



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



**Т.А.Гермогенова**

**Избранные труды.  
Том 1**

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Гермогенова Т.А. Избранные труды. Том 1. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2017. 228 с.  
URL: <http://keldysh.ru/e-biblio/germogenova>

Т. А. Гермогенова

# Избранные труды



**Т. А. Гермогенова**

# **Избранные труды**

**Том 1**

**ИПМ им. М.В. Келдыша  
Москва — 2017**

УДК 517.958  
ББК 22.161  
Г388

Г388 Гермогенова Т.А. **Избранные труды** / сост. Л.П. Басс, А.М. Волощенко, О.В. Николаева. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. — 228 с.

В трехтомный сборник избранных трудов Т.А. Гермогеновой вошли работы 1957-2002 годов. Тематика статей первого тома — асимптотические разложения, спектры. Кроме того, приведен список конференций, в которых участвовала или которые проводила Т.А. Гермогенова, а также названия научных групп, которые она создавала для решения актуальных народно-хозяйственных задач. Представлены также сохранившийся отчет об одной из научных командировок — в Техас, США, и список научных трудов Т.А. Гермогеновой.

Идея и материалы для обложки — Ю.Н. Днестровский

## Оглавление

От составителей.....	4
Татьяна Анатольевна Гермогенова.....	5
Об ограниченных решениях заданного на полубесконечном интервале неоднородного интегрального уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов .....	8
О регулярных решениях характеристического уравнения теории переноса.....	14
Асимптотические характеристики решения уравнения переноса в задаче о неоднородном слое.....	41
Характеристическое уравнение в задачах о переносе излучения в протяженных цилиндрических областях .....	66
Слабо-сингулярные интегральные уравнения на интервале большой длины...	92
Асимптотические разложения решений уравнения переноса в оптически плотных средах.....	121
Регулярные компоненты асимптотических приближений к решениям уравнения переноса в оптически плотных средах.....	151
Asymptotic approximations to transport equation solution in optically thick domain.....	187
Приложение I. Основные даты .....	209
Приложение II. Отчет о командировке в США.....	212
Приложение III. Список научных трудов .....	214

## От составителей

В трехтомный сборник трудов Т.А. Гермогеновой вошли работы 1957-2002 годов: статьи, препринты. Работы сгруппированы по следующим темам.

Том 1 — Асимптотические разложения. Спектры.

Том 2 — Численные схемы. Грубосеточные приближения.

Том 3 — Прикладные задачи.

Том 1 содержит также три приложения. В Приложении 1 приведен список конференций, в которых участвовала или которые проводила Т.А. Гермогенова, а также названия научных групп, которые она создавала для решения актуальных народно-хозяйственных задач. В Приложении 2 представлен сохранившийся отчет о одной из научных командировок — в Техас, США. Приложение 3 содержит список научных трудов.

Созданная Т.А. Гермогеновой научная школа (сотрудники, ученики, последователи) успешно продолжает работу по решению задач теории переноса в самых разных приложениях.

10.11.2016

Л.П.Басс, А.М. Волощенко, О.В. Николаева

## Татьяна Анатольевна Гермогенова

Научная деятельность Татьяны Анатольевны Гермогеновой (10.04.1930-27.02.2005) связана с математическими и вычислительными проблемами теории переноса излучения.

Этими задачами она начала заниматься в 1953 году в аспирантуре физфака МГУ под руководством проф. Е.С. Кузнецова.

С 1956 года Т.А. Гермогенова работала в ИПМ им. М.В. Келдыша.

В кандидатской диссертации, которую Татьяна Анатольевна успешно защитила в 1957 году, рассматривались методы решения уравнения переноса при сильно неизотропном рассеянии. Это был переход от теории с изотропным рассеянием, развитой в работах В.В. Соболева, к более адекватным математическим моделям. В дальнейшем творческая активность Т.А. Гермогеновой была связана с несколькими направлениями исследований.

В 1962 году она доказала, что при достаточно широких предположениях для уравнения переноса справедлив принцип максимума. Этот результат имеет принципиальное значение и очень полезен при исследовании свойств сеточных алгоритмов.

В ее монографии 1986 г. «Локальные свойства решений уравнения переноса» изложены новые результаты по теории разрешимости краевых задач теории переноса и основные результаты ее исследований качественных свойств решений этих задач.

Большой цикл работ Т.А. Гермогеновой посвящен задачам атмосферной оптики.

Т.А. Гермогеновой впервые было доказано, что множество физически реализуемых состояний поляризованного излучения в представлении Стокса-Пуанкаре составляет конус в соответствующем функциональном пространстве четырехмерных вектор-функций (1978 г.), что позволило формализовать понятие неотрицательности матрицы рассеяния, введенное И.Кучером и М.Рибаричем (1959 г.), и построить строгую математическую теорию характеристического уравнения для уравнения переноса поляризованного излучения. На этом пути наиболее общие и физически адекватные результаты удалось получить, основываясь на идеях, предложенных М.В. Масленниковым при изучении соответствующего характеристического уравнения скалярной задачи (1968 г.).

Большим достижением является также теория асимптотических приближений к решению уравнения переноса в оптически плотных плоских слоях (однородных и неоднородных). Эта теория и в настоящее время является



основой многих алгоритмов решения задач дистанционного зондирования атмосферы и некоторых задач теории защиты от проникающей радиации.

Т.А. Гермогенова защитила докторскую диссертацию в 1972 году на тему: «Краевые задачи для уравнения переноса».

Все эти теоретические и методические разработки были использованы Татьяной Анатольевной для развития сеточных методов и алгоритмов решения уравнения переноса в задачах радиационной защиты и атмосферной оптики.

Под ее руководством и при ее активном участии были созданы широко известные циклы программ РОЗ, РАДУГА, КАСКАД-С.

Первые варианты одномерной программы РОЗ были установлены на машине «Стрела» в конце 50-х годов прошлого века. Затем программа была переведена на ЭВМ М-20, БЭСМ-6, персональные компьютеры, передана во многие организации и до сих пор широко используется. В создание первых вариантов этой программы большой вклад внесли сотрудники ФЭИ А.П. Суворов и А.А. Дубинин.

Программа РАДУГА была реализована в 70-х годах прошлого века на БЭСМ-6. В настоящее время она успешно работает и на персональных компьютерах, и на отечественной суперЭВМ с параллельной архитектурой МВС-15000.

В 70-х годах по этим программам было решено несколько важных задач, связанных, в частности, с расчетом полей радиации от ядерного взрыва. Для консолидации и координации работ по программному обеспечению расчетов радиационной защиты во время кризиса 90-х годов был составлен координационный план работ, в который входили ведущие организации по этой тематике (ФЭИ, КИ, НИКИЭТ, Гидропресс, ЦФТИ МО и др.). Руководителем этого проекта была Т.А. Гермогенова, авторитет и мудрость которой помогали находить разумные компромиссы при обсуждении и выполнении плана работ.

В 1998 г. под ее руководством были начаты работы по созданию новой версии программы Радуга на отечественном суперкомпьютере МВС-1000М с параллельной архитектурой.

Под руководством Т.А. Гермогеновой успешно защитили кандидатские диссертации 12 аспирантов ИПМ и МИФИ.

В секторе Т.А. Гермогеновой всегда были спокойные, доброжелательные и творческие отношения сотрудников. В настоящее время в этом секторе (№ 2) продолжают работы и по другим направлениям, которые определила Татьяна Анатольевна: разработка и исследование сеточных схем и алгоритмов для задач теневой радиационной защиты биологических объектов, лучевой диагностике и терапии, биомедицины.

Намеченные ею направления исследований продолжают развиваться ее учениками: сотрудниками ИПМ им. М.В. Келдыша, ФЭИ, МИФИ, ИБРАЭ, ... . Круг людей, участвующих в этих работах, постоянно расширяется.

Т.А. Гермогенова — широко известный ученый с мировым именем — имела большой круг общения со своими коллегами за рубежом. Она была



участницей многих международных конференций, инициатором и организатором Международного Симпозиума в России в 1992 году, входила в редколлегию международного журнала «Transport Theory and Statistical Physics».

Т.А. Гермогенова была разносторонне одаренным человеком. В годы учебы в МГУ она была чемпионкой МГУ по плаванию, совершила много сложных горных походов и походов на плотах и байдарках по рекам Сибири и севера Европейской части страны. Много каталась на горных и равнинных лыжах, любила классическую музыку и с увлечением занималась садоводством на даче.

У Т.А. Гермогеновой была замечательная, любящая семья. Ее муж — Ю.Н. Днестровский — профессор МГУ, физик-теоретик, один из руководителей работ по управляемому термоядерному синтезу на установках Токамак в Курчатовском институте, сын — физик, также работает в Курчатовском институте на этих установках, дочь — гидробиолог. У Т.А. Гермогеновой четыре внука, два старших внука учатся в МГУ.

