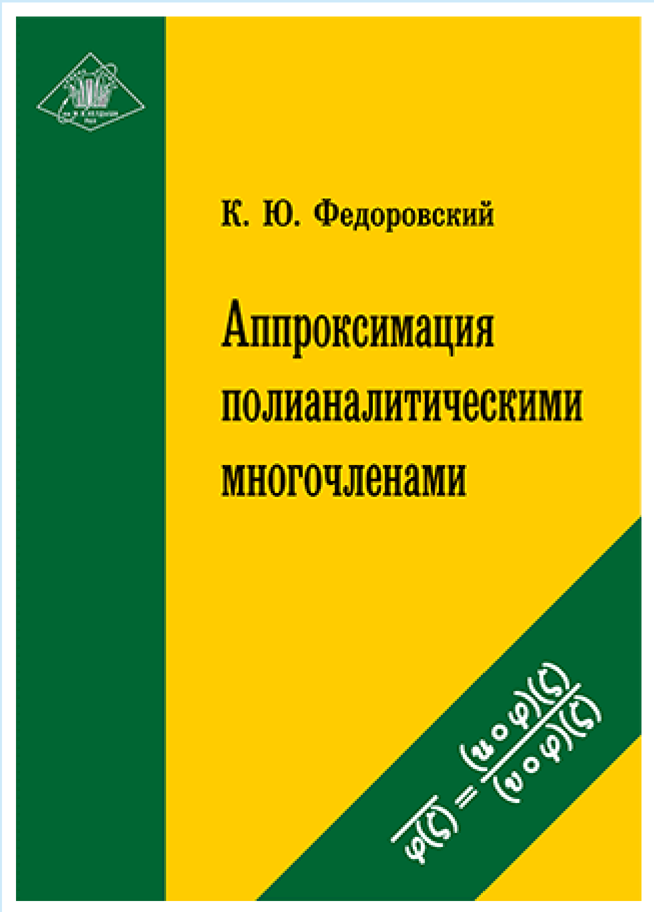
К. Ю. Федоровский
Аппроксимация полианалитическими многочленами

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИПМ им. М. В. КЕЛДЫША РАН

К. Ю. Федоровский

Аппроксимация полианалитическими многочленами

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \frac{(u\circ\varphi)(\zeta)}{(v\circ\varphi)(\zeta)}$$

К. Ю. Федоровский

Аппроксимация полианалитическими многочленами

Москва
ИПМ им. М. В. Келдыша
2016

УДК 517.53
ББК 22.161
Ф33

Федоровский К. Ю.
Аппроксимация полианалитическими многочленами — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. — 197 с.

В книге рассмотрены задачи аппроксимации функций полианалитическими многочленами в пространствах непрерывных и гладких функций на компактных подмножествах комплексной плоскости. В книгу вошли как классические результаты по данной тематике, так и недавние результаты автора и его коллег.

Книга предназначена для научных работников в области комплексного анализа и теории приближений. Она может быть использована в качестве материала для специальных курсов по теории приближений аналитическими функциями для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор РАН А. Д. Баранов (СПбГУ).

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

ISBN 978-5-98354-022-4

Оглавление

Предисловие

Понятие полианалитической функции — одно из самых естественных и важных для приложений обобщений понятия голоморфной функции. Полианалитические функции — это многочлены от комплексно сопряженного переменного $\overline{z}$ с голоморфными коэффициентами, т.е. функции вида

$$f(z) = \overline{z}^m f_m(z) + \cdots + \overline{z} f_1(z) + f_0(z),$$

где m — фиксированное натуральное число, а $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — функции, голоморфные в некоторой области. Полианалитические функции также представляют собой частный случай пространства решений эллиптического уравнения (а именно, уравнения $\overline{\partial}^n f = 0$, где

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

— оператор Коши–Римана). Теория полианалитических функций — активно развивающаяся область современного анализа, привлекающая внимание специалистов в России и за рубежом (особенно интенсивные исследования в этой области ведутся в Испании, Канаде, США).

Цель настоящей монографии состоит в том, чтобы изложить результаты в области теории полианалитических функций, полученные за последние 15 лет в работах автора и его коллег и соавторов (А. Буаве, П. М. Готье, Д. Кармоны, М. Я. Мазалова, П. В. Парамонова). Основная тема данной книги — аппроксимация полианалитическими многочленами в различных функциональных нормах. В то время как классические задачи равномерной и гладкой аппроксимации многочленами и рациональными функциями комплексного переменного, а также соответствующие задачи аппроксимации в пространствах L^p, были решены в знаменитых работах А. Г. Витушкина, М. В. Келдыша, С. Н. Мергеляна, В. П. Хавина, задачи аппроксимации полианалитическими функциями либо были решены совсем недавно, либо остаются открытыми и в настоящее время. Значительная трудность этих задач связана с тем, что они не допускают решения ни в чисто топологических (как в теореме Мергеляна), ни в емкостных (как в теореме Витушкина) терминах. Одно из важных достижений автора заключается в том, что ему удалось найти аналитические характеристики, отвечающие за возможность аппроксимации полианалитическими многочленами.

Монография написана очень ясно и подробно, с большим количеством примеров. Монография К. Ю. Федоровского дает замкнутое и хорошо продуманное изложение важного раздела современного анализа. Я убежден, что эта книга будет интересна и полезна специалистам по комплексному анализу и теории аппроксимации. Изложенный в ней материал может быть использован как основа для специальных курсов для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по анализу.

Д.ф.-м.н., профессор РАН А. Д. Баранов
профессор кафедры Математического анализа
Санкт-Петербургского государственного университета

Введение

Полианалитические функции возникли в первой половине XX столетия в связи с развитием плоской теории упругости.

В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили показано, что *бианалитические* функции, т.е. функции вида

$$\overline{z}f(z) + g(z),$$

где f и g — голоморфные функции комплексного переменного z, являются очень удобным и эффективным средством решения возникающих в этой теории задач. В качестве естественного обобщения бианалитических функций возникли *полианалитические* функции, т.е. функции вида

$$\overline{z}^m f_m(z) + \cdots + \overline{z}f_1(z) + f_0(z),$$

где m — фиксированное натуральное число, а $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — голоморфные функции. Систематическое изучение полианалитических функций началось в середине XX столетия и активно продолжается по сей день. Полианалитические функции возникают не только в связи с задачами теории упругости. Их изучение представляет собой один из возможных подходов к изучению функций многих комплексных переменных на неаналитических поверхностях. Многие результаты, методы и подходы, возникшие в теории полианалитических функций, оказываются полезными для теории эллиптических дифференциальных уравнений и систем. Кроме того, теория полианалитических функций оказалась весьма богатой и содержательной, она содержит много интересных «внутренних» задач.

Среди этих задач выделим задачи аппроксимации функций полианалитическими функциями и многочленами, т.е. функциями вида

$$\overline{z}^m g_m(z) + \cdots + \overline{z}g_1(z) + g_0(z),$$

где $g_0, \ldots, g_m$ — рациональные функции или многочлены комплексного переменного, на компактных подмножествах комплексной плоскости в нормах пространств непрерывных, гладких и суммируемых функций. Кроме того, надо выделить задачи о граничном поведении полианалитических функций и разнообразные краевые задачи для полианалитических функций.

Данная книга посвящена задачам равномерной и гладкой аппроксимации функций полианалитическими многочленами. В нее вошли результаты автора и его коллег, полученные за последние 10–15 лет. Многие из этих результатов не являются окончательными, но они показывают, какие новые феномены возникают в обсуждаемой проблематике. В этом смысле данная книга может рассматриваться как «этап большого пути». Автор надеется, что она будет интересной и полезной широкому кругу специалистов по комплексному анализу и качественной теории приближений и привлечет дополнительный интерес к теории полианалитических функций.

Книга имеет следующую структуру. В *первой главе* дается определение полианалитической функции и приводятся основные понятия, связанные с полианалитическими функциями. Материал этой главы не является сколько-нибудь подробным обзором теории полианалитических функций, но он дает возможность сделать дальнейшее изложение замкнутым, а также позволяет понять, какие основные отличия возникают в теории полианалитических функций по сравнению с обычными голоморфными функциями. Во *второй главе* формулируются и обсуждаются основные рассматриваемые в книге аппроксимационные задачи. *Третья глава* посвящена условиям приближаемости функций полианалитическими многочленами в нормах пространств гладких функций на компактных подмножествах комплексной плоскости.

Главы с *четвертой* по *восьмую* посвящены задаче о *равномерной* приближаемости функций полианалитическими многочленами на компактных подмножествах комплексной плоскости.

В *четвертой главе* вводится и обсуждается понятие *неванлинновской области*. Эта специальная аналитическая характеристика плоских односвязных областей является ключевой для рассматриваемой задачи, и именно она существенно отличает эту задачу от других задач равномерной, гладкой или L^p-приближаемости функций решениями эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами на компактных подмножествах комплексной плоскости. *Пятая глава* содержит два критерия равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами. Первый из них решает упомянутую задачу для компактов Каратеодори в терминах неванлинновских областей. Второй критерий, справедливый для любых компактов, не является окончательным. Он имеет редуктивный характер и позволяет сводить рассматриваемую задачу к соответствующей задаче для компактов более простого вида. В *шестой главе* рассматриваемая задача изучается для компактов специального вида, к которым, во многих случаях, она сводится при помощи редуктивного критерия приближаемости, полученного в пятой главе. В *седьмой главе* рассматривается зависимость условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности (оказывается, что для компактов, не являющихся компактами Каратеодори, такая зависимость имеет место). *Восьмая глава* посвящена равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного типа лакунарности, т.е. полианалитическими многочленами вида

$$\overline{z}^{k_m} p_m(z) + \cdots + \overline{z}^{k_1} p_1(z) + p_0(z),$$

где $k_1, \ldots, k_m$ — такие натуральные числа, что $k_1 < \cdots < k_m$.

В книге активно используется понятие множества (области и компакта) Каратеодори. Свойства областей и компактов Каратеодори, важные для теории приближений, обсуждаются в *девятой главе*.

Некоторые стандартные понятия и обозначения

Приведем некоторые стандартные обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей книги. Множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел будут обозначаться стандартно: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. При этом $z \in \mathbb{C}$ будет обозначать не только комплексное число $z = x + iy$, но и соответствующую точку (x, y) плоскости $\mathbb{R}^2$ (здесь $x = \operatorname{Re} z$, а $y = \operatorname{Im} z$ — вещественная и мнимая части z). Кроме того, будет использоваться обозначение $\mathbb{Z}_+ = \{m \in \mathbb{Z} \colon m \geqslant 0\}$.

Через $\mathbb{C}[z]$ и $\mathbb{C}(z)$ мы будем обозначать пространства, состоящие из всех многочленов и рациональных функций комплексного переменного z (элементами этих пространств будут именно функции комплексного переменного, а не соответствующие алгебраические объекты).

Кроме того, всюду в дальнейшем через z и $\overline{z}$ будут обозначаться не только соответствующие комплексные переменные $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, но и функции — тождественная и $z \mapsto \overline{z}$ соответственно.

Далее, для произвольной функции $g(\cdot)$ положим $g_*(w) = \overline{g(\overline{w})}$ для всех таких w, где функция g_* определена.

Символом $\mathbb{D}$ мы будем обозначать (открытый) единичный круг в $\mathbb{C}$, а символом $\mathbb{T}$ — единичную окружность. Т.е.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}, \qquad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}.$$

Кроме того, через $D(a, r)$ мы будем обозначать открытый круг с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$, т.е. $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| < r\}$.

Под *мерой* мы будем понимать конечную комплекснозначную борелевскую меру.

Символом $A(E)$ будет обозначаться площадь (двумерная мера Лебега) данного подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если μ_1 и μ_2 — две меры, то запись $\mu_1 \ll \mu_2$ будет обозначать, что мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры μ_2. Запись $\mu_1 \perp \mu_2$ будет означать, что меры μ_1 и μ_2 взаимно сингулярны.

Если μ — некоторая мера, а $\mathscr{X}$ — некоторое множество μ-интегрируемых функций, то через $\mu \perp \mathscr{X}$ мы будет обозначать тот факт, что мера μ ортогональна множеству $\mathscr{X}$, т.е. $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$ для любой функции $f \in \mathscr{X}$.

Для меры μ и μ-измеримого множества E через $\mu_{|E}$ будет обозначаться сужение меры μ на E, т.е. $\mu_{|E}(E_1) = \mu(E_1 \cap E)$ для любого измеримого множества E_1.

Символом $\operatorname{Supp} T$ мы будем обозначать носитель функции (меры или распределения) T; символом $\langle T \mid \phi\rangle$ — действие распределения T на (пробную) функцию ϕ, а через $T_1 * T_2$ — свертку распределений T_1 и T_2.

Преобразованием Коши меры μ называется (обобщенная) функция

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Хорошо известно, что $\widehat{\mu}$ голоморфна вне $\operatorname{Supp}(\mu)$ и $\overline{\partial}\widehat{\mu} = \dfrac{i}{2}\mu$ в смысле обобщенных функций.

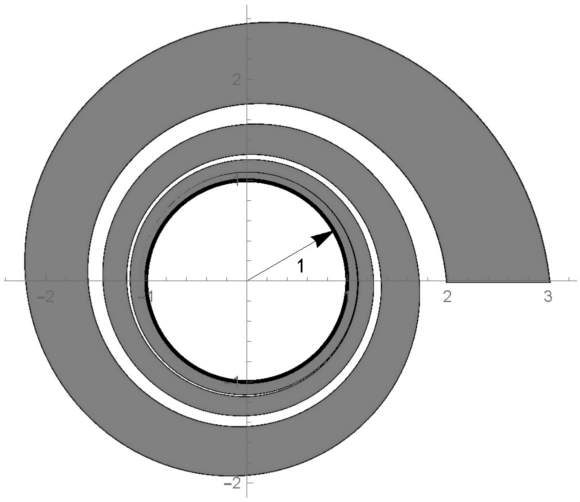

Рис. 1. «Рог изобилия» — пример области Каратеодори

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}$ мы обозначим через E° его внутренность, через $\overline{E}$ — его замыкание, а через ∂E — его границу.

Всюду в дальнейшем под *контуром* мы будем понимать простую замкнутую кривую, не обязательно спрямляемую. Классическая теорема Жордана утверждает, что для любого контура $\mathit{\Gamma} \subset \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathit{Int}(\mathit{\Gamma}) \sqcup \mathit{\Gamma} \sqcup \mathit{Ext}(\mathit{\Gamma}),$$

где $\mathit{Int}(\mathit{\Gamma})$ и $\mathit{Ext}(\mathit{\Gamma})$ — две области, причем $\mathit{Int}(\mathit{\Gamma})$ — ограниченная область, а $\mathit{Ext}(\mathit{\Gamma})$ — нет, и $\partial\,\mathit{Int}(\mathit{\Gamma}) = \partial\,\mathit{Ext}(\mathit{\Gamma}) = \mathit{\Gamma}$. Область $\mathit{Int}(\mathit{\Gamma})$ мы будем называть областью, ограниченной контуром $\mathit{\Gamma}$.

Множества Каратеодори

Напомним определения областей и компактов Каратеодори.

Ограниченная область G в $\mathbb{C}$ называется *областью Каратеодори*, если $\partial G = \partial G_\infty$, где через G_∞ обозначена неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$.

Легко видеть, что любая жорданова область является областью Каратеодори, а жорданова область с разрезами — нет. На рис. 1 приведен более интересный пример множества Каратеодори. Изображенное на этом рисунке множество — «рог изобилия» — представляет собой область, граница которой состоит из спиралей $z = (1 + e^{-t})e^{it}$ и $z = (1 + 2e^{-t})e^{it}$, при $t \in [0, +\infty)$, и отрезка [2,3] вещественной оси.

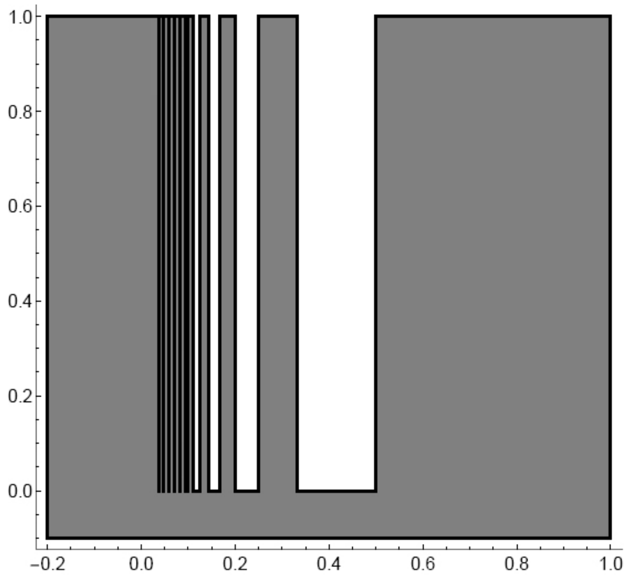

Рис. 2. Область Каратеодори с достижимой границей, не являющаяся жордановой областью

Еще один интересный пример области Каратеодори приведен на рис. 2. Эта область не является жордановой, но ее граница обладает тем свойством, что всякая точка границы рассматриваемой области достижима изнутри области посредством некоторой кривой.

Компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется *компактом Каратеодори*, если для него выполнено условие $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — это объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$. Так как $\widehat{X} = \{z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leqslant \|p\|_X$ для любого $p \in \mathbb{C}[z]\}$, то множество $\widehat{X}$ часто называют *полиномиально выпуклой оболочкой* компакта X.

Компакт X, для которого выполняется свойство $X = \widehat{X}$, называется *полиномиально выпуклым*. По определению $\widehat{X}$ это свойство эквивалентно тому, что множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.

Аналитические кривые и их функции Шварца

Напомним понятие аналитической кривой и ее функции Шварца, так как это понятие будет активно использоваться в дальнейшем.

По определению, контур Γ называется *аналитическим*, если Γ — это образ окружности $\mathbb{T}$ при отображении, конформном в некоторой ее окрестности. Напомним также, что для любого аналитического контура Γ существует такая голоморфная в некоторой области $U \supset \mathit{\Gamma}$ функция S, что

$$\mathit{\Gamma} = \{z \in U \colon \overline{z} = S(z)\}.$$

Эта функция S называется *функцией Шварца* контура $\mathit{\Gamma}$.

Напомним также, что жорданова дуга γ называется *аналитической*, если γ является образом отрезка $[0,1]$ при отображении, конформном в некоторой окрестности этого отрезка.

Аналогично случаю аналитического контура для аналитической дуги γ также существует такая функция S, голоморфная в некоторой области $U \supset \gamma$, что $\overline{z} = S(z)$ для всех $z \in \gamma$. Эта функция, как и в случае аналитического контура, называется *функцией Шварца* дуги γ. Заметим, что в случае аналитической дуги нельзя утверждать, что γ совпадает с множеством тех точек $z \in U$, для которых $\overline{z} = S(z)$.

Напомним еще одно понятие, связанное с аналитическими дугами, которое будет использоваться в дальнейшем. Пусть γ_1 и γ_2 — две аналитические дуги, а S_1 и S_2 — их функции Шварца. Предположим, что функции S_1 и S_2 голоморфны в областях $U_1 \supset \gamma_1$ и $U_2 \supset \gamma_2$ соответственно. Дуги γ_1 и γ_2 называются *аналитически независимыми*, если аналитические элементы (S_1, U_1) и (S_2, U_2) не могут быть аналитически продолжены друг в друга.

Понятия функции Шварца аналитического контура и аналитической дуги детально изучается, например, в работах [40] и [54].

Некоторые пространства функций

Пусть p — вещественное число с условием $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через $L^p = L^p(\mathbb{T})$ мы обозначим пространство Лебега на единичной окружности, рассматриваемое относительно нормированной меры Лебега на $\mathbb{T}$, т.е. относительно меры $\mathfrak{m} := |d\zeta_{|\mathbb{T}}|/2\pi$. Введем также пространства Харди $H^p = H^p(\mathbb{T})$, состоящие из всех функций $f \in L^p$, таких, что $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta}^n d\mathfrak{m}(\zeta) = 0$ при всех целых $n < 0$.

Нам потребуются также пространства Харди $H^p(\mathbb{D})$ в единичном круге. Напомним, что при $p < \infty$ пространство $H^p(\mathbb{D})$ состоит из всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f, таких, что

$$\lim_{r\to 1}\int_{\mathbb{T}}|f(r\zeta)|^p d\mathfrak{m}(\zeta) = \|f\|^p_{H^p(\mathbb{D})} < \infty.$$

Пространство $H^\infty(\mathbb{D})$ состоит из всех голоморфных в круге $\mathbb{D}$ ограниченных функций.

Напомним утверждение классической теоремы Фату для функций класса $H^p(\mathbb{D})$. Пусть $\zeta \in \mathbb{T}$ — некоторая точка, лежащая на единичной окружности. *Углом Штольца* A_ζ называется угол (лежащий в круге $\mathbb{D}$) с раствором, меньшим π, с вершиной в точке ζ, биссектриса которого проходит через центр круга $\mathbb{D}$. Предел

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_\zeta}} f(z),$$

если он существует для любого угла Штольца A_ζ, называется *угловым пределом*, (угловым) *предельным значением* или (угловым) *граничным значением* функции f в точке ζ. Часто угловые предельные значения называют *некасательными* предельными значениями. Множество $\mathscr{F}(f)$, состоящее из всех тех точек $\zeta \in \mathbb{T}$, для которых некасательные предельные значения $f(\zeta)$ существуют, называется *множеством Фату* функции f.

Теорема Фату утверждает, что для любой функции $f \in H^p(\mathbb{D})$ и для $\mathfrak{m}$-почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ существуют некасательные предельные значения $f(\zeta)$ функции f в точке ζ. Из предложения 6.5 в [71] вытекает, что для любой функции $f \in H^p(\mathbb{D})$ множество $\mathscr{F}(f)$ является борелевским.

Граничные значения $f(\zeta)$ данной функции $f \in H^p(\mathbb{D})$ определяют функцию класса H^p, которая называется граничной функцией для f. При этом отображение, ставящее в соответствие функции $f \in H^p(\mathbb{D})$ ее граничную функцию, является изометрическим изоморфизмом пространств $H^p(\mathbb{D})$ и H^p. В случае $p = \infty$ это отображение также является $*$-слабым гомеоморфизмом.

Всюду в дальнейшем функции класса $H^p(\mathbb{D})$ и их граничные функции будут обозначаться одним и тем же символом. Так, при необходимости мы будет говорить о значениях функции $f \in H^p$ внутри круга $\mathbb{D}$ (имея в виду значения той функции класса $H^p(\mathbb{D})$, для которой f является граничной функцией).

При всех $p > q > 1$ справедливы включения

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D}),$$

где $N(\mathbb{D})$ — класс Неванлинны в $\mathbb{D}$. Напомним, что всякая функция f класса $N(\mathbb{D})$ имеет вид $f = f_1/f_2$, где $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Пусть теперь G — жорданова область со спрямляемой границей Γ, а φ — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G. Через $E^p(G)$ обозначим класс функций $f \in \mathcal{O}(G)$, таких, что

$$\int_{\Upsilon_r} |f(z)|^p\,|dz| \leqslant C,$$

где $\Upsilon_r = \varphi(\{|\zeta| = r\})$, $r \in (0,1)$, а константа C не зависит от r. Это определение и основные свойства функций класса $E^p(G)$ можно найти в [6, глава X, §5] (см. также [7, глава III, §6]). Классы $E^p(G)$ называются классами Смирнова. Можно доказать, что приведенное определение классов $E^p(G)$ эквивалентно следующему: класс $E^p(G)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{O}(G)$, для которых существует последовательность спрямляемых кривых $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$, лежащих в области G, сходящаяся к Γ, такая, что

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p\,|dz| \leqslant C,$$

где константа C не зависит от n. Напомним также, что функции класса $E^p(G)$ имеют $|dz|$-почти всюду на Γ угловые предельные значения.

Напомним теперь классическую теорему Риссов о мерах, ортогональных многочленам комплексного переменного, и ее связь с пространствами H^1 и E^1. Эти утверждения будут часто использоваться в дальнейшем.

Теорема Риссов [10, глава II, теорема 7.10] утверждает, что любая мера μ на $\mathbb{T}$ со свойством $\mu \perp \{z^n\colon n \in \mathbb{Z}_+\}$ является абсолютно непрерывной относительно линейной меры на $\mathbb{T}$.

Пусть G — жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей Γ и пусть μ — мера на Γ, такая, что

$$\int_\Gamma z^n\,d\mu = 0$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Из цитированной теоремы Риссов (предварительно осуществляется конформное отображение области G на единичный круг и используются теорема 1 из [6, глава X, §1] и теорема Мергеляна) вытекает, что мера μ абсолютно непрерывна относительно меры $|dz|$ на Γ. Другими словами, существует такая $|dz_{|\Gamma}|$-суммируемая функция f, что $d\mu(z) = f(z)\,dz$. Согласно теореме 2 из [6, глава X, §4] и теореме 2 из [6, глава X, §5] функция f совпадает ($|dz|$-почти всюду на Γ) с граничными (угловыми) значениями некоторой функции класса $E^1(G)$. Эту функцию естественно обозначить тем же самым символом f. Итак,

$$\mu = f\,dz_{|\Gamma},$$

где $f \in E^1(G)$, а под $f(z)$ при $z \in \Gamma$ понимаются угловые предельные значения функции f в точке z, которые существуют для функций класса $E^p(G)$ почти всюду на Γ.

В частности, при $G = \mathbb{D}$ мы получаем, что любая мера μ на $\mathbb{T}$, ортогональная всем многочленам комплексного переменного, имеет вид

$$\mu = f\,d\zeta_{|\mathbb{T}},$$

где f — некоторая функция класса H^1 (или, если нужно, класса $H^1(\mathbb{D})$).

Для открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ нам потребуется класс $H^\infty(U)$, состоящий из всех ограниченных голоморфных функций в U.

В дальнейшем мы будем часто использовать граничную теорему единственности Лузина–Привалова для мероморфных функций. Напомним это утверждение (см. [7, глава IV, §2.5]).

Если мероморфная в круге $\mathbb{D}$ функция имеет угловые (некасательные) предельные значения ноль на множестве положительной $\mathfrak{m}$-меры, то эта функция тождественно равна нулю.

Глава 1

Полианалитические функции

Сразу отметим, что сколько-нибудь полный обзор теории полианалитических функций не является целью данной главы (как и всей книги). Такой обзор (по состоянию на начало 1990-х годов) можно найти в работах М. Б. Балка [3] и [40], который многие годы был лидером большой группы советских (российских) математиков, изучавших теорию полианалитических функций.

Ряд более поздних результатов по краевым задачам для полианалитических функций можно найти в монографии К. М. Расулова [30]. Некоторые недавние результаты о задаче Дирихле для полианалитических функций (в ее классической постановке) приведены в статье [20] и в обзоре [22]. Среди недавних работ, посвященных теории полианалитических функций, отметим также статью Л. Д. Абреу и Х. Г. Фейхтингера [37], в которой изучаются пространства Баргмана и Фока в полианалитическом случае.

В этой главе мы приведем обзор той части теории полианалитических функций, которая необходима для того, чтобы сделать дальнейшее изложение по возможности замкнутым.

Определение полианалитических функций

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что n — это фиксированное натуральное число. Пусть U — открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функция f называется *полианалитической порядка* n или, короче, n*-аналитической* на U, если она имеет вид

$$f(z) = \overline{z}^{n-1} f_{n-1}(z) + \cdots + \overline{z} f_1(z) + f_0(z), \tag{1.1}$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ — голоморфные в U функции. Другими словами, полианалитическая функция порядка n в U — это многочлен от сопряженного переменного $\overline{z}$ степени не выше $n-1$ с голоморфными коэффициентами.

Традиционно 2-аналитические функций называют *бианалитическими*. При использовании термина «полианалитическая функция» надо хорошо представлять, что с ростом порядка полианалитичности аналитические свойства соответствующих функций не усиливаются, а наоборот, ослабевают. Всюду в дальнейшем, используя термин «полианалитическая функция» (без явного указания значения порядка полианалитичности), мы будем иметь в виду n-аналитическую функцию при некотором натуральном n, которое в этом случае не уточняется.

Легко проверяется, что представление n-аналитической функции f в виде (1.1) является единственным. Функции $f_0, \dots, f_{n-1}$, входящие в это представление, называются *голоморфными компонентами* функции f.

Обозначим через $\mathcal{O}_n(U)$ класс всех n-аналитических функций в U. Тогда $\mathcal{O}(U) := \mathcal{O}_1(U)$ — класс всех голоморфных в U функций. Для данного компакта $X \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{O}_n(X)$ класс функций, каждая из которых является n-аналитической в окрестности X (своей для каждой функции).

Полианалитические функции, голоморфные компоненты которых являются многочленами комплексного переменного z, называются *полианалитическими многочленами*. Полианалитические функции с рациональными компонентами называются *полианалитическими рациональными функциями*.

Заметим, что n-аналитическая рациональная функция *не является* отношением двух n-аналитических многочленов, так как такое отношение, в общем случае, не может быть представлено в виде (1.1).

Класс всех n-аналитических многочленов мы будем обозначать через $\mathfrak{P}_n$, а пространство всех n-аналитических рациональных функций — через $\mathfrak{R}_n$. При этом $\mathfrak{P}_1 = \mathbb{C}[z]$ и $\mathfrak{R}_1 = \mathbb{C}(z)$ — это пространства многочленов и рациональных функций комплексного переменного соответственно.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — некоторое подмножество комплексной плоскости. Нам потребуется пространство $\mathfrak{R}_n(E)$, состоящее из всех функций класса $\mathfrak{R}_n$, голоморфные компоненты которых являются рациональными функциями с полюсами, лежащими вне E. Такие функции мы будем называть n-аналитическими рациональными функциями с полюсами вне E. Заметим, что n-аналитическая рациональная функция f может быть непрерывной в своей особой точке. Так, 3-аналитическая рациональная функция

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $z = 0$.

Как было отмечено выше, аналитические свойства полианалитических функций с ростом порядка полианалитичности убывают. Поэтому, хотя полианалитические функции можно рассматривать как обобщение голоморфных функций, многие хорошо известные свойства голоморфных функций (такие, например, как принцип максимума модуля или теорема единственности) не выполняются для полианалитических функций.

В то же самое время в теории полианалитических функций возникает целый ряд новых феноменов и специфических задач. Одна из возможных причин этого состоит в том, что класс $\mathcal{O}(U)$ является алгеброй, а класс $\mathcal{O}_n(U)$ при $n \geqslant 2$ — нет (при умножении полианалитических функций порядок полианалитичности возрастает). Но, как легко проверить, класс $\mathcal{O}_n(U)$ при $n \geqslant 2$ обладает структурой $\mathcal{O}(U)$-модуля (n-аналитические функции можно умножать на голоморфные).

Операторы $\overline{\partial}$ и $\overline{\partial}^n$. Обозначим через $\overline{\partial}$ стандартный оператор Коши–Римана в $\mathbb{C}$:

$$\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

и заметим, что оператор $\overline{\partial}^n$ является эллиптическим. Из представления (1.1) вытекает, что любая n-аналитическая в U функция f является вещественно аналитической в U и удовлетворяет всюду в U эллиптическому дифференциальному уравнению

$$\overline{\partial}^n f = 0. \tag{1.2}$$

Верно и обратное: всякая функция $f \in C^n(U)$, удовлетворяющая в U уравнению (1.2), имеет вид (1.1).

Из эллиптичности оператора $\overline{\partial}^n$ вытекает следующее утверждение, которое представляет собой непосредственный аналог хорошо известной леммы Вейля (см. [33, теорема 20.1]):

Теорема I. *Предположим, что функция $f \in C(U)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в смысле теории обобщенных функций (распределений). Тогда $f \in C^\infty(U)$ и f удовлетворяет (1.2) в обычном смысле.*

Таким образом, класс n-аналитических функций в U можно определить эквивалентным образом как класс всех функций $f \in C(U)$, удовлетворяющих в U уравнению (1.2) в смысле теории обобщенных функций.

Еще одно (эквивалентное) определение n-аналитической функции можно получить, если понимать выражение $\overline{\partial} f$ как производную в смысле Помпейю–Теодореску [82] (см. также [3, §1]): функция f называется n-аналитической в U, если она имеет в U непрерывные производные в смысле Помпейю–Теодореску порядка n включительно и удовлетворяет уравнению (1.2), которое также понимается в смысле Помпейю–Теодореску. Напомним понятие производной в смысле Помпейю–Теодореску. Пусть функция f определена и непрерывна в некоторой окрестности V точки $a \in \mathbb{C}$, пусть $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность простых замкнутых кривых, содержащих внутри себя точку a, таких, что области V_k, ограниченные контурами γ_k, сходятся к точке a при $k \to \infty$. Производной в смысле Помпейю–Теодореску функции f в точке a называется предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2iA(V_k)} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz,$$

если этот предел существует и не зависит от выбора последовательности $\{\gamma_k\}$. Производную в смысле Помпейю–Теодореску называют также *ареолярной* производной, или *производной по площади*.

Некоторые свойства полианалитических функций

Далее в этой главе мы обсудим, как выглядят теорема единственности, интегральное представление типа Коши и принцип максимума для полианалитических функций, а также какими алгебраическими свойствами обладают полианалитические многочлены. Несмотря на то что большинство из этих утверждений не потребуется нам явно в дальнейшем, они позволяют лучше понять специфику класса полианалитических функций.

Внутренняя теорема единственности

Легко заметить, что обычная теорема единственности, справедливая для голоморфных функций, не выполняется для n-аналитических функций при $n \geqslant 2$. В самом деле, функции $\overline{z}$ и z совпадают на вещественной оси, но не совпадают, например, в круге $\mathbb{D}$.

Естественным образом возникает следующий вопрос: какие условия надо наложить на подмножество E области $G \subset \mathbb{C}$, при которых E будет множеством единственности для n-аналитических функций. Напомним, что множество E называется *множеством единственности* для класса $\mathcal{O}_n(G)$, если выполнено следующее условие: пусть функции $f, g \in \mathcal{O}_n(G)$ таковы, что для любого $z \in E$ выполнено равенство $f(z) = g(z)$, т.е. $f_{|E} = g_{|E}$; тогда $f \equiv g$.

Из приведенного примера вытекает, что условие $E' \cap G \neq \varnothing$, которое характеризует множества единственности для голоморфных (т.е. 1-аналитических) функций, уже не является достаточным. Здесь через E' обозначено множество предельных точек множества E.

Напомним понятие *точки накопления порядка* m, $m \in \mathbb{N}$. Скажем, что множество E сгущается к точке a вдоль прямой $\mathfrak{L}$, если любая пара вертикальных углов с вершиной в точке a, содержащих прямую $\mathfrak{L}$, содержит некоторое подмножество множества E, для которого a является предельной точкой. Точка a является точкой накопления порядка m для множества E, если E сгущается к точке a вдоль не менее чем m различных прямых.

Например, начало координат является точкой накопления порядка 1 для прямой $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x\}$ и точкой накопления порядка 2 для лемнискаты Бернулли $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$. Для множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x \sin(1/x)\}$ начало координат является точкой накопления бесконечного порядка.

Имеет место следующая внутренняя теорема единственности для полианалитических функций [1] (см. также теорему 1.1 в [3, §1]):

Теорема II. *Пусть G — некоторая область в $\mathbb{C}$, а множество $E \subset G$ имеет в G точку накопления порядка n. Тогда E является множеством единственности для класса $\mathcal{O}_n(G)$.*

В частности, любая область Ω, такая, что $\overline{\Omega} \subset G$, является множеством единственности для класса $\mathcal{O}_n(G)$.

Кроме того, в [1] показано, что при определенных условиях технического характера (которые здесь не приводятся) в теореме II вместо одного множества E, имеющего в G точку накопления порядка n, можно взять конечное объединение множеств, имеющих в G точки накопления меньшего порядка. При этом сумма порядков соответствующих точек накопления должна быть не меньше, чем n.

Интегральное представление для полианалитических функций

Для полианалитических функций (при определенных достаточно ограничительных условиях) можно получить интегральное представление, аналогичное интегральной формуле Коши для голоморфных функций. Впервые это сделал Н. Теодореску [82] (соответствующий результат сформулирован так, как это сделано в теореме 1.3 из [3, §1]):

Теорема III. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, пусть $f \in \mathcal{O}_n(G)$, и пусть Γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, такая, что $\overline{D(\Gamma)} \subset G$. Тогда для любой точки $z \in D(\Gamma)$ имеет место равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\Gamma} \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^k}{\zeta - z} \frac{\partial^k f(\zeta)}{\partial \zeta^k} d\zeta.$$

Условие полианалитичности функции f в теореме III в окрестности области, в которой рассматривается интегральная формула, можно ослабить, но определенные условия существования и регулярности производных функции f вплоть до Γ необходимы для того, чтобы соответствующее интегральное представление для функции f имело место. Эти условия, к сожалению, существенно ограничивают область применимости интегральной формулы Теодореску для изучения свойств полианалитических функций общего вида.

Приведем еще одну полезную интегральную формулу для полианалитических функций специального вида (см. [2] и теорему 1.4 из [3, §1]). Пусть

n-аналитическая в круге $D(0,r)$ функция f может быть записана в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(z)|z|^{2k},$$

где g_k — голоморфные в $D(0,r)$ функции. Такие функции называются *приведенным* n-аналитическими функциями. Пусть $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ такие числа, что $0 < r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1} < r$. Тогда f можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathit{\Pi}_k(|z|^2) h_k(z), \tag{1.3}$$

где функция $h_k \in \mathcal{O}(D(0,r))$ при $k = 0,1,\ldots,n-1$ совпадает с f на окружности $\{z\colon |z| = r_k\}$, а

$$\mathit{\Pi}_k(t) = \frac{(r_0^2 - t)\cdots(r_{k-1}^2 - t)(r_{k+1}^2 - t)\cdots(r_{n-1}^2 - t)}{(r_0^2 - r_k^2)\cdots(r_{k-1}^2 - r_k^2)(r_{k+1}^2 - r_k^2)\cdots(r_{n-1}^2 - r_k^2)}.$$

При $|z| < r_0$ формулу (1.3) можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathit{\Pi}_k(|z|^2) \int_{|\zeta|=r_k} \frac{f(\zeta)\,dz}{\zeta - z}. \tag{1.4}$$

Принцип максимума модуля для полианалитических функций

Сразу отметим, что принцип максимума модуля в его обычном виде не верен, в общем случае, для n-аналитических функций при $n \geqslant 2$. В самом деле, функция $f(z) = 1 - |z|^2 = 1 - z\overline{z}$ является бианалитической в круге $\mathbb{D}$, она тождественно равна нулю на его границе и принимает значение 1 в начале координат (центре круга $\mathbb{D}$).

Однако для n-аналитических функций имеет место утверждение, которое можно рассматривать как специальный «ослабленный» вариант принципа максимума модуля (см. [40, теорема 1.6], а также [2] и теорему 1.5 в [3, §1]). Это утверждение вытекает из интегрального представления (1.4) и позволяет получить ряд важных и нужных нам в дальнейшем свойств полианалитических функций.

Теорема IV. *Пусть* $r > 0$, *а* $r_0 \in \mathbb{R}$ *такое, что* $0 \leqslant r_0 < r$. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_n(D(a,r))$ *— функция вида*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(z)(\overline{z} - \overline{a})^k,$$

где $h_k \in \mathcal{O}(D(a,r))$ *при* $k = 0,1,\ldots,n-1$. *Предположим, что при* $z \in D(a,r) \setminus D(a,r_0)$ *имеет место оценка* $|f(z)| < M$, *где* $M > 0$ *— некоторая константа. Тогда существует константа* $C > 0$, *зависящая только от* n *и от величины* r_0/r (*но не зависящая от* f *и от* M), *такая, что для любого* $z \in D(a,r_0)$ *выполнены оценки*

$$|f(z)| \leqslant CM \qquad \text{и} \qquad |h_k(z)(\overline{z} - \overline{a})^k| \leqslant CM.$$

Далее, существуют константы C'_k, *не зависящие от* f *и* M, *такие, что при* $z \in D(a,r_0)$ *выполнены оценки*

$$|f_k(z)| \leqslant C'_k M, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

для f_k *— это голоморфные компоненты* f.

Наконец, для любых натуральных s *и* m *найдутся константы* $C''_{s,m}$, *не зависящие от* f *и* M, *такие, что*

$$\left|\frac{\partial^{s+m} f(z)}{\partial \overline{z}^s \partial z^m}\right| \leqslant \frac{C''_{s,m} M}{R^{s+m}}.$$

Из теоремы IV вытекает следующее полезное утверждение:

Предложение V. *Пусть* G *— ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *а* X *— компакт, содержащийся в* G. *Существует константа* C, *зависящая только от* G, X *и* n, *такая, что для любой* n*-аналитической в* G *функции* f *с условием* $|f(z)| \leqslant M$ *при всех* $z \in G$ *и для любой точки* $a \in X$ *справедливо неравенство* $|f_k(a)| \leqslant CM$ *при* $k = 0,1,\ldots,n-1$, *где* f_k *— голоморфные компоненты функции* f.

В самом деле, возьмем $d = \operatorname{dist}(X, \partial G)/2$ и рассмотрим семейство кругов $\{D(a,2d)\colon a \in X\}$. Так как семейство кругов $\{D(a,d)\colon a \in X\}$ образует покрытие X, то нам достаточно выбрать из него конечное покрытие

$\{D(a_s,d)\}_{s=1}^m$ и применить замечание к теореме IV для кругов $D(a_s,r)$ при $r=2d$ и $r_0=d$.

Заметим, что из предложения V вытекает *принцип компактности* для полианалитических функций, который состоит в том, что каждое семейство функций, n-аналитических в области G и локально равномерно ограниченных в области G, содержит последовательность, сходящуюся локально равномерно в G.

Более того, для полианалитических функций справедлив аналог теоремы Вейерштрасса, который вытекает из теоремы IV и предложения V и который будет часто (и неявно) использоваться в дальнейшем:

Теорема VI. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ и пусть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ функций класса $\mathcal{O}_n(G)$ сходится локально равномерно в G к некоторой функции f. Тогда функция f является n-аналитической в G, и для любых натуральных чисел m и s последовательность $\{\partial^{s+m}f_k/\partial\overline{z}^s\partial z^m\}$ локально равномерно в G сходится к функции $\partial^{s+m}f/\partial\overline{z}^s\partial z^m$.*

В качестве следствия теоремы IV можно получить также аналог теоремы Стильтьеса–Витали для полианалитических функций.

Теорема VII. *Пусть последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ функций класса $\mathcal{O}_n(G)$ локально равномерно ограничена в G и сходится поточечно на некотором подмножестве E области G, имеющем в G точку накопления порядка n. Тогда последовательность $\{f_k\}$ сходится локально равномерно в G* (*и, следовательно, к n-аналитической в G функции*).

Заметим, что утверждение об n-аналитичности предела локально равномерно сходящейся последовательности n-аналитических функций можно было получить и из теоремы I. Однако доказательство теоремы 20.1 в [33] использует многие факты из общей теории эллиптических дифференциальных уравнений и является довольно сложным. Представляет интерес получение альтернативного доказательства теоремы I, основанного на использовании теоремы Вейерштрасса для полианалитических функций.

Вывод теоремы I из теоремы VI. Пусть функция $f\in C(U)$ удовлетворяет в U уравнению (1.2) в обобщенном смысле. Выберем и зафиксируем радиальную функцию $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ с единичной массой (т.е. функция ρ зависит только от $|z|$ и $\int \rho(\zeta)\, dA(\zeta) = 1$), равную нулю при $|z| > 1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\rho_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-2}\rho(z\varepsilon^{-1})$$

и определим регуляризованную функцию f_ε по формуле

$$f_\varepsilon(z) := \int f(z+\varepsilon\zeta)\rho(\zeta)\, dA(\zeta) = \\ = \int f(z+\zeta)\rho_\varepsilon(\zeta)\, dA(\zeta) = \int f(\zeta)\rho_\varepsilon(\zeta - z)\, dA(\zeta).$$

При этом $f_\varepsilon \in C^\infty(G_\varepsilon)$, где $G_\varepsilon = \{z \in G\colon \operatorname{dist}(z, \partial G) > \varepsilon\}$. Далее, при $z \in G_\varepsilon$,

$$\overline{\partial}^n f_\varepsilon(z) = \int f(\zeta)\overline{\partial}_z^n \rho_\varepsilon(\zeta - z)\, dA(\zeta).$$

Так как $\overline{\partial}_z^n \rho_\varepsilon(\zeta - z) = \overline{\partial}_\zeta^n \rho_\varepsilon(\zeta - z)$, то $\overline{\partial}^n f_\varepsilon = 0$ в G_ε. Таким образом, функция f_ε является n-аналитической функцией в G_ε. Так как $f_\varepsilon(z+\epsilon\zeta) = f(z) + o_\varepsilon(1)$ с $o_\varepsilon(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно в G, то $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ на компактах в G при $\varepsilon \to 0$. С использованием теоремы VI из этого вытекает, что функция f является n-аналитической в G. $\square$

Алгебраические свойства полианалитических многочленов

Полианалитические многочлены, или многочлены вида

$$\overline{z}^{n-1} p_{n-1} + \cdots + \overline{z} p_1(z) + p_0(z),$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{C}[z]$, обладают интересными алгебраическими свойствами, существенно отличающимися от алгебраических свойств обычных многочленов комплексного переменного.

Так, существуют полианалитические многочлены, которые не имеют нулей. Например 4-аналитический многочлен $\overline{z}^3 - z^3 + 1$ не имеет нулей, так как выражение $\overline{z}^3 - z^3$ принимает при всех $z \in \mathbb{C}$ чисто мнимые значения.

Оказывается, что для полианалитических многочленов, не имеющих нулей, справедливо следующее свойство (см., например, [40, теорема 4.1]):

Теорема VIII. *Предположим, что $P(z,\overline{z})$ — полианалитический многочлен, не имеющий нулей всюду в $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\deg_{\overline{z},z} P \leqslant 2\deg_{\overline{z}} P.$$

Доказательство. Пусть $n := \deg_{\overline{z}} P$ (т.е. P является $(n+1)$-аналитическим многочленом), а $d := \deg_{z,\overline{z}} P$. Запишем многочлен P в виде

$$P(z,\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{z}^k P_k(z), \qquad \text{где} \quad P_k(z) = \sum_{j=0}^{d-k} a_{k,j} z^j,$$

причем $P_n \not\equiv 0$ и хотя бы один из коэффициентов $a_{k,d-k}$ при $k = 0, \dots, n$ отличен от нуля. Определим функцию $F(z) = z^n P(z,\overline{z})$, так, что

$$F(z) = z^n P(z,\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} |z|^{2k} Q_k(z), \qquad \text{где} \quad Q_k(z) = z^{n-k} \sum_{j=0}^{d-k} a_{k,j} z^j.$$

Возьмем произвольное $r > 0$. Так как исходный многочлен P не имеет нулей, то функция F не обращается в нуль на окружности $\Gamma_r := \{z\colon |z| = r\}$. Так как функция F имеет в начале координат ноль порядка n, то, в силу принципа аргумента,

$$\Delta_{\Gamma_r^+} \operatorname{Arg} F = 2\pi n,$$

где через Γ_r^+ обозначается однократно проходимая в положительном направлении окружность Γ_r. Отсюда вытекает, что для многочлена

$$Q_r(z) = \sum_{k=0}^{n} r^{2k} Q_k(z) \in \mathbb{C}[z]$$

также имеет место равенство

$$\Delta_{\Gamma_r} \operatorname{Arg} Q_r = 2\pi n.$$

Пусть $G_r(z) = r^{-(n+d)} Q_r(rz)$. Тогда

$$\Delta_{\Gamma_1^+} \operatorname{Arg} G_r = 2\pi n.$$

Перепишем выражение $G_r(z)$ в виде $G(z) = T(z) + R_r(z)$, где

$$T(z) = a_{0,d} z^{d+n} + a_{1,d-1} z^{d+n-2} + \dots + a_{n,d-n} z^{d-n}, \qquad \text{а}$$

$$R_r(z) = r^{-(d+n)} \sum_{k=0}^{n} r^{n+k} z^{n-k} \sum_{j=0}^{d-k-1} a_{k,j} r^j z^j.$$

Многочлен $T(z)$ имеет не менее, чем $d-n$ корней в круге $\mathbb{D}$ и, следовательно, найдется такое $r' \in (0,1)$, что в круге $D(0,r')$ этот многочлен обращается в ноль только в начале координат. Так как $R_r \to 0$ при $|z| = r$ и $r \to \infty$, то при достаточно больших значениях r функция G_r имеет в круге $D(0,r')$ столько же нулей, сколько и многочлен $T(z)$. Следовательно, G_r (при достаточно больших значениях r) имеет в круге $\mathbb{D}$ не менее, чем $d-n$ нулей. Но, как было показано выше, эта функция имеет n нулей в круге $\mathbb{D}$. Таким образом, $n \geqslant (d-n)$, и, следовательно, $d \leqslant 2n$. Теорема доказана. □

Из теоремы VIII вытекает следующее утверждение, которое можно считать своего рода аналогом основной теоремы алгебры для полианалитических многочленов:

Теорема IX. *Если P — такой полианалитический многочлен, что*

$$\deg_{z,\overline{z}} P > 2\min\{\deg_z P, \deg_{\overline{z}} P\},$$

то P имеет хотя бы один корень.

Доказательство. Пусть полианалитический многочлен P не имеет нулей всюду в $\mathbb{C}$. Тогда, по теореме VIII, $\deg_{z,\overline{z}} P \leqslant 2\deg_{\overline{z}} P$. Но многочлен $P_1(z,\overline{z}) := \overline{P(z,\overline{z})}$ также не имеет нулей всюду в $\mathbb{C}$. Применяя к нему теорему VIII, получаем, что $\deg_{z,\overline{z}} P \leqslant 2\deg_z P$. □

В связи с теоремами VIII и IX приведем еще один пример. Пусть n и d — такие натуральные числа, что $n < d < 2n$. Рассмотрим полианалитический многочлен

$$P(z,\overline{z}) := (\overline{z} + z + i)^{2n-d}(\overline{z}z + 1)^{d-n},$$

который не имеет нулей всюду в $\mathbb{C}$ и который обладаем теми свойствами, что $\deg_{z,\overline{z}} P = d$, а $\deg_z P = \deg_{\overline{z}} P = n$.

Теорема IX позволяет в ряде случаев просто отвечать на вопрос о том, имеет ли решение система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A(x,y) = 0, \\ B(x,y) = 0, \end{cases}$$

где $A, B \in \mathbb{R}[x,y]$. Для ответа на этот вопрос надо рассмотреть многочлен $P(z,\overline{z}) = A(x,y) + iB(x,y)$ (который, естественно, будет полианалитическим) и применить к нему теорему IX.

Заметим, что существуют также полианалитические многочлены, имеющие неизолированные нули. В качестве примера приведем многочлен $\overline{z}z - 1$, нули которого заполняют всю окружность $\mathbb{T}$. Следующая теорема объединяет два важных свойства нулей полианалитических многочленов (см., например, замечания 4.3 и 4.4 в [40]):

Теорема X. *Если полианалитический многочлен P имеет неизолированные нули, то существуют такие полианалитические многочлены P_1 и P_2, что*

$$P(z, \overline{z}) = P_1(z, \overline{z}) P_2(z, \overline{z}),$$

а P_1 принимает только вещественные значения и P_2 имеет лишь изолированные нули.

Кроме того, если полианалитический многочлен имеет только изолированные нули, то их число конечно.

Доказательство. Пусть $P(z, \overline{z}) = A(x, y) + iB(x, y)$ и пусть $P_1(x, y)$ — это наибольший общий делитель многочленов A и B. Ясно, что многочлен P_1 является полианалитическим и принимает только вещественные значения. Пусть $A_1(x, y) := A(x, y)/P_1(x, y)$ и $B_1(x, y) := B(x, y)/P_1(x, y)$. Тогда многочлены A_1 и B_1 взаимно просты и, следовательно, они имеют не более, чем конечное число общих нулей. Но тогда многочлен $P_2(z, \overline{z}) = A_1(x, y) + iB_1(x, y)$ имеет лишь конечное число нулей и, следовательно, не имеет неизолированных нулей.

Для доказательства второго утверждения теоремы предположим, что полианалитический многочлен $P(z, \overline{z})$ имеет бесконечное число изолированных нулей. Тогда множество Z нулей P имеет хотя бы одну предельную точку a. Предположим, что $a \neq \infty$. Как показано в [2, §5], множество $Z \cap D(a, \rho)$, при достаточно малом $\rho > 0$, состоит из конечного числа аналитических дуг и, следовательно, содержит неизолированные точки. Если $a = \infty$, то вместо многочлена $P(z, \overline{z})$ надо рассмотреть многочлен $z^k \overline{z}^m Q(1/z, 1/\overline{z})$, где $k = \deg_z P$, а $m = \deg_{\overline{z}} P$, для которого начало координат является предельной точкой нулей. $\square$

Глава 2

Пространства функций и задачи аппроксимации

В этой главе мы сформулируем и обсудим задачи аппроксимации функций полианалитическими многочленами на компактных подмножествах комплексной плоскости в нормах пространств непрерывных и гладких функций. В самом общем виде эти задачи формулируются следующим образом: при каких условиях на компакт $X \subset \mathbb{C}$ и на функцию f, заданную на X, эта функция может быть с любой точностью приближена на X последовательностью n-аналитических многочленов в равномерной норме или в норме подходящего пространства гладких функций на X? Эта задача является естественным обобщением классических задач о равномерной аппроксимации функций многочленами комплексного переменного и гармоническими многочленами, восходящих к классическим работам К. Вейерштрасса, К. Рунге и Д. Уолша.

Пусть (здесь и всюду в дальнейшем) X — это некоторый компакт в $\mathbb{C}$, а n — некоторое фиксированное натуральное число.

Задача равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами

Через $C(X)$ мы будем обозначать пространство непрерывных на X комплекснозначных функций с равномерной нормой

$$\|f\|_X = \max_{z \in X} |f(z)|$$

при $f \in C(X)$. Для подпространства $\mathscr{F} \subset C(X)$ через $\overline{\mathscr{F}}$ обозначим замыкание $\mathscr{F}$ в $C(X)$. Наконец, равномерную сходимость на X обозначим символом $\rightrightarrows_X$.

Пусть

$$P_n(X) := \overline{\left\{p_{|X} : p \in \mathfrak{P}_n\right\}}$$

— пространство функций, которые могут быть равномерно на X с любой точностью приближены последовательностью n-аналитических многочленов. Ясно, что $P_n(X) \subset C(X)$. Из теоремы VI вытекает, что $P_n(X) \subset \mathcal{O}_n(X^\circ)$, где через X° обозначена внутренность компакта X. Определим класс функций

$$A_n(X) := C(X) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ),$$

так что $P_n(X) \subset A_n(X)$. Из этого следует, что условие $f \in A_n(X)$ является естественным необходимым условием приближаемости данной функции f полианалитическими многочленами порядка n. Возникает задача описания компактов $X \subset \mathbb{C}$, для которых это естественное необходимое условие приближаемости является достаточным, т.е. задача описания тех компактов X, для которых *любая* функция $f \in A_n(X)$ может быть приближена последовательность n-аналитических многочленов:

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$, при которых выполняется равенство*

$$A_n(X) = P_n(X). \tag{2.1}$$

При $n = 1$ задача 1 — это классическая задача равномерной аппроксимации функций многочленами комплексного переменного. Она возникла в конце XIX века в работах К. Вейерштрасса и К. Рунге. В дальнейшем для пространств $A_1(X)$ и $P_1(X)$ мы будем использовать традиционные обозначения $A(X)$ и $P(X)$ соответственно.

Напомним теорему Рунге [74], полученную в 1885 году и вошедшую в настоящее время во многие стандартные курсы комплексного анализа:

Теорема XI (теорема Рунге)**.** *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\mathcal{O}(X) = R(X) := \overline{\{g_{|X} \colon g \in \mathfrak{R}_1(X)\}}.$$

Если множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то $R(X) = P(X)$.

Другими словами, теорема Рунге говорит о том, что всякая функция, голоморфная в окрестности произвольного компакта $X \subset \mathbb{C}$, может быть равномерно на X приближена рациональными функциями комплексного переменного с полюсами, лежащими вне X. Кроме того, если множество $\mathbb{C} \setminus$

X связно, то всякая такая функция может быть приближена многочленами комплексного переменного.

Задача 1 при $n = 1$ была полностью решена С. Н. Мергеляном [24]:

Теорема XII (теорема Мергеляна)**.** *Равенство $A(X) = P(X)$ выполнено в том и только том случае, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Этот результат был доказан ранее М. А. Лаврентьевым [16] для нигде не плотных компактов X и М. В. Келдышем [15] для компактов X с условием $X = \overline{X^\circ}$. В дальнейшем мы будет называть соответствующие утверждения *теоремами Лаврентьева* и *Келдыша*.

