное утверждение перебором соответствующих значений. Неравенства (366*в*) выполняются:

при $k = 3$ для $n = 2$;

при $k = 4$ для $n = 3,\ 4$;

при $k = 5$ для $n = 5,\ 6,\ 7,\ 8$;

при $k = 6$ для $n = 9,\ 10,\ 11,\ 12$.

Таким образом, при $n = 1$ тождество доказано с помощью проверки, при $2 \leqslant n \leqslant 12$ показано, что значения выражений $\sqrt[3]{27n-1}$ и $S(n)$ лежат между соседними целыми числами, при $n \geqslant 13$ выведено неравенство $27n - 1 < S^3(n) < 27n$. ■

367. Докажите тождество для $n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}\right] = \left[\sqrt{25n+49}\right].$$

Доказательство. Хотя тождество выглядит иначе по сравнению с тождеством из задачи *366*, по способу доказательства эти тождества аналогичны.

Докажем тождество

$$\left[\sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{25n-1}\right]$$

при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$. Обозначим через $S(n)$ сумму, состоящую из пяти квадратных корней. Несложно убедиться в том, что $S(n) < 5\sqrt{n}$.

Представим $S(n)$ в виде суммы $5\sqrt{n} + \alpha$, где

$$\alpha = \left(\sqrt{n-2} - \sqrt{n}\right) + \left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right) + \\ + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right).$$

Согласно (Б.5) оценка α снизу при $n \geqslant 3$

$$\alpha > -\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-4\right)}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-1\right)}} > -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-4\right)}}.$$

Ниже приводится условие (19.2), но лишь при $n \geqslant 13$:

$$\underbrace{\sqrt{25n-1} \ < \ 5\sqrt{n}-\frac{1}{10\sqrt{n}}}_{\textit{нерав-во Бернулли (Б.9)}} \overbrace{\ < \ 5\sqrt{n}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-4\right)}}}^{\textit{выполняется при } n \geqslant 13} \ < S(n) < \sqrt{25n}.$$

Не составляет труда убедиться в том, что $\left[\sqrt{25n-4}\right] = \left[\sqrt{25n-1}\right]$ при $n < 13$. Благодаря этому условию, при $4 \leqslant n \leqslant 12$ имеем

$$\underbrace{\sqrt{25n-4} \ < \ 5\sqrt{n}-\frac{2}{5\sqrt{n}}}_{\textit{нерав-во Бернулли (Б.9)}} \overbrace{\ < \ 5\sqrt{n}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-4\right)}}}^{\textit{выполняется при } 4 \leqslant n \leqslant 12} \ < S(n) < \sqrt{25n}.$$

Конечно, последнее значение $n = 3$ можно проверить вручную (без калькулятора), а можно и подобрать равенство $\left[\sqrt{25n-10}\right] = \left[\sqrt{25n-1}\right]$, чтобы показать условие (19.2):

$$\underbrace{\sqrt{25n-10} \ < \ 5\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\textit{нерав-во Бернулли (Б.9)}} \overbrace{\ < \ 5\sqrt{n}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-4\right)}}}^{\textit{выполняется при } n = 3} \ < S(n) < \sqrt{25n}.$$

Итак, продемонстрировано, что при $n \geqslant 3$ выводится условие (19.2), следовательно, тождество доказано. ■

368. Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$
$$\left[\sqrt{2n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{2}\right].$$

Доказательство. Число $2n^2$ не является полным квадратом, тогда
$$k^2 \leqslant 2n^2 - 1 < 2n^2 < \left(k+1\right)^2,$$
$$k \leqslant \sqrt{2n^2-1} < n\sqrt{2} < k+1,$$
$$\left[\sqrt{2n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{2}\right].$$
■

369. Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$
$$\left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right].$$

Доказательство. Число $3n+2$ не является полным квадратом, поскольку $k^2 \equiv \{0,\, 1\} \pmod 3$, следовательно,
$$k^2 \leqslant 3n+1 < 3n+2 < \left(k+1\right)^2,$$
$$k \leqslant \sqrt{3n+1} < \sqrt{3n+2} < k+1,$$
$$\left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right].$$
■

370. Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$
$$\left[\sqrt{3n^2-2}\right] = \left[\sqrt{3n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{3}\right].$$

Доказательство. Число $3n^2$ не является полным квадратом. Воспользуемся идеей доказательства из задачи *369*:
$$k^2 \leqslant 3n^2 - 2 < 3n^2 - 1 < 3n^2 < \left(k+1\right)^2,$$
$$k \leqslant \sqrt{3n^2-2} < \sqrt{3n^2-1} < n\sqrt{3} < k+1,$$
$$\left[\sqrt{3n^2-2}\right] = \left[\sqrt{3n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{3}\right].$$
■

371. Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right].$$

См. аналогичное доказательство — задача *369*.
Указание. $k^2 \equiv \{0,\ 1\} \pmod 4$.

372. Докажите тождества при $n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sqrt{7n+2}\right] = \left[\sqrt{7n+3}\right],$$

$$\left[\sqrt{7n+4}\right] = \left[\sqrt{7n+5}\right] = \left[\sqrt{7n+6}\right].$$

См. аналогичное доказательство — задача *369*.
Указание. $k^2 \equiv \{0,\ 1,\ 2,\ 4\} \pmod 7$.

373. Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sqrt{7n^2-3}\right] = \left[\sqrt{7n^2-2}\right] = \left[\sqrt{7n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{7}\right].$$

См. аналогичное доказательство — задача *370*.
Указание. $k^2 \equiv \{0,\ 1,\ 2,\ 4\} \pmod 7$.

374. Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sqrt[3]{9n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{9n+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt[3]{9n+7}\right].$$

См. аналогичное доказательство — задача *369*.
Указание. $k^3 \equiv \{0,\ 1,\ 8\} \pmod 9$.

375. Для любых натуральных значений n определите такие натуральные значения a, при которых выполняется тождество

$$\left[\sqrt[3]{8n+a}\right] = \left[\sqrt[3]{8n+a+1}\right].$$

Указание. $k^3 \equiv \{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\} \pmod 8$.
Ответ: $a \equiv \{1,\ 3,\ 5\} \pmod 8$.

376. Для любых натуральных значений n определите такие натуральные значения a, при которых выполняется тождество

$$\left[\sqrt{16n+4}\right] = \left[\sqrt{16n+5}\right] = \ldots = \left[\sqrt{16n+4+a}\right].$$

Решение. Несложно показать, что числа $16n+4$ и $16n+9$ являются полными квадратами при бесконечном количестве $n \in \mathbb{N}$ (докажите самостоятельно). Приведем обоснование того, что числа $\sqrt{16n+4+a}$ при $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ не являются полными квадратами.

Пусть $16n+5 = k^2$, где k — некоторое натуральное число. Понятно, что k — нечетное. Тогда запишем иначе $16n+5 = \left(2m+1\right)^2$, где $m \in \mathbb{N}$. После упрощений получим $4n+1 = m^2+m$. Слева нечетное число, справа четное. Следовательно, число $16n+5$ ни при каком натуральном n не будет полным квадратом.

При рассмотрении случаев $a = 2,\ 3,\ 4$ рекомендуем воспользоваться известным фактом $k^2 \equiv \{0,\ 1\} \pmod 4$, $k \in \mathbb{N}$. Например, $16n+6 = 4\left(4n+1\right)+2 \equiv 2 \pmod 4$, значит, число $16n+6$ не является полным квадратом. Оставшиеся случаи разберите самостоятельно.

Поскольку $\sqrt{16n+4}$ и $\sqrt{16n+9}$ — целые числа (но не одновременно) при определенных n и

$$\sqrt{16n+4} < \sqrt{16n+5} < \ldots < \sqrt{16n+8} < \sqrt{16n+9},$$

то при любом натуральном n выполняются соотношения

$$\left[\sqrt{16n+4}\right] = \left[\sqrt{16n+5}\right] = \ldots = \left[\sqrt{16n+8}\right] \leqslant \left[\sqrt{16n+9}\right],$$

причем знак сравнения «$\leqslant$» обращается в «$<$», когда число $16n+9$ становится полным квадратом.

Ответ: $a = 4$.

377. (Югославия/1990) Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right] = \left[\sqrt{16n+20}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Перейдем к более удобному тождеству $(n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2})$

$$\left[\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{16n+4}\right]. \qquad (377a)$$

Легко убедиться, что при $n = 2$ (как и при $n = 1$, но это не требуется) данное тождество выполняется.

Согласно подходу (19.2) и результату задачи *376*, для доказательства тождества (377*а*) достаточно доказать неравенство

$$\sqrt{16n+4} \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \leqslant \sqrt{16n+8}, \qquad (377б)$$

вывод которого основан на неравенствах о средних, см. п. Б.2.

Для левого неравенства (377*б*) применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \geqslant 4\sqrt[8]{n\big(n^2-1\big)\big(n+2\big)}.$$

Поскольку

$$n\big(n^2-1\big)\big(n+2\big) \geqslant \left(n+\frac{1}{4}\right)^4 \quad \text{при } n \geqslant 3$$

(докажите самостоятельно), левое неравенство доказано.

Для вывода правого неравенства (377*б*) воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \leqslant 4\sqrt{n+\frac{1}{2}} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Итак, неравенство (377*б*) выполняется при $n \geqslant 3$, следовательно, выполняется и тождество (377*а*) при $n \geqslant 3$. При $n = 2$ тождество проверяется подстановкой. ■

378. (Putnam/1948) [25, с. 26] Докажите тождество

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Несложно показать, что

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда согласно свойству (2.8)

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] \leqslant \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Далее действуем от противного. Пусть последнее неравенство строгое, значит, есть такое натуральное число k, для которого выполняется двойное неравенство

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k \leqslant \sqrt{4n+2}.$$

После возведения в квадрат и приведения подобных членов получим

$$2\sqrt{n(n+1)} < k^2 - 2n - 1 \leqslant 2n + 1.$$

Правое неравенство $k^2 \leqslant 4n+2$ также будет строгим, поскольку $4n+2$ никогда не будет полным квадратом, ведь $k^2 \equiv 0 \pmod 4$ или $k^2 \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно,

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k < \sqrt{4n+2}.$$

Еще одно возведение в квадрат приводит к неравенству, с помощью которого получаем противоречие

$$4n^2 + 4n < (k^2 - 2n - 1)^2 < 4n^2 + 4n + 1,$$

так как левое и правое выражения в неравенстве — соседние натуральные числа, между которыми поместили еще одно натуральное число. Полученное противоречие доказывает тождество. ■

379. (Канада/1987) Докажите тождество при $n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right].$$

Указание. Воспользуйтесь результатами задач *371* и *378*.

380. (CRUX, задача 1650, I. Bluskov) Определите, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ утверждение

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+a}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] \tag{380a}$$

будет тождеством при любых натуральных n.

Решение. Сначала отбросим очевидные значения параметра a, при которых утверждение (380a) не выполняется.

Если $\boldsymbol{a} \leqslant \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, то значение $n = 2$ является контрпримером, опровергающим знак «=» в утверждении (380a)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2+a} \leqslant \sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{2}} < 3 = \sqrt{4 \cdot 2 + 1},$$

следовательно, $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+a}\right] < \left[\sqrt{4n+1}\right]$ при $a \leqslant \dfrac{1}{2}$ и $n = 2$.

При $\boldsymbol{a > 2}$ также существуют такие значения n, при которых утверждение (380a) становится неравенством (с другим знаком сравнения). Обозначим $a = 2 + b$, где $b > 0$, тогда

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+2+b} > \underbrace{2\sqrt[4]{n^2+2n+nb} > 2\sqrt{n+1}}_{\text{при } nb > 1},$$

следовательно, $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+a}\right] > 2k = \sqrt{4n+4} = \left[\sqrt{4n+4}\right] > \left[\sqrt{4n+1}\right]$ при $a > 2$, $n > \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a-2}$ и $n + 1 = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$.

Теперь запишем в ответ очевидные значения параметра a, при которых утверждение (380a) является тождеством при любом натуральном n.

При $\boldsymbol{1 \leqslant a \leqslant 2}$ имеется следующая цепочка неравенств

$$\underbrace{\left[\sqrt{4n+1}\right] \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1}}_{\textit{см. задачу 379}} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+a} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1},$$

следовательно, $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+a}\right)^2 \leqslant 4n+3$, $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+a}\right] \leqslant \left[\sqrt{4n+3}\right]$. Воспользуемся еще раз задачей *379*, в которой доказывается, в частности, что $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right]$, значит:

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+a}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] \quad \text{при } 1 \leqslant a \leqslant 2 \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

Остался интервал $\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < a < 1}$.

При $\boldsymbol{n = 1}$ утверждение (380a) — тождество (хотя и простейшее), поскольку имеет вид $\left[1 + \sqrt{1+a}\right] = 2 = \left[\sqrt{4 \cdot 1 + 1}\right]$, и выполняется для всех a из указанного интервала.

При $\boldsymbol{n = 2}$ утверждение (380a) также принимает простую форму $\left[2 + \sqrt{2+a}\right] = 3 = \left[\sqrt{4 \cdot 2 + 1}\right]$, однако будет тождеством лишь при $\boldsymbol{a \geqslant 9 - 6\sqrt{2}}$ (данное условие является решением неравенства $3 \leqslant 2 + \sqrt{2+a} < 4$), причем $\dfrac{1}{2} < 9 - 6\sqrt{2} < 1$ — интервал параметра a сузился.

Заключительный шаг: при $\boldsymbol{n \geqslant 3}$ утверждение (380a) будет тождеством, поскольку $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+9-6\sqrt{2}} < \sqrt{4n+3}$ при $a \geqslant 9-6\sqrt{2}$. В этом несложно убедиться, доказав левое неравенство. Правое неравенство обосновано выше. Таким образом, верно тождество

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+a}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] \quad \text{при } 9-6\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1 \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: $9-6\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2.$

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

20. Числовые последовательности

В данном разделе будем предполагать, что *числовая последовательность* — это функция, заданная на множестве натуральных чисел и принимающая действительные значения. Обозначается последовательность чисел $y_n = f(n)$ похожим на обозначение мантиссы образом — $\{y_n\}$ или реже с индексами $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, однако путаницы не возникает, поскольку все понятно из контекста.

Задать числовую последовательность можно различными способами, основными из которых являются: аналитический, рекуррентный, вербальный (описательный) и явным перечислением первых нескольких членов.

Вербальный способ задания описывает словами принцип формирования последовательности, например, «последовательность треугольных чисел», о треугольных числах см. п. А.12.

При *аналитическом* способе задания имеется формула n-го члена, например, для последовательности треугольных чисел — $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Рекуррентный способ задания в общем случае состоит в том, что определена формула n-го члена последовательности через предыдущие члены. Чтобы рекуррентная формула «заработала», первые члены последовательности задаются конкретными значениями, например, последовательность чисел Фибоначчи[16]: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \in \mathbb{N})$, см. п. А.14.

Задание последовательности *перечислением первых нескольких членов* встречается в задачах довольно часто. Обычно по первым 10-15 членам несложно судить о правилах формирования последовательности, и получается, что начальный фрагмент как образец построения последовательности нагляднее и понятнее вербального описания.

Отметим, что в школьном курсе математики достаточное время уделяется изучению арифметической и геометрической прогрессий (см.

[16] Фибоначчи (псевдоним), Л. Пизанский (L. Pisano, приблизительно 1170-1250) — итальянский математик, первый крупный математик средневековой Европы.

задачи *250* и *251*).

Часть задач попала в данный раздел по эстетическом соображениям. Благодаря свойствам антье и мантиссы удается выразить лаконично и изящно в формуле n-го члена или рекуррентной формуле довольно необычные последовательности, например, «последовательность натуральных чисел за исключением полных квадратов» (см. задачу *396*).

Другой тип задач — это задачи на исследование как традиционных свойств числовых последовательностей (периодичность, возрастание-убывание, ограниченность), так и на доказательство оригинальных свойств, например, на количество повторений конкретных значений или кратность элементов.

Тема «Спектр действительного числа (последовательности Битти)» вынесена в следующий раздел в связи с тем, что задачи этой тематики исследуют в основном проблему разбиения множества натуральных чисел.

20.1. Целочисленные последовательности

Представим перечень числовых последовательностей, которым посвящены задачи в данном пункте $(n \in \mathbb{N})$:

381. $F_n = \left[\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right]$ — числа Фибоначчи, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

382. $\{1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 40, 81, \ldots\}$.

383. $\{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — полный квадрат,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

384. $\{1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ \ldots\} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — треугольное число,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

385. $\{\underbrace{1, \ 2,}_{1}\!\!\underbrace{\ \ 3,}_{1}\!\!\underbrace{\ \ 5,}_{2}\!\!\underbrace{\ \ 7}_{2}, \ 10, \ 13, \ 17, \ \underbrace{21, \ 26}_{5}\!\!\underbrace{, \ 31}_{5}, \ 37, \ldots\}$.

386. $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{m\ \text{элементов}} \ \ldots\}$.

387. $\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, \ldots, \ \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{m+1\ \text{элементов}} \ \ldots\}$.

388. $\{1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3 \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{2m \text{ элементов}} \ldots\}.$

389. $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{m \text{ элементов}} \ldots\}.$

390. $\{1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{F_m \text{ элементов}} \ldots\}.$

391. $\{1, \underbrace{2, 4}_{2\text{-я}}, \underbrace{5, 7, 9}_{3\text{-я гр.}}, \underbrace{10, 12, 14, 16}_{4\text{-я группа}}, \ldots,$

$$\ldots, a_{k,1} - 1, \underbrace{a_{k,1},\ a_{k,1} + 2,\ \ldots,\ a_{k,k}}_{k\text{-я группа}}, a_{k,k} + 1, \ldots\},$$

где $a_{k,i}$ — i-й элемент в k-й группе ($a_{k,i+1} = a_{k,i} + 2$).

393. $a_{2n} = 2n - a_n,\ a_{2n+1} = 2n + 1 - a_n,\ a_1 = 1.$

394. $a_{n+1} = 3a_n + \left[a_n\sqrt{5}\right], \quad a_1 = 1.$

395. $a_{n+1} = \left[\sqrt[3]{a_n + n}\right]^3, \quad a_1 = 0.$

396. $a_n = n + \left[\sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right].$

397. $a_n = n + \left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right].$

В задачах 383-395 требуется вывести формулу n-го члена последовательности, в которой аргументом является только n, причем формула должна быть единой, то есть без всяких «при ...» или «если ...». В задачах 396-397 ставится обратный вопрос — по формуле n-го члена дать описание последовательности.

Опишем схематично метод вывода формулы n-го члена последовательности, заданной вербально или явным перечислением первых нескольких членов. Данный метод применяется в задачах 386-395.

На первом шаге выполняется анализ последовательности, вводятся переменные, характерные для конкретной последовательности. С помощью этих переменных выражается n-й член последовательности $\{a_n\}$. Например, в простейшем случае используется одна переменная m, значение которой равно n-му члену последовательности, то есть $m = a_n$.

Затем составляется двойное неравенство для индекса n — оценки номера элемента a_n через дополнительно введенные переменные. Продолжая пример, пусть двойное неравенство будет вида $l(m) \leqslant n < r(m)$, где $l(m)$ и $r(m)$ — левая и правая оценки.

На заключительном этапе выполняются преобразования двойного неравенства, чтобы выразить m через n. Поскольку тема задач — «Антье», скорее всего, такой оценкой будет $m \leqslant f(n) < m+1$, поскольку из этой оценки следует, что $a_n = [f(n)]$ (в примере было сделано предположение, что $m = a_n$).

381. Докажите, что числа Фибоначчи (см. п. А.14.) вычисляются по формуле $F_n = \left[\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right]$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Бине[17]

$$F_n = \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{где } \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{\widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$ при $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2},$$

$$F_n - \frac{1}{2} < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} < F_n + \frac{1}{2},$$

$$F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1.$$

Следовательно, $F_n = \left[\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right]$. ■

382. Неубывающая числовая последовательность состоит из всех натуральных чисел, в троичном представлении которых имеются только цифры 0 и 1. Выведите рекуррентную формулу n-го элемента этой последовательности.

[17] Ж. Ф. М. Бине (J. Ph. M. Binet, 1786-1856) — французский математик, механик и астроном. Однако формулу Бине получил гораздо раньше А. Муавр (A. Moivre, 1667-1754) — английский математик французского происхождения.

Решение. Выпишем несколько первых элементов этой последовательности $\{a_n\} = \big\{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ \ldots\big\}$, или

$$\{a_n\} = \big\{1_3,\ (\overline{10})_3,\ (\overline{11})_3,\ (\overline{100})_3,\ (\overline{101})_3,\ (\overline{110})_3,\ (\overline{111})_3,\ \ldots\big\}.$$

Из троичного представления элементов последовательности можно догадаться, что $a_{2n} = 3a_n$ и $a_{2n+1} = 3a_n + 1$. Остается свести эти две формулы в одну.

Ответ: $a_0 = 1,\ a_n = 3a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + 2\left\{\dfrac{n}{2}\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

383. Задана числовая последовательность, состоящая из 0 и 1:

$$\{a_n\} = \big\{1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\big\} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — полный квадрат,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Идея решения основана на следующем свойстве

$$\{\sqrt{n}\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists k \in \mathbb{N}:\ n = k^2, \\ \alpha, & \text{иначе } (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

Для условия, когда n — полный квадрат, находится такое решение

$$1 - \{\sqrt{n}\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists k \in \mathbb{N}:\ n = k^2, \\ \alpha, & \text{иначе } (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

(Значение α другое, нежели в предыдущей формуле, но сути решения такое переобозначение не меняет.)

На заключительном шаге с помощью антье «обнуляем» α, не трогая целые значения.

Ответ: $a_n = \big[1 - \{\sqrt{n}\}\big],\ n \in \mathbb{N}$.

Примечание. Для числовой последовательности из условия задачи *383* существуют и другие формулы n-го члена, см. задачу *503*:

$$b_n = \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right],$$

$$c_n = \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{4n-1}\right].$$

По аналогии с формулой c_n составляется и более простая формула

$$d_n = \left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1}\right].$$

Докажите самостоятельно, что

$$\{d_n\} = \{a_n\} = \big\{1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, \ldots\big\}.$$

384. Задана числовая последовательность, состоящая из 0 и 1:

$$\{a_n\} = \big\{1,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, \ldots\big\} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — треугольное число,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Воспользуемся формулой (см. п. А.12.) порядкового номера k треугольного числа $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$: $k = \dfrac{\sqrt{8T_k+1}-1}{2}$, чтобы по аналогии с задачей *383* вывести следующее выражение

$$1 - \{k\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists k \in \mathbb{N}:\ n = \dfrac{k(k+1)}{2}, \\ \alpha, & \text{иначе } (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

Ответ: $a_n = \left[1 - \left\{\dfrac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right\}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

385. Имеется неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой элементы m-ой пары больше на m соответствующих предыдущих элементов:

$$\{a_n\} = \{1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 7,\, 10,\, 13,\, 17,\, 21,\, 26,\, 31,\, 37,\, \ldots\},$$

$$a_{2m} - a_{2m-1} = a_{2m+1} - a_{2m} = m,\ \ m \in \mathbb{N}.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Нетрудно вывести рекуррентную формулу для последовательности $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + \left[\frac{n+1}{2}\right],\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + a_{n-1} = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + a_1.$$

Рассмотрим два варианта в зависимости от четности n. Пусть сначала **n — нечетное число**. В этом случае

$$a_n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) + \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) + \ldots + 1 + 1 + a_1 =$$

$$= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} + 1 = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$$

Пусть теперь **n — четное число**. Тогда

$$a_n = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \ldots + 1 + 1 + a_1 =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} + 1 = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$$

Ответ: Рекуррентная формула $a_1 = 1,\; a_{n+1} = a_n + \left[\frac{n+1}{2}\right],\; n \in \mathbb{N}$. Формула n-го члена $a_n = 1 + \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] = 1 + \left[\frac{n^2}{4}\right]$ (см. задачу 22).

386. [8, с. 130] Имеется неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое число m встречается ровно m раз:

$$\{a_n\} = \bigl\{1,\, 2,\, 2,\, 3,\, 3,\, 3,\, \ldots,\, \underbrace{m,\, m,\, \ldots,\, m,}_{m\ \text{элементов}}\, \ldots\bigr\}.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Пусть $a_n = m$, таких элементов последовательности m штук. Перед данной группой элементов находятся $\frac{m(m-1)}{2}$ элементов, а вместе с элементами группы — $\frac{m(m+1)}{2}$ элементов. Значит, имеет место двойное неравенство

$$\frac{m(m-1)}{2} < n \leqslant \frac{m(m+1)}{2},$$

$$m^2 - m + \frac{1}{4} < 2n < m^2 + m + \frac{1}{4},$$

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \frac{1}{2},$$

$$m < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < m + 1.$$

Следовательно, $m = a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно тождеству, доказанному в задаче *361*, $a_n = \left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

387. Имеется неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое число m встречается ровно $m+1$ раз:

$$\{a_n\} = \bigl\{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots,\ \underbrace{m,\ m,\ \ldots,\ m,}_{m+1 \text{ элементов}}\ \ldots\bigr\}.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Идея вывода почти повторяет доказательство задачи *386*, поэтому представим решение без комментариев:

$$\bigl(2+3+\ldots+m\bigr)+1 \leqslant n < \bigl(2+3+\ldots+m+(m+1)\bigr)+1,$$

$$\frac{m(m+1)}{2} \leqslant n < \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \qquad (387a)$$

Данное неравенство имеет решение

$$\frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} < m \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2},$$

причем несложно показать, что правый конец полуинтервала меньше $m+1$. Тогда

$$m \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < m+1, \quad \text{или} \quad m = \left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right].$$

Ответ: $a_n = \left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

Примечание. Неравенство $(387a)$ можно представить в виде

$$T_m \leqslant n < T_{m+1}, \quad \text{где } T_m \text{ — } m\text{-ое треугольное число (см. п. A.12.)},$$

то есть m — индекс наибольшего треугольного числа, не превосходящего n.

388. Имеется неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое число m встречается ровно $2m$ раз:

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3 \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{2m \text{ элементов}} \ldots\}.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Идея вывода почти повторяет доказательство задачи *386*, поэтому представим решение без комментариев:

$$2+4+\ldots+2(m-1)+1 \leqslant \quad n \quad \leqslant 2+4+\ldots+2m,$$

$$2\cdot\frac{m(m-1)}{2}+1 \leqslant \quad n \quad \leqslant 2\cdot\frac{m(m+1)}{2},$$

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 < m^2-m+1 \leqslant \quad n \quad \leqslant m^2+m < \left(m+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$m-\frac{1}{2} < \sqrt{n} < m+\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $m = a_n = \left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a_n = \left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

389. Имеется неубывающая последовательность нечетных положительных чисел, в которой каждое нечетное число m встречается ровно m раз:

$$\{a_n\} = \{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m,}_{m \text{ элементов}} \ldots\}.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Идея вывода аналогична доказательству, приведенному в задаче *386*. Пусть $a_n = m = 2k+1$, тогда серия элементов, равных m, начинается с номера k^2+1 и заканчивается номером $(k+1)^2$:

$$k^2+1 \leqslant n \leqslant (k+1)^2,$$

$$k^2 \leqslant n-1 < (k+1)^2,$$

$$k \leqslant \sqrt{n-1} < k+1,$$

$$k = \left[\sqrt{n-1}\right],$$

$$2k+1 = a_n = 2\left[\sqrt{n-2}\right]+1.$$

Ответ: $a_n = 2\left[\sqrt{n-1}\right]+1$, $n \in \mathbb{N}$.

390. Задана неубывающая числовая последовательность, в которой каждое натуральное число m повторяется F_m раз, где F_m — m-ое число Фибоначчи:

$$\{a_n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots,\ \underbrace{m,\ m,\ \ldots,\ m,}_{F_m\ \textit{элементов}}\ \ldots\}.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Пусть

$$a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+F_m-1} = m.$$

Тогда

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{m-1} < n,$$

$$n + F_m - 1 \leqslant F_1 + F_2 + \ldots + F_m.$$

Или для $k = n,\ n+1,\ \ldots,\ n + F_m - 1$ $(a_k = m)$

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{m-1} < k \leqslant F_1 + F_2 + \ldots + F_m.$$

Воспользуемся тождеством $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1:$

$$F_{m+1} - 1 < k \leqslant F_{m+2} - 1,$$

$$F_{m+1} < k + 1 \leqslant F_{m+2}.$$

В задаче *381* доказывается, что

$$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right],\ \text{где}\ \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Значит,

$$\left[\frac{\varphi^{m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] < k + 1 \leqslant \left[\frac{\varphi^{m+2}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right].$$

Перейдем к неравенству-следствию

$$\frac{\varphi^{m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < k + 1 < \frac{\varphi^{m+2}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}.$$

Дальнейшее приведем без пояснений

$$\varphi^{m+1} < \sqrt{5}\left(k + \frac{1}{2}\right) < \varphi^{m+2},$$

$$m + 1 < \log_\varphi\left(\sqrt{5}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) < m + 2,$$

$$m < \log_\varphi \left(\sqrt{5}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) - 1 < m+1,$$

$$m = a_k = \left[\log_\varphi \left(\sqrt{5}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right] - 1.$$

Ответ: $a_n = \left[\log_\varphi \left(\sqrt{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\right] - 1.$

391. (ЮАР/2005) Возрастающая числовая последовательность

$$\{a_n\} = \{1,\ \underbrace{2,\ 4},\ \underbrace{5,\ 7,\ 9},\ \underbrace{10,\ 12,\ 14,\ 16},\ \ldots\}$$

составлена из натуральных чисел, разделяемых на группы $\{1\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{5,\ 7,\ 9\}$, $\{10,\ 12,\ 14,\ 16\}$ и т.д. Группирование чисел подчиняется следующим правилам: каждая следующая группа длиннее предыдущей на один элемент, первый элемент любой группы на 1 больше предыдущего элемента последовательности, разность между соседними элементами любой группы равна 2.

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Пронумеруем группы, которые образуют последовательность $\{a_n\}$. Из условия задачи следует, что в k-й группе k элементов последовательности. Последний элемент k-й группы имеет номер $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, а первый элемент — $\dfrac{k(k-1)}{2}+1$.

Обозначим двойным индексом $a_{k,m}$ элемент последовательности, который входит в k-ю группу на m-м месте, $1 \leqslant m \leqslant k$ — согласно условию задачи.

Заметим, что последние элементы в группах, приведенных в условии задачи, — полные квадраты. Докажем, что $a_{k,k} = k^2$. Воспользуемся методом математической индукции

$$a_{1,1} = 1,$$

$$a_{k+1,k+1} = a_{k,k} + 1 + 2k = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Тогда известны значения всех элементов k-й группы

$$a_{k,1} = k^2 - 2k + 2, \quad a_{k,m} = k^2 - 2k + 2m.$$

Пусть $a_n = a_{k,m}$, то есть n-й элемент находится в k-й группе на m-м месте. Индекс n равен индексу первого элемента k-й группы плюс

$m-1$, то есть $n = \dfrac{k(k-1)}{2} + m$. Тогда

$$a_n = a_{k,m} = k^2 - 2k + 2m = 2\left(\frac{k^2-k}{2} + m\right) - k = 2n - k.$$

Осталось выразить k через n.

Принадлежность n-го элемента k-й группе выражается условием

$$\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leqslant n < \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

Выполните самостоятельно несложные равносильные преобразования, чтобы получить неравенство

$$k \leqslant \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} < k+1,$$

что согласно свойству антье (2.10) означает $k = \left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

Ответ: $a_n = 2n - \left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно тождеству, доказанному в задаче *361*, $a_n = 2n - \left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

Примечание. Задача *391* известна в другой формулировке, см. следующую задачу.

392. (США/1999, Gerald Heuer) [27, с. 152] Возрастающая последовательность натуральных чисел

$$\{a_n\} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \ldots\}$$

составлена следующим образом: берутся наименьшие числа, сначала одно нечетное число $(a_1 = 1)$, затем два четных числа $(a_2 = 2,\ a_3 = 4)$, далее три нечетных числа $(a_4 = 5,\ a_5 = 7,\ a_6 = 9)$ и т.д. Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Там же [27, с. 152] приводится красивая идея. Предложенная последовательность и последовательность из задачи *386* образуют при почленном суммировании возрастающую последовательность всех четных чисел. Решение становится короче, но для этого все-таки надо «поднять» эту красивую идею.

■

393. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ задана следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = 2n - a_n, \quad a_{2n+1} = 2n + 1 - a_n.$$

Выведите формулу n-го элемента этой последовательности.

Решение. Формулы для четного и нечетного элементов последовательности сворачиваются в одну формулу

$$a_n = n - a_{[n/2]}.$$

Дальнейшие действия не составляют сложности:

$$a_n = n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - a_{[n/4]}\right) =$$
$$= n - \left[\frac{n}{2}\right] + \left(\left[\frac{n}{4}\right] - a_{[n/8]}\right) = \ldots$$
$$= n - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right] + \ldots$$

Использовалось свойство антье (2.20).

См. также задачу *135*.

Ответ: $a_n = n + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\dfrac{n}{2k}\right].$

394. (Putnam/2007) Числовая последовательность $\{1,\ 5,\ 26,\ 136,\ 712,\ \ldots\}$ задается рекуррентным способом:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + \left[a_n\sqrt{5}\right] \quad \text{при } n \in \mathbb{N}. \qquad (394a)$$

Выведите формулу n-го члена последовательности. (Формулировка задания незначительно изменена.)

Решение. Заметим, что в задании последовательности $\{a_n\}$ встречается число $3 + \sqrt{5} = 2\varphi^2 = 2(\varphi + 1)$

$$a_{n+1} = \left[a_n(3 + \sqrt{5})\right] = \left[2\varphi^2 a_n\right]. \qquad (394б)$$

Если у вас закрались подозрения, что тут будут задействованы числа Фибоначчи, то интуиция вас не подвела!

Еще зададимся вопросом. В условии задачи приводятся пять первых членов последовательности. Зачем? Не исключено, что нам намекают поискать закономерность, которая может иметь место при вычислении первых членов последовательности $\{a_n\}$.

Попробуем:

$$a_2 = 5 = F_5,$$
$$a_3 = 2 \cdot 13 = 2F_7,$$
$$a_4 = 4 \cdot 34 = 4F_9.$$

Предположим, что

$$a_n = 2^{n-2} F_{2n+1} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}. \tag{394\textit{в}}$$

Несложно убедиться, что $a_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = \dfrac{1}{2} \cdot F_3$ и $a_5 = 8 \cdot 89 = 8 \cdot F_{11}$. Но формулу (394*в*) еще предстоит доказать для любого натурального n.

Рекуррентная формула (394*а*) имеет двойника — другую рекуррентную формулу, но уже без антье. Ничего неожиданного, в (394*в*) присутствуют числа Фибоначчи.

$$a_{n+1} = 3a_n + \left[a_n\sqrt{5}\right] = 6a_n + \left[-a_n(3-\sqrt{5})\right] =$$
$$= 6a_n + \left[-\frac{2a_n}{\varphi^2}\right] = 6a_n + \left[-\frac{2\left[2\varphi^2 a_{n-1}\right]}{\varphi^2}\right] =$$
$$= 6a_n + \left[-\frac{4\varphi^2 a_{n-1} - 2\left\{2\varphi^2 a_{n-1}\right\}}{\varphi^2}\right] =$$
$$= 6a_n - 4a_{n-1} + \left[\frac{2\left\{2\varphi^2 a_{n-1}\right\}}{\varphi^2}\right] = 6a_n - 4a_{n-1}$$

(под знаком антье стоит положительное выражение, меньшее 1).