02.11.05

**Об ограниченных решениях заданного на полубесконечном интервале  
неоднородного интегрального уравнения с ядром,  
зависящим от разности аргументов**

Доклады Академии наук СССР  
1957. Том 115, №1

МАТЕМАТИКА

*(Представлено академиком М.В.Келдышем 07 01 1957)*

Решение уравнения

$$f(x) = \int_0^{\infty} k(x-y)f(y)dy + g(x) \quad (1)$$

в том случае, когда  $g(x)$  и  $k(x)e^{\lambda|x|}$  абсолютно интегрируемы при всех  $\lambda < 1$  и имеют ограниченную вариацию, исследовалось В.А.Фоком <sup>(1)</sup>. Им рассматривались только решения, стремящиеся к нулю на бесконечности. При наличии нулевых или чисто мнимых корней характеристического уравнения задачи

$$1 - \chi(u) = 0, \quad (2)$$

где  $\chi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{-ux}dx$ , для существования таких решений оказывается

необходимым выполнение условий ортогональности

$$\int_0^{\infty} g(x)f_r(x)dx = 0; \quad (3)$$

$f_r(x)$  - решения однородного уравнения, возрастающие при  $x \rightarrow \infty$  медленнее, чем по показательному закону. Для некоторых уравнений, свободные члены которых не удовлетворяют соотношениям (3), но ядра  $k(x)$  подчинены специальным условиям, Хопфом <sup>(2)</sup> найдены решения ограниченные, а не стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

В настоящей заметке рассматривается вопрос о существовании решения в общем случае, когда функции  $g(x)$  и  $k(x)e^{\lambda|x|}$  удовлетворяют только условию интегрируемости с квадратом на бесконечном интервале (ядро  $k(x)$  предполагается симметричным). Такое расширение класса исследуемых уравнений позволяет при построении решения методом Винера-Хопфа <sup>(3)</sup> (или эквивалентным ему методом Фока) воспользоваться более удобными оценками и упростить рассуждения. Полученное выражение решения в виде

комплексного интеграла дает возможность исследовать поведение решения на бесконечности.

**Теорема** \*. Ограниченное на бесконечности решение уравнения (1) существует и методом Винера-Хопфа может быть построено, если ядро  $k(x)$  и свободный член  $g(x)$  уравнения удовлетворяют условиям:

1)  $g(x)e^{-\varepsilon x}$  и  $k(x)e^{\lambda|x|}$  при всех  $\lambda < 1$  и хотя бы одном  $\varepsilon < 0$  интегрируемы с квадратом на интервале  $(0, \infty)$ ;

2)  $k(x) = k(-x)$ ;

3) кратность корней характеристического уравнения (2), лежащих на мнимой оси, не превышает двух.

При доказательстве удобнее сначала построить решение, предполагая существование самого решения  $f(x)$  и его преобразования Лапласа

$$\Phi(u) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-ux} dx, \text{ и затем показать, что построенное решение}$$

удовлетворяет уравнению (1).

Полагая  $f(x) = 0$  и  $g(x) = -\int_0^{\infty} k(x-y)f(y)dy$  при  $x < 0$  и вводя

$$\text{функции } \gamma_1(u) = \int_0^{\infty} g(x)e^{-ux} dx, \quad \gamma_2(u) = \int_{-\infty}^0 g(x)e^{-ux} dx,$$

получим для  $\Phi(u)$  уравнение

$$\Phi(u)[1 - \chi(u)] = \gamma_1(u) + \gamma_2(u). \quad (4)$$

Функция  $1 - \chi(u)$  регулярна в полосе  $|\operatorname{Re} u| < 1$ , во всякой внутренней полосе  $|\operatorname{Re} u| \leq \beta < 1$  имеет конечное число  $2n$  нулей  $u_\nu$  и может быть представлена выражением

$$1 - \chi(u) = \frac{\sigma_+(u)}{\sigma_-(u)} \prod_{\nu=1}^n (u^2 - u_\nu^2),$$

где

---

\* Существование решений, удовлетворяющих условию  $f(x)e^{-yx} \in L_2(0, \infty)$  ( $y > \alpha > 0$ ) было показано И.М. Рапопортом (4), сформулировавшим и исследовавшим соответствующую краевую задачу Римана. Мы приводим доказательство теоремы методом Винера-Хопфа, поскольку получаемое при доказательстве выражение для решения используется в дальнейшем для исследования асимптотических свойств решения.

$$\begin{aligned}\sigma_+(u) &= \tau_+(u)(u+1)^{-n}, \quad \sigma_-(u) = \tau_-(u)(u-1)^n, \\ \ln \tau_-(u) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\ln \tau(v)}{v-u} dv, \quad \ln \tau_+(u) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \frac{\ln \tau(v)}{v-u} dv, \\ \tau(u) &= [1 - \chi(u)] \frac{(u^2 - 1)^n}{\prod_1^n (u^2 - u_v^2)} = \frac{\tau_+(u)}{\tau_-(u)}.\end{aligned}$$

Функция  $\sigma_+(u)$  регулярна и не имеет нулей в полуплоскости  $\operatorname{Re} u \geq -\beta$ ,  $\sigma_-(u)$  - в полуплоскости  $\operatorname{Re} u \leq \beta$ , величины  $|\sigma_+(u)u^n|$  и  $|\sigma_-(u)u^{-n}|$  ограничены при больших  $|u|$  в соответствующих полуплоскостях<sup>(3)</sup>. Функция  $\gamma_1(u)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} u > \varepsilon$ ,  $\gamma_2(u)$ , как легко показать, - в полуплоскости  $\operatorname{Re} u < 1$ .

Как функции  $t, t = \operatorname{Im} u$ ,  $\gamma_1(u)$  и  $\gamma_2(u)$  в соответствующих областях интегрируемы с квадратом на бесконечном интервале (теорема Планшереля). Поэтому, используя интегральную формулу Коши, величину  $\gamma_1(u)\tau_-(u)$  можно представить суммой  $G_1(u) + G_2(u)$ , где функции

$$G_1(u) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \gamma_1(v)\tau_-(v) \frac{dv}{v-u}, \quad G_2(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \gamma_1(v)\tau_-(v) \frac{dv}{v-u}$$

соответственно в полуплоскостях  $\operatorname{Re} u > \varepsilon$  и  $\operatorname{Re} u < \beta$  регулярны и интегрируемы с квадратом по  $t$  ( $1 > \beta > \varepsilon > 0$ ).

Функция  $\Phi(u)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} u > 0$  должна быть регулярна и интегрируема с квадратом по  $t$ . Если переписать (4) в форме

$$\begin{aligned}\sigma_+(u)\Phi(u)\prod_1^n (u^2 - u_v^2) - G_1(u)(u-1)^n &= \\ &= G_2(u)(u-1)^n + \gamma_2(u)\sigma_-(u),\end{aligned}\tag{5}$$

легко видеть, что левая и правая части регулярны соответственно в полуплоскостях  $\operatorname{Re} u > 0$  и  $\operatorname{Re} u < \beta$ , имеющих общую полосу  $\varepsilon < \operatorname{Re} u < \beta$ . При  $|u| \rightarrow \infty$  в соответствующих полуплоскостях обе части возрастают не быстрее, чем  $|u|^n$ , и, следовательно, соотношение (5) определяет некоторый

полином степени  $n-1$ . Предположение о более высокой степени его ( $n$ ) противоречит квадратичной интегрируемости по  $t$  функций  $G_1(u)$  и  $\Phi(u)$ .

Для  $\Phi(u)$  из (5) получаем выражение

$$\Phi(u) = \frac{P_{n-1}(u) + G_1(u)(u-1)^n}{\prod_1^n (u^2 - u_\nu^2) \sigma_+(u)}, \quad (6)$$

и решение находится по формуле

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Phi(u) e^{ux} du \quad (7)$$

Коэффициенты многочлена  $P_{n-1}(u)$  определяются из условия отсутствия полюсов любого порядка у функции  $\Phi(u)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} u > 0$  и полюсов порядка выше первого на мнимой оси. Интеграл, стоящий в правой части равенства (7), существует, так как функция  $G_1(u)$ , как функция  $t$ , интегрируема с квадратом в полосе  $0 < \operatorname{Re} u < \beta < 1$ .

Так же, как при исследовании однородного уравнения (3), можно показать, что интеграл (7) действительно удовлетворяет уравнению (1).

Требование ограниченности решения приводит к  $n$  условиям: функция  $\Phi(u)$  не должна иметь полюсов в правой полуплоскости и не должна иметь полюсов второго порядка на мнимой оси. Полином  $P_{n-1}(u)$ , а следовательно и решение определяются этими условиями однозначно.

В общем случае наличие  $m$  - кратного корня на мнимой оси связано с существованием  $m$  линейно независимых решений, при  $x \rightarrow \infty$  возрастающих не быстрее, чем  $x^{m-1}$ . Решение, стремящееся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , существует при выполнении  $m$  дополнительных условий ортогональности, как это показано Фоком (1).