Известно несколько доказательств теоремы Мергеляна. Их можно найти, например, в книгах [9] и [23]. Ниже мы приведем доказательство этой теоремы, основанное на локализационном методе А. Г. Витушкина (см. доказательство теоремы 6 ниже).

Заметим, что необходимость условия связности множества $\mathbb{C}\setminus X$ (дополнения к X) в теореме Мергеляна является простым следствием принципа максимума модуля для голоморфных функций. Таким образом, с учетом теоремы Рунге, основным содержанием теоремы Мергеляна является тот факт, что $A(X) = R(X)$ в случае связности множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Перед тем как переходить к задаче 1 для n-аналитических функций в случае $n \geqslant 2$ (основном для нас), обсудим подробнее задачу о совпадении пространств $A(X)$ и $R(X)$ и соответствующую задачу для полианалитических функций. Для компактов X и Y с условием $X \subset Y$ введем пространство функций

$$R_n(X, Y) := \overline{\{g_{|X} \colon g \in \mathfrak{R}_n(Y)\}},$$

или, другими словами, пространство всех функций, которые могут быть равномерно на X приближены n-аналитическими рациональными функциями с полюсами, лежащими вне Y. При $X = Y$ положим $R_n(X) := R_n(X, X)$. Интересующая нас задача формулируется так:

Задача 2. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт X, при которых выполняется равенство $A_n(X) = R_n(X)$.*

В случае $n = 1$ задача 2 была полностью решена А. Г. Витушкиным [8] в терминах непрерывной аналитической емкости $\alpha(\cdot)$:

Теорема XIII (теорема Витушкина). *Равенство $A(X) = R(X)$ имеет место в том и только том случае, когда выполняется любое из следующих двух эквивалентных условий:*

а) равенство $\alpha(\Omega \setminus X^\circ) = \alpha(\Omega \setminus X)$ выполнено для каждого открытого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{C}$;

б) существуют постоянные $A > 0$ и $\lambda \geqslant 1$, такие, что для любого круга $D(a, r)$ справедлива оценка

$$\alpha(D(a,r) \setminus X^\circ) \leqslant A\alpha(D(a,\lambda r) \setminus X).$$

Напомним определение непрерывной аналитической емкости $\alpha(\cdot)$, которое понадобится нам в дальнейшем. Если $E \subset \mathbb{C}$ — ограниченное множество, а $\mathscr{A}(E) = \{g \in C(\overline{\mathbb{C}})\colon g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus E),\ \|g\| \leqslant 1,\ g(\infty) = 0\}$, где $c_1(g) = \lim_{z\to\infty} zg(z)$ — коэффициент при z^{-1} в разложении Лорана функции g в окрестности ∞, то

$$\alpha(E) = \sup\{|c_1(g)|\colon g \in \mathscr{A}(E)\}.$$

Основные свойств емкости $\alpha(\cdot)$ приведены в [8, глава 1]. В недавней работе Х. Толсы [83] найдено описание емкости $\alpha(\cdot)$ в метрических терминах и доказана ее счетная субаддитивность.

В связи со сделанным выше замечанием о связи теорем Рунге и Мергеляна с задачей 2 для голоморфных функций заметим, что для компактов X, имеющих связное дополнение, выполнены условия теоремы Витушкина. Таким образом, для таких компактов выполняется равенство $A(X) = R(X)$ и, следовательно, равенство $A(X) = P(X)$.

Задача 2 для n-аналитических функций при $n \geqslant 2$ интересует исследователей начиная с 1970-х годов. Тогда она формулировалась в несколько более общем виде — как задача о равномерной аппроксимации рациональными модулями, т.е. функциями вида

$$f_0(z) + g_1(z)f_1(z) + \cdots + g_m(z)f_m(z),$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — произвольные функции класса $\mathfrak{R}_1(X)$, а $g_1, \ldots, g_m$ — заданные непрерывные функции, обладающие определенными специальными свойствами (к этой аппроксимационной задаче мы вернемся несколько позднее). Случай аппроксимации полианалитическими рациональными функциями возникает при $g_k = \overline{z}^k$, $k = 1, \ldots, m$.

Одной из первых работ, в которых рассматривались задачи равномерной аппроксимации функций рациональными модулями, была статья А. Г. О'Фаррелла [67]. Затем (в 1980-х годах) последовали, в частности, работы Т. Трента и Дж. Л.-М. Вонга [84, 85], Дж. Л.-М. Вонга [91, 92], Дж. Кармоны [47, 48] и других авторов. В этих работах получены, в частности, следующие достаточные условия на компакт X, при которых имеет место равенство $A_n(X) = R_n(X)$.

– $X^\circ = \varnothing$, см. [84, теорема 1].
– Множество $\mathbb{C} \setminus X$ имеет конечное число связных компонент, см. [48, теорема 2]; или нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$ положительна; или каждая граничная точка компакта X является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$; или X является компактом Каратеодори (в последних трех случаях доказательство соответствующего результата можно получить несложной модификацией аргументов, использованных в [48] при доказательстве теорем 2 и 3).
– Внутренняя граница $\partial_I X$ компакта X является не более чем счетной, см. [91, замечание 1].

Напомним, что *внешней границей* $\partial_E X$ компакта X называют объединение границ всех компонент связности множества $\mathbb{C} \setminus X$, а *внутренней границей* — множество $\partial_I X = \partial X \setminus \partial_E X$.

Полное решение задачи 2 было получено М. Я. Мазаловым [18, 19]:

Теорема XIV. *$A_n(X) = R_n(X)$ для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$.*

Обсуждение доказательства этого критерия выходит за рамки нашего изложения. Но важно отметить, что теорему XIV естественно рассматривать как непосредственный аналог теоремы Витушкина о равномерной приближаемости функций рациональным дробями (см. выше). В самом деле, из того, что фундаментальное решение $\overline{z}^{n-1}/(\pi z)$ для оператора $\overline{\partial}^n$ локально ограничено в начале координат при $n \geqslant 2$, вытекает, что естественным образом определенная непрерывная n-аналитическая емкость тривиальна в следующем смысле: емкость любого непустого ограниченного множества ограничена сверху и снизу двумя абсолютными константами. Отметим также, что при $n = 2$ результат теоремы XIV был сформулирован в качестве гипотезы в работе Д. Вердеры [88]. В этой работе было доказано, что на любом компакте $X \subset \mathbb{C}$ любая функция класса $A_2(X)$, удовлетворяющая дополнительно условию Дини, может быть равномерно на X приближена функцией класса $\mathfrak{R}_2(X)$.

Перейдем к обсуждению задачи 1 в случае $n \geqslant 2$. Сразу заметим, что из теоремы 7, приведенной ниже, вытекает, что условие теоремы Мергеляна (связность множества $\mathbb{C} \setminus X$) остается достаточным условием приближаемости и в рассматриваемой задаче: если множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то $P_n(X) = A_n(X)$ при любом $n \geqslant 2$.

Первое нетривиальное наблюдение, связанное с задачей 1 при $n \geqslant 2$, состоит в том, что условие связности множества $\mathbb{C} \setminus X$ уже не является необходимым условием приближаемости. Приведем примеры такого поведения. Для удобства дальнейших ссылок мы оформим эти примеры в виде отдельного предложения (см. предложение 3 ниже).

Определим несколько областей, которые будут часто использоваться в дальнейшем. Пусть a и b — вещественные числа, $a > b > 0$. Рассмотрим эллипс

$$\Gamma_{a,b} := \left\{ z = x + iy \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

с центром в начале координат и с полуосями a и b. Пусть $c := \sqrt{a^2 - b^2}$, причем $c > 0$. Заметим, что фокусы эллипса $\Gamma_{a,b}$ — это точки $\pm c$.

Обозначим через $\mathcal{D}_{a,b}$ область, ограниченную эллипсом $\Gamma_{a,b}$.

Как несложно проверить, любая точка $z \in \Gamma_{a,b}$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{z} = S_{a,b}(z) := \frac{a^2 + b^2}{c^2} z - \frac{2ab}{c^2} \sqrt{z^2 - c^2}, \tag{2.2}$$

где взята голоморфная ветвь многозначной функции $\sqrt{z^2 - c^2}$, определенная вне некоторой дуги, лежащей в области $\mathcal{D}_{a,b}$ и соединяющей точки $\pm c$, удовлетворяющая условию $\sqrt{a^2 - b^2} = c$. В дальнейшем нам будет удобно упростить обозначения и записывать функцию $S_{a,b}$ (а она будет часто возникать по ходу изложения) в виде

$$S_{a,b}(z) = \alpha z - \beta \sqrt{z^2 - c^2}, \tag{2.3}$$

где $\alpha = (a^2 + b^2)/c^2$, а $\beta = 2ab/c^2$. Таким образом, функция $S_{a,b}$ — это функция Шварца эллипса $\Gamma_{a,b}$. При этом $\alpha > 1$, $\alpha > \beta > 0$, а при $c = 1$

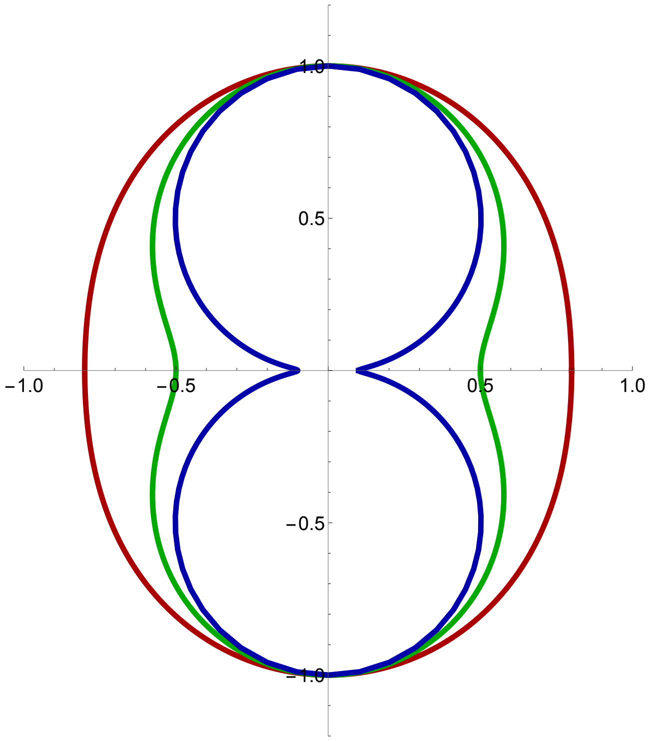

Рис. 3. Овалы $\Gamma'_{5/4,1}$ (красный), $\Gamma'_{2,1}$ (зеленый) и $\Gamma'_{10,1}$ (синий)

параметры a и b выражаются через α и β следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}\Bigl(\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha-\beta}\Bigr), \quad b = \frac{1}{2}\Bigl(\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha-\beta}\Bigr).$$

Пусть, далее, $\Gamma'_{a,b}$ — это образ эллипса $\Gamma_{a,b}$ при отображении $z \mapsto 1/z$, а $G'_{a,b}$ — это область, ограниченная контуром $\Gamma'_{a,b}$. Заметим, что функция Шварца контура $\Gamma'_{a,b}$ имеет вид

$$S_{\Gamma'_{a,b}}(z) = \frac{z}{\alpha - \beta\sqrt{1-z^2c^2}}. \tag{2.4}$$

Область $G'_{a,b}$ называется *овалом Неймана*. Эта область хорошо известна в теории квадратурных областей. На рис. 3 приведены овалы $\Gamma'_{5/4,1}$, $\Gamma'_{2,1}$ и $\Gamma'_{10,1}$.

Предложение 3. *Пусть a и b — такие вещественные параметры, что $a > b > 0$. Тогда*

1) $P_2(\Gamma_{a,b}) = C(\Gamma_{a,b})$*;*

2) $P_n(\Gamma'_{a,b}) \neq C(\Gamma'_{a,b})$ *при всех* $n \geqslant 2$*;*

3) $P_2(\Gamma_{a,b} \cup \{0\}) = C(\Gamma_{a,b} \cup \{0\})$.

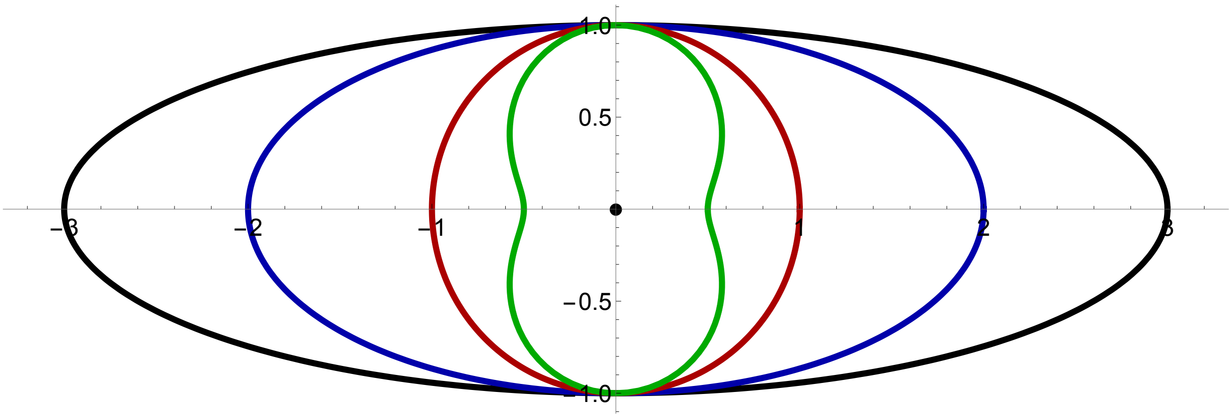

Рис. 4. Эллипсы $\Gamma_{3,1}$ и $\Gamma_{2,1}$ (черный и синий контуры), единичная окружность $\mathbb{T}$ (красный контур) и овал Неймана $\Gamma'_{2,1}$ (зеленый контур)

Кроме того,

4) $P_n(\mathbb{T}) \neq C(\mathbb{T})$ *при всех* $n \geqslant 2$.

Таким образом, существуют компакты X, имеющие несвязное дополнение, на которых пространство $\mathfrak{P}_2$ плотно и не плотно в пространстве $C(X)$. Кроме того, существуют компакты X, не являющиеся компактами Каратеодори, на которых $\mathfrak{P}_2$ плотно в $C(X)$.

Доказательство. На рис. 4 проиллюстрированы все четыре рассмотренных в этом предложении случая.

Доказательство удобно начать с четвертого утверждения. Предположим, что функция

$$\frac{\overline{z}^{n-1}}{z} \in C(\mathbb{T})$$

может быть равномерно на $\mathbb{T}$ приближена n-аналитическим многочленом, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен вида $\overline{z}^{n-1}p_{n-1}(z) + \cdots + \overline{z}p_1(z) + p_0(z)$, где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{C}[z]$, такой, что

$$\left\|\overline{z}^{n-1}p_{n-1}(z) + \cdots + \overline{z}p_1(z) + p_0(z) - \frac{\overline{z}^{n-1}}{z}\right\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon.$$

Так как на $\mathbb{T}$ выполняется равенство $z\overline{z} = 1$, то из этого вытекает, что

$$\left\|p_{n-1}(z) + zp_{n-2}(z) + \cdots + z^{n-2}p_1(z) + z^{n-1}p_0(z) - \frac{1}{z}\right\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon.$$

Но, как хорошо известно, функция $1/z$ не может быть равномерно на $\mathbb{T}$ приближена многочленом комплексного переменного. Таким образом,

$$P_n(\mathbb{T}) \neq C(\mathbb{T}).$$

Докажем теперь первое утверждение. Заметим, что для всех $z \in \mathit{\Gamma}_{a,b}$ имеет место равенство

$$\overline{z}^2 = 2\alpha\overline{z}z - z^2 - \beta^2 c^2. \tag{2.5}$$

Из него вытекает, что для любого целого $k \geqslant 2$ выражение $\overline{z}^k$ может быть представлено в виде $q_{k,1}(z)\overline{z} + q_{k,2}(z)$, где $q_{k,1}, q_{k,2}$ — многочлены комплексного переменного. Таким образом, пространство $\{p_{|\Gamma_{a,b}} \colon p \in \mathfrak{P}_2\}$ является алгеброй. Следовательно, алгеброй будет и пространство $P_2(\mathit{\Gamma}_{a,b})$ — замыкание в $C(\mathit{\Gamma}_{a,b})$ подпространства $\{p_{|\mathit{\Gamma}_{a,b}} \colon p \in \mathfrak{P}_2\}$.

Ясно, что алгебра $P_2(\mathit{\Gamma}_{a,b})$ не равна алгебре $P(\mathit{\Gamma}_{a,b}) \subset P_2(\mathit{\Gamma}_{a,b})$. В самом деле, $\overline{z} \in P_2(\mathit{\Gamma}_{a,b})$, но $\overline{z} \notin P(\mathit{\Gamma}_{a,b})$ так как

$$\int_{\Gamma_{a,b}} f(z)dz = 0$$

для любой функции $f \in P(\mathit{\Gamma}_{a,b})$, но, по формуле Коши–Грина,

$$\int_{\mathit{\Gamma}_{a,b}} \overline{z}dz = 2iA(\mathcal{D}_{a,b}) \neq 0.$$

Таким образом, $P_2(\mathit{\Gamma}_{a,b})$ — это подалгебра алгебры $C(\mathit{\Gamma}_{a,b})$, которая содержит алгебру $P(\mathit{\Gamma}_{a,b})$, но не совпадает с ней. В силу теоремы Вермера о максимальности [42, теорема 6] из этого вытекает, что

$$P_2(\mathit{\Gamma}_{a,b}) = C(\mathit{\Gamma}_{a,b}).$$

Второе утверждение мы докажем, используя двойственные методы. Мы построим меру μ на $\mathit{\Gamma}'_{a,b}$, такую, что $\mu \perp \mathfrak{P}_n$. Рассмотрим функцию

$$w(z) = \alpha - \beta\sqrt{1 - z^2c^2},$$

где рассматривается ветвь корня, определенная вне множества

$$(-\infty, -c^{-1}] \cup [c^{-1}, +\infty)$$

и равная 1 в начале координат. Эта функция будет голоморфна в некоторой окрестности замыкания области $G'_{a,b}$. Определим меру

$$\mu := w^{n-1}\, dz_{|\varGamma'_{a,b}}.$$

Тогда из (2.4) вытекает, что

$$\int \overline{z}^s z^m\, d\mu(z) = \int_{\varGamma'_{a,b}} S_{\varGamma'_{a,b}}(z)^s z^m w(z)^{n-1}\, dz = \int_{\varGamma'_{a,b}} w(z)^{n-1-s} z^{m+s}\, dz = 0$$

при всех $s = 0,1,\ldots,n-1$ и при всех целых $m \geqslant 0$ в силу стандартной интегральной теоремы Коши. Следовательно, $\mu \perp \mathfrak{P}_n$ и, окончательно,

$$P_n(\varGamma'_{a,b}) \neq C(\varGamma'_{a,b}).$$

Для доказательства оставшегося (третьего) утверждения мы снова применим двойственные методы. Но на этот раз мы будет рассуждать от противного. Пусть $P_2(\varGamma_{a,b} \cup \{0\}) \neq C(\varGamma_{a,b} \cup \{0\})$. Тогда существует ненулевая мера μ на $\varGamma_{a,b} \cup \{0\}$, такая, что $\mu \perp \mathfrak{P}_2$. Мера $\mu_1 := z\mu$ — это мера на $\varGamma_{a,b}$ и $\mu_1 \perp \mathfrak{P}_2$. Так как носитель меры μ не может быть точкой $\{0\}$, то $\mu_1 \not\equiv 0$. Но тогда $P_2(\varGamma_{a,b}) \neq C(\varGamma_{a,b})$, что противоречит второму утверждению. Следовательно $\mu \equiv 0$ и

$$P_2(\varGamma_{a,b} \cup \{0\}) = C(\varGamma_{a,b} \cup \{0\}).$$

Таким образом, предложение 3 полностью доказано. □

Приведенные примеры — $\mathbb{T}$ (единичная окружность), $\varGamma_{a,b}$ (эллипс) и $\varGamma'_{a,b}$ (овал Неймана) — показывают, что решение задачи 1 при $n \geqslant 2$ не может быть сформулировано только в терминах топологических характеристик компакта X, на котором рассматривается аппроксимация (как это имеет место в случае $n = 1$). Для решения задачи 1 при $n \geqslant 2$ необходимо привлекать новые аналитические свойства компактов, которые, как будет показано в дальнейшем, не могут быть выражены в терминах подходящих емкостей. Это существенно отличает случаи $n = 1$ и $n \geqslant 2$ в рассматриваемой задаче.

Первое и третье утверждение предложения 3 показывают, что задача 1 при $n \geqslant 2$ существенно отличается и от задачи о равномерной приближаемости функций гармоническими многочленами на плоских компактах. В самом деле, эллипс $\varGamma_{a,b}$ является компактом Каратеодори, компакт $\varGamma_{a,b} \cup \{0\}$ — нет, а в последней задаче имеет место критерий приближаемости, полученный в работах Д. Уолша [90, с. 503] и А. Лебега [65] (см. также [10, глава II]), который мы приведем в том виде, как он сформулирован в [28, §1]:

Теорема XV. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Для того чтобы всякую функцию $f \in C(X)$, гармоническую в X°, можно было равномерно на X приблизить гармоническими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы X был компактом Каратеодори, т.е. $\partial X = \partial \widehat{X}$.*

Напомним, что гармонический многочлен — это многочлен p от переменных z и $\overline{z}$ (с комплексными коэффициентами), удовлетворяющий всюду в $\mathbb{C}$ уравнению $\Delta p = 0$, где Δ — это оператор Лапласа.

Мы подробно обсудим задачу 1 в главах с 4 по 8 ниже, а сейчас мы перейдем к постановке задач аппроксимации функций полианалитическими многочленами в пространствах гладких функций.

Пространства гладких функций

Всюду в этом параграфе через j и k мы будет обозначать неотрицательные целые числа. При вещественных $\ell > 0$ определим пространства $C^\ell(X)$ гладких функций порядка ℓ на компактах $X \subset \mathbb{C}$. При $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ определим дифференциальные операторы $\partial_x := \partial/\partial x$ и $\partial_y := \partial/\partial y$. Определим также оператор $\partial'_{j,k} := \partial_x^j \partial_y^k$ (обозначение ∂' использовано здесь для того, чтобы отличить этот оператор от оператора $\partial_{j,k}$, который будет введен позднее и который будет активно использоваться в дальнейшем).

Для данного подмножества $E \subset \mathbb{C}$ и для данной функции $f\colon E \to \mathbb{C}$, обозначим через $\|f\|_E$ величину

$$\|f\|_E := \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

При $\delta > 0$ обозначим через $\omega_E(f, \delta)$ модуль непрерывности f на E, т.е.

$$\omega_E(f, \delta) := \sup\bigl\{|f(z_1) - f(z_2)|\colon z_1, z_2 \in E,\ |z_1 - z_2| < \delta\bigr\}.$$

При $E = \mathbb{C}$ индекс E в обозначениях $\|f\|_E$ и $\omega_E(f, \delta)$ опускается.

Пусть U — непустое открытое множество в $\mathbb{C}$. При $0 < \ell < 1$ через $Lip_\ell(U)$ обозначается пространство (комплекснозначных) функций f на U

с конечной нормой

$$\|f\|_{\ell,U} = \|f\|_U + \sup_{z\neq w\in U} \frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|^\ell}.$$

Через $Lip_0(U)$ обозначим пространство всех ограниченных на U функций с нормой $\|f\|_U$ и положим $\|f\|_{0,U} = \|f\|_U$.

Пусть $BC^\ell(U) \equiv lip_\ell(U)$ (при $0 \leqslant \ell < 1$) означает замыкание в норме $\|\cdot\|_{\ell,U}$ пространства $C^\infty(U) \cap Lip_\ell(U)$. Так, пространство $BC^0(U) = BC(U)$ — это пространство всех *непрерывных и ограниченных* на U функций.

При целых $m \geqslant 1$ через $BC^m(U)$ обозначается пространство функций на U, имеющих непрерывные ограниченные в U частные производные до порядка m включительно с нормой

$$\|f\|_{m,U} = \sum_{j+k\leqslant m} \|\partial'_{j,k} f\|_U.$$

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ и открытых U нам также потребуется полунорма

$$\|f\|'_{m,U} = \sum_{j+k=m} \|\partial'_{j,k} f\|_U.$$

Пусть теперь $\ell > 0$, $\ell \notin \mathbb{Z}_+$ и $\ell = m + \tau$, где $m = [\ell]$ — целая часть числа $[\ell]$, а $\tau \in (0,1)$. В этом случае определим пространство

$$Lip_\ell(U) := \big\{ f \in BC^m(U) \colon \partial'_{j,k} f \in Lip_\tau(U), j+k=m \big\}$$

с нормой $\|f\|_{\ell,U} = \|f\|_{m,U} + \|f\|'_{\ell,U}$, где

$$\|f\|'_{\ell,U} = \sum_{j+k=m} \sup_{\delta>0} \frac{\omega_U(\partial'_{j,k} f, \delta)}{\delta^\tau}.$$

Пространство $BC^\ell(U)$ мы определим как замыкание в $Lip_\ell(U)$ пространства функций $Lip_\ell(U) \cap C^\infty(U)$. Можно показать, что $BC^\ell(U)$ состоит из всех функций $f \in Lip_\ell(U)$, таких, что для любого компакта $K \subset U$ и для любых $j,k \in \mathbb{Z}_+$ с условием $j+k=m$ выполняется соотношение $\omega_K(\partial_{j,k} f, \delta)\delta^{-\tau} \to 0$ при $\delta \to 0$. При $U = \mathbb{C}$ индекс U в записи всех норм и модулей непрерывности опускается.

Через $C^{\ell}_{loc}(U)$ обозначается пространство функций

$$C^{\ell}_{loc}(U) = \left\{f\colon f\varphi \in BC^{\ell}(U) \text{ для всех } \varphi \in C_0^{\infty}(U)\right\},$$

где, как обычно, $C_0^{\infty}(U) = \{\varphi \in C^{\infty}(U)\colon \operatorname{Supp}(\varphi) \text{ — компакт в } U\}$.

Пусть далее X — компакт в $\mathbb{C}$. При $\ell > 0$ положим

$$J_0^{\ell}(X) = \{f\colon f \in BC^{\ell}(\mathbb{C}), f = 0 \text{ в некоторой окрестности } X\},$$

а через $J^{\ell}(X)$ обозначим замыкание $J_0^{\ell}(X)$ в $BC^{\ell}(\mathbb{C})$. При этом нетрудно показать, что

$$J^{\ell}(X) = \left\{f\colon f \in BC^{\ell}(\mathbb{C}), \partial'_{j,k} f|_X = 0 \text{ при } j + k \leqslant [\ell]\right\}.$$

Пространство $C^{\ell}(X)$ определим как фактор-пространство

$$BC^{\ell}(\mathbb{C})/J^{\ell}(X)$$

с соответствующей фактор-нормой. Точнее говоря, каждая функция f класса $BC^{\ell}(\mathbb{C})$ единственным образом определяет элемент $f_X = f + J^{\ell}(X) \in C^{\ell}(X)$ с нормой в $C^{\ell}(X)$, равной $\|f_X\|_{\ell,X} = \inf\{\|f + g\|_{\ell}\colon g \in J^{\ell}(X)\}$. Эквивалентное определение пространства $C^{\ell}(X)$ можно получить, используя вместо $\mathbb{C}$ любую фиксированную окрестность компакта X. В частности, для любой такой окрестности U и любой функции $g \in C^{\ell}_{loc}(U)$ единственным образом определяется элемент $g_X \in C^{\ell}(X)$ по формуле

$$g_X = \{f \in BC^{\ell}(\mathbb{C})\colon \partial'_{j,k}(f - g)|_X \equiv 0 \text{ при } j + k \leqslant [\ell]\}.$$

Указанные выше пространства можно определить «внутренним» способом, не выходя за пределы компакта X. Подробно эти факты, включая теорему Уитни о продолжении, изложены в [32, гл. VI] (см. также [93], а случай $\ell = 1$ будет кратко рассмотрен ниже).

Для подпространства $\mathscr{F} \subset C^{\ell}(X)$ обозначим через $\overline{\mathscr{F}}_{\ell}$ замыкание $\mathscr{F}$ в пространстве $C^{\ell}(X)$.

В завершение главы мы определим при целых значениях m пространства $C^m_w(X)$ функций класса C^m «слабого» типа и соответствующие нормы. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для m раз непрерывно дифференцируемой функции f, для целого числа k, $0 \leqslant k \leqslant m$, и для подмножества $E \subset \mathbb{C}$ определим

$$\nabla'^k f := \big(\partial'_{k,0} f, \partial'_{k-1,1} f, \ldots, \partial'_{1,k-1} f, \partial'_{0,k} f\big),$$
$$\|\nabla'^k f\|_E := \max_{0\leqslant j\leqslant k} \|\partial'_{k-j,j} f\|_E,$$
$$\omega_E(\nabla'^k f, \delta) := \max_{0\leqslant j\leqslant k} \omega_E(\partial'_{k-j,j} f, \delta).$$

Если $E = \mathbb{C}$, то индекс E, как и ранее, опускается. Кроме того, определим

$$\nabla'^m_* f := \big(f, \mathfrak{d} f, \ldots, \mathfrak{d}^m f\big).$$

Обозначим $m^* := (m+1)(m+2)/2$. Напомним, что норма $\|h\|_{X,m^*}$ элемента $h = \big(h_0, \ldots, h_{m^*}\big) \in C(X)^{m^*}$ определяется следующим образом:

$$\|h\|_{X,m^*} := \max_{0\leqslant s\leqslant m^*} \|h_s\|_X.$$

Обозначим через $C^m_w(X)$ замыкание в $C(X)^{m^*}$ подпространства

$$\left\{(\nabla'^m_* f)|_X \colon f \in C^m(\mathbb{C})\right\}.$$

Пространство $C^m_w(X)$ и есть пространство «функций» класса C^m «слабого» типа на компакте X с индуцированной нормой из пространства $C(X)^{m^*}$.

Сделаем несколько замечаний относительно пространства $C^m_w(X)$ и его нормы. Во-первых, заметим, что элемент $h = \{h_0, \ldots, h_{m^*-1}\} \in C(X)^{m^*}$ принадлежит пространству $C^m_w(X)$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in C^m(\mathbb{C})$, такая, что

$$\|(h_{(k-1)^*}, \ldots, h_{k^*-1}) - \mathfrak{d}^k f\|_X < \varepsilon$$

при $k = 0, \ldots, m$.

Пусть $s \in \{0, \ldots, m^* - 1\}$, а числа $k \in \{0, \ldots, m\}$ и $j \in \{0, \ldots, k\}$ таковы, что $s = (k-1)^* + j$. При этом $h_s = \partial'_{k-j,j} f$ в классическом смысле на X°. Следовательно, если множество X° плотно в X, то функции h_s при $s \in \{1, \ldots, m^* - 1\}$ однозначно определяются функцией h_0.

Различие между пространствами $C^m_w(X)$ и $C^m(X)$

Покажем различие между пространствами $C^m_w(X)$ и $C^m(X)$. Для упрощения технических деталей мы сделаем это в случае, когда $m = 1$. Для этого нам потребуется «внутреннее» определение пространства $C^1(X)$. Определим пространство $C^1_j(X)$ (символ «j» происходит от слова «jet» — «струя») как пространство элементов (струй) $f = \{f_0, f_1, f_2\}$, где функции f_0, f_1 и f_2 класса $C(X)$ удовлетворяют следующим условиям: существуют константа $A > 0$ и функция $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ с условиями $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$ и $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$, такие, что

$$|f_s(z)| \leqslant A, \quad s = 0{,}1{,}2,$$

и

$$|f_0(z') - f_0(z) - f_1(z)(x' - x) - f_2(z)(y' - y)| \leqslant A\rho\omega(\rho) \tag{2.6}$$

для всех $z = x + iy \in X$ и $z' = x' + iy' \in X$, при $\rho = |z - z'|$. Нормой элемента f в $C^1_j(X)$ является нижняя грань среди всех таких A (возможно для различных ω). В силу уже упоминавшейся теоремы Уитни [93], пространства $C^1(X)$ и $C^1_j(X)$ изоморфны (элементу $f \in C^1(X)$ с представителем $F \in C^1(\mathbb{C})$ соответствует струя $\{F, \partial_x F, \partial_y F\}$).

Пусть теперь элемент $h = (h_1, h_2, h_3) \in C(X)^3$ принадлежит пространству $C^1_w(X)$. В этот случае C^1_w-норма элемента h совпадает с его нормой в пространстве $C(X)^3$. В этом случае условие (2.6) из определения пространства $C^1_{jet}(X)$ и его нормы как бы не учитывается.

Рассмотрим компакт X вида

$$X := (0{,}0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k}{,}0\Big) \subset \mathbb{C}$$

и приведем пример функции, принадлежащей пространству $C^1_w(X)$ и не принадлежащей пространству $C^1_{jet}(X)$. Для этого фиксируем натуральное число $d \geqslant 2$ и определим элемент $h := (h_0, h_1, h_2)|_X$, такой, что $h_0(z) = \sqrt[d]{x}$ (где, как обычно, $x = \operatorname{Re} z$), а $h_1 \equiv h_2 \equiv 0$. Определим последовательность функций $(f_s)_{s=1}^{\infty}$ следующим образом. Положим $f_s(z) = 0$ при

$$z \in \Big[-\infty, \frac{1}{s+1} + \frac{1}{10(s+1)^2}\Big]_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2},$$

а при $k \leqslant s$ и

$$z \in \Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{10k^2}, \frac{1}{k} + \frac{1}{10k^2}\Big]_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2}$$

положим $f_s(z) = \sqrt[d]{1/k}$. Продолжим f_s до функции класса $C^1(\mathbb{C})$. Легко видеть, что

$$\big(f_s|_X, \partial_x f_s|_X, \partial_y f_s|_X\big) \rightrightarrows_X \big(h_0, 0, 0\big)$$

при $s \to \infty$. Ясно также, что $h \notin C^1_{jet}(X)$, так как $h_0 \notin Lip_\tau(X)$ при $\tau > d^{-1}$.

Дополнительные обозначения

Введем дополнительные обозначения, связанные с рассмотренными в этом параграфе пространствами функций, которые будут часто использоваться в дальнейшем. Наряду с уже определенным оператором $\overline{\partial}$ нам потребуется дифференциальный оператор

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Кроме того, для целых положительных чисел s и t определим дифференциальные операторы $\partial_{s,t} := \overline{\partial}^s \partial^t$. Эти операторы во многих случаях оказываются более удобными, чем введенные выше операторы $\partial'_{s,t}$. Для достаточно гладкой функции f и для $k \in \mathbb{Z}_+$ определим выражение $\nabla^k f$ следующим образом:

$$\nabla^k f := (\partial_{0,k} f, \partial_{1,k-1} f, \ldots, \partial_{k-1,1} f, \partial_{k,0} f).$$

Как и ранее, для данного множества $E \subset \mathbb{C}$ положим

$$\|\nabla^k f\|_E := \max_{0 \leqslant s \leqslant k} \|\partial_{s,k-s} f\|_E$$

и, при $\delta > 0$,

$$\omega_E(\nabla^k f, \delta) := \max_{0 \leqslant s \leqslant k} \omega_E(\partial_{s,k-s} f, \delta).$$

В случае $E = \mathbb{C}$ индекс E в двух последних обозначениях опускается.

Задачи аппроксимации функций полианалитическими многочленами в пространствах гладких функций

Пусть $\ell > 0$ — заданное вещественной число. Задачи аппроксимации полианалитическими многочленами для классов функций для C^ℓ-норм ставятся аналогично тому, как это было сделано в равномерном случае. Определим пространства

$$A_n^\ell(X) := C^\ell(X) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ) \qquad \text{и} \qquad P_n^\ell(X) := \overline{\{p_X : p \in \mathfrak{P}_n\}}_\ell,$$

где, как и ранее, $p_X = p + J^\ell(X)$ — элемент пространства $C^\ell(X)$, определенный многочленом p. Заметим, что определение пространства $A_n^\ell(X)$ корректно, так как значения всех представителей класса $f_X = f + J^\ell(X)$ совпадают на X°. При этом $P_n^\ell(X) \subset A_n^\ell(X)$ и возникает задача, аналогичная задаче 1:

Задача 4. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$, при которых выполняется равенство*

$$A_n^\ell(X) = P_n^\ell(X). \tag{2.7}$$

Для пространств $A_1^\ell(X)$ и $P_1^\ell(X)$ в дальнейшем будут использованы более традиционные обозначения — $A^\ell(X)$ и $P^\ell(X)$ соответственно.

Несмотря на то что задача 4 содержит в себе задачу 1 (в случае $\ell = 0$), нам будет удобно разделить эти задачи и считать, что задача 4 поставлена только при $\ell > 0$. Таким образом, мы выделяем задачу о равномерной аппроксимации, которая является центральной для данной книги.

Определим теперь «слабые» версии пространств $A_n^m(X)$ и $P_n^m(X)$ для целых положительных чисел m. По аналогии с равномерным случаем, для подпространства $\mathscr{F} \subset C(X)^k$, $k \in \mathbb{N}$, символом $\overline{\mathscr{F}}$ будет обозначаться замыкание $\mathscr{F}$ в $C(X)^k$. Определим пространства $A_{w,n}^m(X)$ и $P_{w,n}^m(X)$ следующим образом:

$$A_{w,n}^m(X) = \overline{\{(\nabla_*'^m f)_{|X} : f \in C^m(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ)\}},$$
$$P_{w,n}^m(X) = \overline{\{(\nabla_*'^m p)_{|X} : p \in \mathfrak{P}_n\}},$$

где m^*, как и раньше, равно $(m+1)(m+2)/2$, а замыкание рассматривается в пространстве $C(X)^{m^*}$.

Заметим, что если для компакта $X \subset \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$A_{w,n}^m(X) = P_{w,n}^m(X),$$

то это в точности означает, что всякая функция f класса C^m в окрестности компакта X, удовлетворяющая условию $f \in \mathcal{O}_n(X^\circ)$, может быть приближена последовательностью n-аналитических многочленов $(p_k)_{k=1}^\infty$ так, что $\partial_{s,t} p_k \rightrightarrows_X \partial_{s,t} f$ при $k \to \infty$ для всех $s, t \in \mathbb{Z}_+$ с условием $s + t \leqslant m$.

Так же, как и задача 1, задача 4 в голоморфном случае полностью решена. Мы завершим эту главу формулировками соответствующих результатов.

Нам потребуется понятие d-мерного, при $0 < d \leqslant 2$, обхвата по Хаусдорфу $M^d(E)$ ограниченного множества $E \subset \mathbb{C}$. По определению, величина $M^d(E)$ равна

$$M^d(E) = \inf \sum_j r_j^d,$$

где нижняя грань берется по всем (не более чем счетным) покрытиям $\{D_j\}$ множества E кругами с радиусами r_j. Кроме того, нам потребуется нижний обхват $M_*^d(E)$ по Хаусдорфу, который определяется следующим образом:

$$M_*^d(E) = \sup_h \inf_{\{D_j\}} \sum_j h(r_j),$$

где нижняя грань снова берется по всем (не более чем счетным) покрытиям множества E кругами D_j с радиусами r_j, а верхняя грань — по всем неотрицательным непрерывным функциями h на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям $h(t) \leqslant t^d$ и $h(t)t^{-d} \to 0$ при $t \to 0$. Заметим, что при $0 < d < 2$ для любого ограниченного открытого множества $E \subset \mathbb{C}$ верны неравенства

$$A^{-1} M^d(E) \leqslant M_*^d(E) \leqslant A M^d(E),$$

где $A > 1$ — абсолютная константа.

Теорема XVI. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а $\ell \in (0,1)$. Для выполнения равенства $A^\ell(x) = P^\ell(X)$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два следующих условия:*

1. *существуют постоянные $A_0 > 0$ и $\lambda \geqslant 1$, такие, что для любого круга $D(a,r)$ справедлива оценка*

$$M_*^{1+\ell}(D(a,r) \setminus X^\circ) \leqslant A_0 M^{1+\ell}(D(a,\lambda r) \setminus X);$$

2. *множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Этот критерий вытекает из критерия А. Г. О'Фаррелла [68] C^ℓ-приближаемости функций рациональными функциями в случае $\ell \in (0{,}1)$. Согласно критерию О'Фаррелла, условие (1) теоремы XVI необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялось равенство

$$A^\ell(X) = R^\ell(X) := \overline{\{g_X \colon g \in \mathfrak{R}_1(X)\}}_\ell,$$

где g_X — это элемент пространства $C^\ell(X)$, определенный (рациональной) функцией g. Этот результат составляет основное содержание теоремы XVI, после его применения остается воспользоваться методом Рунге «движения» полюсов.

Разумеется, определение пространства $R^\ell(X)$, данное выше, сохраняется и в случае $\ell \geqslant 1$. В этом случае критерий C^ℓ-приближаемости функций многочленами комплексного переменного имеет вид:

Теорема XVII. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а $m \geqslant 1$. Для выполнения равенства $A^\ell(x) = P^\ell(X)$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два следующих условия:*

1. *компакт X такой, что $X = \overline{X^\circ}$;*
2. *множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Как и в случае $\ell \in (0{,}1)$, первое условие в этой теореме является необходимым и достаточным условием того, что $A^\ell(X) = R^\ell(X)$. Этот результат при целых значениях ℓ доказан Д. Вердерой [86], а при нецелых значениях ℓ — А. Г. О'Фарреллом [69].

Отметим, что упомянутые результаты об аппроксимации функций многочленами комплексного переменного приводятся лишь для полноты изложения. Обсуждения их доказательств выходит за рамки книги. Заинтересованный читатель может найти его в цитированной выше литературе, а также в литературе, приведенной в обзорной статье [22].

Глава 3

Аппроксимация в пространствах гладких функций

В этой главе мы кратко обсудим основные результаты, полученные в задаче о C^ℓ-приближаемости функций полианалитическими многочленами порядка $n \geqslant 2$ при вещественных $\ell > 0$. Сразу отметим, что задача 4 полностью решена лишь в случае $\ell \geqslant n-1$, а при $0 < \ell < n-1$ она требует дальнейшего изучения. Кроме того, мы приведем ряд достаточных условий равномерной и C^m-приближаемости функций полианалитическими рациональными функциями при целых $m < n$, которые потребуются в дальнейшем.

Начнем со случая $\ell = n-1$, когда имеет место критерий приближаемости, аналогичный теореме XII (теореме Мергеляна) и содержащий эту теорему в случае $n = 1$:

Теорема 5. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а n — натуральное число. Равенство $A_n^{n-1}(X) = P_n^{n-1}(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Эта теорема и схема ее доказательства приведены в работе [22]. Сейчас мы сделаем несколько замечаний относительно теоремы 5, а ниже приведем доказательство варианта этой теоремы для «слабой» C^{n-1}-нормы.

Пусть, как и раньше, X — некоторый компакт в $\mathbb{C}$. Нам потребуется пространство

$$R_n^\ell(X) := \overline{\{g_X : g \in \mathfrak{R}_n(X)\}}_\ell,$$

где, как и раньше, g_X — это элемент пространства $C^\ell(X)$, определенный функцией g. Как обычно, мы будем полагать, что

$$R_n^0(X) := R_n(X),$$

где $R_n(X)$ — это пространство всех функций, которые могут быть равномерно на X приближены n-аналитическими рациональными функциями с полюсами, лежащими вне X. Напомним, что через $\mathfrak{R}_n(E)$ обозначено пространство, состоящее из всех n-аналитических функций, голоморфные компоненты которых являются рациональными функциями комплексного переменного с полюсами, лежащими вне данного множества $E \subset \mathbb{C}$.

Пусть Φ_n — это фундаментальное решение для оператора $\overline{\partial}^n$. Напомним, что

$$\Phi_n(z) = \frac{\overline{z}^{n-1}}{(n-1)!\pi z}. \tag{3.1}$$

Определим n-аналитическую C^{n-1}-емкость $\alpha_{n,n-1}(\cdot)$. Для ограниченного множества $E \subset \mathbb{C}$ положим

$$\alpha_{n,n-1}(E) = \sup\langle \overline{\partial}^n f \mid 1\rangle,$$

где верхняя грань берется по всем функциям f класса $C^{n-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ с условиями $\|f\|'_{n-1} \leqslant 1$, $\mathrm{Supp}(\overline{\partial}^n f) \subset E$ (т.е. функция f является n-аналитической вне множества E) и $f = \Phi_n * \overline{\partial}^n f$.

Заметим, что емкость $\alpha_{n,n-1}(\cdot)$ и непрерывная аналитическая емкость $\alpha(\cdot)$ сравнимы, т.е. существует такая константа $A > 0$, что для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$A^{-1}\alpha(X) \leqslant \alpha_{n,n-1}(X) \leqslant A\alpha(X).$$

В самом деле, легко видеть, что $\alpha(X)_{n,n-1} \leqslant \alpha(X)$. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим емкость $\alpha^+_{n,n-1}(\cdot)$ определение которой получается из определения емкости $\alpha_{n,n-1}(\cdot)$, в котором верхняя грань берется только по тем из рассматриваемых функций f, для которых распределение $\overline{\partial}^n f$ является положительной мерой. Можно показать, что эта емкость сравнима с емкостью $\alpha_+(\cdot)$, которая определяется следующим образом:

$$\alpha_+(E) = \sup \mu(E),$$

где верхняя грань берется по всем положительным мерам Радона с носителем на E, таким, что преобразование Коши $\widehat{\mu}$ меры μ непрерывно в $\mathbb{C}$ (т.е. совпадает почти всюду с непрерывной функцией) и $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leqslant 1$. Остается воспользоваться результатом Х. Толсы [83] о том, что емкости $\alpha(\cdot)$ и $\alpha_+(\cdot)$ сравнимы.

Заметим также, что емкость $\alpha_{n,n-1}(\cdot)$ сравнима также с C^1-гармонической емкостью $\kappa(\cdot)$, введенной П. В. Парамоновым в [27].

В терминах емкости $\alpha_{n,n-1}(\cdot)$ может быть сформулирован критерий C^{n-1}-приближаемости функций n-аналитическими функциями на плоских компактах: *Равенство $A_n^{n-1}(X) = R_n^{n-1}(X)$ имеет место в том и только том случае, когда для всякой ограниченной области Ω в $\mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\alpha_{n,n-1}(\Omega \setminus X^\circ) = \alpha_{n,n-1}(\Omega \setminus X).$$

Мы не приводим здесь доказательство этого утверждения, так как оно существенно выходит за рамки обсуждаемой тематики как технически, так и идейно. Заметим, однако, что это утверждение может быть доказано аналогично тому, как в работе [27] доказывается теорема 2 (критерий C^1-гармонической аппроксимации в терминах κ-емкости).

Как уже отмечалось выше, необходимость условия связности дополнения к компакту X в теореме 5 очевидна. Основным моментом в доказательстве достаточности этого утверждения является тот факт, что из цитированного выше результата Толсы о сравнимости емкостей $\alpha(\cdot)$ и $\alpha_+(\cdot)$ вытекает, что для любой ограниченной области Ω в $\mathbb{C}$ величина $\alpha_{n,n-1}(\Omega)$ сравнима с $\operatorname{diam}(\Omega)$.

Перейдем к задаче 4 в случае $n \geqslant 2$ и $\ell \in (n-1, n)$. В этом случае имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы XVI в голоморфном случае:

Теорема XVIII. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а $n \geqslant 2$ и $\ell \in (n-1, n)$. Для выполнения равенства $A_n^\ell(x) = P_n^\ell(X)$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два следующих условия:*

1. *существуют постоянные $A_0 > 0$ и $\lambda \geqslant 1$, такие, что для любого круга $D(a,r)$ справедлива оценка*

$$M_*^{\ell+2-n}(D(a,r) \setminus X^\circ) \leqslant A_0 M^{\ell+2-n}(D(a,\lambda r) \setminus X);$$

2. *множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Как и случае соответствующего критерия приближаемости для голоморфных функций основное содержание приведенной теоремы — это результат Д. Вердеры [87], согласно которому условие (1) теоремы XVIII необходимо и достаточно для выполнения равенства $A_n^\ell(X) = R_n^\ell(X)$ в рассматриваемом случае.

И, наконец, при $\ell \geqslant n$ имеет место следующий критерий C^ℓ-приближаемости функций n-аналитическими многочленами:

Теорема XIX. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а $\ell \geqslant n$. Тогда равенство $A_n^\ell(X) = P_n^\ell(X)$ имеет место в том и только том случае, когда $X = \overline{X^\circ}$, а множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Этот критерий вытекает из результатов работы [87], где, в частности, доказан следующий критерий приближаемости: при $\ell \geqslant n$ равенство $A_n^\ell(X) = R_n^\ell(X)$ справедливо в том и только том случае, когда $X = \overline{X^\circ}$.

Замечание. Как видно из приведенных в этой и в предыдущей главе результатов, решения задач 1 и 4 в голоморфном случае и задачи 4 в n-аналитическом случае при $n \geqslant 2$ и $\ell \geqslant n-1$ возникали на основе решений подходящих задач об аппроксимации n-аналитическими рациональными функциями. Все приведенные выше критерии приближаемости функций полианалитическими многочленами в указанных задачах устроены следующем образом: к условиям, необходимым и достаточным для возможности аппроксимации n-аналитическими рациональными функциями, добавляется условие связности дополнения. При этом соответствующие условия рациональной приближаемости выражаются в терминах подходящих топологических (теорема Мергеляна, теоремы XVII и XIX), метрических (теоремы XVI и XVIII) и/или емкостных характеристик компакта X, на котором рассматривается аппроксимация. Случай теоремы Мергеляна (и ее аналога для n-аналитических функций — теоремы 5) выделяется тем, что условие связности дополнения «поглощает» соответствующее условие рациональной аппроксимации.

Эти наблюдения, теорема XIV (согласно которой равномерные приближения n-аналитическими рациональными функциями при $n \geqslant 2$ возможны на любом компакте $X \subset \mathbb{C}$) и результаты предложения 3 (см. также сделанные после доказательства этого предложения замечания) показывают, что задача 1 о *равномерной* приближаемости функций n-аналитическими многочленами существенно отличается от всех остальных аппроксимационных задач, обсуждавшихся выше. В этой задаче возникают условия приближаемости совершенно новой природы, не появлявшиеся ранее в задачах аппроксимации функций многочленами комплексного переменного и гармоническими многочленами, а также полиномиальными решениями общих однородных эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами в пространствах непрерывных, гладких и суммируемых функций на плоских компактах.

Теорема 5 для «слабой» C^{n-1}-нормы

В завершении этой главы мы приведем доказательство варианта теоремы 5 для «слабого» варианта C^{n-1}-нормы — для нормы пространства $C^{n-1}_w(X)$. Точнее говоря, мы докажем следующее утверждение (см. [62]):

Теорема 6. *Следующие условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$ эквивалентны:*

(a) *для каждой функции $f \in C^{n-1}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ)$ существует последовательность n-аналитических многочленов $(p_k)_{k=1}^{\infty}$, такая, что*

$$\partial_{s,t} p_k \rightrightarrows_X \partial_{s,t} f$$

при $k \to \infty$ для всех $s, t \in \mathbb{Z}_+$ с условием $s + t \leqslant n - 1$;

(b) *множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется определенная подготовительная работа. Мы получим ряд достаточных условий равномерной и C^m-приближаемости (при целых $m < n$) функций полианалитическими рациональными функциями, которые будут использоваться в последующих рассуждениях.

Введем две метрические характеристики компакта $X \subset \mathbb{C}$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Во-первых, обозначим через $d_c(X)$ нижнюю грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Во-вторых, для $z \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ определим величину $d(z, r, X)$, равную наименьшей верхней грани диаметров всех связных компонент множества $D(z, r) \setminus X$, и положим

$$\theta(X) := \inf\left\{\frac{d(z, r, X)}{r} \colon z \in \partial X,\ r > 0\right\}.$$

Установим следующее утверждение:

Теорема 7. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, для которого выполнено одно из следующих условий:*

a) $\theta(X) > 0$*;*

b) $d_c(X) > 0$*;*

c) *каждая граничная точка компакта* X *является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества* $\mathbb{C} \setminus X$*;*

d) X *является компактом Каратеодори;*

e) *множество* $\mathbb{C} \setminus X$ *связно.*

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ *— целое число с условием* $m < n$*. Тогда для любой функции* f *класса* $C^m(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ)$ *найдется последовательность функций* $(f_k)_{k=1}^\infty$*,* $f_k \in \mathcal{O}_n(X)$*, такая, что*

$$\partial_{s,t} f_k \rightrightarrows_X \partial_{s,t} f, \text{ при } k \to \infty, \text{ при всех } s, t \in \mathbb{Z}_+, \ s + t \leqslant m. \tag{3.2}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы мы проведем в предположении, что выполнено условие a). Приведенное ниже доказательство (после незначительных несложных изменений) проходит и для компактов, удовлетворяющих условиям b)–e), которые приведены для полноты изложения и для удобства последующих ссылок.

Нам потребуются некоторые свойства полианалитических функций, дополнительные к тем, которые были изложены в первой главе, и которые могут быть найдены, например, в [40, гл. 1] и [81, гл. 2].

Рассмотрим открытый круг $D = D(a, r)$ в $\mathbb{C}$. Пусть функция $g \in \mathcal{O}_n(D)$, тогда

$$g(w) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\partial_{s,t} g(a)}{s!t!} (\overline{w} - \overline{a})^s (w - a)^t, \tag{3.3}$$

при $w \in D$, где соответствующий ряд сходится в $C^\infty(D)$. Более того, если T — это распределение с компактным носителем в D, то для функции $f := \Phi_n * T$ и для z, таких, что $|z - a| > r$, имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{\infty} c_t^s(f, a) \partial_{s,t} \Phi_n(z - a), \tag{3.4}$$

где ряд сходится в пространстве $C^\infty(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$, а

$$c_t^s(f, a) = \frac{(-1)^{n-s-t}}{s!t!} \langle T(w) \mid (\overline{w} - \overline{a})^s (w - a)^t \rangle.$$

Для функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ определим *локализационный оператор Витушкина* (см., например, [8], [87, p. 168] или [29, p. 127])

$$V_\varphi\colon (C_0^\infty(\mathbb{C}))' \to (C_0^\infty(\mathbb{C}))'$$

по формуле

$$V_\varphi f := \Phi_n * (\varphi\overline{\partial}^n f).$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы для компактов, удовлетворяющих условию а). Пусть $\theta := \theta(X)$, $\theta > 0$, а $q := 2\theta^{-1} + 2$. В дальнейшем мы будем обозначать символами $A, A_0, A_1, \ldots$ положительные константы, зависящие только от n и θ, которые могут принимать различные значения в различных соотношениях. Без ограничения общности мы можем считать, что функция f имеет компактный носитель.

Пусть m — данное целое число, $m < n$. Возьмем функцию $f \in C_0^m(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ)$ и положим

$$\omega(\delta) := \omega(\nabla^m f, \delta), \quad \delta > 0.$$

Выберем число $R > 2$, такое, что $\mathrm{Supp}(f) \cup X \subset D(0, R/2)$.

Возьмем $\delta \in (0{,}1)$ и рассмотрим стандартное δ-разбиение единицы: для каждого 2-индекса $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ мы определим точку $a_j = j\delta \in \mathbb{C}$ (круги $D(a_j, \delta)$ в этом случае покрывают все $\mathbb{C}$, причем каждая точка $z \in \mathbb{C}$ накрывается не более чем A_0 кругами) и выберем функции $\varphi_j \in C_0^\infty(D(a_j, \delta))$ так, чтобы выполнялись условия

i) $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$;
ii) $\|\nabla^k \varphi_j\| \leqslant A\delta^{-k}$ при $k = 0{,}1, \ldots, n$ и
iii) $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1$.

Для всех 2-индексов $j \in \mathbb{Z}^2$ определим функции

$$f_j := \Phi_n * (\varphi_j \overline{\partial}^n f).$$

Докажем следующую техническую лемму, из которой будут следовать нужные нам свойства функций f_j, $j \in \mathbb{Z}^2$ (напомним, что $m < n$ — целое число):

Лемма 8. *Пусть $f \in C_0^m(\mathbb{C})$. Для любых $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, и для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D(a, \delta))$ функция $F := V_\varphi f$ (локализация функции f при помощи φ) обладает следующими свойствами.*

1. $F \in C^m_{loc}(\mathbb{C})$ *и* $\overline{\partial}^n F = 0$ *на множестве* $\mathbb{C} \setminus \big(\operatorname{Supp}(\overline{\partial}^n f) \cap \operatorname{Supp}(\varphi)\big)$.

2. $\|\partial_{s,t} F\|_{D(a,q\delta)} \leqslant A\delta^{m+1}\omega(\nabla^m f, \delta)\|\nabla^{s+t+1}\varphi\|$ *при* $s, t \in \mathbb{Z}_+$, $s + t \leqslant m$.