Таким образом,

$$a_{n+1} = 6a_n - 4a_{n-1}. \tag{394\textit{г}}$$

Доказательство формулы (394*в*) с помощью формулы (394*г*) методом математической индукции предлагается провести самостоятельно.

Ответ: $a_n = 2^{n-2}\left[\dfrac{\varphi^{2n+1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right]$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

395. (Австрия-Польша/1993) Числовая последовательность $\{a_n\}$ определяется рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = \left[\sqrt[3]{a_n + n}\right]^3, \quad a_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

а) Выведите формулу n-го члена последовательности.

б) Определите все значения n, для которых $a_n = n$.

Решение. Несложные вычисления первых членов последовательности $\{a_n\}$ дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} &a_2 = a_3 = \ldots = a_7 = 1,\\ &a_8 = a_9 = \ldots = a_{19} = 8,\\ &a_{20} = a_{21} = \ldots = a_{37} = 27,\\ &a_{38} = a_{39} = \ldots = a_{61} = 64. \end{aligned} \tag{395а}$$

Разумеется, вычисления (395$а$) выполнялись не для всех элементов a_2, a_3, ..., a_{61}. Достаточно было подобрать пары: $a_7 = 1$ и $a_8 = 8$, $a_{19} = 8$ и $a_{20} = 27$ и т.д.

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ неубывающая. Значит, равные элементы идут сериями. Будем называть m-серией (или m-й серией) члены последовательности, равные m^3.

Определим индексы первого и последнего элементов m-й серии, то есть выразим эти индексы через m. Пусть $a_n = m^3$ и $a_{n+1} = (m+1)^3$. Выпишем рекуррентные формулы этих членов:

$$a_n = m^3 = \left[\sqrt[3]{a_{n-1} + n - 1}\right]^3 = \left[\sqrt[3]{m^3 + n - 1}\right]^3,$$

$$a_{n+1} = (m+1)^3 = \left[\sqrt[3]{a_n + n}\right]^3 = \left[\sqrt[3]{m^3 + n}\right]^3,$$

и перейдем к соответствующим неравенствам

$$m \leqslant \underbrace{\sqrt[3]{m^3 + n - 1} < m + 1 \leqslant \sqrt[3]{m^3 + n}} < m + 2,$$

$$m^3 + n - 1 < (m+1)^3 \leqslant m^3 + n,$$

$$n - 1 < 3m^2 + 3m + 1 \leqslant n,$$

$$n = 3m^2 + 3m + 1. \tag{395б}$$

Итак, индекс последнего элемента m-й серии равен $3m^2 + 3m + 1$. Тогда индекс первого элемента m-й серии равен $3m^2 - 3m + 2$, поскольку он больше на 1 индекса последнего элемента $(m-1)$-й серии (вычислите самостоятельно). Заметим, что длина m-й серии равна $6m$, проверьте вычисления (395$а$).

Для всех элементов последовательности a_n, которые входят в m-ю серию, выполняется двойное неравенство

$$3m^2 - 3m + 2 \leqslant n \leqslant 3m^2 + 3m + 1, \quad \text{где } m,\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \tag{395в}$$

решением которого относительно m является сегмент

$$\frac{-3 + \sqrt{12n - 3}}{6} \leqslant m \leqslant \frac{3 + \sqrt{12n - 15}}{6}.$$

Из условия (395*в*) следует также (докажите самостоятельно), что

$$\frac{3+\sqrt{12n-15}}{6} < m+1.$$

Тогда

$$m \leqslant \frac{3+\sqrt{12n-15}}{6} < m+1, \quad \text{или} \quad m = \left[\frac{3+\sqrt{12n-15}}{6}\right].$$

Задание б) можно переформулировать в терминах серий следующим образом. Определите, в каких m-сериях находятся члены последовательности с индексами m^3. Поскольку $m^3 > 3m^2+3m+1$ при $m \geqslant 4$, то $m = 2, 3$, см. формулу индекса последнего элемента m-й серии (395*б*).

Ответ: а) $a_n = \left[\dfrac{3+\sqrt{12n-15}}{6}\right]^3$, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$,

б) $a_8 = 8$, $a_{27} = 27$.

396. (Германия/1971-1972) Последовательность $\{a_n\}$, состоящая из натуральных чисел, определяется формулой $a_n = n + \left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$, где $n \in \mathbb{N}$. Приведите вербальный способ задания этой последовательности.

Решение. Сначала докажем неравенство

$$\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]^2 < n + \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] < \left(\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]+1\right)^2. \tag{396a}$$

Обозначим $k = \left[\sqrt{n}\right]$ и $\alpha = \left\{\sqrt{n}\right\}$, тогда $n = (k+\alpha)^2$. Перепишем неравенство (396*а*) с традиционными галочками вместо знаков сравнения

$$\left[k+\alpha+\frac{1}{2}\right]^2 \ \vee\ (k+\alpha)^2 + \left[k+\alpha+\frac{1}{2}\right] \ \vee\ \left(\left[k+\alpha+\frac{1}{2}\right]+1\right)^2,$$

$$(k+\beta)^2 \ \vee\ (k+\alpha)^2+k+\beta \ \vee\ (k+\beta+1)^2, \text{ где } \beta = \left[\alpha+\frac{1}{2}\right]. \tag{396$б$}$$

Выражение $\sqrt{n}$ является либо целым, либо иррациональным числом, следовательно, $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим случай $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$. Упрощая (396*б*), получим

$$k^2 \ \vee\ k^2 + k(2\alpha+1) + \alpha^2 \ \vee\ k^2+2k+1.$$

Очевидно, что выражения расположены слева направо строго по возрастанию.

Рассмотрим случай $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$, $\beta = 1$, тогда (396*б*) примет вид

$$k^2 + 2k + 1 \ \vee \ k^2 + k(2\alpha + 1) + \alpha^2 + 1 \ \vee \ k^2 + 4k + 4.$$

И во втором случае выражения расположены слева направо строго по возрастанию. Таким образом, неравенство (396*а*) доказано.

Перед тем как воспользоваться доказанным неравенством, отметим, что последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей, то есть $a_i < a_{i+1}$ при $i \in \mathbb{N}$. Предлагаем обосновать данный факт самостоятельно.

Раскроем смысл утверждения (396*а*). Перепишем неравенство, обозначив $m = \left[\sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right]$:

$$m^2 < a_n < (m+1)^2.$$

Первый вывод, которой можно сделать, заключается в том, что среди членов последовательности $\{a_n\}$ отсутствуют полные квадраты, поскольку n-му члену последовательности просто некуда поместиться между соседними полными квадратами.

Далее зададимся вопросом: сколько полных квадратов находится между 0 и значением n-го члена последовательности:

$$0 < 1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ m^2 < a_n?$$

Ответ известен — их количество равно m. Напомним, что значение a_n равно $n + m$.

Выходит так: среди натуральных чисел $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n+m)$ имеются m полных квадратов и n членов возрастающей последовательности, не содержащей полных квадратов. То есть можно формулировать ответ.

Ответ: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью всех натуральных чисел за исключением полных квадратов

$$\{a_n\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ \ldots\}.$$

397. Числовая последовательность $\{a_n\}$ задается формулой n-го члена $a_n = n + \left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Приведите вербальный способ задания этой последовательности.

Решение. Согласно задаче *386* числовая последовательность
$$\alpha_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$$
является неубывающей последовательностью натуральных чисел, в которой каждое число m встречается ровно m раз:

$$\{\alpha_n\} = \{1,\, 2,\, 2,\, 3,\, 3,\, 3,\, \ldots,\, \underbrace{m,\, m,\, \ldots,\, m,}_{m\ \text{элементов}}\, \ldots\}.$$

Группа элементов α_n, равных m, начинается элементом с индексом $i_1 = \dfrac{m(m-1)}{2} + 1$ и заканчивается элементом с индексом $i_2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Тогда можно вычислить значения a_{i_1} и a_{i_2}

$$a_{i_1} = i_1 + m = \frac{m(m+1)}{2} + 1, \quad a_{i_2} = i_2 + m = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1,$$

то есть $a_{i_1} = T_m + 1$ и $a_{i_2} = T_{m+1} - 1$, где T_m, T_{m+1} — треугольные числа, см. п. А.12.

Поскольку $\alpha_{i_1-1} = m-1$ и $\alpha_{i_2+1} = m+1$, то несложно определяются $a_{i_1-1} = T_m - 1$ и $a_{i_2+1} = T_{m+1} + 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\{a_n\} = \{\ldots,\, T_{m-1}+1,\, \ldots,\, T_m - 1,&\\ T_m + 1,\, \ldots,\, T_{m+1} - 1,&\\ T_{m+1} + 1,\, \ldots,\, T_{m+2} - 1,\, \ldots\}.&\end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ представляет собой натуральный ряд, из которого удалены треугольные числа.

Ответ: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью всех натуральных чисел за исключением треугольных чисел

$$\{a_n\} = \{2,\, 4,\, 5,\, 7,\, 8,\, 9,\, 11,\, 12,\, 13,\, 14,\, 16,\, \ldots\}.$$

20.2. Задачи на свойства последовательностей

В данном пункте подобраны задачи на исследование различных нетипичных свойств числовых последовательностей, определяемых формулами с антье или мантиссой.

398. (СПбГУ ИТМО/2011-2012) Пусть определена числовая последовательность $\{a_n\} = \left[\sqrt{6n} + \frac{1}{8}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Сколько раз в этой последовательности встречается число 72?

Решение. Согласно свойству антье (2.2) $[x] \leqslant x < [x] + 1$, задание сводится к решению в натуральных числах неравенства

$$72 \leqslant \sqrt{6n} + \frac{1}{8} < 72 + 1,$$

решения которого удовлетворяют условию (часть арифметических действий не выполнялась за ненадобностью)

$$72 \cdot 12 - 3 + \frac{1}{6 \cdot 64} \leqslant n \leqslant 72 \cdot 12 + 21 + \frac{49}{6 \cdot 64},$$

всего 24 решения.

Ответ: 24.

399. (HMMT/2003) Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ задается следующим образом: $a_1 = 1$, $a_n = \left[\dfrac{n^3}{a_{n-1}}\right]$, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Определите a_{999}.

Решение. Вычислим несколько первых элементов последовательности $\{a_n\}$: $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 3$, $a_4 = 21$, $a_5 = 5$, $a_6 = 43$, $a_7 = 7$.

Трудно не заметить закономерность — значения элементов с нечетными индексами равны своим индексам. Докажем данное предположение.

Пусть $a_n = n$, где n — нечетное число. Тогда

$$a_{n+1} = \left[\frac{(n+1)^3}{a_n}\right] = \left[\frac{(n+1)^3}{n}\right] = n^2 + 3n + 3,$$

$$a_{n+2} = \left[\frac{(n+2)^3}{a_{n+1}}\right] = \left[\frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8}{n^2 + 3n + 3}\right] =$$

$$= n + \left[\frac{3n^2 + 9n + 8}{n^2 + 3n + 3}\right] = n + 3 + \left[-\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right] = n + 2.$$

Ответ: $a_{999} = 999$.

400. (Nordic/2013) Числовая последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным образом

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n} + \frac{1}{2}\right],\ n \in \mathbb{N}.$$

Найдите такие $n < 2013$, для которых a_n — полный квадрат.

Данная задача является фактически обратной к задаче *385*.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности

$$\{a_n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 13,\ 17,\ \ldots\}.$$

Выскажем предположение, что последовательность $\{a_n\}$ имеет формулу n-го члена

$$a_n = 1 + \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] = \begin{cases} m^2 + 1, & \text{если } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}, \\ m(m+1) + 1, & \text{если } n = 2m+1,\ m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \end{cases}$$

Докажем данное предположение.

1) $\boldsymbol{n = 2m}$.

$$a_{2m+1} = a_{2m} + \left[\sqrt{a_{2m}} + \frac{1}{2}\right] = m^2 + 1 + \left[\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}\right] = m^2 + m + 1,$$

поскольку $m < \sqrt{m^2+1} < m + \frac{1}{2}$.

2) $\boldsymbol{n = 2m + 1}$.

$$a_{2m+2} = a_{2m+1} + \left[\sqrt{a_{2m+1}} + \frac{1}{2}\right] = m(m+1) + 1 + \left[\sqrt{m(m+1)+1} + \frac{1}{2}\right] = m(m+1) + 1 + m + 1 = (m+1)^2 + 1,$$

поскольку $m + \frac{1}{2} < \sqrt{m(m+1)+1} < m + 1$.

$a_1 = 1$ — единственный полный квадрат в последовательности $\{a_n\}$, так как $m^2 < a_{2m},\ a_{2m+1} < (m+1)^2$ при $m \in \mathbb{N}$.

Ответ: $n = 1$.

401. (Москва/1955) [6, с. 53] Найдите все такие числа a, что все числа
$$\{a_n\}_{n=1}^{N} = \{[a],\ [2a],\ \ldots,\ [Na]\}$$
различны между собой и все числа
$$\{b_n\}_{n=1}^{N} = \{[b],\ [2b],\ \ldots,\ [Nb]\},\quad \text{где } b = \frac{1}{a},$$
также различны между собой (натуральное N фиксировано).

Решение. Сначала рассмотрим случай $a > 0$.

Заметим, что условие $[Na] < N-1$ не имеет смысла, поскольку среди N неотрицательных целых чисел, принимающих значения из множества $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2\}$, обязательно будет хотя бы один повтор (согласно принципу Дирихле). Тогда
$$[Na] < N-1 \iff a < \frac{N-1}{N}.$$

Аналогичные рассуждения для $\{b_n\}$ приведут к условию
$$\frac{1}{a} < \frac{N-1}{N}, \quad \text{или} \quad a > \frac{N}{N-1}.$$

Таким образом, для случая $a > 0$ решение задачи, если оно есть, лежит в сегменте
$$\frac{N-1}{N} \leqslant a \leqslant \frac{N}{N-1}. \tag{401a}$$

Покажем, что все значения a, удовлетворяющие условию (401a), подойдут к ответу.

При $a = 1$ все числа $[ka]$ попарно различны. То же самое можно сказать про числа $[kb]$.

При $a > 1$ также все числа $[ka]$ различны. Существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $ka < m < (k+1)\,a$. Разность между $(k+1)\,a$ и ka больше 1, следовательно, между этими числами размещается хотя бы одно натуральное число. Тогда
$$ka < m < (k+1)\,a \iff [ka] < m \leqslant [(k+1)\,a].$$

При $a < 1$ имеет место формула $[ka] = k-1$, так как
$$\frac{N-1}{N} \leqslant a < 1 \iff k-1 \leqslant ka < k \iff k-1 \leqslant [ka] < k.$$

Доказательство того, что все числа среди $\{b_n\}$ попарно различны при условии (401a), дословно воспроизводит приведенные выше рассуждения.

Итак, доказано, что значения a, удовлетворяющие условию ($401a$), являются решением задачи для случая $a > 0$.

Вариант $a < 0$ рассматривается аналогичным образом.

При $a > -\dfrac{N-1}{N}$ имеются дубликаты среди элементов последовательности $\{a_n\}$, так как $[Na] \geqslant -(N-1)$, то есть $\{a_n\} \in \{-(N-1), -(N-2), \ \ldots, \ -1\}$, значит, среди N чисел имеется $N-1$ различное значение.

Предлагаем самостоятельно доказать, что при

$$-\frac{N}{N-1} \leqslant a \leqslant -\frac{N-1}{N}$$

все элементы $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ различны для обеих последовательностей по отдельности.

Ответ: $\left[-\dfrac{N}{N-1}, \ -\dfrac{N-1}{N}\right] \bigcup \left[\dfrac{N-1}{N}, \ \dfrac{N}{N-1}\right]$.

402. (СССР/1983) Будут ли периодическими последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, составленные соответственно из последних цифр целых чисел $\left[\left(\sqrt{10}\right)^n\right]$ и $\left[\left(\sqrt{2}\right)^n\right]$?

Доказательство. Пусть $\sqrt{10} = 3, d_1d_2d_3\ldots$, где d_i — цифры от 0 до 9. Поскольку$\sqrt{10}$ — иррациональное число, дробь $0, d_1d_2d_3\ldots$ непериодическая и соответствующая последовательность $\{d_n\}$ также непериодическая.

Выпишем первые элементы последовательности $\{\alpha_n\}$

$$\alpha_n = \{3, \ 0, \ d_1, \ 0, \ d_2, \ 0, \ d_3, \ 0, \ \ldots\}.$$

Предположим, что последовательность $\{\alpha_n\}$ периодическая с периодом T, то есть $\alpha_{n+T} = \alpha_n$. Тогда периодической будет последовательность $\{\gamma_n\}$, где $\gamma_n = \alpha_{2n-1}$ (период $\{\gamma_n\}$ равен T при четном T или $2T$ при нечетном T). Но $\gamma_n = d_n$, следовательно, предположение о периодичности последовательности $\{\alpha_n\}$ неверно.

Доказательство того, что последовательность $\{\beta_n\}$ непериодическая, аналогично только что приведенному. Нюанс в том, чтобы перейти в двоичную систему счисления: $\sqrt{2} = \left(\overline{1, b_1b_2b_3\ldots}\right)_2$, где b_i — либо 0, либо 1. Тогда

$$\beta_n = \{1, \ 0, \ b_1, \ 0, \ b_2, \ 0, \ b_3, \ 0, \ \ldots\}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны.

■

403. (Болгария/1996) Числовая последовательность $\{a_n\}$ задается следующим образом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{n}{a_n}$. Докажите, что при $n \geqslant 4$ имеет место равенство $\left[a_n^2\right] = n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{n} + \dfrac{n}{x}$ с параметром $n \in \mathbb{N}$ при положительных x. Функция $f(x)$ монотонно убывает на полуинтервале $(0,\ n]$.

Докажем методом математической индукции, что при $n \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$\sqrt{n} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n-1}}. \qquad (403a)$$

При $n = 3$ все верно, $a_3 = 2$.

Выполним индукционный переход для левой части неравенства (403a)

$$a_{n+1} = f(a_n) > f\left(\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-1} = \frac{n}{\sqrt{n-1}} > \sqrt{n+1}.$$

Далее пригодится еще неравенство

$$a_{n+1} > \frac{n}{\sqrt{n-1}}, \qquad \text{где } n \geqslant 3. \qquad (403б)$$

Индукционный переход для правой части неравенства (403a)

$$a_{n+1} = f(a_n) < f\left(\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} = \frac{n+1}{\sqrt{n}}.$$

Итак, неравенство (403a) доказано. Поскольку $\left[a_n^2\right] = n$ равносильно $\sqrt{n} \leqslant a_n < \sqrt{n+1}$, остается доказать правую часть этого неравенства.

Согласно (403$б$) при $n \geqslant 4$ справедливо $a_n > \dfrac{n-1}{\sqrt{n-2}}$.

$$a_{n+1} = f(a_n) < f\left(\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}\right) = \frac{n-1}{n\sqrt{n-2}} + \frac{n\sqrt{n-2}}{n-1}.$$

Наша цель — показать, что сумма таких непростых обратных дробей меньше $\sqrt{n+2}$. Поэтому выполним сравнение

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n\sqrt{n-2}} + \frac{n\sqrt{n-2}}{n-1} &\vee \sqrt{n+2},\\
\frac{(n-1)^2}{n^2(n-2)} + \frac{n^2(n-2)}{(n-1)^2} &\vee n,\\
(n-1)^4 + n^4(n-2)^2 &\vee n^3(n-1)^2(n-2),\\
(n-1)^4 &\vee n^3(n-2),\\
6n^2 - 4n + 1 &\vee 2n^3.
\end{aligned}$$

При $n \geqslant 4$ правая часть больше левой, поэтому получаем ожидаемый результат $a_{n+1} < \sqrt{n+2}$.

Согласно (403*a*) $\sqrt{n} < a_n < \sqrt{n+1}$ при $n \geqslant 4$, тогда $n < a_n^2 < n+1$ и $\left[a_n^2\right] = n$. ■

404. (Фрагмент IMO°/1985) Докажите, что числовая последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \left\{2^n\sqrt{2}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет бесконечное количество элементов, превосходящих $\frac{1}{2}$.

См. решение задачи 448.

405. (Япония/1996) Пусть α — действительное нецелое число и $\alpha > 1$. Последовательность $\{a_n\}$ задается формулой $a_n = \left[\alpha^{n+1}\right] - \alpha\left[\alpha^n\right]$. Докажите, что эта последовательность непериодическая.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть последовательность $\{a_n\}$ периодическая с периодом T, начиная с некоторого номера n_0, то есть при $n \geqslant n_0$

$$a_{n+T} = a_n.$$

Определим неубывающую целочисленную последовательность $\{b_n\}$, где $b_n = \left[\alpha^{n+T}\right] - [\alpha^n]$. Для этой последовательности выполняется рекуррентная формула $b_{n+1} = \alpha b_n$, поскольку

$$b_{n+1} - \alpha b_n = \left[\alpha^{n+1+T}\right] - \left[\alpha^{n+1}\right] - \alpha\left[\alpha^{n+T}\right] + \alpha\left[\alpha^n\right] = a_{n+T} - a_n = 0.$$

Таким образом, предположив периодичность последовательности $\{a_n\}$, получим, что последовательность $\{b_n\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия с рациональным знаменателем, который больше 1.

Если $b_1 \neq 0$, то выходит, что $\{b_n\}$ — целочисленная геометрическая прогрессия с нецелым знаменателем, что невозможно.

Если $b_1 = 0$, то последовательность $\{b_n\}$ состоит из нулей, то есть $b_{iT+1} = 0$, где $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Следовательно, для любого i равны числа $[\alpha^{iT+1}]$. Очевидно, что для $\alpha > 1$ равенство всех этих чисел абсурдно.

Предположение, что последовательность $\{a_n\}$ периодическая, опровергнуто.

■

406. (NIMO/2012 с изменениями) Целочисленная последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + \left[\sqrt{a_{n-1}}\right] \ (n \geqslant 2).$$

Докажите, что в этой последовательности бесконечное количество полных квадратов, и определите их вид.

Доказательство. Вычислим первые элементы последовательности

$$a_n = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 16, 20, 24, 28, 33, 38, 44, 50, 57, 64, \ldots\}.$$

Зададим другую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая является подпоследовательностью $\{a_n\}$, следующим образом:

$$b_n = \min_{a_i \geqslant n^2}\{a_i\} \ (i \in \mathbb{N}),$$

первые элементы которой равны

$$b_n = \{1, 4, 10, 16, 28, 38, 50, 64, \ldots\}.$$

Если $b_n = n^2$, то очевидно, что

$$b_{n+1} = b_n + 3n.$$

Почти очевидно, что если $b_n > n^2$, то

$$b_{n+1} = b_n + 2n.$$

Попытаемся найти следующий полный квадрат в последовательности $\{b_n\}$ вида $b_{n+m} = (n+m)^2$, предположив, что $b_n = n^2$. Для данного условия должно выполняться равенство

$$b_{n+m} = b_n + 3n + 2(n+1) + 2(n+2) + \ldots + 2(n+m-1),$$
$$(n+m)^2 = n^2 + 3n + (m-1)(2n+m), \ \ldots,$$
$$n = m.$$

Следовательно, если $b_n = n^2$, то $b_{2n} = (2n)^2$, и других полных квадратов нет.

Ответ: 2^{2n}, где $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

407. (Москва/1977) Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ задается следующим образом: $x_1 = 2$, $x_n = \left[\dfrac{3x_{n-1}}{2}\right]$. Докажите, что последовательность $y_n = (-1)^{x_n}$ непериодическая.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть последовательность $\{y_n\}$ периодическая с периодом T, начиная с некоторого номера n_0, то есть при $n \geqslant n_0$

$$y_{n+T} = y_n, \quad (-1)^{x_{n+T}} = (-1)^{x_n},$$

то есть числа x_{n+T} и x_n одинаковой четности.

Выразим разность $x_{n+T} - x_n$ через $x_{n_0+T} - x_{n_0}$.

$$x_{n+T} - x_n = \left[\frac{3x_{n-1+T}}{2}\right] - \left[\frac{3x_{n-1}}{2}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}(x_{n-1+T} - x_{n-1}) - \left(\left\{\frac{3x_{n-1+T}}{2}\right\} - \left\{\frac{3x_{n-1}}{2}\right\}\right) = \qquad (407a)$$

$$= \frac{3}{2}(x_{n-1+T} - x_{n-1}) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0} (x_{n_0+T} - x_{n_0}). \qquad (407б)$$

В формуле (407a) обе мантиссы равны как при четных, так и при нечетных x_{n+T} и x_n.

Разность $x_{n+T} - x_n$ по условию есть натуральное число, однако при предположении, что $\{y_n\}$ периодическая, данное условие не выполняется для любого n для выражения (407$б$). ■

408. (Москва/1977) Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ задается следующим образом: $x_1 = 2$, $x_n = \left[\dfrac{3x_{n-1}}{2}\right]$. Докажите, что среди x_n бесконечно много а) нечетных чисел; б) четных чисел.

Доказательство. Найдем несколько первых членов последовательности $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 13,\ 19,\ \ldots\}$. Очевидная закономерность не просматривается. В последовательности встречаются как четные, так и нечетные числа. Придумаем формулу, согласно которой по любому четному числу с индексом n задается местоположение нечетного числа с большим индексом. Пусть четное число имеет вид

$$x_n = 2^k\bigl(2m+1\bigr), \quad \text{где } k,\, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда $x_{n+k} = 3^k\bigl(2m+1\bigr)$, то есть число x_{n+k} — нечетное. Таким образом, утверждение а) доказано.

Аналогичные рассуждения помогут для доказательства того, что четных чисел бесконечно много. Представим нечетное число в виде

$$x_n = 2^k\bigl(2m+1\bigr) + 1, \quad \text{где } k,\, m \in \mathbb{N}.$$

В этом случае $x_{n+k} = 3^k\bigl(2m+1\bigr) + 1$, то есть число x_{n+k} — четное. Утверждение б) также доказано.

■

409. (Putnam/1973) [25, с. 20] Числовая последовательность $\{a_n\}$ задается формулой $a_n = n + \left[\dfrac{b}{n}\right]$, где $b \in \mathbb{N}$ — параметр. Докажите, что $\min\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \left[\sqrt{4b+1}\right]$.

Доказательство. Сначала найдем минимальное значение среди членов последовательности $\{a_n\}$, затем покажем, что выражение $\left[\sqrt{4b+1}\right]$ равно эму значению.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x + \dfrac{b}{x}$ при $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Минимум $f(x)$ достигается в точке $x_0 = \sqrt{b}$. Левее точки x_0 функция $f(x)$ убывает, правее x_0 возрастает.

Теперь перейдем к натуральным значениям x. Функция $f(x)$ достигает минимума на полуинтервале $\bigl(0,\, x_0\bigr]$ при $x_1 = \left[\sqrt{b}\right]$, а на полупрямой $\bigl[x_0,\, +\infty\bigr)$ — при $x_2 = \left[\sqrt{b}\right] + 1$.

Далее рассмотрим функцию $\bigl[f(x)\bigr]$ при $x \in \mathbb{N}$. Заметим, что фактически мы перешли к последовательности $\{a_n\}$.

Функция $\bigl[f(x)\bigr]$ принимает минимальное значение на полуинтервале $\bigl(0,\, x_0\bigr]$, как и функция $f(x)$, при x_1. Впрочем, может быть, и не только в этой точке, но это не существенно. Аналогично, $\bigl[f(x)\bigr]$ принимает минимальное значение на полупрямой $\bigl[x_0,\, +\infty\bigr)$ при x_2.

Вычислим минимальное значение функции $\bigl[f(x)\bigr]$ в точках x_1 и x_2. Пусть $m = \left[\sqrt{b}\right]$, следовательно, $m \leqslant \sqrt{b} < m+1$, $m^2 \leqslant b < (m+1)^2$.

Представим $b = m^2 + i$, где $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2m$, тогда

$$\big[f(x_1)\big] = \big[f(m)\big] = m + \left[\frac{m^2+i}{m}\right] =$$

$$= 2m + \left[\frac{i}{m}\right] = \begin{cases} 2m & \text{при } 0 \leqslant i < m, \\ 2m+1 & \text{при } m \leqslant i \leqslant 2m. \end{cases} \tag{409a}$$

Идентичные значения дают вычисления для $\big[f(x_2)\big] = \big[f(m+1)\big]$.

Выразим минимальное значение среди элементов последовательности $\big\{a_n\big\}$ через параметр b

$$\min_{n\in\mathbb{N}} a_n = \begin{cases} 2\left[\sqrt{b}\right] & \text{при } 0 \leqslant b - \left[\sqrt{b}\right]^2 < \left[\sqrt{b}\right], \\ 2\left[\sqrt{b}\right]+1 & \text{при } \left[\sqrt{b}\right] \leqslant b - \left[\sqrt{b}\right]^2 \leqslant 2\left[\sqrt{b}\right]. \end{cases} \tag{409б}$$

Понятно, что не совсем удобно пользоваться формулами (409$б$), чтобы сравнить $\left[\sqrt{4b+1}\right]$ с минимальным значением, поэтому подставим $b = m^2 + i$, тогда $4b + 1 = 4(m^2 + i) + 1$ и, соответственно,

при $0 \leqslant i < m$

$$2m < \sqrt{4m^2 + 4i + 1} < 2m + 1 \quad \Longrightarrow \quad \left[\sqrt{4b+1}\right] = 2m,$$

при $m \leqslant i \leqslant 2m$

$$2m + 1 \leqslant \sqrt{4m^2 + 4i + 1} < 2m + 2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\sqrt{4b+1}\right] = 2m + 1.$$

■

21. Суммы

Приведем в качестве затравки четыре олимпиадные задачи. В первой задаче нет ссылки на конкретную олимпиаду ввиду того, что подобные задачи многократно встречались на различных олимпиадах.

Как всегда, рекомендуем решить эти задачи самостоятельно, не прибегая к указаниям.

410. Вычислите сумму $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{10\,000}\right]$.

См. другой вариант решения — задача *209*.

Указание. Воспользуйтесь формулой, выведенной в задаче *420*.

Ответ: $661\,750$.

411. (AHSME/1986) [29, с. 24] Вычислите сумму $\sum\limits_{k=1}^{1024}\left[\log_2 k\right]$.

Указание. Воспользуйтесь формулой, выведенной в задаче *425*.

Ответ: $8\,204$.

412. (Болгария/1975) Вычислите $\left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right]$.

Указание. Воспользуйтесь формулой, выведенной в задаче *427*.

Ответ: 198.

413. (Китай/1986) [40, с. 41] Вычислите сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{502}\left[\dfrac{305k}{503}\right]$.

Указание. Воспользуйтесь формулой, выведенной в задаче *433*. Число 503 — простое, способ проверки см. п. A.6.

Ответ: $76\,304$.

21.1. Переход к более общему условию задачи

Чтобы сделать решение задачи проще и понятнее, иногда приходится перейти от исходного к более общему условию задачи.

Например, при решении задачи 410 достаточно быстро приходит идея, что равные слагаемые идут подряд — сериями, причем порядковый номер серии совпадает со значениями слагаемых из этой серии. Следующим шагом становится вычисление суммы вида $\sum\limits_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]$, где $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Едва ли сложнее задача 411, в которой эта же идея оформлена с помощью функции двоичного логарифма.

Для решения задачи 412 требуется некоторое вспомогательное неравенство, формула которого, разумеется, имеет общий вид. Решение в общем виде выглядит не только естественным продолжением рассуждений, но и более наглядным по сравнению с числовыми вычислениями.

По сути, переход к более общему условию задачи — это абстрагирование задания. Здесь кроется сложность, поскольку не всегда очевидна формулировка более общего условия задачи, то есть не всегда сразу видно, что в условии задачи существенно, а что малозначительно.

Идея перехода к общему условию задачи обычно возникает в процессе решения «первоначального» условия. Разумеется, большую пользу может сослужить математическая интуиция.

К примеру, анализируя условие задачи 413, вполне возможно догадаться, что под знаком антье стоит несократимая дробь и число 503, скорее всего, простое. Также интуиция может подсказать, что сходное начертание чисел 305 и 503 не имеет закономерности в данной задаче. Решив задачу, понимаешь, что это эстетический прием для запутывания следов.

Вообще, вся математика напичкана абстракциями, поэтому «переход к более общему условию задачи» можно назвать самым математическим методом решения задач.

21.2. Задачи по теме раздела

Как правило, на математических конкурсах в заданиях на суммы требуется вывести соответствующую формулу. Это несколько сложнее, чем доказательство равенства суммы определенной формуле, поскольку в таком случае возможно применение метода математической индукции для доказательства.

Представим перечень сумм и соответствующих им формул, которые выводятся в задачах данного раздела. Во всех формулах $n \in \mathbb{N}$, если не указано иное условие.

414. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right].$

415. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3n-k}{2}\right]=n^2+\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right].$

416. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{k}{3}\right]=\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{6}.$

417. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\left[\frac{2^k}{3}\right]=\frac{2^{2n+1}-2}{3}-n.$

418. $\displaystyle\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{q}\right]}=0,$ где НОД$(p,\,q)=1,\ pq\equiv 0 \pmod 2$.

419. $\displaystyle\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{q}\right]}=0,$ где НОД$(p,\,q)=1,\ pq\equiv 1 \pmod 2$.

420. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6},$ где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

421. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]=m(n+1)-\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$ где $m=\left[\sqrt{n}\right]$.

422. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^3-1}\left[\sqrt[3]{k}\right]=\frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4},$ где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

423. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\}\leqslant\frac{n^2-1}{2}.$

424. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1}\left[\log_2 k\right] = 2^n\left(n-2\right)+2.$

425. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\log_2 k\right] = m\left(n+1\right) - 2^{m+1}+2,$ где $m=\left[\log_2 n\right]$.

426. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{2\left[\sqrt{k}\right]+1} = n-1,$ где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

427. $\displaystyle\left[\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\right] = 2n-2,$ где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

428. $\displaystyle\left[\sum_{k=1}^{n^3}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right] = 3n-3,$ где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

429. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\right] = n.$

430. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2^k\left[\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\right]^2 = n\left(n+1\right).$

431. $\displaystyle\left[\sum_{k=2}^{n+1}\sqrt[k]{\frac{k}{k-1}}\right] = n.$

432. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m}\left\{\frac{ak+b}{m}\right\} = \frac{m-1}{2},$ где $a,\ b,\ m,\ n\in\mathbb{N}$, НОД $(a,\ m)=1$.

433. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{kn}{p}\right] = \frac{\left(n-1\right)\left(p-1\right)}{2},$ где $p\in\mathbb{P}$ и $n\in\mathbb{N}_{<p}$.

434. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right] = \frac{nm-n-m+\text{НОД}\,(n,\ m)}{2},$ где $n,\ m\in\mathbb{N}$.

435. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\left\{\frac{kn}{m}\right\} = \frac{m-\text{НОД}\,(n,\ m)}{2},$ где $n,\ m\in\mathbb{N}$.

436. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{k^3}{p}\right] = \frac{\left(p-2\right)\left(p^2-1\right)}{4},$ где $p\in\mathbb{P}$.

437. $$\sum_{k=1}^{n}\left[\log_2\frac{2n-1}{2k-1}\right]=n-1.$$

21.3. Указания, решения, ответы

414. Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{2}\right]$.

Решение. При вычислении сумм одним из основных приемов является суммирование по частям (дискретное преобразование Абеля). В данном случае мы воспользуемся частным случаем — см. (B.4).