Уравнение (1) не имеет других решений, кроме полученных таким образом, Это можно доказать, несколько изменив доказательство Фока, данное для решений, стремящихся к нулю на бесконечности.

#### **Асимптотическое поведение решения неоднородного уравнения.**

Предположим, что функция  $g(x)$  ведет себя как  $e^{-u^* x}$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $u^* > \max \operatorname{Re} u_\nu$ . Тогда в интеграле (7) для выделения главной части решения контур интегрирования можно перенести влево на  $\beta + \sigma$

$$f(x) = \sum_{v=1}^n Q_v(x) e^{-u_v x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Phi(u) e^{ux} du, \quad \max \operatorname{Re} u_v < \sigma < u^* \quad (8)$$

где  $Q_v(x)$  - полином от  $x$ , степень которого ниже кратности корня  $u_v$ , а интеграл в правой части есть величина порядка  $e^{-\sigma x}$ .

В тех случаях, когда поведение  $g(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  оказывается более сложным, необходимо исследовать характер особенностей функции  $\gamma_1(u)$  в полосе  $-\sigma < \operatorname{Re} u < \beta$ .

**Случай Хопфа.** Если  $k(x)$  представлено интегралом  $\int_0^{\infty} e^{-sx} d\rho(s)$ , где

$\rho(s)$  - возрастающая функция  $s$ , то характеристическое уравнение (2) имеет только два корня (<sup>2</sup>). Уточним формулу (8) в этом случае. Пусть (уравнение 2) имеет два действительных корня  $u_1$  и  $u_{-1} = -u_1$ . Тогда  $P_{n-1}(u)$  в формуле (6) есть постоянная, равная величине  $-G_1(u_1)(u_1 - 1)$ . Вводя новую переменную интегрирования  $u = -v$  в интеграл для  $G_1(u_1)$ , выражение  $-G_1(u_1)(u_1 - 1) - G_1(-u_1)(u_1 + 1)$  запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta^*-i\infty}^{\beta^*+i\infty} \gamma_1(-u) \tau_-(u) \frac{1+u}{u^2 - u_1^2} 2u_1 du \quad (0 < \beta^* < u^*). \quad (9)$$

Как показано в (<sup>2</sup>), преобразование Лапласа решения однородного уравнения есть  $\Phi_0(u) = \frac{c_0}{u^2 - u_1^2} \frac{1+u}{\tau_+(u)}$ , и так как  $\tau_-(-u) = \frac{1}{\tau_+(u)}$ ,

интеграл (9) равен

$$\frac{u_1}{\pi i} \int_{\beta^*-i\infty}^{\beta^*+i\infty} \frac{\Phi_0(u)}{c_0} \gamma_1(-u) du.$$

Но  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta^*-i\infty}^{\beta^*+i\infty} \Phi_0(u) \gamma_1(-u) du = \int_0^{\infty} \varphi_0(x) g(x) dx \cdot c_0$ , где  $\varphi_0(x)$  -

решение однородного уравнения, преобразование Лапласа которого убывает как  $1/\operatorname{Re} u$  и при  $\operatorname{Re} u \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_+(-u_1)} \int_0^{\infty} \varphi_0(x) g(x) dx \cdot e^{-u_1 x} + O(e^{-\sigma x}), \quad u_1 < \sigma < u^*.$$

Когда характеристическое уравнение (2) имеет двойной корень в точке  $u = 0$ , то из условия отсутствия полюса второго порядка в точке  $u = 0$  у функции  $\Phi(u)$  будем иметь:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_+(0)} \int_0^{\infty} g(x) \varphi_0(x) dx + O(e^{-\sigma x}).$$

И, наконец, в том случае, когда характеристическое уравнение имеет два мнимых корня  $iv$  и  $-iv$ , существуют два линейно независимых решения неоднородного уравнения, асимптотика которых дается выражениями

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_+(-iv)} \left[ \int_0^{\infty} g(x) \varphi_0(x) dx \right] \cdot e^{-ivx} + O(e^{-\sigma x}),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma_+(iv)} \left[ \int_0^{\infty} g(x) \varphi_0(x) dx \right] \cdot e^{ivx} + O(e^{-\sigma x}).$$

Если выполняется условие ортогональности Фока  $\int_0^{\infty} g(x) \varphi_0(x) dx = 0$ , то

во всех трех случаях получаем единственное решение, при  $x \rightarrow \infty$  убывающее как  $e^{-\sigma x}$ ,  $\sigma \sim u^*$ .

Работа проводилась под руководством проф. Е.С.Кузнецова, которому автор обязан постоянным вниманием и ценными советами.

Поступило 27 XII 1956

#### Цитированная литература

1. В.А.Фок. Матем. сборн., 14, №1 (1944).
2. E.Hopf, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, 1934.
3. N.Wiener, E.Hopf. Sitzungsber. Berlin. Acad. Wiss., 636 (1931).
4. И.М.Рапопорт, Сб. тр. Инст. математики АН УССР, №12 (1949).



## О регулярных решениях характеристического уравнения теории переноса

Препринт № 21 ИПМ АН СССР за 1972 г.

### АННОТАЦИЯ

Для исследования дискретного спектра характеристического уравнения, представляющего собой однородное интегральное уравнение на сфере, содержащее параметр, привлекается теория симметризуемых вполне непрерывных операторов и теория аналитических возмущений таких операторов. В области значений параметра наиболее существенной с точки зрения асимптотических задач стационарной теории переноса установлены некоторые общие свойства характеристических чисел и собственных функций (бесконечная дифференцируемость, монотонность, характер предельных значений на границах области). Благодаря этому удастся высказать ряд утверждений о числе и расположении корней характеристического уравнения – тех значений параметра, для которых существуют нетривиальные решения при заданных коэффициентах рассеяния и поглощения в среде.

Характеристическим уравнением в теории переноса называют определенное на единичной сфере  $\Omega$  интегральное уравнение

$$(1 + k\vec{\omega}\vec{n})f(\vec{\omega}) = \lambda \hat{g}f(\vec{\omega}), \quad \vec{\omega} \in \Omega, \quad (1)$$

с фиксированным вектором  $\vec{n}$  из  $\Omega$ . Оператор  $\hat{g}$  определяется индикатрисой рассеяния

$$\hat{g}f(\vec{\omega}) = \int_{\Omega} \hat{g}(\vec{\omega}\vec{\omega}')f(\vec{\omega}')d\vec{\omega}', \quad (2)$$

$\lambda$  и  $k$  - параметры.

Задача об отыскании при заданном положительном  $\lambda$  значений  $k$ , при которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение, и самого решения, возникла первоначально при исследовании асимптотики пространственного и углового распределения излучения в глубине облучаемой среды [1-4].

Далее уравнение (1) изучалось в связи с развитием предложенного Кейсом [5] метода решения краевых задач уравнения переноса разложением по собственным функциям [6-8].

Известно, (см., например, [9]), что это уравнение при заданном  $\lambda$  имеет сингулярные решения при любом действительном  $k$ , по модулю большем или равном 1, т.е. при  $k \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ , и конечное или счетное множество регулярных решений, которым соответствует дискретное множество значений  $k$ .

В настоящей работе обсуждаются лишь свойства этих последних решений. Именно они определяют асимптотическую часть решения в задачах о прохождении излучения через большие объемы.

В наиболее общих предложениях об индикатрисе рассеяния  $g(\mu_0)$  - неотрицательности и суммируемости с квадратом на  $(-1,+1)$  – свойства дискретных корней  $k(\lambda)$  и соответствующих решений  $f_k(\vec{\omega})$  изучались М.В.Масленниковым [3]. Опираясь на теорию вполне непрерывных в  $L_2(-1,+1)$  операторов с положительным ядром и теорию аналитических возмущений таких операторов, М.В.Масленников показал, что при  $\lambda \leq 1$  число корней  $k(\lambda)$  не более, чем счетно, они располагаются на интервале  $(-1, +1)$  парами симметрично относительно точки 0, и исходная двумерная задача на сфере (1-2) эквивалентна системе одномерных задач:

$$(1 + k\mu)f_m(\mu) = \lambda \hat{g}_m f_m(\mu), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\hat{g}_m f(\mu) = \int_{-1}^{+1} g_m(\mu, \mu') f(\mu') d\mu', \quad \mu = \vec{\omega}\vec{n}, \quad (4)$$

$$g_m(\mu, \mu') = \int_0^{2\pi} g(\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}) \cos(\varphi - \varphi') \cos m\varphi' d\varphi', \quad (5)$$

$$f(\vec{\omega}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{n_0(m)} (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) f_{mn}(\mu),$$

где  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  - произвольные числа,  $n_0(m)$  - кратность  $\lambda$  в (3).

В [3] подробно исследованы также свойства наименьшего по модулю корня  $k_1$  и соответствующей «главной» собственной функции  $f_k^{(1)}(\vec{\omega})$ , определяющей асимптотический режим. М.Г.Кузьминой и М.В.Масленниковым [10] найдено, что при малых (в  $L_2(-1,+1)$ ) изменениях  $g(\mu_0)$  сдвиги  $k_1$  и соответствующей собственной функции  $f_k^{(1)}$  малы по абсолютной величине.