3. $|c^s_t(F, a)| \leqslant \dfrac{A\delta^{s+t+2}\omega(\nabla^m f, \delta)\|\nabla^{n-m}\varphi\|}{s!t!}$ *при всех* $s, t \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant n - 1$.

Доказательство. Мы докажем эту лемму в предположении, что $f \in C^\infty_0(\mathbb{C})$. Общий случай получается (стандартной) регуляризацией (все оценки содержат множитель $\omega(\nabla^m f, \delta)$, оцениваемый сверху величиной $A\|\nabla^m f\|$).

По определению функции F получаем (все производные в угловых скобках $\langle\cdot|\cdot\rangle$ берутся по переменному w):

$$F(z) = \langle \varPhi_n(w - z) \,|\, \varphi(w)\overline{\partial}^n f(w)\rangle = \langle \varPhi_n(w - z) \,|\, \varphi(w)\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle,$$

где

$$f_a(w) := f(w) - \sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial_{s,k-s} f(a)}{s!(k-s)!}(\overline{w} - \overline{a})^s (w - a)^{k-s}.$$

Возьмем $s, t \in \mathbb{Z}_+$ так, что $s + t \leqslant m$. Тогда

$$\begin{aligned} |\partial_{s,t} F(z)| &= |\langle \partial_{s,t}\varPhi_n(w - z) \,|\, \varphi(w)\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle| \\ &= |\langle \overline{\partial}^{n-m}(\varphi(w)\partial_{s,t}\varPhi_n(w - z)) \,|\, \overline{\partial}^m f_a(w)\rangle|. \end{aligned}$$

Всюду в дальнейшем при доказательстве этой леммы мы будем считать, что $m = n - 1$. Общий случай рассматривается аналогично. Минимальные необходимые изменения связаны с заменой однократного дифференцирования произведений вида $\varphi(w)\partial_{s,t}\varPhi_n(w - z)$ и $\varphi(w)(\overline{w} - \overline{a})^s$ при помощи оператора $\overline{\partial}$ на соответствующее многократное дифференцирование при помощи оператора $\overline{\partial}^{n-m}$.

Итак, пусть $m = n - 1$ и $s + t \leqslant n - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\partial_{s,t} F(z)| &= |\langle \partial_{s,t}\varPhi_n(w - z) \,|\, \varphi(w)\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle| \\ &= |\langle \overline{\partial}(\varphi(w)\partial_{s,t}\varPhi_n(w - z)) \,|\, \overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle| \\ &= |\langle \overline{\partial}\varphi(w)\partial_{s,t}\varPhi_n(w - z) + \varphi(w)\partial_{s+1,t}\varPhi_n(w - z) \,|\, \overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle| \\ &\leqslant |\langle \overline{\partial}\varphi(w)\partial_{s,t}\varPhi_n(w - z) \,|\, \overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle| + \\ &\qquad\qquad + |\langle \varphi(w)\partial_{s+1,t}\varPhi_n(w - z) \,|\, \overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Так как $f \in C^\infty_0(\mathbb{C})$, то $F \in C^\infty_{loc}(\mathbb{C})$. Из того, что $\varPhi_n$ — это фундаментальное решение для оператора $\overline{\partial}^n$, и из свойств свертки находим, что $\overline{\partial}^n F = \varphi\overline{\partial}^n f$, откуда вытекает утверждение 1. Если $s+t \leqslant n-2$, то все члены в последнем выражении для $\partial_{s,t}F$ регулярны и их можно непосредственно оценить, интегрируя в полярных координатах с центром в точке z. Таким образом, при s,t с условием $s+t \leqslant n-2$ мы получаем оценку

$$\|\partial_{s,t}F\|_{D(a,q\delta)} \leqslant A_1\omega(\nabla^{n-1}f,\delta)\|\nabla\varphi\|\delta^{n-s-t} + A_2\omega(\nabla^{n-1}f,\delta)\|\varphi\|\delta^{n-s-t-1},$$

откуда вытекает, что в случае $s+t \leqslant n-2$ утверждение 2 справедливо так как при $l = 0,1,\ldots,r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, справедливы оценки $\|\nabla^l\varphi\| \leqslant A\delta^{r+1-l}\|\nabla^{r+1}\varphi\|$.

Пусть теперь s,t таковы, что $s+t = n-1$. Так как

$$\varphi(z)\partial_{s,t}\Phi_n(w-z) = \partial^t(\varphi(w)\overline{\partial}^s\Phi_n(w-z)) - \sum_{l=0}^{t-1} \mathrm{C}_t^{\,l}\,\partial_{s,l}\Phi_n(w-z)\partial^{t-l}\varphi(w),$$

где $\mathrm{C}_t^{\,l}$ — это, как обычно, биномиальный коэффициент, то

$$\begin{aligned} |\partial_{s,t}F(z)| \leqslant |\langle\partial^t(\varphi(w)\overline{\partial}^s\Phi_n(w-z))\,|\,\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle| +& \\ + \sum_{l=0}^{t-1}\mathrm{C}_t^{\,l}\,|\langle\partial_{s,l}\Phi_n(w-z)\partial^{t-l}\varphi(w)\,|\,\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Первое слагаемое в (3.6) равно

$$|\langle\partial^t(\varphi(w)\overline{\partial}^s\Phi_n(w-z))\,|\,\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle| = |\langle\overline{\partial}^{n-s}(\varphi(w)\overline{\partial}^s\Phi_n(w-z))\,|\,\partial_{s,t}f_a(w)\rangle|,$$

а величина, стоящая в правой части этого равенства, оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |\langle\overline{\partial}^{n-s}(\varphi(w)\overline{\partial}^s\Phi_n(w-z))\,|\,\partial_{s,t}f_a(w)\rangle| \leqslant& \\ \leqslant \varphi(z)\big(\partial_{s,t}f(z) - \partial_{s,t}f(a)\big) +& \\ + \sum_{l=1}^{n-s}\mathrm{C}_{n-s}^{\,l}\,|\langle\overline{\partial}^l\varphi(w)\overline{\partial}^{n-l}\Phi_n(w-z)\,|\,\partial_{s,t}f_a(w)\rangle|.& \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{z\in D(a,q\delta)} |\langle\partial^t(\varphi(w)\overline{\partial}^s\Phi_n(w-z))\,|\,\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle| \leqslant A_0\omega(\nabla^{n-1}f,\delta)\|\varphi\| +& \\ + \sum_{l=1}^{n-s}\mathrm{C}_{n-s}^{\,l}\,A_l\omega(\nabla^{n-1}f,\delta)\|\nabla^l\varphi\|\delta^l \leqslant A\delta^{s+t+1}\|\nabla^{s+t+1}\varphi\|\omega(\nabla^{n-1}f,\delta).& \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить оставшиеся слагаемые в (3.6), заметим, что

$$
\begin{aligned}
&|\langle \partial_{s,l}\Phi_n(w-z)\partial^{t-l}\varphi(w)\,|\,\overline{\partial}^n f_a(w)\rangle| \leqslant \\
&\qquad\leqslant |\langle \partial_{s+1,l}\Phi_n(w-z)\partial_{0,t-l}\varphi(w)\,|\,\overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle| + \\
&\qquad\qquad + |\langle \partial_{s,l}\Phi_n(w-z)\partial_{1,t-l}\varphi(w)\,|\,\overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle|.
\end{aligned}
$$

Так как $s+l \leqslant n-2$ для любого целого $l = 1,\ldots,t-1$, то оба слагаемых в последнем выражении оцениваются аналогично тому, как оцениваются выражения $|\langle \overline{\partial}\varphi(w)\partial_{s,t}\Phi_n(w-z)\,|\,\overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle|$ и $|\langle \varphi(w)\partial_{s+1,t}\Phi_n(w-z)\,|\,\overline{\partial}^{n-1} f_a(w)\rangle|$ в (3.5). Таким образом, второе утверждение полностью доказано.

Нам остается проверить справедливость утверждения 3.

Пусть $s,t \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant n-1$. Несложно увидеть, что

$$
\begin{aligned}
&|c_t^s(F,a)|s!t! = |\langle \varphi(w)\overline{\partial}^n f(w)|(\overline{w}-\overline{a})^s(w-a)^t\rangle| = \\
&\qquad |\langle \overline{\partial}^{n-1} f_a(w)|\overline{\partial}(\varphi(\overline{w}-\overline{a})^s(w-a)^t)\rangle| \leqslant A\delta^{s+t+2}\omega(\nabla^{n-1}f,\delta)\|\nabla\varphi\|.
\end{aligned}
$$

Лемма полностью доказана. □

Из только что доказанной леммы и из свойств функций φ_j, образующих разбиение единицы, вытекает, что функции f_j обладают следующими свойствами:

i) $f_j \in C^m_{loc}(\mathbb{C})$;

ii) f_j является n-аналитической на X° и вне круга $D(a_j,\delta)$;

iii) справедливы оценки:

$$
\|\partial_{s,t} f_j\|_{D(a_j,q\delta)} \leqslant A\delta^{m-s-t}\omega(\delta) \tag{3.7}
$$

при $s,t \in \mathbb{Z}_+$, с условием $s+t \leqslant m$, и

$$
|c_t^s(f_j,a_j)| \leqslant \frac{A\delta^{s+t+m+2-n}\omega(\delta)}{s!t!} \tag{3.8}
$$

при $s = 0{,}1,\ldots,n-1$ и $t \in \mathbb{Z}_+$.

Кроме того,

$$
f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} f_j(z),
$$

причем последняя сумма конечна, так как $f_j \equiv 0$ при условии

$$\mathrm{Supp}(\varphi_j) \cap \mathrm{Supp}(\overline{\partial}^n f) = \varnothing.$$

Итак, функция f представлена в виде суммы функций f_j, особенности которых локализованы в кругах $D(a_j, \delta)$, и, для того чтобы приблизить функцию f требуемым образом, нам достаточно приблизить каждую из функций f_j с надлежащей точностью. Заметим, что если $D(a_j, \delta) \subseteq X^\circ$, то $f_j \equiv 0$, а если $D(a_j, \delta) \cap X = \varnothing$, то функция f_j является n-аналитической в окрестности компакта X. Таким образом, нам надо приближать только функции f_j с индексами, принадлежащими множеству

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2\colon D(a_j, \delta) \cap \partial X \neq \varnothing\}.$$

Перейдем к построению соответствующих приближающих функций. Будем считать, что δ выбрано настолько малым, что для всех индексов $j \in J$ справедливо включение $D(a_j, 2\delta\theta^{-1}) \subset D(0, R)$. По определению величины $\theta = \theta(X)$, для каждого индекса $j \in J$ существует точка $a_j^* \in D(a_j, 2\delta\theta^{-1}) \setminus X$ и жорданова кривая $\gamma_j \subset \overline{D(a_j^*, \delta)} \setminus X$ с началом в точке a_j^* и с концом на окружности $\partial D(a_j^*, \delta)$.

Замечание. Если компакт X удовлетворяет условиям b)–e), то вместо круга $D(a_j, 2\delta\theta^{-1})$ надо взять круг $D(a_j, 2\delta)$ и положить $q = 4$.

При $j \notin J$ положим $a_j^* = a_j$. Для функции f_j справедливо разложение

$$f_j(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{\infty} c_t^s(f_j, a_j^*) \partial_{s,t} \Phi_n(z - a_j^*),$$

сходящееся в метрике пространства $C^\infty(|z - a_j^*| > q'\delta)$ при $q' = q - 1$. Из (3.8) вытекает, что справедливы следующие оценки коэффициентов этого разложения:

$$|c_t^s(f_j, a_j^*)| \leqslant \frac{A\delta^{s+t+m+2-n}\omega(\delta)}{s!t!}. \tag{3.9}$$

Следующий шаг доказательства состоит в построении специальной вспомогательной функции. Пусть γ — произвольная жорданова кривая, лежащая в замкнутом круге $\overline{D(0, \delta)}$, с началом в начале координат и с концом в точке b, $|b| = \delta$. Положим $b_1 = b/\delta$ и определим функцию

$$h(z) = c_0\big(z^n (z - b_1)^n \sqrt{z(z - b_1)} - p_0(z)\big),$$

где голоморфная ветвь корня (рассматриваемая вне кривой $\delta^{-1}\gamma$), константа c_0 и многочлен p_0 подобраны так, что

$$\lim_{z\to\infty} zh(z) = 1.$$

Например, при $n = 1$ имеем $c_0 = 128/(3b_1^4)$ и

$$p_0(z) = z^3 - \frac{3b_1}{2}z^2 + \frac{3b_1^2}{8}z + \frac{b_1^3}{16}.$$

Далее, определим нужную нам специальную функцию g_γ следующим образом:

$$g_\gamma(z) := \frac{\overline{z}^{n-1}h(z/\delta)}{\pi\delta(n-1)!}.$$

Для функции g_γ справедливы оценки

$$\|\partial_{s,t}g_\gamma\|_{D(0,q\delta)\setminus\gamma} \leqslant A\delta^{n-2-s-t}$$

при $s = 0{,}1,\ldots,n-1$ и $t = 0{,}1,\ldots,n$. Кроме того, при $|z| > \delta$ имеет место разложение

$$g_\gamma(z) = \sum_{t=0}^{\infty} d_t \partial^t \Phi(z),$$

в котором $d_0 = 1$, а

$$|d_t| \leqslant \frac{A\delta^t}{t!}, \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Теперь для каждого $j \in J$ мы положим $\gamma_j^* = \gamma_j - a_j^*$ и определим функции g_j^* следующим образом

$$g_j^*(z) := g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*).$$

Из приведенных выше свойств функции g_γ вытекает, что функции g_j^* обладают следующими свойствами:

$$\|\partial_{s,t}g_j^*\|_{D(a_j,q\delta)\setminus\gamma_j^*} \leqslant A\delta^{n-2-s-t} \tag{3.10}$$

при $s = 0{,}1,\ldots,n-1$ и $t = 0{,}1,\ldots,n$, а также

$$g_j^*(z) = \sum_{t=0}^{\infty} d_{j,t}^* \partial^t \Phi_n(z - a_j^*)$$

при $|z - a_j^*| > \delta$. В последнем разложении $d_{j,0}^* = 1$ и

$$|d_{j,t}^*| \leqslant A\delta^t/t! \tag{3.11}$$

при $t \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим теперь функцию g_j, заданную выражением

$$g_j(z) = \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-s} \beta_{j,s,l}\partial_{s,l}g_j^*(z),$$

в котором $n(n+3)/2$ коэффициентов $\beta_{j,s,l}$ определяются при помощи следующей индуктивной процедуры: для каждого $s = 0{,}1,\ldots,n-1$ и $l = 0{,}1,\ldots,n-s$ полагаем

$$\beta_{j,s,0} = c_0^s(f_j, a_j^*), \quad \beta_{j,s,l} = c_l^s(f_j, a_j^*) - \sum_{k=0}^{l-1} \beta_{j,s,k}d_{j,l-k}^*.$$

При таком определении коэффициентов $\beta_{j,s,l}$ в разложении

$$g_j(z) = \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{\infty} c_t^s(g_j, a_j^*)\partial_{s,t}\Phi_n(z - a_j^*),$$

сходящемся в пространстве $C^\infty(|z - a_j^*| > q'\delta)$, коэффициенты $c_t^s(g_j, a_j^*)$ выражаются следующим образом

$$c_t^s(g_j, a_j^*) = \sum_{l=0}^{\min\{t,n-s\}} \beta_{j,s,l}d_{j,t-l}^*$$

при $s = 0{,}1,\ldots,n-1$ и $t \in \mathbb{Z}_+$. Так как

$$|\beta_{j,s,l}| \leqslant \frac{A\delta^{s+l+m+2-n}\omega(\delta)}{s!l!},$$

то из (3.10) вытекает, что

$$\|\partial_{s,t}g_j\|_{D(a_j,q\delta)\setminus\gamma_j^*} \leqslant A\delta^{m-s-t}\omega(\delta) \tag{3.12}$$

при $s, t \in \mathbb{Z}_+$, таких, что $s + t \leqslant m$. Далее, из оценок (3.9) и (3.11) вытекает оценка для коэффициентов

$$|c_t^s(g_j, a_j^*)| \leqslant \frac{A\delta^{s+t+m+2-n}\omega(\delta)t^n}{s!t!}, \tag{3.13}$$

где $s = 0{,}1, \ldots, n-1$, а $t \in \mathbb{Z}_+$.

Докажем теперь, что построенные функции g_j обладают тем свойством, что

$$\Big\| \sum_{j \in J} (\partial_{s,t} f_j - \partial_{s,t} g_j) \Big\|_X \leqslant A\delta^{m-s-t}\omega(\delta), \tag{3.14}$$

при $s, t \in \mathbb{Z}_+$ с условием $s + t \leqslant m$. Из конструкции, определяющей коэффициенты $\beta_{j,s,l}$, следует, что

$$c_t^s(f_j, a_j^*) = c_t^s(g_j, a_j^*) \tag{3.15}$$

при $s = 0, \ldots, n-1$, а $t = 0, \ldots, n-s$.

Пусть теперь $s, t \in \mathbb{Z}_+$, $s + t \leqslant m$. Из равенств (3.15), а также из неравенств (3.9) и (3.13) вытекает, что при всех z, удовлетворяющих условию $|z - a_j^*| > q\delta$, справедливо неравенство

$$|\partial_{s,t} f_j(z) - \partial_{s,t} g_j(z)| \leqslant \frac{A\delta^{m+3}\omega(\delta)}{|z - a_j^*|^{3+s+t}}. \tag{3.16}$$

С другой стороны, из (3.7) и (3.12) вытекает, что для z, удовлетворяющих условиям $|z - a_j^*| < q\delta$ и $z \notin \gamma_j^*$, имеет место другая оценка:

$$|\partial_{s,t} f_j(z) - \partial_{s,t} g_j(z)| \leqslant A\delta^{m-s-t}\omega(\delta). \tag{3.17}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $z \in X$. Для доказательства оценок (3.14) мы воспользуемся хорошо известным методом «послойного» суммирования (см. лемму 1 в [8, §4], а также доказательство теоремы 3.2 в [29]). Используя оценки (3.16) и (3.17), получаем:

$$\Big| \sum_{j \in J} \partial_{s,t} f_j(z) - \partial_{s,t} g_j(z) \Big| \leqslant \sum_{j \in J} |\partial_{s,t} f_j(z) - \partial_{s,t} g_j(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j : |z - a_j^*| < q\delta} |\partial_{s,t} f_j(z) - \partial_{s,t} g_j(z)| + \sum_{k=[q]}^{\infty} \sum_{k\delta \leqslant |z - a_j^*| \leqslant (k+1)\delta} |\partial_{s,t} f_j(z) - \partial_{s,t} g_j(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{m-s-t}\omega(\delta)\left(A_1 + A_2 \sum_{k=[q]}^{\infty} \frac{1}{k^{2+s+t}}\right) \leqslant A\delta^{m-s-t}\omega(\delta),$$

где также учтено, что число M_k индексов j, таких, что $k\delta \leq |z - a_j^*| < (k+1)\delta$, $k \geqslant 1$, допускает оценку $M_k \leqslant Ak$.

Так как каждая из функций g_j является n-аналитической вне кривой γ_j и, следовательно, в окрестности компакта X и так как правые части неравенств (3.14) стремятся к нулю при $\delta \to 0$, то в качестве искомой приближающей функции для исходной функции f мы можем взять любую функцию класса $C^m(\mathbb{C})$, совпадающую с функцией

$$\sum_{j\in J} g_j(z) + \sum_{j\notin J} f_j(z)$$

в окрестности компакта X. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 6. Докажем вначале утверждение $(a) \Rightarrow (b)$. Предположим, что множество $\mathbb{C}\setminus X$ не связно. Пусть G — это одна из ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C}\setminus X$. Без потери общности можно считать, что $0\in G$. Тогда $d := \operatorname{dist}(0,\partial G) > 0$ и $X\subset B(0,R)$ при $R := \operatorname{diam}(X)$. Рассмотрим функцию $f(z)$, равную $\varPhi_n(z)$ при $\frac{d}{2} < |z| < R$ и продолженную произвольным образом до функции класса $C^{n-1}(\mathbb{C})$. Предположим, что $A^{n-1}_{n,w}(X) = P^{n-1}_{n,w}(X)$ и возьмем последовательность n-аналитических многочленов $(p_k)_{k=1}^{\infty}$, такую, что $\partial_{s,t}p_k \rightrightarrows_X \partial_{s,t}f$ при $k\to\infty$ для всех целых $s\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$ с условием $s+t\leqslant (n-1)$. Тогда многочлены $q_k := \overline{\partial}^{n-1}p_k$ являются обычными многочленами комплексного переменного z, а последовательность $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ равномерно на X сходится к функции $\overline{\partial}^{n-1}\varPhi_n = 1/(\pi z)$. Таким образом, функция $1/z$ может быть равномерно на ∂G приближена многочленами комплексного переменного, что, как хорошо известно, невозможно. Полученное противоречие означает, что если $A^{n-1}_{n,w}(X) = P^{n-1}_{n,w}(X)$, то множество $\mathbb{C}\setminus X$ является связным.

Докажем теперь утверждение $(b) \Rightarrow (a)$. Пусть X — компакт со связным дополнением, а $f\in C^{n-1}(\mathbb{C})\cap \mathcal{O}_n(X^{\circ})$. Тогда выполнено условие e) теоремы 7 и, следовательно, найдется последовательность $(f_k)_{k=1}^{\infty}\subset \mathcal{O}_n(X)$, такая, что имеет место сходимость (3.2). Для доказательства теоремы нам остается приблизить n-аналитическими многочленами каждую из функций f_k. Для этого предположим, что функция f_k является n-аналитической в окрестности U_k компакта X, и возьмем окрестность $U'_k\subset U_k$ этого компакта, такую, что любая точка множества $\mathbb{C}\setminus U_k$ может быть соединена с точкой ∞ при помощи кривой, лежащей вне $\overline{U'_k}$. Используя метод Рунге «движения» особенностей (в контексте аппроксимации решениями общих эллиптических уравнений этот метод может быть найден, например, в [25,

§3.10]), мы получаем, что каждая функция f_n вместе со своими частными производными порядка до $n-1$ включительно может быть равномерно приближена последовательностью n-аналитических многочленов на компакте $\overline{U}'_k$ и, следовательно, на X. $\square$

В случае $m = 0$ из теоремы 7 вытекает следующее утверждение, которое будет использовано в дальнейшем:

Следствие 9. *Пусть компакт $X \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям а)–е) теоремы 7. Тогда $A_n(X) = R_n(X)$, т.е. всякая функция класса $C(X)$, являющаяся n-аналитической на X°, может быть равномерно на X приближена n-аналитическими рациональными функциями с полюсами вне X.*

В частности, это следствие содержит цитированный выше результат Д. Кармоны [48] для компактов, дополнение к которым имеет конечное число связных компонент.

Замечание. В случае $n = 1$ доказательство теоремы 6 превращается в доказательство теоремы Мергеляна. Это доказательство является одним из наиболее простых (технически и концептуально) известных сегодня доказательств этой классической теоремы.

Глава 4

Неванлинновские области

Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Напомним, что, если компакт X имеет связное дополнение, то $P_n(X) = A_n(X)$ при любом $n \geqslant 2$ (это вытекает из теоремы 7). Кроме того, в предложении 3 приведены примеры компактов, имеющих несвязное дополнение, на которых равенство $P_2(X) = A_2(X)$ как выполняется, так и не выполняется. Эти примеры представляют собой простые замкнутые аналитические кривые в $\mathbb{C}$. Так как простые замкнутые кривые (контуры) — это наиболее простые компакты, имеющие несвязное дополнение, то задачу 1 целесообразно вначале исследовать для этого класса компактов. В этом параграфе мы приведем одно рассуждение из работы [34], которое обобщает сделанные в предложении 3 наблюдения и которое приводит нас к важному понятию *неванлинновской области*. Именно в терминах этого понятия (и его специальных модификаций) в последующих главах будут получены условия приближаемости в задаче 1. В этой главе мы сформулируем и обсудим основные свойства неванлинновских областей. Несмотря на то что эти вопросы и соответствующие результаты достаточно далеко выходят за рамки аппроксимационных задач для полианалитических многочленов, они приводятся (в ряде случаев без доказательств), так как это позволяет лучше понять природу возникающих условий приближаемости.

Аппроксимация на контурах

Пусть $\mathit{\Gamma}$ — спрямляемый контур в $\mathbb{C}$, а G — область, ограниченная контуром $\mathit{\Gamma}$. Предположим, что $P_2(\mathit{\Gamma}) \neq C(\mathit{\Gamma})$. Из этого вытекает, что существует ненулевая мера μ на $\mathit{\Gamma}$, такая, что $\mu \perp \mathfrak{P}_2$. Это означает, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$\int_{\mathit{\Gamma}} z^k \, d\mu(z) = \int_{\mathit{\Gamma}} \overline{z} z^k \, d\mu(z) = 0,$$

т.е. меры μ и $\eta := \overline{z}\mu$ ортогональны ко всем многочленам комплексного переменного. Из этого следует, что существуют две функции g_0 и g_1 класса

$E^1(G)$, такие, что

$$g_0(z)\,dz_{|\Gamma} = d\eta(z) = \overline{z}\,d\mu(z) = \overline{z}g_1(z)\,dz_{|\Gamma}.$$

Напомним, что под $g_0(z)$ и $g_1(z)$ при $z \in \Gamma$ понимаются угловые предельные значения функций g_0 и g_1, существующие для почти всех (относительно меры Лебега на Γ) точек $z \in \Gamma$. Так как мера μ ненулевая, то $g_1 \not\equiv 0$ и, следовательно, $g_1(z) \neq 0$ для почти всех $z \in \Gamma$. Таким образом, для почти всех $z \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\overline{z} = \frac{g_0(z)}{g_1(z)},$$

понимаемое в смысле угловых предельных значений почти всюду на Γ. Заметим, что отношение g_0/g_1 можно представить в виде отношения f_0/f_1, где $f_0, f_1 \in H^\infty(G)$. В самом деле, пусть φ — конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область G. Как хорошо известно (см., например, [7, глава III, §6] или [6, глава X, §5]), функции $(g_0 \circ \varphi)\varphi'$ и $(g_1 \circ \varphi)\varphi'$, определенные в круге $\mathbb{D}$, принадлежат классу H^1 и, следовательно, представимы в виде отношения голоморфных и ограниченных в $\mathbb{D}$ функций.

Итак, если $P_2(\Gamma) \neq C(\Gamma)$, то существуют функции $f_0, f_1 \in H^\infty(G)$, такие, что для почти всех (относительно меры Лебега на Γ) точек $z \in \Gamma$ выполняется следующее равенство

$$\overline{z} = \frac{f_0(z)}{f_1(z)}, \tag{4.1}$$

понимаемое как равенство угловых предельных значений соответствующих функций.

Пусть теперь Γ — это такой контур, что равенство (4.1) выполняется для некоторых функций $f_0, f_1 \in H^\infty(G)$. В этом случае непосредственно проверяется, что мера, равная $f_1\,dz_{|\Gamma}$, ортогональна к пространству $\mathfrak{P}_2$. В самом деле,

$$\int_\Gamma \overline{z}^s z^k f_1(z)\,dz = \int_\Gamma f_0^s(z) f_1^{1-s}(z) z^k\,dz = 0$$

при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $s = 0{,}1$, по теореме Коши.

Сформулируем сделанное наблюдение в виде следующего утверждения:

Предложение 10. *Пусть Γ — простая замкнутая спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, а n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *существуют функции f_0 и f_1 класса $H^\infty(G)$, такие, что равенство (4.1) выполнено для $|dz|$-почти всех точек $z \in \Gamma$;*
2) *$P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.*

Замечание. Это утверждение доказано выше при $n = 2$. В общем случае заметим, что если $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$, то и $P_2(\Gamma) \neq C(\Gamma)$. Для доказательства обратного утверждения при $n > 2$ достаточно вместо меры $f_1\, dz_{|\Gamma}$ рассмотреть меру $f_1^{n-1} dz_{|\Gamma}$.

Заметим, что утверждения 1), 2) и 4) из предложения 3 могут быть получены как следствия предложения 10. В самом деле, для единичной окружности $\mathbb{T}$ достаточно взять $f_0 \equiv 1$ и $f_1 = z$, а для овала Неймана $\Gamma'_{a,b}$ в качестве f_0 и f_1 надо взять функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби в (2.4) соответственно. Для эллипса $\Gamma_{a,b}$ представление (4.1) невозможно в силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова. В самом деле, всюду на $\Gamma_{a,b}$ имеет место равенство (2.3), а функция $S_{a,b}$ (функция Шварца эллипса $\Gamma_{a,b}$) имеет точки ветвления в области $\mathcal{D}_{a,b}$ и, следовательно, не может совпадать в $\mathcal{D}_{a,b}$ с мероморфной функцией f_0/f_1.

Замечание. В предложении 10 можно без ограничения общности считать, что функции f_0 и f_1 не имеют общих нулей в области G.

Продолжим список примеров, начатый в предложении 3. Для этого нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 11. *Пусть Γ — такой контур, что для всех $z \in \Gamma$ имеет место равенство*

$$q(z)\overline{z}^k = \overline{z}^{k-1} p_{k-1}(z) + \cdots + \overline{z} p_1(z) + p_0(z), \tag{4.2}$$

где k — целое число, $k \geqslant 2$, а $q, p_0, \ldots, p_{k-1} \in \mathbb{C}[z]$, причем многочлен q не имеет нулей в области G, ограниченной контуром Γ. Тогда для контура Γ не выполнено условие 1) предложения 10 и, следовательно, выполнено равенство $P_2(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Доказательство. Так как контур Γ является подмножеством алгебраической кривой в $\mathbb{C}$, то Γ является спрямляемым контуром. Предположим, что для Γ выполнено условие 1) предложения 10. Пусть f_0 и f_1 — такие функции класса $H^\infty(G)$, что f_0 и f_1 не имеют общих нулей в G и выполнено соотношение (4.1). Из (4.1) и (4.2) вытекает, что для почти всех точек $z \in \Gamma$ имеет место равенство

$$q(z)f_0(z)^k = \sum_{s=0}^{k-1} p_s(z)f_0(z)^s f_1(z)^{k-s}.$$

Следовательно, по принципу максимума модуля для функций класса $H^\infty(G)$, равенство

$$qf_0^k = \sum_{s=0}^{k-1} p_s f_0^s f_1^{k-s}$$

выполнено всюду в G. Так как f_0/f_1 не является голоморфной функцией в G (иначе равенство (4.1) невозможно), то найдется точка $w \in G$, такая, что $f_1(w) = 0$. Но тогда $q(w)f_0(w)^k = 0$. Так как q не имеет нулей в G, то $f_0(w) = 0$. Таким образом, функции f_0 и f_1 имеют общий ноль в G. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Отметим, что равенство (2.5), использованное при доказательстве предложения 3, является частным случаем равенства (4.2).

В предложении 11 исключен случай $k = 1$. Это связано с тем, что уравнение (4.2) при $k = 1$ приобретает вид

$$\overline{z} = R(z),$$

где $R = p_0/q$ — рациональная функция комплексного переменного, но среди простых замкнутых кривых в $\mathbb{C}$ только окружности могут удовлетворять такому уравнению (см., например, [54, гл. X]).

Замечание. Аналогично тому, как в предложении 3 было доказано равенство $P_2(\Gamma_{a,b}) = C(\Gamma_{a,b})$, из соотношения (4.2) можно вывести равенство $P_k(\Gamma) = C(\Gamma)$. Проведем соответствующее рассуждение.

Предположим вначале, что условие (4.2) выполняется при $q \equiv 1$. Тогда при всех $z \in \Gamma$ выполняется равенство $\overline{z}^k = Q(z)$, где Q — некоторый k-аналитический многочлен. Из этого непосредственно вытекает, что выражение $\overline{z}^m$ при $m \geqslant k$ может быть представлено в виде $\overline{z}^m = Q_m(z)$, где $Q_m \in \mathfrak{P}_k$. Но тогда, как и доказательстве предложения 3, получаем, что пространства $\{p_{|\Gamma} \colon p \in \mathfrak{P}_k\}$ и $P_k(\Gamma)$ являются алгебрами и, окончательно, что $P_k(\Gamma) = C(\Gamma)$.

В случае когда $q \not\equiv 1$, надо рассуждать по другому. Для любого целого $m \geqslant k$ найдется многочлен $Q_m \in \mathfrak{P}_k$, такой, что $\overline{z}^m = Q_m/q^{m-k+1}$ на Γ. Так как множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, то $A_k(\overline{G}) = P_k(\overline{G})$, а так как функция $\psi_m := Q_m/q^{m-k+1} \in A_k(\overline{G})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $Q_m^* \in \mathfrak{P}_k$, такой, что

$$\|\psi_m - Q_m^*\|_{\overline{G}} \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем теперь произвольную функцию $h \in C(\Gamma)$. По теореме Уолша–Лебега (см. теорему XV выше) функция h может быть равномерно на Γ приближена гармоническими многочленами. Такие многочлены имеют вид $q_1(z) + q_2(\overline{z})$, где $q_1, q_2 \in \mathbb{C}[z]$. Приближая каждое слагаемое вида $c_k\overline{z}^m$ при $m \geqslant k$ подходящим k-аналитическим многочленом, получаем, что $h \in P_k(\Gamma)$.

Предложение 11 говорит о том, что из условия (4.2) вытекает не только равенство $P_k(\Gamma) = C(\Gamma)$, но и равенство $P_2(\Gamma) = C(\Gamma)$. Для того чтобы получить из первого равенства второе, нужно использовать, по-существу, те же самые аргументы, что и при доказательстве предложения 10. Таким образом, приведенные рассуждения не дают полного доказательства предложения 11. Однако они позволяют взглянуть на рассматриваемую задачу с еще одной точки зрения.

Для вещественных параметров a и b с условием $a \geqslant b > 0$ и для положительного рационального числа r рассмотрим кривую $\Gamma_{a,b,r}$, заданную уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^r + \left(\frac{y}{b}\right)^r = 1.$$

Кривая $\Gamma_{a,b,r}$ называется *кривой Ламе*; в случае когда r — четное (целое) число, она является простой замкнутой кривой и ограничивает жорданову область $\mathcal{D}_{a,b,2k}$, где $r = 2k$, а $k \geqslant 0$ — целое число (см. рис. 5).

Предложение 12. *Пусть a и b — вещественные числа, $a \geqslant b > 0$, а k — целое число, $k \geqslant 2$. Тогда для кривой Ламе $\Gamma_{a,b,2k}$ не выполняется условие* 1) *предложения 10 и, следовательно, $P_2(\Gamma_{a,b,2k}) = C(\Gamma_{a,b,2k})$.*

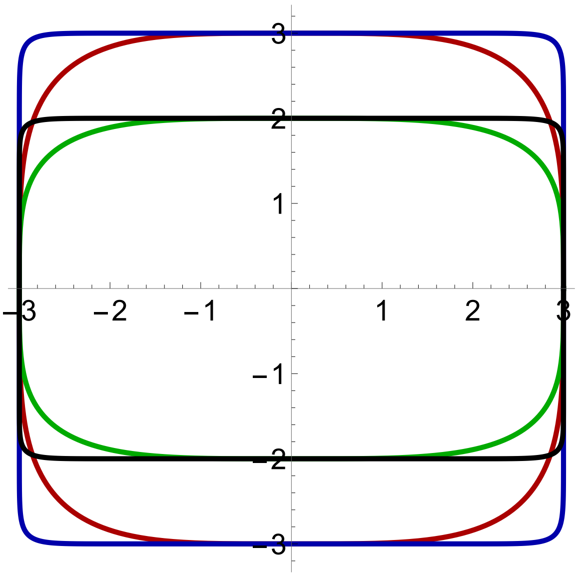

Рис. 5. Кривые Ламе $\Gamma_{3,2,4}$ (зеленая), $\Gamma_{3,2,20}$ (черная), $\Gamma_{3,3,4}$ (красная) и $\Gamma_{3,3,20}$ (синяя)

<u>*Доказательство.*</u> В случае когда $a > b$ или когда число k четно, непосредственно проверяется, что для любой точки $z \in \Gamma_{a,b,2k}$ выполняется соотношение $\overline{z}^{2k} = Q(z)$, где Q — некоторый $2k$-аналитический многочлен. В этих случаях мы находимся в условиях предложения 11, из которого и следует требуемое утверждение.

Рассмотрим оставшийся случай, т.е. кривые Ламе $\Gamma_{a,a,2k}$ при нечетных значениях k. Покажем, что и в этом случае не выполняется условие 1) предложения 10. Предположим противное и рассмотрим две функции $f_0, f_1 \in H^\infty(\mathcal{D}_{a,a,2k})$, где $\mathcal{D}_{a,a,2k}$ — это область, ограниченная контуром $\Gamma_{a,a,2k}$, такие, что f_0 и f_1 не имеют общих нулей в области $\mathcal{D}_{a,a,2k}$ и выполняется условие (4.1). Так как для любой точки $z \in \Gamma_{a,a,2k}$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{k} C_j z^{2j-1}\overline{z}^{2k-2j+1} = 1,$$

где $C_j := 2^{1-2k}a^{-2k}\binom{2k}{2j-1}$ при $j = 1, \ldots, k$, то

$$\sum_{j=1}^{k} C_j z^{2j-1}\left(\frac{f_0(z)}{f_1(z)}\right)^{2k-2j+1} = 1, \tag{4.3}$$

для почти всех $z \in \Gamma_{a,a,2k}$. Умножая обе части равенства (4.3) на $f_1(z)^{2k-1}$ и применяя принцип максимума модуля так же, как и в доказательстве предложения 11, получаем, что:

$$\sum_{j=1}^{k} C_j z^{2j-1} f_0(z)^{2k-2j+1} f_1(z)^{2j-2} = f_1(z)^{2k-1}, \tag{4.4}$$

при всех $z \in \mathcal{D}_{a,a,2k}$. Из уравнения (4.4) вытекает, что $f_1(0) = 0$, откуда $f_1(z) = zg_1(z)$, где g_1 — функция класса $H^\infty(\mathcal{D}_{a,a,2k})$. Далее, имеет место равенство

$$C_1 f_0(z)^{2k-1} = z^{2k-2} g_1(z)^{2k-1} - \sum_{j=2}^{k} C_j z^{4j-4} f_0(z)^{2k-2j+1} g_1(z)^{2j-2}.$$

Так как $k \geqslant 3$, а $C_1 \neq 0$, то из последнего уравнения вытекает, что $f_0(0) = 0$. Однако этот факт противоречит тому, что функции f_0 и f_1 не имеют общих нулей в $\mathcal{D}_{a,a,2k}$. □

Замечание. Предположим теперь, что многочлен $q \in \mathbb{C}[z]$ в условии (4.2) предложения 11 имеет нули в области G, ограниченной соответствующим контуром Γ. Оказывается, что в этом случае реализуются обе возможности в задаче 1 при $X = \Gamma$: может выполняться равенство $P_2(\Gamma) = C(\Gamma)$, а может быть так, что $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$ при всех $n \geqslant 2$.

Для овала Неймана $\Gamma'_{a,b}$ (см. рис. 4, на котором изображены эллипс $\Gamma_{1,2}$ и соответствующий ему овал $\Gamma'_{1,2}$) имеет место $P_n(\Gamma'_{a,b}) \neq C(\Gamma'_{a,b})$ при всех $n \geqslant 2$ (см. утверждение 2) предложения 3). При этом для всех $z \in \Gamma'_{a,b}$ выполняется равенство

$$(\beta^2 c^2 z^2 + 1)\overline{z}^2 - 2\alpha \overline{z} z = 0.$$

Это равенство имеет вид (4.2), но соответствующий многочлен q в этом случае имеет вид $q(z) = \beta^2 c^2 z^2 + 1$ и, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, имеет два нуля в области $\mathcal{D}'_{a,b}$.

Пусть теперь $\Gamma'_{1,1,4}$ — это образ кривой Ламе $\Gamma_{1,1,4}$ при отображении $z \mapsto 1/z$ (см. рис. 6). Тогда для контура $\Gamma'_{1,1,4}$ выполняется условие (4.2), причем соответствующее уравнение имеет вид

$$(8z^4 - 1)\overline{z}^4 = 6\overline{z}^2 z^2 + z^4.$$

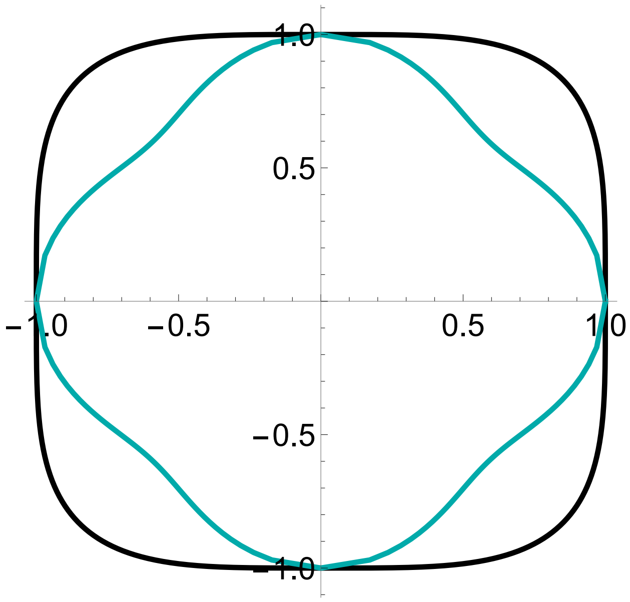

Рис. 6. Кривая Ламе $\Gamma_{1,1,4}$ (черная) и кривая $\Gamma'_{1,1,4}$ (бирюзовая)

Возникающий в этом уравнении многочлен $q(z) = 8z^4 - 1$ имеет нули в области $\mathcal{D}'_{1,1,4}$, однако функция Шварца контура $\Gamma'_{1,1,4}$ имеет внутри области $\mathcal{D}'_{1,1,4}$ точки ветвления. Следовательно, эта функция не может быть представлена в области $\mathcal{D}'_{1,1,4}$ в виде отношения двух голоморфных ограниченных функций, и, на основании предложения 10, мы заключаем, что $P_2(\Gamma'_{1,1,4}) = C(\Gamma'_{1,1,4})$.

Приведенные при доказательстве предложений 3, 10, 11 и 12 рассуждения лежат в основе понятия *неванлинновской области*, которое вводится в следующем параграфе. Развитие этих идей в последующих параграфах позволит получить необходимые и достаточные условия равномерно приближаемости функций полианалитическими многочленами для компактов весьма общего вида.

Понятие неванлинновской области

Введем специальную характеристику плоских односвязных областей, которая основана на обнаруженном при предварительном анализе задачи свойстве жордановых областей G, на границах которых бианалитические многочлены не плотны в пространстве $C(\partial G)$ (см. предложение 10):

Определение 13. *Ограниченная односвязная область G в $\mathbb{C}$ называется неванлинновской, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(G)$, такие, что*

$v \not\equiv 0$, а равенство

$$\overline{z} = \frac{u(z)}{v(z)} \tag{4.5}$$

выполняется на ∂G почти всюду в смысле конформного отображения. Это означает, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство угловых граничных значений

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \frac{(u \circ \varphi)(\zeta)}{(v \circ \varphi)(\zeta)},$$

где φ — некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на G.

Обозначим через *ND* совокупность всех неванлинновских областей. Часто в дальнейшем простые замкнутые кривые (контуры), являющиеся границами жордановых неванлинновских областей, мы будем называть *неванлинновскими контурами*.

Определение неванлинновской области корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора φ. По теореме единственности Лузина–Привалова, *отношение* u/v определено в G (для неванлинновской области G) единственным образом. Не ограничивая общности, мы можем *и будем* считать, что функции u и v из определения неванлинновской области не имеют общих нулей в области G.

Определение 14. *Если область $G \in$ ND, а $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — функции из определения 13 (удовлетворяющие указанным выше условиям), то отношение u/v называется ND-функцией, соответствующей G.*

Если область $G \in$ *ND* — это жорданова область со спрямляемой границей, то равенство (4.5) может пониматься непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду на ∂G. Равенство (4.5) можно аналогично понимать и на любой спрямляемой жордановой дуге $\gamma \subset \partial G$, обладающей тем свойством, что всякая точка $a \in \gamma$ не является предельной точкой для множества $\partial G \setminus \gamma$. Таким образом, понятие неванлинновской области естественно обобщает на класс ограниченных односвязных областей свойство (4.1), установленное выше в контексте задачи о равномерной приближаемости функций бианалитическими многочленами на спрямляемых контурах.

В случае жордановых областей понятие неванлинновской области было введено в [34, определение 3] (в случае области со спрямляемой границей) и (в несколько иных терминах) в [61, определение 2.1], а в общем случае — в [13, определение 2.1].

Жордановы неванлинновские области с аналитическими границами

Рассмотрим понятие неванлинновской области в случае жордановых областей с аналитическими границами. Этого, в принципе, будет достаточно для понимания последующих результатов о равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами. Более подробно свойства неванлинновских областей обсуждаются в этой главе ниже, где, в частности, объясняется, что неванлинновские области могут иметь весьма нерегулярные границы.

Пусть G — жорданова область с аналитической границей, а S — функция Шварца границы Γ области G. Ясно, что область G является неванлинновской в том и только том случае, когда S — это мероморфная функция в G (в этом случае функция S, очевидно, будет ND-функцией области G).

В [54, гл. 14] доказано, что функция Шварца S аналитического контура Γ, ограничивающего жорданову область G, является мероморфной в области G в том и только том случае, когда конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на G является (однолистной) рациональной функцией с полюсами вне $\overline{\mathbb{D}}$. Таким образом, имеет место следующее описание жордановых неванлинновских областей с аналитическими границами:

Предложение 15. *В классе всех жордановых областей с аналитическими границами неванлинновскими областями будут образы единичного круга при конформных отображениях рациональными однолистными в $\mathbb{D}$ функциями, и только они.*

Заметим также, что конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на жорданову область G с аналитической границей Γ и функция Шварца S контура Γ связаны между собой следующим образом

$$S(z) = \varphi_*\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(z)}\right) = \overline{\varphi\left(\frac{1}{\overline{\varphi^{-1}(z)}}\right)}. \tag{4.6}$$

Непосредственно из определения неванлинновской области (с учетом замечания о том, что равенство (4.5) для жордановых областей B со спрямляемыми границами можно понимать как равенство угловых граничных значений почти всюду на ∂B) вытекает, что предложение 10 допускает следующую переформулировку, которая понадобится нам в дальнейшем:

Предложение 16. *Пусть G — жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей Γ, а n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Тогда равенство $P_n(\Gamma) = C(\Gamma)$ имеет место в том и только том случае, когда $G \notin ND$.*

Понятие неванлинновской области обладает определенными свойствами «жесткости». Первым проявлением этого является следующее утверждение, которое весьма полезно при анализе ряда конкретных примеров:

Предложение 17. *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, такая, что ∂G содержит две аналитически независимые аналитические дуги γ_1 и γ_2, обладающие тем свойством, что всякая точка $a \in \gamma_s$, $s = 1{,}2$, не является предельной точкой для множества $\partial G \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Тогда область G не является неванлинновской.*

Доказательство. В самом деле, пусть область G, граница которой содержит требуемые аналитические дуги γ_1 и γ_2, является неванлинновской, а функции $u, v \in H^\infty(G)$ взяты из определения 13. В этом случае равенство (4.5) при $z \in \gamma_l$, $l = 1{,}2$, можно понимать непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду (относительно меры Лебега) на γ_l. Следовательно, для почти всех точек $z \in \gamma_1 \cup \gamma_2$ имеет место равенство угловых граничных значений $\overline{z} = u(z)/v(z)$.

Пусть теперь S_1 и S_2 — функции Шварца дуг γ_1 и γ_2, а U_1 и U_2 — такие окрестности этих дуг, в которых функции S_1 и S_2 определены и аналитичны. Не ограничивая общности, можно считать, что $U_1 \cap G$ и $U_2 \cap G$ односвязны, а также, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ (см. рис. 7).

В силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова в области $U_l \cap G$, $l = 1{,}2$, имеет место равенство $S_l(z) = u(z)/v(z)$. Отсюда следует, что аналитические элементы (S_1, U_1) и (S_2, U_2) аналитически продолжаются друг в друга вдоль любого пути в G, начинающегося в U_1, оканчивающегося в U_2 и не проходящего через нули функции v, что противоречит аналитической независимости дуг γ_1 и γ_2. $\square$

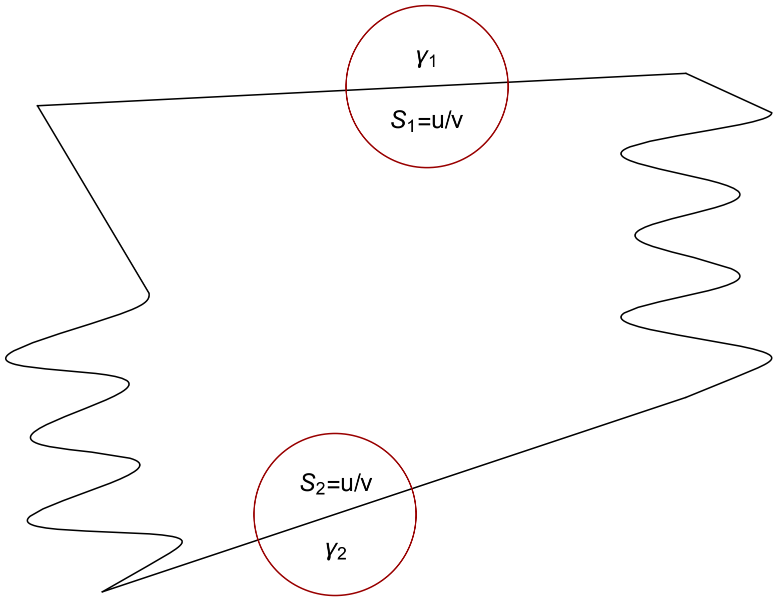

Рис. 7. Область, граница которой содержит аналитически независимые аналитические дуги γ_1 и γ_2

Более сильные утверждения о «жесткости» понятия неванлинновской области будут рассмотрены ниже, а сейчас мы соберем в одном утверждении полученные выше конкретные примеры неванлинновских областей и примеры областей, не являющихся неванлинновскими:

Следствие 18.

1) *Единичный круг $\mathbb{D}$ является неванлинновской областью* (*в этом случае в определении* 13 *надо взять* $u(z) = 1$ *и* $v(z) = z$).
2) *Область* $\mathcal{D}_{a,b}$, *ограниченная эллипсом* $\varGamma_{a,b}$, *при* $a > b > 0$ *не является неванлинновской* (*так как функция Шварца* $S_{a,b}$ *эллипса* $\varGamma_{a,b}$, *см.* (2.3), *имеет точки ветвления в области* $\mathcal{D}_{a,b}$).
3) *Овал Неймана* $\mathcal{D}'_{a,b}$ *при* $a > b > 0$ *является неванлинновской областью* (*это следует из того, что функция Шварца* $S_{\varGamma'_{a,b}}$ *контура* $S'_{a,b}$, *см.* 2.4, *является мероморфной в области* $\mathcal{D}'_{a,b}$).
4) *Области, ограниченные кривыми* $\varGamma_{a,b,2k}$, *при всех вещественных* a *и* b, $a \geqslant b > 0$, *и всех целых* k *не являются неванлинновскими.*
5) *Область, ограниченная контуром* $\varGamma'_{1,1,4}$, *не является неванлинновской* (*ее функция Шварца имеет внутри соответствующей области точки ветвления, см. замечание после предложения* 12).
6) *Образ единичного круга* $\mathbb{D}$ *при отображении* $z \mapsto \exp z$ *не является неванлинновской областью. В самом деле, формула* (4.6) *показывает,*

что функция Шварца границы области $\exp(\mathbb{D})$ *имеет в этой области существенно особую точку.*

7) *Из предложения 17 вытекает, что любая жорданова область, ограниченная замкнутой ломаной не является неванлинновской областью.*

Завершая обсуждение простых свойств и первых примеров неванлинновских областей, установим одно полезное свойство функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ из определения 13 в случае жордановых неванлинновских областей со спрямляемыми границами:

Предложение 19. *Пусть* $G \in ND$ *— жорданова область со спрямляемой границей* Γ. *Тогда для всех допустимых функций* $u(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$ *из определения 13 функция* $u - \overline{z}v$ *непрерывно продолжается из области* G *на* $\overline{G}$, *причем* $u - \overline{z}v = 0$ *на контуре* Γ.

Доказательство. Заметим, что в рассматриваемом случае для почти всех (относительно меры Лебега на Γ) точек $z \in \Gamma$ имеет место равенство $u(z) = \overline{z}v(z)$. Тогда по формуле Коши, которая остается справедливой для функций класса $H^\infty(G)$, имеем (при $z \in G$):

$$u(z) - \overline{z}v(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} v(\zeta)\, d\zeta.$$

Из ограниченности ядра

$$\frac{\overline{z} - \overline{w}}{z - w}$$

вытекает, что последний интеграл определяет функцию из $C(\mathbb{C})$. □

В связи с этим утверждением представляется интересным отметить, что существуют такие жордановы неванлинновские области G со спрямляемыми границами, что соответствующие функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ из определения 13 не могут быть выбраны (ни одна из них) принадлежащими пространству $A(\overline{G})$ (см. [13, пример 5.8]).

Свойства неванлинновских областей

В начале этого параграфа мы установим еще одно важное свойство, выражающее «жесткость» понятия неванлинновской области. Напомним, что под *алгебраической кривой* традиционно понимается множество в пространстве $\mathbb{C}^2$ вида $\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2\colon F(w_1, w_2) = 0\}$, где $F \in \mathbb{C}[w_1, w_2]$ — некоторый многочлен от двух комплексных переменных w_1 и w_2. Мы будем использовать понятие *плоской алгебраической кривой*, под которой мы будем понимать множество $\{z \in \mathbb{C}\colon (z, \overline{z}) \in \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$.

Теорема 20. *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{A}$ — плоская алгебраическая кривая. Если выполнены следующие условия:*

i) *$G \in ND$ и*

ii) *найдется дуга $\gamma \subset \mathfrak{A} \cap \partial G$, такая, что $\omega(\gamma) > 0$ (где символом $\omega(\gamma)$ обозначена* гармоническая мера *дуги γ, вычисленная относительно G и некоторой точки, лежащей в G),*

то $\partial G \subset \mathfrak{A}$ и, более того, ∂G является аналитической кривой (*за исключением не более чем конечного множества особых точек*).

Доказательство. Пусть $F \in \mathbb{C}[w_1, w_2]$ — это многочлен, который определяет плоскую алгебраическую кривую $\mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{A} = \{z \in \mathbb{C}\colon F(z, \overline{z}) = 0\}$. Согласно [76, следствие 6.4], $\mathfrak{A}$ имеет не более чем конечное число особых точек. Следовательно, мы можем найти дугу $\gamma_1 \subset \gamma$ так, чтобы $\omega(\gamma_1) > 0$ и чтобы все точки дуги γ_1 были бы регулярными для $\mathfrak{A}$. Пусть $z_0 \in \gamma_1$. Без ограничения общности можно считать, что $\partial F/\partial w_2(z_0, \overline{z}_0) \neq 0$. В силу теоремы о неявной функции найдутся открытое множество U, $z_0 \in U$, и функция $S \in \mathcal{O}(U)$, такие, что

$$U \cap \gamma_1 = \{z \in U\colon \overline{z} = S(z),\ \text{и}\ S'(z) \neq 0\}.$$

Из этого вытекает, что существует дуга $\gamma_2 \subset U \cap \gamma_1$, такая, что γ_2 — это аналитическая дуга с функцией Шварца S и $\omega(\gamma_2) > 0$. В частности, $\mathfrak{A}$ является аналитической за исключением не более чем конечного числа точек.

Пусть $g = u/v$ — *ND*-функция области G. Тогда для почти всех точек $z \in \gamma_2$ имеет место равенство $g(z) = \overline{z} = S(z)$, откуда

$$F(z, g(z)) = F(z, \overline{z}) = F(z, S(z)) = 0.$$

Так как $\omega(\gamma_2) > 0$, то, в силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова, мероморфная функция $F(z, g(z))$ такова, что

$$F(z, g(z)) = 0$$

при всех $z \in G$.