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right] \overset{(B.4)}{=} n\cdot\left[\frac{n}{2}\right]-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]-\left[\frac{k}{2}\right]\right)=$$

$$=n\cdot\left[\frac{n}{2}\right]-\left(1+3+\ldots+2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)=\ldots$$

В скобках стоит сумма нечетных чисел, образующих арифметическую прогрессию, количество слагаемых в которой равно $\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

$$\ldots=n\cdot\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]^2=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Использованы результаты задач *108* и *22*. См. также задачу *23*.

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{2}\right]=\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$.

415. Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{3n-k}{2}\right]$.

Решение.

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3n-k}{2}\right]=n^2+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n-k}{2}\right]=n^2+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k}{2}\right],$$

поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{n-k}{2}\right]=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\dfrac{n-k}{2}\right]=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\dfrac{k}{2}\right]$ (слагаемые обеих сумм идентичны).

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{3n-k}{2}\right]=n^2+\left[\dfrac{(n-1)^2}{4}\right]$.

416. (Венгрия-Израиль/2008) Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n^2}\left[\dfrac{k}{3}\right]$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sum\limits_{k=1}^{n^2}\left\{\dfrac{k}{3}\right\}=\dfrac{n^2}{3}$, выведенной в задаче *168*.

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{k}{3}\right]=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n^2}k-\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\frac{k}{3}\right\}=\frac{n^2\left(n^2+1\right)}{6}-\frac{n^2}{3}=\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{6}.$$

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n^2}\left[\dfrac{k}{3}\right]=\dfrac{n^2\left(n^2-1\right)}{6}$.

417. Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[\dfrac{2^k}{3}\right]$.

Решение. Данное задание является обобщением задачи *169*.

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[\dfrac{2^k}{3}\right]=\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}-n$.

418. (IMC/2013, А. Болбот) Пусть p и q — взаимно простые числа, и сумма S определяется формулой

$$S=\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{a_k},\quad \text{где } a_k=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{q}\right]. \tag{418a}$$

Докажите, что $S=0$, если pq — четное число.

Доказательство. Утверждается, что при $1\leqslant i\leqslant\dfrac{pq}{2}$ выполняется равенство

$$(-1)^{a_{i-1}}+(-1)^{a_{pq-i}}=0. \tag{418$б$}$$

Докажем данное утверждение. Покажем, что показатели степеней в (418*б*) разной четности. Пусть

$$a_{i-1}=\left[\frac{i-1}{p}\right]+\left[\frac{i-1}{q}\right]\equiv b \pmod 2,\quad \text{где } b\in\{0;\ 1\}.$$

Преобразуем другой показатель

$$a_{pq-i} = \left[\frac{pq-i}{p}\right] + \left[\frac{pq-i}{q}\right] = p + q + \left[-\frac{i}{p}\right] + \left[-\frac{i}{q}\right] =$$
$$= p + q - 2 + \left[\frac{p-i}{p}\right] + \left[\frac{q-i}{q}\right] = \ldots$$

(воспользуемся тождеством, доказанным в задаче *117*)

$$\ldots = p + q - 2 - \left[\frac{i-1}{p}\right] - \left[\frac{i-1}{q}\right] \equiv 1 - b \pmod 2,$$

поскольку $p+q$ — нечетное число: одно из чисел должно быть четным, другое — нечетным, они же взаимно простые при условии, что pg — четное.

Таким образом, показатели степеней в (418*б*) разной четности. Значит, сумма (418*а*) состоит из пар с нулевым значением. ■

419. (IMC/2013, А. Болбот) Пусть p и q — взаимно простые числа, и сумма S определяется формулой

$$S = \sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{a_k}, \quad \text{где } a_k = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{q}\right]. \qquad (419a)$$

Докажите, что $S = 1$, если pq — нечетное число.

Доказательство. Поскольку pq — нечетное число, то числа p и q — нечетные также, а сумма $p + q$ — четная. Теперь нас ожидает красивейший трюк

$$\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{q}\right] \equiv p\left[\frac{i}{p}\right] + q\left[\frac{i}{q}\right] \equiv -p\left\{\frac{i}{p}\right\} - q\left\{\frac{i}{q}\right\} \equiv \underbrace{p\left\{\frac{i}{p}\right\}}_{p_k} + \underbrace{q\left\{\frac{i}{q}\right\}}_{q_k} \pmod 2,$$

p_k и q_k — остатки от деления k на p и q соответственно. А согласно утверждению, доказанном в задаче *306*, множество точек (p_k, q_k) является множеством точек (i, j), где $i, j = 0, 1, 2, \ldots p - 1$. Значит,

$$S = \sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{p_k + q_k} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} = 1.$$

■

420. Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]$, где $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Решение. Согласно (Б.3.)

$$m \leqslant \sqrt{m^2+i} < m+1, \text{ или } \left[\sqrt{m^2+i}\right] = m,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$.

Слагаемые $\left[\sqrt{k}\right] = m$ идут в сумме подряд. Назовем группу таких слагаемых m-серией (или m-й серией). Количество чисел в m-серии равно $2m+1$.

Количество слагаемых в сумме равно n^2-1. Количество серий в сумме равно $n-1$, причем последняя серия ($n-1$-я серия) содержится в сумме полностью, то есть следующее слагаемое равнялось бы n. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right] = \sum_{m=1}^{n-1} m(2m+1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} m^2 + 2\sum_{m=1}^{n-1} m = \ldots = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

Использовались формулы (В.5) и (В.6).

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right] = \dfrac{n(n-1)(4n+1)}{6}$, где $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

421. (Корея/1997) Выведите формулу суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]$, где $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Пусть $m = \left[\sqrt{n}\right]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right] = \sum_{k=1}^{m^2-1}\left[\sqrt{k}\right] + m(n-m^2+1) = \ldots ,$$

где второе слагаемое является суммой последней неполной m-серии (см. терминологию в задаче *420*). Воспользуемся результатом задачи *420*, и после приведения подобных членов получим искомую формулу

$$\ldots = m(n+1) - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]=m(n+1)-\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, где $m=[\sqrt{k}]$, $n\in\mathbb{N}$.

422. Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n^3-1}\left[\sqrt[3]{k}\right]$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Решение. Согласно (Б.3.)

$$m\leqslant\sqrt[3]{m^3+i}<m+1,\ \text{или}\ \left[\sqrt[3]{m^3+i}\right]=m,$$

где $m\in\mathbb{N}$, $i=0,\,1,\,\ldots,\,3m(m+1)$.

Слагаемые $\left[\sqrt[3]{k}\right]=m$ идут в сумме подряд. Назовем группу таких слагаемых m-серией (или m-й серией). Количество чисел в m-серии равно $3m(m+1)+1$.

Количество слагаемых в сумме равно n^3-1. Количество серий в сумме равно $n-1$, причем последняя серия ($n-1$-я серия) содержится в сумме полностью, то есть следующее слагаемое равнялось бы n. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n^3-1}\left[\sqrt[3]{k}\right]=\sum_{m=1}^{n-1}m\big(3m(m+1)+1\big)=$$

$$=3\sum_{m=1}^{n-1}m^3+3\sum_{m=1}^{n-1}m^2+\sum_{m=1}^{n-1}m=\ldots=\frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}.$$

Использовались формулы (В.5), (В.6) и (В.7).

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt[3]{k}\right]=\dfrac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

423. (Россия/1998-1999, А.Храбров) Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\}\leqslant\dfrac{n^2-1}{2}$.

Доказательство. Обратим внимание на то, что слагаемые исходной суммы с индексами, равными полным квадратам, являются нулями. Также нулем будет и последнее слагаемое — это нам пригодится.

Применим метод математической индукции. Случай $n=1$ очевиден. Предполагая выполнение неравенства при n, докажем, что при $n+1$ неравенство верно.

Согласно п. Б.3.

$$\left[\sqrt{n^2+m}\right] = n \quad \text{при } m \in \mathbb{N}_{[1,\,2n]}, \qquad \left\{\sqrt{n^2+m}\right\} = \sqrt{n^2+m} - n.$$

Избавимся от квадратного корня

$$\left\{\sqrt{n^2+m}\right\} = \sqrt{n^2+m} - n < \sqrt{n^2+m+\left(\frac{m}{2n}\right)^2} - n = \frac{m}{2n}.$$

В дальнейшем будет полезна следующая оценка:

$$\sum_{k=n^2+1}^{n^2+2n} \left\{\sqrt{k}\right\} < \sum_{m=1}^{2n} \frac{m}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} m = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n+1}{2}.$$

Докажем индуктивный переход

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \left\{\sqrt{k}\right\} = \sum_{k=1}^{n^2} \left\{\sqrt{k}\right\} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \left\{\sqrt{k}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^2-1}{2} + \sum_{k=n^2+1}^{n^2+2n} \left\{\sqrt{k}\right\} < \frac{n^2-1}{2} + \frac{2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2-1}{2}.$$

Таким образом, даже удалось доказать строгое условие исходного неравенства, но при $n \geqslant 2$. ■

424. Выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{2^n-1} \left[\log_2 k\right]$, где $n \in \mathbb{N}$.

Решение.

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \left[\log_2 k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{2^k-1} \left[\log_2\left(2^k+m\right)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} k\, 2^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\, 2^k = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(2^{k+1} - 2^k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k\, 2^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\, 2^k =$$

$$= 2^n(n-1) + \sum_{k=1}^{n-2} k\, 2^{k+1} - \sum_{k=2}^{n-1} 2^k(k-1) - \sum_{k=1}^{n-1} 2^k =$$

$$= 2^n(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n(n-1) - 2^n + 2 = 2^n(n-2) + 2.$$

Ответ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1}\big[\log_2 k\big]=2^n\big(n-2\big)+2,$ где $n\in\mathbb{N}$.

425. Выведите формулу суммы $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big[\log_2 k\big]$, где $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Пусть $m=\big[\log_2 n\big]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\big[\log_2 k\big]=\sum_{k=1}^{2^m-1}\big[\log_2 k\big]+\sum_{k=1}^{n-2^m+1}m=\ldots\ ,$$

где вторая сумма состоит из равных слагаемых, наибольших среди слагаемых в сумме $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big[\log_2 k\big]$.

Воспользуемся результатом задачи *424* и после приведения подобных членов получим заданную формулу

$$\ldots=2^m\big(m-2\big)+2+m\big(n-2^m+1\big)=$$
$$=m\big(n+1\big)-2^{m+1}+2.$$

Ответ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big[\log_2 k\big]=m\,\big(n+1\big)-2^{m+1}+2,$ где $m=\big[\log_2 n\big]$ и $n\in\mathbb{N}$.

426. Вычислите $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{2\left[\sqrt{k}\right]+1}$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Решение.

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{2\left[\sqrt{k}\right]+1}=\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{2n+1}=n-1.$$

Ответ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{2\left[\sqrt{k}\right]+1}=n-1.$

427. Вычислите $\displaystyle\left[\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Решение.

$$\sqrt{k} < \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{2} < \sqrt{k+1},$$
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}},$$
$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sum_{k=1}^{n^2-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Введем обозначение $S=\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Тогда задание сводится к вычислению $[S]$. Левая и правая суммы выражаются через S, в средней сумме сокращаются все слагаемые кроме крайних двух:

$$S-1 < 2n-2 < S-\frac{1}{n}, \quad \text{или} \quad 2n-2+\frac{1}{n} < S < 2n-1.$$

Ответ: $\left[\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]=2n-2$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

428. Вычислите $\left[\sum\limits_{k=1}^{n^3}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right]$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

См. аналогичное решение — задача 427.
Указание. Воспользуйтесь неравенством

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} < 3\left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}.$$

Ответ: $\left[\sum\limits_{k=1}^{n^3}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right]=3n-3$, где $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

429. (На основе IMO/1968) [8, с. 129] Вычислите сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\right], \text{ где } n\in\mathbb{N}.$$

См. другой вариант решения — задача 111.

Решение. Обозначим сумму первых n слагаемых через S_n. Утверждается, что $S_n - S_{n-1} = 1$, то есть решением задачи будет $S_n = n$.

Докажем утверждение, что S_n всегда больше S_{n-1} на единицу. Слагаемые суммы S_n будем обозначать s_k, а слагаемые суммы S_{n-1} — $\hat{s}_k$.

Пусть $n = 2^m M$, где $m \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ и M — нечетное число. Рассмотрим три случая.

1) При $k \leqslant m$ слагаемые s_k и $\hat{s}_k$ равны, так как

$$s_k = \left[\frac{2^m M}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = \left[2^{m-k}M + \frac{1}{2}\right] = 2^{m-k}M,$$

$$\hat{s}_k = \left[\frac{2^m M - 1}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = \left[2^{m-k}M - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = 2^{m-k}M.$$

2) При $k = m+1$ выполняется соотношение $s_{m+1} - \hat{s}_{m+1} = 1$.

$$s_{m+1} = \left[\frac{2^m M}{2^{m+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{M}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{M+1}{2},$$

$$\hat{s}_{m+1} = \left[\frac{2^m M - 1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{M}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}\right] = \frac{M+1}{2} - 1.$$

3) При $k \geqslant m+2$ слагаемые s_k и $\hat{s}_k$ равны. Отметим, что из дальнейших пояснений следует равное количество ненулевых слагаемых в суммах S_n и S_{n-1}.

$$s_k = \left[\frac{2^m M}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{M}{2^{k-m}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\left[\frac{M}{2^{k-m}}\right] + \left\{\frac{M}{2^{k-m}}\right\} + \frac{1}{2}\right],$$

$$\hat{s}_k = \left[\frac{2^m M - 1}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = \ldots = \left[\left[\frac{M}{2^{k-m}}\right] + \left\{\frac{M}{2^{k-m}}\right\} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\right].$$

Если $\left\{\dfrac{M}{2^{k-m}}\right\} \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{k-m-1}}$, то $s_k = \hat{s}_k = \left[\dfrac{M}{2^{k-m}}\right]$. Напомним, что M — нечетное число.

Если $\left\{\dfrac{M}{2^{k-m}}\right\} \geqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{k-m-1}}$, то $s_k = \hat{s}_k = \left[\dfrac{M}{2^{k-m}}\right] + 1.$

Таким образом доказано, что все слагаемые сумм S_n и S_{n-1} с одинаковыми индексами равны, кроме слагаемых с индексом $m+1$, где m — степень 2 в разложении числа n на простые сомножители. Причем разность слагаемых с индексом $m+1$ равна 1.

Ответ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = n$, где $n \in \mathbb{N}$.

430. [8, с. 129] Вычислите сумму $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\dfrac{n}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]^2$, где $n \in \mathbb{N}$.

Указание. Решение данной задачи аналогично решению задачи *429*. Отличие лишь в том, что $s_{m+1} - \hat{s}_{m+1} = 2n$ (в обозначениях указанной задачи).

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\dfrac{n}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]^2 = n\big(n+1\big)$, где $n \in \mathbb{N}$.

431. Вычислите сумму $\left[\sum\limits_{k=2}^{n+1} \sqrt[k]{\dfrac{k}{k-1}}\right]$.

Решение. Обозначим сумму через S_n. Каждое из n слагаемых S_n больше 1, значит, $S_n > n$. Выполним оценку для корня, стоящего под знаком суммы: $\sqrt[k]{\dfrac{k}{k-1}} = \left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} =$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{k(k-1)}\cdot k\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant 1+\frac{1}{k(k-1)}}_{\textit{неравенство Бернулли } (\text{Б}.9)} = 1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Тогда

$$S_n \leqslant \left[\sum_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right] =$$
$$= \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= n+1-\frac{1}{n+1} < n+1.$$

Поскольку $n < S_n < n+1$, то $[S_n] = n$.
Ответ: n.

432. Вычислите сумму $S = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \left\{\dfrac{ak+b}{m}\right\}$, где a, b, m, $n \in \mathbb{N}$, a и m — взаимно простые числа.

Решение. Область значений выражения $ak+b \pmod{m}$ — это множество $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\}$, см. п. А.8. Тогда

$$S=\left\{\frac{1}{m}\right\}+\left\{\frac{2}{m}\right\}+\ldots+\left\{\frac{m-1}{m}\right\}=\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\ldots+\frac{m-1}{m}=\frac{m-1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{m-1}{2}$.

Примечание. В условии задачи a, b, n можно назначить целыми числами. Формула суммы представляет интерес лишь при $m>1$, хотя верна и при $m=1$.

433. Вычислите сумму $S=\sum\limits_{k=1}^{p-1}\left[\dfrac{kn}{p}\right]$, где $p\in\mathbb{P}$ и $n\in\mathbb{N}_{<p}$.

Решение. Поскольку n и p — взаимно простые числа, применима формула $(92a)$, доказываемая в задаче *92*.

Ответ: $\dfrac{(n-1)(p-1)}{2}$.

434. (Тайвань/1998) Докажите, что

$$S=\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{nm-n-m+\text{НОД}\,(n,\ m)}{2},\quad \text{где } n,\ m\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Если m и n — взаимно простые числа, то есть НОД $(n,\ m)=1$, то частный случай исходной формулы доказывается способом, идентичным решению задачи *433*:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{nm-n-m+1}{2}.$$

Пусть НОД $(n,\ m)=d$. Тогда $n=dv$ и $m=dw$, где НОД $(v,\ w)=1$. Подставим в сумму S соответствующие значения вместо n и m

$$S=\sum_{k=0}^{dw-1}\left[\frac{kdv}{dw}\right].$$

Представим индекс k в виде $k=iw+j$, где $0\leqslant i\leqslant d-1$ и $0\leqslant j\leqslant w-1$:

$$S=\sum_{k=0}^{dw-1}\left[\frac{kdv}{dw}\right]=\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{w-1}\left[\frac{(iw+j)v}{w}\right]=\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{w-1}\left(iv+\left[\frac{jv}{w}\right]\right)=$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \left(ivw + \sum_{j=0}^{w-1} \left[\frac{jv}{w} \right] \right) = \sum_{i=0}^{d-1} \left(ivw + \frac{vw - v - w + 1}{2} \right) =$$

$$= vw \cdot \frac{d(d-1)}{2} + d \cdot \frac{vw - v - w + 1}{2} = \frac{d^2vw - dv - dw + d}{2}.$$

$$= \frac{nm - n - m + \text{НОД}\,(n,\, m)}{2}.$$

■

435. (Япония/1995) Докажите, что

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{kn}{m} \right\} = \frac{m - \text{НОД}\,(n,\, m)}{2}, \quad \text{где } n,\ m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство.

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{kn}{m} \right\} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{kn}{m} - \left[\frac{kn}{m} \right] \right) = \frac{n}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} k - \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{kn}{m} \right] = \ldots$$

Воспользуемся результатом задачи *434*

$$\ldots = \frac{n}{m} \cdot \frac{m(m-1)}{2} - \frac{nm - n - m + \text{НОД}\,(n,\, m)}{2} = \frac{m - \text{НОД}\,(n,\, m)}{2}.$$

■

436. (Германия/2002) Вычислите сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \left[\frac{k^3}{p} \right]$, где $p \in \mathbb{P}$.

Указание.

$$\left[\frac{k^3}{p} \right] + \left[\frac{(p-k)^3}{p} \right] = p^2 - 3pk + 3k^2 - 1.$$

Ответ: $\dfrac{(p-2)(p^2-1)}{4}$.

437. (*LinkedIn/MO*) Выведите формулу для

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\log_2 \frac{2n-1}{2k-1} \right]. \qquad (437a)$$

Решение. Последнее слагаемое равно 0, поэтому будем вычислять сумму

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\log_2 \frac{2n-1}{2k-1}\right] \ (n \geqslant 2), \quad S(1) = 0. \tag{437б}$$

В дальнейшем нам пригодится тождество, которое выполняется для любых нечетных $0 < b < a$ (тождество понять несложно, строгое обоснование см. задачу *133*)

$$\left[\log_2 \frac{a}{b}\right] = \left[\log_2 \frac{a-1}{b}\right]. \tag{437в}$$

Пусть n — четное число (т.е. $\boldsymbol{n = 2m}$). Заметим, что

$$\left[\log_2 \frac{2n-1}{2k-1}\right] = \begin{cases} 1,\, 2,\, \ldots, & \text{если } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m, \\ 0, & \text{если } k = m+1,\, m+2,\, \ldots,\, 2m. \end{cases}$$

Тогда

$$S(2m) = \sum_{k=1}^{m} \left[\log_2 \frac{4m-1}{2k-1}\right] \overset{(437в)}{=} \sum_{k=1}^{m} \left[\log_2 \frac{4m-2}{2k-1}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\log_2 \frac{2(2m-1)}{2k-1}\right] = \sum_{k=1}^{m} \left[1 + \log_2 \frac{2m-1}{2k-1}\right] =$$

$$= m + \sum_{k=1}^{m} \left[\log_2 \frac{2m-1}{2k-1}\right] \overset{(437а)}{=} m + S(m).$$

Теперь рассмотрим другой случай, когда n — нечетное число (т.е. $\boldsymbol{n = 2m - 1}$). Здесь похожая ситуация с нулевыми слагаемыми суммы

$$\left[\log_2 \frac{2n-1}{2k-1}\right] = \begin{cases} 1,\, 2,\, \ldots, & \text{если } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m-1, \\ 0, & \text{если } k = m,\, m+2,\, \ldots,\, 2m-1. \end{cases}$$

Тогда

$$S(2m-1) = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\log_2 \frac{4m-3}{2k-1}\right] \overset{(437в)}{=} \sum_{k=1}^{m-1} \left[\log_2 \frac{4m-4}{2k-1}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \left[\log_2 \frac{2(2m-2)}{2k-1}\right] = m - 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\log_2 \frac{2m-2}{2k-1}\right] \overset{(437в)}{=}$$

$$= m - 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\log_2 \frac{2m-1}{2k-1}\right] \overset{(437б)}{=} m - 1 + S(m).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} S(1) = 0, \\ S(2m) = m + S(m), \\ S(2m-1) = m - 1 + S(m). \end{cases}$$

Из данных соотношений несложно сделать вывод, что

$$S(n) = 1 + S(n-1), \quad S(1) = 0.$$

Ответ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\log_2 \frac{2n-1}{2k-1}\right] = n - 1.$

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

22. Задачи на мантиссу

Большинство задач на мантиссу решаются приведением мантиссы к антье, что объяснимо — работать с целыми значениями зачастую существенно проще. Однако встречаются задачи, в которых мантисса «играет» первую скрипку. Помимо таких задач в данный раздел включены задания с оригинальными, порой причудливыми, утверждениями относительно мантисс (оценки, области значений). Именно такой является «задача о расположении $\{n\alpha\}$» (см. далее) — значимая формулировка и кратчайшее решение, основанное на свойствах мантиссы.

Легенда гласит, что П. Дирихле сформулировал принцип, носящий его имя, при решении «задачи о расположении $\{n\alpha\}$» — задачи о расположении на интервале $(0,\,1)$ действительных чисел вида $\{n\alpha\}$, где числа n и α — натуральное и иррациональное соответственно. Если легенда является историческим фактом, то принцип Дирихле обязан своим появлением мантиссе!

«Задача о расположении $\{n\alpha\}$» представлена в виде двух утверждений.

438. Пусть α — некоторое иррациональное число. Докажите, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа n и m такие, что

$$\{n\alpha\} < \varepsilon \quad \text{и} \quad 1 - \{m\alpha\} < \varepsilon. \qquad (438a)$$

Доказательство. Пусть $k = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Разобьем интервал $\big(0,\,1\big)$ на k равных интервалов.

Среди чисел $\{n\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, ..., $\{(k+1)\alpha\}$ какая-нибудь пара обязательно попадет в один из k интервалов (согласно принципу Дирихле).

Пусть такой парой будут числа $\{p\alpha\}$ и $\{q\alpha\}$ $(p,\, q \in \mathbb{N})$. Для определенности будем считать, что $\{p\alpha\} > \{q\alpha\}$. Тогда

$$0 < \{p\alpha\} - \{q\alpha\} < \varepsilon, \quad \text{или}$$
$$\{\alpha(p-q)\} < \varepsilon. \tag{438б}$$

1) Если $\boldsymbol{p > q}$, то $\boldsymbol{n = p - q}$, означающее, что $\{n\alpha\} \in \left(0,\, \dfrac{1}{k+1}\right)$. Предположим, $\{n\alpha\} = \delta$ $(0 < \delta < \varepsilon)$. Тогда $\boldsymbol{m = n \cdot \left[\dfrac{1}{\delta}\right]}$, так как

$$\left[\frac{1}{\delta}\right] \cdot \{n\alpha\} = \left\{\left[\frac{1}{\delta}\right] \cdot \{n\alpha\}\right\} = \left\{\left[\frac{1}{\delta}\right] \cdot n\alpha\right\} \quad \text{и}$$
$$1 - \varepsilon < \left[\frac{1}{\delta}\right] \cdot \{n\alpha\} < 1.$$

2) Если $\boldsymbol{p < q}$, то под знаком мантиссы в (438б) стоит отрицательное нецелое выражение. Согласно (2.7) получим $1 - \{\alpha(q-p)\} < \varepsilon$, т.е. $\boldsymbol{m = q - p}$ и $\{m\alpha\} \in \left(\dfrac{k}{k+1},\, 1\right)$. Предположим, $1 - \{m\alpha\} = \delta$ $(0 < \delta < \varepsilon)$. Тогда $\boldsymbol{n = m \cdot \left[\dfrac{1}{\delta}\right]}$. Покажем, что $\{n\alpha\} < \varepsilon$:

$$\{n\alpha\} = \left\{\left[\frac{1}{\delta}\right] \cdot m\alpha\right\} = \left\{\left[\frac{1}{\delta}\right] \cdot (1-\delta)\right\} = \left\{-\delta \cdot \left[\frac{1}{\delta}\right]\right\} = \left\{\delta \cdot \left\{\frac{1}{\delta}\right\}\right\} < \varepsilon.$$

■

439. Пусть α — некоторое иррациональное число. Докажите, что для любых $0 < a < 1$ и сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n такое, что $\left|\{n\alpha\} - a\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Согласно результатам предыдущей задачи найдется $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется оценка $\{m_0\alpha\} < \varepsilon$.

Пусть $\{m_0\alpha\} = \delta$, отметим, что $0 < \delta < \varepsilon$.

Чтобы выполнялось неравенство $a - \varepsilon < n_0\delta < a + \varepsilon$, достаточно взять $n_0 = \left[\dfrac{a+\varepsilon}{\delta}\right]$. Понятно, что $n_0 \geqslant 1$.

Поскольку ε — малая величина (в этом весь смысл), то можно считать $a + \varepsilon < 1$. Тогда $n_0\{m_0\alpha\} < 1$, следовательно, $n_0\{m_0\alpha\} = \{n_0 m_0\alpha\}$.

Таким образом, искомое $n = n_0 m_0$.

■

Примечание. Утверждения 438 и 439 характеризуют множество действительных чисел вида $\{n\alpha\}$ как *всюду плотное подмножество* на отрезке $[0, 1]$.

На самом деле, все действительные числа $\{n\alpha\}$ являются иррациональными (см. задачу 15). Данное свойство неявно используется в доказательстве указанных утверждений.

Рассмотрим типовые задачи на оценку мантиссы от арифметического корня. Покажем, что в определенном классе функций натурального аргумента имеются точная нижняя оценка (миноранта) и точная верхняя оценка (мажоранта) для таких мантисс.

440. Докажите, что если натуральное число n не является полным квадратом, то

$$\left\{\sqrt{n}\right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}. \tag{440a}$$

Доказательство. При равносильных преобразованиях используется тождество из задачи 25, согласно которому $\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n-1}\right]$.

$$\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} > \left[\sqrt{n}\right],$$

$$n - 1 + \frac{1}{4n} > \left[\sqrt{n}\right]^2,$$

$$n - 1 \geqslant \left[\sqrt{n}\right]^2,$$

$$\sqrt{n-1} \geqslant \left[\sqrt{n-1}\right].$$

■

441. Определите такие значения $\alpha > 0$, для которых при любом натуральном n, которое не является полным квадратом, выполняется неравенство

$$\left\{\sqrt{n}\right\} > \frac{1}{\alpha\sqrt{n}}. \tag{441a}$$

Решение. Воспользуемся результатами задач 34 и 35, согласно которым наименьшая мантисса вида $\left\{\sqrt{k^2+m}\right\}$, где $k,\ m \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant m \leqslant 2k$, равна $\left\{\sqrt{k^2+1}\right\}$.

Следовательно, должна выполняться цепочка неравенств

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{k^2+m}} < \frac{1}{\alpha\sqrt{k^2+1}} < \left\{\sqrt{k^2+1}\right\} < \left\{\sqrt{k^2+m}\right\}.$$

Приведем неравенство ($441a$) к виду

$$\left\{\sqrt{k^2+1}\right\} > \frac{1}{\alpha\sqrt{k^2+1}},$$

Поскольку $\left[\sqrt{k^2+1}\right] = k$, то

$$\sqrt{k^2+1} - k > \frac{1}{\alpha\sqrt{k^2+1}},$$

$$\sqrt{k^2+1} - \frac{1}{\alpha\sqrt{k^2+1}} > k,$$

$$1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(k^2+1)} > 0,$$

$$(\alpha-1)^2 > 1 - \frac{1}{\alpha^2(k^2+1)}.$$

k — любое натуральное число, значит, $(\alpha-1)^2 \geqslant 1$. В условии задачи речь идет о положительных α, следовательно, $\alpha \geqslant 2$.

Ответ: $\alpha \geqslant 2$.

Примечание. Среди функций вида $f(n) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ точной минорантой для выражения $\left\{\sqrt{n}\right\}$ является функция $f(n)$ при $\alpha = 2$, т.е. усилить оценку ($440a$) нельзя.

442. Определите такие значения $\alpha > 0$, для которых при любом натуральном n, которое не является полным квадратом, выполняется неравенство

$$\left\{\sqrt{n}\right\} \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha\sqrt{n}}. \qquad (442a)$$

Решение. Несложная проверка показывает, что условия на α должно быть более строгим. Убедитесь самостоятельно в неравенстве

$$\left\{\sqrt{3}\right\} > 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $\alpha > 2$.

Пусть $k,\ m \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant m \leqslant 2k$, тогда

$$\left\{\sqrt{k^2+m}\right\} = \sqrt{k^2+m} - k,$$

и неравенство ($442a$) примет вид

$$\sqrt{k^2+m} + \frac{1}{\alpha\sqrt{k^2+m}} \leqslant k+1,$$

$$m + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(k^2+m)} \leqslant 2k+1.$$

Поскольку $\alpha > 2$, то последнее неравенство выполняется при всех $1 \leqslant m \leqslant 2k-1$. Рассмотрению подлежит лишь случай $m = 2k$.

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(k^2+2k)} \leqslant 1, \quad \text{или}$$

$$(\alpha-1)^2 \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}.$$

Здесь достаточно взять $k=1$, т.е. $(\alpha-1)^2 \geqslant \dfrac{4}{3}$.

Ответ: $\alpha \geqslant 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Примечание. Среди функций вида $f(n) = 1 - \dfrac{1}{\alpha\sqrt{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) точной мажорантой для выражения $\left\{\sqrt{n}\right\}$ является функция $f(n)$ при $\alpha = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, причем равенство достигается только при $n = 3$.

22.1. Задачи по теме раздела

443. Функция $f(x) = \{x\} + \{x\sqrt{2}\}$ определена на всей числовой прямой. Докажите, что $f(x)$ является непериодической функцией.

444. Функция $f(x) = \{x\} + \sin x$ определена на всей числовой прямой. Докажите, что $f(x)$ является непериодической функцией.

445. Докажите, что если натуральное число n не является полным квадратом, то $\{\sqrt{n}\}^k$ — иррациональное число при любом $k \in \mathbb{N}$.

446. Пусть n — натуральное число, которое не является полным квадратом. Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ сумма

$$S(k) = \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n}\}^2 + \ldots + \{\sqrt{n}\}^k$$

принимает только иррациональные значения.

447. Пусть множество M состоит из натуральных чисел, не превосходящих 2015 и не являющимися полными квадратами. Докажите, что: 1) для любого $n \in M$ выполняется неравенство $\{\sqrt{n}\} > 0{,}011$; 2) существует $k \in M$, для которого выполняется неравенство $\{\sqrt{k}\} < 0{,}0115$.

448. Докажите, что неравенство $\left\{2^n\sqrt{2}\right\} > \dfrac{1}{2}$ имеет бесконечное количество решений в натуральных числах.

449. Для действительных чисел a, b, c, d выполняются равенства:

$$\{a+b+c\} = \{a+b+d\} = \{a+c+d\} = \{b+c+d\} = \frac{1}{4}.$$

Какие значения принимает мантисса $\{a+b+c+d\}$?

450. Найдите множество значений выражения

$$f(x,\, y,\, z) = \left\{\frac{xyz}{xy+yz+zx}\right\}, \quad \text{где } x,\, y,\, z \in \mathbb{N}.$$

451. Пусть m и n — некоторые натуральные числа. Докажите, что существует действительное число x такое, что одновременно выполняются неравенства

$$\frac{1}{3} \leqslant \{nx\} \leqslant \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} \leqslant \{mx\} \leqslant \frac{2}{3}.$$

452. Натуральное число n дает остаток 4 при делении на 9. Докажите неравенство
$$\{\sqrt[3]{n}\} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\ .$$

453. 1) Докажите неравенство
$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

2) Докажите, что для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство
$$\left\{n\sqrt{2}\right\} < \frac{1}{2n\sqrt{2}} + \varepsilon.$$

454. Определите такие значения $\alpha > 0$, для которых при любом натуральном n выполняется неравенство
$$\left\{n\sqrt{2}\right\} \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha n}.$$

455. Докажите неравенство
$$\left[n\sqrt{2}\right] \cdot \left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{2}{5}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

456. 1) Докажите неравенство
$$\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}, \ \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

2) Определите, существует ли $c \in \mathbb{R}_{>1}$ такое, что
$$\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}, \ \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

457. Докажите неравенство
$$\left[n\sqrt{3}\right] \cdot \left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{3}{5}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

458. 1) Докажите неравенство

$$\frac{1}{2n} < \left\{n\sqrt{7}\right\} < 1 - \frac{1}{6n}, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

459. Докажите неравенство

$$\left[n\sqrt{7}\right] \cdot \left\{n\sqrt{7}\right\} > \frac{6}{5}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

См. также задачи: *85*, *144*, *164*, *167*, *171*, *242*, *304-314*, *350*, *352*, *423*, *432*, *435*, *508*.

22.2. Указания, решения, ответы

443. (*AoPS*) Функция $f(x) = \{x\} + \{x\sqrt{2}\}$ определена на всей числовой прямой. Докажите, что $f(x)$ является непериодической функцией.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ периодическая с периодом $T > 0$, т.е. равенство $f(x) = f(x+T)$ выполнятеся для любых $x \in \mathbb{R}$, в том числе, и при $x = 0$. Тогда должно выполняться равенство $f(0) = f(T)$, или $\{T\} + \{T\sqrt{2}\} = 0$, из которого следует, что T и $T\sqrt{2}$ одновременно принимают целые значения, чего не может быть при $T > 0$.

■

444. (*AoPS*) Функция $f(x) = \{x\} + \sin x$ определена на всей числовой прямой. Докажите, что $f(x)$ является непериодической функцией.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ периодическая с периодом $T > 0$, т.е. равенство $f(x) = f(x+T)$ выполняется для любых $x \in \mathbb{R}$, в том числе, при $x = 0$ и $x = -T$. Тогда должны выполняться равенства $f(0) = f(T) = f(-T)$, или

$$\begin{cases} \{T\} + \sin T = 0, \\ \{-T\} - \sin T = 0. \end{cases} \tag{444a}$$

После суммирования получим равенство $\{T\}+\{-T\} = 0$. из которого следует, что $T \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Поскольку $\sin T \neq 0$ при целых ненулевых значениях T, равенства (444a) не могут выполняться.