В ряде работ рассматривался вопрос о числе корней  $k(\lambda)$  в более жестких предположениях об индикатрисе. Так, Сэттинджером [8] установлено, что, если  $g_m(\mu, \mu')$  (3-5) аналитична по каждой из переменных  $\mu$  и  $\mu'$  в области, содержащей  $(-1, +1)$ , то для любого  $\lambda$  эта задача допускает лишь конечное число пар корней  $\pm k(\lambda)$ . Если индикатриса  $g(\mu_0)$  может быть представлена суммой конечного числа полиномов Лежандра.

$$g(\mu_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_0^N \frac{2n+1}{2} g_n P_n(\mu_0), \quad (6)$$

то при  $m=0$   $M \leq N+1$  [4,7]. В работе [10] показано, что для двучленной индикатрисы

$$g(\mu_0) = g_N(\mu_0) = \frac{1}{2} + g_N \frac{2N+1}{2} P_N(\mu_0) \quad (7)$$

при достаточно малых  $\lambda$ ,

$$\lambda < \frac{1 + \frac{1}{g_N(2N+1)}}{\frac{26}{3 \cdot 35} \frac{(2N-1)!!}{N!} + 1}, \quad (8)$$

характеристическое уравнение (3) при  $m=0$  имеет лишь 1 пару корней  $\pm k_1$ . Наконец, в [6] высказано без доказательства предположение о том, что и для произвольных индикатрис при достаточно малых  $g_n$  ( $n > 0$ ) есть лишь одна пара корней  $\pm k_1$ , а по мере роста  $\lambda g_n$  от непрерывного спектра, занимающего полупрямые  $(-\infty, -1]$ ,  $[+1, \infty)$ , отделяются пара за парой действительные корни, которые затем, достигнув 0, переходят в чисто мнимые.

Одна из трудностей исследований в этом направлении обусловлена использовавшимся подходом к анализу характеристического уравнения, при котором основным объектом исследования является сложное трансцендентное уравнение, определяющее корни  $k$  как функции заданного параметра  $\lambda$ . Это уравнение получают, например, приравниванием 0 определителя системы линейных уравнений для коэффициентов разложения по полиномам Лежандра функции  $\hat{g}f$ .

Более естественным с математической точки зрения является, по-видимому, обращение к исследованию свойств характеристических чисел  $\lambda$ , как функций параметра  $k$ . При этом оказывается возможным опираться на хорошо известный аппарат анализа симметризуемых вполне непрерывных операторов и использовать в частности, минимально-максимальные принципы. Заметим, что именно на этом пути, изучая свойства первого характеристического числа  $\lambda$ , М. В. Масленников получил основные результаты для наименьшего корня  $k_1$ .

В настоящей работе на основе теории симметризуемых вполне непрерывных операторов, основные положения которой применительно к данной задаче излагаются в §1, установлены некоторые общие свойства характеристических чисел  $\lambda$  как функций  $k$  - дифференцируемость, монотонность и т.п. и получен ряд оценок (§2). На этом основании можно сделать некоторые заключения о расположении корней  $k(\lambda)$ .

В ряде задач, например, при исследовании нестационарных процессов возникает вопрос о разрешимости характеристического уравнения не только при  $\lambda \in (0, 1]$ , но и при других значениях  $\lambda$ . Используемый в настоящей работе аппарат позволяет получить представление о расположении кривых  $\lambda(k)$  при  $k \in [\pm 1, \pm \infty)$  в задачах с четными индикатрисами

$$g(\mu) = g(-\mu)$$

и с индикатрисами, удовлетворяющими условию [11]:

$$\int_{\Omega} d\bar{\omega} \int_{\Omega} d\bar{\omega}' g(-\bar{\omega}\bar{\omega}') f(\bar{\omega}) f(\bar{\omega}') d\bar{\omega}' \geq 0, \quad \forall f \in L_2(\Omega).$$

В заключение излагаются некоторые результаты для индикатрис, представимых суммами полиномов Лежандра типа (6) и (7).

### §1.

Для удобства ссылок сформулируем в виде теоремы некоторые известные положения о свойствах оператора  $\hat{g}$  и корнях характеристического уравнения (см., например, [3]. Пусть  $Z_0$  комплексная плоскость с разрезами вдоль действительной оси от  $-1$  до  $-\infty$  и от  $1$  до  $\infty$ , а  $\mathcal{N}$  - множество всех тех значений  $k \in Z_0$ , при которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение. Через  $\mu$  обозначим величину  $\vec{\omega}\vec{n}$ , через  $\varphi$  - азимутальный угол и через  $Y_n^m$  - сферические функции:

$$Y_n^m(\mu, \varphi) = \left[ \frac{2n+1}{2 \cdot 2\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\mu) \times \begin{cases} \cos m\varphi, & m = 0, 1, \dots, n \\ -\sin m\varphi, & m = -1, -2, \dots, -n \end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть  $g \in L_2(-1, +1)$ . Тогда

$$1) \quad g(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} g_n P_n(\mu), \text{ где } g_n = 2\pi \int_{-1}^{+1} g P_n d\mu,$$

и ряд сходится, по крайней мере, в среднем;

2) равномерно относительно  $\vec{\omega} \in \Omega$  сходится ряд, представляющий  $\hat{g}f(\vec{\omega})$

$$\hat{g}f(\vec{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sum_{m=-n}^n (f, Y_n^m) Y_n^m(\vec{\omega});$$

3) оператор  $\hat{g}$  вполне непрерывен в  $L_2$ , из  $L_2$  в  $C$  и в  $C$ , причем

$$\|g\|_{L_2} \leq 2\pi\sqrt{2}[g], \quad \|\hat{g}\|_{L_2 \rightarrow C} \leq \sqrt{2\pi}[g], \quad \|g\|_C \leq 2\pi\sqrt{2}[g],$$

$$\text{где } [g]^2 = \int_{-1}^{+1} [g(\mu)]^2 d\mu = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} g_n^2;$$

4) система собственных функций оператора  $\hat{g}$  исчерпывается функциями  $Y_n^m$   $n = 0, 1, \dots$   $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ :

$$\hat{g}Y_n^m = g_n Y_n^m;$$

5) При  $\lambda g_0 \leq 1$   $\mathcal{N} \subset (-1, +1)$ , множество  $\mathcal{N}$  симметрично относительно точки  $k = 0$ ; оно не более, чем счетно и может иметь своими предельными точками лишь точки  $\pm 1$ .

Таким образом, в задачах об асимптотическом режиме в немультимплицирующих средах, где  $\lambda g_0 \leq 1$  областью значений  $k$  может быть лишь интервал  $(-1, +1)$ . С рассмотрения этой области мы и начнем.

Итак, пусть  $k \in (-1, +1)$  и  $\hat{K}(k)$  оператор умножения

$$\hat{K}(k) f(\mu) = (1 + k\mu) f(\mu)$$

Этот оператор в  $L_2(\Omega)$  симметричен, положителен, ограничен и имеет ограниченный обратный. Оператор

$$\hat{U} = \hat{K}^{-1} \hat{g} \quad (1.1)$$

при  $k \in (-1, +1)$  также вполне непрерывный, симметризуется оператором  $\hat{K}$ , причем, очевидно,  $\hat{K}\hat{U} \neq 0$ ,  $(\hat{K}f, f) > 0$  для  $f \neq 0$

Поэтому для уравнения

$$f = \lambda \hat{U} f, \quad (1.2)$$

эквивалентного (1) при  $k \in (-1, +1)$ , имеет место теория Гильберта-Шмидта [12]. Приведем положения этой теории, существенные для настоящей работы.

**Теорема 2.** Если  $g(\mu) \in L_2(-1, +1)$  и  $k \in (-1, +1)$ , то:

1) существует, по крайней мере, 1 характеристическое число, оператора  $\hat{U}$ , множество характеристических чисел  $\lambda_n(k)$  счетно, все они вещественны; собственные функции  $f_k^{(n)}(\vec{\omega})$  могут быть выбраны ортонормированными относительно  $\hat{K}$ , присоединенных элементов нет;

2) Пусть  $0 < \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots$  и  $0 > \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \geq \dots$  положительные и отрицательные характеристические числа (каждое число считается столько раз, какова его кратность),

$$J[f] = \frac{(\hat{g}f, f)}{(1 + k\mu, f^2)} \quad (1.3)$$

тогда справедлив минимально-максимальный принцип Куранта:

$$\frac{1}{\lambda_n^+} = \inf_{\substack{\psi_i \in L_2 \\ i=1,2,\dots,n-1}} \sup_{(f, \hat{K}\psi_i)=0} J[f], \quad \frac{1}{\lambda_n^-} = \sup_{\substack{\psi_i \in L_2 \\ i=1,2,\dots,n-1}} \inf_{(f, \hat{K}\psi_i)=0} J[f], \quad (1.4)$$

где  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  произвольная система функций из  $L_2(\Omega)$ ;

3) Для любого  $f \in L_2(\Omega)$  справедливо обобщенное разложение Гильберта-Шмидта

$$\hat{g}f(\vec{\omega}) = \sum_n \frac{(\hat{K}f^{(n)}, f)}{\lambda_n} \hat{K}f^{(n)}(\vec{\omega}) = \sum_n C_n \hat{g}f^{(n)}, \quad (1.5)$$

т.е. система функций  $\hat{g}f^{(n)}$  полна в области значений оператора  $\hat{g}$ .