Пусть теперь φ — это некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область G и пусть

$$E = \mathscr{F}(\varphi) \cap \mathscr{F}(u \circ \varphi) \cap \mathscr{F}(v \circ \varphi),$$

где, напомним, $\mathscr{F}(h) \subset \mathbb{T}$ — это множество Фату функции $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Тогда для всех точек $z \in \varphi(E)$ получаем, что

$$F(z, \overline{z}) = F(z, g(z)) = 0.$$

Из того, что множество E имеет полную меру на $\mathbb{T}$ вытекает, что $\overline{\varphi(E)} = \partial G$. Следовательно, $F(z, \overline{z}) = 0$ при всех $z \in \partial G$. Это означает, что $\partial G \subset \mathfrak{A}$, так что $\partial \Omega$ является аналитической за исключением не более чем конечного множества особых точек. Согласно [40, следствие 2.1] для любой такой (особой) точки a существует открытое множество U, $a \in U$, такое, что $\mathfrak{A} \cap U$ является конечным объединением как минимум двух аналитических дуг, проходящих через точку a. Возьмем две любые из таких дуг и рассмотрим их функции Шварца S_1 и S_2. Так как $G \in ND$, то функции S_1 и S_2 (точнее, соответствующие аналитические элементы) аналитически продолжаются друг в друга (см. рассуждения, использованные при доказательстве предложения 17). Но это невозможно, так как соответствующие дуги пересекаются. Таким образом, ∂G является локально аналитической и, так как $G \in ND$, то и аналитической кривой (за исключением не более чем конечного множества особых точек). $\square$

Замечание. Если в условиях теоремы 20 множество $\mathfrak{A}$ является контуром, то G — это область, ограниченная контуром $\mathfrak{A}$.

Неванлинновские области и конформные отображения

Оказывается, что свойство области G быть неванлинновской допускает описание в терминах конформных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ на G.

Для формулировки соответствующего результата нам потребуется ввести одно специальное понятие.

Определение 21. *Пусть* U — *односвязная область в* $\overline{\mathbb{C}}$, *такая, что* $\overline{\mathbb{D}} \subset U$. *Скажем, что функция* $f \in H^\infty$ *допускает псевдопродолжение неванлинновского типа в* U, *если существуют две функции* $f_1, f_2 \in H^\infty(U \setminus \overline{\mathbb{D}})$, $f_2 \not\equiv 0$, *такие, что для почти всех точек* $\zeta \in \mathbb{T}$ (*относительно меры Лебега на* $\mathbb{T}$) *выполняется равенство угловых предельных значений*

$$f(\zeta) = \frac{f_1(\zeta)}{f_2(\zeta)}, \tag{4.7}$$

где $f_1(\zeta)$ *и* $f_2(\zeta)$ — *предельные значения функций* f_1 *и* f_2 *из* $U \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Скажем также, что функция $f \in H^\infty$ *допускает* псевдопродолжение неванлинновского типа, *если она допускает такое псевдопродолжение в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Заметим, что понятие псевдопродолжения неванлинновского типа является частным случаем общего понятия псевдопродолжения, введенного в работе [77] (см. также [55, определение 2.1.2]).

Кроме того, для описания неванлинновских областей в терминах конформных отображений нам понадобится понятие *модельного пространства*. Напомним это понятие. Пусть Θ – внутренняя функция (т.е. функция класса H^∞, такая, что $|\Theta(\zeta)| = 1$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$), и пусть пространство $K_\Theta \subset H^2$ (где, напомним, H^2 — это стандартное пространство Харди в единичном круге $\mathbb{D}$) определено следующим образом:

$$K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2.$$

В силу классической теоремы Берлинга пространства $K_\Theta \subset H^2$ и только они являются инвариантными подпространствами для оператора обратного сдвига

$$\mathscr{B}\colon f \mapsto \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

в пространстве H^2 (см., например, [26, лекция I, п. 4]). Пространства K_Θ называют *модельными подпространствами*. Соответствующий термин был предложен Н. К. Никольским и объясняется выдающейся ролью, которую эти пространства играют в функциональной модели Надя–Фойаша. Пространства K_Θ часто называют также $*$-*инвариантными подпространствами*. Систематическое изложение свойств модельных пространств можно найти, например, в книгах [26] и [66]. Мы приведем некоторые основные свойства пространств K_Θ (см., например, [26, лекция II]), которые будут использованы при изучении свойств неванлинновских областей в дальнейшем.

1) Функция f принадлежит пространству K_Θ в том и только том случае, когда существует функция $g \in H^2$, такая, что $f = \overline{z}\Theta\overline{g}$ на $\mathbb{T}$ (это равенство должно пониматься как равенство функций класса L^∞).

2) Всякая функция $f \in K_\Theta$ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, и соответствующее отношение f_1/f_2 из определения 21 имеет вид

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{z^{-1}g_*(z^{-1})}{\Theta_*(z^{-1})} = \frac{z^{-1}\overline{g(1/\overline{z})}}{\overline{\Theta(1/\overline{z})}}, \qquad z \in \mathbb{U}. \tag{4.8}$$

3) Для данной внутренней функции Θ определим оператор, действующий в пространстве L^2 следующим образом:

$$f \mapsto \widetilde{f}_\Theta := \overline{z}\Theta\overline{f}.$$

Этот оператор является антилинейной изометрической инволюцией, и он коммутирует с оператором ортогонального проектирования из L^2 в K_Θ. Для любой функции $f \in K_\Theta$ выполнено $\overline{z}\Theta\overline{f} \in K_\Theta$.

Имеет место следующее утверждение, объединяющее результаты предложения 3.1 из [13] и теоремы 1 из [35]:

Теорема 22.

1. *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть φ — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G. Тогда область G является неванлинновской в том и только том случае, когда φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.*

2. *Пусть Θ — некоторая внутренняя функция. Тогда любая ограниченная однолистная функция, принадлежащая пространству K_Θ, конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на некоторую неванлинновскую область. Обратно, если однолистная функция $\varphi \in H^\infty$ отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область, то существует внутренняя функция Θ, такая, что $\varphi \in K_\Theta$.*

<u>*Доказательство*</u>. Напомним, что $\mathbb{U} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ — это внешность единичного круга. Пусть φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, а f_1 и f_2 — это соответствующие функции класса $H^\infty(\mathbb{U})$, взятые из (4.7) для φ.

При $|w| < 1$ положим $h_1(w) := (f_1)_*(1/w)$ и $h_2(w) := (f_2)_*(1/w)$, так что $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$. В силу (4.7) для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ имеем, что если точка $w \in \mathbb{D}$ некасательно стремится к ζ, то

$$\frac{h_1(w)}{h_2(w)} = \frac{(f_1)_*(1/w)}{(f_2)_*(1/w)} = \overline{\left(\frac{f_1(w')}{f_2(w')}\right)} \to \overline{\varphi(\zeta)},$$

так как $w' = 1/\overline{w} \in \mathbb{D}$ некасательно стремится к ζ.

Ясно, что область $G = \varphi(\mathbb{D})$ является неванлинновской, так как в качестве функций $u, v \in H^\infty(G)$, требуемых в определении 13, можно взять $u = h_1 \circ \varphi^{-1}$ и $v = h_2 \circ \varphi^{-1}$ соответственно.

Обратно, пусть G — неванлинновская область, а функции $u, v \in H^\infty(G)$ взяты из определения 13. При $|w| > 1$ определим функции $f_1(w) := (u \circ \varphi)_*(1/w)$ и $f_2 := (v \circ \varphi)_*(1/w)$, так что $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{U})$. Как и выше, в силу (4.5) для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ получаем, что если точка $w \in \mathbb{U}$ некасательно стремится к ζ, то

$$\frac{f_1(w)}{f_2(w)} = \frac{(u \circ \varphi)_*(1/w)}{(v \circ \varphi)_*(1/w)} = \overline{\left(\frac{(u \circ \varphi)(w')}{(v \circ \varphi)(w')}\right)} \to \varphi(\zeta),$$

так как $w' = 1/\overline{w} \in \mathbb{D}$ также стремится к ζ некасательно. Таким образом, φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа. Первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем ко второму утверждению. Так как пространство K_Θ является инвариантным относительно оператора $\mathscr{B}$, то функция $\varphi \in K_\Theta$ не является циклическим элементом для $\mathscr{B}$ (т.е. линейная оболочка элементов $\{\mathscr{B}^k\varphi\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ не плотна в H^2). В силу теоремы 2.2.1 из [55] функция φ допускает в этом случае псевдопродолжение неванлинновского типа.

Обратно, пусть функция $\varphi \in H^\infty$ однолистна и отображает $\mathbb{D}$ на некоторую неванлинновскую область. Тогда φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа. Снова применяя теорему 2.2.1 из [55], заключаем, что φ не является циклическим элементом для оператора $\mathscr{B}$ в H^2. Тогда подпространство $\mathcal{H} \subset H^2$, определенное как замыкание в H^2 линейной оболочки элементов $\{\mathscr{B}^k\varphi\colon k\in\mathbb{Z}_+\}$, будет $\mathscr{B}$-инвариантным подпространством. В силу теоремы Берлинга найдется такая внутренняя функция Θ, что $\mathcal{H}=K_\Theta$. $\square$

Замечание. Из второго утверждения теоремы 22 вытекает следующий метод построения неванлинновских областей: для построения неванлинновской области с требуемыми свойствами надо найти в пространстве K_Θ (для некоторой специально выбранной внутренней функции Θ) однолистную функцию, имеющую нужные аналитические свойства (например, заданное граничное поведение).

Естественно возникает следующий вопрос: *для каких внутренних функций Θ в соответствующих пространствах K_Θ существуют ограниченные однолистные функции*?

Рассмотрим этот вопрос для модельных пространств, порожденных произведениями Бляшке и сингулярными внутренними функциями по отдельности. Напомним (см. [11, гл. II]), что произведение Бляшке — это функция вида

$$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a}_n}{|a_n|}\,\frac{z-a_n}{\overline{a}_n z-1},$$

где последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{D}$ удовлетворяет условию Бляшке, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty,$$

а сингулярная внутренняя функция — это функция вида

$$S(z)=\exp\biggl(-\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu_S(\zeta)\biggr),$$

где μ_S — некоторая конечная положительная сингулярная (относительно меры Лебега) мера на $\mathbb{T}$.

Очевидно, что для любого произведения Бляшке B в пространстве K_B существуют ограниченные однолистные функции (это, например, функция $1/(1-\overline{a}_n z)$, где a_n — любой из нулей B).

В случае же сингулярной внутренней функции S вопрос о существовании однолистных функций в K_S является открытым (и весьма нетривиальным). В [4, §3] доказано, что если мера μ, определяющая сингулярную функцию S имеет хотя бы один атом, то в таком пространстве K_S существуют ограниченные однолистные функции. Для общей сингулярной внутренней функции S соответствующий вопрос сводится, по-видимому, к вопросу о существовании множества Y, обладающего следующими свойствами: $\int_{\mathbb{T}} \log \operatorname{dist}(\zeta, Y)\,|d\zeta| > -\infty$ (такие множества называются *множествами Карлесона*) и $\mu(Y) > 0$. В [4, теорема 4] доказано, что выполнение этого условия эквивалентно тому, что существует натуральное число N, такое, что ограниченные однолистные функции содержатся в пространстве K_{S_N}, где сингулярная внутренняя функция S_N определена равенством

$$S_N(z) = S(z)S(\omega_N z)S(\omega_N^2 z)\cdots S(\omega_N^{N-1} z), \qquad \text{где} \quad \omega_N = e^{2\pi i/N}.$$

Отметим, что ранее в литературе уже возникали вопросы о существовании в модельных пространствах функций, обладающих определенной регулярностью. Так, в [58] изучен вопрос о существовании в таких пространствах гладких функций. Однако вопрос о существовании в модельных пространствах однолистных функций впервые возник в связи с задачей равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами (см. [35] и [4]).

Заметим, что предложение 15, приведенное выше, является простым следствием теоремы 22.

Кроме того, из Теоремы 22 непосредственно вытекает, что однолистные отображения, осуществляемые рациональными функциями, сохраняют свойство области быть неванлинновской:

Следствие 23. *Пусть $G \in ND$, а $f(z)$ — рациональная функция с полюсами вне $\overline{G}$, однолистная в G. Тогда $f(G) \in ND$. В частности, если p — однолистный в единичном круге многочлен, то $p(\mathbb{D})$ — неванлинновская область.*

В частности, из этого утверждения вытекает, что образ круга $\mathbb{D}$ под действием отображения $\big(z + 1/\sin(\pi/n)\big)^n$, $n \geqslant 3$, дает пример неванлинновской области, которая не является не только жордановой областью, но и областью Каратеодори (см. рис. 8).

Важное свойство неванлинновских областей, также вытекающее из следствия 23, состоит в том, что имеет место следующее свойство «плотности» неванлинновских областей:

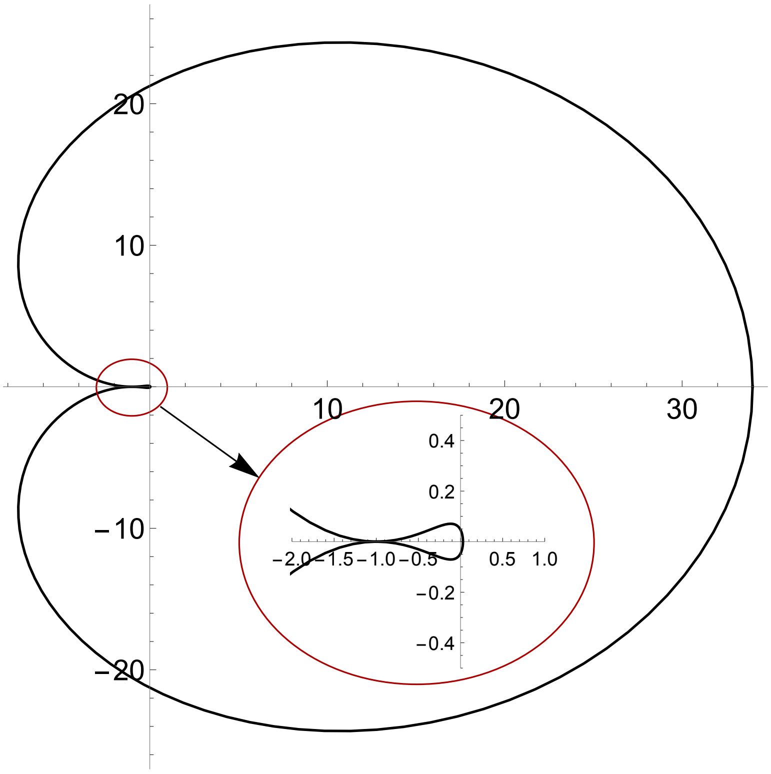

Рис. 8. Образ единичного круга при отображении $\left(z+\sqrt{2}\right)^4$ — пример неванлинновской области, не являющейся областью Каратеодори

Предложение 24. *В любой окрестности произвольной простой замкнутой кривой* (*контура*) *существует аналитический неванлинновский контур.*

Доказательство. Пусть G — жорданова область, а φ — конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на G. В силу теоремы Каратеодори о продолжении, $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$.

Возьмем $r>1$ и определим функцию $f_r(z) := \varphi(z/r)$. При этом $f_r \to \varphi$ равномерно в $\mathbb{D}$ при $r \to 1$. Кроме того, функция f_r однолистна в круге $D(0,r)$. Выберем $\varepsilon>0$ и подберем такое $r=r(\varepsilon)>1$, что $\|\varphi - f_r\|_{\mathbb{D}} \leqslant \varepsilon/2$. Так как $f_r \in A(\overline{D(0,r)})$, то найдется последовательность многочленов $(p_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}[z]$, такая, что $p_k \to f_r$ равномерно в $\overline{D(0,r)}$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим последовательность $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ и докажем, что для любого $\rho > 0$ найдется целое число $k_\rho > 0$, такое, что многочлены p_k будут однолистны в круге $D(0,\rho)$ при всех целых $k > k_\rho$.

Рассуждая от противного, предположим, что существует число $\rho > 0$, такое, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ найдется $s \in \mathbb{Z}_+$, $s > k$, такое, что многочлен p_s не однолистен в $D(0,\rho)$. Из этого вытекает, что найдутся такие последовательность $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел и последовательности $(a_{s_m})_{m=1}^{\infty}$ и $(b_{s_m})_{m=1}^{\infty}$ точек из круга $D(0,\rho)$, что $a_{s_m} \neq b_{s_m}$, но $p_{s_m}(a_{s_m}) = p_{s_m}(b_{s_m})$. Переходя, если нужно, к подпоследовательностям, можно считать, что $a_{s_m} \to a \in \overline{D(0,\rho)}$ и $b_{s_m} \to b \in \overline{D(0,\rho)}$). Далее, $p_{s_m}(a_{s_m}) \to f_r(a)$ и $p_{s_m}(b_{s_m}) \to f_r(b)$ при $m \to \infty$. Отсюда с учетом однолистности f_r в $D(0,r)$ получаем, что $a = b$.

Рассмотрим теперь круг $D(a,\delta)$, где $\delta > 0$ выбрано так, чтобы $f_r(z) - f_r(a) \neq 0$ при $z \in \partial D(a,\delta)$. Последовательность функций $p_{s_m}(z) - p_{s_m}(a_{s_m})$ равномерно в $\overline{D(0,r)}$ сходится к функции $f_r(z) - f_r(a)$. Согласно теореме Гурвица, при достаточно больших целых m функции $p_{s_m}(z) - p_{s_m}(a_{s_m})$ и $f_r(z) - f_r(a)$ должны иметь одинаковое число нулей. Однако у первой функции их 2, а у второй — только 1. Полученное противоречие завершает доказательство требуемого утверждения.

Таким образом, мы может найти такие числа $\rho \in (1,r)$ и $t \in \mathbb{Z}_+$ такие, что многочлен p_t однолистен в круге $D(0,\rho)$ и $\|p_t - f_r\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leqslant \varepsilon/2$. Таким образом, $\|\varphi - p_t\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leqslant \varepsilon$, а многочлен p_t однолистен в круге $D(0,\rho)$ при $\rho > 1$. Таким образом (жорданова) область $p_t(\mathbb{D})$ имеет аналитическую границу и является (в силу утверждения следствия 23) неванлинновской областью. А из неравенства $|\varphi(\zeta) - p_t(\zeta)| < \varepsilon$ при $\zeta \in \mathbb{T}$ вытекает, что граница области $p_t(\mathbb{D})$ лежит в 2ε-окрестности границы области G. □

Регулярность границ неванлинновских областей

Рассмотрим вопрос о регулярности границ неванлинновских областей. Сразу отметим, что построение неванлинновских областей с неаналитическими границами, так же как с другими предписанными аналитическими или геометрическими свойствами, является достаточно трудной задачей, требующей использования весьма тонких аналитических конструкций и оценок. Первый пример неванлинновской области с нигде не аналитической границей был построен в работе [17].

Исследованию возможной регулярности и иррегулярности границ неванлинновских областей посвящены работы [35], [4] и [21].

Обсудим полученные в этих работах результаты. Все они получены с использованием метода, основанного на построении в модельных пространствах, определяемых подходящими бесконечными произведениями Бляшке, однолистных функций, имеющих требуемое граничное поведение. Опишем этот метод чуть более подробно.

Пусть B — бесконечное произведение Бляшке с нулями $\{a_1, a_2, \ldots\}$, и пусть $B_0 \equiv 1$, а B_n при целых $n \geqslant 1$ — это произведение первых n множителей произведения B. Хорошо известно (см., например, [39]), что система функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$g_n(z) := \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}\, B_{n-1}(z)}{1-\overline{a}_n z},$$

образует ортонормированный базис в модельном пространстве K_B, определенном произведением Бляшке B. Если же B — это *интерполяционное* произведение Бляшке, т.е. если для последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ выполняется *условие Карлесона*:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} \left|\frac{a_n - a_k}{1-a_n\overline{a}_k}\right| > 0,$$

то система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\overline{a}_n z},$$

образует базис Рисса в K_B (см., например, [26, лекция 4]).

В [35, теорема 3] было доказано, что для любого $\tau \in (0,1)$ существует неванлинновская область с границей, принадлежащей классу C^1, но не классу $C^{1,\tau}$. Эта область была получена как конформный образ круга $\mathbb{D}$ при отображении функцией φ вида $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(z)$, причем последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, определяющая функцию φ, имеет единственную точку накопления на $\mathbb{T}$. В [4, теорема 2] этот результат был существенно усилен, а использованная конструкция оказалась заметно проще. Так, было доказано, что для любого числа $\tau \in (0,1)$ и для любого замкнутого подмножества $E \subseteq \mathbb{T}$ существует интерполяционная последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, такая, что множество ее предельных точек равно E, а в пространстве K_B, где B — соответствующее произведение Бляшке, существует однолистная функция φ вида $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(z)$, конформно отображающая $\mathbb{D}$ на неванлинновскую область $\varphi(\mathbb{D})$ с границей, принадлежащей классу C^1, но не классу $C^{1,\tau}$.

Для формулировки следующих результатов нам понадобится понятие модуля спрямляемости спрямляемой жордановой кривой, которое недавно ввел Е. П. Долженко [12]. Пусть $\mathit{\Gamma}$ — спрямляемая жорданова кривая (замкнутая или разомкнутая, с концами или без них). Модулем спрямляемости $\mathrm{mr}(\mathit{\Gamma},\delta)$, $\delta > 0$, называется величина $\mathrm{mr}(\mathit{\Gamma},\delta) := \sup\{d(\mathit{\Gamma}; z, w)\colon z, w \in \mathit{\Gamma},\ |z-w| \leqslant \delta\}$, где $d(\mathit{\Gamma}; z, w)$ обозначает либо длину дуги $\mathit{\Gamma}(z,w)$ кривой $\mathit{\Gamma}$ с концами z и w — в случае разомкнутой кривой $\mathit{\Gamma}$, либо меньшую из длин двух дуг $\mathit{\Gamma}(z,w)$ кривой $\mathit{\Gamma}$ с этими концами — в случае замкнутой кривой $\mathit{\Gamma}$. Определим, при $\tau \in (0{,}1]$, класс $\mathscr{G}_0^\tau$, состоящий из всех спрямляемых жордановых кривых $\mathit{\Gamma}$, таких, что $\mathrm{mr}(\mathit{\Gamma},\delta) \leqslant c\delta^\tau$ при всех $\delta \in (0,\delta_0)$ для некоторых $c > 1$ и $\delta_0 > 0$. Таким образом, в классе $\mathscr{G}_0^\tau$ лежат кривые, в определенном смысле «близкие» к неспрямляемым.

Имеет место следующий результат, см. [4, теорема 3]: для любого $\tau \in (0{,}1]$ существует неванлинновская область G, такая, что $\partial G \notin \mathscr{G}_0^\tau$. При этом $G = \varphi(\mathbb{D})$, где φ — однолистная функция вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n$.

Также можно показать, что в пространстве K_B, где B — это подходящим образом подобранное произведение Бляшке, можно найти такую однолистную функцию φ вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n$, для которой φ' не принадлежит пространству H^p ни при каком $p > 1$ (см. [4]).

Приведенную серию утверждений о существовании неванлинновских областей с «почти неспрямляемыми» границами мы завершим результатом недавней работы [21], в которой был построен первый пример неванлинновской области с неспрямляемой границей. Соответствующая область также имеет вид $\varphi(\mathbb{D})$, где φ — подходящая однолистная функция, принадлежащая модельному пространству K_B для специально подобранного произведения Бляшке.

К сожалению, вплоть до настоящего времени не удается получить результат о минимально возможной регулярности границ неванлинновских областей (например, в виде оценки максимально возможной размерности по Хаусдорфу границ таких областей).

Неванлинновские и классические квадратурные области

В завершение этой главы рассмотрим взаимосвязь понятий неванлинновских и квадратурных областей. Интерес к такому сравнению вызван тем, что обо эти понятия связаны с возможным совпадением функции $\overline{z}$ на границе рассматриваемой области с функцией, голоморфной (или мероморфной) в некоторой окрестности (возможно односторонней) границы этой области.

Определение 25. *Область $G \subset \mathbb{C}$ называется квадратурной областью в широком смысле, если существует распределение T с условием* $\operatorname{Supp} T \subset G$*, такое, что для любой функции $f \in L^1_a(G)$ имеет место равенство*

$$\int_G f(z)\, dA(z) = \langle T \mid f \rangle. \tag{4.9}$$

Область G называется классической квадратурной областью, если существуют конечное множество $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset G$ и набор коэффициентов $c_{j,k}$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 0, \ldots, n_j$, $N, n_j \in \mathbb{Z}_+$, такие, что для любой функции $f \in L^1_a(G)$ выполнено равенство

$$\int_G f(z)\, dA(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n_j} c_{j,k} f^{(k)}(a_j). \tag{4.10}$$

Равенства (4.9) и (4.10) называются квадратурными формулами (или квадратурными соотношениями) для G. Важно отметить, что они являются точными для всех голоморфных интегрируемых в области G функций. Класс всех классических квадратурных областей обозначим через QD, а класс всех квадратурных областей в широком смысле — через $QDWS$. Из теоремы о среднем для голоморфных функций вытекает, что $\mathbb{D} \in QD$. Можно также показать, что $\mathcal{D}_{a,b} \in QDWS \setminus QD$, но $\mathcal{D}'_{a,b} \in QD$. Квадратурные области естественно возникают во многих задачах комплексного анализа. Одно из первых упоминаний о квадратурных областях содержится в [54], а приведенные выше определения даны в том виде, как они содержатся в [78]. Отметим сборник [94], посвященный современному состоянию исследований квадратурных областей.

Пусть B — жорданова область с аналитической границей Γ. Тогда конформное отображение φ круга $\mathbb{D}$ на B и функция Шварца S контура Γ

связаны соотношением (4.6). Как было показано в предложении 15, область B является неванлинновской в том и только том случае, когда функция Шварца S ее границы мероморфна в B. Но, как показано в [54, глава XIV], это же самое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы область B была классической квадратурной. Кроме того, в [54, глава XIV] показано, что условие мероморфности функции S в B эквивалентно тому, что φ — это рациональная функция, однолистная в $\mathbb{D}$. Таким образом, в случае жордановых областей с аналитическими границами классы *ND* и *QD* совпадают (и состоят из областей, которые являются образами единичного круга при отображении рациональными однолистными функциями).

Теорема 26. *В классе ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$ имеет место включение QD $\subset$ ND. Но QD $\neq$ ND.*

Доказательство. Нам будет удобно начать с более общего случая, когда область G является квадратурной областью в широком смысле. Пусть распределение T взято из определения 25 для G. Докажем вначале, что существует функция $S \in \mathcal{O}(G \setminus \operatorname{Supp} T) \cap C(\overline{G} \setminus \operatorname{Supp} T)$, такая, что $\overline{z} = S(z)$ на ∂G. При доказательстве этого факта мы будем использовать идеи и ряд конструкций из работ [38] и [78, гл. 4].

Пусть I_G — характеристическая функция области G, т.е. $I_G(z) = 1$ при $z \in G$ и $I_G(z) = 0$ в противном случае. Рассмотрим преобразование Коши F функции I_G, т.е.

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{dA(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Хорошо известно, что $F \in C(\mathbb{C})$. Кроме того, при $z \in \overline{G}$ имеет место равенство

$$F(z) = \overline{z} + g(z),$$

где $g \in C(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(G)$. В самом деле, пусть $r > 0$ таково, что круг $D = D(0, r)$ с центром в начале координат и радиусом r содержит $\overline{G}$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dA(\zeta)}{z - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{D \setminus G} \frac{dA(\zeta)}{z - \zeta},$$

причем первый интеграл в этом равенстве равен $\overline{z}$, а второй представляет собой функцию, непрерывную всюду в $\mathbb{C}$ и голоморфную в G и вне $\overline{D}$.

Рассмотрим теперь преобразование Коши R распределения T, т.е. $R = (\pi z)^{-1} * T$. Тогда R — это голоморфная вне $\operatorname{Supp} T$ функция. Определим функцию $S := -g - R$. Из отмеченных свойств функций g и R непосредственно вытекает, что $S \in C(\overline{G} \setminus \operatorname{Supp} T) \cap \mathcal{O}(G \setminus \operatorname{Supp} T)$. Для того чтобы проверить равенство $\overline{z} = S(z)$ на ∂G заметим, что из (4.9) вытекает, что $F(z) = -R(z)$ при $z \notin G$. Тогда для любого $z \in \partial G$ имеют место равенства

$$S(z) = -g(z) - R(z) = \overline{z} - F(z) - R(z) = \overline{z}.$$

Так как $G \in QD$, то из (4.10) вытекает, что $T = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n_j} c_{j,k} \boldsymbol{\delta}_{a_j}^{(k)}$, где через $\boldsymbol{\delta}_a$ обозначена дельта-функция Дирака с носителем в точке $a \in \mathbb{C}$. Тогда

$$R(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n_j} \frac{k! c_{j,k}}{(z - a_j)^{k+1}},$$

т.е. R является рациональной функцией. Но из этого следует, что функция $S = -g - R$ является мероморфной в G откуда $G \in ND$.

Покажем теперь, что $QD \neq ND$ для ограниченных односвязных областей общего вида. Пусть $G \in QD$. Тогда существует мероморфная в G и непрерывная в $\overline{G} \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$ функция S, такая, что $S(z) = \overline{z}$ на ∂G (эту функцию называют односторонней функцией Шварца для ∂G). Из существования такой функции S и из [75, теорема 5.2] вытекает, что ∂G состоит из конечного числа аналитических кривых. Но, как было отмечено выше, существуют неванлинновские области с нигде не аналитическими границами. $\square$

Замечание. При доказательстве этой теоремы было показано, что граница любой квадратурной области (в широком смысле) имеет одностороннюю функцию Шварца, т.е. такую функцию $S \in \mathcal{O}(G \setminus \operatorname{Supp} T) \cap C(\overline{G} \setminus \operatorname{Supp} T)$, что $\overline{z} = S(z)$ на ∂G. Это соотношение напоминает соотношение (4.5) из определения неванлинновской области. Но важно отметить, что отношение u/v из (4.5) не является, в общем случае, непрерывным вплоть до границы рассматриваемой (неванлинновской) области, а равенство (4.5) выполняется, в отличии от равенства $\overline{z} = S(z)$ для квадратурных областей, не на всей границе, а только почти всюду в смысле конформного отображения. В силу этого обстоятельства и существуют неванлинновские области с весьма нерегулярными границами (что невозможно для квадратурных областей).

Кроме того, во всех известных примерах неванлинновских областей с нигде не аналитическими границами полюсы соответствующей ND-функции накапливаются к границе такой области.

Однако имеет место следующее утверждение, условиям которого удовлетворяет, например, овал Неймана $\mathcal{D}'_{a,b}$:

Замечание. Пусть G — жорданова область со спрямляемой границей. Если $G \in ND$, а ND-функция u/v области G такова, что множество нулей $Z(v)$ функции v компактно содержится в G, тогда $G \in QD$.

Доказательство. Так как u/v — это мероморфная в G функция, то множество $Z(v)$ в рассматриваемом случае состоит из конечного числа полюсов. Пусть $\Gamma \subset G$ — это такая замкнутая ломаная со сторонами, параллельными осям координат, что все полюсы функции v лежат в области, ограниченной контуром Γ. Таким образом, функция u/v голоморфна на Γ. Пусть h — некоторая голоморфная в $\overline{G}$ функция. Тогда

$$2i\int_G h(z)dA(z) = \int_{\partial G} h(z)\overline{z}dz = \int_{\partial G} h(z)F(z)dz = \int_\Gamma h(z)\frac{u(z)}{v(z)}dz,$$

причем в предпоследнем равенстве учтено, что равенство (4.5) в рассматриваемом случае может пониматься как равенство угловых граничных значений почти всюду на ∂G. Интеграл

$$\int_\Gamma h(z)\frac{u(z)}{v(z)}dz$$

можно вычислить, используя теорему Коши о вычетах. Несложно проверить, что этот интеграл будет равен сумме значений функции h и ее производных в нулях функции v. Таким образом, для любой функции $h \in \overline{G}$ выполняется квадратурное соотношение вида (4.10), т.е. квадратурное соотношение $\int_G h(z)dA(z) = \langle T_v \,|\, h\rangle$, где T_v — это распределение с $\operatorname{Supp}(T_v) = Z(v)$. Используя плотность $H^\infty(G)$ в $L^1_a(G)$ и применяя теорему Фаррела–Рубеля–Шилдса о поточечной ограниченной аппроксимации [10, теорема VI.5.1], найдем последовательность многочленов $\{p_m\}_{m=1}^\infty \in \mathbb{C}[z]$ такую, что $|p_m(z)| \leqslant |g(z)|$ и $p_m(z) \to g(z)$ при $m \to \infty$ для любой точки

$z \in G$. Тогда

$$\int_G g(z)dA(z) = \lim_{m\to\infty} \int_G p_m(z)dA(z) = \lim_{m\to\infty} \big\langle T_v \,|\, p_m \big\rangle =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2i} \int_\Gamma p_m(z)\frac{u(z)}{v(z)}dz = \frac{1}{2i}\int_\Gamma g(z)\frac{u(z)}{v(z)}dz = \big\langle T_v \,|\, g\big\rangle,$$

откуда вытекает, что квадратурное соотношение

$$\int_G h(z)dA(z) = \langle T_v \,|\, h\rangle$$

выполняется и для любой функции $g \in L^1_a(G)$. Таким образом, область G является классической квадратурной областью. □

Мы рассмотрели связь между неванлинновскими и квадратурными областями в классе ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$. В связи с этим отметим, что определение квадратурной области не предполагает ни ограниченности, ни односвязности. Более того, в [53] показано, что существуют многосвязные квадратурные области.

Глава 5

Два критерия равномерной приближаемости

Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а n — натуральное число с условием $n \geqslant 2$. В этой главе мы докажем два критерия равномерной приближаемости функций n-аналитическими многочленами. Первый критерий формулируется в терминах неванлинновских областей и дает полный ответ на вопрос, поставленный в задаче 1, для компактов Каратеодори. Второй критерий справедлив для компактов общего вида, но он не является окончательным, а носит редуктивный характер. Этот критерий позволяет свести вопрос о совпадении пространств $A_n(X)$ и $P_n(X)$ для заданного компакта X к вопросам о совпадении пространств $A_n(X \cap \overline{G})$ и $R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$ для компонент связности G множества $(\widehat{X})^\circ$, не содержащихся в X. Надо отметить, что хотя компакты вида $X \cap \overline{G}$ могут иметь значительно более простую структуру, чем исходный компакт X, задача о совпадении пространств $A_n(X \cap \overline{G})$ и $R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$ сохраняет, по существу, все особенности и трудности исходной задачи о совпадении пространств $A_n(X)$ и $P_n(X)$.

Критерий приближаемости для компактов Каратеодори

Напомним, что ограниченная область в $\mathbb{C}$ называется областью Каратеодори, если $\partial G = \partial G_\infty$ (где G_∞ — это неограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$). Имеет место следующий критерий приближаемости (см. теорему 2.2 в [13]):

Теорема 27.

1) *Пусть ограниченная односвязная область G является неванлинновской. Тогда $R_n(\partial G, \overline{G}) \neq C(\partial G)$ для любого целого числа $n \geqslant 1$.*

2) *Если G — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а $n \geqslant 2$ — натуральное число, то $C(\partial G) = R_n(\partial G, \overline{G})$ в том и только том случае, когда G не является неванлинновской областью.*

3) *Пусть X – компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$, а $n \geqslant 2$ — натуральное число. Тогда $A_n(X) = P_n(X)$ в том и только том случае, когда каждая ограниченная (связная) компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$ не является неванлинновской областью.*

Несмотря на то что первое утверждение теоремы 27 не связано с понятием множества Каратеодори, оно включено в эту теорему так как его доказательство полностью аналогично доказательству соответствующей импликации во втором утверждении.

Доказательство. Выберем и зафиксируем некоторое конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на область G.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $G \in ND$. Тогда найдутся голоморфные и ограниченные в G функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, такие, что $v \not\equiv 0$ и выполняется (4.5). Выберем точку $z_0 \in G$, такую, что $0 < |u(z_0) - \overline{z}_0 v(z_0)|$. Покажем, что

$$\left.\frac{(\overline{z} - \overline{z}_0)^{n-1}}{z - z_0}\right|_{\partial G} \notin R_n(\partial G, \overline{G}).$$

В самом деле, если мы предположим противное, то для любого $\delta > 0$ найдутся такие рациональные функции $f_0, \ldots, f_{n-1}$ с полюсами вне $\overline{G}$, что

$$\left| \sum_{s=0}^{n-1} \overline{z}^s f_s(z) - \frac{(\overline{z} - \overline{z}_0)^{n-1}}{z - z_0} \right| < \delta$$

при $z \in \partial G$. Пусть $w_0 = \psi(z_0) \in \mathbb{D}$. Имеем

$$\left| \sum_{s=0}^{n-1} f_s(\varphi(\zeta)) \frac{u(\varphi(\zeta))^s}{v(\varphi(\zeta))^s} - \frac{[u(\varphi(\zeta)) - \overline{\varphi(w_0)} v(\varphi(\zeta))]^{n-1}}{v(\varphi(\zeta))^{n-1}[\varphi(\zeta) - \varphi(w_0)]} \right| < \delta$$

для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$, в которых выполняется (4.5) (в частности, в таких точках $\zeta \in \mathbb{T}$ угловое предельное значение $\varphi(\zeta)$ определено и $\varphi(\zeta) \in \partial G$). То есть

$$\left| \sum_{s=0}^{n-1} f_s(z) u(z)^s v(z)^{n-1-s} [z - \varphi(w_0)] - [u(z) - \overline{\varphi(w_0)} v(z)]^{n-1} \right| \\ \leqslant \delta \sup_{\xi \in \mathbb{T}} \left| v(\varphi(\xi))^{n-1} [\varphi(\xi) - \varphi(w_0)] \right|, \quad (5.1)$$

при $z = \varphi(\zeta)$, для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$.

Заметим, что функции в левой и правой частях неравенства (5.1) (знаки модулей опускаются) представляют собой граничные значения соответствующих функций класса H^∞, поэтому по принципу максимума модуля мы можем подставить w_0 вместо ζ (и, соответственно, $\varphi(w_0)$ вместо z) в (5.1):

$$\left|[u(\varphi(w_0)) - \overline{\varphi(w_0)}v(\varphi(w_0))]^{n-1}\right| \leqslant \delta \sup_{\xi\in\mathbb{T}} |v(\varphi(\xi))|^{n-1}|\varphi(\xi) - \varphi(w_0)|,$$

что дает противоречие при достаточно малых δ.

Таким образом, доказано первое утверждение теоремы и импликация

$$G \in ND \quad \Rightarrow \quad C(\partial G) \neq R_n(\partial G, \overline{G})$$

из второго утверждения теоремы.

Для того чтобы доказать второе утверждение теоремы, нам надо доказать, что если $C(\partial G) \neq R_n(\partial G, \overline{G})$, то $G \in ND$.

Итак, пусть $C(\partial G) \neq R_n(\partial G, \overline{G})$, тогда $C(\partial G) \neq R_2(\partial G, \overline{G})$. Из этого следует, что найдется мера $\mu \not\equiv 0$ на ∂G, ортогональная пространству $R_2(\partial G, \overline{G})$. Другими словами, это означает, что $\mu \perp R(\overline{G})$ и $\overline{z}\mu \perp R(\overline{G})$.

Так как G является областью Каратеодори, то меры μ и $\overline{z}\mu$ обладают рядом специальных свойств, которые важны для дальнейших рассуждений.

Во-первых, отметим, что *меры μ и $\overline{z}\mu$ сосредоточены на достижимой части $\partial_a G$ границы области G* (см. определение 69 в главе 9 ниже) *и не имеют атомов*. Это свойство вытекает из [43, лемма 7]; оно будет подробно рассмотрено и обсуждено в связи со свойствам множеств Каратеодори в главе 9.

Во-вторых, имеет место следующая лемма, которая будет использована не только при доказательстве этой теоремы, но и в дальнейшем, при изучении свойств множеств Каратеодори.

Лемма 28. *Пусть G — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, μ — мера на ∂G, ортогональная к $R(\overline{G})$, а φ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G. Тогда $(\widehat{\mu} \circ \varphi)\varphi' \in H^1$.*

Доказательство. Пусть $z_0 = \varphi(0)$. Без ограничения общности будем считать (в этом доказательстве), что $\varphi'(0) > 0$.

Выберем последовательность спрямляемых контуров $\{\mathit{\Gamma}_m\}_{m=1}^{\infty}$, таких, что $G \subset B_m \subset B_{m-1}$, где B_m — область, ограниченная контуром $\mathit{\Gamma}_m$, и $\{\mathit{\Gamma}_m\}$ сходится к ∂G при $m \to \infty$. В качестве таких контуров $\mathit{\Gamma}_m$ можно взять, например, образы окружностей $\{|\zeta| = 1 - (m+1)^{-1}\}$ при каком-либо фиксированном конформном отображении круга $\{|\zeta| < 1\}$ на область G_∞).

Пусть ψ_m — это конформный изоморфизм $\psi_m\colon B_m \to \mathbb{D}$ с нормализацией $\psi_m(z_0) = 0$ и $\psi_m'(z_0) > 0$. Из классической теоремы Каратеодори о сходимости к ядру вытекает, что последовательность $\{\psi_m\}$ сходится к φ^{-1} локально равномерно в G (т.е., равномерно на компактах в G).

Зафиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{D}$ и положим $z_m = \psi_m^{-1}(a)$. Определим функцию $h(\zeta)$ следующим образом:

$$h(\zeta) := \frac{1}{\psi_m(\zeta) - \psi_m(z_m)} - \frac{1}{\psi_m'(z_m)(\zeta - z_m)}$$

при $\zeta \neq z_m$ и

$$h(z_m) := -\frac{\psi_m''(z_m)}{2\psi_m'(z_m)}.$$

Определенная таким образом функция h будет голоморфна в B_m и, следовательно, $h \in R_1(\overline{G})$. Так как $\mu \perp R(\overline{G})$, то $\displaystyle\int h\,d\mu = 0$, откуда

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\psi_m(\zeta) - \psi_m(z_m)} = \frac{\widehat{\mu}(z_m)}{\psi_m'(z_m)}.$$

Определим теперь меры η_m по формулам

$$\eta_m(S) := \mu(\psi_m^{-1}(E \cap \mathbb{D}))$$

для произвольного борелевского множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда $\operatorname{Supp}(\eta_m) \subset \mathbb{D}$ и имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\eta_m(\zeta)}{\zeta - w} = \widehat{\mu}(\psi_m^{-1}(w))(\psi_m^{-1})'(w), \tag{5.2}$$

причем $\eta_m \perp \mathbb{C}[z]$ и $\|\eta_m\| \leqslant \|\mu\|$.

Пусть η_0 — предельная точка последовательности $\{\eta_m\}$ в $*$-слабой топологии (пространства мер). Тогда $\operatorname{Supp}(\eta_0) \subset \mathbb{T}$ и $\eta_0 \perp \mathbb{C}[z]$.

По теореме Риссов найдется функция $h \in H^1$ с условием $\eta_0 = h(\zeta)\, d\zeta_{|\mathbb{T}}$. Напомним, что $h(\zeta)$ — это угловые граничные значения функции h в точке $\zeta \in \mathbb{T}$. Переходя к пределу в (5.2), получаем

$$\widehat{\eta}_0(w) = \widehat{\mu}(\varphi(w))\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{d\eta_0(t)}{t-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{h(t)\,dt}{t-w} = h(w)$$

для всех $w \in \mathbb{D}$, так что $(\widehat{\mu} \circ \varphi)\varphi' \in H^1$ и лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть

$$F_1 := \widehat{\mu}, \quad F_0 := \widehat{\overline{z}\mu}, \quad f_s := (F_s \circ \varphi)\varphi' \quad \text{при } s = 0{,}1.$$

По лемме 28 функции f_0 и f_1 принадлежат пространству H^1. Рассмотрим функцию

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}-\overline{w}}{w-z}\, d\mu(w) = \overline{z}F_1(z) - F_0(z).$$

Так как ядро

$$\frac{\overline{z}-\overline{w}}{w-z}$$

ограничено, а мера μ не имеет атомов, то $F \in C(\mathbb{C})$. Кроме того, при фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ выполнено

$$\frac{\overline{z}-\overline{w}}{w-z} \in \mathfrak{R}_2(\overline{G}),$$

и, таким образом, $F(z) = 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Следовательно,

$$\overline{z}F_1(z) - F_0(z) \to 0$$

при $z \to \partial G$, $z \in G$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{f_1(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)} - f_0(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = F_1(\varphi(\zeta))\overline{\varphi(\zeta)} - F_0(\varphi(\zeta)) = \overline{z}F_1(z) - F_0(z) \to 0$$

при $\zeta \to \mathbb{T}$, $\zeta \in \mathbb{D}$ (здесь $z = \varphi(\zeta)$).

Так как $f_0, f_1 \in H^1$, то функция $f_1(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)} - f_0(\zeta)$ имеет почти всюду на $\mathbb{T}$ угловые предельные значения. Кроме того, для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ и для любого угла Штольца A_ξ с вершиной в точке ξ (напомним, что угол Штольца A_ξ

— это некоторый угол с раствором, меньшим π, с вершиной в точке ξ, биссектриса которого проходит через центр круга $\mathbb{D}$) существует последовательность $\{\zeta_j\} \in A_\xi$, такая, что $\zeta_j \to \xi$ при $j \to \infty$ и $\limsup_{j\to\infty} |\varphi'(\zeta_j)| < \infty$. В самом деле, если это не так, то функция $1/\varphi'(\zeta)$ имеет нулевые угловые значения на множестве положительной длины на $\mathbb{T}$, что невозможно в силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова.

Итак, для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ имеет место равенство $f_1(\xi)\overline{\varphi(\xi)} - f_0(\xi) = 0$ угловых граничных значений. Заметим, что $f_1 \not\equiv 0$, так как $\mu \not\equiv 0$. Поскольку $H^1 \subset N(\mathbb{D})$ (класс Неванлинны) и так как всякая функция класса Неванлинны представляется в виде отношения двух функций класса H^∞, то для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ имеем

$$\overline{\varphi(\xi)} = \frac{f_0(\xi)}{f_1(\xi)} = \frac{g_0(\xi)}{g_1(\xi)} = \frac{u(\varphi(\xi))}{v(\varphi(\xi))},$$

где $g_0, g_1 \in H^\infty$, а $u = g_0 \circ \varphi^{-1} \in H^\infty(G)$ и $v = g_1 \circ \varphi^{-1} \in H^\infty(G)$. Таким образом, $G \in ND$ и второе утверждение теоремы 27 полностью доказано.

Докажем теперь третье утверждение теоремы. Пусть существует ограниченная компонента G множества $\mathbb{C} \setminus X$, которая является неванлинновской областью, т.е. $G \in ND$. Тогда согласно первому утверждению теоремы существует ненулевая мера μ с носителем $\mathrm{Supp}(\mu) \subset \partial G$, такая, что $\mu \perp R_n(\partial G, \overline{G})$ и, следовательно, $\mu \perp P_n(X)$. Так как $\mu \not\equiv 0$ и $\widehat{\mu}(z) = 0$ вне $\overline{G}$, то в силу [43, лемма 4] существует такая точка $z_0 \in G$, что $\widehat{\mu}(z_0) \neq 0$. Это означает, что

$$\mu \not\perp \frac{1}{z - z_0} \in A_n(X),$$

т.е. $A_n(X) \neq P_n(X)$ и «прямая» импликация в третьем утверждении проверена.

Для доказательства обратной импликации в третьем утверждении нам потребуется следующее утверждение, которое является непосредственным следствием леммы 7 из [43] и стандартной теоремы Рунге:

Лемма 29. *Пусть X — компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$ и пусть Ω — некоторая ограниченная компонента его дополнения, а $U = (\widehat{X})^\circ \setminus \Omega$. Тогда существует последовательность $\{q_j\} \subset \mathbb{C}[z]$ с условиями:*

1) $q_j \rightrightarrows 1$ локально равномерно в Ω;

2) $q_j \rightrightarrows 0$ *локально равномерно в* U*;*

3) $\|q_j\|_{\widehat{X}} \leqslant C$*, где* C *— абсолютная константа.*

Пусть μ — произвольная ненулевая мера на X, ортогональная пространству $P_n(X)$. Фиксируем произвольную ограниченную компоненту Ω множества $\mathbb{C} \setminus X$. По условию $\Omega \notin ND$.

Проверим, что $\widehat{\overline{z}^s\mu}(z) = 0$ при $z \in \Omega$ и $s = 0, \dots, n-1$. Согласно лемме 29 выберем последовательность $\{q_l\} \subset \mathbb{C}[z]$ для рассматриваемых X, Ω и $U = (\widehat{X})^\circ \setminus \Omega$. Пусть $\mathscr{F} \subset C(X)$ — некоторое счетное всюду плотное множество. Переходя, если нужно, к подпоследовательности (при помощи подходящего диагонального процесса), можно считать, что последовательность $\left\{ \displaystyle\int g q_l \, d\mu \right\}$ сходится при всех $g \in \mathscr{F}$. Из всюду плотности $\mathscr{F}$ в $C(X)$ вытекает, что последовательность $\left\{ \displaystyle\int g q_l \, d\mu \right\}$ сходится при всех $g \in C(X)$. Таким образом определен непрерывный линейный функционал

$$g \mapsto \lim_{l\to\infty} \int g q_l \, d\mu.$$

Пусть μ_* — это представляющая мера для этого функционала. Тогда $q_l\mu \xrightarrow{*} \mu_*$ при $l \to \infty$, т.е. последовательность $\{q_l\mu\}$ сходится в $*$-слабой топологии пространства мер к μ_*. Следовательно, $\operatorname{Supp}(\mu_*) \subset \partial X$ и для любых $s = 0, \dots, n-1$ и $z_0 \notin \operatorname{Supp}(\mu)$ имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{z}^s\mu_*}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^s \, d\mu_*(z)}{z - z_0} = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^s q_l(z)\, d\mu(z)}{z - z_0} = \\
&= \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int \frac{(q_l(z) - q_l(z_0))\overline{z}^s \, d\mu(z)}{z - z_0} + \frac{q_l(z_0)}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^s \, d\mu(z)}{z - z_0}\right) = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{q_l(z_0)}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^s \, d\mu(z)}{z - z_0} = \begin{cases} \widehat{\overline{z}^s\mu}(z_0) & \text{при } z_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{при } z_0 \in W, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где $W = (U \setminus \operatorname{Supp}(\mu)) \cup \Omega'_\infty$, а Ω'_∞ — неограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$. Из последнего вытекает, что $\mu_* \perp P_n(X)$.

Проверим теперь, что $\widehat{\overline{z}^s\mu}(z) = 0$ на Ω. При этом мы *можем* (*и будем*) *считать*, что $\operatorname{Supp}(\mu) \subset \partial X$ (достаточно рассмотреть вместо μ меру μ_* и повторить рассуждение).

С учетом этого предположения из предыдущей серии равенств вытекает, что $\widehat{\overline{z}^s\mu_*}(z_0) = 0$ при $z_0 \in U \cup \Omega'_\infty$. Поскольку $\operatorname{Supp}(\mu) \subset \partial X$ и $\mu \perp \mathbb{C}[z]$, то, как было отмечено выше, мера μ (и, следовательно, мера μ_*) не имеет атомов. Функция

$$T\mu_*(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})\,d\mu_*(\zeta)}{\zeta - z}$$

непрерывна всюду на $\mathbb{C}$ и обращается в нуль на $U\cup\Omega'_\infty$, так что $T\mu_*=0$ вне $\overline{\Omega}$. Как известно, $\overline{\partial}^2 T\mu_* = \mu_*$ (равенство понимается в смысле обобщенных функций), так что $\mathrm{Supp}(\mu_*)\subset\partial\Omega$ и, следовательно, $\mu_*\perp R_n(\overline{\Omega})$. Так как $\Omega\notin ND$, то, согласно первому утверждению теоремы, $\mu_*=0$ и нужное утверждение получено. Таким образом, доказано, что для любой компоненты Ω дополнения $\mathbb{C}\setminus X$ имеет место $\widehat{\overline{z}^s\mu}(z)=0$ при $z\in\Omega$ и $s=0,\dots,n-1$, т.е. $\mu\perp R_n(X)$.

Для завершения доказательства теоремы 27 остается вспомнить, что если X — компакт Каратеодори, то $R_n(X)=A_n(X)$ при всех натуральных n (см., например, следствие 9). $\square$

Заметим, что если $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ связно, то по теореме Рунге можно показать, что $R_n(\partial\Omega,\overline{\Omega})=P_n(\partial\Omega)$. Из этого факта и из теоремы 27 вытекает следующее утверждение:

Следствие 30. *Пусть G — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, такая, что множество $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ связно, а $n\geqslant 2$ — натуральное число. Тогда равенство $C(\partial G)=P_n(\partial G)$ выполнено в том и только том случае, когда $G\notin ND$.*

Заметим, что критерий приближаемости, полученный в теореме 27, не зависит от конкретного значения порядка полианалитичности $n\geqslant 2$. Более того, из этой теоремы вытекает, что если равенство $A_n(X)=P_n(X)$ выполняется для компакта Каратеодори X при некотором значении $n\geqslant 2$, то для такого компакта выполняется равенство $A_n(X)=P_n(X)$ при *всех* $n\geqslant 2$.

В частности, если компакт X нигде не плотен, то из плотности в пространстве $C(X)$ системы n-аналитических многочленов при некотором (возможно достаточно большом) значении $n\geqslant 2$ вытекает плотность в $C(X)$ системы n-аналитических многочленов при любом $n\geqslant 2$.

Мы вернемся к этому наблюдению в дальнейшем, когда будем обсуждать зависимость условий приближаемости в задаче 1 от порядка полианалитичности.

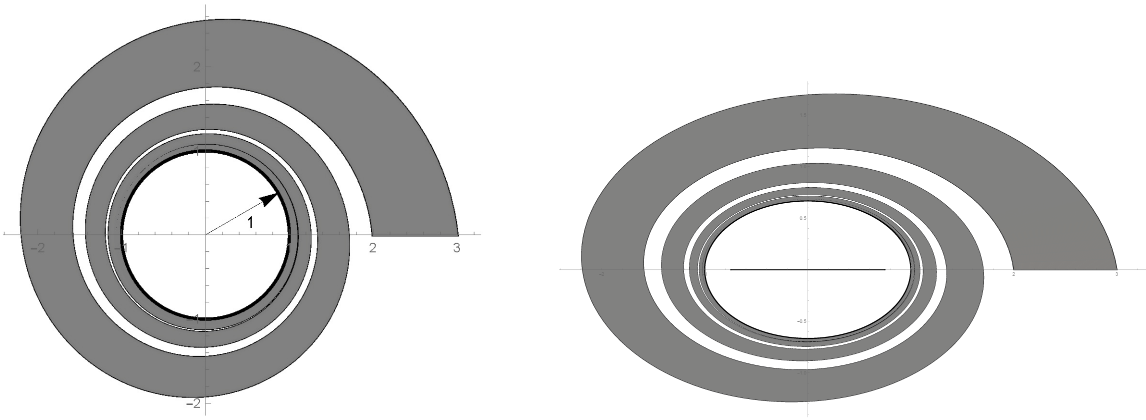

Рис. 9. Два «рога изобилия» — $\mathcal{U}_1$ (слева) и $\mathcal{U}_2$ (справа)

Проиллюстрируем теорему 27 двумя примерами типа «рога изобилия». Рассмотрим область $\mathcal{U}_1$, ограниченную двумя спиралями, скажем $z = (1 + e^{-t})e^{it}$ и $z = (1 + 2e^{-t})e^{it}$ при $t \in [0, +\infty)$, и отрезком $[2{,}3]$ вещественной оси. При этом множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{U}}_1$ состоит из двух связных компонент — из единичного круга $\mathbb{D}$ и из области $\mathcal{U}_{1\infty}$.

Так как спирали и отрезок $[2{,}3]$, ограничивающие область $\mathcal{U}_1$, являются аналитически независимыми аналитическими кривыми, то область $\mathcal{U}_1$ не является неванлинновской (см. предложение 17).

Рассмотрим компакт $X_1 := \partial\mathcal{U}_1$. Множество $\mathbb{C} \setminus X_1$ имеет три связные компоненты: две ограниченные (это области $\mathbb{D}$ и $\mathcal{U}_1$) и одну неограниченную (область $\mathcal{U}_{1\infty}$). При этом $\mathbb{D} \in \mathit{ND}$, а $\mathcal{U}_1 \notin \mathit{ND}$. С учетом этих фактов из теоремы 27 вытекает, что выполнены следующие утверждения:

$R_n(X_1,\overline{\mathcal{U}}_1) = C(X_1) \neq P_n(X_1)$ при всех целых $n \geqslant 2$;

$A_n(\overline{\mathcal{U}}_1) \neq P(\overline{\mathcal{U}}_1)$ при всех целых $n \geqslant 2$;

$A_n(X_1 \cup \mathbb{D}) = P_n(X_1 \cup \mathbb{D})$ для любого целого $n \geqslant 2$.

В последнем случае необходимо заметить, что дополнение к компакту $X_1 \cup \mathbb{D}$ имеет только одну ограниченную связную компоненту — область $\mathcal{U}_1$, которая не является неванлинновской.