■

445. Докажите, что если натуральное число n не является полным квадратом, то $\{\sqrt{n}\}^k$ — иррациональное число при любом $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Понятно, что $0 < \{\sqrt{n}\}^k < 1$. Тогда после возведения в степень $\{\sqrt{n}\}^k = (\sqrt{n} - [\sqrt{n}])^k$ и приведения подобных слагаемых коэффициент при $\sqrt{n}$ не может быть равен нулю, значит, $\{\sqrt{n}\}^k$ — иррациональное число.

■

446. (ChWMO/2006) Пусть n — натуральное число, которое не является полным квадратом. Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ сумма

$$S(k) = \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n}\}^2 + \ldots + \{\sqrt{n}\}^k$$

принимает только иррациональные значения.

Доказательство. Определим два непересекающихся множества иррациональных чисел:

$$\mathcal{L} = \left\{a\sqrt{n} - b \,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\mathcal{R} = \left\{a - b\sqrt{n} \,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{N}\right\}.$$

Исследуем замкнутость множеств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ относительно операций сложения и умножения, перекрестное умножение элементов из двух множеств и умножение на $\sqrt{n}$, пусть $l,\, l_1,\, l_2 \in \mathcal{L}$ и $r,\, r_1,\, r_2 \in \mathcal{R}$:

1) $\{\sqrt{n}\} \in \mathcal{L}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, не являющегося полным квадратом;
2) $l_1 + l_2 \in \mathcal{L}, \quad r_1 + r_2 \in \mathcal{R}$;
3) $l_1 \cdot l_2 \in \mathcal{R}, \quad r_1 \cdot r_2 \in \mathcal{R}, \quad l \cdot r \in \mathcal{L}$;
4) $\sqrt{n} \cdot l \in \mathcal{R}, \quad \sqrt{n} \cdot r \in \mathcal{L}$;
5) $l^{2k} \in \mathcal{R}, \quad l^{2k-1} \in \mathcal{L}, \quad r^{2k} \in \mathcal{R}, \quad r^{2k-1} \in \mathcal{R}$.

Рассмотрим сумму для четных значений $k = 2m$.

$$S(2m) = \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n}\}^2 + \ldots + \{\sqrt{n}\}^{2m} =$$

$$= \Big(\{\sqrt{n}\} + 1\Big) \cdot \Big(\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n}\}^3 + \ldots + \{\sqrt{n}\}^{2m-1}\Big).$$

Согласно свойствам 1)-4): правый множитель — сумма элементов из множества $\mathcal{L}$, т.е. принадлежит множеству $\mathcal{L}$; $\{\sqrt{n}\} + 1 \in \mathcal{L}$ при $n \geqslant 5$, а при $n = 2$ и 3 имеет место равенство $\{\sqrt{n}\} + 1 = \sqrt{n}$. Делаем вывод, что $S(2m) \in \mathcal{R}$, значит, $S(2m)$ является иррациональным числом.

Теперь рассмотрим нечетный случай, т.е. $k = 2m - 1$.

$$S(2m-1) = \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n}\}^2 + \ldots + \{\sqrt{n}\}^{2m-1} =$$

$$= \{\sqrt{n}\} + \Big(\{\sqrt{n}\} + 1\Big) \cdot \Big(\{\sqrt{n}\}^2 + \{\sqrt{n}\}^4 + \ldots + \{\sqrt{n}\}^{2m-2}\Big).$$

Используя свойства 1)-4), получим, что $S(2m-1) \in \mathcal{L}$: сумма четных степеней принадлежит множеству $\mathcal{R}$, умножение на $\{\sqrt{n}\} + 1$ переводит в элемент множества $\mathcal{L}$, остается прибавить $\{\sqrt{n}\} \in \mathcal{L}$.

Следовательно, и $S(2m-1)$ является иррациональным числом. ■

447. (Беларусь/2015) Пусть множество M состоит из натуральных чисел, не превосходящих 2015 и не являющимися полными квадратами. Докажите, что:

1) для любого $n \in M$ выполняется неравенство
$$\{\sqrt{n}\} > 0{,}011;$$

2) существует $k \in M$, для которого выполняется неравенство
$$\{\sqrt{k}\} < 0{,}0115.$$

Доказательство. Не будем применять формулу (440*a*), а обратимся к результатам задач *34* и *35*, согласно которым наименьшая мантисса вида $\{\sqrt{\cdot}\}$ для чисел из множества M равна $\left\{\sqrt{44^2+1}\right\}$.

Выполним проверку, пусть $k = 44$, $\alpha = 0{,}0115$, $\beta = 0{,}011$.
$$\beta < \left\{\sqrt{k^2+1}\right\} < \alpha,$$
$$k + \beta < \sqrt{k^2+1} < k + \alpha,$$
$$k^2 + 2k\beta + \beta^2 < k^2 + 1 < k^2 + 2k\alpha + \alpha^2.$$

Остается убедиться, что
$$2k\beta + \beta^2 < 1 < 2k\alpha + \alpha^2,$$
или упрощая арифметику, $89 \cdot 0{,}011 < 1 < 88 \cdot 0{,}0115$. ∎

448. (Фрагмент IMO$^{\circ}$/1985) Докажите, что неравенство
$$\left\{2^n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2}$$
имеет бесконечное количество решений в натуральных числах.

Доказательство. Представим $\sqrt{2}$ в двоичной системе счисления
$$\sqrt{2} = 1 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^{-1} + b_2 \cdot 2^{-2} + \ldots + b_i \cdot 2^{-i} + \ldots =$$
$$= \left(\overline{1{,}b_1 b_2 \ldots b_i \ldots}\right)_2, \quad \text{где } b_i = 0 \text{ или } 1.$$

Тогда мантисса из левой части неравенства имеет следующий вид в двоичной записи
$$\left\{2^i\sqrt{2}\right\} = \left(\overline{0{,}b_i b_{i+1} \ldots}\right)_2$$

(умножение на 2 — это перенос двоичной запятой на один знак вправо).

Так как $\sqrt{2}$ — иррациональное число, количество цифр «1» в дробной части двоичной записи числа бесконечно, что доказывает неограниченность значений n, при которых выполняется исходное неравенство

$$\left\{2^n\sqrt{2}\right\} = \left(\overline{0{,}b_n b_{n+1}\ldots}\right)_2 > (0{,}1)_2 = \frac{1}{2}.$$

■

449. (Украина/2014) Для действительных чисел a, b, c, d выполняются равенства:

$$\{a+b+c\} = \{a+b+d\} = \{a+c+d\} = \{b+c+d\} = \frac{1}{4}.$$

Какие значения принимает мантисса $\{a+b+c+d\}$?

Решение. Поскольку для любых x, $y \in \mathbb{R}$ равенства $\{x\} = \{y\}$ и $\{x-y\} = 0$ равносильны, то

$$\{a\} = \{b\} = \{c\} = \{d\}.$$

Тогда по условию $\{3\{a\}\} = \dfrac{1}{4}$, означающее, что $3\{a\}$ принимает значения: $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{5}{4}$ и $\dfrac{9}{4}$.

Следовательно, $4\{a\}$ принимает значения: $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{5}{3}$ и 3.

Наконец, $\{4\{a\}\}$ принимает значения: $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$ и 0.

Ответ: 0, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$.

450. (Санкт-Петербург*/1999, А. Храбров) Найдите множество значений выражения

$$f(x,\,y,\,z) = \left\{\frac{xyz}{xy+yz+zx}\right\}, \quad \text{где } x,\,y,\,z \in \mathbb{N}.$$

Решение. Очевидно, что $f(x,\,y,\,z)$ принимает рациональные значения из полуинтервала $[0,\,1)$, например, $f(1,\,1,\,1) = \dfrac{1}{3}$, $f(1,\,2,\,2) = \dfrac{1}{2}$, $f(3,\,3,\,3) = 0$.

Обозначим

$$F(x,\,y,\,z)=\frac{xyz}{xy+yz+zx}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

Обратим внимание на свойство $F(kx,\,ky,\,kz)=kF(x,\,y,\,z)$.

Воспользуемся (см. п. А.8.) тем, что если a и m — взаимно простые числа и $k\in M=\{0,\,1,\,\ldots,\,m-1\}$, то $ak\pmod m\in M$.

Пусть $\bigl\{F(x,\,y,\,z)\bigr\}=\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, где $p,\,q\in\mathbb{N}$, $0<p<q$. Тогда если $k\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q-1\}$, то

$$\bigl\{F(kx,\,ky,\,kz)\bigr\}=\bigl\{kF(x,\,y,\,z)\bigr\}=\left\{\frac{kp}{q}\right\}\in\left\{\frac{0}{q},\,\frac{1}{q},\,\ldots,\,\frac{q-1}{q}\right\}.$$

Делаем вывод: если выражение $f(x,\,y,\,z)$ равно некоторой обыкновенной несократимой дроби со знаменателем q, то все обыкновенные несократимые дроби со знаменателем q входят в множество значений $f(x,\,y,\,z)$.

Покажем, что можно подобрать такие значения x, y и z, что выражение $f(x,\,y,\,z)$ будет равно обыкновенной несократимой дроби определенного вида с любым наперед заданным натуральным знаменателем q:

$$f\bigl(1,\,2q,\,2q\bigr)=\frac{q}{q+1}.$$

Таким образом, любое рациональное число из полуинтервала $\bigl[0,\,1\bigr)$ входит в множество значений выражения $f(x,\,y,\,z)$.

Ответ: $f(x,\,y,\,z)\in\mathbb{Q}_{[0,\,1)}$.

451. (Венгрия-Израиль/1994) Пусть m и n — некоторые натуральные числа. Докажите, что существует действительное число x такое, что одновременно выполняются неравенства

$$\frac{1}{3}\leqslant\{nx\}\leqslant\frac{2}{3}\quad\text{и}\quad\frac{1}{3}\leqslant\{mx\}\leqslant\frac{2}{3}.$$

Доказательство. Решим неравенство

$$\frac{1}{3}\leqslant\{nx\}\leqslant\frac{2}{3},\tag{451a}$$

считая n параметром. Для $k\in\mathbb{Z}$

$$k+\frac{1}{3}\leqslant nx\leqslant k+\frac{2}{3},$$

$$\frac{k}{n}+\frac{1}{3n}\leqslant x\leqslant\frac{k}{n}+\frac{2}{3n}.\tag{451a'}$$

Решением неравенства (451a) является совокупность числовых отрезков длиной $\dfrac{1}{3n}$, которые чередуются через интервалы длиной $\dfrac{2}{3n}$ (на этих интервалах решений нет).

Неравенство
$$\frac{1}{3} \leqslant \{mx\} \leqslant \frac{2}{3} \tag{451б}$$
решается аналогично. Для $l \in \mathbb{Z}$
$$\frac{l}{m} + \frac{1}{3m} \leqslant x \leqslant \frac{l}{m} + \frac{2}{3m}. \tag{451б$'$}$$

Пусть для определенности $n > m$.

Докажем, что две совокупности сегментов (451a') и (451$б'$) обязательно пересекаются.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что сегменты (451a') и (451$б'$) не имеют ни одной общей точки. Это означает, что интервалы длины $\dfrac{2}{3n}$, на которых неравенство (451a) не имеет решений, включают все сегменты (451$б'$). То есть $\dfrac{1}{3m} < \dfrac{2}{3n}$, или, добавив к этому неравенству условие $n > m$, получим
$$\frac{1}{3n} < \frac{1}{3m} < \frac{2}{3n}. \tag{451в}$$

Неравенство (451$в$) определяет расположение на числовой прямой концов двух сегментов $\left[\dfrac{1}{3n}, \dfrac{2}{3n}\right]$ и $\left[\dfrac{1}{3m}, \dfrac{2}{3m}\right]$, то есть данные сегменты пересекаются. Значит, предположение опровергнуто. ■

452. (Санкт-Петербург*/2009, А. Храбров) Натуральное число n дает остаток 4 при делении на 9. Докажите неравенство
$$\{\sqrt[3]{n}\} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\ .$$

Доказательство. Выполним равносильные преобразования
$$\sqrt[3]{n} - [\,\sqrt[3]{n}\,] \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},$$
$$\sqrt[3]{n} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geqslant [\,\sqrt[3]{n}\,]\,,$$
$$n - 3 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \geqslant [\,\sqrt[3]{n}\,]^3\,.$$

Поскольку $0 < \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2} < 1$ при $n \geqslant 3$, а наименьшее n, удовлетворяющее условию задачи, равно 4, то

$$n - 3 \geqslant \left[\sqrt[3]{n}\right]^3,$$
$$\sqrt[3]{n-3} \geqslant \left[\sqrt[3]{n}\right].$$

Согласно условию задачи $n = 9m + 4$, где $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда

$$\sqrt[3]{9m+1} \geqslant \left[\sqrt[3]{9m+4}\right].$$

В задаче *374* доказывается тождество, фрагмент которого имеет вид $\left[\sqrt[3]{9m+1}\right] = \left[\sqrt[3]{9m+4}\right]$. Таким образом,

$$\sqrt[3]{9m+1} \geqslant \left[\sqrt[3]{9m+1}\right],$$
$$\left\{\sqrt[3]{9m+1}\right\} \geqslant 0,$$
$$\left\{\sqrt[3]{n-3}\right\} \geqslant 0,$$

что выполняется при любых натуральных n, которые дают остаток 4 при делении на 9.

■

453. (IMO°/1979) 1) Докажите неравенство

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}. \qquad (453a)$$

2) Докажите, что для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} < \frac{1}{2n\sqrt{2}} + \varepsilon. \qquad (453б)$$

См. другой вариант доказательства — задача 165.

Доказательство. 1) Выполним равносильные преобразования

$$n\sqrt{2} - \frac{1}{2n\sqrt{2}} > \left[n\sqrt{2}\right],$$
$$2n^2 - 1 + \frac{1}{8n^2} > \left[n\sqrt{2}\right]^2,$$
$$2n^2 - 1 \geqslant \left[n\sqrt{2}\right]^2.$$

Воспользуемся тождеством $\left[\sqrt{2n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{2}\right]$, выведенным в задаче *368*. Тогда

$$2n^2 - 1 \geqslant \left[\sqrt{2n^2-1}\right]^2,$$

$$\sqrt{2n^2-1} \geqslant \left[\sqrt{2n^2-1}\right].$$

2) Для доказательства утверждения (453*б*) выполним равносильные преобразования

$$n\sqrt{2} - \frac{1}{2n\sqrt{2}} < \left[n\sqrt{2}\right] + \varepsilon,$$

$$n\sqrt{2} - \frac{1}{2n\sqrt{2}} < \left[\sqrt{2n^2-1}\right] + \varepsilon,$$

$$2n^2 - 1 + \frac{1}{8n^2} < \left(\left[\sqrt{2n^2-1}\right] + \varepsilon\right)^2.$$

Поскольку число $2n^2-1$ является полным квадратом для бесконечного количества n (см. п. А.21.), $2n^2-1=k^2$, $k \in \mathbb{N}$, то для таких n имеем

$$k^2 + \frac{1}{8n^2} < (k+\varepsilon)^2, \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{8n^2} < 2\varepsilon k + \varepsilon^2.$$

Если «отбросить» слагаемое ε^2, то последнее неравенство будет следствием неравенства

$$\frac{1}{8n^2} < 2\varepsilon k.$$

Итак, на определенном ранее бесконечном подмножестве натуральных чисел исходное неравенство (453*б*) является следствием неравенства

$$\frac{1}{16n^2\sqrt{2n^2-1}} < \varepsilon,$$

которое имеет решения для любого $\varepsilon > 0$ при указанных n.

Следовательно, утверждение (453*б*) доказано. ■

454. Определите такие значения $\alpha > 0$, для которых при любом натуральном n выполняется неравенство

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha n}. \tag{454a}$$

Доказательство. Рассмотрение двух частных случаев неравенства (454a) дает следующие результаты:

$$\text{при } n = 1 \ \alpha \geqslant \alpha_1, \text{ где } \alpha_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{при } n = 2 \ \alpha \geqslant \alpha_2, \text{ где } \alpha_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Следовательно, наверняка $\alpha \geqslant \alpha_2$.

Выполним равносильные преобразования:

$$n\sqrt{2} - \left[n\sqrt{2}\right] \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha n},$$

$$n\sqrt{2} + \frac{1}{\alpha n} \leqslant \left[n\sqrt{2}\right] + 1,$$

$$2n^2 + \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 n^2}}_{A(n)} \leqslant \left(\left[n\sqrt{2}\right] + 1\right)^2.$$

Вычисление оценки $A(n)$ при $n \geqslant 3$ и $\alpha = \alpha_2$ показывает, что $A(n) < 1$. Значит, равносильные преобразования можно продолжить при указанных n:

$$2n^2 < \left(\left[n\sqrt{2}\right] + 1\right)^2,$$

$$n\sqrt{2} < \left[n\sqrt{2}\right] + 1,$$

что является свойством антье (2.3).

Итак, если $\alpha = \alpha_2$, то неравенство (454a) строго выполняется при $n = 1$, $n \geqslant 3$ и превращается в равенство при $n = 2$.

Если $\alpha < \alpha_2$, то неравенство (454a) не выполняется при $n = 2$; если $\alpha > \alpha_2$, то неравенство является строгим для любых n.

Ответ: $\alpha \geqslant \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$.

455. Докажите неравенство

$$\left[n\sqrt{2}\right] \cdot \left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{2}{5}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Очевидно, что при $n = 1$ неравенство выполняется. Согласно (453*а*) при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

$$\left[n\sqrt{2}\right] \cdot \left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{\left[n\sqrt{2}\right]}{2n\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left\{n\sqrt{2}\right\}}{n\sqrt{2}}\right) > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{2}}\right) > \frac{2}{5}.$$

■

456. (Беларусь/2000) 1) Докажите неравенство

$$\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}. \tag{456а}$$

2) Определите, существует ли $c \in \mathbb{R}_{>1}$ такое, что

$$\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}. \tag{456б}$$

Доказательство. Неравенство из первого задания (456*а*) аналогично неравенству $\left\{n\sqrt{2}\right\} > \dfrac{1}{2n\sqrt{2}}$ (см. задачу *453*) и доказывается тем же способом с использованием тождеств (см. задачу *370*):

$$\left[\sqrt{3n^2-2}\right] = \left[\sqrt{3n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{3}\right].$$

Для доказательства утверждения из второго задания предположим, что существует такое действительное число $c > 1$, что имеет место неравенство (456*б*). Если рассмотреть частный случай неравенства при $n = 1$, то придем к выводу, что $c < \sqrt{3}$ — оценка «с запасом». Выполним равносильные преобразования (возведение в квадрат допустимо, поскольку левая часть больше нуля при $1 < c < \sqrt{3}$):

$$n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}} > \left[n\sqrt{3}\right],$$

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > \left[n\sqrt{3}\right]^2,$$

$$3n^2 - 2 + \frac{c^2}{3n^2} > \left[\sqrt{3n^2-2}\right]^2 + 2(c-1). \tag{456г}$$

Число $3n^2 - 2$ является полным квадратом для бесконечного количества значений n (см. п. А.22.), следовательно, при $n \in \mathbb{N}$ таких, что $\left\{\sqrt{3n^2-2}\right\} = 0$, неравенство (456*г*), которое примет вид

$$\frac{c^2}{3n^2} > 2\big(c-1\big), \text{ или } \frac{1}{6n^2} > \frac{c-1}{c^2},$$

должно выполняться при любом наперед заданном $1 < c < \sqrt{3}$ для бесконечного количества n, удовлетворяющих указанному выше условию. Однако это невозможно. Значит, не существует $c > 1$ такого, что выполняется (456*б*).

■

457. Докажите неравенство

$$\left[n\sqrt{3}\right] \cdot \left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{3}{5}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Очевидно, что при $n = 1$ неравенство выполняется. Согласно (456*а*) при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

$$\left[n\sqrt{3}\right] \cdot \left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{\left[n\sqrt{3}\right]}{n\sqrt{3}} = 1 - \frac{\left\{n\sqrt{3}\right\}}{n\sqrt{3}} > 1 - \frac{1}{n\sqrt{3}} > \frac{3}{5}.$$

■

458. (Беларусь/2005) Докажите неравенство

$$\frac{1}{2n} < \left\{n\sqrt{7}\right\} < 1 - \frac{1}{6n}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}. \qquad (458а)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим левое неравенство

$$\frac{1}{2n} < \left\{n\sqrt{7}\right\} \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \qquad (458в)$$

которое доказывается аналогично неравенству $\left\{n\sqrt{2}\right\} > \dfrac{1}{2n\sqrt{2}}$ (см. задачу *453*) с использованием тождеств из задачи *373*:

$$\left[\sqrt{7n^2-3}\right] = \left[\sqrt{7n^2-2}\right] = \left[\sqrt{7n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{7}\right].$$

Далее докажем правое неравенство (458*а*):

$$\begin{aligned}
\left\{n\sqrt{7}\right\} &< 1 - \frac{1}{6n},\\
n\sqrt{7} - \left[n\sqrt{7}\right] &< 1 - \frac{1}{6n},\\
n\sqrt{7} + \frac{1}{6n} &< \left[n\sqrt{7}+1\right],\\
7n^2 + \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{1}{36n^2}}_{<\,1 \text{ при } \forall n \in \mathbb{N}} &< \left[n\sqrt{7}+1\right]^2,
\end{aligned}$$

перейдем к натуральному неравенству

$$\begin{aligned}
7n^2 &< \left[n\sqrt{7}+1\right]^2,\\
n\sqrt{7} &< \left[n\sqrt{7}\right] + 1 \qquad \text{см. (2.2).}
\end{aligned}$$

Поскольку все преобразования были равносильные, исходное неравенство доказано.

■

459. Докажите неравенство

$$\left[n\sqrt{7}\right] \cdot \left\{n\sqrt{7}\right\} > \frac{6}{5}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Немного потренировавшись в арифметике, можно убедиться, что при $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ неравенство выполняется.

Согласно (458a) при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 5}$

$$\left[n\sqrt{7}\right] \cdot \left\{n\sqrt{7}\right\} > \frac{\left[n\sqrt{7}\right]}{2n} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} - \frac{\left\{n\sqrt{7}\right\}}{n}\right) > \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} - \frac{1}{n}\right) > \frac{6}{5}.$$

■

23. Функциональные уравнения и неравенства

Функциональные уравнения задают соотношение между значениями некоторой функции в различных точках. Обычно в таких задачах требуется определить вид (формулу) функции, исследовать свойства функции (без определения ее вида), вычислить значения функции в конкретных точках. В условии задачи приводится область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ в форме отображения $f : D(f) \to E(f)$.

При решении функциональных уравнений одним из основных методов является *метод подстановок*. Предположив что решение имеется, применяются подстановки к переменным, входящим в функциональное уравнение, для приведения уравнения к такому представлению, из которого можно сделать выводы о виде функции, пусть хотя бы на некотором множестве (например, на множестве целых чисел). Подстановки могут быть как числовые значения (в первую очередь 0 и ± 1), так и выражения, включающие обращение к другим функциям. Важно помнить, что найденное решение требует непосредственной *проверки* соответствию исходному уравнению.

Присутствие в функциональном уравнении антье и/или мантиссы дает дополнительное возможности для рассуждений, ведь появляются дополнительные варианты подстановок, например, когда значение аргумента лежит в полуинтервале $\big[0, 1\big)$ или когда некоторое выражение находится под знаком антье или мантиссы.

Если в функциональном уравнении идет речь о функции, область определения которой — множество $\mathbb{N}$, то вполне возможно, что уравнение выражает рекурсивную зависимость некоторой числовой последовательности, а задание определения вида (формулы) функции есть не что иное, как задание вывести формулу n-го элемента такой последовательности, см. раздел 20. «Числовые последовательности».

Тема данного раздела довольно обширна, решение задач напоминает подчас составление пазлов. Поэтому рекомендуем обратиться для изучения этой занимательной темы к дополнительной литературе, например, см. [11].

Следующая задача демонстрирует решение функционального уравнения, в котором присутствуют $[x]$ и $\{x\}$.

460. (*LinkedIn/MO*) Определите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$2x = f(x) + f\big([x]\big) + f\big(\{x\}\big). \tag{460a}$$

Решение. Если $x = 0$, то $f(0) = 0$.
Если $x \in \big(0, 1\big)$, то $f(x) = x$.
Если $x \in \mathbb{Z}$, то $f(x) = x$.
Если $x \in \mathbb{R}$, то $f\big(\{x\}\big) = \{x\}$ и $f\big([x]\big) = [x]$.

Ответ: $f(x) = x$.
Не забываем выполнить проверку подстановкой $f(x) = x$ в (460a).

В дальнейшем мы не будем упоминать выполнение такой проверки за исключением тех случаев, при которых будут отбрасываться посторонние решения.

Функциональные неравенства обычно используются в задачах на исследование определенных свойств функций, неявно заданных в неравенствах. Впрочем метод подстановок работает и при решении таких заданий. См. следующую задачу, также задачу *465*.

461. (*AoPS*) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ четная. Для любых $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$. Докажите, что

$$[f(x) \cdot f(y)] \geqslant [f(x)] \cdot [f(y)]\,.$$

Доказательство. Функция $f(x)$ четная, если для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(x) = f(-x)$. Следовательно,

$$f(x - x) \leqslant f(x) + f(-x), \quad f(0) \leqslant 2f(x).$$

Используя тот же прием, имеем $f(0) \geqslant 0$, т.е. функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения. Тогда согласно свойству антье (2.29) выполняется исходное равенство.

■

23.1. Задачи по теме раздела

462. Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x = f(x) + f\big([x]\big)\cdot f\big(\{x\}\big).$$

463. Определите все функции $f:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ выполняется равенство

$$x = f(x) + \sqrt{f^2\big([x]\big) + f^2\big(\{x\}\big)}.$$

Используется обозначение $f^2(z) = f(z)\cdot f(z)$.

464. Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f\big([x]\big) + f\big(\{x\}\big) = 2f(x) - x^2.$$

465. Задана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любого $x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$f\big(x\big)\cdot f\big([x]\big) \leqslant f\big(\{x\}\big)\cdot f\big(1-\{x\}\big).$$

Является ли $f(x)$ взаимно-однозначной?

466. Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x,\,y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f\left([x]\cdot y\right) = f(x)\cdot\left[f(y)\right].$$

467. Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x,\,y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\big[f(x+y)\big] = f^2(x+y) + f(x) + f(y).$$

Используется обозначение $f^2(z) = f(z)\cdot f(z)$.

23.2. Указания, решения, ответы

462. (*LinkedIn/MO*) Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x = f(x) + f\big([x]\big)\cdot f\big(\{x\}\big).$$

Решение. Если $x=0$, то $f(0)=0$ или $f(0)=-1$ (далее будет понятно, что этот случай не имеет смысла).

Если $x\in\big[0,\,1\big)$, то $f(x)=x$.

Если $x\in\mathbb{Z}$, то $f(x)=x$.

Если $x\in\mathbb{R}$, то $f\big(\{x\}\big)=\{x\}$ и $f\big([x]\big)=[x]$.

Ответ: $f(x)=x-[x]\,\{x\}$.

463. (*AoPS*) Определите все функции $f:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ выполняется равенство

$$x = f(x) + \sqrt{f^2\big([x]\big) + f^2\big(\{x\}\big)}.$$

Используется обозначение $f^2(z)=f(z)\cdot f(z)$.

Решение. Если $x=0$, то $f(0)=0$.

Если $x\in\big[0,\,1\big)$, то $f(x)=\dfrac{x}{2}$.

Если $x\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то $f(x)=\dfrac{x}{2}$.

Если $x\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, то $f\big(\{x\}\big)=\dfrac{\{x\}}{2}$ и $f\big([x]\big)=\dfrac{[x]}{2}$.

Ответ: $f(x)=x-\dfrac{\sqrt{[x]^2+\{x\}^2}}{2}$.

464. Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f\big([x]\big) + f\big(\{x\}\big) = 2f(x) - x^2.$$

Решение. Если $x=0$, то $f(0)=a$, где $a\in\mathbb{R}$.

Если $x\in\big[0,\,1\big)$, то $f(x)=a+\{x\}^2$.

Если $x\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то $f(x)=a+[x]^2$.

Если $x\in\mathbb{R}$, то $f\big(\{x\}\big)=a+\{x\}^2$ и $f\big([x]\big)=a+[x]^2$.

Ответ: $f(x)=a+\dfrac{x^2+[x]^2+\{x\}^2}{2}$, где $a\in\mathbb{R}$.

465. (*AoPS*) Задана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство
$$f(x) \cdot f([x]) \leqslant f(\{x\}) \cdot f(1 - \{x\}).$$
Является ли $f(x)$ взаимно-однозначной?

Решение. Напомним, что для взаимно-однозначной функции должно выполняться условие: если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Если $x = 0$, то $f^2(0) \leqslant f(0) \cdot f(1)$. Если $x = 1$, то $f^2(1) \leqslant f(0) \cdot f(1)$. Используется обозначение $f^2(z) = f(z) \cdot f(z)$.

Суммируя неравенства получим
$$f^2(0) + f^2(1) \leqslant 2f(0) \cdot f(1), \quad \big(f(0) - f(1)\big)^2 \leqslant 0,$$
значит, $f(0) = f(1)$, что нарушает условие взаимной однозначности.

Ответ: $f(x)$ не является взаимно-однозначной.

466. (IMO/2010, P. Bornsztein) Определите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство
$$f([x] \cdot y) = f(x) \cdot [f(y)]. \tag{466a}$$

Решение. Если поменять местами x и y и рассмотреть случай $y = 0$, то получим $f(0) = f(0)\,[f(x)]$.

1) Пусть $[f(x)] = 1$. Тогда
$$f([x]\,y) = f(x) \quad \text{для } \forall x, y \in \mathbb{R},$$
что означает
$$f(x) = C, \quad \text{где } 1 \leqslant C < 2.$$

2) Пусть $f(0) = 0$. Тогда при $1 \leqslant x < 2$
$$f(x)\,[f(x)] = 0, \quad \text{или} \quad [f(x)] = 0.$$
Из ($466a$) следует, что при $n \in \mathbb{Z}$
$$f(nx) = 0,$$
т.е. $f(x) = 0$ при любом действительном x.

Ответ: $f(x) = C$, где $C \in \{0\} \bigcup [1;\, 2)$.

467. (*AoPS*) Определите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $x,\ y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\big[f(x+y)\big]=f^2(x+y)+f(x)+f(y). \tag{467а}$$

Используется обозначение $f^2(z)=f(z)\cdot f(z)$.

Решение. Пусть $x=y=0$, тогда (467*а*) примет вид

$$\big[f(0)\big]=f^2(0)+2f(0),\quad \text{или}$$

$$[\alpha]=\alpha^2+2\alpha,\quad \text{где } \alpha=f(0). \tag{467б}$$

Уравнение (467*б*) равносильно системе

$$\begin{cases} 0\leqslant\alpha-\alpha^2-2\alpha<1,\\ \alpha^2+2\alpha\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

решение которой ($\alpha\in\{-1,\ 0\}$) предоставим читателю.

Пусть $y=0$, тогда (467*а*) примет вид

$$\big[f(x)\big]=f^2(x)+f(x)+f(0),\quad \text{или}$$

$$f^2(x)=-\big\{f(x)\big\}-f(0).$$

1) Если $f(0)=0$, то $f^2(x)=-\big\{f(x)\big\}$. Значит, $f^2(x)=0$ (мантисса принимает только неотрицательные значения), то есть в ответ пишем $f(x)=0$.

2) Если $f(0)=-1$, то

$$f^2(x)=1-\big\{f(x)\big\}. \tag{467в}$$

Следовательно, $f^2(x)\leqslant 1$, или $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

2а) Пусть $-1\leqslant f(x)<0$, тогда $\big\{f(x)\big\}=\big\{1+f(x)\big\}=1+f(x)$. Уравнение (467*в*) примет вид $f^2(x)=-f(x)$, или $f(x)\cdot\big(f(x)+1\big)=0$, что дает второй ответ $f(x)=-1$.

2а) Случай $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ не имеет смысла рассматривать, поскольку не выполняется условие $f(0)=-1$.

Ответ: $f(x)=-1,\ f(x)=0$.

24. Спектр действительного числа

Числовую последовательность вида $\{a_n\} = [n\alpha]$ называют *спектром* действительного числа α и обозначают как

$$\mathrm{S}(\alpha) = \{[\alpha],\ [2\alpha],\ [3\alpha],\ \ldots\}.$$

Другое название — *последовательности Битти*.[18]

Последовательность $[n\alpha]$ называется спектром, так как по спектру числа $\mathrm{S}(\alpha)$ однозначно определяется число α, доказательство см. п. 24.1.

Примеры спектров:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(2) &= \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots\}\\
\mathrm{S}\left(\frac{1}{4}\right) &= \{0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ \ldots\}\\
\mathrm{S}\left(-\frac{1}{3}\right) &= \{-1,\ -1,\ -1,\ -2,\ -2,\ \ldots\}\\
\mathrm{S}\left(\sqrt{2}\right) &= \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 19,\ \ldots\}\\
\mathrm{S}\left(2+\sqrt{2}\right) &= \{3,\ 6,\ 10,\ 13,\ 17,\ 20,\ \ldots\}
\end{aligned}$$

Просматривая первые элементы двух последних спектров можно высказать предположение, что каждое натуральное число один раз входит в один из спектров — это называется *разбиением* натурального ряда. Разбиение проверить нельзя, можно только доказать. Этот факт известен как *теорема Битти*:

пусть α и β — положительные иррациональные числа. Необходимым и достаточным условием разбиения множества натуральных чисел двумя спектрами $\mathrm{S}(\alpha)$ и $\mathrm{S}(\beta)$ является равенство $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. (Доказательство см. в пп. 24.3.-24.4.)

[18] С. Битти (S. Beatty, 1881–1970) — канадский математик.

А существует ли разбиение множества натуральных чисел тремя спектрами $\mathrm{S}(\alpha)$, $\mathrm{S}(\beta)$ и $\mathrm{S}(\gamma)$? Оказывается, не существует. Красивое доказательство этого факта приводится в задаче 477.

24.1. Однозначность спектра

Докажем, что

$$\alpha = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{S}(\alpha) = \mathrm{S}(\beta), \quad \text{где } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}. \tag{24.1}$$

Доказательство. Очевидно, что если числа α и β равны, то совпадают и соответствующие спектры. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\mathrm{S}(\alpha) = \mathrm{S}(\beta)$. Так как для любого натурального n выполняется условие $\big[n\alpha\big] = \big[n\beta\big]$, то согласно свойству (2.27)

$$\big|\, n\alpha - n\beta \,\big| < 1, \qquad \big|\, n(\alpha - \beta) \,\big| < 1.$$

Последнее неравенство имеет место при любом натуральном n, лишь когда $\alpha = \beta$.