Для того, чтобы воспользоваться результатами теории возмущений, преобразуем уравнение (1) к самосопряженной форме.

Пусть  $\Phi = \sqrt{1 + k\mu} f$  и  $\hat{V}$  самосопряженный в  $L_2(\Omega)$  интегральный оператор

$$\hat{V}\Phi(\vec{\omega}) = \int_{\Omega} V(\vec{\omega}, \vec{\omega}') \Phi(\vec{\omega}') d\vec{\omega}' \quad (1.6)$$

с ядром

$$V(\vec{\omega}, \vec{\omega}') = \frac{\hat{g}(\vec{\omega}, \vec{\omega}')}{\sqrt{(1+k\mu)(1+k\mu')}}}, \quad \mu' = \vec{\omega}'\vec{n}.$$

Тогда при  $k \in (-1, +1)$  уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\Phi = \lambda \hat{V} \Phi. \quad (1.7)$$

В окрестности произвольной точки  $k_0 \in Z_0$  функция  $(1+k\mu)^{-1/2}$  может быть разложена в ряд

$$(1+k\mu)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(k_0-k)^\ell a_\ell \mu^\ell}{(1+k_0\mu)^{\ell+1/2}}, \quad a_\ell = \frac{1 \cdot 3 \dots (2\ell-1)}{2 \cdot 4 \dots 2\ell},$$

сходящийся равномерно относительно  $\mu \in [-1, +1]$  при  $|k-k_0| < 1 - |R_\ell k_0|$ .

Поэтому для оператора  $\hat{V}$  справедливо представление

$$\hat{V} = \sum_{n=0}^{\infty} (k_0-k)^n \hat{V}_n, \quad (1.8)$$

где  $\hat{V}_n$  интегральный оператор с симметричным ядром, равным  $g(\vec{\omega}, \vec{\omega}') V_n(\vec{\omega}, \vec{\omega}')$ ,

$$V_n(\vec{\omega}, \vec{\omega}') = \sum_{\ell=0}^n \frac{a_\ell a_{n-\ell} \mu^\ell \mu'^{n-\ell}}{(1+k_0\mu)^{\ell+1/2} (1+k_0\mu')^{n-\ell+1/2}} \leq \frac{n}{(1-|R_\ell k_0|)^{n+1}}.$$

Оценим  $\|\hat{V}_n\|_{L_2}$ :

$$\begin{aligned} \|\hat{V}_n f\|^2 &= \int_{\Omega} d\vec{\omega} \left[ \int_{\Omega} g(\vec{\omega}\vec{\omega}') V_n(\vec{\omega}, \vec{\omega}') f(\vec{\omega}') d\vec{\omega}' \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{n^2}{(1-|\operatorname{Re} k_0|)^{2(n+1)}} \int_{\Omega} d\vec{\omega} \int_{\Omega} |g(\vec{\omega}\vec{\omega}')| d\vec{\omega}' \int_{\Omega} f^2 d\vec{\omega}' \leq \\ &\leq \left[ \frac{n}{(1-|\operatorname{Re} k_0|)^{n+1}} \right]^2 [g]^2 \|f\|^2 \cdot 4\pi^2 \end{aligned}$$

Но для любого натурального  $n$   $2^n > n$ . Поэтому

$$\|\hat{V}_n\|_{L_2} \leq [g] \left( \frac{2}{(1-|\operatorname{Re} k_0|)} \right)^{n+1} \cdot 2\pi. \quad (1.9)$$

Таким образом,  $\hat{V}(k)$  аналитическая функция  $k$  в  $Z_0$ , представимая степенным рядом (1.8), коэффициенты которого самосопряженные линейные операторы с той же областью определения  $\Omega$ . Неравенства (1.9) обеспечивают сходимость этого ряда, по крайней мере, при

$$|k-k_0| < \frac{1}{2} (1-|\operatorname{Re} k_0|).$$

Благодаря этим свойствам к  $\hat{V}$  применима аналитическая теория возмущений линейных самосопряженных операторов [13]. Отсюда следует утверждение.

**Теорема 3.** Пусть единственным характеристическим числом оператора  $\hat{V}$  в интервале  $(\lambda(k_0) - \delta, \lambda(k_0) + \delta)$  при  $k_0 \in (-1, +1)$  является  $\lambda(k_0)$  кратности  $m$  и  $\Phi_1^0, \dots, \Phi_m^0$  - соответствующие собственные функции. Тогда при достаточно малом  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, k_0)$  и  $|k - k_0| < \varepsilon, k \in Z_0$  существует  $m$  действительных функций

$$\lambda_i(k) = \lambda(k_0) + \lambda^{(1)} \cdot (k - k_0) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.10)$$

$m$  элементов

$$\Phi_i(\bar{\omega}) = \Phi_i^{(0)}(\bar{\omega}) + \Phi_i^{(1)}(\bar{\omega})(k - k_0) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.11)$$

в интервале  $(\lambda(k_0) - \delta, \lambda(k_0) + \delta)$  нет других характеристических чисел  $\hat{V}$ , а  $\Phi_i(\bar{\omega})$  образуют ортонормированную систему собственных элементов.

Из теории возмущений следует, что сходимость ряда (1.11) должна пониматься как сходимость в  $L_2(\Omega)$ . Однако, на самом деле все члены ряда (1.11) непрерывные функции  $\bar{\omega}$  и сходимость имеет место в пространстве непрерывных функций  $C(\Omega)$ . Действительно,  $\Phi_i(\bar{\omega})(1 + k\mu)^{-1/2}$  разлагается при  $|k - k_0| < \varepsilon, k \in Z_0$  в ряд по степеням  $(k - k_0)$ , сходящийся в  $L_2(\Omega)$ . Но тогда вследствие ограниченности  $\hat{g}$  как оператора из  $L_2$  в  $C$  (теорема 1 п.3)

$\hat{g} \frac{\Phi_i}{(1 + k\mu)^{1/2}}$  представляется рядом по степеням  $(k - k_0)$ , коэффициенты которого непрерывны на  $\Omega$ , и сходимость имеет место в  $C(\Omega)$ . Поскольку

$$\Phi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + k\mu}} \hat{g} \left[ \frac{\Phi_i}{\sqrt{1 + k\mu}} \right]$$

представляющего эту функцию, который должен совпадать с (1.11).

Аппарат теории возмущений позволяет также получить утверждение о малости возмущения  $\lambda(k)$  и  $\Phi$  при малом изменении  $g(\mu_0)$ . В этом случае, если в (1)  $g(\mu_0)$  заменить на функцию  $g(\mu_0) + \varepsilon \Delta(\mu_0)$  при  $\|\Delta\|_{L_2} \leq 1$  вместо  $V$  в (1.7) будем иметь  $\hat{V} + \Delta \hat{V}$ , где  $\Delta \hat{V}$  оператор типа (1.6) с ядром

$$\Delta V(\bar{\omega}, \bar{\omega}') = \frac{\varepsilon \Delta(\bar{\omega} \bar{\omega}')}{\sqrt{(1 + k\mu)(1 + k\mu')}},$$

а для  $\lambda$  и  $\Phi$  - ряды по степеням  $\varepsilon$ , подобные (1.10), (1.11). Возмущенная функция  $\Phi$  должна мало (в метрике  $L_2(\Omega)$ ) - отличаться от невозмущенной. Так же, как и при оценке сдвига по  $k$  легко получить, что вследствие ограниченности  $\hat{g}$  и  $\hat{\Delta}$  из  $L_2$  в  $C$  это отличие должно быть мало также и в  $C$ .



Утверждения о малости сдвига наименьшего характеристического числа  $\lambda_1$  и соответствующей собственной функции при малых изменениях  $k$  и  $\hat{g}$  получены в работах [3,10] также на основе теории возмущений.

Более широкую область значений параметра  $k$  можно рассмотреть, если разделить четную и нечетную части оператора  $\hat{g}$ .