Далее, рассмотрим область $\mathcal{U}_2$, которая является образом области $\mathcal{U}_1$ при отображении $(x + iy) \mapsto (x + iy/2)$. Эта область также представляет собой «рог изобилия». Однако, если область $\mathcal{U}_1$ имела вид «внешней змейки», наматывающейся на единичный круг $\mathbb{D}$, то область $\mathcal{U}_2$ — это «внешняя змейка», наматывающаяся на область $\mathcal{D}_{1,1/2}$, ограниченную эллипсом $\varGamma_{1,1/2}$.

Для компакта $X_2 = \partial\mathcal{U}_2$ множество $\mathbb{C} \setminus X_2$ состоит их трех компонент.

Обе ограниченные компоненты этого множества — области $\mathcal{D}_{1,1/2}$ и $\mathcal{U}_2$ не являются неванлинновскими. Для области $\mathcal{U}_2$ (как и для области $\mathcal{U}_1$) это вытекает из предложения 17, а для области $\mathcal{D}_{1,1/2}$ — из предложения 3. Таким образом, справедливы следующие утверждения:

$C(X_2) = P_n(X_2)$ для любого целого $n \geqslant 2$;
$A_n(\overline{\mathcal{U}}_2) = P_n(\overline{\mathcal{U}}_2)$ для любого целого $n \geqslant 2$.

Редуктивный критерий приближаемости для компактов общего вида

Для произвольного компакта $X \subset \mathbb{C}$ рассмотрим множество $(\widehat{X})^\circ$ — внутренность полиномиальной выпуклой оболочки X, и введем совокупность $\{\Omega_k\colon k \in \mathfrak{sc}(X)\}$, состоящую из всех связных компонент множества $(\widehat{X})^\circ$, не содержащихся в X. Здесь $\mathfrak{sc}(X)$ — некоторое конечное или счетное множество индексов. В этом параграфе мы докажем следующую теорему, полученную в работе [5]:

Теорема 31. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а $n \geqslant 2$ — натуральное число. Равенство $A_n(X) = P_n(X)$ верно в том и только том случае, когда для любого $k \in \mathfrak{sc}(X)$ имеет место равенство $A_n(X \cap \overline{\Omega}_k) = R_n(X \cap \overline{\Omega}_k, \overline{\Omega}_k)$.*

Доказательство. Пусть $A_n(X) = P_n(X)$. Рассмотрим произвольную область Каратеодори G, и пусть $f \in A_n(X \cap \overline{G})$. Докажем, что $f \in R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$. Продолжим функцию f (по теореме Брауэра) до непрерывной функции с компактным носителем на всей плоскости. Далее мы будем следовать доказательству теоремы 7 (в случае компактов Каратеодори). Возьмем разбиение единицы $\{\varphi_j, D(a_j,\delta)\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ такое же, как в доказательстве этой теоремы, и рассмотрим соответствующие локализованные функции $f_j = V_{\varphi_j} f$. Напомним, что $f = \sum_j f_j$, причем соответствующая сумма конечна и $\overline{\partial}^n f_j = \varphi_j \overline{\partial}^n f$. Как и раньше, в приближении нуждаются только функции f_j, такие, что

$$j \in J = \{j \in \mathbb{Z}^2\colon D(a_j,\delta) \cap \operatorname{Supp}(f) \neq \varnothing\}.$$

Разобьем множество J на три части:

$$J_1 := \{j \in J\colon D(a_j,\delta) \subset G\}$$
$$J_2 := \{j \in J\colon D(a_j,\delta) \cap \overline{G} = \varnothing\}$$
$$J_3 := \{j \in J\colon D(a_j,\delta) \cap \partial G \neq \varnothing\}.$$

При этом $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3$. Заметим, что при $j \in J_1$ соответствующая локализованная функция f_j принадлежит пространству $A_n(X)$, но $A_n(X) = P_n(X) \subset R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$.

Если $j \in J_2$, то, используя метод Рунге движения полюсов, можно показать, что $f_j \in R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$ и в этом случае.

Остается рассмотреть случай $j \in J_3$. Так как $\overline{G}$ является компактом Каратеодори, для каждого $j \in J_3$ можно найти такую точку $a_j^* \in D(a_j,\delta)\setminus\overline{G}$ и жорданову кривую γ_j, лежащую в $\overline{D(a_j^*,\delta)} \setminus \overline{G}$ с начальной точкой a_j^* и конечной точкой на $\partial D(a_j^*,\delta)$. Используя такие кривые, при всех $j \in J_3$ можно построить такие функции g_j, являющиеся n-аналитическими вне γ_j и, следовательно, принадлежащие $R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$, что

$$\Big\| \sum_{j\in J_3} (f_j - g_j) \Big\|_{X\cap\overline{G}} \to 0$$

при $\delta \to 0$. Это построение осуществляется аналогично соответствующему построению в доказательстве теоремы 7. Остается заметить, что функция

$$\sum_{j\in J_1\cup J_2} f_j + \sum_{j\in J_3} g_j$$

принадлежит $R_n(X \cap \overline{G}, \overline{G})$ и является аппроксимантой для f.

Докажем теперь обратное утверждение. Предположим, что для любого $k \in \mathfrak{sc}(X)$ имеет место равенство $A_n(X \cap \overline{\Omega}_k) = R_n(X \cap \overline{\Omega}_k, \overline{\Omega}_k)$. Как и при доказательстве третьего утверждения теоремы 27, мы докажем вначале, что любая мера μ на X, ортогональная пространству $P_n(X)$ будет ортогональна и пространству $R_n(X)$. При доказательстве теоремы 27 было доказано, что если X является компактом Каратеодори, то любая мера, ортогональная $P_n(X)$ будет ортогональна и $R_n(X)$. В рассматриваемом случае нам потребуется незначительно модифицировать приведенные в указанном доказательстве аргументы.

Без ограничения общности будем считать, что $\mathfrak{sc}(X) \neq \varnothing$. В самом деле, если $\mathfrak{sc}(X) = \varnothing$, то компакт X имеет связное дополнение и требуемый результат является простым следствием теоремы 7 и метода Рунге.

Пусть $k \in \mathfrak{sc}(X)$. Используя лемму 29, выберем последовательность многочленов комплексного переменного $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, такую, что $\|q_l\|_{\widehat{X}} \leqslant C$ для некоторой абсолютной константы $C > 0$ и выполняются следующие свойства: $q_l \to 1$ локально равномерно в G_k и $q_l \to 0$ локально равномерно в $(\widehat{X})^\circ \setminus G_k$ при $l \to \infty$.

Пусть, как и в доказательстве третьего утверждения теоремы 27, μ_k — это некоторая предельная точка последовательности $\{q_l \mu\}$ в $*$-слабой топологии пространства мер. Тогда $\operatorname{Supp}(\mu_k) \subset (X \cap \overline{G}_k) \cup \partial\widehat{X}$ и $\mu_k \perp P_n(X)$. Для того чтобы проверить, что $\mu \perp R_n(X)$, нам надо показать, что $\widehat{\overline{z}^s \mu}(z_0) = 0$ для любого $z_0 \in G_k \setminus X$ при $s = 0,1,\ldots,n-1$.

Так как $\widehat{\overline{z}^s \mu}(w) = \widehat{\overline{z}^s \mu_k}(w)$ при $w \in G_k \setminus X$ (это равенство доказывается аналогично равенству (5.3)), то можно без потери общности с самого начала считать, что $\operatorname{Supp}(\mu) \subset (X \cap \overline{G}_k) \cup \partial\widehat{X}$.

Покажем, что из условия $\operatorname{Supp}(\mu) \subset (X \cap \overline{G}_k) \cup \partial\widehat{X}$ вытекает, что $\operatorname{Supp}(\mu_k) \subset X \cap \overline{G}_k$. В самом деле, так как $q_l \to 0$ локально равномерно в $(\widehat{X})^\circ \setminus G_k$, то $\widehat{\overline{z}^s \mu_k}(z) = 0$ при всех $z \in \big((\widehat{X})^\circ \setminus G_k\big) \cup \big(\mathbb{C} \setminus \widehat{X}\big)$ и $s = 0,1,\ldots,n-1$. Так как мера μ_k не имеет атомов на $\partial\widehat{X}$, то функция

$$T\mu_k(z) := \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\mu_k(\zeta)$$

непрерывна на $\mathbb{C} \setminus \overline{G}_k$ и обращается в ноль вне $\overline{G}_k$. Отсюда вытекает, что $\mu_{k|\mathbb{C}\setminus\overline{G}_k} = 0$, так как $\overline{\partial}^2 T\mu_k = \mu_k$ (равенство понимается в смысле обобщенных функций). Таким образом,

$$\mu_k \perp R_n(X \cap \overline{G}_k, \overline{G}_k) = A_n(X \cap \overline{G}_k)$$

и, следовательно, $\widehat{\overline{z}^s \mu}(z_0) = 0$ для любого $z_0 \in G_k \setminus X$ при $s = 0,1,\ldots,n-1$. Так как $k \in \mathfrak{sc}(X)$ было выбрано произвольно, то

$$\widehat{\overline{z}^s \mu}(z_0) = 0$$

при всех $z_0 \in \mathbb{C} \setminus X$ и $s = 0,1,\ldots,n-1$.

А это в точности означает, что $\mu \perp R_n(X)$.

Итак, мы показали, что из условия $R_n(X\cap\overline{G}_k,\overline{G}_k)=A_n(X\cap\overline{G}_k)$ при всех $k\in\mathfrak{sc}(X)$ вытекает, что $P_n(X)=R_n(X)$. Для завершения доказательства теоремы нам остается проверить, что из этих условий вытекает равенство $A_n(X)=R_n(X)$. Для доказательства этого утверждение мы снова используем метод локализации. Пусть разбиение единицы $\{D(a_j,\delta),\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ выбрано как и доказательстве первого утверждения теоремы. Рассмотрим функцию $f\in A_n(X)$ и построим соответствующие локализованные функции $f_j=V_{\varphi_j}f$. Заметим, что если $D(a_j,\delta)\cap\widehat{X}=\varnothing$ или $D(a_j,\delta)\cap\partial\widehat{X}$, то соответствующие функции f_j лежат в $R_n(X)$ и в приближении не нуждаются. Остается случай, когда $D(a_j,\delta)\subset(\widehat{X})^\circ$. В этом случае $D(a_j,\delta)$ лежит в некоторой связной компонента Ω множества $(\widehat{X})^\circ$. Если при этом $\Omega\subset X^\circ$, то $f_j=0$, а такие функции тоже не нуждаются в приближении. Если же $\Omega\not\subset X^\circ$, то найдется $k\in\mathfrak{sc}(X)$, для которого $\Omega=G_k$. Так как

$$f\in A_n(X\cap\overline{G}_k)=R_n(X\cap\overline{G}_k,\overline{G}_k),$$

то найдется последовательность $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что:

— каждая функция g_m в ней является n-аналитической в некоторой окрестности U_m множества $X\cap\overline{G}_k$;

— после надлежащего продолжения функции g_m до функции $\widetilde{g}_m$ класса $C(\overline{G}_k)$ выполнено $\widetilde{g}_m\rightrightarrows_{\overline{G}_k} f$ при $m\to\infty$.

Используя свойства оператора Витушкина (см., например, лемму 8), получаем

$$\|\varPhi_n*(\varphi_j\overline{\partial}^n\widetilde{g}_m)-f_j\|_X=\|\varPhi_n*(\varphi_j(\overline{\partial}^n\widetilde{g}_m-\overline{\partial}^n f_j))\|_X\leqslant C\|g_m-f_j\|_{\overline{D}}\to 0$$

при $m\to\infty$ и $D=D(a_j,\delta)$. При этом $\varPhi_n*(\varphi_j\overline{\partial}^n\widetilde{g}_m)\in R_n(X)$. Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Заметим, что доказательство теорем 27 и 31 проходят практически по одной и той же схеме. Более того, третье утверждение теоремы 27 может быть непосредственно получено из второго утверждения этой теоремы и из теоремы 31.

Утверждение теоремы 31 является локальным по характеру, хотя, безусловно, задача о совпадении пространств $A_n(X)$ и $P_n(X)$ не локальна в стандартном смысле (см., например, [10, гл. 2, §10]).

Утверждение теоремы 31 носит редуктивный характер: в этой теореме задача о совпадении пространств $A_n(X)$ и $P_n(X)$ для компакта X общего вида сводится к задаче о совпадении пространств $A_n(X \cap \overline{G}_k)$ и $R_n(X \cap \overline{G}_k, \overline{G}_k)$ при $k \in \mathfrak{sc}(X)$ для компактов $X \cap \overline{G}_k$, которые могут иметь более простую структуру. По сути дела, задача о совпадении пространств $A_n(X)$ и $P_n(X)$ для компактов общего вида сведена к следующей, на первый взгляд существенно более простой, задаче:

Задача 32. *Пусть G — область Каратеодори, а X — компактное подмножество $\overline{G}$ с условием $A_n(X) = R_n(X, \overline{G})$. При каких дополнительных условиях справедливо равенство $A_n(X \cup \partial G) = R_n(X \cup \partial G, \overline{G})$?*

Важно отметить, что эта задача сохраняет в общем случае все основные особенности и сложности исходной. Изучению задачи 32 будет посвящена следующая глава.

Глава 6

Равномерная аппроксимация на компактах специального вида

В предыдущей главе задача 1 была полностью решена для компактов Каратеодори. Для компактов общего вида был получен редуктивный критерий приближаемости, который сводит задачу 1 к задаче 32.

В этой главе мы рассмотрим задачу 32. Все основные результаты будут формулироваться в терминах специальных модификаций понятия неванлинновской области. В этой главе мы будем придерживаться следующих обозначений: $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число, G — некоторая область Каратеодори, $\varGamma = \partial G$ — ее граница, K — компакт с условием $K \subset \overline{G}$, а $X = \varGamma \cup K$. Кроме того, мы будет предполагать, что $X \neq \overline{G}$, так что X не является компактом Каратеодори.

Один пример отсутствия аппроксимации

Изучение условий приближаемости функций полианалитическими многочленами на компактах, не являющихся компактами Каратеодори, мы начнем со следующего простого утверждения:

Предложение 33. *Пусть L_1 и L_2 — контуры в $\mathbb{C}$, ограничивающие (жордановы) области $B_1 = Int(L_1)$ и $B_2 = Int(L_2)$ соответственно, и пусть $L_2 \subset B_1$. Тогда $P_n(\overline{B}_1 \setminus B_2) \neq A_n(\overline{B}_1 \setminus B_2)$ для любого натурального $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Как было показано выше, неванлинновские области обладают следующим свойством: в любой окрестности произвольного контура существует аналитический неванлинновский контур. Таким образом, существует аналитический контур $L \subset B_1 \setminus B_2$, такой, что область B, ограниченная контуром L, является неванлинновской (см. рис. 10).

Пусть $S(\cdot)$ — функция Шварца контура L. Так как $B \in ND$, то функция S может быть продолжена до мероморфной функции в области B. Пусть

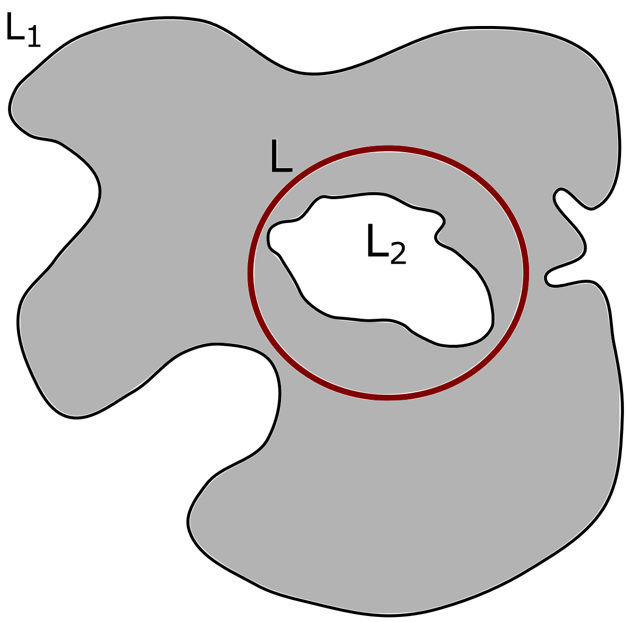

Рис. 10. Компакт $\overline{B}_1 \setminus B_2$ и (неванлинновский) контур L в доказательстве предложения 33

$a_1, \ldots, a_m$ — все полюсы функции S в B (рассматриваемые с учетом их кратностей). Положим

$$F(z) := \prod_{j=1}^{m} (z - a_j) \quad \text{и} \quad G(z) := S(z)F(z).$$

Выберем точку $b \in B_2 \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$ так, что $G(b) \neq 0$. Предположим, что функция

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{z - b}$$

может быть равномерно на $\overline{B}_1 \setminus B_2$, а следовательно, и на L приближена последовательностью n-аналитических многочленов $(p_j)_{j=1}^{\infty}$, где

$$p_j(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k p_{j,k}(z), \qquad p_{j,k} \in \mathbb{C}[z]$$

при всех рассматриваемых j и k. Тогда функция

$$g(z) = \frac{G(z)F^{n-2}(z)}{z - b}$$

равномерно на L приближается последовательностью функций $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ вида

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{n-1} G^k(z) F^{n-k-1}(z) p_{j,k}(z),$$

голоморфных в B.

Однако функция g имеет полюс в точке b, что противоречит принципу максимума модуля. Следовательно, $P_n(\overline{B}_1 \setminus B_2) \neq A_n(\overline{B}_1 \setminus B_2)$. $\square$

Локально неванлинновские области и достаточные условия приближаемости

Для дальнейшего изучения задач 1 и 32 нам потребуется расширить понятие неванлинновской области. В этом параграфе мы введем понятие локально неванлинновской области (см. определение 4.2 в [13] и определение 2 в [49]) и получим в терминах этого понятия ряд новых достаточных условий приближаемости в задаче 32.

Определение 34. *Ограниченная односвязная область G в $\mathbb{C}$ называется локально неванлинновской, если существуют компакт $\Sigma \subset G$ и функции $u, v \in H^\infty(G \setminus \Sigma)$, такие, что $v \not\equiv 0$ и равенство (4.5) выполняется на ∂G почти всюду в смысле конформного отображения.*

Класс всех локально неванлинновских областей мы будем обозначать символом *LND*.

Легко проверить, что область $\mathcal{D}_{a,b}$ при всех вещественных $a > b > 0$ (т.е. область, ограниченная эллипсом, не являющимся окружностью) является локально неванлинновской, но не неванлинновской областью.

Для локально неванлинновской области G существует много различных способов определить требуемый компакт Σ. Так, например, для области $\mathcal{D}_{a,b}$ в качестве Σ можно взять любой континуум, лежащий строго внутри этой области и соединяющий фокусы эллипса $\Gamma_{a,b}$.

Отметим также, что из граничной теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что если G — локально неванлинновская область, а наборы $\{\Sigma_1, u_1, v_1\}$ и $\{\Sigma_2, u_2, v_2\}$ взяты из определения 34 для G, то

$$\frac{u_1(z)}{v_1(z)} = \frac{u_2(z)}{v_2(z)} \quad \text{при} \quad z \in G \setminus \widehat{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}.$$

Разумеется, как и в случае неванлинновских областей, мы можем (и будем) считать, что функции u и v не имеют общих нулей в $G \setminus \Sigma$.

Отношение u/v, определенное в $G \setminus \Sigma$, мы, как и в случае неванлинновской области, будем называть *ND*-функцией для $G \in LND$.

Для того чтобы зафиксировать, какие компакт Σ и *ND*-функцию u/v мы имеем в виду, работая с данной локально неванлинновской областью G, мы будем использовать обозначение

$$G \sim \{\Sigma, u/v\}.$$

Более того, мы всегда можем (и будем) предполагать, что компакт Σ обладает следующим свойством *минимальности*: *ND*-функция u/v не может быть мероморфно продолжена из $G \setminus \Sigma$ на $G \setminus \Sigma_1$ для любого собственного компактного подмножества $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

Отметим, что локально неванлинновские области могут быть описаны в терминах конформных отображений аналогично тому, как это было сделано для неванлинновских областей в теореме 22. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству первого утверждения теоремы 22:

Предложение 35. *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, а φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на G. Область G является локально неванлинновской в том и только том случае, когда φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа в некоторую односвязную область U, $\overline{\mathbb{D}} \subset U$.*

К сожалению, утверждение второй части теоремы 22 (связь понятия неванлинновской области с теорией модельных пространств) не распространяется на локально неванлинновские области. Это обстоятельство сокращает арсенал средств, которые можно использовать для построения примеров локально неванлинновских, но не неванлинновских областей с предписанными свойствам.

Но ряд свойств неванлинновских областей удается перенести на локально неванлинновский случай. Так, имеет место аналог предложения 17, который позволяет анализировать многие конкретные примеры:

Пусть ограниченная односвязная область G в $\mathbb{C}$ такова, что ∂G содержит две аналитически независимые аналитические дуги γ_1 и γ_2, такие, *что всякая точка* $a \in \gamma_s$, $s = 1{,}2$, *не является предельной точкой для множества* $\partial G \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$. *Тогда* G *не может быть локально неванлинновской областью.*

Имеет место связь между локально неванлинновскими областями и квадратурными областями в широком смысле (см. определение 25), аналогичная связи между неванлинновскими и классическими квадратурными областями, установленной в теореме 26: *в классе ограниченных односвязных областей в* $\mathbb{C}$ *имеет место включение* $QDWS \subset LND$.

Вернемся к достаточным условиям приближаемости в задаче 1 для компактов X вида $\Gamma \cup K$ в случае, когда $K \subset G$. Все основные результаты этого параграфа получены в работе [49]. В этом параграфе мы будем (часто без специальных ссылок) использовать утверждения о свойствах областей Каратеодори и мер, ортогональных к рациональным функциям на границах компактов Каратеодори, обсуждаемые в главе 9 ниже.

Теорема 36. *Пусть* $G \notin ND$ — *область Каратеодори,* $K \subset G$ — *компакт с условием* $A_n(K) = P_n(K)$, *а* $X := K \cup \partial G$. *Если выполнено одно из двух условий:*

1) $G \notin LND$;

2) $G \in LND$, *причем* $G \sim \{\Sigma, u/v\}$, *а функция* u/v *не может быть мероморфно продолжена из* $G \setminus \widehat{\Sigma \cup K}$ *на* $G \setminus \widehat{K}$;

то $A_n(X) = R_n(X, \overline{G})$.

В случае когда G — это жорданова область со спрямляемой границей, соответствующий результат был доказан в [13, теорема 4.3]. Основным элементом доказательства теоремы 36 является следующая лемма:

Лемма 37. *Пусть* G — *область Каратеодори, а* $K \subset G$ — *компакт. Предположим, что существует мера* μ *на* $K \cup \partial G$, *такая, что* $\mu_{|\partial G} \not\equiv 0$ *и* $\mu \perp \mathfrak{R}_2(\overline{G})$. *Тогда область* G *является локально неванлинновской, причем существуют компакт* Ξ *с условием* $\widehat{K} \subset \Xi \subset G$ *и функции* $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in H^\infty(G \setminus \Xi)$, *такие, что* $G \sim \{\Xi, \widetilde{u}/\widetilde{v}\}$ *и* $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \mathcal{O}(G \setminus \widehat{K})$.

Доказательство. Пусть φ — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G, и пусть $\omega = \varphi(d\zeta_{|\mathbb{T}})$ — гармоническая мера на ∂G (см. формулу (9.2) в главе 9). Положим $M := \varphi^{-1}(K)$. При $s = 0{,}1$ определим меры

$$\mu_s := \overline{z}^s \mu \qquad \text{и} \quad \eta_s := \varphi^{-1}(\mu_{s|K}).$$

Так как $\mu_s \perp \mathfrak{R}_1(\overline{G})$ при $s = 0{,}1$, то найдутся две функции $h_0, h_1 \in H^1$, такие, что (см. предложение 78)

$$\mu_s = \overline{z}^s \mu_{|K} + (\widehat{\eta}_s \circ \varphi^{-1} + h_s \circ \varphi^{-1})\,\omega.$$

Так как $\mu_1 = \overline{z}\mu_0$, то

$$\overline{z}(\widehat{\eta}_0 \circ \varphi^{-1} + h_0 \circ \varphi^{-1})\,\omega = (\widehat{\eta}_1 \circ \varphi^{-1} + h_1 \circ \varphi^{-1})\,\omega.$$

Так как $\mu_{|\partial G} \not\equiv 0$, то $\widehat{\eta}_0 + h_0 \not\equiv 0$ в $\mathbb{D} \setminus \widehat{M}$ и, следовательно,

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \frac{\widehat{\eta}_1(\zeta) + h_1(\zeta)}{\widehat{\eta}_0(\zeta) + h_0(\zeta)} \tag{6.1}$$

для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Так как $h_0, h_1 \in H^1 \subset N(\mathbb{D})$ и так как всякая функция класса Неванлинны представима в виде отношения голоморфных ограниченных функций, то существуют функции $u_1, v_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \setminus \widehat{M})$, такие, что u_1, v_1 ограничены вне некоторой окрестности множества $\widehat{M}$ и

$$\frac{\widehat{\eta}_1(w) + h_1(w)}{\widehat{\eta}_0(w) + h_0(w)} = \frac{u_1(w)}{v_1(w)} \tag{6.2}$$

при всех $w \in \mathbb{D}\setminus\widehat{M}$. Заметим, что $\varphi(\widehat{M}) = \widehat{K}$. Это позволяет нам определить требуемые функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$, голоморфные в $G \setminus \widehat{K}$ и ограниченные в $G \setminus \varXi$, где $\varXi$ — некоторый компакт, удовлетворяющий условиям $\widehat{K} \subset \varXi \subset G$, по формулам $\widetilde{u}(z) := u_1(\varphi^{-1}(z))$ и $\widetilde{v}(z) := v_1(\varphi^{-1}(z))$ соответственно.

Из (6.1) и (6.2) вытекает, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство угловых предельных значений

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \frac{\widetilde{u}(\varphi(\zeta))}{\widetilde{v}(\varphi(\zeta))},$$

откуда следует, что равенство $\overline{z} = \widetilde{u}/\widetilde{v}$ выполняется почти всюду на ∂G в смысле конформного отображения. Таким образом $G \in \mathit{LND}$ и $G \sim \{\varXi, \widetilde{u}/\widetilde{v}\}$, а функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ голоморфны в $G \setminus \widehat{K}$. $\square$

Доказательство теоремы 36. Будем рассуждать от противного и предположим, что $A_n(X) \neq R_n(X, \overline{G})$. Тогда найдется мера $\mu \not\equiv 0$ на X, такая, что $\mu \perp R_n(X, \overline{G})$, но $\mu \not\perp A_n(X)$. Заметим, что $\mu_{|\partial G} \not\equiv 0$. В самом деле, если $\mu_{|\partial G} \equiv 0$, то μ — это мера, сосредоточенная на K, что противоречит предположению о том, что $P_n(K) = A_n(K)$.

Пусть выполнено условие (1). Применив лемму 37 к рассматриваемым G, K и μ, получаем, что $G \in \mathit{LND}$, что противоречит условию доказываемого утверждения. Таким образом, если область $G \notin \mathit{LND}$, то μ — нулевая мера. Полученное противоречие означает, что $A_n(X) = R_n(X, \overline{G})$.

Пусть теперь выполнено условие (2), т.е. $G \in \mathit{LND}$. Пусть $\Omega \sim \{\varSigma, u/v\}$ и пусть компакт $\varXi$ и функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ определены в лемме 37 для рассматриваемых G, K и μ. При этом, согласно замечанию, сделанному сразу после определения локально неванлинновской области, на множестве $G \setminus \widehat{\varSigma \cup \varXi}$ имеет место равенство $u/v = \widetilde{u}/\widetilde{v}$ и, так как $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \mathcal{O}(G \setminus \widehat{K})$, то функция u/v продолжается мероморфно в $G \setminus \widehat{K}$. Это противоречит условию (2) и, следовательно, и в этом случае μ — нулевая мера. Таким образом $A_n(X) = R_n(X, \overline{G})$ и в этом случае. $\square$

Доказанная теорема может быть распространена на компакты Каратеодори общего вида. Точнее говоря, справедлив следующий результат, доказательство которого существенно опирается на теорему Бишопа (см. теорему 76 в главе 9):

Теорема 38. *Пусть Y — такой компакт Каратеодори, что $Y^\circ \neq \varnothing$ и $\Omega \notin \mathit{ND}$ для любой (связной) компоненты Ω множества Y°; пусть $K \subset Y^\circ$ — компакт с условием $P_n(K) = A_n(K)$. Если для любой (связной) компоненты Ω множества Y° с условием $K \cap \Omega \neq \varnothing$ выполнено одно из двух условий:*

1') $\Omega \notin \mathit{LND}$;

2') $\Omega \in \mathit{LND}$, причем $\Omega \sim \{\varSigma, u/v\}$ и функция u/v не может быть мероморфно продолжена из $\Omega \setminus \widehat{\varSigma \cup K_\Omega}$ на $\Omega \setminus \widehat{K_\Omega}$ при $K_\Omega = K \cap \Omega$,

то $A_n(\partial Y \cup K) = R_n(\partial Y \cup K, Y)$.

<u>*Доказательство.*</u> Предположим, что $R_n(X, Y) \neq A_n(X)$. Это означает, что существует мера $\mu \not\equiv 0$ на X, такая, что $\mu \perp R_n(X, Y)$, но $\mu \not\perp A_n(X)$. Обозначим через $\mathscr{I}$ совокупность всех связных компонент множества Y°, а через $\mathscr{I}'$ — множество $\{\Omega \in \mathscr{I} : K \cap \Omega \neq \varnothing\}$. При этом множество $\mathscr{I}'$ не более чем конечно. Рассмотрим меру

$$\mu - \sum_{\Omega \in \mathscr{I}'} (\mu_{|K \cap \Omega})^*,$$

где мера η^* определяется (для меры η с носителем в Ω) по формуле из предложения 78 (в главе 9). Определенная нами мера сосредоточена на ∂Y и ортогональна к пространству $\mathfrak{R}_1(Y)$. Следовательно,

$$\mu = \sum_{\Omega \in \mathscr{I}} \mu_\Omega,$$

где $\mu_\Omega = \mu_{|\overline{\Omega}}$ и $\mu_\Omega \perp \mathfrak{R}_1(\overline{\Omega})$. Аналогичное представление справедливо и для меры $\overline{z}\mu$ (которая также ортогональна к пространству $\mathfrak{R}_1(Y)$). Таким образом, для любой компоненты $\Omega \in \mathscr{I} \setminus \mathscr{I}'$ (т.е. в случае, когда $K_\Omega = \varnothing$), мера μ_Ω — это мера на $\partial\Omega$, ортогональная к пространству $\mathfrak{R}_2(\overline{\Omega})$. Так как $\Omega \notin ND$, то $\mu_\Omega \equiv 0$. Таким образом,

$$\mu = \sum_{\Omega \in \mathscr{I}'} \mu_\Omega = \sum_{\Omega \in \mathscr{I}'} \mu_{|\overline{\Omega}}.$$

Пусть теперь $F := \bigcup_{\Omega \in \mathscr{I}'} \partial\Omega$. Тогда $\mu_{|F} \not\equiv 0$. В самом деле, в противном случае, мера μ — это мера на K, но ортогональность меры μ к n-аналитическим многочленам и не ортогональность этой меры к пространству $A_n(K)$ противоречит равенству $P_n(K) = A_n(K)$.

Так как $\mu_{|F} \not\equiv 0$, то существует хотя бы одна компонента $\Omega \in \mathscr{I}'$, для которой $\mu_{|\partial\Omega} \not\equiv 0$. Но, повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 36 получаем, что и в этом случае $\mu_\Omega \equiv 0$. Таким образом, исходная мера μ является нулевой и, следовательно, выполнено равенство $R_n(\partial Y \cup K, Y) = A_n(\partial Y \cup K)$. □

Замечание. Условие $A_n(K) = P_n(K)$ в теореме 36 можно заменить на условие $A_n(K) = R_n(K, \overline{\Omega})$, а в теореме 38 — на условие $A_n(K) = R_n(K, Y)$ соответственно. Доказательства соответствующих утверждений при такой замене не меняются.

Если в условиях теоремы 38 дополнительно потребовать выполнения условия, при котором каждая ограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus Y$ не является неванлинновской областью, то можно доказать, что $A_n(\partial Y \cup K) = P_n(\partial Y \cup K)$. В самом деле, пусть указанное дополнительное предположение верно. С учетом результата теоремы 38 для доказательства равенства $P_n(\partial Y \cup K) = A_n(\partial Y \cup K)$ нам надо показать, $P_n(\partial Y \cup K) = R_n(\partial Y \cup K, Y)$. Это равенство доказывается точно так же, как при доказательстве теоремы 27 доказывается равенство $P_n(X) = R_n(X)$.

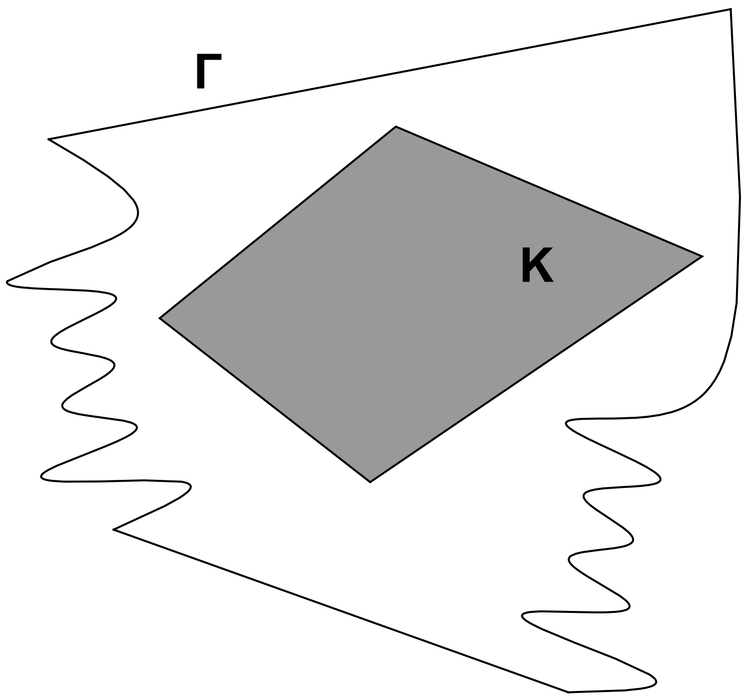

Рис. 11. Пример ситуации, когда $A_n(\Gamma \cup K) = P_n(\Gamma \cup K)$

Таким образом, мы получили следующее утверждение, полезное при анализе конкретных примеров:

Следствие 39. *Пусть Y — компакт Каратеодори с условием $Y^\circ \neq \varnothing$. Равенство $C(\partial Y) = R_2(\partial Y, Y)$ имеет место в том и только том случае, когда никакая из связных компонент множества Y° не является неванлинновской областью. Равенство $C(\partial Y) = P_2(\partial Y, Y)$ имеет место в том и только том случае, когда никакая из связных компонент множеств Y° и $\mathbb{C} \setminus Y$ не является неванлинновской областью.*

Приведем несколько простых примеров применения теоремы 36. Если Γ — это простая замкнутая кривая, содержащая две аналитически независимые аналитические дуги (например, если Γ — это замкнутая жорданова ломаная), ограничивающая область G, то для любого натурального $n \geqslant 2$ и для любого компакта $K \subset G$ с условием $P_n(K) = A_n(K)$ будет выполнено равенство $A_n(\Gamma \cup K) = P_n(\Gamma \cup K)$ (см. рис. 11).

Рассмотрим теперь эллипс $\Gamma_{a,b}$ при $a > b > 0$. Так как полная аналитическая функция (по Вейерштрассу), получаемая аналитическим продолжением аналитического элемента $\bigl(S_{a,b}, \mathbb{C} \setminus [-c, c]\bigr)$, имеет только две конечные особые точки $\pm c$ (фокусы эллипса $\Gamma_{a,b}$), которые являются точками ветвле-

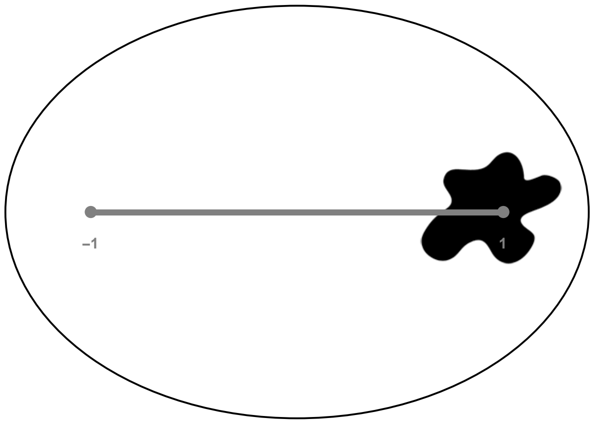

Рис. 12. Пример ситуации, когда $A_n(K \cup \varGamma_{a,b}) = P_n(K \cup \varGamma_{a,b})$

ния второго порядка, то по теореме 36 при всех $n \geqslant 2$ имеет место равенство $A_n(K \cup \varGamma_{a,b}) = P_n(K \cup \varGamma_{a,b})$ для любого компакта $K \subset \mathcal{D}_{a,b}$ с условием $A_n(K) = P_n(K)$, у которого $\widehat{K}$ «не соединяет» точки c и $-c$ (или проще: если $\widehat{K}$ не содержит одну из этих точек). В этом случае в качестве $\varSigma$ берется подходящая жорданова кривая в $\mathcal{D}_{a,b}$, соединяющая c и $-c$ (см. рис. 12).

Приведем еще один пример, который показывает, что достаточные условия приближаемости в теореме 36 не являются необходимыми. Конкретно, равенство $A_n(X) = P_n(X)$ может выполняться для компакта $X = K \cup \varGamma$, где $\varGamma$ — аналитический контур, функция Шварца S которого голоморфна в $G \setminus \widehat{K}$, а K — такой компакт, что $K = \widehat{K}$ и $K^\circ = \varnothing$.

Пусть $\varGamma$ — образ единичной окружности $\mathbb{T}$ под действием отображения $z \mapsto \exp z$. Область G, ограниченная этим контуром $\varGamma$, не является неванлинновской. В самом деле, функция Шварца S контура $\varGamma$ равна $S(z) = \exp(1/\log z)$, где $\log z$ есть главная ветвь логарифма в правой полуплоскости, и, следовательно, S имеет единственную особую точку $z = 1$ в области G, которая является существенно особой. При этом $P_2(\varGamma) = C(\varGamma)$.

Проверим, что $A(K) = 0$, то $P_2(X) = C(X)$ при $X = \varGamma \cup K$. По теореме 36 нам нужно рассмотреть только случай $1 \in K$. Пусть, от противного, $P_2(X) \neq C(X)$. Тогда, несколько модифицируя доказательство леммы 37 (и работая в области G без перехода в единичный круг), можно утверждать, что найдутся мера $\eta \neq 0$ на K и функции h и h_1 класса $E^1(G)$, такие, что

$$\widehat{\overline{z}\eta} - S\widehat{\eta} = Sh - h_1 \tag{6.3}$$

в $G \setminus K$. Так как $A(K) = 0$, то (6.3) верно в $G \setminus \{1\}$ в смысле теории обобщенных функций. Применяя оператор $\overline{\partial}$ к равенству (6.3), получим

$$\overline{z}\eta - S\eta = 0$$

при $z \in G \setminus \{1\}$. Так как $\overline{z} \neq S(z)$ в G (этот факт легко проверяется непосредственным вычислением), то $\operatorname{Supp}\eta = \{1\}$. Следовательно,

$$\widehat{\eta}(z) = \widehat{\overline{z}\eta} = \frac{\text{Const}}{z-1},$$

что противоречит (6.3), ибо для S точка 1 является существенной особенностью.

Можно показать, что тот же результат справедлив, если $\varGamma$ — такой аналитический контур, что ограниченная им область G не является неванлинновской, а функция Шварца S для $\varGamma$ имеет только конечное число особых точек в G и конечное число точек $z \in G$ с условием $\overline{z} = S(z)$.

Продолжим изучение задачи 32. Ранее мы рассматривали случай, когда компакт K целиком содержался в G. Теперь мы получим одно достаточное условие приближаемости в этой задаче в случае, когда компакт K «выходит» на границу области G.

Нам потребуется ввести одно специальное топологическое понятие:

Определение 40. *Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$, и пусть $\gamma \subset \partial U$ — жорданова кривая. Скажем, что γ является входом для U, если существуют открытое связное множество V, такое, что $V \setminus \gamma = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 — это непустые открытые связные множества, такие, что $V_1 \subset U$ и $V_2 \subset \mathbb{C} \setminus \overline{U}$.*

Используя понятие *свободной дуги* (см., например, [72, раздел 3]), можно сказать, что γ является входом для области G, если и только если γ является свободной дугой для G и для $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Если G — это жорданова область, то любая замкнутая поддуга $\gamma \subset \partial G$ является входом для G.

Предложение 41. *Пусть U — ограниченное непустое открытое множество в $\mathbb{C}$, а μ — такая мера, что* $\operatorname{Supp}(\mu) \subset \overline{U}$ *и $\mu \perp \mathfrak{R}_1(\overline{U})$. Если γ — спрямляемая жорданова кривая, являющаяся входом для U, то $\mu_{|\gamma} \ll dz_{|\gamma}$.*

Доказательство. Пусть φ — это конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ нормированное условием $\varphi(0)=\infty$. Так как γ — спрямляемая жорданова дуга, то φ имеет непрерывное продолжение (которое обозначается тем же символом φ) на $\overline{\mathbb{D}}$ и это продолжение может быть выбрано так, чтобы $\varphi(\mathbb{T}^{\pm})=\gamma$, где $\mathbb{T}^{+}=\{\zeta\in\mathbb{T}\colon\ \operatorname{Im}\zeta\geqslant 0\}$, а $\mathbb{T}^{-}=\{\zeta\in\mathbb{T}\colon\ \operatorname{Im}\zeta\leqslant 0\}$. Пусть ψ — это отображение, обратное к φ в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma$. Так как γ является входом для U, то функция $\psi_{|U}$ имеет непрерывное продолжение ψ_0 на $U\cup\gamma$.

Возьмем борелевское множество $E\subset\gamma$, такое, что $|dz|(E)=0$, и рассмотрим произвольный компакт $Y\subset E$. Нам надо показать, что $\mu(Y)=0$. Существуют два компактных множества $Y^{\pm}\subset\mathbb{T}$, такие, что $Y^{\pm}\subset\mathbb{T}^{\pm}$ и $\varphi(Y^{\pm})=Y$. Без ограничения общности можно считать, что $\psi_0(Y)=Y^{+}$. Так как γ — спрямляемая дуга, то из [70, теорема 10.11] вытекает, что $|d\xi|(Y^{+})=0$. Из этого следует (см., например, [10, глава II, §12]), что Y^{+} является множеством пика для алгебры $P(\overline{\mathbb{D}})$. Следовательно, существует функция $h\in P(\overline{\mathbb{D}})$, такая, что

$$\begin{aligned} h(w)&=1, &&\text{если } w\in Y^{+};\\ |h(w)|&<1, &&\text{если } w\notin Y^{+}. \end{aligned}\tag{6.4}$$

Обозначим через W объединение всех ограниченных связных компонент множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{U}$, за исключением компоненты V, такой, что $\gamma\subset\partial V$, и рассмотрим функцию

$$g=\begin{cases} h\circ\psi_0 & \text{на } \overline{U},\\ h\circ\psi_{|W} & \text{на } W.\end{cases}$$

Так как $\psi_0\in C(\overline{U})$ и так как функция $\psi_{|W}$ является голоморфной в окрестности $\overline{W}$, то $g\in A(F)$, где $F=\overline{U}\cup W$. Из теоремы Мергеляна вытекает, что $A(F)=R(F)\subset R(\overline{U})$. Таким образом, $g\in R(\overline{U})$. Из (6.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} g(z)&=1, &&\text{при } z\in Y;\\ |g(z)|&<1, &&\text{при } z\notin Y.\end{aligned}$$

Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости к последовательности $\{g^m\}_{m=1}^{\infty}$ и учитывая тот факт, что $\mu\perp\mathfrak{R}_1(\overline{U})$, получаем:

$$0=\lim_{m\to\infty}\int g^m(z)\,d\mu(z)=\int_Y d\mu(z)=\mu(Y).$$

Итак, для любого компакта $Y \subset E$ имеет место равенство $\mu(Y) = 0$. Таким образом, $|\mu|(E) = 0$. $\square$

Мы готовы теперь сформулировать и доказать упомянутое выше достаточное условие аппроксимации в задаче 32:

Теорема 42. *Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Предположим, что ограниченная односвязная область G такова, что $G \in LND \setminus ND$, $G \sim \{\Sigma, u/v\}$, и пусть существует спрямляемая дуга γ, являющаяся входом для G. Пусть $X \subset \overline{G}$ — такой компакт, что $\partial G \subseteq X$, и пусть $Y := \overline{X \setminus \gamma}$. Предположим, что:*

i) $G \setminus \widehat{Y}$ связно и γ является входом для $G \setminus \widehat{Y}$;

ii) функция u/v не продолжается мероморфно из $G \setminus \widehat{Y \cup \Sigma}$ на $G \setminus \widehat{Y}$;

iii) $R_n(Y, \overline{G}) = A_n(Y)$.

Тогда $R_n(X, \overline{G}) = A_n(X)$.

Доказательство. Предположим, что $R_n(X, \overline{G}) \neq A_n(X)$. В этом случае найдется ненулевая мера μ на X, такая, что $\mu \perp \mathfrak{R}_n(\overline{G})$, но $\mu \not\perp A_n(X)$. Рассмотрим функцию

$$T_\mu(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} d\mu(\zeta).$$

Эта функция обладает следующими свойствами (см., например, [84]): T_μ непрерывна всюду, за исключением точек, являющихся атомами меры μ (таких точек не более чем счетное множество), $T_\mu(z) = 0$ при всех $z \notin \overline{G}$ и $\overline{\partial}^2 T_\mu = \frac{i}{2}\mu$ в обобщенном смысле.

Из приведенного свойства непрерывности функции T_μ вытекает, что для всех $\zeta \in \partial G$, за исключением атомов меры μ, выполняется равенство $T_\mu(\zeta) = 0$. Так как γ — это спрямляемая жорданова дуга, являющаяся входом для Ω, то, согласно предложению 41, $\mu_{|\gamma} \ll dz_{|\gamma}$. Таким образом, мера μ не имеет атомов на γ и, следовательно, $T_\mu(\zeta) = 0$ при всех $\zeta \in \gamma$. Обозначим $\mu_1 := \overline{z}\mu$ и заметим, что

$$T_\mu(z) = \widehat{\mu}_1(z) - \overline{z}\widehat{\mu}(z)$$

при всех $z \in \mathbb{C} \setminus X$. Нам необходима дополнительная информация о поведении голоморфных компонент $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}$ бианалитической функции T_μ в $\mathbb{C} \setminus X$.

Оказывается, что функции $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}$ имеют для почти всех $\zeta \in \gamma$ конечные угловые предельные значения $\widehat{\mu}_1(\zeta)$ и $\widehat{\mu}(\zeta)$ со стороны G. Этот факт (его можно найти, например, в [59, теорема 2.22]) является результатом длительного изучения поведения преобразования Коши мер (более подробно см., например, [59] и [89]). Таким образом, для почти всех точек $\zeta \in \gamma$ имеет место равенство

$$T_\mu(\zeta) = \widehat{\mu}_1(\zeta) - \overline{\zeta}\widehat{\mu}(\zeta) = \widehat{\mu}_1(\zeta) - \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)}\widehat{\mu}(\zeta) = 0, \tag{6.5}$$

где учтено, что равенство (4.5) на γ понимается непосредственно как равенство угловых предельных значений.

Покажем теперь, что $\widehat{\mu}(z) \not\equiv 0$ in $G \setminus \widehat{Y}$. В самом деле, если это не так, то $\widehat{\mu}(\zeta) = 0$ для почти всех $\zeta \in \gamma$. Учитывая (6.5), отсюда получаем, что $\widehat{\mu}_1(\zeta) = 0$ для почти всех $\zeta \in \gamma$, так что $\widehat{\mu}_1 = 0$ в $G \setminus \widehat{Y}$. Таким образом, $T_\mu = 0$ в $G \setminus \widehat{Y}$. Так как $\overline{\partial}^2 T_\mu = \frac{i}{2}\mu$ (в обобщенном смысле), то носитель меры μ содержится в Y. Вспоминая сделанные предположения относительно меры μ, мы получаем, что $\mu \not\equiv 0$, $\mu \perp R_n(Y, \overline{G})$ и $\mu \not\perp A_n(Y)$, однако эти условия противоречат условию (iii) теоремы.

Итак, $\widehat{\mu} \neq 0$ в $G \setminus \widehat{Y}$, откуда $\widehat{\mu}(\zeta) \neq 0$ для почти всех $\zeta \in \gamma$. Из этого факта и из равенства (6.5) вытекает, что для почти всех $\zeta \in \gamma$ имеет место равенство

$$\frac{u(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{\widehat{\mu}_1(\zeta)}{\widehat{\mu}(\zeta)}.$$

Применяя в очередной раз теорему Лузина–Привалова, получаем, что функция u/v должна совпадать с $\widehat{\mu}_1/\widehat{\mu}$ в $G \setminus \widehat{Y \cup \Sigma}$. Из этого следует, что функция u/v может быть мероморфно продолжена из $G \setminus \widehat{Y \cup \Sigma}$ на $G \setminus \widehat{Y}$, что дает требуемое противоречие. □

Приведем два простых примера применения теоремы 42.

Пусть $G \in LND \setminus ND$ — ограниченная односвязная область. Если существует спрямляемая дуга γ, являющаяся входом для G, то имеет место равенство $R_2(\partial G, \overline{G}) = C(\partial G)$.

Как было показано выше, при вещественных $a > b > 0$, область $\mathcal{D}_{a,b}$ такова, что $\mathcal{D}_{a,b} \in LND \setminus ND$. В этом случае в качестве компакта Σ можно взять $\Sigma = [-c, c]$ (где, напомним, точки $\pm c$ — это фокусы эллипса $\Gamma_{a,b}$). Из

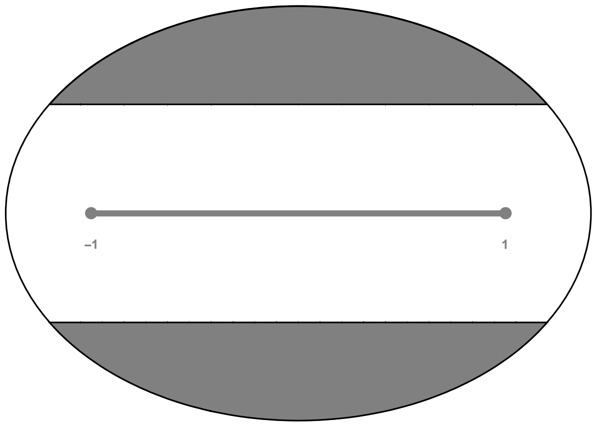

Рис. 13. Компакт $X_1 = \mathit{\Gamma}_{a,b} \cup \{z \in \mathcal{D}_{a,b} \colon 2|\operatorname{Im} z| \geqslant b\}$

теоремы 42 вытекает, что для компакта

$$X_1 := \mathit{\Gamma}_{a,b} \cup \{z \in \mathcal{D}_{a,b} \colon 2|\operatorname{Im} z| \geqslant b\}.$$

выполнено $P_n(X_1) = A_n(X_1)$ для любого целого $n \geqslant 2$ (см. рис. 13).

Области с частично неванлинновскими границами и достаточные условия приближаемости

В этом параграфе, основанном на результатах работы [5], мы введем еще одну модификацию понятия неванлинновской области — понятие области с частично неванлинновской границей. Это понятие позволяет получить новые достаточные условия приближаемости функций полианалитическими многочленами.

Определение 43. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$. Непустое подмножество $\Upsilon \subset E$ называется гранью множества E, если каждая точка $z \in \Upsilon$ имеет окрестность V в $\mathbb{C}$, такую, что найдется гомеоморфизм h из $V \cap E$ на относительно открытое подмножество замкнутой верхней полуплоскости, такой, что $V \cap \Upsilon = \{z \in V \colon \operatorname{Im} h(z) = 0\}$.*

Часто вместо термина «грань множества E» мы будет использовать более краткий термин *E-грань*. Непосредственно из определения 43 вытекает, что любая E-грань Υ локально является жордановой дугой.

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}$, а γ — некоторая U-грань, которая является и $\overline{U}$-гранью. Предположим также, что γ является локально спрямляемой. Если функция f является ограниченной и голоморфной в U, то, как хорошо известно, для почти всех (относительно длины на γ) точек $\zeta \in \gamma$ функция f имеет конечные угловые предельные значения $f(\zeta)$ из U.

Для ограниченной области G, для относительно открытого подмножества $\varLambda \subset \partial G$ и для $\varepsilon > 0$ определим множества

$$G_\varepsilon(\varLambda) = \{z \in G\colon\ \mathrm{dist}(z, \partial G \setminus \varLambda) > \varepsilon\},$$
$$\varLambda_\varepsilon(G) = \{z \in \varLambda\colon\ \mathrm{dist}(z, \partial G \setminus \varLambda) > \varepsilon\}.$$

Положим также $G_\varepsilon(\partial G) = G$ и $(\partial G)_\varepsilon(G) = \partial G$.

Введенные понятия позволяют нам определить класс областей, который мы будем называть *областями с частично неванлинновскими границами*.

Определение 44. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, а $\varUpsilon$ — некоторая G-грань. Область G называется $\varUpsilon$-неванлинновской (точнее, неванлинновской относительно $\varUpsilon$), если существует функция f, мероморфная в области G и удовлетворяющая следующим условиям:*

i) для почти всех $\zeta \in \varUpsilon$ существуют граничные (угловые) предельные значения $f(\zeta)$;

ii) почти всюду на $\varUpsilon$ выполняется равенство $f(\zeta) = \overline{\zeta}$ угловых предельных значений;

iii) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют функции $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ класса $H^\infty(G_\varepsilon(\varUpsilon))$, такие, что $v_\varepsilon \not\equiv 0$ и $f = u_\varepsilon/v_\varepsilon$ в $G_\varepsilon(\varUpsilon)$.

Тот факт, что область G является $\varUpsilon$-неванлинновской удобно обозначать $G \in ND(\varUpsilon)$.

Из граничной теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что если функция f, указанная в определении 44, существует, то она единственна. Однако не ясно, всегда ли можно представить функцию f в виде отношения двух функций класса $H^\infty(G)$ (см., например, [64]).

Заметим также, что если G — жорданова область со спрямляемой границей, то условия $G \in ND$ и $G \in ND(\partial G)$ эквивалентны.

Приведем один простой пример. Пусть G — некоторая неванлинновская область, а дуга γ является $\overline{G}$-гранью. Если Ω — некоторая подобласть области G, а $\gamma_0 \subset \gamma$ — некоторая $\overline{\Omega}$-грань, то $\Omega \in ND(\gamma_0)$. Например, в качестве

G можно рассмотреть круг или овал Неймана, а в качестве γ — непустое открытое подмножество границы соответствующей области.

Напомним, что в предложении 17 было показано, что область, граница которой содержит аналитически независимые аналитические дуги, не может быть неванлинновской и, следовательно, что пространство n-аналитических многочленов при любом $n \geqslant 2$ плотно в пространстве непрерывных функций на границе такой области. Следующее условие обобщает понятие аналитически независимых аналитических дуг в рассматриваемом контексте.

Определение 45. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, и пусть жордановы дуги γ_1 и γ_2 являются $\overline{G}$-гранями. Предположим, что существуют окрестности V_1 и V_2 дуг γ_1 и γ_2, такие, что $G_s := G \cap U_s \in ND(\gamma_s)$ при $s = 1{,}2$. Пусть f_s, $s = 1{,}2$, — соответствующая функция из определения 44 для G_s и γ_s. Дуги γ_1 и γ_2 называются ND, G-независимыми, если не существует пути в G, вдоль которого мероморфные элементы (G_s, f_s), $s = 1{,}2$, являются мероморфными продолжениями друг друга.*

Если дуги γ_1 и γ_2 являются ND, G-независимыми, то область G не является Υ-неванлинновской относительно любой $\overline{G}$-грани Υ, содержащей $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Если γ_1 и γ_2 — аналитически независимые аналитические дуги, то γ_1 и γ_2 также и ND, G-независимы. В частности, в любом многоугольнике любые две его стороны, не лежащие на одной прямой, будут ND, G-независимы относительно области G, ограниченной этим многоугольником.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий введенное понятие зависимости граничных дуг. Рассмотрим образ G круга $\mathbb{D}$ при отображении $z \mapsto ((z+1)^2 - 4)^2$, конформном в $\mathbb{D}$. Так как многочлен $((z+1)^2-4)^2$ однолистен в $\mathbb{D}$, то $G \in ND$. Легко проверить, что $\overline{G}$-грани $\{z \in \partial G\colon\ \operatorname{Re} z < 0\} \cup \{0\}$ и $\{z \in \partial G\colon\ \operatorname{Re} z > 0\}$ не будут ND, G-независимыми.