■

24.2. Критерий принадлежности спектру

Натуральное число m принадлежит спектру числа α тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$0 \leqslant \alpha - \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\} < 1.$$

Если m принадлежит спектру $\mathrm{S}(\alpha)$, то верна формула

$$m = \left[\alpha + \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right]\right]. \tag{24.2}$$

Доказательство.

$$m = \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right] + \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\} = \alpha + \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right] - \left(\alpha - \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right) =$$

$$= \left[\alpha + \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right]\right] + \left\{\alpha + \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right]\right\} - \left(\alpha - \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right). \tag{24.2$'$}$$

Упростим второе слагаемое

$$\left\{\alpha + \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right]\right\} = \left\{\alpha + \alpha \cdot \frac{m}{\alpha} - \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right\} = \left\{\alpha - \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right\},$$

так как согласно свойству (2.5) целые слагаемые под мантиссой можно сокращать.

Выведенная мантисса и третье слагаемое из (24.2′) сворачиваются в антье, после чего получим

$$m = \left[\alpha + \alpha \cdot \left[\frac{m}{\alpha}\right]\right] - \left[\alpha - \alpha \cdot \left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right].$$

Анализ полученного выражения приводит к формулировке критерия принадлежности натурального числа m спектру числа α. ■

24.3. Необходимые условия разбиения $\mathbb{N}$ двумя спектрами

Пусть α и β — положительные иррациональные числа. Если выполняется равенство $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, то два спектра $\mathrm{S}(\alpha)$ и $\mathrm{S}(\beta)$ образуют разбиение множества натуральных чисел.

Доказательство. Обозначим последовательности $\{a_n\} = \mathrm{S}(\alpha)$ и $\{b_n\} = \mathrm{S}(\beta)$.

Сначала докажем $\{a_n\} \cap \{b_n\} = \varnothing$. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что существуют натуральные n, k и m, при которых $n = [k\alpha] = [m\beta]$. Согласно свойству антье (2.10)

$$n \leqslant k\alpha < n + 1, \qquad n \leqslant m\beta < n + 1.$$

Так как α и β — иррациональные числа, то

$$n < k\alpha < n + 1, \qquad n < m\beta < n + 1.$$

Так как α и β — положительные числа, то

$$\frac{n}{\alpha} < k < \frac{n+1}{\alpha}, \qquad \frac{n}{\beta} < m < \frac{n+1}{\beta}.$$

Суммирование этих неравенств приводит к противоречию

$$\frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\beta} < k + m < \frac{n+1}{\alpha} + \frac{n+1}{\beta},$$
$$n < k + m < n + 1.$$

Теперь докажем $\{a_n\} \cup \{b_n\} = \mathbb{N}$, также от противного. Предположим, что имеются натуральные числа, не попадающие в обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Отметим, что или $a_1 = 1$, или $b_1 = 1$ (докажите это самостоятельно).

Пусть n — наименьшее из чисел, не попавших в $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$. Тогда существуют натуральные k и m, для которых выполняются условия

$$\text{либо} \quad \begin{cases} [k\alpha] = n-1, \\ [m\beta] < n-1, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} [k\alpha] < n-1, \\ [m\beta] = n-1 \end{cases} \tag{24.3}$$

$$\text{и} \quad [(k+1)\alpha] \geqslant n+1, \quad [(m+1)\beta] \geqslant n+1. \tag{24.4}$$

Условия (24.3) определяют попадание числа $(n-1)$ в одну из последовательностей. Впрочем, все натуральные числа, меньшие $(n-1)$, также находятся среди членов последовательностей $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$. Уточним, натуральные числа от 1 до $(n-1)$ «разбросаны» без повторений (доказано ранее) среди k членов последовательности $\{a_n\}$ и m членов последовательности $\{b_n\}$. Значит, $n-1 = k+m$. Собственно, ради этой формулы и обсуждались условия (24.3).

Условия (24.4) подтверждают тот факт, что очередные члены последовательностей, следуюшие за $[k\alpha]$ и $[m\beta]$, будут больше n.

Согласно свойству антье (2.11)

$$(k+1)\alpha \geqslant n+1, \quad (m+1)\beta \geqslant n+1.$$

Так как α и β — иррациональные числа,

$$(k+1)\alpha > n+1, \quad (m+1)\beta > n+1.$$

Дальнейшие действия приведем без комментариев

$$\alpha > \frac{n+1}{k+1}, \quad \beta > \frac{n+1}{m+1}, \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{k+1}{n+1} + \frac{m+1}{n+1},$$

$$1 < \frac{k+m+2}{n+1} = \frac{n-1+2}{n+1} = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство того, что последовательности $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ покрывают все натуральные числа без повторений.

■

24.4. Достаточные условия разбиения $\mathbb{N}$ двумя спектрами

Если два спектра $\mathrm{S}(\alpha)$ и $\mathrm{S}(\beta)$ с положительными α и β образуют разбиение множества натуральных чисел, то α и β — иррациональные числа и выполняется условие $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

Доказательство. Пусть разбиение первых n натуральных чисел состоит из k элементов спектра $\mathrm{S}(\alpha)$ и m элементов спектра $\mathrm{S}(\beta)$. Данное условие представляется в виде системы

$$\begin{cases} \bigl[k\alpha\bigr] \ < n+1 \leqslant \bigl[(k+1)\alpha\bigr], \\ \bigl[m\beta\bigr] < n+1 \leqslant \bigl[(m+1)\beta\bigr], \\ n = k+m. \end{cases}$$

Согласно свойствам антье (2.11) и (2.12)

$$\begin{cases} k\alpha \ < n+1 \leqslant (k+1)\alpha, \\ m\beta < n+1 \leqslant (m+1)\beta, \\ n = k+m. \end{cases}$$

Так как спектры $\mathrm{S}(\alpha)$ и $\mathrm{S}(\beta)$ не пересекаются, то лишь в одном из спектров присутствует элемент со значением $(n+1)$. Это означает, что в одном из неравенств знак сравнения «$\leqslant$» заменяется на «$<$».

Несложные манипуляции с неравенствами и замена $k+m$ на n приводят к следующему условию

$$-\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1 < \frac{1}{n+1},$$

которое должно выполняться для любого натурального n, то есть

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Отметим, что если $\alpha,\ \beta > 0$, имеет место более строгое условие $\alpha,\ \beta > 1$.

Из данной формулы следует, что значения α и β либо оба рациональные, либо оба иррациональные.

Предположим, что $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$. Покажем, что в этом случае спектры $\mathrm{S}(\alpha)$ и $\mathrm{S}(\beta)$ пересекаются. Пусть $\alpha = \dfrac{p}{q}$, где $p > q,\ p,\ q \in \mathbb{N}$. Тогда $\beta = \dfrac{p}{p-q}$. Продемонстрируем совпадение элементов разных спектров

$$\bigl[q\alpha\bigr] = p = \bigl[(q-p)\beta\bigr].$$

Таким образом, α и β — иррациональные числа. ■

24.5. Спектр золотого сечения

Не вдаваясь в алгебраические подробности (см. п. A.13.), *золотое сечение*, обозначаемое φ, — это квадратичная иррациональность, равная $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Напомним несколько свойств числа φ:

$$\varphi^2 = \varphi + 1, \tag{24.5}$$

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1, \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{1}{\varphi} + 1.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\{\varphi\} = \left\{\frac{1}{\varphi}\right\}. \tag{24.6}$$

Согласно алгоритму вычисления цепной дроби (см. с. 57) и равенству (24.6), число φ представляется в виде бесконечной цепной дроби

$$\varphi = \big[1;\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots\big].$$

Спектры

$$S(\varphi) = [n\varphi] \ = \{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ 21,\ 22,\ \ldots\},$$
$$S\big(\varphi^2\big) = \big[n\varphi^2\big] = \{2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 13,\ 15,\ 18,\ 20,\ 23,\ \ldots\}$$

продолжают удивительные свойства золотого сечения. Очевидно, что спектры $S(\varphi)$ и $S\big(\varphi^2\big) = S\big(\varphi + 1\big)$ являются разбиением множества натуральных чисел (по теореме Битти).

Обозначим последовательности

$$\{a_n\} = S(\varphi) \quad \text{и} \quad \{b_n\} = S\big(\varphi^2\big). \tag{24.7}$$

Согласно (24.5) выполняется равенство $b_n = a_n + n$.

Попробуйте самостоятельно доказать свойства

$$[a_n\varphi] = b_n - 1, \quad [b_n\varphi] = a_n + b_n, \quad \big[b_n\varphi^2\big] = 3b_n - n.$$

Доказательства этих свойств приведены в задачах *474*-*476*.

В одной известной не только среди математиков игре «Цзяньшицзы» спектры $S(\varphi)$ и $S\big(\varphi^2\big)$ определяют выигрышную стратегию. Напомним правила этой математической игры.

Два игрока по очереди берут камни из двух кучек. При своем ходе игрок может взять любое количество камней из одной кучки или равное количество камней из обеих кучек. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Так сказать, проигравший остается ни с чем.

Оказывается, что выигрышная стратегия заключается в том, чтобы оставлять противнику в меньшей кучке a_n камней, а в большей — b_n камней. Обоснование этой стратегии см. [16, с. 61].

24.6. Задачи по теме раздела

468. Докажите, что если $\alpha \geqslant 1$, то спектр $\mathrm{S}(\alpha)$ будет возрастающим, то есть $a_n < a_{n+1}$.

469. Пусть $\mathrm{S}(\alpha)$ и $\mathrm{S}(\beta)$ образуют разбиение множества натуральных чисел. Докажите, что четыре последовательности

$$[\alpha[\alpha n]], \quad [\alpha[\beta n]], \quad [\beta[\alpha n]] \text{ и } [\beta[\beta n]]$$

также являются разбиением множества натуральных чисел.

470. Докажите, что три последовательности

$$[\varphi[\varphi n]], \quad [\varphi[\varphi^2 n]] \text{ и } [\varphi^2 n]$$

образуют разбиение множества натуральных чисел.

471. Вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{71}\left[n\sqrt{2}\right] + \sum_{n=1}^{29}\left[n\sqrt{2}\right]$.

472. Вычислите $\displaystyle\sum_{n=16}^{87}\left[-2n\sqrt{2}\right]$.

473. Докажите, что в спектре $\mathrm{S}(\sqrt{2})$ имеется бесконечно много элементов, являющихся степенью 2.

В задачах 474-476 используются обозначения последовательностей, определенные в формулах (24.7).

474. Докажите, что $a_{a_n} = b_n - 1$.

475. Докажите, что $a_{b_n} = a_n + b_n$.

476. Докажите, что $b_{b_n} = 3b_n + 1$.

477. Докажите, что не существует трех действительных чисел α, β, γ, спектры которых $\mathrm{S}(\alpha)$, $\mathrm{S}(\beta)$, $\mathrm{S}(\gamma)$ образуют разбиение множества натуральных чисел.

478. При каких значениях параметра a уравнение $\left[\dfrac{x}{a}\right] = \left[\dfrac{y}{1-a}\right]$ имеет решения среди натуральных значений x и y?

24.7. Указания, решения, ответы

468. Докажите, что если $\alpha \geqslant 1$, то спектр $S(\alpha)$ будет возрастающим, то есть $a_n < a_{n+1}$.

Указание. Доказательство основано на следующей цепочке неравенств:

$$[n\alpha] < [n\alpha] + [\alpha] \leqslant [n\alpha + \alpha]\,.$$

469. Пусть $S(\alpha)$ и $S(\beta)$ образуют разбиение множества натуральных чисел. Докажите, что четыре последовательности

$$\big[\alpha\,[\alpha n]\big],\quad \big[\alpha\,[\beta n]\big],\quad \big[\beta\,[\alpha n]\big] \text{ и } \big[\beta\,[\beta n]\big]$$

также являются разбиением множества натуральных чисел.

Доказательство. Обозначим последовательности $\{a_n\} = S(\alpha)$ и $\{b_n\} = S(\beta)$.

Поскольку $\big[\alpha\,[\alpha n]\big] = \{a_{a_n}\}$ и $\big[\alpha\,[\beta n]\big] = \{a_{b_n}\}$, то эти последовательности не пересекаются и взаимно дополняют друг друга до $\{a_n\}$, то есть являются разбиением $\{a_n\}$.

Аналогично последовательности $\big[\beta\,[\alpha n]\big] = \{b_{a_n}\}$ и $\big[\beta\,[\beta n]\big] = \{b_{b_n}\}$ являются разбиением $\{b_n\}$.

Следовательно, исходные четыре последовательности являются разбиением множества натуральных чисел.

■

470. Докажите, что три последовательности

$$\big[\varphi\,[\varphi n]\big],\quad \big[\varphi\,[\varphi^2 n]\big] \text{ и } \big[\varphi^2 n\big]$$

образуют разбиение множества натуральных чисел.

Указание. Данная задача — частный случай задачи *469*.

471. Вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{71}\left[n\sqrt{2}\right] + \sum_{n=1}^{29}\left[n\sqrt{2}\right]$.

Решение. $\left[71\sqrt{2}\right] = 100$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{71}\left[n\sqrt{2}\right]$ является суммой с 1-го по 71-й элемент спектра $S\left(\sqrt{2}\right)$. Согласно теореме Битти спектры $S\left(\sqrt{2}\right)$ и $S\left(2+\sqrt{2}\right)$ образуют разбиение ряда натуральных чисел. Значит,

$$\sum_{n=1}^{71}\left[n\sqrt{2}\right] + \sum_{n=1}^{29}\left[n\left(2+\sqrt{2}\right)\right] = 1+2+\ldots+100.$$

Завершите вычисления самостоятельно.

Ответ: 4180.

472. Вычислите $\sum\limits_{n=16}^{87}\left[-2n\sqrt{2}\right]$.

Решение. Если догадаться, что данное задание на теорему Битти, то решение не представляется сложным.

Согласно (2.6) для любого натурального n выполняется равенство $\left[-2n\sqrt{2}\right] + \left[2n\sqrt{2}\right] = -1$. Тогда

$$\sum_{n=16}^{87}\left[-2n\sqrt{2}\right] = \sum_{n=1}^{15}\left[2n\sqrt{2}\right] + \sum_{n=1}^{87}\left[-2n\sqrt{2}\right] + 15 = \ldots$$

Заметим, что спектры $S\left(4+2\sqrt{2}\right)$ и $S\left(4-2\sqrt{2}\right)$ образуют разбиение множества $\mathbb{N}$, и поскольку $\left[15\left(4+2\sqrt{2}\right)\right] = 102$, то

$$\ldots = \sum_{n=1}^{15}\left[n\left(4+2\sqrt{2}\right)\right] + \sum_{n=1}^{87}\left[n\left(4-2\sqrt{2}\right)\right] + 15 - \sum_{n=1}^{15}4n - \sum_{n=1}^{87}4n =$$

$$= \left(1+2+\ldots+102\right) + 15 - 4\left(8\cdot 15 + 44\cdot 87\right) = -10\,524.$$

Ответ: $-10\,524$.

473. Докажите, что в спектре $\mathrm{S}\left(\sqrt{2}\right)$ имеется бесконечно много элементов, являющихся степенью 2.

Доказательство.

Покажем, что существует бесконечное количество натуральных m определенного вида таких, что

$$\left[m\sqrt{2}\right] = 2^k, \quad \text{или} \quad 2^k < m\sqrt{2} < 2^k + 1. \qquad (473a)$$

Проведем ретроспективный анализ — от конца к началу. Усилим неравенство

$$2^k < m\sqrt{2} < 2^k + \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (473б)$$

Для нас важно, чтобы (473*б*) $\Longrightarrow$ (473*a*).

Выполним несложные преобразования

$$2^k - \sqrt{2} < m\sqrt{2} - \sqrt{2} < 2^k - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2^{k-1}\sqrt{2} - 1 < m - 1 < 2^{k-1}\sqrt{2} - \frac{1}{2}. \qquad (473в)$$

Если $m - 1 = \left[2^{k-1}\sqrt{2}\right]$, то левая часть (473*в*) выполняется всегда, а правая часть — не всегда, но это и не требуется! Покажем, что правое неравенство (473*в*) выполняется для бесконечного количества пар натуральных m и k.

В задаче *448* доказывается (формула преобразована для удобства), что неравенство $2^n\sqrt{2} - \frac{1}{2} > \left[2^n\sqrt{2}\right]$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. А ведь это неравенство совпадает с правым неравенством (473*в*).

Таким образом, для бесконечного количества натуральных k можно утверждать: если $m = \left[2^{k-1}\sqrt{2}\right] + 1$, то выполняется условие (473*a*). ■

474. Докажите, что $a_{a_n} = b_n - 1$. Последовательности a_n и b_n определены в (24.7).

Доказательство. Преобразуем исходное равенство

$$[\varphi\,[\varphi n]] = \left[\varphi^2 n\right] - 1,$$

$$\left[\varphi\,[\varphi n] - \left[\varphi^2 n\right] + 1\right] = 0$$

и докажем, что антье выражения $A = \varphi\,[\varphi n] - \left[\varphi^2 n\right] + 1$ равно 0.

$$A = \varphi^2 n - \varphi\,\{\varphi n\} - \left[\varphi^2 n\right] + 1 =$$

$$= \left\{\varphi^2 n\right\} - \varphi\,\{\varphi n\} + 1 = \{\varphi n\} - \varphi\,\{\varphi n\} + 1 =$$

$$= (1 - \varphi)\,\{\varphi n\} + 1.$$

При упрощениях использовалось свойство $\left\{\varphi^2 n\right\} = \{\varphi n\}$.

Поскольку $-1 < 1 - \varphi < 0$ и $0 < \{\varphi n\} < 1$, выполняется $[A] = 0$. ■

475. Докажите, что $a_{b_n} = a_n + b_n$. Последовательности a_n и b_n определены в (24.7).

См. аналогичное решение — задача 474.

Доказательство. Перепишем исходное равенство в виде

$$\left[\varphi\left[\varphi^2 n\right]\right] = [\varphi n] + \left[\varphi^2 n\right],$$

а докажем, что антье выражения $A = \varphi\left[\varphi^2 n\right] - [\varphi n] - \left[\varphi^2 n\right]$ равно 0.

$$\begin{gathered} A = \varphi^3 n - \varphi\left\{\varphi^2 n\right\} - \varphi n + \{\varphi n\} - \varphi^2 n + \left\{\varphi^2 n\right\} = \\ = \varphi n(\varphi^2 - \varphi - 1) - \varphi\{\varphi n\} + \{\varphi n\} + \{\varphi n\} = \\ = (2-\varphi)\{\varphi n\}. \end{gathered}$$

При упрощениях использовались: формула (24.5) для $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ и свойство $\left\{\varphi^2 n\right\} = \{\varphi n\}$.

Поскольку оба множителя $(2-\varphi)\{\varphi n\}$ положительные и меньше 1, выполняется условие $[A] = 0$. ■

476. Докажите, что $b_{b_n} = 3b_n + 1$. Последовательность b_n определена в (24.7).

Доказательство. Воспользуемся результатом задачи 475

$$a_{b_n} = a_n + b_n.$$

Очевидное равенство $a_k = b_k - k$ можно записать в виде $a_{b_n} = b_{b_n} - b_n$. Тогда получим

$$b_{b_n} - b_n = a_n + b_n,$$

$$b_{b_n} = a_n + 2b_n = 3b_n + 1.$$

■

477. (Putnam/1995) [25, с. 26] Докажите, что не существует трех действительных чисел α, β, γ, спектры которых $\mathrm{S}(\alpha)$, $\mathrm{S}(\beta)$, $\mathrm{S}(\gamma)$ образуют разбиение множества натуральных чисел.

Доказательство. Согласно теореме Битти достаточно двух иррациональных чисел, чтобы объединение их спектров покрыло все натуральные числа без пропусков. Поэтому сосредоточимся на доказательстве того факта, что какие-нибудь два спектра из трех $\mathrm{S}(\alpha)$, $\mathrm{S}(\beta)$, $\mathrm{S}(\gamma)$ обязательно повторятся на одном из натуральных чисел.

Выберем любое целое m такое, что $m > \alpha, \beta, \gamma$.

Рассмотрим единичный куб с противоположными вершинами $(0,\ 0,\ 0)$ и $(1,\ 1,\ 1)$, грани куба с меньшими ($x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$) координатами включаются, другие три грани «выколоты». Единичный куб состоит из m^3 равных кубов, расположенных встык, грани этих кубов включаются-исключаются по тому же принципу. Таким образом, любая точка единичного куба принадлежит одному из m^3 дробных кубов.

Разместим в единичном кубе точки $M_i\left(\left\{\frac{i}{\alpha}\right\}, \left\{\frac{i}{\beta}\right\}, \left\{\frac{i}{\gamma}\right\}\right)$, где $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m^3$. Общее количество точек M_i равно m^3+1. Согласно принципу Дирихле в один из m^3 дробных кубов обязательно попадет пара точек M_i. Пусть это будут точки M_n и M_k. Для определенности будем считать, что $n > k$.

Поскольку разность соответствующих координат точек M_n и M_k меньше $\frac{1}{m}$ — длины ребра дробного куба, в который попала эта пара точек, то выполняется условие (выпишем условие только для одной координаты, два других условия аналогичны)

$$\left|\left\{\frac{n}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{k}{\alpha}\right\}\right| < \frac{1}{m},$$

$$\left|\frac{D}{\alpha} - A\right| < \frac{1}{m}, \text{ где } A = \left[\frac{n}{\alpha}\right] - \left[\frac{k}{\alpha}\right],\ D = n - k,$$

$$|D - A\alpha| < \frac{\alpha}{m} < 1,$$

$$[A\alpha] = D - 1, \quad \text{или} \quad [A\alpha] = D.$$

Аналогично для $B = \left[\frac{n}{\beta}\right] - \left[\frac{k}{\beta}\right]$ и $C = \left[\frac{n}{\gamma}\right] - \left[\frac{k}{\gamma}\right]$

$$[B\beta] = D - 1, \quad \text{или} \quad [B\beta] = D,$$

$$[C\gamma] = D - 1, \quad \text{или} \quad [C\gamma] = D.$$

Согласно принципу Дирихле два из трех натуральных чисел $[A\alpha]$, $[B\beta]$, $[C\gamma]$ совпадают.

■

478. При каких значениях параметра a уравнение $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{y}{1-a}\right]$ имеет решения среди натуральных значений x и y?

Решение. Если $a < 0$ или $a > 1$, то правая и левая части уравнения имеют разные знаки при положительных x и y.

Пусть, далее, $0 < a < 1$.

Обозначим $\alpha = \dfrac{1}{a}$ и $\beta = \dfrac{1}{1-a}$. Важно, что α и β принимают положительные значения и связаны равенством $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Согласно теореме Битти, не существуют натуральные значения x и y такие, что выполняется равенство $[\alpha x] = [\beta y]$ при иррациональных α и β. Поскольку a, α и β могут быть иррациональными только одновременно, делаем вывод, что при иррациональных значениях a исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Пусть $a = \dfrac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$. Тогда $1 - a = \dfrac{q-p}{q}$. Исходное уравнение примет вид $\left[\dfrac{qx}{p}\right] = \left[\dfrac{qy}{q-p}\right]$. Одним из решений данного уравнения будет $(p,\ q-p)$. То есть при любом рациональном значении параметра a исходное уравнение имеет натуральные решения.

Ответ: $0 < a < 1$, где $a \in \mathbb{Q}$.

Дальше будет интереснее,
на следующей странице начинается новый раздел.

25. Ассорти из олимпиадных задач

Олимпиадные задачи — особый вид задач, для решения которых обязательно требуется неожиданный и оригинальный подход. Иногда встречаются такие задачи с необычными формулировками, что не сразу видно, как приступить к их решению!

Предлагаем вашему вниманию подборку олимпиадных задач. Надеемся, что приведенные в данном разделе задачи заинтригуют и вызовут интерес читателя, а их решение (или попытка решения) станет интеллектуальным творческим соревнованием ... с самим собой.

В раздел включены несколько задач, которые не являются олимпиадными (или пока это не удалось установить), но имеющих самостоятельное значение и заслуживающих того, чтобы привести их в качестве отдельных задач. Отметим, что эти задачи являются следствием олимпиадных задач.

479. (Екатеринбург/2001-2002) Решите уравнение

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}\right]=\left[\sqrt{n+10}\right] \quad \text{для } n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Несложной арифметикой проверяется, что $n=2$ является решением, а при $n=1$ и $n=3$ равенство не выполняется. Покажем, что других решений в натуральных числах нет. Докажем, что при $n\geqslant 4$

$$\left[\sqrt{n+10}\right]<n<\left[\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}\right]. \tag{479a}$$

Левая часть (479a) равносильна неравенству

$$\sqrt{n+10}<n,$$

которое выполняется всегда при указанных значениях n.

Правая часть (479a) равносильна неравенству

$$n<\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1},$$

которое справедливо при любом натуральном n.

Ответ: 2.

480. (SIMC/1996) Решите уравнение

$$[x]+[2x]+\ldots+[nx]=n^2, \quad \text{где } n\in\mathbb{N}. \tag{480а}$$

Решение. Поскольку

$$n^2=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=2\cdot(1+2+\ldots+n)-n,$$

то

$$\big[y\big]+\big[2y\big]+\ldots+\big[ny\big]=-n, \quad \text{где } y=x-2. \tag{480б}$$

Слагаемые-антье в (480*б*) либо все отрицательные, либо все неотрицательные. К тому же, функция антье неубывающая. Следовательно, каждое из слагаемых-антье равно -1. Тогда (480*б*) равносильно одному простейшему уравнению

$$\big[ny\big]=-1.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $2-\dfrac{1}{n}\leqslant x<2$, где $n\in\mathbb{N}$.

481. (Olymon/2010/май) Упростите выражение ($n\in\mathbb{N}$)

$$A=\left[\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right].$$

Решение. При $n>1$ срабатывает оценка

$$9n-1<\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2<9n.$$

См. доказательства этих неравенств в задаче *365*. Тогда

$$\left[\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]=9n-1 \text{ при } n>1.$$

При $n=1$ значение A без труда вычисляется вручную, $A=5$.

Ответ: $A=\begin{cases}5, & \text{если } n=1,\\ 9n-1, & \text{если } n>1.\end{cases}$

482. (СПбГУ ИТМО/2011-2012) Вычислите

$$[x]^2-\left[x^2\right]$$

при условии, что $[x]\cdot\{x\}=178$.

Решение. Согласно условию $[x] > 0$, то есть x — положительное число. Кроме того, $x \in \mathbb{Q}$, так как произведение целого числа на мантиссу иррационального числа не может равняться целому числу.

Пусть

$$x = n + \frac{p}{q}, \quad \text{где} n,\ p,\ q \in \mathbb{N} \text{ и } p < q.$$

Тогда условие $[x] \cdot \{x\} = 178$ примет вид $n \cdot \dfrac{p}{q} = 178$. Теперь выполним вычисления

$$[x]^2 - [x^2] = \left[n + \frac{p}{q}\right]^2 - \left[\left(n + \frac{p}{q}\right)^2\right] =$$

$$= n^2 - \left[n^2 + 2n \cdot \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right] =$$

$$= n^2 - n^2 - 2 \cdot 178 + \left[\left(\frac{p}{q}\right)^2\right] = -356.$$

Ответ: -356.

483. (JBMO°/2010) Докажите, что для любого целого n найдутся целые a и b такие, что будет выполняться равенство

$$n = \left[a\sqrt{2}\right] + \left[b\sqrt{3}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность целых чисел

$$\alpha_k = \left[k\sqrt{2}\right], \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}$$

(отрицательные индексы для α_k задействованы для удобства).

Насколько далеко друг от друга расположены соседние α_k?

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k =$$

$$= \left[(k+1)\sqrt{2}\right] - \left[k\sqrt{2}\right] =$$

$$= \left[\left\{k\sqrt{2}\right\} + \sqrt{2}\right] \in \{1,\ 2\}.$$

То есть соседние α_k либо стоят рядом, либо между ними располагается только одно целое число.

Поскольку $\left[\sqrt{3}\right] = 1$, то множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ покрывается множеством чисел (с повторами), представляющих собой сумму $\left[a\sqrt{2}\right] + \left[b\sqrt{3}\right]$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \{0,\ 1\}$.

■

484. (Putnam/1986) Определите цифру, стоящую в младшем разряде числа $\left[\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$.

Решение. Сначала избавимся от знака антье. Пусть $G = 10^{100}$.

$$\left[\frac{G^{200}}{G+3}\right] = \left[\frac{G^{200}-3^{200}}{G+3} + \frac{3^{200}}{G+3}\right] = \frac{G^{200}-3^{200}}{G+3}.$$

Поясним выполненные действия. Согласно (В.2) число $\dfrac{G^{200}-3^{200}}{G+3}$ — целое, которое можно представить как $10N - 3^{199}$, где N — какое-то натуральное число. А число $\dfrac{3^{200}}{G+3} < 1$.

Определение цифры, стоящей в младшем разряде целого числа n, — то же самое, что и деление n по модулю 10:

$n \pmod{10} \equiv 10N - 3^{199} \pmod{10} \equiv -3^{199} \pmod{10} \equiv -7 \pmod{10} \equiv 3.$

Ответ: 3.

485. (Putnam/2005) Найдите невырожденный полином

$$P_n\big([\alpha],\ [2\alpha]\big) = 0 \text{ при } \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение. Здесь надо догадаться, что

$$[2\alpha] - 2[\alpha] = [2\{\alpha\}] \in \{0,\ 1\}.$$

Дальнейшее очевидно. Полином

$$P_2\big([\alpha],\ [2\alpha]\big) = \big([2\alpha] - 2[\alpha]\big)\cdot\big([2\alpha] - 2[\alpha] - 1\big)$$

всегда равен 0.

Ответ: $P_2(x,\ y) = (x-y)(x-y-1) = x^2 - 2xy + y^2 - x + y = 0$ при $x = [\alpha]$, $y = [2\alpha]$.

486. (Putnam/2007) Пусть m — некоторое натуральное число. Докажите, что существуют полиномы $P_0(n)$, $P_1(n)$, $\ldots$, $P_{m-1}(n)$ (коэффициенты полиномов могут зависеть от m) такие, что

$$\left[\frac{n}{m}\right]^m = P_0(n) + P_1(n)\left[\frac{n}{m}\right] + \ldots + P_{m-1}\left[\frac{n}{m}\right]^{m-1}.$$

Доказательство. Заметим важный нюанс в формулировке задания — в задаче не требуется вывести полиномы, а надо лишь доказать их существование.

Идея предлагаемого доказательства основана на следующем утверждении: для любого натурального m и любого целого n существует целое число k такое, что $0 \leqslant k < m$ и $n \equiv k \pmod m$. То есть выполняются равенства

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} = \frac{k}{m}, \quad \left[\frac{n}{m}\right] = \frac{n-k}{m}.$$

Осталось «увидеть» тождество

$$\left(\left[\frac{n}{m}\right] - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(\left[\frac{n}{m}\right] - \frac{n-1}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\left[\frac{n}{m}\right] - \frac{n-(m-1)}{m}\right) = 0,$$

которое доказывает существование искомых полиномов. Например,

$$P_0(n) = (-1)^{m-1} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(m-1)}{m}.$$

■

487. (Бенилюкс/2014) Пусть a, b, c, d — натуральные числа. Определите минимальное значение выражения

$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right] + \left[\frac{b+c+d}{a}\right] + \left[\frac{c+d+a}{b}\right] + \left[\frac{d+a+b}{c}\right].$$

Решение. Введем обозначения

$$D = \frac{a+b+c}{d}, \; A = \frac{b+c+d}{a}, \; B = \frac{c+d+a}{b}, \; C = \frac{d+a+b}{c}.$$

Согласно свойству антье (2.3)

$$[D] + [A] + [B] + [C] > D + A + B + C - 4.$$

Поскольку сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, то

$$\underbrace{\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right) + \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)}_{D+A+B+C} \geqslant 12.$$

Тогда получаем нижнюю оценку для исходного выражения

$$[D] + [A] + [B] + [C] > 8, \quad \text{или} \quad [D] + [A] + [B] + [C] \geqslant 9.$$

Предположим, что $[D] = 3$, $[A] = 2$, $[B] = 2$, $[C] = 2$. Перейдем к соответствующим неравенствам

$$\begin{cases} 3 \leqslant D < 4, \\ 2 \leqslant A < 3, \\ 2 \leqslant B < 3, \\ 2 \leqslant C < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3d \leqslant a+b+c < 4d, \\ 2a \leqslant b+c+d < 3a, \\ 2b \leqslant c+d+a < 3b, \\ 2c \leqslant d+a+b < 3c \end{cases} \iff \begin{cases} 4d \leqslant S < 5d, \\ 3a \leqslant S < 4a, \\ 3b \leqslant S < 4b, \\ 3c \leqslant S < 4c, \end{cases}$$

где $S = a+b+c+d$. Подберем такие значения a, b, c, d, чтобы система неравенств была совместна. Это сделать несложно: $a = b = c = n$ и $d = n - 1$, где $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 5}$ (условие $n \geqslant 5$ следует из неравенства $S < 5d$).

Таким образом, при $a = b = c = 5$, $d = 4$ достигается минимальное значение исходного выражения, равное 9.

Ответ: 9.

488. (Курчатов*/2013-2014) Для $x \geqslant 4$ решите уравнение

$$\frac{\left[\frac{x}{3}\right]}{\left[\frac{x}{4}\right]} = \frac{21}{16}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$16\left[\frac{x}{3}\right] = 21\left[\frac{x}{4}\right].$$

Числа 16 и 21 взаимно простые, $\left[\frac{x}{3}\right]$ и $\left[\frac{x}{4}\right]$ — натуральные числа (по условию $x \geqslant 4$), тогда уравнение равносильно ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} \left[\frac{x}{3}\right] = 21k, \\ \left[\frac{x}{4}\right] = 16k, \end{cases} \iff \begin{cases} 21k \leqslant \frac{x}{3} < 21k + 1, \\ 16k \leqslant \frac{x}{4} < 16k + 1, \end{cases} \iff \begin{cases} 63k \leqslant x < 63k + 3, \\ 64k \leqslant x < 64k + 4. \end{cases}$$

Система неравенств будет совместна, если

$$\begin{cases} 63k < 64k + 4, \\ 64k < 63k + 3 \end{cases} \iff k = 1,\ 2 \text{ (с учетом условий } k \in N).$$

При $k = 1$ имеем $64 \leqslant x < 66$, при $k = 2$ получим $128 \leqslant x < 129$.

Ответ: $[64,\ 66) \cup [128,\ 129)$.

489. (Украина/1998) Известно, что действительные числа x и y не меньше 1. Кроме того, для произвольных натуральных n выполняется равенство

$$\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[nx]}{[ny]}. \tag{489а}$$

Докажите, что $x = y$ или x и y являются целыми числами, первое из которых делится на второе.

Доказательство. Очевидно, что при $\boldsymbol{x = y}$ равенство выполняется.

При $\boldsymbol{1 < x < y}$ левая часть (489a) равна 0, а правая не равна 0.

Пусть $\boldsymbol{1 < y < x}$. Представим $x = ky + z$, где $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant z < y$, и выполним следующие преобразования:

$$\left[\frac{ky+z}{y}\right] = \frac{[n(ky+z)]}{[ny]}, \quad k + \left[\frac{z}{y}\right] = \frac{[kny+nz]}{[ny]},$$

$$k\big[ny\big] = \big[kny + nz\big], \quad \big[kny - k\,[ny] + nz\big] = 0,$$

$$\big[k\,\{ny\} + nz\big] = 0. \tag{489б}$$

Из равенства (489$б$) следует $z = 0$, иначе найдется такое число n, при котором антье будет больше 0.

Осталось доказать, что x и y являются целыми числами (достаточно доказать целочисленность одного из них).

$k \geqslant 2$, поскольку $k = 1$ — это случай $x = y$.