Действительно, пусть

$$g_c(\mu_0) = \frac{1}{2}[g(\mu_0) + g(-\mu_0)], \quad g_{неч}(\mu_0) = \frac{1}{2}[g(\mu_0) - g(-\mu_0)].$$

Полагая

$$U(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}[f(\vec{\omega}) + f(-\vec{\omega})],$$

$$V(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}[f(\vec{\omega}) - f(-\vec{\omega})]$$

и учитывая, что, если  $f(\vec{\omega})$  решение уравнения (1), то

$$(1 - k\mu)f(-\vec{\omega}) = \lambda \int_{\Omega} g(\vec{\omega}\vec{\omega}')f(-\vec{\omega}')d\vec{\omega}', \quad (1.12)$$

будем иметь, складывая (1) и (1.12) и вычитая (1.12) из (1):

$$U + k\mu V = \lambda \hat{g}_c U, \quad (1.13)$$

$$V + k\mu U = \lambda \hat{g}_{неч} V,$$

где через  $\hat{g}_c$  и  $\hat{g}_{неч}$  обозначены интегральные операторы типа (2) с ядрами  $g_c(\mu_0)$  и  $g_{неч}(\mu_0)$  соответственно.

Если  $\lambda g_{2\ell+1} \neq 1$  при всех  $\ell$ , то существует ограниченный в  $L_2(\Omega)$  оператор  $(\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1}$  [14] и

$$V = (\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} k\mu U, \quad (1.14)$$

$$f = U - (\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} k\mu U.$$

Следовательно, функция  $U$  должна удовлетворять уравнению

$$[\hat{E} - k^2 \mu (\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} \mu]U = \lambda \hat{g}_c U, \quad (1.15)$$

эквивалентному (1).

В задачах с четными индикатрисами это уравнение принимает вид

$$(1 + \chi \mu^2)U = \lambda \hat{g}_c U, \quad (1.16)$$

где  $\chi = -k^2$ . Покажем, что если  $\lambda$  вещественно, то это уравнение может иметь нетривиальные решения только при вещественном  $\chi$ . Действительно, для всякого решения уравнения (1.16) должно выполняться равенство

$$(U, U) + \chi(\mu^2 U, U) = \lambda(\hat{g}_c U, U). \quad (1.17)$$

Но  $\hat{g}$  самосопряженный оператор, и, следовательно

$$(\hat{g}_c U, U) = (U, \hat{g}_c U) = \overline{(\hat{g}_c U, U)},$$

а

$$(\mu^2 U, U) = (\mu^2, |U|^2) > 0, \quad (U, U) > 0.$$

Поэтому  $\chi$  может быть лишь вещественным, и при  $k \in Z_0$ .

$$\chi \in (-1, \infty).$$

Заметим, что при  $g(\mu) = g(-\mu)$   $f(\mu) = (1 - k\mu)U(\mu)$ , т.е. для  $k$  близких к 1 имеет место сильная асимметрия функции  $f(\mu)$  и, следовательно, асимптотического режима.

Из уравнений (1.13) можно получить также уравнение для функции  $V$  при  $\lambda g_{2\ell} \neq 1$ , когда существует ограниченный обратный оператор  $(\hat{E} - \lambda \hat{g}_u)^{-1}$ . В этом случае

$$U = -(\hat{E} - \lambda \hat{g}_u)^{-1} k \mu V,$$

и

$$[\hat{E} + \chi \mu (\hat{E} - \lambda \hat{g}_u)^{-1} \mu] V = \lambda \hat{g}_{\text{неч}} V \quad (1.18)$$

Введем в правые части уравнений для  $U$  (1.15) и для  $V$  (1.18) множитель  $\Lambda$  вместо  $\lambda$ . Если фиксировать  $\lambda$  и  $k$  слева и рассматривать этот множитель как характеристическое число задачи, то для него можно сформулировать утверждения, подобные теоремам 2 и 3. Функции  $\lambda(k)$  определяются тогда из уравнения  $\Lambda(\lambda, k) = \lambda$ .

В задачах с четными индикатрисами справедливо утверждение.

**Теорема 4.** Пусть  $g(\mu) = g(-\mu) \in L_2(-1, +1)$  и  $\chi \in (-1, \infty)$ . Тогда:

1) Все характеристические числа уравнения (1.16), а следовательно, и уравнения (1) вещественны,

$$0 < \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots < 0 > \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \geq \dots ;$$

справедлив минимально-максимальный принцип

$$\frac{1}{\lambda_n^+} = \inf_{\{\psi_i\}} \sup_{(U, \hat{K}_\chi \psi_i)=0} \frac{(\hat{g}U, U)}{(\hat{K}_\chi U, U)}, \quad \frac{1}{\lambda_n^-} = \sup_{\{\psi_i\}} \inf_{(U, \hat{K}_\chi \psi_i)=0} \frac{(\hat{g}U, U)}{(\hat{K}_\chi U, U)}, \quad (1.19)$$

где  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  произвольная система функций из  $L_2(\Omega)$ , а

$$\hat{K}_\chi U = (1 + \chi \mu^2)U;$$

2) Если  $\lambda(\chi_0)$  единственное характеристическое число (кратности  $m$ ) уравнения (1.16) в интервале  $(\lambda(\chi_0) - \delta, \lambda(\chi_0) + \delta)$  и  $U_1^{(0)}, \dots, U_m^{(0)}$  соответствующие решения, то при достаточно малом  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, 1 + \chi_0)$  существует  $m$  действительных функций

$$\lambda_i(\chi) = \lambda(\chi_0) + \lambda_i^{(1)} \cdot (\chi - \chi_0) + \dots, \quad (1.20)$$

$m$  элементов  $L_2(\Omega)$

$$U_i(\vec{\omega}) = U_i^{(0)}(\vec{\omega}) + (\chi - \chi_0)U_i^{(1)}(\vec{\omega}) + \dots \quad (1.21)$$

в интервале  $(\lambda(\chi_0) - \delta, \lambda(\chi_0) + \delta)$  нет других характеристических чисел уравнения (1.16), а  $U_i(\bar{\omega})$  образуют ортонормированную относительно оператора  $\hat{K}(\chi)$  систему собственных элементов; ряд (1.21) сходится в  $C(\Omega)$ .

## §2.

Из результатов предыдущего параграфа следует бесконечная дифференцируемость решений уравнения (1) – функций  $\lambda_n^\pm(k)$  и  $f_k(\bar{\omega})$  по  $k$  на  $(-1, +1)$  и решений уравнения (1.16) функций  $\lambda_n^\pm(\chi)$  и  $U_\chi(\bar{\omega})$  по  $\chi$  на  $(-1, \infty)$ .

Кривые  $\lambda_n^+(k)$  проходят при  $k=0$  через значение  $\frac{1}{g_{\tilde{n}}} > 0$  – характеристическое число оператора  $\hat{g}$ , имеющее кратность  $2\tilde{n} + 1$ . Так как

$$-\|\hat{g}\|_{L_2} \|f\|^2 \leq (\hat{g}f, f) \leq \|g\|_{L_2} \|f\|^2,$$

то

$$\lambda_n^+(k) \geq \frac{1-k}{\|g\|_{L_2}} > 0, \quad \lambda_n^-(k) \leq -\frac{1-k}{\|g\|_{L_2}} < 0, \quad (2.1)$$

т.е. функции  $\lambda_n^+(k)$  и  $\lambda_n^-(k)$  сохраняют знак, и в 0 могут обращаться лишь их предельные значения

$$\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n^\pm(k).$$

Эти кривые не должны сливаться на конечном интервале и не могут пересекаться друг с другом. Однако, касание соседних кривых может иметь место.

Продифференцируем уравнение (1) по  $k$ :

$$(1 + \mu k) \frac{\partial f}{\partial k} = \lambda \hat{g} \frac{\partial f}{\partial k} + \frac{d\lambda}{dk} \hat{g}f - \mu f.$$

Так как существует решение этого уравнения в  $L_2(\Omega)$ , свободный член его должен быть ортогонален решению однородного уравнения  $f$  [3]:

$$\frac{d\lambda}{dk} (\hat{g}f, f) = (\mu f, f).$$

Отсюда для  $\frac{d\lambda}{dk}$  получаем выражения

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{(\mu, f^2)}{(\hat{g}f, f)} = \frac{\lambda(\mu, f^2)}{(1 + \mu k, f^2)} = \frac{\lambda}{k + \frac{(f, f)}{(\mu, f^2)}} \quad (2.2)$$

Аналогичным образом, дифференцируя по  $\chi$  уравнение (1.16), будем иметь

$$(1 + \mu^2 \chi) \frac{\partial U}{\partial \chi} = \lambda \hat{g} \frac{\partial U}{\partial \chi} + \frac{d\lambda}{d\chi} \hat{g} U - \mu^2 U, \quad (2.3)$$

и

$$\frac{d\lambda}{d\chi} = \frac{(\mu^2, U^2)}{(\hat{g}U, U)} = \frac{\lambda(\mu^2, U^2)}{(1 + \chi\mu^2, U^2)} = \frac{\lambda}{\chi + \frac{(U, U)}{(\mu^2, U^2)}} \quad (2.4)$$

Очевидно,  $(\mu^2, U^2) > 0$  и  $\frac{(U, U)}{(\mu^2, U^2)} > 1$  для любой функции  $U \in L_2(\Omega)$ , не равной тождественно 0. Поэтому из (2.4) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\chi + 1} > \frac{d\lambda}{d\chi} > 0 & \quad \text{при } \lambda > 0, \\ \frac{\lambda}{\chi + 1} < \frac{d\lambda}{d\chi} < 0 & \quad \text{при } \lambda < 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегрируя эти неравенства, получаем оценки, уточняющие (2.1):

$$\text{для } \lambda > 0: \begin{cases} \text{при } \chi \in [0, \infty) & \lambda(\chi) < \lambda(0)(\chi + 1) \\ \text{при } \chi \in (-1, 0) & \lambda(\chi) > \lambda(0)(\chi + 1), \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{для } \lambda < 0: \begin{cases} \text{при } \chi \in (-1, 0) & \lambda(\chi) < \lambda(0)(\chi + 1) \\ \text{при } \chi \in (0, \infty) & \lambda(\chi) > \lambda(0)(\chi + 1). \end{cases}$$

Величина же  $\lambda(0)$  известна – она равна соответствующему характеристическому числу оператора  $\hat{g}$ , т.е. величине  $\frac{1}{g_n}$ .