Теорема 46. *Пусть G — область Каратеодори, а K — компакт в $\overline{G}$, такой, что множество $\Upsilon := \partial G \setminus K$ является локально спрямляемой $\overline{G}$-гранью и выполняется условие*

$$A_n(K) = R_n(K, \overline{G}).$$

Пусть $\{\Omega_s\}$ *— совокупность всех компонент множества* $G \setminus X$*, для которых* $\varUpsilon_s := \partial\Omega_s \setminus X \neq \varnothing$*, где* s *пробегает некоторое* (*не более чем счетное*) *множество индексов. Если* $\Omega_s \notin ND(\varUpsilon_s)$ *при всех таких* s*, то*

$$A_n(\partial G \cup K) = R_n(\partial G \cup K, \overline{G}).$$

Доказательство. Обозначим $X := \partial G \cup K$. Предположим, что $A_n(X) \neq R_n(X, \overline{G})$. Нам надо показать, что найдется такой индекс s, для которого $\Omega_s \in ND(\varUpsilon_s)$. Будем, как и раньше, использовать двойственные методы.

Если $A_n(X) \neq R_n(X, \overline{G})$, то существует такая мера μ с носителем на X, что $\mu \perp \mathfrak{R}_n(\overline{G})$, но $\mu \not\perp A_n(X)$. При этом $\mu_{|\varUpsilon} \not\equiv 0$. В самом деле, если это не так, то $\mathrm{Supp}(\mu) \subset K$, но это противоречит равенству $A_n(K) = R_n(K, \overline{G})$. Так как $\varUpsilon = \bigcup \varUpsilon_s$ и так как множество индексов s является не более чем счетным, то можно найти такой индекс s_0, для которого $\mu_{|\varUpsilon_{s_0}} \not\equiv 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $s_0 = 0$. Докажем, что имеет место свойство $\Omega_0 \in ND(\varUpsilon_0)$. Положим $Y := \overline{G} \setminus (\Omega_0 \cup \varUpsilon_0)$. Тогда $\partial Y \subset \partial G \cup \partial\Omega_0$.

Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$, такое, что множество

$$\varUpsilon_{0,\varepsilon} := \{z \in \varUpsilon_0 \colon\ \mathrm{dist}(z, Y) \geqslant \varepsilon\}$$

непусто и $\mu_{|\varUpsilon_{0,\varepsilon}} \not\equiv 0$. Так как множество $\varUpsilon_0$ является локально спрямляемой $\overline{\Omega}_0$-гранью, то найдется не более чем счетное семейство попарно непересекающихся открытых жордановых дуг $\{\gamma_j\}_{j \in \mathscr{I}_0}$, такое, что $\varUpsilon_0 = \bigcup_{j \in \mathscr{I}_0} \gamma_j$, где $\mathscr{I}_0$ — некоторое множество индексов. Так как $\varUpsilon_{0,\varepsilon}$ — это компакт в $\partial\Omega_0$, а каждая дуга γ_j, $j \in \mathscr{I}_0$, открыта в $\partial\Omega_0$, то найдется конечное подмножество индексов $\mathscr{I} \subset \mathscr{I}_0$, такое, что $\varUpsilon_{0,\varepsilon} \subset \bigcup_{j \in \mathscr{I}}$.

Для каждого индекса $j \in \mathscr{I}$ выберем точки $a_j \in \gamma_j$ и $b_j \in \gamma_j$, такие, что γ_j имеет касательные в точках a_j и b_j. Обозначим через $\widetilde{\gamma}_j$ часть пути γ_j строго между a_j и b_j, направленную от a_j к b_j и имеющий положительную ориентацию относительно G. Кроме того, при выборе a_j и b_j мы потребуем, чтобы

$$\varUpsilon_{0,\varepsilon} \subset \varGamma_0 := \bigcup_{j \in \mathscr{I}} \widetilde{\gamma}_j$$

и $\mu_{|\varGamma_0} \not\equiv 0$. Заметим, что при таком выборе $\varGamma_0$ выполнено неравенство

$$\mathrm{dist}(z, Y) < \varepsilon \qquad \text{при} \quad z \in \varUpsilon_0 \setminus \varGamma_0.$$

Так как область G является областью Каратеодори, то область G_∞ — односвязна. Естественно расширив определение грани на области в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащие точку ∞, мы можем утверждать, что каждая дуга $\widetilde{\gamma}_j$ является $\overline{G}_\infty$-гранью. Пусть $\mathscr{I} = \{1,2,\ldots,N\}$, и пусть дуги $\widetilde{\gamma}_j$, $j = 1,\ldots,N$, идут в последовательном порядке на ∂G_∞. Разумеется, дуги $\widetilde{\gamma}_j$ отрицательно ориентированы относительно G_∞. Сделаем еще одно дополнительное построение. Для каждого $j = 1,\ldots,N$ построим жордановы спрямляемые дуги ϱ_j в G_∞, начинающиеся в точках b_j, заканчивающиеся в точках a_{j+1}, ортогональные к γ_j в b_j и к γ_{j+1} в a_{j+1}, где мы полагаем $a_{N+1} = a_1$ и $\gamma_{N+1} = \gamma_1$. Кроме того, в этом построении мы можем (и будем) дополнительно требовать, чтобы кривая

$$\widetilde{\varGamma} := \bigcup\nolimits_{j\in\mathscr{I}}(\widetilde{\gamma}_j \cup \varrho_j)$$

была спрямляемой жордановой кривой, окружающей и некасательно пересекающей компакт

$$M := Y \cup \Big(\varUpsilon_0 \setminus \Big(\bigcup\nolimits_{j\in\mathscr{I}} \widetilde{\gamma}_j\Big)\Big).$$

Кроме того, мы потребуем, чтобы кривая $\widetilde{\varGamma}$ имела положительную ориентацию относительно (жордановой) области B, которую она ограничивает. При этом

$$M \subset B \cup \Big(\bigcup\nolimits_{j\in\mathscr{I}}\{a_j, b_j\}\Big),$$

а также имеют место свойства $\mathrm{Supp}(\mu) \subset M \cup \varGamma_0$ и $\varGamma_0 \subset \widetilde{\varGamma}$. Напомним также, что $\mu_{|\varGamma_0} \not\equiv 0$. Заметим еще, что так как $\widetilde{\varGamma}$ пересекает M некасательным образом, то для любого $z \in M$ величины $\mathrm{dist}(z, \widetilde{\varGamma})$ и $\mathrm{dist}(z, \{a_j, b_j : j \in \mathscr{I}\}$ сравнимы.

Пусть теперь $Q(\cdot)$ — многочлен комплексного переменного, имеющий простые нули в точках a_j и b_j при $j = 1,\ldots,N$, т.е.

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{N}(z - a_j)(z - b_j).$$

Определим меру $\mu_0 = Q\mu$. Так как $\mu \perp \mathfrak{P}_n$, то и $\mu_0 \perp \mathfrak{P}_n$.

Рассмотрим теперь меру η, такую, что мера $\eta/|Q|$ — является конечной мерой на M. Мы утверждаем, что мера $\widehat{\eta}(z)\,dz_{|\widetilde{\varGamma}}$ является конечной, а мера

$$\eta + \widehat{\eta}(z)\,dz_{|\widetilde{\varGamma}}$$

является ортогональной к пространству $\mathbb{C}[z]$ и, следовательно, к $P(M \cup \widetilde{\Gamma})$.

Конечность меры $\widehat{\eta}(z)\,dz_{|\widetilde{\Gamma}}$ проверяется следующим образом:

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} |\widehat{\eta}(z)|\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}}\left|\int_M \frac{d\eta(w)}{w-z}\right||dz| \leqslant \\ \leqslant \int_M \left(\int_{\widetilde{\Gamma}} \frac{|dz|}{|w-z|}\right)|d\eta(w)| \leqslant A\int_M \frac{|\widetilde{\Gamma}|}{|Q(z)|}\,|d\eta(z)| < \infty,$$

где A — некоторая положительная постоянная, $|\widetilde{\Gamma}|$ — долина контура $\widetilde{\Gamma}$, а предпоследнее неравенство в приведенной цепочке вытекает из соизмеримости величин $\operatorname{dist}(z, \widetilde{\Gamma})$ и $\operatorname{dist}(z, \{a_j, b_j \colon j \in \mathscr{I}\}$ при $z \in M$.

Пусть $P(\cdot)$ — произвольный многочлен комплексного переменного. Конечность меры $\widehat{\eta}(z)\,dz_{|\widetilde{\Gamma}}$ позволяет применить теорему Фубини в следующей цепочке равенств:

$$\int_M P(z)\,d\eta(z) + \int_{\widetilde{\Gamma}} P(z)\widehat{\eta}(z)\,dz = \\ = \int_M P(z)\,d\eta(z) + \int_{\widetilde{\Gamma}} P(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{d\eta(w)}{w-z}\right)dz = \\ = \int_M P(z)\,d\eta(z) + \int_M \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}} \frac{P(z)\,dz}{w-z}\right)d\eta(w) = \\ = \int_M P(z)\,d\eta(z) - \int_M P(w)\,d\eta(w) = 0.$$

Рассмотрим теперь меры $\eta_s = \overline{z}^s \mu_{0|M}$ при $s = 0{,}1, \ldots, n-1$. В силу только что доказанного утверждения меры

$$\overline{z}^s \mu_0 - (\eta_s + \widehat{\eta}_s(z)\,dz_{|\widetilde{\Gamma}})$$

ортогональны к пространству $\mathbb{C}[z]$. Эти меры сосредоточены на (спрямляемом) контуре $\widetilde{\Gamma}$. Следовательно, для каждого $s = 0{,}1, \ldots, n-1$ найдется функция $h_s \in E^1(B)$, такая, что

$$\overline{z}^s \mu_0 = \eta_s + (\widehat{\eta}_s(z) + h_s(z))\,dz_{\widetilde{\Gamma}}.$$

Умножая полученное равенство в случае $s = 0$ на $\overline{z}^s$, получаем, что

$$\overline{z}^s \mu_0 = \overline{z}^s \eta_0 + \overline{z}^s(\widehat{\eta}_0(z) + h_0(z))\,dz_{\widetilde{\Gamma}}.$$

Так как $\eta_s = \overline{z}^s \eta_0$, то из последних двух равенств получаем, что при любом $s = 1, \ldots, n-1$ выполнены равенства

$$\overline{z}^s(\widehat{\eta}_0(z) + h_0(z))\, dz_{\widetilde{\Gamma}} = (\widehat{\eta}_s(z) + h_s(z))\, dz_{\widetilde{\Gamma}}.$$

Так как $\mu_{0|\Gamma_0} = (\widehat{\eta}_0(z) + h_0(z))\, dz_{\widetilde{\Gamma}} \not\equiv 0$, то функция $\widehat{\eta}_0 + h_0$ не обращается тождественно в ноль в Ω_0 и, следовательно, угловые предельные значения $\widehat{\eta}_0(z)+h_0(z)$ этой функции не равны нулю для почти всех $z \in \Gamma_0$. Но тогда из последнего равенства вытекает (нам достаточно рассмотреть только случай $s = 1$), что

$$\overline{z} = \frac{\widehat{\eta}_1(z) + h_1(z)}{\widehat{\eta}_0(z) + h_0(z)}$$

для почти всех $z \in \Gamma_0$. Так как каждая функция $\widehat{\eta}_s$, $s = 0{,}1, \ldots, n-1$, ограничена вне некоторой ε-окрестности множества M, а каждая из функций h_s может быть представлена в виде отношения двух функций класса $H^\infty(B)$, то мероморфная в Ω_0 функция $(\widehat{\eta}_1 + h_1)/(\widehat{\eta}_0 + h_0)$ совпадает с отношением двух функций класса $H^\infty(\{z \in \Omega_0\colon\ \mathrm{dist}(z, X) > \varepsilon\})$. А это в точности означает, что $\Omega_0 \in ND(\Upsilon_0)$. $\square$

Следствие 47. *Пусть G — область Каратеодори такая, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, а ∂G содержит две ND, G-независимые дуги γ_1 и γ_2. Тогда для любого компакта $K \subset K$ с условием $A_n(K) = P_n(K)$ имеет место равенство $A_n(\partial G \cup K) = P_n(\partial G \cup K)$.*

Заметим, что при выполнении указанных условий на G, γ_1 и γ_2 выполнено $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$. Для доказательства следствия достаточно применить теорему 46 для G и компакта $K \cup (\partial G \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2))$.

Отметим, что теоремы 36, 38, 42 и 46 похожи по природе возникающих в них достаточных условий приближаемости. Условия этих теорем (как и приведенных в предыдущих главах критериев приближаемости) формулируются одинаково для всех значений порядка полианалитичности $n \geqslant 2$. Но эти достаточные условия весьма далеки от необходимых. Так, в следующей главе будет показано, что условия равномерной приближаемости функций n-аналитическими многочленами даже на нигде не плотных компактах должны зависеть от значения n.

Глава 7

Зависимость от порядка полианалитичности

Напомним, что критерий приближаемости функций n-аналитическими многочленами на компактах Каратеодори (теорема 27), редуктивный критерий для компактов общего вида (теорема 31) и достаточные условия приближаемости в теоремах 36, 38, 42 и 46 формулируются в терминах таких характеристик компактов, которые не зависят от конкретного значения порядка полианалитичности $n \geqslant 2$.

Более того, теорему 27 (критерий приближаемости для компактов Каратеодори) можно интерпретировать следующим образом: если равенство $A_n(X) = P_n(X)$ для компакта Каратеодори X имеет место при некотором $n \geqslant 2$, то это равенство имеет место при всех $n \geqslant 2$. В частности, если X — нигде не плотный компакт Каратеодори, а пространство $\mathfrak{P}_n$ плотно в $C(X)$ при некотором значении $n \geqslant 2$, то в $C(X)$ будет плотно и пространство $\mathfrak{P}_2$.

В этой главе мы рассмотрим примеры, показывающие, что для компактов общего вида такое поведение не характерно. Мы покажем, что окончательные критерии приближаемости, которые пока еще не найдены, должны существенно зависеть от порядка полианалитичности n, и исследуем характер такой зависимости.

Пример компакта X, для которого $P_2(X) \neq C(X) = P_3(X)$

В предыдущей главе был рассмотрен следующий пример. Пусть a и b — вещественные числа, причем $a > b > 0$, а $\sqrt{a^2 - b^2} = 1$. В этом случае фокусы эллипса $\varGamma_{a,b}$ — это точки ± 1. Из теоремы 36 вытекает, что для компакта $X_1 = \varGamma_{a,b} \cup \{z \in \mathcal{D}_{a,b} \colon |\operatorname{Im} z| \geqslant b/2\}$ (см. рис. 13) выполнено $P_n(X_1) = A_n(X_1)$ для любого целого $n \geqslant 2$.

Представляется интересным найти также противоположный пример для этого же контура $\varGamma_{a,b}$. Изложим одну конструкцию, предложенную в [50].

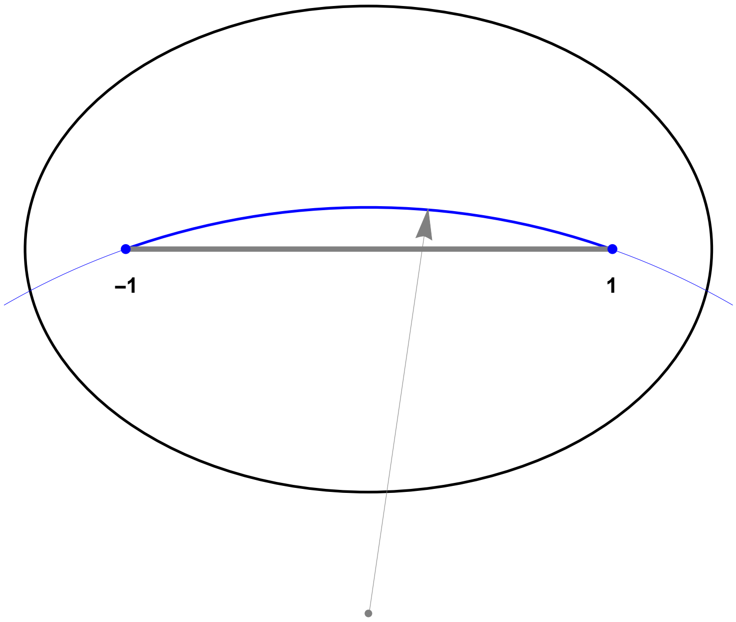

Рис. 14. Компакт $\mathit{\Gamma}_{a,b} \cup \mathfrak{L}$ из предложения 48 (в качестве $\mathfrak{L}$ взята дуга окружности с центром вне $\mathcal{D}_{a,b}$, соединяющая точки ± 1)

Обозначим через I отрезок $[-1,1]$ (отрезок, соединяющий фокусы эллипса $\mathit{\Gamma}_{a,b}$). Далее, пусть $\mathfrak{L}$ — аналитическая дуга, лежащая в $\mathcal{D}_{a,b}$, соединяющая точки ± 1 и такая, что ее функция Шварца S_0 мероморфна в $\overline{\mathcal{D}}_{a,b}$ и не имеет полюсов на $\mathit{\Gamma}_{a,b}$ (см. рис. 14).

Как хорошо известно, кривая $\mathfrak{L}$ может быть представлена как образ отрезка $[-1,1]$ при отображении φ, конформном в некоторой симметричной (относительно вещественной оси) окрестности этого отрезка. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что прямоугольник Q_ε с вершинами в точках $\pm(1+\varepsilon) \pm i\varepsilon$ лежит в соответствующей окрестности отрезка $[-1,1]$, и определим контур $\mathit{\Gamma}_\varepsilon := \varphi(\partial Q_\varepsilon)$. Далее, для $\zeta \in \mathfrak{L}$ пусть $\ell^\pm(\zeta)$ — это φ-образы отрезков $[\varphi^{-1}(\zeta), \varphi^{-1}(\zeta) \pm i\varepsilon/2]$.

Пусть теперь $S = S_{a,b}$ — это функция Шварца эллипса $\mathit{\Gamma}_{a,b}$ из (2.3), где взято $c = 1$ и выбрана голоморфная ветвь функции $\sqrt{z^2-1}$, определенная вне $\mathfrak{L}$. Пусть $P_0(z) := \prod_j (z - z_j)$, где произведение взято по всем нулям z_j функции $S - S_0$ (рассматриваемых с учетом их кратностей). Наконец, при $\zeta \in \mathfrak{L}$ пусть

$$S^\pm(\zeta) = \lim_{z \to \zeta,\, z \in \ell^\pm(\zeta)} S(z).$$

Имеет место следующее утверждение:

Предложение 48. *Пусть* a, b, $\mathfrak{L}$, S, $S^{\pm}$, S_0 *и* P_0 *определены, как указано выше, и пусть функция* h_0 *на* $\mathfrak{L}$ *определена равенством*

$$h_0 := \frac{S^- - S^+}{(S^- - S_0)(S^+ - S_0)}.$$

Тогда мера, определенная формулой

$$\eta_0 := \frac{P_0(z)}{S(z) - S_0(z)}\, dz_{|\Gamma_{a,b}} + P_0(z)h_0(z)\, dz_{|\mathfrak{L}}, \tag{7.1}$$

ортогональна к пространству $\mathfrak{P}_2$.

Замечание. Если $\mathfrak{L} = I = [-1,1]$, то $S_0(z) \equiv z$. Отметим, что в этом случае равенство $z = S(z)$ выполняется, если и только если $z = \pm a$. Соответственно, в рассматриваемом случае мера η_0 выражается при помощи более простой и явной формулы

$$\eta_0 := \frac{z^2 - a^2}{S(z) - z}\, dz_{|\Gamma_{a,b}} - i\frac{a}{b}\sqrt{1 - t^2}\, dt_{|I},$$

которая непосредственно получается из (7.1), так как

$$(t^2 - a^2)h_0(t) = -i\frac{a}{b}\sqrt{1 - t^2}$$

в рассматриваемом случае $\mathfrak{L} = I$.

Доказательство предложения 48. Для проверки того факта, что мера η_0 ортогональна к пространству $\mathfrak{P}_2$, нам необходимо проверить, что выполняются следующие условия:

$$\int P(z)\, d\eta_0(z) = \int \overline{z}P(z)\, d\eta_0(z) = 0,$$

где $P \in \mathbb{C}[z]$ — произвольный многочлен. Выберем $\varepsilon > 0$ и контур Γ_ε так, как это было указано выше, и так, чтобы функция S_0 не имела полюсов в области D_ε, ограниченной контуром Γ_ε. Так как функция $1/(S - S_0)$ имеет устранимую особенность в каждом полюсе функции S_0 в $\mathcal{D}_{a,b}$, то функция $P_0/(S - S_0)$ голоморфна в $\mathcal{D}_{a,b} \setminus D_\varepsilon$ и при $\varepsilon \to 0$ выполнены равенства

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \frac{P_0(z)}{S(z) - S_0(z)}\, P(z)\, dz =$$
$$= \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{P_0(z)}{S(z) - S_0(z)}\, P(z)\, dz \to -\int_{\mathfrak{L}} P_0(z)h_0(z)P(z)\, dz.$$

Кроме того, при $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \frac{P_0(z)}{S(z)-S_0(z)}\overline{z}P(z)\,dz = \int_{\Gamma_{a,b}} \frac{P_0(z)}{S(z)-S_0(z)}S(z)P(z)\,dz =$$
$$= \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{P_0(z)S(z)P(z)}{S(z)-S_0(z)}\,dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} P_0(z)P(z)\left(1+\frac{S_0(z)}{S(z)-S_0(z)}\right)dz =$$
$$= \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{P_0(z)S_0(z)P(z)}{S(z)-S_0(z)}dz \to -\int_{\mathfrak{L}} P_0(z)h_0(z)S_0(z)P(z)\,dz.$$

Так как $\overline{z} = S_0(z)$ при $z \in \mathfrak{L}$, то $\eta_0 \perp \mathfrak{P}_2$. □

Из предложения 48 непосредственно вытекает, что

$$P_2(\Gamma_{a,b} \cup \mathfrak{L}) \neq C(\Gamma_{a,b} \cup \mathfrak{L}).$$

Однако, $P_3(\Gamma_{a,b} \cup \mathfrak{L}) = C(\Gamma_{a,b} \cup \mathfrak{L})$.

Проверим это. Пусть $Q_0 := \prod_j (z-b_j)$ — произведение, взятое по всем полюсам b_j функции S_0 (с учетом их кратности). Пусть μ — мера на $\Gamma_{a,b}\cup\mathfrak{L}$, ортогональная к пространству $\mathfrak{P}_3$. Тогда меры $(\overline{z}Q_0 - S_0Q_0)\,\mu$ и $(\overline{z}^2Q_0^2 - S_0^2Q_0^2)\,\mu$ ортогональны к пространству $\mathbb{C}[z]$. Так как обе эти меры равны нулю на $\mathfrak{L}$, то рассматриваемые меры — это меры на $\Gamma_{a,b}$, ортогональные к многочленам комплексного переменного. Из этого вытекает, что найдутся две функции $h_1, h_2 \in E^1(\mathcal{D}_{a,b})$, такие, что $h_1 \not\equiv 0$, $h_2 \not\equiv 0$ в $\mathcal{D}_{a,b}$ и

$$(SQ_0 - S_0Q_0)\,\mu = h_1\,dz_{|\Gamma_{a,b}}, \qquad (S^2Q_0^2 - S_0^2Q_0^2)\,\mu = h_2\,dz_{|\Gamma_{a,b}}.$$

Из этих равенств вытекает, что $h_1(z)\big(S(z)Q_0(z) + S_0(z)Q_0(z)\big) = h_2(z)$ для почти всех $z \in \Gamma_{a,b}$ и, следовательно, $Q_0(S-S_0) = h_2/h_1$ в $\mathcal{D}_{a,b}$, что невозможно, так как выражение в левой части имеет точки ветвления в $\mathcal{D}_{a,b}$, а выражение в правой части — нет.

Следствие 49. *Существует (нигде не плотный) компакт Y в $\mathbb{C}$, такой, что $P_3(Y) = C(Y)$, но $P_2(Y) \neq C(Y)$.*

Пусть $X_2 := \Gamma_{a,b} \cup [-a,a]$, а $X_3 := \Gamma_{a,b} \cup [-ib, ib]$ (см. рис. 15; компакт X_1 был определен выше). Так как $\Gamma_{a,b} \cup I \subset X_2$, то $P_2(X_2) \neq C(X_2)$. В то же время из теоремы 36 вытекает, что $P_2(X_3) = C(X_3)$.

В завершение этого параграфа установим еще один результат, имеющий аналогичную природу, что и утверждение теорем 36 и 38 (см. [63]).

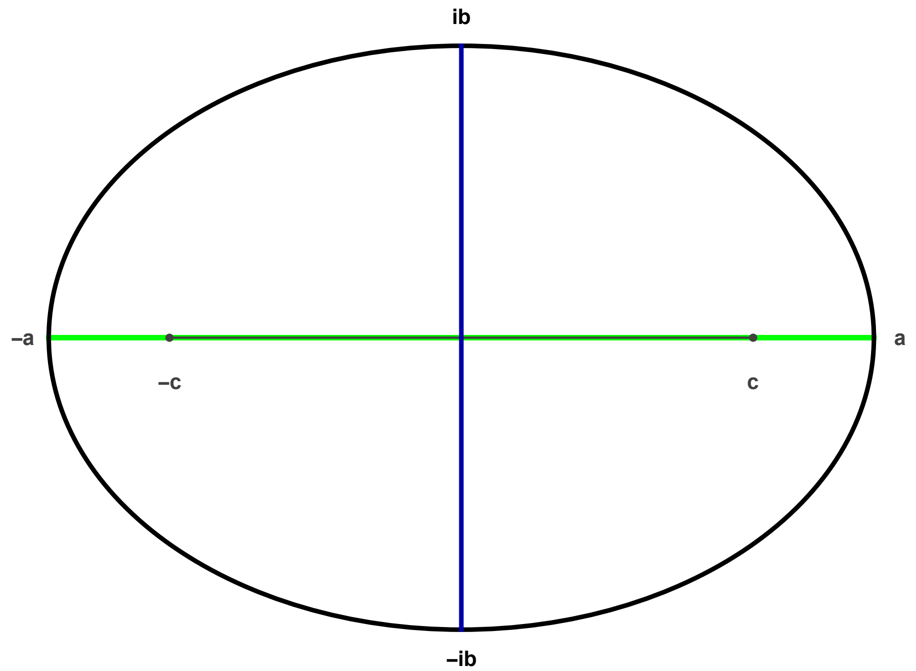

Рис. 15. Компакты X_2 и X_3 — объединение эллипса $\Gamma_{a,b}$ и его горизонтальной (зеленый отрезок) и вертикальной (синий отрезок) осей

Предложение 50. *Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Пусть G — такая область Каратеодори, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, $G \in LND \setminus ND$, $\Omega \sim \{\Sigma, u/v\}$, и существует спрямляемая дуга γ, являющаяся входом для G. Пусть $K \subset G$ — нигде не плотный компакт, такой, что $C(K) = P_n(K)$ и $\Sigma \subset \widehat{K}^\circ$. Предположим также, что существует аналитическая дуга γ_1, являющаяся входом для $\widehat{K}^\circ$, такая, что функция Шварца S_1 дуги γ_1 принадлежит пространству $A_1(\overline{B})$, а также, что $B_\infty \cap \Sigma \neq \varnothing$, где B_∞ — это неограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{(K \setminus \gamma_1)}$. Тогда $C(K \cup \partial G) = P_n(K \cup \partial G)$.*

Согласно следствию 49, существует такой компакт Y, для которого $P_3(Y) = C(Y) \neq P_2(Y)$. Используя этот компакт Y и принимая во внимание следствие 47, можно построить компакт K, удовлетворяющий всем условиям предложения 50 и такой, что $P_3(K) = C(K) \neq P_2(K)$. Более того, ситуация, описанная в предложении 50, не может быть проанализирована с помощью результатов предыдущей главы, так как $\Sigma \subset \widehat{K}^\circ$.

Доказательство предложения 50. Положим $K_1 := \overline{K \setminus \gamma_1}$, $X := K \cup \partial G$ и $X_1 := K_1 \cup \partial G$. Если $P_n(X) \neq C(X)$, то существует мера μ на X, такая, что $\mu \not\equiv 0$ и $\mu \perp P_n(X)$. Определим меру $\mu_1 := (\overline{z} - S_1)\,\mu$ так, что μ_1 — это мера, сосредоточенная на X_1 и $\mu_1 \perp P_{n-1}(X_1)$. Ясно также, что $\mu_1 \not\equiv 0$. Заметим также, что меры μ и μ_0 не имеют атомов на ∂G (этот факт уже отмечался при кратком изложении свойств областей Каратеодори в предыдущей главе). Аналогично тому, как это было проделано при доказательстве теоремы 42, можно показать, что $\widehat{\mu}_1 \not\equiv 0$ в $G \setminus \widehat{K}_1$ и что функция u/v должна совпадать с функцией $\widehat{\overline{z}\mu_1}/\widehat{\mu}_1$ в $G \setminus \widehat{\Sigma \cup K_1}$. Следовательно, функция u/v продолжается мероморфно на множество $G \setminus \widehat{K}_1$, но $G \setminus \widehat{K}_1 \subset B_\infty$. Здесь возникает противоречие, так как $\Sigma \cap B_\infty$ не пусто, а Σ минимально по предположению.

$\square$

Конструкция компакта X со свойством $P_n(X) \neq C(X) = P_{2n}(X)$

Следствие 49 утверждает, что существует компакт Y, такой, что $P_2(Y) \neq C(Y)$, но $P_3(Y) = C(Y)$. Рассмотрим вопрос о существовании подобных примеров для больших порядков полианалитичности. Имеет место следующее утверждение, полученное в [14].

Теорема 51. *Для каждого $n \geqslant 1$ существует компакт $X \subset \mathbb{C}$, такой, что $P_{2n}(X) = C(X) \neq P_n(X)$.*

Доказательство. Пусть a и b — вещественные числа с условием $a > b > 0$ и пусть $\Gamma_{a,b}$ — эллипс с центром в начале координат, с полуосями a и b и с фокусами в точках $\pm c$ при $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Пусть $S_{a,b}$ — функция Шварца эллипса $\Gamma_{a,b}$, см. (2.3). Определим также функцию

$$S^*_{a,b}(z) = \alpha z + \beta\sqrt{z^2 - c^2}, \tag{7.2}$$

где выбрана та же ветвь функции $\sqrt{z^2 - c^2}$, что и в (2.3).

Заметим, что величины α, β, a и b и функции $S_{a,b}$ и $S^*_{a,b}$ связаны следующими соотношениями:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}{c^4} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{c^4} = 1, \tag{7.3}$$

$$\big(\overline{z} - S_{a,b}(z)\big)\big(\overline{z} - S^*_{a,b}(z)\big) = \frac{4a^2b^2}{c^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{7.4}$$

Кроме того, для любого $z \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma_{a,b} \cup [-c, c])$ выполнено

$$\overline{z} - S_{a,b}(z) \neq 0,$$

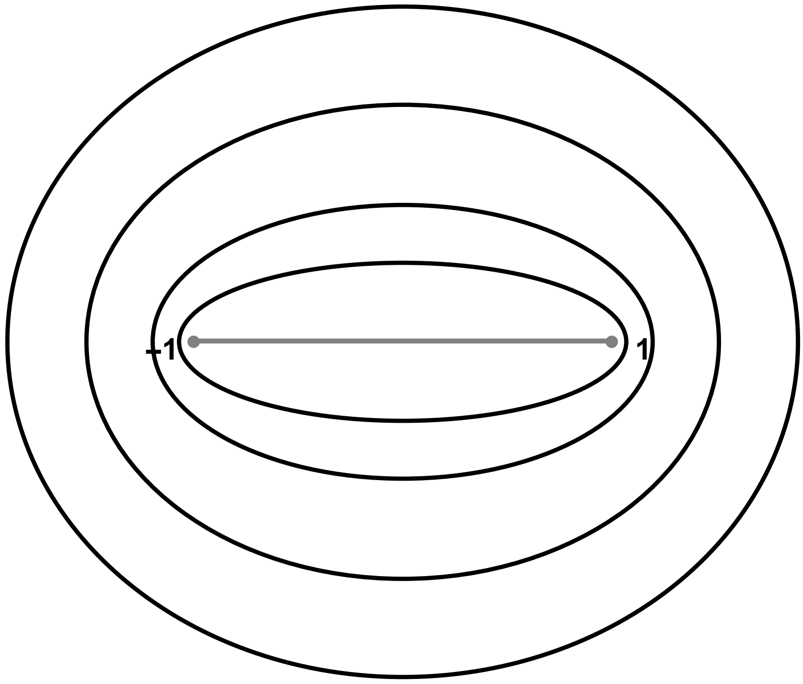

Рис. 16. Объединение 4 софокусных эллипсов — пример компакта X, для которого $P_8(X) = C(X) \neq P_4(X)$

а для любого $z \in \mathbb{C} \setminus [-c, c]$ выполнено

$$\overline{z} - S^*_{a,b}(z) \neq 0.$$

Выберем n попарно непересекающихся эллипсов $\varGamma_1, \varGamma_2, \ldots, \varGamma_n$ с фокусами в точках ± 1 (см. рис. 16) и рассмотрим компакт

$$X = X(n) := \bigcup_{k=1}^{n} \varGamma_k \tag{7.5}$$

и функцию

$$F_n(w, z) := \prod_{k=1}^{n} \big(\overline{w} - S_k(z)\big), \tag{7.6}$$

где при каждом $k = 1, \ldots, n$ функция

$$S_k(z) = \alpha_k z - \beta_k \sqrt{z^2 - 1}$$

— это функция Шварца эллипса $\varGamma_k$. Заметим, что имеет место следующий факт: если $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, то

$$F_n(z, z) = 0 \iff z \in X(n). \tag{7.7}$$

Нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 52. *Пусть $\mathit{\Gamma}_1, \dots, \mathit{\Gamma}_n$, как и ранее, – попарно непересекающиеся эллипсы с фокусами в точках ± 1 и пусть функция F_n определена соотношением (7.6). Тогда существуют два многочлена $P_n(w, z)$ и $Q_n(w, z)$ от двух комплексных переменных w и z, такие, что*

i) $F_n(w, z) = P_n(\overline{w}, z) + Q_n(\overline{w}, z)\sqrt{z^2 - 1}$;

ii) $\deg_w \big(P_n(w, z) - w^n\big) < n$,
$\deg_w \big(Q_n(w, z) - (\beta_1 + \dots + \beta_n) w^{n-1}\big) < n - 1$;

iii) $P_n(\overline{z}, z) \neq 0$ *и* $Q_n(\overline{z}, z) \neq 0$ *при всех* $z \in X(n)$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся индукцией по числу эллипсов. При $n = 1$ положим $P_1(w, z) := w - \alpha_1 z$ и $Q_1(w, z) := \beta_1$. Для этих многочленов все утверждения леммы выполнены.

Пусть теперь $\{\mathit{\Gamma}_1, \dots, \mathit{\Gamma}_n\}$ — произвольный набор, состоящий из n штук попарно непересекающихся эллипсов (с фокусами в точках ± 1). Обозначим через $\{\mathit{\Gamma}_1, \dots, \mathit{\Gamma}_{n-1}\}$ произвольно выбранное подмножество этого множества, состоящее из $n - 1$ эллипса. Согласно предположению индукции, для набора $\{\mathit{\Gamma}_1, \dots, \mathit{\Gamma}_{n-1}\}$ существуют многочлены P_{n-1} и Q_{n-1}, удовлетворяющие условиям i), ii) и iii) леммы.

Используя (7.6), получаем

$$F_n(w, z) = \big(P_{n-1}(\overline{w}, z) + Q_{n-1}(\overline{w}, z)\sqrt{z^2 - 1}\big)\big(\overline{w} - \alpha_n z + \beta_n \sqrt{z^2 - 1}\big).$$

Таким образом, если положить

$$\begin{aligned} P_n(w, z) &:= (w - \alpha_n z) P_{n-1}(w, z) + \beta_n (z^2 - 1) Q_{n-1}(w, z), \\ Q_n(w, z) &:= (w - \alpha_n z) Q_{n-1}(w, z) + \beta_n P_{n-1}(w, z), \end{aligned} \tag{7.8}$$

то утверждения i) и ii) леммы будут выполнены для F_n, P_n и Q_n.

Проверим справедливость утверждения iii). Согласно (7.6), (7.7) и i) нам достаточно установить, что $Q_n(\overline{z}, z) \neq 0$ для любого $z \in X(n)$. Допустим, что это не так, и предположим, что найдется точка $z_0 \in X(n)$, такая, что $Q_n(\overline{z}_0, z_0) = 0$. Следовательно, согласно (7.7) и i), мы также получаем, что $P_n(\overline{z}_0, z_0) = 0$. Так как $n \geqslant 2$, то можно выбрать такое k, что $1 \leqslant k \leqslant n$ и $z_0 \notin \mathit{\Gamma}_k$. Для множества $\{\mathit{\Gamma}_1, \dots, \mathit{\Gamma}_n\} \setminus \{\mathit{\Gamma}_k\}$ (состоящего из $n - 1$ эллипса), согласно предположению индукции, существуют соответствующие полиномы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$, удовлетворяющие всем условиям леммы. Из (7.8) вытекает,

что
$$
\begin{aligned}
&0 = (\overline{z}_0 - \alpha_k z_0)\widetilde{P}(\overline{z}_0, z_0) + \beta_k(z_0^2 - 1)\widetilde{Q}(\overline{z}_0, z_0)\\
&0 = \beta_k\widetilde{P}(\overline{z}_0, z_0) + (\overline{z}_0 - \alpha_k z_0)\widetilde{Q}(\overline{z}_0, z_0).
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Рассматривая соотношения (7.9) как систему линейных (однородных) уравнений относительно переменных $\widetilde{P}(\overline{z}_0, z_0)$ и $\widetilde{Q}(\overline{z}_0, z_0)$, замечаем, что ее определитель равен $\varDelta := (\overline{z}_0 - S_k(z_0))(\overline{z}_0 - S_k^*(z_0))$. Так как S_k – функция Шварца эллипса $\varGamma_k$, то $\overline{z}_0 - S_k^*(z_0) \neq 0$, а так как $z_0 \notin \varGamma_k$, то и $\overline{z}_0 - S_k(z_0) \neq 0$. Следовательно, $\varDelta \neq 0$. Но это противоречит тому, что в силу предположения индукции $\widetilde{P}(\overline{z}_0, z_0) \neq 0$ и $\widetilde{Q}(\overline{z}_0, z_0) \neq 0$. $\square$

Шаг 1. *При* $X = X(n)$ *выполнено* $P_{2n}(X) = C(X)$.

Предположим, что $P_{2n}(X) \neq C(X)$. В этом случае найдется мера μ на X, такая, что $\mu \not\equiv 0$ и $\mu \perp \mathfrak{P}_{2n}$.

Так как $\mu \not\equiv 0$, то найдется число $k \in \{1, \dots, n\}$, такое, что $\mu_{|\varGamma_k} \not\equiv 0$. С помощью леммы 52 построим многочлены P_n и Q_n для множества эллипсов $\{\varGamma_1, \dots, \varGamma_n\}$ и многочлены $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ для множества эллипсов $\{\varGamma_1, \dots, \varGamma_n\} \setminus \{\varGamma_k\}$ соответственно. В силу утверждения i) леммы 52 для всех $z \in X$ имеет место равенство
$$
\sqrt{z^2 - 1} = -\frac{P_n(\overline{z}, z)}{Q_n(\overline{z}, z)}
\tag{7.10}
$$
(напомним, что $Q_n(\overline{z}, z) \neq 0$ при $z \in X$ в силу утверждения iii) леммы 52). Используя (7.10), определим меру
$$
\eta =: \left(\widetilde{P}(\overline{z}, z) + \widetilde{Q}(\overline{z}, z)\sqrt{z^2 - 1}\right) Q_n(\overline{z}, z)\, \mu = \left(\widetilde{P}Q_n - \widetilde{Q}P_n\right) \mu.
$$

Из свойства (7.7), утверждения i) леммы 52 для многочленов $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ и свойства iii) леммы 52 для многочлена Q_n вытекает, что $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \varGamma_k$ и $\eta \neq 0$. Используя утверждение ii) леммы 52, мы заключаем, что $\deg_{\overline{z}}(\widetilde{P}Q_n - \widetilde{Q}P_n) \leqslant 2n - 2$. Так как $\mu \perp \mathfrak{P}_{2n}$, то $\eta \perp \mathfrak{P}_2$.

Итак, нами построена мера η на $\varGamma_k$ со свойствами $\eta \not\equiv 0$ и $\eta \perp \mathfrak{P}_2$. Следовательно, $P_2(\varGamma_k) \neq C(\varGamma_k)$, но это противоречит предложению 3. Следовательно, $\mu \equiv 0$ и $P_{2n}(X) = C(X)$.

Шаг 2. *При* $X = X(n)$ *выполнено* $P_n(X) \neq C(X)$.

Для того чтобы доказать это утверждение, найдем ненулевую меру на X, ортогональную пространству $\mathfrak{P}_n$. Будем искать ее в виде

$$\eta := \sum_{j=1}^{n} c_j \, dz_{|\mathit{\Gamma}_j},$$

где $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — некоторые коэффициенты. Обозначим такую меру через η_c, где $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Так как

$$\int g(z) \, d\eta(z) = 0$$

для любого многочлена $g \in \mathfrak{P}_n$, то искомый набор $c = (c_1, \ldots, c_n)$ должен удовлетворять равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{\mathit{\Gamma}_j} \overline{z}^m p(z) \, dz = 0 \tag{7.11}$$

для любого многочлена $p \in \mathbb{C}[z]$ и для любого целого числа m с условием $m \leqslant n-1$. Заметим, что в силу теоремы Коши, равенство (7.11) при $m = 0$ выполняется при любых значениях $c_1, \ldots, c_n$.

Используя уравнение (2.2) для каждого из $\mathit{\Gamma}_j$, свойство (7.11) и теорему Коши, мы получаем, что

$$\int_X \overline{z}^m p(z) \, d\eta(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{\mathit{\Gamma}_j} \left(\alpha_j z - \beta_j \sqrt{z^2-1}\,\right)^m p(z) \, dz =$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=0}^{m} \alpha_j^k \beta_j^{m-k} (-1)^{m-k} \, \mathrm{C}_m^k \int_{\Gamma_j} p(z) z^k (z^2-1)^{(m-k)/2} \, dz =$$
$$\sum_{k=0}^{m} R(p; m, k) \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^k \beta_j^{m-k},$$

где C_m^k – биномиальные коэффициенты, а

$$R(p; m, k) := (-1)^{m-k} \, \mathrm{C}_m^k \int_{\Gamma_1} p(z) z^k (z^2-1)^{(m-k)/2} \, dz.$$

Заметим, что если число $m-k$ четно, то $R(p; m, k) = 0$. Следовательно, для того чтобы определить искомую меру η, нам достаточно взять ненулевое решение $(c_1, \dots, c_n)$ следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^k \beta_j^{m-k} = 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant n-1,\ 0 \leqslant k \leqslant m,\ m-k \in 1+2\mathbb{Z}. \quad (7.12)$$

Система (7.12) может быть представлена как объединение двух систем линейных уравнений: системы

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^r \beta_j = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant n-2, \qquad (7.13)$$

и системы

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{m-2k-1} \beta_j^{2k+1} = 0, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n-1, \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{m-1}{2}. \quad (7.14)$$

Рассмотрим систему (7.13). Заметим, что матрица $\big(\alpha_j^r\big)_{j,r}$, где $1 \leqslant j \leqslant n$ и $0 \leqslant r \leqslant n-2$, содержит матрицу Вандермонда размера $(n-1) \times (n-1)$ и, следовательно, ее ранг равен $n-1$ (напомним, что $\alpha_j \neq \alpha_k$ при $j \neq k$, так как все эллипсы $\mathit{\Gamma}_1, \dots \mathit{\Gamma}_n$ попарно различны). Следовательно, система (7.13) (рассматриваемая относительно переменных $c_j\beta_j$) имеет бесконечно много решений $(c_1\beta_1, c_2\beta_2, \dots, c_n\beta_n) \neq 0$. Докажем, что каждый вектор $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, для которого $(c_1\beta_1, c_2\beta_2, \dots, c_n\beta_n)$ является решением системы (7.13), удовлетворяет системе (7.14). Пусть

$$E(m,k) := \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{m-2k-1} \beta_j^{2k+1}$$

при $1 \leqslant m \leqslant n-1$ и $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{m-1}{2}$.

Мы утверждаем, что каждая величина $E(m,k)$ при $k \geqslant 1$ является линейной комбинацией величин $E(r,0)$ при $0 \leqslant r \leqslant n-2$. В самом деле, используя (7.3), имеем

$$E(m,k+1) = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{m-2k-3} \beta_j^{2k+3} = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{m-2k-3} \beta_j^2 \beta_j^{2k+1} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{m-2k-3} (\alpha_j^2 - 1) \beta_j^{2k+1} = E(m,k) - E(m-2,k), \quad (7.15)$$

при $1 \leqslant m \leqslant n-1$ и $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{m-3}{2}$. Индукцией по k, применяя рекуррентное соотношение (7.15), получаем

$$E(m,k) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \, \mathrm{C}_k^s \, E(m-2s,0).$$

Т.е. сделанное утверждение верно, а вместе с ним верно и требуемое свойство нетривиальных решений систем (7.13) и (7.14).

Итак, мы построили ненулевое решение $c = (c_1, \ldots, c_n)$ систем (7.13) и (7.14), которое, в свою очередь, определяет ненулевую меру $\eta = \eta_c$ на X, ортогональную к пространству $\mathfrak{P}_n$. Следовательно, $P_n(X) \neq C(X)$. $\square$

О характере зависимости условий равномерной приближаемости от порядка полианалитичности

Построенные в следствии 49 и в теореме 51 примеры показывают, что условия равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами в задаче 1 зависят от порядка полианалитичности n, причем весьма непростым образом. Изучим, следуя [50, §5], характер этой зависимости.

В дальнейшем, для произвольной меры μ и для целого неотрицательного числа k обозначим $\mu_k := \overline{z}^k \mu$. Напомним, что, символом $T\mu$ обозначается интегральное преобразование меры μ, определенное следующим образом:

$$T\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta) = \widehat{\mu}_1(z) - \overline{z}\widehat{\mu}(z).$$

При доказательстве теоремы 46 было показано (см. также обзор свойств областей Каратеодори в главе 6), что если G — это жорданова область со спрямляемой границей $\varGamma$, а K — компактное подмножество области G и μ — мера с носителем на $\varGamma \cup K$, то

$$\mu \perp \mathbb{C}[z] \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \mu_{|K} + \big(\widehat{\mu_{|K}} + h\big) dz_{|\varGamma}, \tag{7.16}$$

где h — некоторая функция класса $E^1(G)$.

Нам потребуются специальные свойства мер, ортогональных к пространству $\mathfrak{P}_n$ при $n \geqslant 2$.

Предложение 53. *Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, G — жорданова область со спрямляемой границей Γ. Пусть K — компактное подмножество области G, а $X = \Gamma \cup K$.*

1. *Следующие условия эквивалентны:*

i) *существуют n функций $h_0, \ldots, h_{n-1}$ класса $E^1(G)$ и мера ν с носителем на K, такие, что равенства*

$$\overline{z}h_k - h_{k+1} = T\nu_k, \quad k = 0, \ldots, n-2, \tag{7.17}$$

выполняются $|dz|$-почти всюду на Γ.

ii) *существует мера μ на X, такая, что $\mu \perp \mathfrak{P}_n$.*

2. *Если условие i) выполнено, то соответствующая мера μ, существование которой утверждается в условии ii), имеет вид*

$$\mu = \nu + \big(\widehat{\nu} + h_0\big)dz_{|\Gamma}. \tag{7.18}$$

Более того, для каждой точки $z \in G \setminus \widehat{K}$ и для любого $k = 0, \ldots, n-1$,

$$\widehat{\mu}_k(z) = \widehat{\nu}_k(z) + h_k(z). \tag{7.19}$$

Кроме того,

$$\mathrm{Supp}(\mu) \subset K \cup \{0\} \iff \exists k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ \textit{для которого}\ h_k \equiv 0. \tag{7.20}$$

Доказательство. Предположим, что функции $h_0, \ldots, h_{n-1}$ класса $E^1(G)$ и мера ν на K в условии i) первого утверждения существуют. Определим меру μ по формуле (7.18). Так как $h_0 \in E^1(G)$, то из (7.16) вытекает, что $\mu \perp \mathbb{C}[z]$. Утверждается, что $\mu \perp \mathfrak{P}_n$. В самом деле, для почти всех точек $\zeta \in \Gamma$ и для $k = 0, \ldots, n-2$ имеют место равенства

$$\overline{\zeta}h_k(\zeta) - h_{k+1}(\zeta) = T\nu_k(\zeta) = \widehat{\nu}_{k+1}(\zeta) - \overline{\zeta}\widehat{\nu}_k(\zeta),$$

откуда

$$\widehat{\nu}_{k+1}(\zeta) + h_{k+1}(\zeta) = \overline{\zeta}\big(\widehat{\nu}_k(\zeta) + h_k(\zeta)\big).$$

Следовательно, для всех $l = 1, \ldots, n-1$ выполнено

$$\overline{\zeta}^l\big(\widehat{\nu}(\zeta) + h_0(\zeta)\big) = \overline{\zeta}^{l-1}\big(\widehat{\nu}_1(\zeta) + h_1(\zeta)\big) = \cdots = \widehat{\nu}_l(\zeta) + h_l(\zeta)$$

и, окончательно,

$$\mu_l = \overline{z}^l\big(\nu + (\widehat{\nu} + h_0)\,dz_{|\Gamma}\big) = \nu_l + (\widehat{\nu}_l + h_)\,dz_{|\Gamma}.$$

Еще раз применяя (7.16), получаем, что $\mu_l \perp \mathbb{C}[z]$ при всех $l = 1, \dots, n-1$, так что $\mu \perp \mathfrak{P}_n$.

Обратно, пусть μ — мера на X, ортогональная к пространству $\mathfrak{P}_n$, и пусть $\nu := \mu_{|K}$. Так как $\mu_k \perp \mathbb{C}[z]$ при $k = 0, \dots, n-1$, то, согласно (7.16), при $k = 0, \dots, n-1$ существуют функции $h_k \in E^1(G)$, такие, что

$$\mu_k = \nu_k + (\widehat{\nu}_k + h_k)\,dz_{|\Gamma}. \tag{7.21}$$

Более того, при $k = 0, \dots, n-2$ имеют место равенства

$$\nu_{k+1} + (\widehat{\nu}_{k+1} + h_{k+1})\,dz_{|\Gamma} = \overline{z}\nu_k + \overline{z}(\widehat{\nu}_k + h_k)\,dz_{|\Gamma},$$

из которых следует, что равенство

$$\widehat{\nu}_{k+1} + h_{k+1} = \overline{z}(\widehat{\nu}_k + h_k)$$

выполняется $|dz|$-почти всюду на Γ. Это равенство означает, что $|dz|$-почти всюду на Γ выполняется равенство

$$T\nu_k = \widehat{\nu}_{k+1} - \overline{z}\widehat{\nu}_k = \overline{z}h_k - h_{k+1}.$$

Заметим, что (7.20) непосредственно вытекает из (7.19). Таким образом, нам осталось проверить выполнение свойства (7.19). Пусть $z \in G \setminus \widehat{K}$. Так как стандартная интегральная формула Коши остается верной для функций класса $E^1(G)$, то $(h_k\,dz_{|\Gamma})\widehat{\ } = h_k$ в G. Таким образом, равенство (7.19) будет следовать из (7.21), если мы покажем, что $(\widehat{\nu}_k\,dz_{|\Gamma})\widehat{\ } = 0$ в G. Но это равенство непосредственно вытекает из теоремы Фубини и Коши:

$$\widehat{\widehat{\nu}d\zeta_{|\Gamma}}(z) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\int_K \frac{d\nu(w)}{w-\zeta} = \\ = -\frac{1}{4\pi^2}\int_K d\nu(w)\int_\Gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(w-\zeta)} = 0.$$

Таким образом, предложение полностью доказано. $\square$

Рассмотрим некоторые следствия этого результата. В теореме 51 было доказано, что если компакт X_n является объединением n штук софокусных эллипсов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ с фокусами в точках ± 1 и таких, что при каждом $k = 1, \ldots, n-1$ эллипс Γ_{k+1} лежит в области, ограниченной эллипсом Γ_k, то $P_{2n}(X_n) = C(X_n) \neq P_n(X_n)$. Доказательство того факта, что $C(X_n) \neq P_n(X_n)$ было основано на явной конструкции меры μ на X_n, ортогональной к пространству $\mathfrak{P}_n$. Эта мера была построена в виде

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j dz_{|\Gamma_j}, \tag{7.22}$$

где коэффициенты c_j при $j = 1, \ldots, n$ являлись решением одной специальной системы линейных уравнений. Комбинируя (7.22) и условия утверждения i) предложения 53, получаем

$$\nu = \sum_{j=2}^{n} c_j dz_{|\Gamma_j}$$

и $h_0 \equiv c_1$. Найдем оставшиеся функции $h_1, \ldots, h_{n-1}$ в рассматриваемом случае. Так как

$$\mu_k = \nu_k + \left(\widehat{\nu}_k + h_k\right) dz_{|\Gamma_1},$$

то

$$h_k\, dz_{|\Gamma_1} = \mu_k - \nu_k - \widehat{\nu}_k\, dz_{|\Gamma_1},$$

так что при $\zeta \in \Gamma_1$ имеет место равенство

$$h_k(\zeta) = c_1 \overline{\zeta}^k - \widehat{\nu}_k(\zeta).$$

Для того чтобы вычислить $\widehat{\nu}_k(\zeta)$ при $\zeta \in \Gamma_1$, нам потребуется следующая лемма, которая является прямым следствием теоремы Коши о вычетах.

Лемма 54. *Пусть Γ — эллипс с фокусами в точках ± 1, а $z \in \mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}$. Тогда для любого целого числа $m \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta - z} \zeta^m \, d\zeta = -z^m \sqrt{z^2 - 1} - \sum_{k=0}^{2k \leqslant m+1} (-1)^k \binom{1/2}{k} z^{m+1-2k}. \tag{7.23}$$

Пусть теперь $S_j(z) = \alpha_j z - \beta_j\sqrt{z^2-1}$ — функция Шварца эллипса $\varGamma_j$ при $j = 1, \dots, n$ (см. (2.3)). Найдутся многочлены $A_{k,j}, B_{k,j} \in \mathbb{C}[z]$, такие, что $\overline{z}^k = A_{k,j}(z) - B_{k,j}(z)\sqrt{z^2-1}$ при $z \in \varGamma_j$. Используя (7.23), получаем, что при $z \in \varGamma_1$

$$h_k(z) = c_1 A_{k,1}(z) - c_1 B_{k,1}(z)\sqrt{z^2-1} - \widehat{\nu}_k(z) = \\ = c_1 A_{k,1}(z) - \sqrt{z^2-1}\sum_{j=1}^{n} c_j B_{k,j}(z) + \sum_{j=2}^{n} c_j \widetilde{B}_{k,j}(z),$$

где многочлены $\widetilde{B}_{k,j} \in \mathbb{C}[z]$ являются соответствующими линейными комбинациями вторых слагаемых в правой части равенства (7.23). При доказательстве теоремы 51 было, по сути дела, показано, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j B_{k,j}(z) \equiv 0. \tag{7.24}$$

В то же самое время, если предположить, что мера μ на X_n, ортогональная к пространству $\mathfrak{P}_n$, может быть получена в виде (7.22), то условие (7.24) приведет к той же самой системе уравнений, которая была использована при доказательстве теоремы 51 для определения коэффициентов $c_1, \dots, c_n$. Таким образом (так как $A_{0,1} \equiv 1$ и $B_{0,1} \equiv 0$),

$$h_k = c_1 A_{k,1} + \sum_{j=2}^{n} c_j \widetilde{B}_{k,j} \tag{7.25}$$

при $k = 0, \dots, n-1$ и, в соответствии с (7.20), функции $h_k \not\equiv 0$ при всех $k = 0, \dots, n-1$. Итак, каждая функция h_k в рассматриваемом случае является многочленом степени не выше k. Функции h_1 и h_2 могут быть легко вычислены:

$$h_1(z) = c_1\alpha_1 z - z\sum_{j=2}^{n} c_j\beta_j,$$
$$h_2(z) = c_1\bigl(\alpha_1^2 z^2 + \beta_1^2(z^2-1)\bigr) - (2z^2-1)\sum_{j=2}^{n} c_j\alpha_j\beta_j.$$

Вернемся к рассматриваемой в этой главе аппроксимационной задаче 32 для жордановых областей G со спрямляемыми границами. Предложение 53 позволяет получить новое необходимое и достаточное условие приближаемости для компактов вида $\varGamma \cup K$, где $\varGamma$ — это спрямляемый контур, ограничивающий жорданову область G, а K — компактное подмножество области G. Это условие приближаемости, в отличие от всех, полученных ранее, явным образом зависит от порядка полианалитичности.