Рассмотрим равенство

$$\big[k\,\{ny\}\big] = 0,$$

или согласно свойству мантиссы (2.17)

$$\big[k\,\{n\,\{y\}\}\big] = 0. \tag{489в}$$

Пусть $\{y\} \neq 0$. Тогда существует такое натуральное число n_0, что $\dfrac{1}{n_0+1} \leqslant \{y\} < \dfrac{1}{n_0}$. Но при $n = n_0$ и $k \geqslant 2$ равенство (489$в$) не выполняется. Значит, $\{y\} = 0$, то есть y принимает только целочисленные значения.

■

490. (На основе MedMC/2007) Докажите неравенство для $x > 1$

$$\left(\frac{x+\{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x+\{x\}}\right) + \left(\frac{x+[x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x+[x]}\right) > 5.$$

Доказательство. Выполним типовую замену $x = n+\alpha$, где $n = [x]$, $\alpha = \{x\}$, причем согласно условию задачи $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\left(\frac{n+2\alpha}{n} - \frac{n}{n+2\alpha}\right) + \left(\frac{2n+\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{2n+\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{n+2\alpha}{n} + \frac{2n+\alpha}{\alpha}\right) - \left(\frac{n}{n+2\alpha} + \frac{\alpha}{2n+\alpha}\right) =$$

$$= 2 + 2\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{n}{\alpha}\right) - \left(\frac{n}{n+2\alpha} + \frac{\alpha}{2n+\alpha}\right) >$$

$$> 6 - \left(\frac{n}{n+2\alpha} + \frac{\alpha}{2n+\alpha}\right) > 6 - \left(\frac{n}{n+\alpha} + \frac{\alpha}{n+\alpha}\right) > 5.$$

■

491. (Самарский ГУ/1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left[\sqrt{y-1}\right]^2 = x - 1, \\ 2\left[\sqrt{y+2\sqrt{x}}\right] = y - 1. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение. Пусть $\left[\sqrt{y-1}\right] = n$. Тогда $x = n^2+1$, а также $n \leqslant \sqrt{y-1} < n+1$, или

$$n^2 + 1 \leqslant y < (n+1)^2 + 1. \tag{491a}$$

Выполним оценку выражения $\sqrt{y+2\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 < n^2 + 1 + 2\sqrt{n^2+1} \leqslant{}& \\ &\leqslant y + 2\sqrt{x} < \\ &\qquad < (n+1)^2 + 1 + 2\sqrt{n^2+1} < (n+2)^2,\end{aligned}$$

$$n + 1 < \sqrt{y+2\sqrt{x}} < n+2\,.$$

Следовательно,

$$\left[\sqrt{y+2\sqrt{x}}\right] = n+1.$$

Из второго уравнения получаем $y = 2n+3$. После подстановки выражения для y в неравенство (491a) выясняется, что $n = 2$.

Ответ: $x = 5,\ y = 7.$

492. (Санкт-Петербург/1998, А. Голованов) Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на $\left[\sqrt{n}\right]+1$. Докажите, что $(n-1)\,(n-3)$ делится на $\left[\sqrt{n}\right]-1$.

Доказательство. Пусть $\left[\sqrt{n}\right]=k$.

Так как по условию $n+1$ делится на $k+1$, то существует натуральное q такое, что

$$n+1=q\,(k+1)\,, \quad n=q\,(k+1)-1.$$

Согласно свойству антье

$$\begin{gathered}
k\leqslant\sqrt{n}<k+1,\\
k^2\leqslant n<(k+1)^2,\\
k^2+1\leqslant q\,(k+1)<(k+1)^2+1,\\
k-1+\frac{2}{k+1}\leqslant q<k+1+\frac{1}{k+1},\\
q=k \quad \text{или} \quad q=k+1.
\end{gathered}$$

При $q=k$ $\qquad n-1=k^2+k-2=(k-1)\,(k+2)\,.$

При $q=k+1$ $\quad n-3=k^2+2k-3=(k-1)\,(k+3)\,.$

Таким образом, в обоих случаях $(n-1)\,(n-3)$ делится на $k-1$. ∎

493. (Санкт-Петербург/2012, А. Храбров) [15, с. 18] Найдите все такие целые числа b, для которых уравнение

$$\left[x^2\right]-2012x+b=0$$

имеет нечетное число корней.

Решение. Слагаемое $-2012x$ должно быть целым, следовательно, его можно занести под знак антье

$$\begin{gathered}
\left[x^2-2012x\right]+b=0,\\
\left[x\bigl(x-2012\bigr)\right]+b=0.
\end{gathered}$$

Выполним замену $x=z+1006$

$$\left[z^2-1006^2\right]+b=0,$$

$$\left[z^2\right]-1006^2+b=0. \tag{493a}$$

Переформулируем равносильное задание для неизвестной z: найдите все такие целые числа b, для которых уравнение (493a) имеет нечетное число корней, удовлетворяющих условию $2012z \in \mathbb{Z}$.

Функция, стоящая в левой части уравнения (493a), четная. Значит, если имеется ненулевой корень этого уравнения, то корнем уравнения будет и значение с противоположным знаком. Поэтому требование нечетного количества корней уравнения (493a) будет выполнено, если корнем уравнения будет $z = 0$. Откуда следует, что $b = 1006^2$.

Ответ: 1006^2.

494. (Болгария/2003) Определите все действительные значения параметра a, при которых для любого натурального n выполняется тождество

$$4\left[an\right] = n + \big[a\left[an\right]\big]. \tag{494a}$$

Решение. Зададимся вопросом, при каких значениях a равенство не будет тождеством при $n = 1$, 2? Очевидно, что $a < 3$

$$4\left[a\right] \neq 1 + \big[a\left[a\right]\big].$$

Докажите самостоятельно, рассмотрев четыре случая $a < 0$, $0 \leqslant a < 1$, $1 \leqslant a < 2$, $2 \leqslant a < 3$. Также несложно показать, что при $a \geqslant 4$

$$\big[\big(a-4\big)\left[a\right]\big] \neq -1.$$

Итак, $3 \leqslant a < 4$, или $\left[a\right] = 3$. Можно получить еще более точную оценку для a, но это уже несущественно. Перейдем к двойному неравенству, освободившись от сложного антье в равенстве (494a),

$$4\left[an\right] - n \leqslant a\left[an\right] < 4\left[an\right] - n + 1,$$

$$0 \leqslant \big(a-4\big)\left[an\right] + n < 1,$$

$$0 \leqslant \big(a-4\big)an - \alpha + n < 1,$$

где $\alpha = \big(a-4\big)\left\{an\right\}$, причем известно, что $-1 < \alpha < 0$.

$$-1 < \alpha \leqslant \big(a-4\big)an + n < 1 + \alpha < 1,$$

$$-\frac{1}{n} < a^2 - 4a + 1 < \frac{1}{n}.$$

Данное неравенство должно выполняться для $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a^2 - 4a + 1 = 0$. Лишь один корень удовлетворяет условию $3 \leqslant a < 4$.

Ответ: $a = 2 + \sqrt{3}$.

495. (Ленинград/1964) Докажите, что если при натуральном n выполняется равенство

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$

то n — простое число.

Доказательство. В задаче *182* доказывается тождество, которое выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=$$
$$=\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]+\tau(n),$$

где $\tau(n)$ обозначает функцию натурального числа, определяющую количество делителей числа n.

Известно, что $\tau(n)=2 \iff n \in \mathbb{P}$, см. п. A.4.

496. (Индия/2014) Докажите, что для любого натурального n функция $f(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]$ всегда принимает четные значения.

Доказательство. Применим метод математической индукции.

$f(1)=2$. Докажем индуктивный переход. Пусть $f(k)$ — четное число. Согласно (182*a*) для $k \in \mathbb{N}$

$$f(k+1)=\left[\frac{k+1}{1}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{k+1}{k}\right]+\left[\frac{k+1}{k+1}\right]+\left[\sqrt{k+1}\right]=$$
$$=\left[\frac{k}{1}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{k}\right]+\tau(k+1)+\left[\sqrt{k+1}\right],$$

где $\tau(k+1)$ — количество делителей числа $k+1$. Известно, что $\tau(n)$ — нечетное число $\iff$ n — полный квадрат, см. п. A.4.

Рассмотрим два случая.

1) $k+1$ — полный квадрат, тогда

$$\left[\sqrt{k+1}\right]=\left[\sqrt{k}\right]+1, \quad \tau(k+1) \text{ — нечетное число},$$

следовательно, в данном случае индуктивный переход доказан.

2) $k+1$ не является полным квадратом, тогда

$$\left[\sqrt{k+1}\right]=\left[\sqrt{k}\right], \quad \tau(k+1) \text{ — четное число,}$$

и в этом случае индуктивный переход доказан. ■

497. (Balkan/2015) Докажите, что среди любых 20-ти последовательных натуральных чисел найдется число d такое, что выполняется неравенство

$$\left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2n\sqrt{d}}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}. \qquad (497a)$$

Доказательство. Неравенство выводится, если имеет место тождество

$$\left[n\sqrt{d}\right]=\left[\sqrt{n^2d-5}\right]. \qquad (497б)$$

Вывод неравенства (497a) из тождества (497$б$) можно назвать типовым, см. Раздел 22. «Задачи на мантиссу».

Проанализируем тождество (497$б$). Оно будет выполняться лишь при условии, когда числа $\left\{n^2d,\ n^2d-1,\ \ldots,\ n^2d-4\right\}$ не являются полными квадратами. А теперь зададимся вопросом «Какие пять последовательных чисел из множества $\left\{1,\ 2,\ \ldots,\ 20\right\}$ не являются полными квадратами?» Имеется два варианта ответа: $\left\{10,\ 11,\ \ldots,\ 14\right\}$ и $\left\{11,\ 12,\ \ldots,\ 15\right\}$.

Выскажем предположение, что числа $(k \in \mathbb{N})$

$$d_1 = 20k+14 \quad \text{или} \quad d_2 = 20k+15$$

подходят к тождеству (497$б$).

Докажем, что $\left\{d_2,\ n^2d_2-1,\ \ldots,\ n^2d_2-4\right\}$ не являются полными квадратами (думается, выбор d_2 понятен — легко вычислять остатки при делении на 4 и 5). В этом нам помогут следующие факты из теории чисел $(a \in \mathbb{N})$:

$$a^2 \equiv \left\{0,\ 1\right\} \pmod 4, \qquad a^2 \equiv \left\{0,\ 1,\ 4\right\} \pmod 5.$$

Рассмотрим только один случай $N = n^2\cdot 5(4k+3)-4$ (остальные случаи разберите самостоятельно). Пусть $n=2m$. Тогда

$$N = 4m^2\cdot 5(4k+3)-4 = 4K, \quad \text{где } K = m^2\cdot 5(4k+3)-1.$$

Поскольку $K \equiv 3 \pmod 4$, то число N не является полным квадратом. Пусть $n=2m+1$. Тогда

$$N = (4m^2+4m+1)\cdot 5(4k+3)-4 \equiv 3 \pmod 4.$$

Число N также не является полным квадратом.

Итак, мы доказали, что каждое двадцатое натуральное число вида $d = 20k + 15$ обладает свойством, что оно само и четыре предыдущих числа не являются полными квадратами. Следовательно, выполняется тождество (497*б*).

Вывод неравенства (497*a*) из тождества (497*б*) приведем без пояснений:

$$\sqrt{n^2d-5} \geqslant \left[\sqrt{n^2d-5}\right],$$
$$\sqrt{n^2d-5} \geqslant \left[n\sqrt{d}\right],$$
$$n^2d-5 \geqslant \left[n\sqrt{d}\right]^2,$$
$$\left(n\sqrt{d}-\frac{5}{2n\sqrt{d}}\right)^2 > \left[n\sqrt{d}\right]^2,$$
$$n\sqrt{d}-\frac{5}{2n\sqrt{d}} > \left[n\sqrt{d}\right],$$
$$\left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2n\sqrt{d}}.$$

■

498. (IMO°/2006) Функция
$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]\right)$$
задана на множестве натуральных чисел. Докажите, что каждое из неравенств
$$1)\ f(n+1) < f(n), \qquad (498a)$$
$$2)\ f(n+1) > f(n) \qquad (498б)$$
выполняется при бесконечном количестве значений n.

Доказательство. Рассмотрим неравенство общего вида (знак «$\vee$» соответствует одному из знаков «$<$» или «$>$»)

$$f(n+1) \ \vee \ f(n),$$
$$\frac{1}{n+1}\left(\left[\frac{n+1}{1}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]\right) \ \vee \ \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]\right),$$
$$n\left(\left[\frac{n+1}{1}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]\right) \ \vee \ (n+1)\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]\right).$$

Согласно (182a)

$$n \cdot \tau(n+1) \ \vee \ \left[\frac{n}{1}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right], \qquad (498в)$$

где $\tau(n+1)$ — количество делителей числа $n+1$.

1) Пусть $\boldsymbol{n+1}$ **— простое нечетное число**. Значит, $\tau(n+1) = 2$, и еще известно, что n — четное число. Докажем неравенство (498$в$) в виде

$$2n \ < \ n + \frac{n}{2} + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

$$\frac{n}{2} \ < \ \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

В правой части последнего неравенства $n-2$ слагаемых, каждое из которых не меньше 1, тогда

$$\frac{n}{2} \ < \ n-2 \ \leqslant \ \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

Следовательно, при $n > 4$, $n+1 \in \mathbb{P}$ утверждение для (498a) доказано.

2) Пусть $\boldsymbol{n+1=2^k}$ $\big(\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}\big)$. Значит, $\tau(n+1) = k+1$. Докажем, что неравенство (498$в$) примет вид

$$\left(2^k-1\right)\left(k+1\right) \ > \ \left[\frac{2^k-1}{1}\right] + \left[\frac{2^k-1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{2^k-1}{2^k-1}\right].$$

Если снять знаки антье, стоящие в правой части неравенства, то правая часть увеличится. После упрощения получим

$$k+1 \ > \ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k-1}.$$

Сумма гармонического ряда легко поддается нужной оценке сверху при заменах: $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, и $\frac{1}{7}$ на $\frac{1}{4}$ и т.д. Приведем строгое обоснование

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k-1} = \sum_{i=1}^{2^k-1} \frac{1}{i} < \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{2^i-1} \frac{1}{2^i-1} = \sum_{i=1}^{k} 1 = k.$$

Следовательно, при $n+1 = 2^k$ $\left(k \in \mathbb{N}\right)$ утверждение для (498$б$) доказано.

■

499. (Канада/1981) [31, с. 163] Докажите, что уравнение

$$\big[x\big] + \big[2x\big] + \big[4x\big] + \big[8x\big] + \big[16x\big] + \big[32x\big] = 12345 \qquad (499а)$$

не имеет решений среди действительных чисел.

Доказательство. Упростим уравнение с помощью свойства антье (2.4) $[x+n] = [x] + n$.

Так как при делении 12345 на 63 $(63 = 1+2+4+8+16+32)$ получается 195 и 60 в остатке, исходное уравнение перепишем в виде

$$\big[x-195\big] + \big[2(x-195)\big] + \\ + \big[4(x-195)\big] + \big[8(x-195)\big] + \\ + \big[16(x-195)\big] + \big[32(x-195)\big] = 60,$$

то есть исходная задача сведена к доказательству отсутствия действительных решений уравнения

$$\big[x\big] + \big[2x\big] + \big[4x\big] + \big[8x\big] + \big[16x\big] + \big[32x\big] = 60. \qquad (499б)$$

Обозначим сумму антье, стоящую в левой части уравнения, через $f(x)$.

Отметим, что функция $f(x)$ является неубывающей, $f(0) = 0$, $f(1) = 63$, причем на интервале $x \in \big(0,\, 1\big)$ функция $f(x)$ принимает значения из интервала $\big(0,\, 63\big)$.

Для любого $x_0 \in \big(0,\, 1\big)$ выполняются условия $\big[x_0\big] = 0$, $\big[2x_0\big] \leqslant 1$, $\big[4x_0\big] \leqslant 3$, $\big[8x_0\big] \leqslant 7$, $\big[16x_0\big] \leqslant 15$, $\big[32x_0\big] \leqslant 31$, что означает $f(x_0) \leqslant 57$. Следовательно, уравнения (499б) и (499а) не разрешимы в действительных числах.

■

500. (Англия/2012) Функция $f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, задается следующим образом:

$$f(1) = 1, \;\; f(n) = f\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right) + f\left(\left[\frac{2n-1}{3}\right]\right).$$

Найдите хотя бы одно значение $t \in \mathbb{N}$ такое, для которого выполняется неравенство

$$f(t) - f(t-1) > t.$$

(Формулировка задачи немного изменена, но сути это не меняет.)

Решение. Рекуррентная формула задания функции $f(n)$ равносильна следующим трем формулам ($k \in \mathbb{N}$):

$$\left[\begin{array}{ll} f\big(3k-1\big) & = 2f\big(2k-1\big), \\ f\big(3k\big) & = f\big(2k\big) + f\big(2k-1\big), \\ f\big(3k+1\big) & = 2f\big(2k\big). \end{array}\right. \tag{500a}$$

Вычислим значения функции $f(n)$ для нескольких первых членов натурального ряда:

$$f(n) = \big\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ \ldots\big\}$$

Трудно увидеть какие-нибудь закономерности как для значений $f(n)$, так и для разностей $f(n) - f(n-1)$.

Рассмотрим разности для соседних натуральных значений аргумента функции $f(n)$, используя обозначения (500a):

$$\begin{array}{ll} f\big(3k\big) - f\big(3k-1\big) & = f\big(2k\big) - f\big(2k-1\big), \\ f\big(3k+1\big) - f\big(3k\big) & = f\big(2k\big) - f\big(2k-1\big), \\ f\big(3k+2\big) - f\big(3k+1\big) & = 2\left(f\big(2k+1\big) - f\big(2k\big)\right). \end{array}$$

Понятно, что для решения задачи требуется многократное повторение последней формулы. Попробуем найти последовательность натуральных чисел $n_0 > n_1 > n_2 > \ldots > n_m$, для которых выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} f\big(n_0\big) - f\big(n_0-1\big) &= 2\left(f\big(n_1\big) - f\big(n_1-1\big)\right) = \\ &= 2^2\left(f\big(n_2\big) - f\big(n_2-1\big)\right) = \ldots = 2^m\left(f\big(n_m\big) - f\big(n_m-1\big)\right). \end{aligned}$$

$n_0 = 3k+2$, $n_1 = 2k+1$. Чтобы повтор нужной формулы сработал, необходимо $2k+1 \equiv 2 \pmod 3$. Продолжая аналогичные рассуждения, несложно догадаться, что $n_0 = 3^m - 1$, тогда $n_m = 2^m - 1$ и

$$f\big(3^m-1\big) - f\big(3^m-2\big) = 2^m\left(f\big(2^m-1\big) - f\big(2^m-2\big)\right).$$

Проверкой убеждаемся, что

$$\begin{aligned} & f\big(8\big) - f\big(7\big) = 4\left(f\big(3\big) - f\big(2\big)\right) = 4 < 8, \\ & f\big(26\big) - f\big(25\big) = 8\left(f\big(7\big) - f\big(6\big)\right) = 8 < 26, \\ & f\big(80\big) - f\big(79\big) = 16\left(f\big(15\big) - f\big(14\big)\right) = 16 < 80, \\ & f\big(242\big) - f\big(241\big) = 32\left(f\big(31\big) - f\big(30\big)\right) = 256 > 242. \end{aligned}$$

Ответ: 242.

501. (США/1981) [27, с. 61] Докажите тождество

$$[x]+\frac{[2x]}{2}+\ldots+\frac{[nx]}{n}\leqslant[nx] \quad \text{при } n\in\mathbb{N}. \tag{501a}$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением (Б.8) для конечной последовательности действительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$

$$a_i+a_j\leqslant a_{i+j}\ (i,\ j\in\mathbb{N}) \quad\Longrightarrow\quad a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n}\leqslant a_n.$$

Для числовой последовательности $[x], [2x], [3x], \ldots, [nx]$ выполняется условие $[(i+j)x]\geqslant[ix]+[jx]$, поскольку антье суммы не меньше суммы антье (2.30). Следовательно, выполняется неравенство (501a). ■

502. (Санкт-Петербург/2014, А. Голованов) Докажите, что для всех натуральных m и n выполняется неравенство

$$\left[n\sqrt{2}\right]\cdot\left[m\sqrt{7}\right]<\left[nm\sqrt{14}\right].$$

Доказательство. Поскольку произведение антье неотрицательных выражений меньше или равно антье их произведения — свойство антье (2.29), то необходимо лишь доказать, что

$$\left[n\sqrt{2}\right]\cdot\left[m\sqrt{7}\right]\neq\left[nm\sqrt{14}\right].$$

В задачах *368* и *373* доказываются тождества

$$\left[\sqrt{2n^2-1}\right]=\left[n\sqrt{2}\right] \quad\text{и}\quad \left[\sqrt{7n^2-1}\right]=\left[n\sqrt{7}\right], \quad \text{где } n\in\mathbb{N}.$$

Тогда задача сводится к доказательству неравенства

$$\left[\sqrt{2n^2-1}\right]\cdot\left[\sqrt{7m^2-1}\right]\neq\left[nm\sqrt{14}\right],$$

или, в более строгой формулировке,

$$\left[\sqrt{2n^2-1}\cdot\sqrt{7m^2-1}\right]\neq\left[nm\sqrt{14}\right].$$

Воспользуемся следующими соображениями: если выполняется условие $x-y\geqslant 1$, то $[x]>[y]$. Объяснение простейшее — между x и y обязательно размещается некоторое целое число k, то есть $y<k\leqslant x$.

Докажите самостоятельно, что для любых натуральных m и n имеет место неравенство

$$nm\sqrt{14} - \sqrt{2n^2-1}\cdot\sqrt{7m^2-1} \geqslant 1. \qquad \blacksquare$$

503. (Австралия/1993) [36, с. 165] На множестве натуральных чисел задана функция $f(n) = \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right]$. Определите все значения n такие, что $f(n) = 1$.

Решение. В разделе 19. «Натуральные тождества с арифметическим корнем» приводятся две известные задачи: *379* и *380*, из которых следует, что

$$\left[\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n-1}\right]. \qquad (503a)$$

Но для «чистого» решения задачи недостаточно вспомнить данное тождество, его надо доказать, например, методом, приведенным в п. 19.1. (докажите самостоятельно).

А что делать, если не удалось вспомнить тождество (503a)? В таком случае надо лишь попробовать упростить антье $\left[\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right]$

$$\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 4n \quad \text{при } n \in \mathbb{N},$$

$$4n-1 < 2n + 2\sqrt{n^2-1} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}.$$

Таким образом, при $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

$$4n-1 < \left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n \quad \Longleftrightarrow \quad (503a).$$

Случай $n = 1$ проверяется подстановкой.

Итак, приведем функцию $f(n)$ к виду

$$f(n) = \left[\sqrt{4n}\right] - \left[\sqrt{4n-1}\right].$$

Воспользуемся тем, что $4n$ и $(4n-1)$ — соседние натуральные числа. Из этого факта следует, что возможны только два варианта расположения этих чисел относительно соседних полных квадратов k^2 и $(k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$:

$$k^2 \leqslant 4n-1 < 4n < (k+1)^2 \quad \text{или} \quad k^2 < 4n-1 < 4n = (k+1)^2.$$

Тогда

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — полный квадрат,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ответ: $n = k^2$, где $k \in \mathbb{N}$.

504. (USA Talent/2001-2002) Функция $f(x) = x\Big[x\big[x\,[x]\big]\Big]$ определена для $x > 0$.

1) Решите уравнение $f(x) = 2001$.
2) Докажите, что уравнение $f(x) = 2002$ не имеет решений.

Решение. Согласно свойству антье $[x] \leqslant x$ можно утверждать, что $f(x)$ — неубывающая функция при $x > 0$. Отметим, что $f(x) = x^4$ при $x \in \mathbb{Z}$, причем, $f(6) = 1296$ и $f(7) = 2401$.

Сначала возьмемся за доказательство того, что уравнение $f(x) = 2002$ не имеет решений. Если данное уравнение имеет решения, то они удовлетворяют условию $x < 7$. Тогда с помощью метода оценок докажем, что при указанных значениях x всегда выполняется неравенство $f(x) < 2002$:

$$x < 7 \implies [x] \leqslant 6 \implies x\,[x] < 42 \implies x\,[x] \leqslant 41 \implies$$
$$\implies x\big[x\,[x]\big] < 7 \cdot 41 = 287 \implies x\big[x\,[x]\big] \leqslant 286 \implies$$
$$\implies x\Big[x\big[x\,[x]\big]\Big] < 286 \cdot 7 = 2002.$$

Приступим к решению уравнения $f(x) = 2001$. Понятно, что решение должно быть числом, близким к 7.

Воспользуемся одним из условий ранее проведенного доказательства: решения уравнения должны удовлетворять неравенству $x\big[x\,[x]\big] \leqslant 286$, или $\Big[x\big[x\,[x]\big]\Big] \leqslant 286$. Но на самом деле последнее условие является равенством, так как если для некоторого x_0: $\Big[x_0\big[x_0\,[x_0]\big]\Big] \leqslant 285$, то $f(x_0) < 7 \cdot 285 = 1995 < 2001$.

Таким образом, следствием уравнения $f(x) = 2001$ будет уравнение $x \cdot 286 = 2001$. Проверка подстановкой $x = \frac{2001}{286}$ в исходное уравнение подтверждает, что найденное значение является искомым решением.

Ответ: $\dfrac{2001}{286}$.

505. (Екатеринбург/2006-2007) Решите неравенство

$$x\Big[x\big[x\,[x]\big]\Big] \leqslant 2007 \quad \text{для } x > 0.$$

Решение. См. предыдущую задачу.

Ответ: $(0,\ 7)$.

506. (IMO°/2014) Пусть $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Докажите, что в числовой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, задаваемой формулой $a_k = \left[\dfrac{n^k}{k}\right]$, встречается бесконечное количество нечетных элементов.

Доказательство. 1) n — нечетное число. В этом случае достаточно взять в качестве подпоследовательности $\{a_k\}$ элементы с индексами $k = n^i$ (здесь и далее $i \in \mathbb{N}$). Понятно, что все такие элементы a_k — нечетные числа.

2) n — четное число. Здесь желательно догадаться, что число вида

$$\frac{(2x)^a - 1}{2x-1} = \left[\frac{(2x)^a}{2x-1}\right] \tag{506a}$$

будет целым и нечетным при $x,\, a \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

2.1) Пусть n — четное, и $n \geqslant 4$. Рассмотрим подпоследовательность $\{a_k\}$ с индексами $k = n^i(n-1)$. Тогда

$$a_k = \left[\frac{n^k}{k}\right] = \left[\frac{n^{n^i(n-1)}}{n^i(n-1)}\right] = \left[\frac{n^{n^i(n-1)-i}}{n-1}\right] \quad \text{— нечетное число.}$$

2.2) Если $n = 2$, то можно рассмотреть отдельно случай $a_k = \left[\dfrac{2^k}{k}\right]$. В этом случае возьмем $k = 3 \cdot 2^{2i}$. Тогда

$$a_k = \left[\frac{2^k}{k}\right] = \left[\frac{2^{3\cdot 2^{2i}}}{3\cdot 2^{2i}}\right] = \left[\frac{2^{3\cdot 2^{2i}-2i}}{3}\right] \quad \text{— нечетное число, см. (506a).}$$

А можно и усложнить формулу из п. 2.1) $k = n^i(n-1)$, например, $k = n^{2i}(n^2-1)$. Нетрудно видеть, что данная формула — общий случай для формулы $k = 3 \cdot 2^{2i}$. ■

507. (USA Talent/2011-2012) Существуют ли такие целые значения параметра t, при которых разрешимо уравнение

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\lfloor 2x\rfloor}+\frac{1}{\lfloor 5x\rfloor}\ ? \tag{507а}$$

Решение. Очевидно, что если $t>0$ ($t<0$), то решения уравнения (507a) должны быть положительными (отрицательными).

Согласно п. А.20. уравнение (507a) имеет две серии решений в натуральных числах ($k\in\mathbb{N}$, p и q — взаимно простые числа):

$$1)\ \begin{cases} t=k,\\ \lfloor 2x\rfloor=2k,\\ \lfloor 5x\rfloor=2k; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} t=kpq,\\ \lfloor 2x\rfloor=kp(p+q),\\ \lfloor 5x\rfloor=kq(p+q). \end{cases}$$

Рассмотрим первую серию решений. Легко показать, что не существует натурального k такого, для которого уравнения $\lfloor 2x\rfloor=\lfloor 5x\rfloor=2k$ имеют решения. Значит, для этой серии решений не существует натуральных значений параметра t, при которых уравнение (507a) имеет решения.

Перейдем к второй серии решений.

$$\begin{cases} kp(p+q)\leqslant 2x<kp(p+q)+1,\\ kq(p+q)\leqslant 5x<kq(p+q)+1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5kp(p+q)\leqslant 10x<5kp(p+q)+5,\\ 2kq(p+q)\leqslant 10x<2kq(p+q)+2. \end{cases} \tag{507б}$$

Чтобы два полуинтервала (507$б$) пересекались, необходимо и достаточно следующее взаимное расположение границ этих полуинтервалов

$$\begin{cases} 5kp(p+q)<2kq(p+q)+2,\\ 2kq(p+q)<5kp(p+q)+5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(p+q)(5p-2q)<2,\\ k(p+q)(2q-5p)<5. \end{cases} \tag{507в}$$

Поскольку одно из двух условий (507$в$) не выполняется, то и для второй серии решений не существует натуральных значений параметра t, при которых уравнение (507a) имеет решения.

Ранее k определяется как натуральное число. Однако и при $k\in\mathbb{Z}_{<0}$ можно привести те же самые рассуждения.

Ответ: $t\in\varnothing$.

508. (COMC/2010) Функция $f(x) = \left\{x + \dfrac{1}{x}\right\}$ определена на интервале $(0, +\infty)$.

а) Решите уравнение $f(x) = x$.

б) Пусть $x = \dfrac{k}{k+1}$, где $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f\big(f(x)\big) = f(x)$, но $f(x) \neq x$.

в) Докажите, что существует бесконечное количество рациональных чисел $q \in (0, 1)$ таких, для которых выполняется равенство $f\Big(f\big(f(q)\big)\Big) = f\big(f(q)\big)$, причем значения q, $f(q)$, $f\big(f(q)\big)$ различны.

Решение. а) Уравнение $x = \left\{x + \dfrac{1}{x}\right\}$ имеет решения только при $0 < x < 1$. Тогда можно перейти к уравнению $\{x\} = \left\{x + \dfrac{1}{x}\right\}$, или согласно (14.2) $\left\{x + \dfrac{1}{x} - x\right\} = 0$. Завершите решение самостоятельно. В ответ пишем $x = \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

б) $f\left(\dfrac{k}{k+1}\right) = \left\{\dfrac{k}{k+1} + \dfrac{k+1}{k}\right\} = \left\{-\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k}\right\} = \dfrac{1}{k\big(k+1\big)}$.

Данное значение имеет вид $\dfrac{1}{n}$, где n — некоторое натуральное число. Аналогичные приведенным в п. а) рассуждения доказывают равенство и неравенство из задания б).

в) Пусть $q = \dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}$, где $\{F_n\}$ — последовательность чисел Фибоначчи, см. п. А.14. Тогда

$$f\left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}\right) = \left\{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}\right\} = \left\{-\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\right\} =$$
$$= \left\{\frac{F_{2n}^2}{F_{2n-1}\cdot F_{2n+1}}\right\} \overset{(A.6)}{=} \left\{\frac{F_{2n}^2}{F_{2n}^2+1}\right\}.$$

Полученное значение имеет вид $\dfrac{k}{k+1}$, где k — некоторое натуральное число. Значит, согласно п. б) равенство из задания в) можно считать доказанным.

В заключение отметим, что рациональные числа $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}$ $(n \geqslant 2)$ отличаются от чисел вида $\dfrac{1}{k}$ и $\dfrac{k}{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Ответ: а) $x = \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

509. (Канада/1996) Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — положительные рациональные числа, сумма которых равна 1. На множестве натуральных чисел задана функция

$$f(n) = n - [r_1 n] - [r_2 n] - \ldots - [r_m n] .$$

Определите минимальное и максимальное значения функции $f(n)$ при любых $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Отметим, что функция $f(n)$ принимает только целые значения. Преобразуем функцию $f(n)$ к виду

$$f(n) = \{r_2 n\} + \ldots + \{r_m n\} = \sum_{i=1}^{m} \{r_i n\} .$$

По условию задачи r_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — положительные рациональные числа, значит, r_i можно представить в виде обыкновенной дроби $r_i = \dfrac{a_i}{b_i}$, где $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, $a_i < b_i$. Тогда

$$f(n) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{a_i n}{b_i} \right\} . \qquad (509a)$$

Поскольку функция $f(n)$ — сумма m мантисс и принимает только целые значения, то $0 \leqslant f(n) \leqslant m-1$. Подберем такие значения n_{min} и n_{max}, при которых $f(n_{min}) = 0$ и $f(n_{max}) = m - 1$.

Значение n_{min} находится довольно просто. Содержимое каждой из мантисс (509a) должно быть целым числом, чтобы $\left\{ \dfrac{a_i n}{b_i} \right\} = \{k_i\} = 0$, где $k_i \in \mathbb{Z}$. Все m равенств выполняются при

$$n_{min} = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m .$$

Определим n_{max}.

$$m - 1 = \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{a_i}{b_i} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ 1 - \frac{a_i}{b_i} \right\} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ -\frac{a_i}{b_i} \right\} .$$

Тогда каждая из мантисс (509a) должна равняться $\left\{ \dfrac{a_i n}{b_i} \right\} = \left\{ -\dfrac{a_i}{b_i} \right\}$. Применим метод решения уравнений вида $\{f(x)\} = \{g(x)\}$ (см. п. 14.1.)

$$\left\{ \frac{a_i n}{b_i} + \frac{a_i}{b_i} \right\} = 0, \qquad \left\{ \frac{a_i (n+1)}{b_i} \right\} = 0.$$

Получилось условие, аналогичное тому, которое встретилось при определении n_{min}, следовательно,

$$n_{max} = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m - 1 .$$

Ответ: $\min\limits_{n \in \mathbb{N}} f(n) = 0, \quad \max\limits_{n \in \mathbb{N}} f(n) = m - 1.$

510. (Россия/1994-1995) [1, с. 9] Решите уравнение
$$[x] + [x^2] = [x^3].$$

Решение. $x = 0$ — решение уравнения, другие целые значения x не являются решениями.

При $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{-1,\ 0})$ уравнение превращается в равенство, поскольку $[x] = [x^3] = -1$, $[x^2] = 0$.

При $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0,\ 1})$ уравнение также превращается в равенство, так как $[x] = [x^2] = [x^3] = 0$.

Поэтому интервал $(-1,\ 1)$ пишем в ответ.

При $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{\neq \mathbf{0}}$ исходное уравнение не выполняется.

Рассмотрим $|x| > 1$. Тогда
$$x^2 > 1, \quad [x^2] \geqslant 1, \quad [x^3] \geqslant 1 + [x], \quad [x^3] > [x], \quad x^3 > x.$$
Использовался равносильный переход от неравенства антье к неравенству содержимого антье — свойство (2.18).

Условие $x^3 > x$ при $|x| > 1$ эквивалентно условию $x > 0$. Таким образом, далее имеет смысл искать решения только для $\boldsymbol{x > 1}$.