Схематически ход кривых  $\lambda(\chi)$  при четных индикатрисах изображен на Рис. 1

Для величины  $\frac{d\lambda}{dk}$  соответствующую оценку удастся получить лишь при

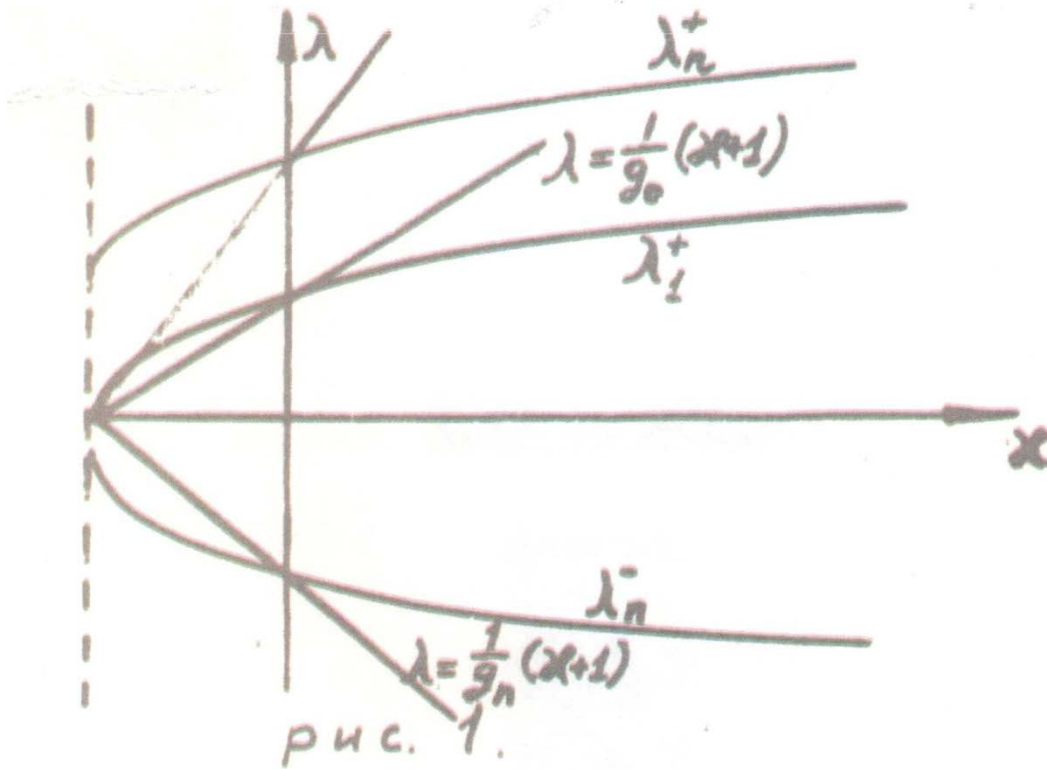
$$\lambda < \sup_{m=0,1,\dots} \frac{1}{g_m}. \quad (2.7)$$

Действительно, в случае, когда  $\lambda g_m < 1$  из равенства

$$(f, f) + k(\mu, f^2) = \lambda(\hat{g}f, f) = \lambda \sum_n g_n \sum_m f_{nm}^2$$

следуют оценки [3] (при  $f_{nm} = (f, Y_{nm})$ ):

$$\lambda(\hat{g}f, f) < (f, f) = \sum_n \sum_m f_{nm}^2, \quad k(\mu, f^2) < 0 \quad (2.8)$$



Это означает, что при условии (2.7), которое, в частности, выполняется, если среда не мультиплицирующая ( $\lambda g_0 < 1$ ) и индикатриса неотрицательна

( $g_m = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_m g d\mu < g_0$ ), справедливы неравенства

$$0 < \frac{d\lambda}{dk} < \frac{\lambda}{k+1} \quad \text{при } k < 0, \quad 0 < \lambda < \sup_{(m)} \frac{1}{g_m} \quad (2.9)$$

(мы рассмотрим лишь указанный случай  $k < 0$ ,  $\lambda > 0$ , так как распространение результата на значения  $k > 0$  следует из симметрии функции  $\lambda(k)$ , а случай  $\lambda < 0$  может быть изучен аналогичным образом).

Пусть в точке  $k_0$   $\lambda = \sup_m \frac{1}{g_m}$ . Тогда, интегрируя неравенство (2.9) от  $-1$  до

$k_0$ , получим оценку

$$\lambda(k) > \lambda(k_0) \frac{1+k}{1+k_0}.$$

В частности, для неотрицательных индикатрис

$$\lambda(k) > \frac{1}{g_0} \frac{1+k}{1+k_0}.$$

При  $\lambda > \sup_m \frac{1}{g_m}$ , в случае когда индикатриса не есть четная функция  $\mu_0$ , функции  $\lambda(k)$  могут и не быть монотонными – см. , например, рис. 3, где изображены кривые  $\lambda_1(\chi)$  и  $\lambda_2(\chi)$  для индикатрисы

$$g(\mu) = \frac{1}{2}P_0 + \frac{3g_1}{2}P_1, \quad 3g_1 = \tilde{g}.$$

Отметим еще один сравнительно простой класс задач, в которых выполняется условие [11]

$$\int_{\Omega} d\vec{\omega} \int_{\Omega} d\vec{\omega}' g(-\vec{\omega}\vec{\omega}') f(\vec{\omega}) f(\vec{\omega}') > 0 \quad \text{при } f \neq 0, \quad (2.10)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \sum_{m=-n}^n (f, Y_n^m)^2 > 0,$$

т.е.

$$g_{2k} > 0, \quad g_{2k+1} < 0.$$

Так как в этом случае

$$\frac{g(+1)}{g(-1)} = \frac{\sum_n (-1)^n |g_n| (2n+1)}{\sum_n |g_n| (2n+1)} < 1,$$

то, грубо говоря, такие индикатрисы отвечают рассеянию, в основном, «назад». При  $\lambda > 0$  в этом классе задач обратим оператор  $\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч}$  и функция  $U$  может быть найдена из уравнения (1.15). Умножая (1.15) скалярно и на  $U$ , будем иметь:

$$(U, U) + \chi ((\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} \mu U, \mu U) = \lambda (\hat{g}_u U, U)$$

Отсюда при  $\lambda > 0$  следует действительность  $\chi$ . Заменяем  $\lambda$  в правой части (1.15) величиной  $\Lambda$ . Для  $\Lambda$  должен быть справедлив минимально-максимальный принцип

$$\frac{1}{\Lambda_n^+} = \inf_{\Psi_i \in L_2(\Omega)} \sup_{\substack{(U, \hat{K}_{\lambda, \chi} \Psi_i) = 0 \\ i=1, 2, \dots, n-1}} \frac{(\hat{g}_u U, U)}{(\hat{K}_{\lambda, \chi} U, U)}.$$

Но

$$(\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} \mu U = \sum_{\ell=2k+1}^{\ell} \frac{\sum_{m=-\ell}^{\ell} (\mu U_{\ell}, Y_{\ell}^m)}{1 + \lambda |g_{\ell}|} Y_{\ell}^m,$$

и

$$\frac{1}{\Lambda_n^+} = \inf_{\Psi_i \in L_2(\Omega)} \sup_{\substack{(U, \hat{K}_{\lambda, \chi} \Psi_i) = 0 \\ i=1, 2, \dots, n-1}} \frac{(\hat{g}_u U, U)}{(U, U) + \chi \sum_{\ell} \frac{\sum (\mu U, Y_{\ell}^m)^2}{1 + \lambda |g_{\ell}|}}.$$