Теорема 55. *Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, $G \subset \mathbb{C}$ — жорданова область со спрямляемой границей $\varGamma$. Далее, пусть $K \subset G$ — такой компакт, что $P_n(K) = A_n(K)$, а $X = \varGamma \cup K$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *существуют n функций $h_0, \dots, h_{n-1}$ класса $E^1(G)$ и мера ν с условием $\operatorname{Supp}(\nu) \subseteq K$, такие, что равенства (7.17) выполняются $|dz|$-почти всюду на $\varGamma$, но найдутся целое число $m \in \{0, \dots, n-2\}$ и точка $a \in G \setminus \widehat{K}$, такие, что*

$$\overline{a}h_m(a) - h_{m+1}(a) \neq T\nu_m(a). \tag{7.26}$$

2) $A_n(X) \neq P_n(X)$.

Доказательство. Пусть требуемые функции $h_0, \dots, h_{n-1} \in E^1(G)$ и мера ν на K существуют. Определим меру μ по формуле (7.18). В силу предложения 53 получаем, что $\mu \perp \mathfrak{P}_n$. Таким образом, для того чтобы доказать, что $A_n(X) \neq P_n(X)$, нам необходимо проверить, что $\mu \not\perp A_n(X)$. Так как $a \in G \setminus \widehat{K}$, мы можем вычислить $T\mu_m(a)$, применив формулу (7.19) дважды:

$$\begin{aligned} T\mu_m(a) &= \widehat{\mu}_{m+1}(a) - \overline{a}\widehat{\mu}_m(a) = \\ &= (\widehat{\nu}_{m+1}(a) + h_{m+1}(a)) - \overline{a}(\widehat{\nu}_m(a) + h_m(a)) = \\ &= (\widehat{\nu}_{m+1}(a) - \overline{a}\widehat{\nu}_m(a)) - (\overline{a}h_m(a) - h_{m+1}(a)) = \\ &= T\nu_m(a) - (\overline{a}h_m(a) - h_{m+1}(a)). \end{aligned} \tag{7.27}$$

В силу (7.26) предыдущие равенства означают, что $T\mu_m(a) \neq 0$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\int_X \frac{\overline{\zeta} - \overline{a}}{\zeta - a}\,\overline{\zeta}^m\, d\mu(\zeta) \neq 0.$$

Таким образом, мера μ не ортогональна функции $\overline{z}^m(\overline{z}-\overline{a})/(z-a)$, которая, очевидно, принадлежит пространству $A_n(X)$. Итак, $\mu \not\perp A_n(X)$ и, следовательно, $P_n(X) \neq A_n(X)$.

Докажем теперь обратную импликацию. Пусть $P_n(X) \neq A_n(X)$. Это означает, что существует мера μ на X, такая, что $\mu \perp P_n(X)$, но $\mu \not\perp A_n(X)$. Согласно предложению 53 найдутся функции $h_0, \dots, h_{n-1} \in E^1(G)$ и мера $\nu = \mu_{|K}$, такие, что равенства (7.17) выполнены $|dz|$-почти всюду на Γ.

Предположим, что для любого $k = 0 \dots, n-2$ и для любой точки $z \in G \setminus \widehat{K}$ имеет место равенство

$$T\nu_k(z) = \overline{z}h_k(z) - h_{k+1}(z).$$

Тогда, согласно (7.27), равенство $T\mu_k(z) = 0$ имеет место при всех $z \in G\setminus\widehat{K}$ и при всех $k = 0, \dots, n-2$. Так как мера μ_k ортогональна к пространству $\mathfrak{P}_2$ и так как ядро $\overline{z}\big/(\pi z)$ ограничено, то $\mu_{k|\Gamma} = 0$. Следовательно, $\mu_{|\Gamma} = 0$, что противоречит нашему предположению о том, что $P_n(K) = A_n(K)$. $\square$

Аппроксимация на границах квадратурных областей

В этом параграфе мы рассмотрим один частный случай задачи 1, в котором компакт X является границей некоторой квадратурной области. Понятие квадратурной области уже возникло в главе 4, где была рассмотрена связь понятий неванлинновской и квадратурной областей. Мы опишем пространство $P_n(\Gamma)$ в случае, когда Γ — это граница жордановой классической квадратурной области G. Этот вопрос, интересный и важный не только для рассматриваемой тематики, но и для теории квадратурных областей, ставился Д. В. Якубовичем на 13-й и 16-й конференциях «St. Petersburg Summer Meeting in Mathematica Analysis» в 2004 и 2007 году. Заметим, что в рассматриваемом случае $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$ так как *QD* $\subset$ *ND*. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 56. *Пусть G — жорданова классическая квадратурная область с границей Γ, пусть S — односторонняя функция Шварца контура Γ, и пусть $v(z) := \prod_j (z - a_j)$, где произведение взято по всем полюсам a_j функции S в области G (с учетом их кратности). Тогда*

$$P_n(\Gamma) = \big\{h \in C(\Gamma)\colon \mathcal{P}[hv^{n-1}] \in A(\overline{G})\big\},$$

где $n \geqslant 1$ — целое число, а $\mathcal{P}$ — оператор Пуассона для области G.

Доказательство. Напомним, что односторонняя функция Шварца S границы $\mathit{\Gamma}$ классической квадратурной области G — это такая функция класса $C(\overline{G}\setminus E)\cap\mathcal{O}(G\setminus E)$, где E — конечное множество точек области G (полюсов функции S), для которой $\overline{z} = S(z)$ на $\mathit{\Gamma}$.

Пусть $u := Sv$. Заметим, что $u, v \in A(\overline{G})$, что u и v не имеют общих нулей в $\overline{G}$, и, что $\overline{z} = u(z)/v(z)$ для всех $z \in \mathit{\Gamma}$.

Пусть $h \in P_n(\mathit{\Gamma})$. Существуют n таких последовательностей многочленов $(p_{m,k})_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}[z]$, $k = 0, \ldots, n-1$, что

$$h(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_{m,k}(z)\overline{z}^k$$

равномерно на $\mathit{\Gamma}$. Следовательно,

$$h(z)v^{n-1}(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_{m,k}(z)u^k(z)v^{n-1-k}(z)$$

равномерно на $\mathit{\Gamma}$. Из принципа максимума модуля для голоморфных функций вытекает, что последовательность функций $(h_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$h_m := \sum_{k=0}^{n-1} p_{m,k}u^k v^{n-1-k}$$

сходится равномерно на $\overline{G}$ к некоторой функции f_h класса $A(\overline{G})$ и, следовательно, $\mathcal{P}[hv^{n-1}] = f_h$.

Обратно, пусть $h \in C(\mathit{\Gamma})$ такова, что $\mathcal{P}[hv^{n-1}] \in A(\overline{G})$. Так как функции u и v не имеют общих нулей в $\overline{G}$, то функции

$$v^{n-1}, uv^{n-2}, \ldots, u^{n-2}v, u^{n-1}$$

также не имеют общих нулей в $\overline{G}$. Согласно теореме 18.18 из [73], существуют такие функции $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} \in A(\overline{G})$, что

$$v^{n-1}g_0 + v^{n-2}ug_1 + \cdots + vu^{n-2}g_{n-2} + u^{n-1}g_{n-1} \equiv 1$$

в $\overline{G}$. Пусть теперь $f_h := \mathcal{P}[hv^{n-1}] \in A(\overline{G})$. Тогда

$$\begin{aligned} f_h(z) = v^{n-1}(z)f_0(z)+ \\ + v^{n-2}(z)u(z)f_1(z) + \cdots + v(z)u^{n-2}(z)f_{n-2}(z) + u^{n-1}(z)f_{n-1}(z), \end{aligned}$$

при всех $z \in \overline{G}$, где $f_j = f_h g_j \in A(\overline{G})$ при $j = 0,1, \ldots, n-1$. Таким образом, при $\zeta \in \mathit{\Gamma}$ имеет место равенство

$$h(\zeta) = f_0(\zeta) + \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)} f_1(\zeta) + \cdots + \frac{u^{n-2}(\zeta)}{v^{n-2}(\zeta)} f_{n-2}(\zeta) + \frac{u^{n-1}(\zeta)}{v^{n-1}(\zeta)} f_{n-1}(\zeta) = \\ = f_0(\zeta) + \overline{\zeta} f_1(\zeta) + \cdots + \overline{\zeta}^{n-2} f_{n-2}(\zeta) + \overline{\zeta}^{n-1} f_{n-1}(\zeta),$$

из которого вытекает, что $h \in P_n(\mathit{\Gamma})$ так как $f_j \in A(\overline{G}) = P(\overline{G})$ для любого $j = 0,1, \ldots, n-1$. $\square$

Результат теоремы 56 интересен, в частности, тем, что в нем изучен практически единственный случай, когда удается получить явное описание пространства $P_n(X)$ для нигде не плотного компакта X в случае, когда $P_n(X) \neq C(X)$.

Глава 8

Полианалитические полиномиальные модули

Пусть d — целое число и $d \geqslant 1$. Для заданного компакта $Y \subset \mathbb{C}$ рассмотрим пространства функций

$$\mathfrak{P}(\overline{z}^d) = \left\{p_0 + \overline{z}^d p_1 \colon p_0, p_1 \in \mathbb{C}[z]\right\};$$
$$\mathfrak{R}(Y, \overline{z}^d) = \left\{g_0 + \overline{z}^d g_1 \colon g_0, g_1 \in \mathfrak{R}_1(Y)\right\},$$

Эти пространства являются модулями над кольцами $\mathbb{C}[z]$ and $\mathfrak{R}_1(Y)$, порожденными функцией $\overline{z}^d$. Функцию $\overline{z}^d$ естественно называть *генератором* модулей $\mathfrak{P}(\overline{z}^d)$ и $\mathfrak{R}(Y, \overline{z}^d)$. В частном случае $d = 1$ возникают пространства, состоящие из всех бианалитических многочленов и бианалитических рациональных функций с полюсами вне Y соответственно.

Пусть, как и раньше, X — компакт в $\mathbb{C}$. В этой главе мы рассмотрим вопрос о плотности в пространстве $C(X)$ модулей $\mathfrak{P}(\overline{z}^d)$ и $\mathfrak{R}(Y, \overline{z}^d)$ для некоторых специально подобранных компактов $Y \supseteq X$ в случае, когда $d > 1$. Кроме того, мы обсудим вопрос о плотности в пространстве $C(X)$ полиномиальных и рациональных модулей типа, порожденных множественными степенями функции $\overline{z}$:

$$\mathfrak{P}(\overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) = \left\{p_0 + \overline{z}^{k_1} p_1 + \dots + \overline{z}^{k_m} p_m \colon p_0, \dots, p_m \in \mathbb{C}[z]\right\};$$
$$\mathfrak{R}(Y, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) = \left\{g_0 + \overline{z}^{k_1} g_1 + \dots + \overline{z}^{k_m} g_m \colon g_0, \dots, g_m \in \mathfrak{R}_1(Y)\right\},$$

где $k_1, \dots, k_m$ — положительные целые числа с условием $k_1 < \dots < k_m$.

Разумеется, если любой из определенных выше модулей является плотным в пространстве $C(X)$, то, как легко видеть, внутренность компакта X пуста. Таким образом, говоря о плотности рассматриваемых модулей в пространстве $C(X)$ для компактов с непустой внутренностью, мы будет иметь в виду их плотность в подходящих подпространствах пространства $C(X)$, которые будут определены ниже. Элементы модулей $\mathfrak{P}(\overline{z}^d)$, $\mathfrak{P}(\overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$,

$\mathfrak{R}(Y, \overline{z}^d)$ и $\mathfrak{R}(Y, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m})$ — это полианалитические функции (порядка $d+1$ и k_m+1 соответственно). Поэтому задача о плотности этих модулей в пространстве $C(X)$ — это специальный случай задач 1 и 2, в которых рассматриваются полианалитические многочлены и полианалитические рациональные функции с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного (типа лакунарности). Эти ограничения приводят к существенно новым явлениям, которые не возникали при аппроксимации функций полианалитическими многочленами общего вида. Эта глава основана на результатах статьи [41].

Модули, порожденные одним генератором

Введем специальные пространства функций. Для компакта X в $\mathbb{C}$ определим пространство $A(X, \overline{z}^d)$ состоящее из всех функций $f \in C(X)$, ограничения которых на X° имеют вид

$$f_0 + \overline{z}^d f_1, \tag{8.1}$$

где f_0 и f_1 — функции класса $\mathcal{O}(X^\circ)$. Здесь важно отметить, что функции f_0 и f_1 не обязаны быть непрерывными на X. Примером такой ситуации являются, в частности, компакт $X = \overline{\mathbb{D}}$ и функция

$$f(z) = \frac{\overline{z}^d - 1}{\sqrt{1-z}}.$$

Заметим также, что если открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ не содержит начало координат, то любая непрерывная на U функция f, которая удовлетворяет (в смысле теории обобщенных функций) эллиптическому дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mathcal{L}_d f := \overline{\partial}\left(\frac{1}{\overline{z}^{d-1}}\overline{\partial} f\right) = 0, \tag{8.2}$$

имеет вид (8.1), где f_0 и f_1 — голоморфные функции в U.

Далее, пусть

$$P(X, \overline{z}^d) := \overline{\{p|_X : p \in \mathfrak{P}(\overline{z}^d)\}},$$

т.е. $P(X, \overline{z}^d)$ — это пространство всех функций, которые могут быть равномерно на X приближены полианалитическими многочленами из $\mathfrak{P}(\overline{z}^d)$.

Кроме того, для компактов X и Y со свойством $X \subseteq Y$ положим

$$R(X, Y, \overline{z}^d) := \overline{\{g|_X \colon g \in \mathfrak{R}(Y, \overline{z}^d)\}},$$

где замыкание берется в пространстве $C(X)$. Для краткости, как и раньше, положим $R(X, \overline{z}^d) := R(X, X, \overline{z}^d)$.

Ясно, что для любого компакта X имеют место включения

$$P(X, \overline{z}^d) \subset R(X, \overline{z}^d) \subset A(X, \overline{z}^d).$$

Задачи 1 и 2 для полианалитических функций вида (8.1) — это задачи, в которых нужно найти необходимые и достаточные условия на компакт X, при которых выполняются, соответственно, равенства $A(X, \overline{z}^d) = P(X, \overline{z}^d)$ и $A(X, \overline{z}^d) = R(X, \overline{z}^d)$.

Как и в случае полианалитических функций общего вида, задача о совпадении пространств $A(X, \overline{z}^d)$ и $P(X, \overline{z}^d)$ не может быть сведена к задаче о совпадении пространств $A(X, \overline{z}^d)$ и $R(X, \overline{z}^d)$. Разумеется, из условия $A(X, \overline{z}^d) = R(X, \overline{z}^d)$ и из условия связности множества $\mathbb{C} \setminus X$ следует равенство $A(X, \overline{z}^d) = P(X, \overline{z}^d)$. Но на этом связь задач о полиномиальной и рациональной аппроксимации для полианалитических функций с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного заканчивается и, как будет показано далее, в этих задачах возникают условия приближаемости совершенно разной природы.

Обсудим задачу о совпадении пространств $A(X, \overline{z}^d)$ и $R(X, \overline{z}^d)$. Первым делом заметим, что если множество $\mathbb{C} \setminus X$ состоит из конечного числа связных компонент, то выполнено равенство $A(X, \overline{z}^d) = R(X, \overline{z}^d)$. В случае когда $0 \notin X$, это вытекает из [48, теорема 1], а при $0 \in X$ надо воспользоваться [48, теорема 3]. Условие конечности числа связных компонент дополнения к X может быть заменено (при практически неизменном доказательстве) на следующее условие, формулируемое в терминах аналитической емкости $\gamma(\cdot)$:

$$\gamma\big(D(z, r) \setminus X\big) \geqslant Cr, \tag{8.3}$$

для некоторой положительной константы C, для всех точек $z \in \partial X$ и для всех достаточно малых $r > 0$. Напомним, что аналитическая емкость $\gamma(E)$ множества $E \subset \mathbb{C}$ определяется как $\gamma(E) = \sup |f'(\infty)|$, где sup берется по всем функциям f, которые определены и голоморфны вне некоторого (своего для каждой функции) компакта $K \subset E$, и которые удовлетворяют условиям $\|f\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\widehat{K}} \leqslant 1$ и $f(\infty) = 0$.

В частности, имеет место следующее утверждение, которое потребуется нам в дальнейшем:

Предложение 57. *Для любого компакта Каратеодори X в $\mathbb{C}$ и для любого $d > 1$ имеет место равенство $A(X, \overline{z}^d) = R(X, \overline{z}^d)$.*

Доказательство. С учетом упомянутого выше результата работы [48], для доказательства предложения нам достаточно проверить, что условие (8.3) выполняется для компактов Каратеодори X. В самом деле, для любых $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ с условием $D(a,\delta) \cap \partial X = D(a,\delta) \cap \partial\widehat{X} \neq \varnothing$ мы можем найти ломаную $\mathit{\Gamma} \subset \overline{D(a,2\delta)} \setminus X$, диаметр которой больше или равен δ. Так как $\gamma(\mathit{\Gamma}) \geqslant \mathrm{diam}(\mathit{\Gamma})/4$ (см., например, [10, глава VIII, теорема 2.1]), то требуемое свойство выполнено. $\square$

В связи с задачей о совпадении пространств $A(X, \overline{z}^d)$ и $R(X, \overline{z}^d)$ напомним цитированные выше результаты М. Я. Мазалова. В работе [18] он доказал, что равенство $R(X, \overline{z}) = A(X, \overline{z})$ имеет место для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$. Позднее, в работе [19] он рассмотрел случай, когда $\mathcal{L}$ — это эллиптический дифференциальный оператор в $\mathbb{C}$ с постоянными комплексными коэффициентами и локально ограниченным фундаментальным решением. Он доказал, что для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$ любая функция $f \in C(X)$, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}f = 0$ на X° может быть равномерно на X приближена функциями F, удовлетворяющими уравнению $\mathcal{L}F = 0$ в некоторой (зависящей от F) окрестности X. Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_d$, определенный выше, не является оператором с постоянными коэффициентами. Однако, модифицируя доказательство последнего результата Мазалова, можно показать, что и в случае $d > 1$ имеет место соответствующий критерий приближаемости:

Теорема 58. $R(X, \overline{z}^d) = A(X, \overline{z}^d)$ *для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$.*

Перейдем к задаче о совпадении пространств $A(X, \overline{z}^d)$ и $P(X, \overline{z}^d)$, которая составляет основное содержание данного параграфа.

d-неванлинновские области

Для изучения условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами класса $\mathfrak{P}(\overline{z}^d)$ при целых $d \geqslant 1$, нам потребуется новое понятие *d-неванлинновской области*. При $d = 1$ это понятие совпадает с ранее введенным понятием неванлинновской области (см. определение 13).

Определение 59. *Ограниченная односвязная область G в $\mathbb{C}$ называется d-неванлинновской областью, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(G)$, такие, что $v \not\equiv 0$, а равенство*

$$\overline{z}^d = \frac{u(z)}{v(z)} \tag{8.4}$$

выполняется почти всюду на ∂G в смысле конформного отображения. Напомним, что это означает, что равенство угловых граничных значений

$$\overline{\varphi(\zeta)}^d = \frac{(u \circ \varphi)(\zeta)}{(v \circ \varphi)(\zeta)} \tag{8.5}$$

выполняется для $|d\zeta|$-почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$, где φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на G.

Как и в случае определения 13, определение d-неванлинновской области не зависит от выбора конформного отображения φ. Кроме того, отношение u/v определяется для d-неванлинновской области G однозначно, и всегда можно считать, что функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ не имеют общих нулей в G. Наконец, если G — жорданова область со спрямляемой границей, то равенство (8.4) можно понимать как равенство угловых граничных значений $|dz|$-почти всюду на ∂G. Аналогично это равенство можно понимать на любой дуге $\gamma \subset \partial G$, являющейся $\overline{G}$-гранью.

Класс всех d-неванлинновских областей мы обозначим ND_d.

Ясно, что $ND \subset ND_d$ для любого $d > 1$. Оказывается, что обратное включение не выполняется ни при каком $d > 1$. Приведем соответствующий пример.

Для вещественного параметра a с условием $a \geqslant 1$ рассмотрим ветвь $f_{a,d}(w)$ многозначной функции $\sqrt[d]{a - w}$, определенную вне луча $[a, +\infty)$

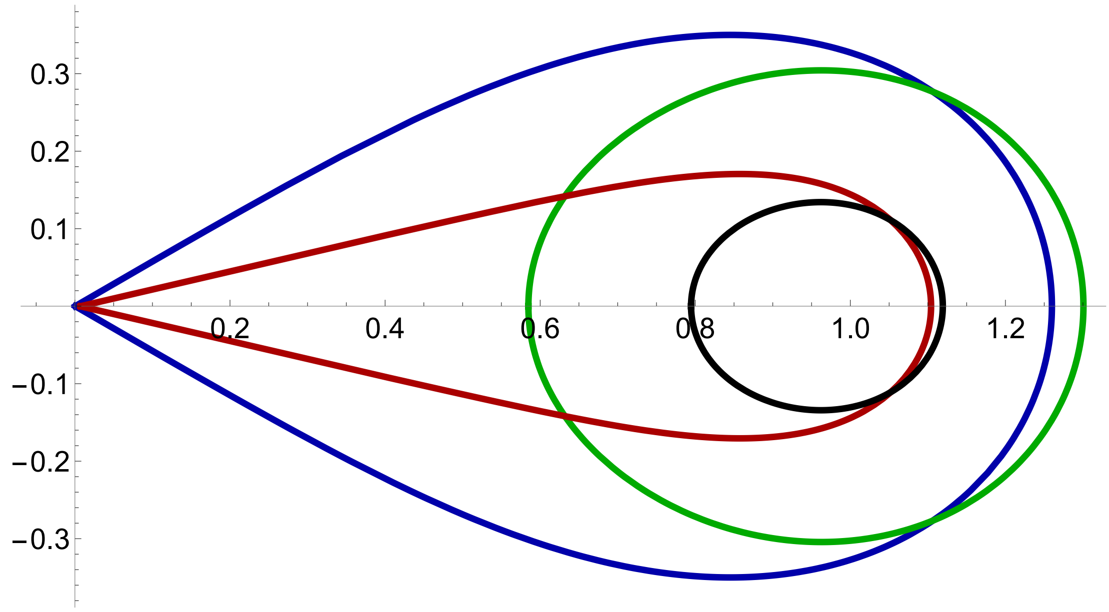

Рис. 17. Контуры, ограничивающие области $\mathcal{B}_a^d$ (синий контур — граница области $\mathcal{B}_1^3$, красный — $\mathcal{B}_1^7$, зеленый — $\mathcal{B}_{6/5}^3$ и черный — $\mathcal{B}_{6/5}^7$)

и такую, что $f_{a,d}(-a) > 0$. При этом функция $f_{a,d}$ однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$. Определим область $\mathcal{B}_a^d := f_{a,d}(\mathbb{D})$. Так как для всех точек $z \in \partial\mathcal{B}_a^d$ выполняется равенство

$$\overline{z} = \sqrt[d]{\frac{a^2 - az^d - 1}{a - z^d}}$$

и так как функция, стоящая в правой части этого равенства имеет точку ветвления внутри области $\mathcal{B}_a^d$, то область $\mathcal{B}_a^d$ не является неванлинновской. В то же самое время область $\mathcal{B}_a^d$ является d-неванлинновской, так как для всех точек $z \in \partial\mathcal{B}_a^d$ выполняется равенство

$$\overline{z}^d = \frac{a^2 - az^d - 1}{a - z^d}.$$

Более того, $\mathcal{B}_a^d \in ND_k$ при всех $k \in d\mathbb{Z}$, но $\mathcal{B}_a^d \notin ND_k$ когда $k \notin d\mathbb{Z}$. На рис. 17 показаны контуры, ограничивающие области $\mathcal{B}_a^d$ при различных значениях a и d.

Легко проверить, что область $\mathcal{D}_{a,b}$, ограниченная эллипсом $\Gamma_{a,b}$, где вещественные параметры a и b таковы, что $a > b > 0$, не является k-неванлинновской для любого целого значения $k \geqslant 1$. В самом деле, на $\Gamma_{a,b}$

выполняется равенство (2.2), из которого вытекает, что для любого целого числа $k \geqslant 1$ и для любого $z \in \Gamma_{a,b}$ выполнено равенство

$$\overline{z}^k = P_k(z) + Q_k(z)\sqrt{z^2 - c^2},$$

где P_k и Q_k — подходящие многочлены комплексного переменного. Функция $P_k(z) + Q_k(z)\sqrt{z^2 - c^2}$ имеет точки ветвления в области $\mathcal{D}_{a,b}$ и, следовательно, (по граничной теореме единственности Лузина–Привалова) функция $\overline{z}^k$ не может совпадать в $\mathcal{D}_{a,b}$ с отношением двух функций класса $H^\infty(\mathcal{D}_{a,b})$. Таким образом, $\mathcal{D}_{a,b} \notin ND_k$ для любого целого $k \geqslant 1$.

Отметим еще одно простое свойство:

$$ND_k \cap ND_{k'} \subset ND_d,$$

где d — это наибольший общий делитель чисел k и k'.

Свойство ограниченной односвязной области быть d-неванлинновской допускает описание в терминах псевдопродолжения неванлинновского типа, аналогичное соответствующему описанию неванлинновских областей, полученному в теореме 22:

Теорема 60. *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, а φ — некоторое конформное единичного круга $\mathbb{D}$ на G. Тогда $G \in ND_d$ в том и только том случае, когда φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.*

Более того, если $G \in ND_d$, то найдется такая внутренняя функция Θ, что $\varphi^d \in K_\Theta$. Обратно, пусть Θ — внутренняя функция. Тогда любая ограниченная однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция φ, для которой $\varphi^d \in K_\Theta$, отображает $\mathbb{D}$ конформно на d-неванлинновскую область $\varphi(\mathbb{D})$.

Вопрос о существовании ограниченных однолистных функций в модельных пространствах K_Θ обсуждался при рассмотрении свойств неванлинновских областей в главе 4 выше. Построенный выше пример области класса $ND_d \setminus ND$ — это пример ограниченной однолистной в круге $\mathbb{D}$ функции φ, такой, что $\varphi^d \in K_\Theta$ для некоторых $d \geqslant 2$ и внутренней функции Θ, но $\varphi \notin K_I$ для любой внутренней функции I.

Для ответа на вопрос о том, при каких условиях d-неванлинновская область будет неванлинновской, необходимо уметь «извлекать корень» в пространствах K_Θ. Точнее говоря, пусть известно, что функция $f \in H^\infty$ такова, что $f^k \in K_\Theta$ для некоторых натурального числа k и внутренней функции Θ. Спрашивается: при каких условиях сама функция f допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$ (и какому модельному пространству принадлежит f в таком случае)? Ответ на этот вопрос дает следующий результат, установленный в [41, теорема 4]. Напомним (см., например, [11, гл. II, §5, теорема 5.5]), что любая функция $f \in H^\infty$ единственным образом представляется в виде произведения $f = e^{ia} I F$, где a — вещественное число, I — внутренняя функция (внутренний сомножитель функции f), а F — внешняя функция.

Теорема 61. *Пусть k — натуральное число, $f \in H^\infty$, и пусть Θ — внутренняя функция. Пусть $h = f^k \in K_\Theta$. Следующие два условия эквивалентны:*

i) f допускает псевдопродолжение неванлинновского типа;

ii) найдется внутренняя функция Θ_1, такая, что $(zJ)^{k-1}\Theta = \Theta_1^k$, где J — это внутренний сомножитель функции $\overline{z}\Theta\overline{h}$.

Кроме того, если f допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, то $f \in K_I$ для некоторой внутренней функции I, такой, что I делит Θ и Θ_1, а I^k делит $z^{k-1}\Theta$ в классе внутренних функций.

Заметим также, что если функция f в теореме 61 допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, то $f \in K_\Theta \cap K_{\Theta_1}$.

Рассмотрим построенный выше пример функции $f_{a,k} = \sqrt[k]{a-z}$ при $a > 1$ и $k > 1$. Тогда в обозначениях теоремы 61 имеем: $h = a - z \in K_{z^2}$, $\overline{z}\Theta\overline{h} = az - 1$ и $J(z) = (az-1)(z-a)$. В этом случае условие, обеспечивающее псевдопродолжение функции $f_{a,k}$, имеет вид $(zJ)^{k-1}z^2 = z^{k+1}J^{k-1} = \Theta_1^k$ для некоторой внутренней функции Θ_1, что, очевидно, невозможно.

Критерии приближаемости для модуля $\mathfrak{P}(\overline{z}^d)$

Теорема 62. *Пусть X — компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$ и пусть d — целое число с условием $d \geqslant 2$. Тогда $A(X, \overline{z}^d) = P(X, \overline{z}^d)$ в том и только том случае, когда каждая ограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$ не является d-неванлинновской областью.*

Доказательство теоремы 62 проходит по схеме, похожей на ту, что использовалась при доказательстве теоремы 27. Перед тем как доказывать теорему 62, мы сформулируем и докажем два предложения, имеющих самостоятельный интерес.

Предложение 63. *Пусть ограниченная односвязная область G в $\mathbb{C}$ является d-неванлинновской. Тогда $C(\partial G) \neq R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$.*

Доказательство. Пусть φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область G. Так как $G \in ND_d$, то существуют такие функции $u, v \in H^\infty(G)$, что $v \not\equiv 0$ и имеет место равенство (8.5).

Выберем точку $z_0 \in G$ с условием $0 < |u(z_0) - \overline{z}_0^d v(z_0)|$. Утверждается, что функция

$$\left.\frac{\overline{z}^d - \overline{z}_0^d}{z - z_0}\right|_{\partial G}$$

не принадлежит пространству $R(\partial\Omega, \overline{\Omega}, \overline{z}^d)$. В самом деле, если это не так, то для любого $\delta > 0$ найдутся рациональные функции f_1 и f_2 с полюсами, лежащими вне $\overline{G}$, такие, что

$$\left| f_1(z) + \overline{z}^d f_2(z) - \frac{\overline{z}^d - \overline{z}_0^d}{z - z_0} \right| < \delta$$

при $z \in \partial G$. Положим $U := u \circ \varphi$, $V := v \circ \varphi$ и $F_j := f_j \circ \varphi$ при $j = 1{,}2$. Тогда для тех точек $\zeta \in \mathbb{T}$, для которых выполнено (8.5), имеет место неравенство

$$\left| F_1(\zeta) + F_2(\zeta)\frac{U(\zeta)}{V(\zeta)} - \frac{U(\zeta) - \overline{z}_0^d V(\zeta)}{V(\zeta)\big(\varphi(\zeta) - z_0\big)} \right| < \delta.$$

Так как

$$\Big| \big(F_1(\zeta)V(\zeta) + F_2(\zeta)U(\zeta)\big)\big(\varphi(\zeta) - z_0\big) - U(\zeta) + \overline{z}_0^d V(\zeta) \Big| \leqslant \delta M \qquad (8.6)$$

для $|d\zeta|$-почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$, где M — это существенный супремум для функции $(\varphi - z_0)V$. Заметим, что все функции, стоящие под знаком модуля в правой части неравенства (8.6), являются граничными функциями для соответствующих функций класса H^∞. Следовательно, на основании принципа максимума модуля мы можем заменить ζ на $\varphi^{-1}(z_0)$ в неравенстве (8.6):

$$\big| u(z_0) - \overline{z}_0^d v(z_0) \big| \leqslant \delta M,$$

что дает противоречие при достаточно малых значениях δ. □

Предложение 64. *Пусть G — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а d — целое число с условием $d \geqslant 2$. Если $C(\partial G) \neq R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$, то $G \in ND_d$.*

Доказательство. Пусть, как и в доказательстве предыдущего предложения, φ — это некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на G. Если $C(\partial G) \neq R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$, то найдется ненулевая мера μ с носителем на ∂G, такая, что $\mu \perp \mathfrak{R}_1(\overline{G})$ и $\overline{z}^d \mu \perp \mathfrak{R}_1(\overline{G})$. Из теоремы 76 вытекает, что найдутся функции h_1 и h_2 класса H^1, такие, что $h_1 \not\equiv 0$ и

$$\mu = (h_1 \circ \varphi^{-1})\, \omega, \qquad \overline{z}^d \mu = (h_2 \circ \varphi^{-1})\, \omega,$$

где $\omega = \varphi(dz_{|\mathbb{T}})$ — гармоническая мера на ∂G (подробно эта конструкция описана в главе 9).

Следовательно, для $|d\zeta|$-почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$\overline{\varphi(\zeta)}^d h_1(\zeta) = h_2(\zeta). \tag{8.7}$$

Далее, отношение h_2/h_1 можно заменить на отношение f_2/f_1 голоморфных и ограниченных в $\mathbb{D}$ функций f_1 и f_2. Если определить функции u и v класса $H^\infty(G)$ следующим образом:

$$u(z) := f_2(\varphi(z)) \quad \text{и} \quad v(z) := f_1(\varphi(z)),$$

то из соотношения (8.7) вытекает, что равенство $\overline{z}^d = u(z)/v(z)$ выполняется почти всюду на ∂G в смысле конформного отображения. Т.е. $G \in ND_d$. $\square$

Доказательство теоремы 62. Из предложения 57 с использованием метода Рунге движения полюсов вытекает, что если множество $\mathbb{C} \setminus X$ является связным, то $A(X, \overline{z}^d) = P(X, \overline{z}^d)$. Таким образом, в дальнейшем мы будет считать, что компакт X имеет несвязное дополнение.

Предположим теперь, что существует ограниченная связная компонента G множества $\mathbb{C} \setminus X$, такая, что $G \in ND_d$. Тогда, с учетом предложения 63, найдется такая точка $z_0 \in G$, что функция

$$g(z) = \frac{\overline{z}^d - \overline{z}_0^d}{z - z_0}$$

обладает свойством $g_{|\partial G} \notin R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$. Но тогда $g_{|\partial G} \notin P(\partial G, \overline{z}^d)$ и, следовательно, $g_{|X} \notin P(X, \overline{z}^d)$. Но $g_{|X} \in A(X, \overline{z}^d)$ и первая часть теоремы 62 доказана.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть μ — это некоторая ненулевая мера с носителем на X, такая, что $\mu \perp \mathfrak{P}(\overline{z}^d)$. Так как $\mu \perp \mathbb{C}[z]$, а X — это компакт Каратеодори, то мера μ не имеет атомов (см. главу 9).

Докажем, что $\mu \perp \mathfrak{R}(X, \overline{z}^d)$. Мы будет использовать аргументы, похожие на те, которые использовались при доказательстве теоремы 27.

Пусть G — это некоторая ограниченная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$, пусть $U := (\widehat{X})^\circ \setminus G$ и пусть G'_∞ — это неограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Если $U \neq \varnothing$, то, как и при доказательстве теоремы 27, возьмем последовательность многочленов $\{q_j\}_{j=1}^\infty \in \mathbb{C}[z]$, такую, что

– $q_j \to 1$ локально равномерно в G;
– $q_j \to 0$ локально равномерно в U;
– $\|q_j\|_{\widehat{X}} \leqslant C$, где C — некоторая абсолютная константа.

Напомним, что существование такой последовательности вытекает из [43, лемма 7] и из классической теоремы Рунге. В случае когда $U = \varnothing$, мы положим $q_j \equiv 1$ при всех $j \geqslant 1$.

Пусть теперь μ_* (как и в доказательстве теоремы 27) — это некоторая предельная точка последовательности мер $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$, $\mu_j = q_j\mu$, в $*$-слабой топологии пространстве мер на X. Другими словами, существует последовательность $\{j_t\}_{t=1}^\infty$, такая, что $j_t \to \infty$ и $\mu_{j_t} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_*$ при $t \to \infty$. Ясно, что $\operatorname{Supp}(\mu_*) \subset \partial X$.

Возьмем точку $z_0 \notin \operatorname{Supp}(\mu)$. При $s = 0$ и $s = d$ выполнены следующие равенства:

$$\widehat{\overline{z}^{\,s}\mu_*}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^{\,s}\,d\mu_*(z)}{z - z_0} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^{\,s} q_{j_t}(z)\,d\mu(z)}{z - z_0} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int \frac{(q_{j_t}(z) - q_{j_t}(z_0))\overline{z}^{\,s}\,d\mu(z)}{z - z_0} + \frac{q_{j_t}(z_0)}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^{\,s}\,d\mu(z)}{z - z_0}\right) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{q_{j_t}(z_0)}{2\pi i}\int \frac{\overline{z}^{\,s}\,d\mu(z)}{z - z_0} = \begin{cases} \widehat{\overline{z}^{\,s}\mu}(z_0) & \text{при } z_0 \in G, \\ 0 & \text{при } z_0 \in W, \end{cases}$$

где $W = (U \setminus \operatorname{Supp}(\mu)) \cup G'_\infty$. Таким образом $\mu_* \perp \mathfrak{P}(\overline{z}^d)$. Возьмем теперь другую последовательность $\{q_j\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющую указанным выше свойствам, и определим меру η как какую-либо предельную точку последовательности $\{q_j\mu_\Omega\}_{j=1}^\infty$ в $*$-слабой топологии пространства мер на X. Тогда

$\eta \perp \mathfrak{P}(\overline{z}^d)$ и, более того, при $s = 0$ и $s = d$ выполнено равенство

$$\widehat{\overline{z}^{\,s}\nu}(z_0) = \begin{cases} \widehat{\overline{z}^{\,s}\mu}(z_0) & \text{при } z_0 \in G, \\ 0 & \text{при } z_0 \in U \cup G'_\infty, \end{cases}$$

которое вытекает из того, что $\mathrm{Supp}(\mu_*) \subset \partial X$. Так как исходная мера μ не имеет атомов, то меры μ_* и η также не имеют атомов. Принимая во внимание ограниченность ядра

$$\frac{\overline{z}^d - \overline{w}^d}{z - w},$$

мы получаем, что функция

$$F(w) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(\overline{z}^d - \overline{w}^d)\, d\eta(z)}{z - w}$$

непрерывна всюду в $\mathbb{C}$ и обращается в ноль в $U \cup G'_\infty$. Таким образом, $F(w) = 0$ вне $\overline{G}$. Как показано в лемме 1 из [48] и лемме 2 из [47], на открытом множестве $W = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет место равенство (понимаемое в смысле теории обобщенных функций)

$$\frac{1}{d}\mathcal{L}_d F = \eta_{|W}.$$

Из этого равенства вытекает, что $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \partial G \cup \{0\}$. Так как мера η не имеет атомов, то $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \partial G$. Следовательно, меры η и $\overline{z}^d\eta$ ортогональны пространству $\mathfrak{R}_1(\overline{G})$. Так как $G \notin ND_d$, то из предложения 64 вытекает, что $\eta = 0$.

Таким образом, мы показали, что для любой связной компоненты G множества $\mathbb{C} \setminus X$ имеют место равенства

$$\widehat{\overline{z}^s\mu}(z) = \widehat{\overline{z}^s\eta}(z) = 0$$

при $z \in G$ и $s = 0, d$, где мера η определяется для G так, как описано выше. Отсюда вытекает, что $\mu \perp R(X, \overline{z}^d)$. Для завершения доказательства остается применить предложение 57, из которого вытекает, что $\mu \perp A(X, \overline{z}^d)$. Итак, любая мера μ с носителем на X, ортогональная пространству $P(X, \overline{z}^d)$, является ортогональной к пространству $A(X, \overline{z}^d)$. Таким образом, $A(X, \overline{z}^d) = P(X, \overline{z}^d)$. $\square$

Проиллюстрируем теорему 62 несколькими примерами. В главе 5 были определены области $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, имеющие вид «рога изобилия» (см. рис. 9). Напомним, что $\mathcal{U}_1$ — это область, ограниченная спиралями $z = (1 + e^{-t})e^{it}$ и $z = (1 + 2e^{-t})e^{it}$ при $t \in [0, +\infty)$, и отрезком [2,3] вещественной прямой. Область $\mathcal{U}_2$ — это образ области $\mathcal{U}_1$ при отображении $(x + iy) \mapsto (x + iy/2)$.

Ограниченные связные компоненты дополнения к компакту $X_1 = \partial\mathcal{U}_1$ — это области $\mathcal{U}_1$ и $\mathbb{D}$. При этом $\mathcal{U}_1 \notin ND_d$ при любом целом $d \geqslant 1$ (это доказывается совершенно аналогично тому, как в главе 5 был доказан факт $\mathcal{U}_1 \notin ND$), а $\mathbb{D} \in ND$ и, следовательно, $\mathbb{D} \in ND_d$ при всех $d \geqslant 1$. Тогда $R(X_1, \overline{\mathcal{U}}_1, \overline{z}^d) = C(X_1) \neq P(X_1, \overline{z}^d)$ и $A(X_1 \cup \mathbb{D}, \overline{z}^d) = P(X_1 \cup \mathbb{D}, \overline{z}^d)$.

Пусть $X_2 = \partial\mathcal{U}_2$. Так как ограниченными компонентами множества $\mathbb{C} \setminus X_2$ являются области $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{D}_{1,1/2}$, которые не являются d-неванлинновскими для всех $d \geqslant 1$, то при всех $\partial \geqslant 1$ выполнены равенства $C(X_2) = P(X_2, \overline{z}^d)$ и $A(\overline{\mathcal{U}}_2, \overline{z}^d) = P(\overline{\mathcal{U}}_2, \overline{z}^d)$.

Наконец, пусть даны целый параметр $d > 1$ и вещественный параметр $a > 1$. Тогда $C(\partial\mathcal{B}_a^d) = P(\partial\mathcal{B}_a^d, \overline{z})$, но $C(\partial\mathcal{B}_a^d) \neq P(\partial\mathcal{B}_a^d, \overline{z}^d)$.

Для компактов X, не являющихся компактами Каратеодори задача, о совпадении пространств $A(X, \overline{z}^d)$ и $P(X, \overline{z}^d)$ остается открытой. Однако имеет место редуктивный критерий приближаемости, аналогичный теореме 31.

Теорема 65. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, а d — целое число, $d > 1$. Равенство $A(X, \overline{z}^d) = P(X, \overline{z}^d)$ имеет место в том и только том случае, когда равенство $A(X \cap \overline{G}, \overline{z}^d) = R(X \cap \overline{G}, \overline{G}, \overline{z}^d)$ выполняется для любой связной компоненты G множества $(\widehat{X})^\circ$, которая не содержится в X.*

Напомним, что доказательство достаточности условий теоремы 31 естественно разбивается на два основных этапа. На первом этапе было доказано, что из приведенного в этой теореме условия на X вытекает равенство $P_n(X) = R_n(X)$. Незначительная модификация соответствующего рассуждения позволяет доказать, что в ситуации теоремы 65 из приведенных условий на X вытекает равенство $P(X, \overline{z}^d) = R(X, \overline{z}^d)$ (это рассуждение основывалось на двойственных аргументах). После этого, с использованием метода Витушкина было доказано, что из условий теоремы 31 вытекает равенство $A_n(X) = R_n(X)$. Равенство $A(X, \overline{z}^d) = R(X, \overline{z}^d)$ может быть выведено из условий теоремы 65 аналогичным образом, причем все необходимые детали локализационной схемы Витушкина для функций, являющихся решениями уравнения (8.2), подробно изложены в работах [48] и [47].

Модули, порожденные несколькими генераторами

Пусть m и $k_1, \dots, k_m$ — положительные целые числа, такие, что $m > 1$ и $k_1 < \dots < k_m$. Всюду в этом параграфе мы будем считать, что d — это наибольший общий делитель чисел $k_1, \dots, k_m$, а $k_j' = k_j/d$ при $j = 1, \dots, m$.

Для данного компактного множества $X \subset \mathbb{C}$ определим следующие пространства функций:

пространство $P(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$, состоящее их всех тех функций класса $C(X)$, которые являются равномерными пределами многочленов из $\mathfrak{P}(\overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$. Другими словами, $P(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$ — это замыкание в $C(X)$ подпространства $\{p_{|X} \colon p \in \mathfrak{P}(\overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})\}$;

пространство $A(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$, состоящее из всех функций f класса $C(X)$, таких, что их ограничение на X° имеет вид $f_0 + \overline{z}^{k_1} f_1 + \dots + \overline{z}^{k_m} f_m$, где $f_0, \dots, f_m \in \mathcal{O}(X^\circ)$;

и пространство $R(X, Y, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$ — замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g_{|X} \colon g \in \mathfrak{R}(Y, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})\}$, где Y — компакт с условием $X \subseteq Y$.

При этом справедливы включения

$$P(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) \subset R(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) \subset A(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}),$$

где, как обычно, $R(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) = R(X, X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$. По аналогии с ранее рассмотренными задачами возникает следующий естественный вопрос: *описать компакты $X \subset \mathbb{C}$, для которых*

$$P(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) = A(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}).$$

В случае нигде не плотных компактов X эта задача превращается в задачу описания тех компактов X, на которых всякая непрерывная функция может быть равномерно приближена полианалитическими многочленами, содержащими только степени $\overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}$ сопряженного переменного.

Если X — это компакт Каратеодори, а показатели k_j при $j = 1, \dots, m$ имеют вид $k_j = jk$ при некотором целом $k \geqslant 1$, то ответ на поставленный вопрос формулируется так же, как критерий приближаемости в теореме 62: *равенство*

$$P(X, \overline{z}^k, \ldots, \overline{z}^{mk}) = A(X, \overline{z}^k, \ldots, \overline{z}^{mk})$$

имеет место в том и только том случае, когда каждая ограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$ *не является* k*-неванлинновской областью*. Доказательство этого утверждения может быть получено в результате дословного воспроизведения доказательства теоремы 62 с минимальными несложными изменениями (см. также доказательство теоремы 27).

В общем случае, т.е. в случае, когда степени сопряженного переменного не образуют арифметическую прогрессию, дело обстоит заметно сложнее. Однако имеет место следующее утверждение:

Теорема 66. *Пусть* G *— ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$. *Рассмотрим следующие утверждения:*

1) $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}) = C(\partial G)$*;*

2) $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{d}) = C(\partial G)$*;*

3) $G \notin ND_d$.

Тогда $(1) \Rightarrow (3)$ *и* $(2) \Rightarrow (3)$. *Если дополнительно предположить, что область* G *является областью Каратеодори, то все эти три условия будут эквивалентны.*

Далее, пусть X *— это компакт Каратеодори в* $\mathbb{C}$. *Если существует ограниченная связная компонента* G *множества* $\mathbb{C} \setminus X$, *такая, что* $G \in ND_d$, *то*

$$A(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}) \neq P(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}).$$

Обратно, если условие $G \notin ND_d$ *выполнено для любой ограниченной связной компоненты* G *множества* $\mathbb{C} \setminus X$, *то*

$$P(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}) = R(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}).$$

Доказательство. Утверждения $(2) \Rightarrow (3)$ для ограниченных односвязных областей общего вида и $(2) \Leftrightarrow (3)$ для областей Каратеодори уже доказаны выше (см. предложения 63 и 64).

Если $G \in ND_d$, то, используя те же самые методы, что и при доказательстве предложения 63, можно показать, что

$$\frac{\overline{z}^d - \overline{z_0}^d}{z - z_0} \notin R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}),$$

где $z_0 \in G$ — такая точка, для которой $|u(z_0) - \overline{z_0}^d v(z_0)| > 0$ и $v(z_0) \neq 0$ (здесь функции $u, v \in H^\infty(G)$ взяты из определения 59). Таким образом, мы доказали, что $(1) \Rightarrow (3)$.

Для того чтобы доказать импликацию $(3) \Rightarrow (1)$ для областей Каратеодори G, мы заметим, что из неравенства $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m}) \neq C(\partial G)$ вытекает, что $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_j}) \neq C(\partial G)$ при всех $j = 1, \dots, m$. Применяя предложение 64, мы найдем m пар функций $u_j, v_j \in H^\infty(G)$, таких, что равенства

$$\overline{z}^{k_j} = \frac{u_j}{v_j}$$

выполняются почти всюду на ∂G в смысле конформного отображения. Так как d — это наибольший общий делитель чисел $k_1, \dots, k_m$, то найдутся такие целые числа $l_1, \dots, l_m$, что

$$d = k_1 l_1 + \dots + k_m l_m.$$

Из этого вытекает, что почти всюду на ∂G в смысле конформного отображения выполняется равенство

$$\overline{z}^d = \frac{u}{v} := \prod_{j=1}^{m} \frac{u_j^{l_j}}{v_j^{l_j}},$$

а это в точности означает, что $G \in ND_d$.

Первое утверждение второй части теоремы доказывается аналогично соответствующему утверждению в теореме 62.

Обсудим схему доказательства оставшегося утверждения.

Как и в доказательстве теоремы 62, мы рассмотрим меру μ с носителем на X, такую, что $\mu \perp \mathfrak{P}(\overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$. Нам надо показать, что $\mu \perp \mathfrak{R}(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$. Пусть G — одна из ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$. Отталкиваясь от меры μ, мы построим (так же, как и в доказательстве теоремы 62) новую меру η, обладающую следующими свойствами: $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \partial G$ и $\eta \perp \mathfrak{R}(G, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$, и такую, что $\widehat{\overline{z}^s \eta}(z) = \widehat{\overline{z}^s \mu}(z)$ для всех $z \in G$ при $s = k_1, \dots, k_m$. Так как $G \notin ND_d$, то, учитывая $(1) \Leftrightarrow (3)$, получаем, что $\eta = 0$. Таким образом, $\mu \perp \mathfrak{R}(X, \overline{z}^{k_1}, \dots, \overline{z}^{k_m})$. □

В завершение этой главы сделаем несколько замечаний относительно утверждений теоремы 66.

Если G — это область Каратеодори, такая, что множество $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ связно, то пространства $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_n})$ и $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$ в теореме 66 могут быть заменены на пространства $P(\partial G, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_n})$ и $P(\partial G, \overline{z}^d)$ соответственно. В частности, это так в случае, когда область G является жордановой.

Как уже отмечалось выше, равенства $A_n(X) = R_n(X)$ и $A(X, \overline{z}^k) = R(X, \overline{z}^k)$ выполняются (при всех целых $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$) для любых компактов $X \subset \mathbb{C}$. В то же самое время вопрос о том, выполняется ли для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$ равенство

$$A(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}) = R(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}),$$

остается открытым. Это равенство выполнено для любых нигде не плотных компактов X. Последнее вытекает из того, что $A(X, \overline{z}^d) = C(X) = R(X, \overline{z}^d)$ для нигде не плотных X (см. выше).

Положительный ответ на поставленный вопрос в случае компактов Каратеодори (а он представляется весьма правдоподобным) даст критерий совпадения пространств $A(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m})$ и $P(X, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m})$ для таких компактов. Отметим также, что аналог теоремы 65 для модулей, порожденных несколькими степенями сопряженного переменного, пока не известен.

Покажем, что в случае, когда область Каратеодори G является d-неванлинновской, пространства $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m})$ и $R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$ различаются.

Предложение 67. *Пусть $G \in ND_d$ — такая область Каратеодори, что функция v, взятая из соотношения (8.4), обращается в ноль в некоторой точке $z_0 \in \Omega$. Тогда*

$$R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^{k_1}, \ldots, \overline{z}^{k_m}) \neq R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d).$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения мы покажем, что $\overline{z}^k \notin R(\partial G, \overline{G}, \overline{z}^d)$ при всех $k = k_2, \ldots, k_m$. Предположим, что это не так, т.е. предположим, что для некоторого $k = k_2, \ldots, k_m$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют две рациональные функции $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}_1(\overline{G})$, такие, что

$$\|f_1 + \overline{z}^d f_2 - \overline{z}^k\|_{\partial G} < \varepsilon.$$

Заметим, что $k' := k/d > 1$. Рассмотрим конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на G и положим $u_1 := u \circ \varphi$ и $v_1 := v \circ \varphi$ (функции

$u, v \in H^\infty(G)$ взяты из определения 59 для G). Тогда для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется следующее неравенство:

$$\left| f_1(\varphi(\zeta))v_1(\zeta)^{k'} + f_2(\varphi(\zeta))u_1(\zeta)v_1(\zeta)^{k'-1} - u_1(\zeta)^{k'} \right| < \varepsilon M,$$

где через M обозначен существенный супремум функции $v_1^{k'}$ на $\mathbb{T}$. Из принципа максимума модуля для функций класса H^∞ вытекает, что в последнем неравенстве мы можем подставить $\varphi^{-1}(z_0)$ вместо ζ. Тогда $|u(z_0)|^{k'} < \varepsilon M$, что приводит к противоречию при достаточно малых значениях ε (напомним, что u и v не имеют общих нулей в G). $\square$

Автору неизвестно, останется ли утверждение предложения 67 в силе без предположения о том, что функция v имеет хотя бы один ноль в области G. Это условие выполняется для всех явных примеров d-неванлинновских областей, которые известны автору. Однако, используя технику работы [4], можно построить пример ситуации, когда функция v не имеет нулей в G. Идея такой конструкции состоит в следующем. Возьмем ограниченную однолистную функцию f, принадлежащую модельному пространству K_S, задаваемому сингулярной внутренней функцией S (см. главу 4 выше). В этом случае область $f(\mathbb{D})$ является неванлинновской (и, соответственно, d-неванлинновской для всех $d \geqslant 1$). Кроме того, из формулы (4.8) вытекает, что u и v из определения 13 для области $f(\mathbb{D})$ имеют вид $u(z) = f^{-1}(z)g(f^{-1}(z))$ и $v(z) = S(f^{-1}(z))$ при $z \in f(\mathbb{D})$, где g — такая функция класса H^2, что $f = \overline{z}S\overline{g}$ на $\mathbb{T}$.

Глава 9

Множества Каратеодори и их свойства

В 1912–1913 годах К. Каратеодори опубликовал серию из трех фундаментальных работ [44, 45, 46] о свойствах конформных отображений. В этих работах доказаны, в частности, классические теоремы Каратеодори о сходимости к ядру и о продолжении. В последней из этих работ и был введен класс областей, которые сегодня называются областями Каратеодори. Множества Каратеодори активно изучаются и используются в комплексном анализе и теории приближений начиная с 1950-х годов. В связи с рассматриваемыми в данной книге задачами аппроксимации функций полианалитическими многочленами потребовалось установить ряд новых, ранее неизвестных, свойств областей и компактов Каратеодори. В этой главе мы приведем подробный обзор основных использованных в книге свойств множеств Каратеодори, свойств конформных отображений областей Каратеодори и мер, ортогональных рациональным функциям на компактах Каратеодори.

Напомним определения областей и компактов Каратеодори (они были сформулированы во введении). Ограниченная область G в $\mathbb{C}$ называется областью Каратеодори, если $\partial G = \partial G_\infty$, где через G_∞ обозначена неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется компактом Каратеодори, если $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — это полиномиально выпуклая оболочка X, или, другими словами, объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$.

В таком виде определение областей Каратеодори можно найти, например, в [23, глава 5, раздел 4.8], в [52, глава. 2, §8] или в [79]. Понятие компакта Каратеодори можно найти в [9, глава 1, §3], в [31] или в [43] (где для таких компактов использован термин *сбалансированное компактное множество*).

Нам потребуется еще одно понятие, связанное с множествами Каратеодори. Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$. Положим $\widehat{\Omega} := \widehat{\overline{\Omega}}$.

Множество $\Omega^* = (\widehat{\Omega})^\circ$ будем называть *оболочкой Каратеодори* Ω. Автору не удалось найти в литературе точную ссылку на понятие оболочки Каратеодори. В ряде источников множество Ω^* называют *внешней оболочкой* множества Ω, что, на наш взгляд, не совсем точно.

Приведем несколько простых примеров.

i) Из теоремы Жордана (см. введение) вытекает, что любая жорданова область является областью Каратеодори и $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}$.

ii) Более интересный и содержательный пример области Каратеодори — это «рог изобилия» (или «внешняя змейка»). Области $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ такого типа (см. рис. 9) уже возникали в главах 5 и 8. Заметим, что $\mathcal{U}_1^* = \mathcal{U}_1 \cup \mathbb{D}$, а $\mathcal{U}_2^* = \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{D}_{1,1/2}$.

iii) Область $\mathbb{D} \setminus [0,1)$ не является областью Каратеодори. Заметим также, что $(\mathbb{D} \setminus [0,1))^* = \mathbb{D}$ (т.е. область $\mathbb{D} \setminus [0,1)$ не является компонентой своей оболочки Каратеодори).