Согласно (2.29) $[x^3] = [x \cdot x^2] \geqslant [x] \cdot [x^2]$. Тогда
$$[x] + [x^2] \geqslant [x] \cdot [x^2],$$
$$([x^2] - 1) \cdot ([x] - 1) \leqslant 1,$$
следовательно, $[x^2] \leqslant 2$ $([x] = 1)$, то есть придется рассмотреть всего лишь два случая $[x^2] = 1$ или $[x^2] = 2$.
$$\begin{cases} [x] = 1, \\ [x^2] = 1, \\ [x^3] = 2 \end{cases} \iff \sqrt[3]{2} \leqslant x < \sqrt{2},$$
$$\begin{cases} [x] = 1, \\ [x^2] = 2, \\ [x^3] = 3 \end{cases} \iff \sqrt[3]{3} \leqslant x < \sqrt[3]{4}.$$

Ответ: $(-1,\ 1) \cup [\sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}) \cup [\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{4})$.

511. (На основе AIME/1985) [29, с. 164] Найдите множество значений от 1 до 1000 функции действительной переменной

$$f(x) = [2x] + [4x] + [6x] + [8x].$$

Решение. Функция $f(x)$ неубывающая, принимает только целые значения, $f(0) = 0$, $f(50) = 1000$, то есть будем определять множество значений на полуинтервале $(0,\ 50]$. Для функции $f(x)$ выполняется условие

$$f(x+1) = f(x) + 20, \quad \text{или} \quad f(x+n) = f(x) + 20n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Согласно этому условию и неубыванию $f(x)$ достаточно определить множество значений функции на полуинтервале $(0,\ 1]$ и затем «учесть» слагаемое $20n$.

Выражения, входящие в функцию $f(x)$, меняют свои значения на полуинтервале $(0,\ 1]$ в точках:

$$[2x] \ - \ \frac{1}{2},\ 1; \qquad [6x] \ - \ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6},\ 1;$$

$$[4x] \ - \ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1; \qquad [8x] \ - \ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{8},\ 1.$$

Воспользуемся методом интервалов. Отметим на полуинтервале $(0,\ 1]$ все указанные выше точки, в них увеличивается значение функции $f(x)$, причем важно обозначить кратность точек, например, кратность точки $1/2$ (как и точки 1) равна 4, так как при $x = 1/2$ ($x = 1$) каждое антье увеличивается на 1.

Вычисление значений функции $f(x)$ при $x \in (0,\ 1]$ начинается с интервала $(0,\ 1/8)$, на котором $f(x) = 0$, и выполняется слева направо с соответствии с кратностью отмеченных точек (см. рис. 68).

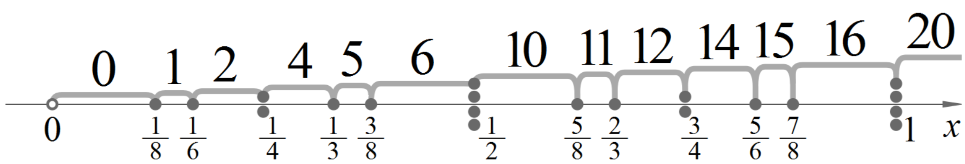


Рис. 68. Значения $f(x) = [2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ при $x \in (0,\ 1]$

Таким образом, при $x \in (0,\ 50]$ функция $f(x)$ принимает значения:

$f(x) = 20n + k$, где $n \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 49\}$,

$k \in \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 20\}$,

то есть всего 600 значений.

Ответ: 600 значений.

512. (САММАТ/2011, А. Адреев) Найдите наименьшее натуральное p, при котором найдется натуральное q такое, что будет выполняться равенство

$$\left[\sqrt{p}\right] + \left[\sqrt{p+1}\right] + \ldots + \left[\sqrt{q}\right] = 2011.$$

Решение. Обозначим

$$S(p,\, q) = \left[\sqrt{p}\right] + \left[\sqrt{p+1}\right] + \ldots + \left[\sqrt{q}\right].$$

Рассмотрим подробнее сумму

$$S(1,\, n^2-1) = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{n^2-1}\right].$$

Она состоит из серий равных идущих подряд слагаемых

$$\left[\sqrt{i^2}\right] + \left[\sqrt{i^2+1}\right] + \ldots + \left[\sqrt{(i+1)^2-1}\right].$$

Далее будем называть такую серию i-серией (или i-й серией). Каждое из слагаемых i-серии равно i. Количество слагаемых в i-й серии обозначим $N(i)$, значение которого вычисляется как $N(i) = 2i+1$.

В дальнейшем будет использоваться формула, доказанная в задаче *420*:

$$S(1,\, n^2-1) = \sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k}\right] = \frac{n\,(n-1)\,(4n+1)}{6}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}.$$

Следующее равенство достаточно очевидно:

$$S(m^2,\, n^2-1) = S(1,\, n^2-1) - S(1,\, m^2-1), \quad \text{где } m,\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ m < n.$$

А что делать, если требуется посчитать сумму для любых значений, а не только специального вида, как в последней формуле? Оказывается, есть такой способ вычисления:

$$\begin{cases} S(m^2+a,\, n^2+b-1) = S(m^2,\, n^2-1) - ma + nb, \\ 0 \leqslant a < N(m),\ a \in \mathbb{Z}, \\ 0 \leqslant b < N(n),\ b \in \mathbb{Z}, \\ m,\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ m < n. \end{cases} \tag{512a}$$

С помощью последней формулы решим исходную задачу.

Так как $S(1^2,\, 14^2-1)=1729$, а $S(1^2,\, 15^2-1)=2135$, попытаемся решить уравнение

$$\begin{cases} S(1^2+a,\, 14^2+b-1)=2011, \\ 0\leqslant a<N(1),\ a\in\mathbb{Z}, \\ 0\leqslant b<N(14),\ b\in\mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} 1729-a+14b=2011, \\ 0\leqslant a<3,\ a\in\mathbb{Z}, \\ 0\leqslant b<29,\ b\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Все предварительные рассуждения понадобились, чтобы свести исходную задачу к решению линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными, ограниченными ОДЗ!

Первая попытка решить задачу не увенчалась успехом — решения диофантова уравнения не удовлетворяют условиям, наложенным на a и b.

Вторая и третья попытки также неудачны

$$\begin{cases} S(2^2+a,\, 14^2+b-1)=2011, \\ 0\leqslant a<N(2),\ a\in\mathbb{Z}, \\ 0\leqslant b<N(14),\ b\in\mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} 1729-3-2a+14b=2011, \\ 0\leqslant a<5, \\ 0\leqslant b<29. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(3^2+a,\, 14^2+b-1)=2011, \\ 0\leqslant a<N(3),\ a\in\mathbb{Z}, \\ 0\leqslant b<N(14),\ b\in\mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} 1729-13-3a+14b=2011, \\ 0\leqslant a<7, \\ 0\leqslant b<29. \end{cases}$$

Лишь при следующих условиях удается найти такие натуральные числа $m,\ n,\ a,\ b$, при которых система (512a) имеет решение.

$$\begin{cases} S(4^2+a,\, 14^2+b-1)=2011, \\ 0\leqslant a<N(4), \\ 0\leqslant b<N(14). \end{cases} \iff \begin{cases} 1729-34-4a+14b=2011, \\ 0\leqslant a<9, \\ 0\leqslant b<29. \end{cases}$$

Решением будут значения $a=5$ и $b=24$, то есть

$$S(4^2+5,\, 14^2+23)=S(21,\, 219)=2011.$$

Ответ: $\left[\sqrt{21}\right]+\left[\sqrt{22}\right]+\ldots+\left[\sqrt{219}\right]=2011.$

513. (Тайвань/1997) Функция $f(x)$ принимает значения только в сегменте $\big[-1,\ 1\big]$, также выполняется условие для при любых $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+a+b) - f(x+b) = c\big[x + 2a + [x] - 2\,[x+a] - [b]\big] + d$$

для некоторых значений a, b, c и d, где $a \in \mathbb{Q}$ и b, c, $d \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция $f(x)$ периодическая.

Доказательство. Очевидно, что $D\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$. Тогда требуется доказать, что существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$. Очевидно, что равенство может быть и таким: $f(x+b+T) - f(x+b) = 0$, где b — некоторая константа.

Сначала упростим выражение, стоящее в правой части равества. Получим равенство, равносильное исходному условию:

$$f(x+a+b) - f(x+b) = c\big[2\,\{x+a\} - \{x\}\big] + d - c\,[b]\,. \tag{513а}$$

Проанализируем данное равенство. Нетрудно заметить свойство функции $f(x)$, основанное на том, что x расположен под знаком мантиссы:

$$f(x+a+b) - f(x+b) = f(x+n+a+b) - f(x+n+b),\ \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \tag{513б}$$

Рассмотрим два случая: когда a — целое число и когда a — рациональное нецелое число (по условию задачи $a \in \mathbb{Q}$).

Пусть $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$c\big[2\,\{x+a\} - \{x\}\big] + d - c\,[b] = \\ = c\big[2\,\{x\} - \{x\}\big] + d - c\,[b] = c\big[\{x\}\big] + d - c\,[b] = d - c\,[b]\,.$$

Поскольку исходное условие выполняется для любых $x \in \mathbb{R}$, то согласно (513б) имеет место следующее условие:

$$f(a+b) - f(b) = f(2a+b) - f(a+b) = \ldots = \\ = f\big((n+1)a + b\big) - f(na+b) = d - c\,[b]\,, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

По условию задачи функция $f(x)$ ограничена снизу и сверху, следовательно, $d - c\,[b] = 0$. Это означает, что при целых значениях a имеет место равенство $f(x+a+b) - f(x+b) = 0$, то есть функция $f(x)$ периодическая с периодом, равным a.

Рассмотрим второй случай, когда $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Отметим, что существует такое минимальное натуральное число k, что ak будет целым.

Согласно (513*б*) для любых $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x+a+b)-f(x+b)&= \\
&= f(x+ka+a+b)-f(x+ka+b)= \\
&= f(x+2ka+a+b)-f(x+2ka+b)=\ldots= \\
&= f(x+nka+a+b)-f(x+nka+b), \quad \text{где } n\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся такой повторяемостью разностей функции $f(x)$.

$$\begin{aligned}
S_1(x)=f(x+ka+a+b)-f(x+a+b)&= \\
&= f(x+ka+a+b)-f(x+ka+b)+ \\
&+ f(x+ka+b)-f(x+ka-a+b)+\ldots+ \\
&+ f(x+2a+b)-f(x+a+b), \\
S_2(x)=f(x+2ka+a+b)-f(x+ka+a+b)&= \\
&= f(x+2ka+a+b)-f(x+2ka+b)+ \\
&+ f(x+2ka+b)-f(x+2ka-a+b)+\ldots+ \\
&+ f(x+ka+2a+b)-f(x+ka+a+b).
\end{aligned}$$

Сравнив развернутые разности $S_1(x)$, $S_2(x)$, смеем утверждать, что $S_1(x)=S_2(x)=\ldots=S_n(x)$. Пусть они равны $S(x)$.

$$\begin{gathered}
f(x+ka+a+b)-f(x+a+b)=S(x), \\
f(x+2ka+a+b)-f(x+a+b)=2S(x), \\
\ldots \\
f(x+nka+a+b)-f(x+a+b)=nS(x).
\end{gathered}$$

По условию задачи функция $f(x)$ ограничена, следовательно, $S(x)=0$. Остается констатировать, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом ka, поскольку $f(x+ka+a+b)=f(x+a+b)$. ■

514. (Россия/1997-1998, Н. Агаханов) Решите уравнение

$$\left[\frac{1}{\sin x}\right]+\left[\frac{1}{\cos x}\right]=0.$$

Решение. Поскольку имеются знаменатели $\sin x$ и $\cos x$, то $x \neq \dfrac{\pi k}{2}$ (здесь и далее $k\in\mathbb{Z}$).

Также отметим, что $\left[\dfrac{1}{\sin x}\right] \neq -1,\, 0$ и $\left[\dfrac{1}{\cos x}\right] \neq -1,\, 0$, так как в исходном уравнении $\sin x$ и $\cos x$ принимают значения из интервала $(-1,\, 1)$. Раз уж оба антье не равны -1, то $\left[\dfrac{1}{\sin x}\right] \neq 1$ и $\left[\dfrac{1}{\cos x}\right] \neq 1$.

И нетрудно видеть, что решения следует искать во второй и четвертой четвертях координатной плоскости, в которых $\sin x$ и $\cos x$ принимают значения противоположных знаков.

Рассмотрим сначала случай $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k}$.

Тогда $\left[\dfrac{1}{\sin x}\right] = n$, $\left[\dfrac{1}{\cos x}\right] = -n$ $(n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2})$, или

$$\frac{1}{\sin x} = n + \alpha, \quad \frac{1}{\cos x} = -n + \beta, \quad \text{где } 0 \leqslant \alpha,\, \beta < 1.$$

При $n \geqslant 3$ имеют место оценки $\dfrac{1}{(n+\alpha)^2} \leqslant \dfrac{1}{9}$ и $\dfrac{1}{(-n+\beta)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$. Но согласно основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{(n+\alpha)^2} + \frac{1}{(-n+\beta)^2} = 1.$$

Значит, при $n \geqslant 3$ решений нет.

Остается лишь одно значение $n = 2$, при котором могут быть решения из второй четверти.

$$\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\sin x}\right] = 2, \\ \left[\dfrac{1}{\cos x}\right] = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leqslant \dfrac{1}{\sin x} < 3, \\ -2 \leqslant \dfrac{1}{\cos x} < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{3} < \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -1 < \cos x \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x < \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi k$.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < 2\pi k}$.

Тогда $\left[\dfrac{1}{\sin x}\right] = -n$, $\left[\dfrac{1}{\cos x}\right] = n$ $(n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2})$. Аналогичные рассуждения приводят к системе уравнений при $n = 2$.

$$\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\sin x}\right] = -2, \\ \left[\dfrac{1}{\cos x}\right] = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leqslant \dfrac{1}{\sin x} < -1, \\ 2 \leqslant \dfrac{1}{\cos x} < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < \sin x \leqslant -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{3} < \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

В 4-й четверти решением является $-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k<x\leqslant-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k.$

Ответ: $\left[\begin{array}{c}\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\leqslant x<\pi-\arcsin\dfrac{1}{3}+2\pi k,\\ -\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k<x\leqslant-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right.$ где $k\in\mathbb{Z}$.

515. (Австралия/1992) Определите количество действительных решений уравнения

$$x^3-\left[x^3\right]=(x-[x])^3.$$

при $1\leqslant x<n$, где $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$x^3-\left[x^3\right]-\{x\}^3=0.$$

Разобьем полуинтервал $\left[1,\,n\right)$ сначала на единичные промежутки с целочисленными концами $\left[k,\,k+1\right)$, $k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,n-1\}$, поскольку на каждом из этих промежутков функция $\{x\}^3$ непрерывна. Затем разобьем каждый из полуинтервалов $\left[k,\,k+1\right)$ на такие промежутки, на которых функция $\left[x^3\right]$ постоянна.

Таким образом, полуинтервал $\left[1,\,n\right)$ будет разбит на промежутки

$$\left[\sqrt[3]{k^3+m},\ \sqrt[3]{k^3+m+1}\right), \tag{515a}$$

где $k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,n-1\}$ и $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}$ такое, что $k^3\leqslant k^3+m\leqslant\left(k+1\right)^3-1$.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-\left[x^3\right]-\{x\}^3$ на полуинтервале (515a). На указанном промежутке $\left[x^3\right]=k^3+m$ и $\{x\}^3=(x-k)^3$. Но самое главное, функция $f(x)$ строго возрастает. Интуитивно понятно, при $x>1$ функция x^3 растет быстрее, чем функция $\{x\}^3$, ведь функция $\{x\}^3$ состоит из фрагментов функции x^3 на полуинтервале $\left[0,\,1\right)$. Выполните самостоятельно обоснование того, что если $x_2>x_1$ из полуинтервала (515a), то выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Разберем три случая расположения промежутка (515a) относительно концов полуинтервала $\left[1,\,n\right)$.

1) $\boldsymbol{x\in\left[k,\ \sqrt[3]{k^3+1}\right)}$, то есть $m=0$.

$f(k)=0$, следовательно, $x=k$ — решение исходного уравнения. Других решений нет, так как функция $f(x)$ возрастает.

2) $\boldsymbol{x\in\left[\sqrt[3]{k^3+m},\ \sqrt[3]{k^3+m+1}\right)}$, где m принимает такие натуральные значения, что $k^3<k^3+m<\left(k+1\right)^3-1$.

На левом конце полуинтервала $f(x) = -\{x\}^3 < 0$.

В качестве значения правого конца возьмем $x = \sqrt[3]{k^3 + m + 1 - \varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Тогда на «правом конце» $f(x) = 1 - \varepsilon - \{x\}^3 > 0$.

Делаем вывод, что во 2-м случае решение исходного уравнения существует, причем такое решение единственное, поскольку функция $f(x)$ возрастает.

3) $\boldsymbol{x \in \left[\sqrt[3]{(k+1)^3 - 1},\ k+1\right)}$, то есть $m = \left(k+1\right)^3 - 1$.

Покажем, что на данном промежутке $f(x) < 0$:

$$\begin{aligned}f(x) = x^3 - \left(k+1\right)^3 + 1 - \left(x-k\right)^3 =\\ = x^3 - k^3 - 3k^2 - 3k - 1 + 1 - x^3 + 3x^2k - 3xk^2 + k^3 =\\ = 3k\left(x^2 - xk - k - 1\right) = 3k\left(x+1\right)\left(x-k-1\right) < 0.\end{aligned}$$

Значит, в последнем случае исходное уравнение не имеет решений.

Осталось произвести подсчет количества решений. Общее количество промежутков вида (515a) равно $n^3 - 1$. Количество полуинтервалов, проанализированных в 3-м случае, на которых отсутствуют решения, равно $n - 1$.

Ответ: $n^3 - n$.

Примечание. См. другое решение в [36, с. 155].

516. (Югославия/1987) Определите количество действительных решений уравнения

$$x^2 - \left[x^2\right] = \left(x - [x]\right)^2.$$

при $1 \leqslant x < n$, где $n \in \mathbb{N}$.

См. аналогичное решение — задача *515*.

Решение. Предложим более простой подсчет количества решений исходного уравнения. Выполним типовую замену $[x] = k$, $\{x\} = \alpha$, где

$$k = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{516a}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(k+\alpha)^2 - \left[(k+\alpha)^2\right] = \alpha^2,\\ 2k\alpha = \left[2k\alpha + \alpha^2\right].\end{aligned} \tag{516$б$}$$

Выражение $2k\alpha$ должно быть целым числом. Если $2k\alpha$ — целое, то уравнение (516*б*) превращается в равенство $\left[\alpha^2\right] = 0$. Следовательно, задача свелась к подсчету количества пар $(k,\ \alpha)$ таких, что $2k\alpha \in \mathbb{Z}$ при условии (516*а*).

Пусть $1 \leqslant i \leqslant x < i + 1 \leqslant n$, тогда

$$2i\alpha \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \left\{0,\ \frac{1}{2i},\ \frac{2}{2i},\ \ldots,\ \frac{2i-1}{2i}\right\}.$$

Количество значений α равно $2i$. Следовательно, количество действительных решений исходного уравнения равно

$$2 + 4 + \ldots + 2(n-1) = n^2 - n.$$

Ответ: $n^2 - n$.

517. (IMO°/1996) Найдите натуральные a и b, для которых выполняется условие

$$\left[\frac{a^2}{b}\right] + \left[\frac{b^2}{a}\right] = \left[\frac{a^2+b^2}{ab}\right] + ab. \qquad (517a)$$

Решение. Сначала рассмотрим такие пары a и b, что $\boldsymbol{a = b}$. Тогда исходное уравнение примет вид $a^2 - 2a + 2 = 0$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.

Обратим внимание на то, что исходное уравнение является симметричным (если имеется некоторое решение $(a_0,\ b_0)$, то и пара $(b_0,\ a_0)$ также является решением).

Далее будем рассматривать такие пары a и b, что $\boldsymbol{a < b}$.

Если $\boldsymbol{a = 1}$, то исходное уравнение примет вид $b^2 - 2b = 0$, что дает два решения $(1,\ 2)$ и $(2,\ 1)$.

Пусть $\boldsymbol{2 \leqslant a < b}$. Обозначим

$$\left[\frac{a^2}{b}\right] = k, \quad \left[\frac{b^2}{a}\right] = n, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}.$$

Оценим произведение $ab = \dfrac{a^2}{b} \cdot \dfrac{b^2}{a} \geqslant \left[\dfrac{a^2}{b}\right] \cdot \left[\dfrac{b^2}{a}\right] = kn$. Тогда

$$(517a) \quad \Longrightarrow \quad k + n \geqslant 2 + kn$$

(используется неравенство для суммы взаимно обратных положительных чисел), или

$$(k-1)(n-1) \leqslant -1.$$

Поскольку $k \geqslant 0$ и $n \geqslant 3$, делаем вывод, $k = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{a^2 < b}$, и при этом условии

$$(517а) \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{b^2}{a}\right] = \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] + ab.$$

Пусть $\boldsymbol{a^2 + m = b}$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left[\frac{\left(a^2+m\right)^2}{a}\right] = \left[\frac{a}{a^2+m} + \frac{a^2+m}{a}\right] + a\left(a^2+m\right),$$

$$a^3 + 2am + \left[\frac{m^2}{a}\right] = a + a^3 + am + \left[\frac{a}{a^2+m} + \frac{m}{a}\right],$$

$$am - a + \left[\frac{m^2}{a}\right] = \left[\frac{a}{a^2+m} + \frac{m}{a}\right]. \qquad (517б)$$

Если $\boldsymbol{m = 1}$, или $\boldsymbol{a^2 + 1 = b}$, то уравнение (517*б*) обращается в тождество. В ответ пишем две серии решений $\left(t,\, t^2+1\right)$, $\left(t^2+1,\, t\right)$, где $t \in \mathbb{N}$, с включением ранее найденных решений $\left(1,\, 2\right)$ и $\left(2,\, 1\right)$.

Если $\boldsymbol{m > 1}$, или $\boldsymbol{a^2 + 1 < b}$, то

$$(517б) \quad \Longrightarrow \quad am - a \leqslant \left[\frac{a}{a^2+m} + \frac{m}{a}\right] \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad am - a \leqslant \frac{a}{a^2+m} + \frac{m}{a} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a^2\left(m-1\right) - m \leqslant \frac{a^2}{a^2+m} < 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a^2\left(m-1\right) - m \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(a^2-1\right)\left(m-1\right) \leqslant 1.$$

Последнее неравенство не имеет решений при $a > 1$ и $m > 1$. Тем самым, рассмотрены все варианты натуральных значений a и b.

Ответ: $\left(t,\, t^2+1\right)$, $\left(t^2+1,\, t\right)$, где $t \in \mathbb{N}$.

518. (Baltic/1997) Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ задается следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \left[\frac{a_n}{n}\right] + 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определите a_{1997}.

Решение. Понятно, что задание предполагает вывод некоторой формулы, скорее всего, формулы n-члена последовательности. Вычислим несколько первых членов последовательности $\{a_n\}$ и попытаемся найти закономерность среди этих чисел:

$$\{a_n\} = \{1,\ 4,\ 8,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 38,\ 44,\ \ldots\}.$$

Обратим внимание на $a_2 = 4 = 2 \cdot 2$, $a_4 = 12 = 3 \cdot 4$ и $a_8 = 32 = 4 \cdot 8$. Во всех трех произведениях множители связаны между собой, и для этих трех членов имеет место формула

$$a_n = \big(k+1\big) \cdot n, \quad \text{где } n = 2^k,\ k = 1, 2, 3. \tag{518а}$$

Далее попытаемся составить такие арифметические выражения для элементов a_5, a_6 и a_7, чтобы в этих выражениях прослеживалась регулярность. Несложно найти следующие представления для чисел 17, 22 и 27: $a_5 = 17 = 3 \cdot 5 + 2$, $a_6 = 22 = 3 \cdot 6 + 4$, $a_7 = 27 = 3 \cdot 7 + 6$.

Адаптируем формулу (518*а*) для элементов a_5, a_6 и a_7

$$a_n = \big(k+1\big) \cdot n + 2m, \quad \text{где } n = 2^k + m,\ k = 2,\ m = 1, 2, 3. \tag{518б}$$

Проверкой убеждаемся, что формула (518*б*) «работает» и для других членов: a_3, a_9 и a_{10}.

Таким образом, выскажем предположение, что формула

$$a_n = \big(k+1\big) \cdot n + 2m, \quad \text{где } n = 2^k + m; \qquad k, m \in \mathbb{N}:\ 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \tag{518в}$$

является формулой n-члена последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентным условием: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \left[\dfrac{a_n}{n}\right] + 2$, $n \in \mathbb{N}$. Докажем формулу (518*в*).

Рассмотрим первый случай $\boldsymbol{2^k \leqslant n < n+1 < 2^{k+1}}$. Очевидно, что рекуррентная формула выполняется:

$$\overbrace{(k+1)(2^k+m+1) + 2(m+1)}^{a_{n+1}} = \\ = \underbrace{(k+1)(2^k+m) + 2m}_{a_n} + \left[\frac{(k+1)(2^k+m)+2m}{2^k+m}\right] + 2.$$

Рассмотрим второй случай $\boldsymbol{2^k < n < n+1 = 2^{k+1}}$. Сначала упростим выражение для a_n

$$a_n = (k+1)(2^{k+1}-1) + 2(2^{k+1}-1-2^k) = \\ = (k+1)(2^{k+1}-1) + 2^{k+1} - 2.$$

И в этом случае очевидно, что рекуррентная формула выполняется:

$$\overbrace{(k+2)\cdot 2^{k+1}}^{a_{n+1}} =$$

$$= \underbrace{(k+1)(2^{k+1}-1)+2^{k+1}-2}_{a_n} + \left[\frac{(k+1)(2^{k+1}-1)+2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}\right] + 2.$$

Элемент последовательности a_{1997} вычисляется по формуле (518*в*) при $k = 10$ ($2^{10} = 1024 < 1997 < 2048 = 2^{11}$) и $m = 973$ ($973 = 1997 - 1024$):

$$a_{1997} = 11\cdot 1997 + 2\cdot 973 = 23\,913.$$

Ответ: $a_{1997} = 23\,913$.

519. (На основе Австрия/2008) Числовая последовательность $\{a_n\}$ задается формулой $a_n = n + \left[\sqrt{n}\,\right] + \left[\sqrt[3]{n}\,\right]$. Определите формулы n-го члена таких последовательностей, которые вместе с последовательностью $\{a_n\}$ образуют разбиение множества натуральных чисел.

Задача усложнена, причем новая формулировка выглядит более завершенной. В исходной формулировке требуется определить «пропущенные» в последовательности $\{a_n\}$ натуральные числа.

Решение. Сначала выясним, какие натуральные числа пропущены в последовательности $\{a_n\}$. Затем попытаемся сконструировать соответствующие формулы.

Определим три подмножества натуральных чисел $(k = 2,\ 3,\ 6)$

$$M_k = \left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\, n = m^k,\ \text{где } m\in\mathbb{N}\right\} = \left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\, \sqrt[k]{n} = \left[\sqrt[k]{n}\,\right]\right\},$$

например, M_2 — множество полных квадратов.

Несложный анализ формулы n-го члена последовательности $\{a_n\}$ приводит к следующим выводам:

$$\begin{array}{ll} \text{при } n\in M_6 & a_n = a_{n-1}+3,\\ \text{при } n\in M_2\setminus M_6 & a_n = a_{n-1}+2,\\ \text{при } n\in M_3\setminus M_6 & a_n = a_{n-1}+2. \end{array}$$

То есть в первом случае пропущены два последовательных числа, во втором и третьем случаях пропускается по одному натуральному числу.

Таким образом, удалось выяснить, что в последовательности $\{a_n\}$ отсутствуют числа, стоящие:

а) по два числа перед *полными числами шестой степени* (надеемся, что такая фигура речи понятна и удобна),

б) по одному перед полными квадратами,

в) по одному перед полными кубами.

Переходим ко второму этапу — конструированию формул.

Несложно определяются формулы, порождающие значения элементов $\{a_n\}$, которые входят в множества M_k:

$$\begin{aligned}
&\text{если } n \in M_6, \text{ то } a_n = n^6 + n^3 + n^2,\\
&\text{если } n \in M_2, \text{ то } a_n = n^2 + n + \left[\sqrt[3]{n^2}\right],\\
&\text{если } n \in M_3, \text{ то } a_n = n^3 + n + \left[\sqrt{n^3}\right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим четыре последовательности $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{s_n\}$ и $\{t_n\}$, задаваемые формулами:

$$\begin{aligned}
v_n &= n^6 + n^3 + n^2 - 1,\\
w_n &= n^6 + n^3 + n^2 - 2,\\
s_n &= n^2 + n + \left[\sqrt[3]{n^2}\right] - 1,\\
t_n &= n^3 + n + \left[\sqrt{n^3}\right] - 1.
\end{aligned}$$

Понятно, что эти четыре последовательности содержат все натуральные числа, пропущенные в $\{a_n\}$:

$$\{a_n\} \cap \Big(\{v_n\} \cup \{w_n\} \cup \{s_n\} \cup \{t_n\}\Big) = \varnothing,$$

$$\{a_n\} \cup \{v_n\} \cup \{w_n\} \cup \{s_n\} \cup \{t_n\} = \mathbb{N}.$$

Но, к сожалению, имеются повторения:

$$\{s_n\} \cap \{t_n\} = \{v_n\}.$$

Заметим, что

$$\{s_n\} \cup \{t_n\} \cup \{w_n\} = \mathbb{N} \setminus \{a_n\},$$

то есть последовательность $\{v_n\}$ надо «убрать», а последовательность $\{w_n\}$ — «добавить». То есть необходимо вычесть 1 только из тех элементов t_n (или s_n), у которых $n \in M_6$. Таким образом, одним махом исключаются элементы $\{v_n\}$ и включаются элементы $\{w_n\}$. На удивление, это сделать вовсе не трудно, таким выражением будет $\left[1 - \{\sqrt[6]{n}\}\right]$.

Ответ: Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ образуют разбиение множества натуральных чисел:

$$a_n = n + \left[\sqrt{n}\,\right] + \left[\sqrt[3]{n}\,\right],$$

$$b_n = n^2 + n - 1 + \left[\sqrt[3]{n^2}\,\right],$$

$$c_n = n^3 + n - 2 + \left[\sqrt{n^3}\,\right] - \left[-\left\{\sqrt[6]{n}\right\}\right].$$

Приложение А. Некоторые факты из теории чисел и алгебры

Ниже приводятся краткие сведения из теории чисел и алгебры. Указаны номера задач, в которых используются соответствующие понятия и формулы. Все числовые значения натуральные, если не отмечено иное.

А.1. $k < n \iff k + 1 \leqslant n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$, $n \leqslant \alpha \iff n < \alpha$ $(n \in \mathbb{Z},\ \alpha$ — иррациональное число)

Слишком тривиально? Да, конечно. Однако именно из-за своей простоты этот прием легко упустить из вида.

Встречается во многих задачах, например, см. *359*, *453*.

А.2. Термины, связанные с натуральными числами

Простое число — это натуральное число, большее 1, которое делится нацело лишь на 1 и на само себя и других натуральных делителей не имеет. См. *156*, *161*, *162*, *433*, *436*.

Составное число — это натуральное число, большее 1 и которое не является простым.

Пусть n делится на d без остатка. d называется *делителем* n, или, по-другому, n — *кратное* d. Обозначение — $n \vdots d$. См. *151*, *152*.

Наибольшим общим делителем (НОД) двух (и более) натуральных чисел называется наибольший из их общих натуральных делителей. Обозначение — НОД$(a,\ b)$. См. *434*, *435*.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух (и более) натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое их этих чисел. Обозначение — НОК$(a,\ b)$. См. *186*.

Натуральные числа называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1. Если количество натуральных чисел больше двух, то из того, что они взаимно простые, не следует, что они попарно взаимно простые. См. *92*, *175*, *432*, *434*, *435*, *488*.

$$\text{НОД}\,(m,\,n)\cdot\text{НОК}\,(m,\,n)=m\cdot n;\quad \text{НОД}\,(m,\,n)=n\iff m\,\vdots\,n.$$

А.3. Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число, большее единицы, представимо в виде произведения простых чисел, причем единственным способом с точностью до порядка следования сомножителей. Следующее разложение натурального числа n называется *каноническим*

$$n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}, \tag{А.1}$$

где $p_1<p_2<\ldots<p_k$ — простые числа, $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_k\in\mathbb{N}$.

А.4. Количество делителей натурального числа

Пусть каноническое разложение натурального числа n имеет вид (А.1). Количество делителей натурального числа n обозначается функцией $\tau(n)$, которая равна

$$\tau(n)=(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1), \tag{А.2}$$

где $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_k$ определены в п. А.3. См. *182*, *184*, *498*.

$p\in\mathbb{P}\iff\tau(p)=2$. См. *495*.

$\tau(n)$ — нечетное число $\iff$ n — полный квадрат. См. *496*.

А.5. Сумма делителей натурального числа

Пусть каноническое разложение натурального числа n имеет вид (А.1). Сумма делителей натурального числа n обозначается функцией $\sigma(n)$, которая равна

$$\begin{aligned}\sigma(n)=\bigl(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1}\bigr)\cdot&\\ \cdot\bigl(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2}\bigr)\cdot\ldots&\\ \ldots\cdot\bigl(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{a_k}\bigr)&= \qquad\text{(А.3)}\\ =\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}&, \qquad\text{(А.4)}\end{aligned}$$

где $p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_k$ и $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_k$ определены в п. А.3. См. *183*, *185*.

А.6. Оценка для наименьшего простого делителя

Наименьший простой делитель составного натурального числа n не больше $\sqrt{n}$.

A.7. Деление по модулю и остатки

Числа a и b сравнимы по модулю m, обозначается как $a \equiv b \pmod{m}$, если их разность $a-b$ делится на m без остатка $(a-b) \vdots m$, или, иначе, a может быть представлено в виде $a = b + km$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $k \equiv n \pmod{m}$, то $a + k \equiv b + n \pmod{m}$, $a - k \equiv b - n \pmod{m}$, $ak \equiv bn \pmod{m}$.

Пусть $n = qm + r$, то есть при делении n на d получилось частное q и остаток r. Если важным является лишь остаток от деления, то удобна запись $n \equiv r \pmod{d}$.

$n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, если n — нечетные числа, не кратные 3.
$n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$, см. *14*.
$n^2 \equiv \{0,\ 1\} \pmod{3}$, см. *456*
$n^2 \equiv \{0,\ 1\} \pmod{4}$, см. *378*, *379*.
$n^2 \equiv \{0,\ 1,\ 4\} \pmod{5}$,
$n^2 \equiv \{0,\ 1,\ 2,\ 4\} \pmod{7}$, см. *458*
$n^3 \equiv \{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\} \pmod{8}$, см. *375*.
$n^3 \equiv \{0,\ 1,\ 8\} \pmod{9}$, см. *173*.
$2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$, $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$, см. *169*.

Представляет интерес утверждение, обобщающее тривиальный факт из п. А.1. При $k \equiv n \pmod{m}$
$k < n \iff k + m \leqslant n$, см. *361* (используется четность).

A.8. Область значений выражения $ak + b \pmod{m}$ при НОД $(a,\ m) = 1$ и $n + 1 \leqslant k \leqslant n + m$

Пусть a и m — взаимно простые числа и k принимает m последовательных целых значений. Тогда множество $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\}$ является областью значений выражения $ak + b \pmod{m}$, то есть

$$ak + b \equiv c_i \pmod{m}, \quad \text{где } \{c_i\}_{i=1}^{m} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\}.$$

Указание. $ai \not\equiv aj \pmod{m}$, где $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$ и $i \neq j$.
См. *166*, *432*, *450*.

А.9. Малая теорема Ферма

Пусть p — простое число, a — целое число, и a не делится нацело на p. Тогда имеет место сравнение — малая теорема Ферма —

$$a^{p-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\; p). \tag{A.5}$$

См. 50, 203.

А.10. Функция Эйлера, теорема Эйлера

Функция Эйлера, обозначается как $\varphi(n)$, — это арифметическая функция, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. Считается, что число 1 является взаимно простым со всеми n, и $\varphi(1) = 1$. См. 53.

$\varphi(p) = p - 1$, если $p \in \mathbb{P}$.
$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$, если $p \in \mathbb{P}$.
$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, если НОД$(m, n) = 1$.

Теорема Эйлера.
$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, если НОД$(a, m) = 1$.

А.11. Ряд (последовательность) Фарея

Ряд Фарея n-ого порядка F_n — конечная возрастающая последовательность неотрицательных несократимых правильных дробей, знаменатель которых меньше или равен n. Первый и последний элементы любого ряда F_n всегда равны $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ соответственно.

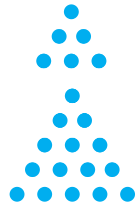
Ряд Фарея F_{n+1} состоит из элементов F_n и подходящих медиант соседних дробей из F_n (знаменатель подходящей медианты не превосходит $n + 1$).

Если $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ — соседние дроби в ряде Фарея, то $q_1p_2 - q_2p_1 = 1$.

Если $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ — соседние дроби в ряде Фарея F_n, то $q_1 + q_2 > n$ (иначе медианта этих дробей принадлежит F_n, то есть дроби не соседние).

Пусть L_n — количество элементов в F_n (длина F_n).
$L_n = L_{n-1} + \varphi(n) = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.
См. 52.

А.12. Треугольные числа



Треугольное число равно количеству точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника (см. примеры справа). n-ое треугольное число — это сумма первых n натуральных чисел, $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, например, $T_3 = 6$, $T_5 = 15$. Несложно вывести формулу $n = \dfrac{\sqrt{8T_n+1}-1}{2}$.

См. *384*, *387*, *397*.

А.13. Золотое сечение

Золотое сечение — отношение a и b, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$ и выполняется равенство $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a}$. Несложно вычислить, что $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Золотое сечение также называют *числом Фидия* и обозначают φ.

Свойства «золотого сечения»:

$$\varphi\big(\varphi - 1\big) = 1, \;\; \varphi = \frac{1}{\varphi} + 1, \;\; \varphi = \varphi^2 - 1.$$

См. *8*, *474*, *475*, *476*.

А.14. Числа Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots\}$ задается рекурсивным образом:

$$F_1 = 1, \;\; F_2 = 1, \;\; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Используемые в книге свойства чисел Фибоначчи:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \big(-1\big)^n. \tag{А.6}$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{где } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \;\; \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{А.7}$$

Указание. Тождество Кассини (А.6) и формула Бине (А.7) несложно доказываются с помощью метода математической индукции.

См. *381*, *508*.

A.15. Дробная часть иррационального числа

Пусть иррациональное число A представлено в b-ичной $\left(b \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}\right)$ системе счисления $A = \left(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots}\right)_b$. Тогда дробь $\left(\overline{0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots}\right)_b$ будет непериодической.

См. *45*, *46*, *402*, *448*.

A.16. Четность числа $n = \left(\overline{t_k t_{k-1} \ldots t_0}\right)_3$

Пусть натуральное число n представлено в троичной системе счисления $n = \left(\overline{t_k t_{k-1} \ldots t_0}\right)_3$, где $t_i = 0$, 1 или 2 $(0 \leqslant i \leqslant k)$. Необходимым и достаточным условием четности числа n является четность суммы $t_k + t_{k-1} + \ldots + t_0$.

Указание. Четность числа n совпадает с четностью количества $t_i = 1$.

См. *46*.

A.17. Число $\sqrt[k]{n}$ $(k \geqslant 2)$ — либо целое, либо иррациональное

Число $\sqrt[k]{n}$ будет целым:

а) при $k = 2$, если n — полный квадрат,

б) при $k = 3$, если n — полный куб,

в) при $k > 3$, если $\exists m \in \mathbb{N}$: $n = m^k$.

В случаях, не перечисленных в а)-в), значение $\sqrt[k]{n}$ будет иррациональным, то есть число $\sqrt[k]{n}$ нельзя представить в виде дроби p/q, где p и q — натуральные взаимно простые числа и $q \neq 1$.

См. *28*, *88*, *396*, *519*.

A.18. Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это такая последовательность действительных чисел $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots\}$, для которой при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $a_{n+1} = a_n + d$, где числовая константа d — разность прогрессии. n-й член прогрессии является средним арифметическим соседних с ним членов $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (характеристическое свойство).

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

См. *250*, *285*.

A.19. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — это такая последовательность действительных чисел $\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ b_{n+1},\ \ldots\}$, для которой при любом

$n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где числовая константа $q \neq 0$ — знаменатель прогрессии. n-й член прогрессии является средним геометрическим соседних с ним членов $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}$ (характеристическое свойство).

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{b_1 - b_n\, q}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

См. *251*, *285*, *405*.

A.20. Уравнение в натуральных числах $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Уравнение имеет две серии решений ($k \in \mathbb{N}$):

1) $\big(k,\, 2k,\, 2k\big)$,

2) $\big(kpq,\, kp(p+q),\, kq(p+q)\big)$, где p и q — взаимно простые числа.

Указание. Уравнение приводится к виду $x(y+z) = yz$. Для решения достаточно рассмотреть случаи:

$y = z = 2n$ и $y = z = 2n+1$, где $n \in \mathbb{N}$;

y и z — взаимно простые числа (решения отсутствуют);

$y = np$ и $z = nq$, где $n \in \mathbb{N}_{>1}$, p и q — взаимно простые числа.

См. *507*.

A.21. Уравнение $2x^2 - y^2 = 1$ имеет бесконечное количество решений в натуральных числах

Поскольку выполняется тождество $2x^2 - y^2 = 2\big(3x+2y\big)^2 - \big(4x+3y\big)^2$, одна из бесконечных серий решений имеет вид

$$\big(x_{i+1},\ y_{i+1}\big) = \big(3x_i + 2y_i,\ 4x_i + 3y_i\big),$$

где $i \in \mathbb{N}$, $\big(x_1,\ y_1\big) = \big(1,\ 1\big)$.

Указание. Для вывода формулы тождества можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов $\big(a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{N}\big)$

$$2x^2 - y^2 = 2\big(ax+by\big)^2 - \big(cx+dy\big)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2a^2 - c^2 = 2, \\ 2ab - cd = 0, \\ 2b^2 - d^2 = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что c — четное, поэтому пусть $c = 4$ ($c = 2$ не подходит), тогда $a = 3$. Из второго уравнения следует, что $b \vdots 2$ и $d \vdots 3$. Подстановкой значений $b = 2$ и $d = 3$ убеждаемся, что при этих значениях третье уравнение превращается в равенство.

См. *453*.

А.22. Уравнение $3x^2 - y^2 = 2$ имеет бесконечное количество решений в натуральных числах

Одна из бесконечных серий решений имеет вид $\big(x_{i+1},\ y_{i+1}\big) = \big(2x_i + y_i,\ 3x_i + 2y_i\big)$, где $\big(x_1,\ y_1\big) = \big(1,\ 1\big)$, $i \in \mathbb{N}$. Аналогичное уравнение и обоснование того же утверждения приводится в п. А.21.

См. *456*.

А.23. Разбиение множества натуральных чисел

Множества $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$ образуют разбиение множества натуральных чисел, если

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = \mathbb{N} \quad \text{и}$$

$$M_i \cap M_j = \varnothing \quad (\forall i,\ j:\ i \neq j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n).$$

Например, множества четных и нечетных целых положительных чисел образуют разбиение множества натуральных чисел.

См. *469*, *471*, *477*, *519*.

А.24. Принцип Дирихле для конечного подмножества натуральных чисел

Пусть некоторое множество M содержит n натуральных чисел и разность между наибольшим и наименьшим элементами множества M не превосходит $n-2$. Тогда в множестве M найдется хотя бы одна пара элементов, имеющих равные значения.

См. *401*, *477*.

Приложение Б. Неравенства

Представлены неравенства, которые встречаются в решениях задач. Для некоторых неравенств даны указания или приведены доказательства. Используются обозначения: k, m, $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, x_i \in \mathbb{R}_{>0}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$.

Б.1. Сумма взаимно обратных положительных чисел

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} a + \dfrac{1}{a} > 2 & \text{при } a \neq 1, \\ a + \dfrac{1}{a} = 2 & \text{при } a = 1. \end{array}\right. \tag{Б.1}$$

Б.2. Неравенства о средних

В формулах (Б.2)-(Б.3′) $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ и $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$

$$\frac{2}{1/a + 1/b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}}, \tag{Б.2}$$

$$\frac{n}{\sum 1/x_i} \leqslant \sqrt[n]{\prod x_i} \leqslant \frac{\sum x_i}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{\sum x_i^k}{n}}, \tag{Б.3}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n+b^n}{2}, \quad \text{где } a \neq b. \tag{Б.3′}$$

Б.3. $n < \sqrt{n^2+m} < n+1$ при $1 \leqslant m \leqslant 2n$, $n < \sqrt[3]{n^3+m} < n+1$ при $1 \leqslant m \leqslant 3n^2+3n$

См. *33*, *48*, *379*, *420*, *422*, *423*.

Б.4. Оценка выражения $\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}$

$$2n<\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}<2n+1. \tag{Б.4}$$

См. *362*.

Б.5. Оценка выражения $(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})+(\sqrt{n-k}-\sqrt{n})$

$$\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n-k}-\sqrt{n}\right)>$$
$$>-\frac{k^2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2-k^2\right)}} \quad \text{при } n>k. \tag{Б.5}$$

Указание. $\dfrac{k}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}-\dfrac{k}{\sqrt{n-k}+\sqrt{n}}=k\cdot\dfrac{\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}}{\left(\sqrt{n+k}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-k}+\sqrt{n}\right)}=$
$=-2k^2\cdot\dfrac{1}{\left(\sqrt{n+k}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-k}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}\right)}>-\dfrac{k^2}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n\left(n^2-k^2\right)}}.$

См. *367*.

Б.6. Оценка выражения $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(n+1)^2}}<\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}. \tag{Б.6}$$

Б.7. Оценка выражения $(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})-(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})$

$$\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)-\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)>-\frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2-1}. \tag{Б.7}$$

Указание. Применим дважды (Б.6) для $\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)-\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)>$

$$>\frac{1}{3\sqrt[3]{(n+1)^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(n-1)^2}}=-\frac{\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1}\right)\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)}{3\sqrt[3]{\left(n^2-1\right)^2}}>$$
$$>-\frac{2\sqrt[3]{n}\cdot 2}{3\sqrt[3]{\left(n^2-1\right)^2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)}>-\frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2-1}.$$

См. *366*.

Б.8. $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leqslant a_n$.

Если для конечной последовательности действительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ выполняется условие $a_{i+j} \geqslant a_i + a_j$ при $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, то справедливо неравенство

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leqslant a_n. \tag{Б.8}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции.

При $n = 1$ неравенство (Б.8) выполняется. Пусть это неравенство выполняется для $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Докажем, что неравенство выполняется и при $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} a_1 &\leqslant a_1, \\ a_1 + \frac{a_2}{2} &\leqslant a_2, \\ \ldots\quad &\quad \ldots \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} &\leqslant a_k. \end{aligned}$$

Просуммируем выписанные неравенства

$$ka_1 + (k-1)\cdot\frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Прибавим $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ справа и слева

$$(k+1)\cdot\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k}\right) \leqslant (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + \ldots + (a_k + a_1).$$

Напомним, что $a_{i+j} \geqslant a_i + a_j$, тогда все слагаемые в правой части заменяются на a_{k+1}, увеличивая правую часть. После деления на $k+1$ получим

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{k}{k+1}\cdot a_{k+1}.$$

Перенесем в левую часть $\dfrac{a_{k+1}}{k+1}$, справа останется a_{k+1}, то есть неравенство (Б.8) выполняется для $n = k + 1$. ∎

См. 501.

Б.9. Неравенство Бернулли

Пусть $x \in \mathbb{R}_{>-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0,\,1}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{ll} \bigl(1+x\bigr)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha x & \text{при } \alpha \notin \bigl(0,\,1\bigr), \\ \bigl(1+x\bigr)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x & \text{при } \alpha \in \bigl(0,\,1\bigr) \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} \bigl(1+x\bigr)^{\alpha} > 1+\alpha x & \text{при } x \neq 0,\ \alpha \notin \bigl(0,\,1\bigr), \\ \bigl(1+x\bigr)^{\alpha} < 1+\alpha x & \text{при } x \neq 0,\ \alpha \in \bigl(0,\,1\bigr), \\ \bigl(1+x\bigr)^{\alpha} = 1+\alpha x & \text{при } x = 0. \end{array}\right. \tag{Б.9}$$

См. *366*, *367*, *431*.

Приложение B. Суммы и алгебраические формулы

Представлены формулы сумм, которые встречаются в задачах. Используются обозначения: k, $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

B.1. Формулы сокращенного умножения

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \tag{B.1}$$

См. *13*.

$$x^{2n} - y^{2n} = (x+y)(x^{2n-1} - x^{2n-2}y + x^{2n-3}y^2 - \ldots - y^{2n-1}) \tag{B.2}$$

См. *484*.

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots + y^{2n}) \tag{B.3}$$

B.2. Бином Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^{n-k}\, y^k, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

В частности, пусть k, m — целые числа, a — натуральное число, тогда

$$\left(m + k\sqrt{a}\right)^n + \left(m - k\sqrt{a}\right)^n \in \mathbb{Z}.$$

См. *40*, *41*, *42*, *156*, *157*.

B.3. Частный случай суммирования по частям (дискретного преобразования Абеля)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} k\,(a_{k+1} - a_k). \tag{B.4}$$

См. *414*.

B.4. Конечная сумма натурального ряда

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\big(n+1\big)}{2} = T_n, \tag{B.5}$$

где T_n — n-ое треугольное число, см. п. A.12.

B.5. Сумма квадратов

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\big(n+1\big)\big(2n+1\big)}{6} \tag{B.6}$$

См. *420*, *422*.

B.6. Сумма кубов

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\big(n+1\big)^2}{4} = T_n^2, \tag{B.7}$$

где T_n — n-ое треугольное число, см. п. A.12.
См. *422*.

B.7. Понижение степени $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)$, если $a+b=c+d$.

Пусть $A = a+b = c+d$. Тогда степень выражения понижается таким приемом:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d) = (x^2 + Ax + ab)\,(x^2 + Ax + cd) = \\ = (z+ab)\,(z+cd), \quad \text{где } z = x^2 + x(a+b).$$

См. *48*, *49*.

Приложение Г. Симметрия и преобразования графиков

При построении графиков функций рекомендуется использовать как свойства функций (четность, периодичность и т.п.), так и различные геометрические преобразования, чтобы, взяв за основу график известной и/или простой функции, достроить его типовыми пошаговыми преобразованиями.

Г.1. Симметрия графика четной и нечетной функции

График четной функции $f(x)$ симметричен относительно оси Oy.

График нечетной функции $f(x)$ центрально симметричен относительно начала координат.

Г.2. Геометрические преобразования графика функции $f(x)$

$f(-x)$	симметричное отражение относительно оси Oy;
$-f(x)$	симметричное отражение относительно оси Ox;
$f(x+a)$	параллельный перенос по оси Ox на a влево $(a>0)$ или вправо $(a<0)$;
$f(x)+a$	параллельный перенос по оси Oy на a вверх $(a>0)$ или вниз $(a<0)$;
$kf(x)$	растяжение $(k>1)$ / сжатие $(0<k<1)$ вдоль оси Oy от/к оси Ox;
$f(kx)$	сжатие $(k>1)$ / растяжение $(0<k<1)$ вдоль оси Ox от/к оси Oy;
$\lvert f(x)\rvert$	симметричное отражение относительно оси Ox той части графика $f(x)$, которая расположена ниже оси Ox;
$f(\lvert x\rvert)$	симметричное отражение относительно оси Oy той части графика $f(x)$, которая расположена справа от оси Oy.

Указатель олимпиадных и конкурсных задач

Используются следующие обозначения: синим цветом выделены номера задач, через запятую указаны номера страниц, в скобках приводится ссылка на другое решение задачи.

Указатель формул

$x,\ y \in \mathbb{R},\ \ m,\ n \in \mathbb{Z},\ \ k,\ q,\ p \in \mathbb{N},\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$

$x = [x] + \{x\}$	(1.1)	с.17
$0 \leqslant \{x\} < 1$	(2.1)	с.45
$[x] \leqslant x < [x] + 1$	(2.2)	с.45
$x - 1 < [x] \leqslant x$	(2.3)	с.45
$[x + n] = [x] + n$	(2.4)	с.45
$\{x + n\} = \{x\}$	(2.5)	с.45
$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{при } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	(2.6)	с.46
$\{x\} + \{-x\} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{при } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	(2.7)	с.46
$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad [x] \leqslant [y]$	(2.8)	с.46
$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad \{x\} < \{y\}, \quad \text{если } x,\ y \in \big[n,\ n+1\big)$	(2.9)	с.46
$[x] = n \quad \Longleftrightarrow \quad n \leqslant x < n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 < n \leqslant x$	(2.10)	с.46
$[x] > n \quad \Longleftrightarrow \quad [x] \geqslant n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant n + 1$	(2.11)	с.46
$[x] \leqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad [x] < n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < n + 1$	(2.12)	с.46
$n\,[x] \leqslant [nx] \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$	(2.13)	с.47
$n\,\{x\} \geqslant \{nx\} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$	(2.14)	с.47
$[nx] - n\,[x] \leqslant n - 1 \quad \text{при } n \in \mathbb{N}$	(2.15)	с.47

$$n\,[x] = [nx] \quad\Longleftrightarrow\quad \{x\} < \frac{1}{n} \quad \text{при } n \in \mathbb{N} \qquad (2.16)\quad \text{с.48}$$

$$\big\{n\,\{x\}\big\} = \{nx\} \qquad (2.17)\quad \text{с.48}$$

$$[x] < [y] \quad\Longleftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z}:\ x < k \leqslant y \qquad (2.18)\quad \text{с.48}$$

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] \qquad (2.20)\quad \text{с.49}$$

$$\left[\frac{[x]+m}{n}\right] = \left[\frac{x+m}{n}\right] \qquad (2.21)\quad \text{с.49}$$

$$\left[\sqrt[n]{[x]}\right] = \left[\sqrt[n]{x}\right] \qquad (2.22)\quad \text{с.49}$$

$$[x] = [y] \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x = y, \\ x \neq y \ \text{ и } \ \nexists k \in \mathbb{Z}: x \leqslant k \leqslant y \end{cases} \qquad (2.25)\quad \text{с.49}$$

$$|x-y| \leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad \big|[x]-[y]\big| \in \{0,\ 1\} \qquad (2.26)\quad \text{с.50}$$

$$[x] = [y] \quad\Longrightarrow\quad |x-y| < 1 \qquad (2.27)\quad \text{с.50}$$

$$\{x\} = \{y\} \quad\Longleftrightarrow\quad \{x-y\} = 0 \qquad (2.28)\quad \text{с.50}$$

$$[x]\cdot[y] \leqslant [xy] \quad \text{при } x,\ y \geqslant 0 \qquad (2.29)\quad \text{с.51}$$

$$[x]+[y] \leqslant [x+y] \leqslant [x]+[y]+1 \qquad (2.30)\quad \text{с.51}$$

$$\sum_i [x_i] \leqslant \left[\sum_i x_i\right] \leqslant \sum_i [x_i] + k - 1 \qquad (2.31)\quad \text{с.51}$$

$$\{x+y\} \leqslant \{x\}+\{y\} \leqslant \{x+y\}+1 \qquad (2.32)\quad \text{с.51}$$

$$\left\{\sum_i x_i\right\} \leqslant \sum_i \{x_i\} \leqslant \left\{\sum_i x_i\right\} + k - 1 \qquad (2.33)\quad \text{с.51}$$

$$[kx] = [x] + \left[x+\frac{1}{k}\right] + \ldots + \left[x + \frac{k-1}{k}\right] \qquad (2.35)\quad \text{с.52}$$

$$\big[2x\big] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] \qquad (2.36)\quad \text{с.53}$$

$$\big[3x\big] = [x] + \left[x+\frac{1}{3}\right] + \left[x+\frac{2}{3}\right] \qquad (2.37)\quad \text{с.53}$$

$$m = \left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{m+1}{k}\right] + \ldots + \left[\frac{m+k-1}{k}\right] \qquad (2.38) \quad \text{с.53}$$

$$[x] + [y] + [x+y] \leqslant \big[2x\big] + \big[2y\big] \qquad (2.39) \quad \text{с.53}$$

$$[x] + [y] + \big(k-1\big)\,[x+y] \leqslant [kx] + [ky] \qquad (2.40) \quad \text{с.54}$$

$$n\big[x\big] + n\big[y\big] + \big[kx+ky\big] \leqslant \\ \leqslant \big[(n+k)x\big] + \big[(n+k)y\big], \text{ если } k \leqslant n \qquad (2.41) \quad \text{с.55}$$

$$\big[nx\big] + \big[ny\big] + \big[kx+ky\big] \leqslant \\ \leqslant \big[(n+k)x\big] + \big[(n+k)y\big] \quad \Longleftrightarrow \quad k = n \qquad (2.42) \quad \text{с.56}$$

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}, \qquad (92a) \quad \text{с.79}$$

где p, q — взаимно простые числа

$$[x] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}\right] \qquad (111a) \quad \text{с.87}$$

$$\left[\frac{k+1}{n}\right] = \left[\frac{k+n}{n}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad (k+1) \vdots n \quad \big(k,\, n \in \mathbb{N}\big) \qquad (180a)\ \text{с.125}$$

$$\left[\frac{k}{n}\right] \geqslant \frac{k+1}{n} - 1 \quad \big(k,\, n \in \mathbb{N}\big) \qquad (181a)\ \text{с.125}$$

$$n! = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}, \quad \text{где } p_1 < p_2 < \ldots < p_k \in \mathbb{P}:$$

$$a_i = \left[\frac{n!}{p_i}\right] + \left[\frac{n!}{p_i^2}\right] + \left[\frac{n!}{p_i^3}\right] + \ldots \qquad (6.1)\ \text{с.129}$$

$$[x] + \frac{\big[2x\big]}{2} + \frac{\big[3x\big]}{3} + \ldots + \frac{[kx]}{k} \leqslant [kx] \qquad (501a)\ \text{с.383}$$

Указатель методов решений

$$\begin{aligned}
\big[f(x)\big] = n \quad &\Longleftrightarrow \quad n \leqslant f(x) < n+1 \\
\big[f(x)\big] > a \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \geqslant [a]+1 \\
\big[f(x)\big] \geqslant n \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \geqslant n \\
\big[f(x)\big] \geqslant a \ (a \notin \mathbb{Z}) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \geqslant [a]+1 \\
\big[f(x)\big] \leqslant a \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) < [a]+1 \\
\big[f(x)\big] < n \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) < n \\
\big[f(x)\big] < a \ (a \notin \mathbb{Z}) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) < [a]+1
\end{aligned}$$

с. 151

$$\begin{aligned}
\big\{f(x)\big\} = \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) = n+\alpha \\
\big\{f(x)\big\} > \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad n+\alpha < f(x) < n+1 \\
\big\{f(x)\big\} \geqslant \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad n+\alpha \leqslant f(x) < n+1 \\
\big\{f(x)\big\} < \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad n \leqslant f(x) < n+\alpha \\
\big\{f(x)\big\} \leqslant \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad n \leqslant f(x) \leqslant n+\alpha
\end{aligned}$$

с. 151

$$F\big(x,\ \big[f(x)\big]\big) \ \vee \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F\big(x,\ n\big) \ \vee \ 0, \\ n \leqslant f(x) < n+1, \\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

с. 161

$$F\,\big(x,\ \big[f(x)\big],\ \big[kf(x)\big]\big) \ \vee \ 0, \ \text{где } k \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F\big(x,\ n,\ kn+m\big) \ \vee \ 0, \\ n + \dfrac{m}{k} \leqslant f(x) < n + \dfrac{m+1}{k}, \\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1, \\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

с. 162

$$F\left(x,\ [f(x)],\ \left[\frac{f(x)}{k}\right]\right)\ \vee\ 0,\ \text{где } k\in\mathbb{N} \iff \iff \begin{cases} F\big(x,\ kn+m,\ n\big)\ \vee\ 0,\\ kn+m\leqslant f(x)<kn+m+1,\\ m=0,\,1,\,\ldots,\,k-1,\\ n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

с. 162

$$f\big(x,\,[x]\,,\,\{x\}\big) \iff f\big(n+\alpha,\,n,\,\alpha\big),\ \text{где } n\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant\alpha<1.$$

с. 171

$$\big[f(x)\big]=g(x) \iff \begin{cases} 0\leqslant f\big(g^{-1}(n)\big)-n<1,\\ n=g(x),\\ x=g^{-1}(n),\\ n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

с. 179

$$\big[f(x)\big]=g(x) \iff \begin{cases} 0\leqslant f(x)-g(x)<1,\\ g(x)\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

с. 181

$$\big[f(x)\big]=g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases}[f(x)]=n_1,\\ g(x)=n_1,\end{cases}\\ \begin{cases}[f(x)]=n_2,\\ g(x)=n_2,\end{cases}\\ \quad\cdots\\ \begin{cases}[f(x)]=n_k,\\ g(x)=n_k,\end{cases}\end{array}\right.$$

где $\{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k\}=E\big([f(x)]\big)\cap E\big(g(x)\big)\cap\mathbb{Z}.$

с. 184

$$\big[f(x)\big]=f\big([x]\big),\ x\notin\varnothing \iff \exists x\in\mathbb{Z}:\ f(x)\in\mathbb{Z}.$$

с. 188

$$\big[f(x)\big]=\big[g(x)\big] \iff \begin{cases} n\leqslant f(x)<n+1,\\ n\leqslant g(x)<n+1,\\ n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

с. 201

$$\big[f(x)\big]=\big[g(x)\big] \implies \big|f(x)-g(x)\big|<1$$

с. 203

$$\big\{f(x)\big\}=\big\{g(x)\big\} \iff \big\{f(x)-g(x)\big\}=0$$

с. 207

$$\big\{f(x)\big\}=f\big(\{x\}\big),\ x\notin\varnothing \iff \exists x\in\big[0,\,1\big):\ f(x)\in\big[0,\,1\big)$$

с. 209

Литература

1. *Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А. и др.* Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы. — М.: Просвещение, 2010. — 239 с. — ISBN 978-5-09-018999-6.

2. *Алфутова Н. Б., Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с. — ISBN 978-5-94057-550-4.

3. *Андреев А. А., Люлев А. И., Савин А. Н.* Антье. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып.2. — Самара: Пифагор, 1997. — 23 с.

4. *Андреев А. А., Люлев А. И., Савин А. Н., Саушкин М. Н.* Самарские олимпиады. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып.4. — Самара: Пифагор, 1998. — 108 с.

5. *Арнольд В. И.* Цепные дроби. — М.: МЦНМО, 2000. — Т. 14. — 40 с. — (Библиотека «Математическое просвещение»).

6. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986. — 303 с.

7. *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. / Под ред. Садовничего В. А. — 3 изд., испр. — М.: Дрофа, 2005. — 320с. — ISBN 5-7107-8904-6.

8. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Математические основы информатики, 2-ое изд.: Пер. с англ. — М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. — 784 с. — ISBN 978-5-8459-1588-7.

9. *Деза Е. И., Котова Л. В.* Сборник задач по теории чисел (112 задач с подробными решениями). — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 224 с. — ISBN 978-5-397-02608-6. — (Функции $[x]$ и $\{x\}$. с.41-50).

10. *Кушнир И.* Шедевры школьной математики. Кн.1. — Киев: Астарта, 1995. — 575 с. — ISBN 5-7707-8249-8. — (Целая и дробная части числа. с.514-540).

11. *Лихтарников Л. М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. — СПб.: Лань, 1997. — 160 с. — ISBN 5-86617-044-2.

12. *Мищенко С. П., Самойлов Л. М., Веревкин А. Б., Верник А. Н.* Олимпиады по математике Ульяновской области 2001-2006. — Ульяновск, 2007. — 86 с.

13. *Егоров А.* Целая и дробная части числа. // Квант. — М., 2002. — №5 — с.36-39.

14. Петербургские математические олимпиады / Сост.: Кохась К. П., Иванов С. В., Берлов С. Л. – СПб.: Лань, 2005. – 608 с. — ISBN 5-8114-0083-7.

15. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2012 года / Сост.: Кохась К. П., Берлов С. Л., Храбров А. И. и др. – М.: МЦНМО, 2013. – 144 с. — ISBN 5-7325-0363-3.

16. *Петров Н. Н.* Математические игры. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 192 с. — ISBN 978-5-397-02032-9.

17. *Нестеренко Ю. В.* Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 272 с. — ISBN 978-5-7695-4646-4.

18. *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2007. — 159 с. ISBN 978-5-94057-263-3.

19. *Сергеев П. В.* Математика в спецклассах 57-й школы. Математический анализ. — М.: МЦНМО, 2008. — 159 с. — (Целая и дробная части числа. с.40-41). — ISBN 978-5-94057-359-3.

20. Сборник статей по элементарной и началам высшей математики. Математическое просвещение. Вып.1. — ОНТИ, 1934. — 72 с.

21. *Танатар И. Я.* Геометрические преобразования графиков функций. — М.: МЦНМО, 2012. — 152 с.

22. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994. – 309 с. — ISBN 5-7325-0363-3.

23. *Хорошилова Е. В.* Элементарная математика: Учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1: Теория чисел. Алгебра. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. – 472 с. — (Целая, дробная части действительного числа и их свойства. с.86-93)

24. *Апостолова Г. В., Ясінський В. В.* Антьє і мантиса числа : Навч. посібник. — К.: Факт, 2006. — 128 с. — ISBN 966-359-092-0.

25. *Alexanderson G. L., Klosinski L. F., Larson L. C.* The William Lovell Putnam Mathematical Competition. Problems and solutions: 1965-1984. — MAA, 1985. — 147 p. — ISBN 0-88385-441-4.

26. *Andreescu T., Andrica D.* 360 Problems for Mathematical Contests. — GIL Publishing House, 2003. — 280 p. — ISBN 973-9417-12-4.

27. *Andreescu T., Andrica D., Feng Z.* 104 Number Theory Problems. — Birkhäuser, 2007.

28. *Barbeau E. J., Klamkin M. S., Moser W. O. J.* Five Hundred Mathematical Challenges. — MAA, 1995.

29. *Berzsenyi G., Maurer S. B.* The Contest Problem Book V. AHSME and AIME 1983-1988. — MAA, 1997. — 286 p. — ISBN 978-0-88385-640-6.

30. *Boyvalenkov P., Kolev E., Nikolov N., Mushkarov O.* Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006. — GIL Publishing House, 2007. — 212 p.

31. The Canadian Mathematical Olympiad 1969-1993. — CMS, 1993. — 262 p. — ISBN 0-919558-05-4.

32. *Fairs J. D., Wells D.* The Contest Problem Book IX: American Mathematics Competitions (AMC 12), 2001-2007 Contests. — MAA, 2008. — 231 p. — ISBN 978-0-88385-826-4.

33. *Gleadon A. M., Greenwood R. E., Kelly L. M.* The William Lovell Putnam Mathematical Competition. Problems and solutions: 1938-1964. — MAA, 1980. — 652 p. — ISBN 0-88385-428-7.

34. *Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N.* The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads 1959-2009. — Springer, 2006. — 809 p.

35. *Kedlaya K. S., Poonen B., Vakil R.* The William Lovell Putnam Mathematical Competition 1985-2000. Problems, Solution, and Commentary. — MAA, 2002. — 337 p. — ISBN 0-88385-807-X.

36. *Lausch H., Taylor P. J.* Australian Mathematical Olympiads 1979-1995. — AMT, Canberra, 1997. — 206 p. — ISBN 978-0-85889-645-1.

37. *Lerma M. A.* Putnam Training Problems, 2014. — 83 p.

38. Romanian Mathematical Competitions 2007. Edited by R. Gologan. — Bucharest, 2007. — 125 p. — ISBN 978-975-0-05075-2.

39. *Saul M. E., Kessler G. W., Krilov S., Zimmerman L.* The New York City Contest Problem Book. Problems and Solution from the New York City Interschoolastic Mathematics League 1975-1984. — Dale Seymour Publications, 1986. — 237 p. — ISBN 0-86651-307-8.

40. *Xu Jiagu* Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses. Mathematical Olympiad Series. Vol. 6. — World Scientific, 2010. — 178 p. — ISBN 978-981-4293-55-6.

Интернет-ресурсы

artofproblemsolving.com (AoPS). Форум сайта AoPS ориентирован в основном на решателей. Судя по количеству сообщений на форуме, AoPS достаточно популярен. (В сборник включено 7 задач.)

cms.math.ca/Competitions/CMO — раздел сайта CMS (Canadian Mathematical Society), на котором собраны задачи CMO за период 1969-2014 (решения с 1994).

cms.math.ca/crux — архив Crux Mathematicorum, в свободном доступе издания 1975-2008.

daryn.kz/apmo — задачи APMO 1989-2014, с решениями 2005-2014.

hmmt.mit.edu/archive/problems — архив задач с решениями HMMT 1998-2014.

imc-math.org — сайт международной МО среди студентов университетов.

imomath.com — справочник по международным и национальным олимпиадам, имеется раздел с условиями олимпиадных задач.

internetolympiad.org — сайт NIMO.

kvant.mccme.ru — архив номеров журнала «Квант».

learn-math.info/competitions/index.htm — архив задач международных и национальных олимпиад, проведенных до 2007 года.

linkedin.com/groups/8313943 — группа «The Mathematical Olympiads» (владелец — Elton Papanikolla), в которой несколько тысяч участников. Ежедневно публикуются несколько десятков олимпиадных задач и их решения. (В сборник включено 17 задач.)

math.stackexchange.com — раздел математики довольно известного сайта вопросов и ответов.

mccme.ru — Московский Центр Непрерывного Математического Образования. На сайте есть большой раздел, посвященный олимпиадам.

mipt.ru/abiturs/olympiads/fizteh/samples.php — примеры заданий олимпиды «Физтех» МФТИ за последние несколько лет.

oeis.org — онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей.

olymp.msu.ru — официальный портал олимпиады школьников «Ломоносов».

problems.ru — наверное, самой большой в интернете архив задач по школьной математике (около 30 тыс. задач), к тому же, это русскоязычный ресурс! Архив задач регулярно пополняется, расширяется функционал сайта.

pvg.mk.ru — олимпиада школьников «Покори Воробьевы!».

usamts.org/Problems/U_ProblemsPast.php — задачи (с решениями) прошлых лет USAMTS.

Игорь Леонидович Семенов

Антье и мантисса.
Сборник задач с решениями

Подписано в печать 20.04.15. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 23,75. Тираж 100 экз. Заказ М-5.
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4.