Приведем ряд несложных, но важных топологических свойств областей Каратеодори.

1) Любая область Каратеодори G является односвязной областью и обладает свойством $G = (\overline{G})^\circ$.

2) Ограниченная область G в $\mathbb{C}$ является областью Каратеодори в том и только том случае, когда она совпадает с одной из (связных) компонент своей оболочки Каратеодори G^*.

3) Ограниченная односвязная область G, для которой множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, является областью Каратеодори в том и только том случае, когда $G = (\overline{G})^\circ$.

Первые два свойства вытекают непосредственно из определения области Каратеодори. Третье свойство может быть проверено следующим образом. Пусть G — такая ограниченная односвязная область, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, а $G = (\overline{G})^\circ$. Тогда из соотношений $\partial(\overline{G})^\circ \subseteq \partial\overline{G} \subseteq \partial G$ и $\partial\overline{G} = \partial(\mathbb{C} \setminus \overline{G}) = \partial G_\infty$ (последнее из которых вытекает из связности множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$) следует, что $\partial G = \partial G_\infty$, т.е. что G является областью Каратеодори. Обратно, пусть G — область Каратеодори (в частности, это означает, что область G является ограниченной и односвязной), такая, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно. Тогда $\partial\overline{G} = \partial(\mathbb{C} \setminus \overline{G}) = \partial G_\infty = \partial G$ и, следовательно,

$$(\overline{G})^\circ = (\overline{G})^\circ \cap \big(G \cup \partial G \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{G})\big) = \big((\overline{G})^\circ \cap G\big) \cup \big((\overline{G})^\circ \cap \partial\overline{G}\big) = G.$$

Свойство области быть областью Каратеодори не является топологически инвариантным. Для того чтобы данный гомеоморфизм сохранял это свойство, он должен удовлетворять специальным дополнительным условиям. Одно из таких условий формулируется следующим образом:

Предложение 68. *Пусть G — область Каратеодори, и пусть $f\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда $f(G)$ также является областью Каратеодори. Если исходная область G такова, что множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ является связным, то множество $\mathbb{C} \setminus \overline{f(G)}$ также будет связным.*

Это утверждение было впервые получено в [57, теорема 2] для областей G, «не разделяющих плоскость» (т.е. для таких G, для которых множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ является связным). Общий случай содержится в [51].

Если в приведенном выше утверждении не налагать условий на поведение отображения f на $\widehat{G}$ или если в условиях теоремы 2 работы [57] не требовать связности множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, то соответствующие результаты уже не будут выполняться. В самом деле, образ рога изобилия $\mathcal{U}_1$ при отображении $z \mapsto 1/z$ (эта область часто называется «внутренней змейкой») очевидно не является областью Каратеодори.

Области Каратеодори и конформные отображения

Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ (не обязательно являющаяся областью Каратеодори), а f — некоторое (фиксированное) конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на G.

Напомним, что множество Фату $\mathscr{F}(f)$ функции f — это подмножество, состоящее их всех таких точек $\zeta \in \mathbb{T}$, в которых существуют конечные угловые граничные значения $f(\zeta)$ функции f. Известно (см. [71, предложение 6.5]), что множество $\mathscr{F}(f)$ является борелевским.

Определение 69. *Достижимая часть $\partial_a G$ границы области G — это множество, состоящее из всех точек ∂G, которые достижимы из G посредством некоторой кривой.*

Согласно предложениям 2.14 и 2.17 из [71] имеет место равенство

$$\partial_a G = \bigl\{f(\zeta)\colon \zeta \in \mathscr{F}(f)\bigr\},$$

а в [49, §2] показано, что множество $\partial_a G$ является борелевским. Заметим, что множество $\partial_a G$ зависит только от области G, но не от выбора конформного отображения f. Области G со свойством $\partial G = \partial_a G$ называются *областями с достижимой границей*.

Пусть теперь G — область Каратеодори, пусть $z_0 = f(0) \in G$, а $f'(0) > 0$. Для формулировки следующих результатов нам потребуется одна специальная конструкция. Возьмем конформное отображение φ_∞ круга $\mathbb{D}$ на область G_∞ с нормировкой $\varphi_\infty(0) = \infty$ и определим последовательность простых замкнутых кривых

$$\Gamma_m = \varphi_\infty\left(\left\{\zeta\colon |\zeta| = 1 - \frac{1}{m+1}\right\}\right),$$

при $m \in \mathbb{N}$, последовательность D_m областей, ограниченных кривыми Γ_m, и последовательность конформных отображений f_m круга $\mathbb{D}$ на области D_m с нормировкой $f_m(0) = z_0$, $f_m'(0) > 0$.

Так как область G является *ядром* последовательности областей $\{D_m\}$ относительно точки z_0 в смысле Каратеодори (см., например, [6, глава II, §5]), то из классической теоремы Каратеодори о сходимости к ядру (см., например, теорему 1 в [6, глава II, §5]) следует, что последовательность $\{f_m\}$ сходится к f локально равномерно в $\mathbb{D}$, а последовательность $\{f_m^{-1}\}$ сходится к f^{-1} локально равномерно в G.

Нам потребуется более точная информация о поведении функций f и f^{-1} в $\overline{\mathbb{D}}$ и в $\overline{G}$ соответственно.

Напомним ряд классических результатов о граничном поведении конформных отображений, полученных без предположения о том, что рассматриваемая область G является областью Каратеодори. Эти результаты потребуются нам в дальнейшем.

Первым таким результатом является хорошо известная теорема Каратеодори о продолжении. Эта теорема утверждает, что конформное отображение f единичного круга $\mathbb{D}$ на данную ограниченную односвязную область G продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{G}$ в том и только том случае, когда область G является жордановой. Кроме того, f может быть непрерывно (но не обязательно гомеоморфно) продолжено в $\overline{\mathbb{D}}$ в том и только том случае, когда множество ∂G локально связно.

Следующим важным результатом является теорема Каратеодори о простых концах (см., например, [71, глава 2, п. 2.1]). Она утверждает, что f продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $G \cup \wp(G)$, где $\wp(G)$ — это множество *простых концов* области G (см., например, [71, разд. 2.4]). Так как объединение $G \cup \wp(G)$ может существенно отличаться от $\overline{G}$ в любом разумном геометрическом и/или топологическом смысле (подробно этот вопрос обсуждается, например, в [71, разд. 2.6]), то теорема о простых концах является не самым удобным инструментом для изучения поведения функций f на $\mathbb{T}$ и f^{-1} на ∂G.

Важный вопрос о непрерывном продолжении f^{-1} в $\overline{G}$ решается для общих односвязных областей следующим образом [60, §2]: функция f^{-1} непрерывно продолжается в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда каждая точка $z \in \partial G$ является простой граничной точкой для G в том смысле, что множество $\zeta \in \mathbb{T}$, таких, что ζ принадлежит полному предельному множеству $C(f, \zeta)$ функции f в точке ζ, состоит из одной точки. Заметим, что проверка этого критерия во многих случаях является достаточно сложной задачей.

В случае областей Каратеодори в вопросе о продолжении функции f^{-1} в $\overline{G}$ удается получить значительно более «явные» результаты [49, §2]). Так, для областей Каратеодори имеет место следующее важное свойство точек достижимой части границы.

Предложение 70. *Пусть G — область Каратеодори, а $z \in \partial_a G$. Существует единственная точка $\zeta = \zeta_z \in \mathscr{F}(f)$, такая, что $z = f(\zeta_z)$. Эта точка обозначается символом $f^{-1}(z)$.*

Доказательство. Возьмем точку $z \in \partial_a G$. По определению, существует как минимум одна точка $\zeta \in \mathscr{F}(f)$, такая, что $f(\zeta) = z$. Предположим, что существуют две различные точки ζ_1 и ζ_2 с этим свойством, т.е. $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathscr{F}(f)$ и $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = z$, но $\zeta_1 \neq \zeta_2$. Пусть $\varrho_j = [0, \zeta_j]$ при $j = 1{,}2$. Тогда $\gamma = f(\varrho_1 \cup \varrho_2)$ — это контур в $G \cup \{z\}$. Обозначим через W — область, ограниченную контуром γ. Континуум $\varrho_1 \cup \varrho_2$ делит единичный круг $\mathbb{D}$ на два отрытых круговых сектора Δ_1 и Δ_2 (т.е. $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \mathbb{D} \setminus (\varrho_1 \cup \varrho_2)$). Так как γ — контур в $G \cup \{z\}$, то один из этих секторов, скажем, для определенности — Δ_1, обладает тем свойством, что $f(\Delta_1) \subset W$.

Из существования радиальных пределов у функции f в почти всех точках невырожденной дуги $\overline{\Delta_1} \cap \mathbb{T}$ вытекает, что $W \cap \partial G \neq \varnothing$. Следовательно, существует как минимум одна точка $z' \in W \cap \partial G$. Так как G — это область

Каратеодори, то $z' \in W \cap \partial G_\infty$. Таким образом существует хотя бы одна точка $z'' \in W \cap G_\infty$. Так как множество G_∞ связно, то найдется ломаная линия $\mathfrak{L}_\infty \subset G_\infty$ которая соединяет точку z'' с бесконечностью. Из теоремы Жордана вытекает, что $\mathfrak{L}_\infty \cap \gamma \neq \varnothing$. Но это противоречит тому, что $\gamma \subset G \cup \{z\}$. Следовательно, $\zeta_1 = \zeta_2$. $\square$

Насколько известно автору, свойство областей Каратеодори, указанное в предложении 70, несмотря на свою простоту, ранее не отмечалось.

Имеет место следующий результат, уточняющий характер сходимости определенной выше последовательности $(f_m^{-1})_{m=1}^\infty$ в случае, когда G — область Каратеодори.

Теорема 71. *Пусть G — область Каратеодори, а функции f и f_m при $m \in \mathbb{N}$ такие, как указано выше. Тогда для любой точки $z \in \partial_a G$ имеет место сходимость*

$$f_m^{-1}(z) \to f^{-1}(z)$$

при $m \to \infty$, где $f^{-1}(z)$ определено для $z \in \partial_a G$ согласно предложению 70.

Схема доказательства. Подробное доказательство этой теоремы приведено в [49] (см. доказательство теоремы 2.1 этой работы). Мы обсудим здесь основные этапы соответствующего рассуждения.

Возьмем точку $b_0 \in \partial_a G$ и положим $\zeta_0 = f^{-1}(b_0)$. Обозначим через ϱ радиус $[0, \zeta_0]$ круга $\mathbb{D}$ и определим $\mathfrak{L} = f(\varrho)$. При этом $\mathfrak{L}$ — жорданова дуга, идущая в G из точки $z_0 \in G$ в точку $b_0 \in \partial G$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим точку $b_m \in \varGamma_m$, являющуюся ближайшей точкой контура $\varGamma_m$ к точке b_0. Далее, для каждого $m \geqslant 1$ рассмотрим множества $\mathfrak{L}_m := \mathfrak{L} \cup [b_0, b_m]$ и $\varrho_m := f_m^{-1}(\mathfrak{L}_m)$. Определим $\zeta_m = f_m^{-1}(b_m)$ и заметим, что каждое множество $\varrho_m = f_m^{-1}(\mathfrak{L}) \cup f_m^{-1}([b_0, b_m])$ является объединением двух последовательных жордановых дуг в $\mathbb{D} \cup \{\zeta_m\}$. Ясно, что последовательность $\{\varrho_m\}$ «накапливается» при $m \to \infty$ к некоторому подмножеству $\varLambda$ замкнутого единичного круга $\overline{\mathbb{D}}$. Это означает, что $\varLambda$ — это множество всех таких точек $w \in \overline{\mathbb{D}}$, для которых найдется последовательность $\{w_{m_j}\}_{j=1}^\infty$, такая, что $w_{m_j} \in \varrho_{m_j}$ и $w_{m_j} \to w$ при $j \to \infty$. Можно показать, что множество Λ обладает следующими свойствами

– $\varLambda$ является континуумом;
– $\varLambda \subset \varrho \cup \mathbb{T}$;

– $\varrho \subset \Lambda$;
– множество $\Lambda \cap \mathbb{T}$ связно.

Из этого вытекает, что $\Lambda = \varrho \cup \gamma$, где γ — это некоторая замкнутая дуга окружности $\mathbb{T}$. Таким образом, для доказательства теоремы нам надо показать, что $\Lambda = \varrho$, или что $\gamma = \{\zeta_0\}$.

При $m \in \mathbb{N}$, пусть w'_m — это ближайшая к ζ_0 точка мно‘жества ϱ_m и пусть ϱ'_m — это подконтинуум $f_m^{-1}(\mathfrak{L}'_m)$, где $\mathfrak{L}'_m$ — это либо отрезок $[f_m(w'_m), b_m]$ (в случае, если $f_m(w'_m) \notin \mathfrak{L}$), либо $\mathfrak{L}''_m \cup [b_0, b_m]$ (в противном случае), а $\mathfrak{L}''_m$ — это дуга $\mathfrak{L}$, соединяющая точки $f_m(w'_m)$ и b_0.

Имеет место сходимость $f_m(w'_m) \to b_0$ при $m \to \infty$ и, следовательно, $\mathrm{diam}(f_m(\varrho'_m)) \to 0$ при $m \to \infty$.

Заметим, что ϱ'_m — это либо жорданова дуга, либо объединение двух последовательных жордановых дуг. Применяя [70, теорема 9.2] к дуге ϱ'_m или к каждой из дуг, составляющих множество ϱ'_m, получаем, что $\mathrm{diam}(\varrho'_m) \to 0$ при $m \to \infty$. А это, в свою очередь, означает, что $\zeta_m \to \zeta_0$ при $m \to \infty$ и, следовательно, $\gamma = \{\zeta_0\}$. □

Из теоремы 71 вытекает, что имеет место следующее утверждение, которое часто (и почти всегда неявно) использовалось выше и будет использоваться в дальнейшем.

Следствие 72. *Пусть G — область Каратеодори. Тогда:*

1) *Конформное отображение f единичного круга $\mathbb{D}$ на G и соответствующее обратное отображение f^{-1} продолжаются до борелевских взаимно обратных функций (обозначаемых также символами f и f^{-1}) на множества $\mathbb{D} \cup \mathscr{F}(f)$ и $G \cup \partial_a G$ соответственно.*
2) *Если область Каратеодори G имеет достижимую границу (т.е., если $\partial G = \partial_a G$), то функция f^{-1} принадлежит к первому классу Бэра в $\overline{G}$.*

В самом деле, возможность продолжения функция f до борелевской функции на $\mathbb{D} \cup \mathscr{F}(f)$ вытекает из утверждения на стр. 331 в [70], а возможность соответствующего продолжения функции f^{-1} является следствием теоремы 71.

Замечание. Теорема 71 является уточнением классической теоремы Каратеодори о сходимости к ядру в случае, когда предельная область является областью Каратеодори, а утверждение следствия 72 распространяет классическую теорему Каратеодори о продолжении с жордановых областей на области Каратеодори с достижимыми границами.

В связи этим целесообразно привести пример области Каратеодори с достижимой границей, не являющейся жордановой областью. Это будет, например, область, приведенная на рис. 2, или область

$$\mathbb{D} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ z \colon \frac{1}{2n+1} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2n},\ \operatorname{Im} z \geqslant 0 \right\}.$$

В самом деле, пусть φ — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на рассматриваемую область. Заметим, что существует такая точка $\zeta \in \mathbb{T}$, что $[0, i] = C(\varphi, \zeta)$. Кроме того, для любой точки $a \in [0, i]$ существует точка $\zeta_a \in \mathbb{T}$, такая, что $a = f(\zeta_a)$. Отсюда легко заключить, что рассматриваемая область имеет достижимую границу, но не является жордановой.

Еще один пример области Каратеодори с достижимой границей, не являющейся жордановой областью, приведен на рис. 2 во введении.

Приведем еще несколько замечаний относительно теоремы 71.

Незначительная модификация аргументов, использованных в [49], позволяет доказать более общее утверждение.

Предложение 73. *Пусть G — область Каратеодори, а $\mathfrak{L}$ — такая замкнутая жорданова дуга, что одна из двух ее концевых точек лежит на ∂G, а все остальные точки принадлежат области G. Тогда $f_m^{-1} \rightrightarrows_{\mathfrak{L}} f^{-1}$.*

Кроме того, в [49, теорема 1] доказано, что для любой ограниченной связной компоненты W множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ имеет место сходимость $|f_m^{-1}(z)| \to 1$ при $m \to \infty$ равномерно в $\overline{W}$. На самом деле, можно показать, что последовательность f_m^{-1} равномерно в $\overline{W}$ сходится к некоторой унимодулярной константе.

В связи с использованным в этом параграфе понятием достижимой части границы приведем еще одно топологическое свойство областей Каратеодори, полученное в [49, предложение 2].

Предложение 74. *Пусть G — область Каратеодори, а W — ограниченная (связная) компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Тогда множество $\partial_a G \cap \partial W$ состоит не более чем из одной точки.*

Покажем, что существует область Каратеодори G, имеющая ограниченную компоненту W множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, такую, что множество $\partial_a G \cap \partial W$ состоит ровно из одной точки. Для этого мы рассмотрим область

$$G_1 := \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{z\colon \frac{1}{2n+1} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2n},\ |\operatorname{Im} z| < \pi - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ \bigcup\left\{z\colon |\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z,\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\},$$

и получим требуемую область в виде $G := \exp G_1$. Соответствующей компонентой W в этом случае будет $W = \mathbb{D}$.

Из предложения 74 вытекает следующее наблюдение:

Следствие 75. *Если G — это область Каратеодори с достижимой границей, то множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно.*

О мерах, ортогональных к пространствам рациональных функций

Перейдем к вопросу о структуре мер, ортогональных к рациональным функциям на границах областей Каратеодори. Пусть, как и раньше, G — область Каратеодори, а f — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G, такое, что $f(0) = z_0 \in G$. Будем считать, что функции f и f^{-1} продолжены (в смысле следствия 72) до взаимно обратных борелевских функций на $\mathbb{D} \cup \mathscr{F}(f)$ и $G \cup \partial_a G$ соответственно.

Пусть $h \in L^1(\mathbb{T})$. Напомним, что мера $\nu_h = h\, d\zeta_{|\mathbb{T}}$ действует (как функционал на пространстве $C(\mathbb{T})$) по формуле

$$\nu_h(f) = \int_{\mathbb{T}} g(\zeta)h(\zeta)\, d\zeta, \qquad g \in C(\mathbb{T}).$$

Определим меру $f(\nu_h)$ на ∂G следующим образом:

$$f(\nu_h)(E) := \nu_h(f^{-1}(E \cap \partial_a G))$$

для любого борелевского множества $E \subset \partial G$. При этом для любой функции $g \in C(\partial G)$ имеют место равенства

$$\int g(z)\, df(\nu_h)(z) = \int_{\mathscr{F}(f)} g(f(\zeta))h(\zeta)\, d\zeta = \int_{\mathbb{T}} g(f(\zeta))h(\zeta)\, d\zeta. \tag{9.1}$$

Определим теперь меру ω на ∂G равенством

$$\omega = f(\nu_1) = f(d\zeta_{|\mathbb{T}}), \tag{9.2}$$

а меру ω_0 — равенством

$$\omega_0 = f\left(\frac{d\zeta_{|\mathbb{T}}}{2\pi i\zeta}\right) = f(d\vartheta/2\pi),$$

где $\zeta = e^{i\vartheta}$. При этом меры ω_0 и ω сосредоточены на $\partial_a G$ и не имеют атомов. Кроме того, из следствия 72 и из равенства (9.1) вытекает, что для любой функции $h \in L^1(\mathbb{T})$ выполнено

$$f(\nu_h) = (h \circ f^{-1})\omega = (h_0 \circ f^{-1})\omega_0,$$

где $h_0 = 2\pi i z h$.

Мера ω_0 обладает тем свойством, что для любого борелевского множества $E \subset \partial G$ имеет место равенство

$$\omega_0(E) = \omega(z_0, E, G),$$

где через $\omega(z, E, G)$ обозначается *гармоническая мера* множества E, вычисленная относительно области G и точки некоторой точки $z \in G$ (см., например, [49, §3]).

Отметим еще, что $|\omega| = 2\pi\omega_0$, а для любой функции $g \in C(\partial G)$ имеет место равенство

$$\int g(z)\, d\omega_0(z) = \widehat{g}(z_0),$$

где через $\widehat{g}$ обозначена такая гармоническая в области G и непрерывная в $\overline{G}$ функция, что $\widehat{g}_{|\partial G} = g$.

Вопрос о структуре мер, ортогональных к рациональным функциям на компактах Каратеодори изучался, в частности, Э. Бишопом в работах [42] и [43]. Следующее утверждение объединяет и усиливает (см. замечание ниже) результаты, установленные (по существу, но в неявной форме) в цитированных работах Бишопа.

Теорема 76.

1. *Пусть G — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а μ — мера на ∂G с условием $\mu \perp \mathfrak{R}_1(\overline{G})$. Тогда существует функция $h \in H^1$, такая, что*

$$\mu = (h \circ f^{-1})\, \omega = (h_0 \circ f^{-1})\, \omega_0. \tag{9.3}$$

2. *Пусть X — компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$ с условием $X^\circ \neq \varnothing$, а μ — мера на ∂X с условием $\mu \perp \mathfrak{R}_1(X)$. Тогда*

$$\mu = \sum \mu_\Omega, \tag{9.4}$$

где $\mu_\Omega = \mu_{|\partial\Omega} \perp \mathfrak{R}_1(\overline{\Omega})$, сумма берется по всем (связным) компонентам множества X°, а соответствующий ряд сходится по норме в пространстве мер на ∂X.

Все основные идеи и утверждения, необходимые для доказательства теоремы 76, могут быть найдены в работах [42] и [43]. Однако они содержатся там в существенно неявном виде. Это связано с тем, что центральной идеей указанных работ является изучение понятия аналитического дифференциала, представляющего меру. Напомним, что аналитическим дифференциалом в области Ω называется дифференциальная форма вида $g(z)\,dz$, где $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Говорят, что аналитический дифференциал $g(z)\,dz$ представляет меру μ на $\partial\Omega$, если последовательность мер $\{g(\zeta)\,d\zeta_{|\gamma_j}\}_j$, где $(\gamma_j)_j$ — это некоторая последовательность спрямляемых контуров, такая, что $D_j \subset D_{j+1} \subset \Omega$ и $D_j \uparrow \Omega$ при $j \to \infty$ (здесь D_j — это область, ограниченная контуром γ_j) сходятся в $*$-слабой топологии пространств мер на $\overline{\Omega}$ к μ. Заметим, что аналитический дифференциал $g(z)\,dz$ в Ω определен, даже если граница области Ω не является спрямляемой.

Замечание. В [42] и [43] было доказано только то, что слагаемые μ_Ω в равенстве (9.4) ортогональны пространству $\mathfrak{R}_1(\overline{\Omega})$, но не было доказано важное утверждение о том, что мера μ_Ω — это сужение меры μ на $\partial\Omega$.

Доказательство теоремы 76, приведенное в [49], заметно проще доказательства Бишопа, полученного в [42] и [43]. Оно не использует понятие аналитического дифференциала и позволяет дополнительно получить, что меры μ_Ω в (9.4) являются сужениями меры μ на $\partial\Omega$.

Схема доказательства теоремы 76. Обсудим схему доказательства этой теоремы, приведенного в [49]. Это доказательство разбито на несколько этапов (шагов), имеющих и самостоятельный интерес.

Нам будет удобно обозначить через Ω_j, где $j \in \mathscr{I}$, а $\mathscr{I}$ — некоторое конечное или счетное множество индексов, все связные компоненты множества X°. Ясно, что для любого $j \in \mathscr{I}$ область Ω_j является областью Каратеодори.

Шаг 1. *Существует континуум* (*связный компакт*) *Каратеодори Y, такой, что $X \subseteq Y$ и $X^\circ = Y^\circ$.*

Шаг 2. *При $j \in \mathscr{I}$ пусть f_j — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω_j. Тогда $h_j := (\widehat{\mu} \circ f_j)f_j' \in H^1$.*

Доказательство утверждения этого шага дословно повторяет доказательство леммы 28.

Для дальнейших построений при всех $j \in \mathscr{I}$ определим меры $\mu_j := f_j(h_j\, d\zeta_{|\mathbb{T}}) = (h_j \circ f_j^{-1})\, \omega_j$, где f_j — это конформные отображения круга $\mathbb{D}$ на Ω_j, а $\omega_j = f_j(d\zeta_{|\mathbb{T}})$.

Шаг 3. *Имеют место следующие свойства:*

i) $\widehat{\mu}_j(z) = \widehat{\mu}(z)$ *для любого* $z \in \Omega_j$*;*

ii) $\widehat{\mu}_j(z) = 0$ *при всех* $z \notin \overline{\Omega}_j$*, т.е.* $\mu_j \perp \mathfrak{R}_1(\overline{\Omega}_j)$.

Рассмотрим точку $z \notin \partial\Omega_j$. Имеем

$$\widehat{\mu}_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_j}\frac{h_j(f_j^{-1}(w))\, d\omega_j(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{h_j(\zeta)\, d\zeta}{f_j(\zeta)-z}.$$

Если $z \notin \Omega_j$, то функция, стоящая под знаком последнего интеграла — это ограниченная аналитическая функция в $\mathbb{D}$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{h_j(\zeta)\, d\zeta}{f_j(\zeta)-z} = 0$$

и свойство (ii) установлено.

Если $z \in \Omega_j$, то найдется $a \in \mathbb{D}$, такая, что $z = f_j(a)$, а функция

$$H(\zeta, a) = \begin{cases} \dfrac{\zeta - a}{f_j(\zeta) - f_j(a)}, & \zeta \neq a \\[2ex] \dfrac{1}{f_j'(a)}\ , & \zeta = a \end{cases}$$

является ограниченной аналитической функцией в $\mathbb{D}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{h_j(\zeta)\,d\zeta}{f_j(\zeta)-f_j(a)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{h_j(\zeta)\,H(\zeta,a)\,d\zeta}{\zeta-a}=h_j(a)\,H(a,a)=\frac{h_j(a)}{f_j'(a)}.$$

Из этого следует, что при $z\in\Omega_j$ имеют место равенства

$$\widehat{\mu}_j(z)=\frac{h_j(a)}{f_j'(a)}=\frac{\widehat{\mu}(f_j(a))f_j'(a)}{f_j'(a)}=\widehat{\mu}(f_j(a))=\widehat{\mu}(z).$$

Первое утверждение теоремы доказывается теперь следующим образом. Пусть $X=\overline{\Omega}$. Тогда множество связных компонент множества X° состоит только из одной области $\Omega_1:=\Omega$. Из утверждения шага 3 вытекает, что $\widehat{\mu}(z)=\widehat{\mu}_1(z)$ для всех $z\notin\partial\Omega$. Из этого вытекает, что $\mu-\mu_1\perp\mathfrak{R}_1(\partial\Omega)$. Из теоремы Мергеляна [24, теорема 4.4] вытекает, что если Ω — область Каратеодори, то $R(\partial\Omega)=C(\partial\Omega)$. Но тогда $\mu=\mu_1$, что и требовалось.

Перейдем к доказательству утверждения (2). Пусть $\mathscr{I}'\subset\mathscr{I}$ — некоторое конечное множество индексов. Положим

$$W_{\mathscr{I}'}:=\bigcup\nolimits_{j\in\mathscr{I}'}\Omega_j.$$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из леммы 7 работы [43] и из теоремы Рунге.

Шаг 4. *Найдется последовательность функций* $(f_k)_{k=1}^\infty\subset\mathfrak{R}_1(X)$*, такая, что*

- $\|f_k\|_X\leqslant 1$, $f_k\rightrightarrows 1$ *локально равномерно в* $W_{\mathscr{I}}$ *и*
- $f_k\rightrightarrows 0$ *локально равномерно в* $X^\circ\setminus W_{\mathscr{I}}$.

Из этого вытекает, что последовательность мер $(f_k\mu)_{k=1}^\infty$ на ∂X такова, что $\|f_k\mu\|\leqslant\|\mu\|$. Следовательно, эта последовательность имеет предельную точку $\mu_{\mathscr{I}'}$ в $*$-слабой топологии пространства мер на ∂X. Так как $\mu\perp\mathfrak{R}_1(X)$, а $f_k\in\mathfrak{R}_1(X)$, то $\mu_{\mathscr{I}'}\perp\mathfrak{R}_1(X)$.

Шаг 5. *Имеют место следующие свойства:*

i) $\widehat{\mu}_{\mathscr{I}'}(z)=\widehat{\mu}(z)$ *при всех* $z\in W_{\mathscr{I}'}$*;*

ii) $\widehat{\mu}_{\mathscr{I}'}(z)=0$ *при всех* $z\in X^\circ\setminus W_{\mathscr{I}'}$.

Переходя, если это нужно, к подпоследовательности, можно утверждать, что последовательность $(f_k\mu)_k$ сходится к $\mu_{\mathscr{I}'}$ в $*$-слабой топологии пространства мер на ∂X. Пусть $z \notin \partial X$. Требуемое утверждение вытекает из следующих равенств:

$$\widehat{\mu}_{\mathscr{I}'}(z) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(f_k(w) - f_k(z))\,d\mu(w)}{w-z} + \frac{f_k(z)}{2\pi i}\int\frac{d\mu(w)}{w-z}\right) = \\ = \widehat{\mu}(z)\lim_{k\to\infty} f_k(z).$$

Из утверждений, доказанных на шагах 3 и 5, вытекает, что

$$\widehat{\mu}_{\mathscr{I}'}(z) = \sum_{j\in\mathscr{I}'}\widehat{\mu}_j(z)$$

для всех $z \notin \partial X$. Используя тот факт, что $R(\partial X) = C(\partial X)$ (как и доказательстве первого утверждения теоремы), мы заключаем, что

$$\mu_{\mathscr{I}'} = \sum_{j\in\mathscr{I}'}\mu_j. \tag{9.5}$$

Шаг 6 (лемма 10 работы [43]). *$\omega_j \perp \omega_k$ при $j \neq k$, $j, k \in \mathscr{I}$.*

Учитывая (9.5), принимая во внимание утверждение шага 6 и тот факт, что $\mu_j = (h_j \circ f_j^{-1})\,\omega_j \ll \omega_j$, мы приходим к выводу, что $\mu_j \perp \mu_k$ при $j, k \in \mathscr{I}$, $j \neq k$. Следовательно,

$$\sum_{j\in\mathscr{I}'}\|\mu_j\| = \Big\|\sum_{j\in\mathscr{I}'}\mu_j\Big\| = \|\mu_{\mathscr{I}'}\| \leqslant \|\mu\|,$$

откуда $\sum_{j\in\mathscr{I}}\|\mu_j\| < \infty$. Таким образом, ряд $\sum_{j\in\mathscr{I}}\mu_j$ сходится в пространстве мер на ∂X к некоторой мере η. Ясно, что $\eta \perp \mathfrak{R}_1(X)$. Для каждого индекса $j \in \mathscr{J}$ имеет место равенство $\widehat{\eta}(z) = \widehat{\mu}_j(z)$ для любого $z \in \Omega_j$. Применяя результат, полученный на шаге 3, получаем, что $\widehat{\eta}(z) = \widehat{\mu}(z)$ на X. Следовательно, $\eta = \mu$.

Возьмем произвольный индекс $k \in \mathscr{I}$. Так как $\mu_j \perp \mu_k$ для всех $j \in \mathscr{I} \setminus \{k\}$, то для любого борелевского множества $E \subset \partial X$ справедливы следующие равенства:

$$\mu_{|\partial\Omega_k}(E) = \mu(E \cap \partial\Omega_k) = \sum_{j\in\mathscr{I}}\mu_j(E\cap\partial\Omega_k) = \mu_k(E\cap\partial\Omega_k) = \mu_k(E).$$

Таким образом, теорема 76 полностью доказана. □

Из первого утверждения теоремы 76 вытекает, что если G — это область Каратеодори, а множество $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ связно, то любая мера на ∂G, ортогональная всем многочленами комплексного переменного, будет абсолютно непрерывной относительно гармонической меры на ∂G (вычисленной относительно G и произвольной фиксированной точки $z \in G$). Интересно отметить, что имеет место следующее несложное обращение этого факта, отмеченное впервые в работе [56].

Предложение 77. *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, и пусть $a \in G$. Если любая мера μ на ∂G с условием $\mu \perp \mathbb{C}[z]$ является абсолютно непрерывной относительно меры $\omega(a, \cdot, G)$, то G является областью Каратеодори, а множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно.*

Доказательство. Напомним, что для любых точек $a \in G$ и $b \in G$ меры $\omega(a, \cdot, G)$ и $\omega(b, \cdot, G)$ абсолютно непрерывны относительно друг друга.

Проверим сначала, что если область G не является областью Каратеодори, то найдется мера μ_0 на ∂G, не являющаяся абсолютно непрерывной относительно меры $\omega(a, \cdot, G)$, но такая, что $\mu_0 \perp \mathbb{C}[z]$. Рассмотрим связную компоненту V множества $\widehat{G}$, содержащую точку $z_0 = f(0)$, где f — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G. Если область G не является областью Каратеодори, то найдется точка $z_1 \in \partial G \cap V$. Рассмотрим меру

$$\mu_0 := \omega(z_1, \cdot, V) - \boldsymbol{\delta}_{z_1},$$

где $\boldsymbol{\delta}_a(E)$ — это δ-мера Дирака множества E, сосредоточенная в точке a. По построению мера μ_0 не является абсолютно непрерывной относительно меры $\omega(a, \cdot, G)$. В самом деле, мера $\omega(a, \cdot, G)$ не имеет атомов, но $\mu_0(\{z_1\}) = -1$. Покажем, что $\mu_0 \perp \mathbb{C}[z]$. В самом деле, для любого многочлена P имеет место равенство

$$\int P(z)\, d\mu_0(z) = \int_{\partial V} P(z)\, d\omega(z_1, z, V) - P(z_1) = P(z_1) - P(z_1) = 0.$$

Пусть теперь область Каратеодори G такова, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ не связно, и пусть Ω — одна из ограниченных связных компонент этого множества. Пусть $z_1 \in \Omega$. В силу предложения 74 множество $\partial_a G \cap \partial\Omega$ состоит не более чем из одной точки. Отсюда вытекает, что мера

$$\mu_1 := (z - z_1)\, \omega(z_1, \cdot, \Omega)$$

не является абсолютно непрерывной относительно $\omega(a,\cdot,G)$ (более того, эти меры взаимно сингулярны). Остается проверить, что $\mu_1 \perp \mathbb{C}[z]$. В самом деле,

$$\int P(z)\,d\mu_1(z) = \big((z-z_1)P(z)\big)|_{z=z_1} = 0$$

для любого многочлена $P \in \mathbb{C}[z]$. $\square$

Установим далее два утверждения о структуре мер, ортогональных к рациональным функциям на компактах специального вида. Эти утверждения использовались нами при доказательстве теорем о приближаемости функций полианалитическими многочленами в предыдущих главах.

В лемме 4.1 работы [13] было показано, что если G — это жорданова область со спрямляемой границей, а μ — это такая мера, что $\operatorname{Supp}(\mu) \subset G$, то мера $\mu + \widehat{\mu}\,dz_{|\partial G}$ ортогональна к пространству многочленом комплексного переменного. Следуя терминологии, предложенной Д. Хавинсоном, меру $\widehat{\mu}\,dz_{|\partial G}$ можно назвать *аналитическим выметанием* меры μ на ∂G. Следующее утверждение (см. [49, предложение 3]) распространяет этот результат на случай областей Каратеодори.

Предложение 78. *Пусть G — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а f — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G. Справедливы следующие утверждения:*

i) *если η — мера с условием $\operatorname{Supp}(\eta) \subset G$, а мера η^* определена соотношением*

$$\eta^* := \eta + (\widehat{f^{-1}(\eta)} \circ f^{-1})\,\omega,$$

то мера η^* ортогональная пространству $A(\overline{G})$;

ii) *если $K \subset G$ — некоторый компакт, а μ — мера на $K \cup \partial G$ с условием $\mu \perp \mathfrak{R}_1(\overline{G})$, то существует функция $h \in H^1$, такая, что*

$$\mu = (\mu_{|K})^* + (h \circ f^{-1})\,\omega.$$

Доказательство. Проверим первое утверждение. Положим $\nu = f^{-1}(\eta)$ и $M := \operatorname{Supp}(\nu)$. Так как функция $\widehat{\nu}$ голоморфна вне M, то $\widehat{\nu}\,d\zeta_{|\mathbb{T}}$ — это корректно определенная мера на $\mathbb{T}$ и, следовательно, $\sigma := f(\nu) = f(\widehat{\nu}\,d\zeta_{|\mathbb{T}})$ — это корректно определенная мера на ∂G. Возьмем функцию $g \in A(\overline{G})$.

При этом $g \circ f \in H^\infty$. Используя теоремы Фубини и Коши, получаем:

$$\int g\,d\sigma = \int_{\mathbb{T}} g(f(\zeta))\widehat{\nu}(\zeta)\,d\zeta = \int_M \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(f(\zeta))\,d\zeta}{w-\zeta}\right] d\nu(w) = \\ -\int_M g(f(w))\,d\nu(w) = -\int g\,d\nu,$$

откуда $\displaystyle\int g(z)\,d\eta^*(z) = \int g(z)\,d\nu(z) + \int g(\zeta)\,d\eta(\zeta) = 0.$

Для того чтобы доказать второе утверждение, достаточно заметить, что мера $\mu - (\mu_{|K})^*$ сосредоточена на ∂G и ортогональна к пространству $\mathfrak{R}_1(\overline{G})$. Остается воспользоваться (9.3). $\square$

Используя утверждение второй части теоремы 76 и предложение 78, можно получить следующий результат, который будет существенно использован в дальнейшем.

Следствие 79. *Пусть Y — компакт Каратеодори, причем $Y^\circ \neq \varnothing$ и пусть $K \subset Y^\circ$ — компакт. Тогда любая мера μ на $K \cup \partial Y$, ортогональная к пространству $\mathfrak{R}_1(Y)$, представима в виде*

$$\mu = \sum \mu_\Omega,$$

где $\mu_\Omega = \mu_{|\overline{\Omega}} \perp \mathfrak{R}_1(\overline{\Omega})$, сумма берется по всем (связным) компонентам множества Y°, а соответствующий ряд сходится по норме в пространстве мер на Y.

Доказательство. Так как $K \subset Y^\circ$, то множество $\mathscr{I}_K$ связных компонент Y°, пересекающихся с K, конечно. Применяя второе утверждение теоремы 76 к мере $\mu - \sum_{\Omega \in \mathscr{I}_K} (\mu_{|K\cap\Omega})^*$, мы получаем требуемое утверждение. $\square$

Компакты Каратеодори и теорема Вермера о максимальности

Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Напомним, что замкнутая подалгебра A алгебры $C(X)$ называется *максимальной*, если для любой замкнутой подалгебры B алгебры $C(K)$, такой, что $B \supset A$, выполняется одно из двух условий: $A = B$ или $B = C(X)$.

Изучение вопроса о максимальности алгебры $P(X)$ для различных компактов X в $\mathbb{C}$ восходит к Д. Вермеру, который доказал, что диск-алгебра $P(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}$ является максимальной в $C(\mathbb{T})$. Позже Э. Бишоп [42, теорема 6] показал, что $P(X)|_{\partial X}$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial X)$, коль скоро компакт X имеет связное дополнение и связную внутренность (см. также [80, теорема 25.12]).

Оказывается, что имеет место следующее, ранее не отмечавшееся, свойство компактов Каратеодори, полученное в [50]:

Теорема 80. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Если алгебра $P(X)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(X)$, то X является компактом Каратеодори, а $X^\circ = \varnothing$. Если, более того, $X = \partial\Omega$, где Ω — это ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$, причем $\Omega \neq \varnothing$, то множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ и $\mathbb{C} \setminus \Omega$ связны.*

Доказательство. Если $P(X) = C(X)$ то, применяя теорему Лаврентьева, получаем, что $K^\circ = \varnothing$ и $K = \widehat{K}$, откуда $\partial K = \partial\widehat{K}$.

Предположим теперь, что $P(X) \neq C(X)$. В этом случае множество $\mathbb{C} \setminus \partial\widehat{K}$ содержит как минимум две связные компоненты. В случае, когда $X^\circ = \varnothing$ эти компоненты могут быть выбраны так, что одна из них — это неограниченная связная компонента G_∞ множества $\mathbb{C} \setminus X$, а другая — это одна из ограниченных связных компонент множества $\widehat{X} \setminus X$. Если же $X^\circ \neq \varnothing$, то мы можем выбрать G_∞ и одну из связных компонент множества X°.

Таким образом, $P(\partial\widehat{X}) \neq C(\partial\widehat{X})$. Из этого вытекает, что существует мера μ на $\partial\widehat{X}$, такая, что $\mu \perp P(\partial\widehat{X})$ и $\mu \not\equiv 0$. Предположим теперь, что $\partial X \setminus \partial\widehat{X} \neq \varnothing$ или $X^\circ \neq \varnothing$ и возьмем точку $a \in \partial X \setminus \partial\widehat{X}$ или точку $a \in X^\circ$. При этом существует функция $f \in C(X)$, такая, что $f(a) = 1$, а $f_{|\partial\widehat{X}} = 0$.

Пусть теперь B — это замыкание алгебры, порожденной пространством $\mathbb{C}[z]$ и функцией f, т.е. B состоит из равномерных пределов на X функций вида $\sum_{k=0}^{m} q_k f^k$, где $q_0, \ldots, q_m \in \mathbb{C}[z]$ при $m \in \mathbb{N}$. Так как $f \notin P(X)$, то $B \neq P(X)$. Более того, так как $f_{|\partial\widehat{X}} = 0$, то

$$\int_X \sum_{k=0}^{m} q_k(z) f^k(z)\, d\mu(z) = \int_{\partial\widehat{X}} q_0(z)\, d\mu(z) + \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\widehat{X}} q_k(z) f^k(z)\, d\mu(z) = 0.$$

Таким образом, $B \neq C(X)$, но существование B противоречит максимальности $P(X)$. Следовательно, $\partial X = \partial \widehat{X}$ и $X^\circ = \varnothing$.

Пусть теперь $X = \partial\Omega$, где $\Omega \neq \varnothing$ — ограниченное открытое множество. Предположим, что $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ несвязно. Пусть Ω_1 — некоторая ограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$, а Ω_2 — некоторая связная компонента Ω. Выберем $z_1 \in \Omega_1$ и $z_2 \in \Omega_2$. Рассмотрим замкнутую подалгебру B, порожденную $P(X)$ и функцией $g_1(z) = (z - z_2)^{-1}$, $z \in X$. Ясно, что $g_1 \notin P(X)$. Учитывая, что $\partial\Omega_1 \subset X$, $g_{1|\overline{\Omega}_1} \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}_1)$ и применяя принцип максимума модуля, получаем, что функция $g_2(z) = (z - z_1)^{-1}$, $z \in X$, не принадлежит B. Следовательно, $P(X)$ — это не максимальная подалгебра. Из этого противоречия вытекает, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно.

Предположим, наконец, что $\mathbb{C} \setminus \Omega$ несвязно. В этом случае $\mathbb{C} \setminus \Omega = F_\infty \cup F_1$, где F_∞ — это замкнутое множество, такое, что $\overline{\Omega}_\infty \subset F_\infty$, а F_1 — это непустое компактное множество, такое, что $F_1 \cap F_\infty = \varnothing$. Возьмем точку $z \in F_1 \cap \partial\Omega$. Выше было доказано, что $\partial\Omega$ — это компакт Каратеодори. Следовательно, $z \in \partial(\partial\Omega) = \partial\Omega = \partial(\widehat{\partial\Omega})$. Из этого вытекает, что найдется последовательность точек $(z_n)_{n=1}^\infty$, такая, что $z_n \notin \widehat{\partial\Omega}$ и $z_n \to z$ при $n \to \infty$. Так как $z_n \in \Omega_\infty$, то $z \in \overline{\Omega}_\infty \cap F_1 = \varnothing$. Снова возникает противоречие и, следовательно, множество $\mathbb{C} \setminus \Omega$ связно. $\square$

Из теоремы 80 и из цитированных выше результатов Вермера и Бишопа вытекает следующее утверждение:

Следствие 81. *Если $G \neq \varnothing$ — ограниченная область, то $P(\partial G)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial G)$ в том и только том случае, когда G — это область Каратеодори и множество $\mathbb{C} \setminus G$ связно.*

Заметим также, что несколько более слабый вариант следствия 81 (в случае, когда область G изначально предполагается односвязной) был получен ранее в [57, теорема 17].

Среди недавних результатов о множествах Каратеодори, непосредственно связанных с обсуждаемыми аппроксимационными задачами, отметим полученные в [57] и [36] результаты, которые распространяет на области Каратеодори теорему У. Рудина об обращении принципа максимума модуля.

Литература

[1] М. Б. Балк, ‘‘Теоремы единственности для полианалитических функций’’, *Изв. АН АрмССР. Физ.-мат. н.*, **18**:3 (1965), 3–14.

[2] М. Б. Балк, М. Ф. Зуев, ‘‘О полианалитических функциях’’, *Успехи матем. наук*, **25**:5 (1970), 203–226.

[3] М. Б. Балк, ‘‘Полианалитические функции и их обобщения’’, *Комплексный анализ. Одна переменная — I*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **85**, ВИНИТИ, Москва, 1991, 187–247.

[4] А. Д. Баранов, К. Ю. Федоровский, ‘‘Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах’’, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 3–22.

[5] А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов, ‘‘О равномерной аппроксимации n-аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$’’, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 15–28.

[6] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Гостехиздат, М.–Л., 1952.

[7] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

[8] А. Г. Витушкин, ‘‘Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений’’ *Успехи матем. наук*, **22**:6 (1967), 141–199.

[9] Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, Москва, 1986.

[10] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, Москва, 1973, 336 с.

[11] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, Москва, 1984, 470 с.

[12] Е. П. Долженко, ‘‘Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг’’, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 57–106.

[13] Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, ‘‘О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций’’ *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98.

[14] Д. Д. Кармона, К. Ю. Федоровский, ‘‘О зависимости условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности’’, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 32–38.

[15] М. В. Келдыш, ‘‘О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях’’, *Матем. сб.*, **16(58)**:3 (1945), 249–258.

[16] М. А. Лаврентьев, ‘‘О функциях комплексного переменного, представимых рядами полиномов’’: М. А. Лаврентьев, *Избранные труды, Математика и механика*, Наука, Москва, 1990, 148–185.

[17] М. Я. Мазалов, ‘‘Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе’’, *Матем. заметки*, **62**:4 (1997), 629–632.

[18] М. Я. Мазалов, ‘‘О равномерных приближениях бианалитическими функциями на произвольных компактах в $\mathbb{C}$’’, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 79–102.

[19] М. Я. Мазалов, ‘‘Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений’’, *Матем. сб.*, **199**:1 (2008), 15–46.

[20] М. Я. Мазалов, ‘‘О задаче Дирихле для полианалитических функций’’, *Матем. сб.*, **200**:10 (2009), 59–80.

[21] М. Я. Мазалов, ‘‘Пример неспрямляемого неванлинновского контура’’, *Алгебра и анализ*, **27**:4 (2015), 50–58.

[22] М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, ‘‘Условия C^m-приближаемости функций решениями эллиптических уравнений’’, *Успехи матем. наук*, **67**:6(408) (2012), 53–100.

[23] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, **2**, Наука, Москва, 1968.

[24] С. Н. Мергелян, ‘‘Равномерные приближения функций комплексного переменного’’, *Успехи матем. наук*, **7**:2 (1952), 31–122.

[25] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, Москва, 1971.

[26] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, Москва, 1980, 383 с.

[27] П. В. Парамонов, ‘‘О гармонических аппроксимациях в C^1-норме’’, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1341–1365.

[28] П. В. Парамонов, ‘‘C^m-приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$’’, *Матем. сб.*, **184**:2 (1993), 105–128.

[29] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, ‘‘О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка’’, *Матем. сб.*, **190**:2 (1999), 123–144.

[30] К. М. Расулов, *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения*, Смоленский государственный педагогический университет, Смоленск, 1998, ISBN: 5-88018-105-7.

[31] С. О. Синанян, ‘‘Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади’’, *Матем. сб.*, **69(111)**:4 (1966), 546–578.

[32] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, Москва, 1973.

[33] Ж. Трев, *Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами*, Мир, Москва, 1965.

[34] К. Ю. Федоровский, ‘‘О равномерных приближениях функций n-аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$’’, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610.

[35] К. Ю. Федоровский, ‘‘О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей’’, *Комплексный анализ и приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН, **253**, Наука, Москва, 2006, 204–213.

[36] К. Ю. Федоровский, ‘‘Области Каратеодори и теорема Рудина об обращении принципа максимума модуля’’, *Матем. сб.*, **206**:1 (2015), 175–190.

[37] L. D. Abreu, H. G. Feichtinger, ‘‘Function spaces of polyanalytic functions’’, *Harmonic and Complex Analysis and its Applications*, Trends in Mathematics, Birkhauser/Springer, Cham, 2014, 1–38.

[38] D. Aharonov, H. S. Shapiro, ‘‘Domains in which analytic functions satisfy quadrature identities’’, *J. Anal. Math.*, **30** (1976), 39–73.

[39] P. R Ahern, D. N. Clark, ‘‘On functions orthogonal to invariant subspaces’’, *Acta Math.*, **124** (1970), 191–204.

[40] M. B. Balk, *Polyanalytic functions*, Mathematical Research, **63**, Akademie Verlag, Berlin, 1991.

[41] A. D. Baranov, J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘Dencity of certain polynomial modules’’, *J. Approx. Theory*, **206** (2016), 1–16.

[42] E. Bishop, ‘‘The structure of certain measures’’, *Duke Math. J.*, **25**:2 (1958), 283–289.

[43] E. Bishop, ‘‘Boundary measures of analytic differentials’’, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 331–340.

[44] C. Carathéodory, ‘‘Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten’’, *Math. Ann.*, **72** (1912), 107–144.

[45] C. Carathéodory, ‘‘Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis’’, *Math. Ann.*, **73** (1913), 305–320.

[46] C. Carathéodory, ‘‘Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete’’, *Math. Ann.*, **73** (1913), 323–370.

[47] J. J. Carmona, ‘‘A necessary and sufficient condition for uniform approximation by certain rational modules’’, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **86**:3 (1982), 487–490.

[48] J. J. Carmona, ‘‘Mergelyan approximation theorem for rational modules’’, *J. Approx. Theory*, **44** (1985), 113–126.

[49] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions’’, *Selected topics in complex analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 109–130.

[50] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘New conditions for uniform approximation by polyanalytic polynomials’’, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279** (2012), 215–229.

[51] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘Carathéodory sets in the complex plane’’ (to appear).

[52] J. B. Conway, *The theory of subnormal operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (USA), 1991.

[53] D. Crowdy, J. Marshall, ‘‘Constructing multiply connected quadrature domains’’, *SIAM J. Appl. Math.*, **64**:4 (2004), 1334–1359.

[54] P. Davis, *The Schwarz functions and its applications*, Carus Mathematical Monographs **17**, Math. Assoc. Amer., Buffalo (NY), 1974.

[55] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, ‘‘Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator’’, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **20**:1 (1970), 37–76.

[56] A. A. Dovgoshei, ‘‘The F. and M. Riesz’ theorem and Carathéodory domains’’, *Anal. Math.*, **21**:3 (1995), 165–175.

[57] O. Dovgoshei, ‘‘Certain characterizations of Caratheodory domains’’, *Computational Methods and Function Theory*, **5**:2 (2005), 480–503.

[58] K. Dyakonov, D. Khavinson, ‘‘Smooth functions in star-invariant subspaces’’, *Recent advances in operator-related function theory*, Contemporary Math., **393**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 59–66.

[59] E. M. Dyn’kin, ‘‘Methods of the theory of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory’’, *Commutative harmonic analysis, I*, Encyclopaedia Math. Sci., **15**, Springer, Berlin, 167–259.

[60] O. J. Farrell, ‘‘On approximation to a mapping function by polynomials’’, *Amer. J. Math.*, **54**:3 (1932), 571–578.

[61] K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘On uniform approximation by polyanalytic polynomials on compact subset of the plane’’, *Anal. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A*, **LIII**:3 (1999), 27–39.

[62] K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘C^m-approximation by polyanalytic polynomials on compact subsets of the complex plane’’, *Complex Anal. Oper. Theory*, **5**:3 (2011), 671–681.

[63] K. Yu. Fedorovskiy, ‘‘Uniform and C^m-approximation by polyanalytic polynomials’’, *Complex Analysis and Potential Theory*, CRM Proceedings and Lecture Notes, **55**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, 323–329.

[64] P. M. Gauthier, W. Hengartner, ‘‘Local harmonic majorants of functions subharmonic in the unit disk’’, *J. Anal. Math.*, **26** (1973), 405–412.

[65] H. Lebesgue, ‘‘Sur le probleme de Dirichlet’’, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **29** (1907), 371–402.

[66] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading*, V. 1–2, Math. Surveys Monogr., **92–93**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[67] A. G. O’Farrell, ‘‘Annihilators of rational modules’’, *J. Funct. Anal.*, **19**:4 (1975), 373–389.

[68] A. G. O'Farrell, ''Hausdorff content and rational approximation in fractional Lipschitz norms'', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **228** (1977), 187–206.

[69] A. G. O'Farrell, ''Rational approximation in Lipschitz norms II'', *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **79**:11 (1979), 103–114.

[70] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen, 1973.

[71] Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, Springer–Verlag, Berlin, 1992.

[72] Ch. Pommerenke, ''Conformal maps at the boundary'', *Handbook of Complex analysis: Geometric Function Theory*, **1**, ed. R. Kühnau, Elsiver, Amsterdam, 2002, 37–74.

[73] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[74] C. Runge, ''Zur theorie der eindeutigen analytischen funktionen'', *Acta Math.*, **6** (1885), 228–244.

[75] M. Sakai, ''Regularity of boundary having a Schwarz function'', *Acta Math.*, **166**:3-4 (1991), 263–297.

[76] A. Seidenberg, *Elements of the theory of algebraic curves*, Addison Wesley, 1968.

[77] H. S. Shapiro, ''Generalized analytic continuation'' (Madras, 1967), Symposia on Theoretical Physics and Mathematics, **8**, Plenum, New York, 1968, 151–163.

[78] H. S. Shapiro, *The Schwarz function and its generalization to higher dimensions*, The University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, **9**, Wiley-Interscience Publications, 1992.

[79] A. Shields, ''Carathéodory and conformal mapping'', *The Mathematical Intelligencer*, **10**:1 (1988), 18–22.

[80] E. L. Stout, *The theory of uniform algebras*, Bogden&Quigley, Inc., Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.

[81] N. N. Tarkhanov, *The analysis of solutions of elliptic equations*, Mathematics and its Applications, **406**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[82] N. Teodorescu, *La derivée aréolaire et ses applications á la physique mathématique*, Paris, 1931.

[83] X. Tolsa, ‘‘The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture’’, *Amer. J. Math.*, **126**:3 (2004), 523–567.

[84] T. Trent, J. L.-M. Wang, ‘‘Uniform approximation by rational modules on nowhere dense sets’’, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1981), 62–64.

[85] T. Trent, J. L.-M. Wang, ‘‘The uniform closure of rational modules’’, *Bull. London Math. Soc.*, **13** (1981), 415–420.

[86] J. Verdera, ‘‘On C^m-rational approximation’’, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97**:4 (1986), 621–625.

[87] J. Verdera, ‘‘C^m-approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators’’, *Duke Math. J.*, **55**:1 (1987), 157–187.

[88] J. Verdera, ‘‘On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator’’, *Pacific J. Math.*, **159** (1993), 379–396.

[89] J. Verdera, ‘‘L^2 boundedness of the Cauchy integral and Menger curvature’’, *Harmonic analysis and boundary value problems*, Contemporary Math., **277**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 139–158.

[90] J. L. Walsh, ‘‘The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational functions’’, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **35** (1929), 499–544.

[91] J. L.-M. Wang, ‘‘A localization operator for rational modules’’, *Rocky Mountain J. Math.*, **19**:4 (1989), 999–1002.

[92] J. L.-M. Wang,‘‘AMergelyan–Vitushkinapproximationtheoremforrational modules’’, *J. Approx. Theory*, **63**:3 (1990), 368–374.

[93] H. Whitney, ‘‘Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets’’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 63–89.

[94] *Quadrature domains and their application*, The Harold S. Shapiro Anniversary Volume, Oper. Theory Adv. Appl., **156**, eds. P. Ebenfelt, B. Gustafsson, D. Khavinson, M. Putinar, Birkhäuser, Basel, 2005.

Подписано в печать 12.05.2016. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 11.3. Тираж 100 экз. Заказ М-9.
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4

Автор — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана и профессор Санкт-Петербургского государственного университета. Лауреат конкурса Фонда Дмитрия Зимина «Династия» 2014 г.