Дробь справа монотонно возрастает с ростом  $\lambda$ . Следовательно, все характеристические числа  $\Lambda_n^+$  монотонно убывают с ростом  $\lambda$  от значений  $\Lambda_n^+(0)$  равных  $\lambda_n^+(\chi)$  - характеристическим числам (1.15) при  $\hat{g}_{неч} = 0$ , до  $\Lambda_n^+(\infty) = 0$ . Для каждой кривой  $\Lambda_n^+(\lambda)$  поэтому существует и только одна точка, где  $\Lambda_n^+(\lambda) = \lambda$ . Очевидно, эта точка и будет характеристическим числом  $\lambda_n^+$  исходного уравнения (1.15) и, следовательно, уравнения (1) (рис.2)

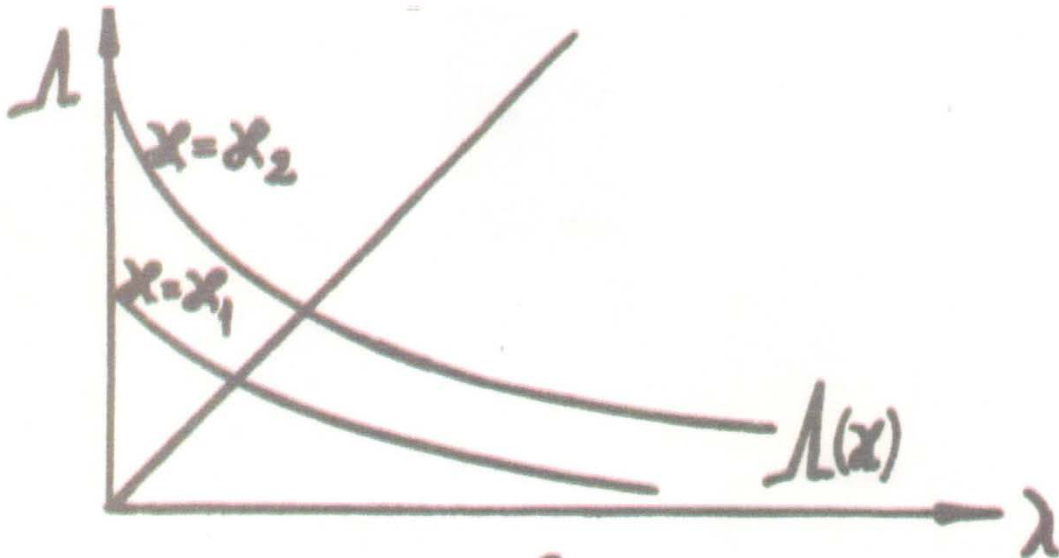


рис. 2.

Для того, чтобы убедиться, что  $\lambda$  возрастающая функция  $\chi$  при  $\chi \geq 0$ , продифференцируем по  $\chi$  уравнение (1.15):

$$\frac{\partial U}{\partial \chi} + \chi \mu (\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} \mu \frac{\partial U}{\partial \chi} = \lambda \hat{g}_u \frac{\partial U}{\partial \chi} + F$$

$$F = \frac{d\lambda}{d\chi} \hat{g}_u U - \mu (\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} \mu U + \chi \frac{d\lambda}{d\chi} \mu \sum_{\ell=2n+1} |g_{\ell}| \frac{(\mu U, Y_{\ell}^m) Y_{\ell}^m}{(1 + \lambda |g_{\ell}|)^2}, \quad (2.11)$$

из условия  $(F, U) = 0$  следует, что при  $\chi \geq 0$



$$\frac{d\lambda}{d\chi} = ((\hat{E} - \lambda \hat{g}_{неч})^{-1} \mu U, \mu U) [(\hat{g}_u U, U) + \chi \sum_{\ell} |g_{\ell}|^m \frac{\sum (\mu U, Y_{\ell}^m)^2}{(1 + \lambda |g_{\ell}|)^2}] \geq 0.$$

Таким образом, в задачах с условием (2.12) так же как в задачах с четными индикатрисами кривые  $\lambda_n^+(\chi)$  монотонно возрастают с ростом  $\chi$  от значений  $\lambda_n^+(0)$  равных  $\frac{1}{g_{2\ell}}$  до  $\lambda_n^+(\infty) \leq \infty$ .

Ход кривых  $\lambda_n^-$  может быть исследован с помощью уравнения для  $V$  (1.18). Действительно, при  $\lambda < 0$  обратим оператор  $\hat{E} - \lambda \hat{g}_u$ :

$$(\hat{E} - \lambda \hat{g}_u)^{-1} \mu V = \sum_{\ell=2n} \frac{\sum (\mu V, Y_{\ell}^m)}{1 - \lambda g_{\ell}} Y_{\ell}^m. \quad (2.13)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\Lambda_n^-} = \sup_{\Psi_i \in L_2(\Omega)} \inf_{(\hat{K}U, \Psi_i)=0} \frac{(\hat{g}_{неч} V, V)}{(\hat{K}V, V)}, \hat{K}V = V + \chi \mu (\hat{E} - \lambda \hat{g}_u) \mu V,$$

$$\frac{d\lambda_n^-}{d\chi} = \frac{((\hat{E} - \lambda \hat{g}_u)^{-1} \mu V, \mu V)}{(\hat{g}_{неч} V, V) - \chi \sum_{\ell=2n} g_{2\ell} \frac{\sum (\mu V, Y_{\ell}^m)^2}{(1 - \lambda g_{\ell})^2}} < 0 \text{ при } \chi \geq 0 \quad (2.14)$$

И следовательно, функции  $\lambda_n^-$  монотонно убывают от значений  $\lambda_n^-(0) < 0$  до  $\lambda_n^-(\infty) \geq -\infty$ , принимая при  $\chi = 0$  значение  $\frac{1}{g_{2\ell+1}} < 0$ .

Следует ожидать, что кривые  $\lambda_n^{\pm}$ , по крайней мере, при  $|\lambda g_0| < 1$  выпуклостью обращены в сторону, противоположную оси абсцисс, т.е.  $\lambda_n^{+''} < 0$ ,  $\lambda_n^{-''} > 0$ .

Однако, доказать это обстоятельство удастся лишь для первого характеристического числа. Действительно, пусть  $k_0 \in (-1, 0)$ , и

$$\frac{1}{\lambda_1} = J_{k_0} [f_{k_0}] = \sup_{f \in L_2(\Omega)} J_{k_0} [f].$$

Если  $\varepsilon$  малое положительное число такое, что вместе с  $k_0$  и  $k_0 + \varepsilon \in (-1, 0)$ , то

$$J_{k_0+\varepsilon} [f_{k_0}] = J_{k_0} [f_{k_0}] \frac{(1 + k_0 \mu, f_{k_0}^2)}{(1 + (k_0 + \varepsilon) \mu, f_{k_0}^2)} \leq \sup_{f \in L_2(\Omega)} J_{k_0+\varepsilon} [f],$$

и, следовательно,

$$\lambda_1(k_0) \geq \lambda_1(k_0 + \varepsilon) \frac{(1 + k_0 \mu, f_{k_0}^2)}{(1 + (k_0 + \varepsilon) \mu, f_{k_0}^2)}.$$

Но

$$\frac{(1 + k_0 \mu, f_{k_0}^2)}{(1 + k_0 \mu, f_{k_0}^2) + \varepsilon(\mu, f_{k_0}^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\lambda'_1(k_0)}{\lambda_1(k_0)}}.$$

Поэтому  $\lambda_1(k_0 + \varepsilon) \leq \lambda_1(k_0) + \varepsilon \lambda'_1(k_0)$

и

$$\frac{\lambda_1(k_0 + \varepsilon) - \lambda_1(k_0)}{\varepsilon} \leq \lambda'_1(k_0).$$

Но это означает, что кривая  $\lambda_1(k + \varepsilon)$  расположена по касательной в точке  $k_0$ , т.е. она обращена выпуклостью вверх.

Проведенные рассуждения позволяют получить ответ на вопрос о числе корней  $k$  характеристического уравнения при заданной величине  $\lambda$  в следующей форме.

**Теорема 5.** Пусть

$$g(\mu) \in L_2(-1, +1), \quad g(\mu) \geq 0 \quad \text{на} \quad [-1, +1], \quad \lambda > 0, \quad \lambda g_0 < 1 \quad (2.15)$$

Тогда число пар корней  $\pm k_1(\lambda), \dots, \pm k_M(\lambda)$  уравнения (1) равно числу функций  $\lambda_n^+(k)$  таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n^+(k) < \lambda.$$

Действительно, если  $\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n^+(k) < \lambda \leq \frac{1}{g_0}$ , то, т.к. функции  $\lambda_n^+(k)$

возрастают с ростом  $k$  на интервале  $(-1, k_0)$ , определяемом равенством  $\frac{1}{g_0} - \lambda_n^+(k_0)$ , найдется 1 и только 1 значение  $k \in (-1, k_0)$ , для которого  $\lambda = \lambda_n^+(k)$ .

С другой стороны, если  $\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n^+(k) \geq \lambda$ , то при всех  $k \in (-1, +1)$   $\lambda_n^+ > \lambda$ .

**Теорема 6.** Пусть

$$g(\mu) \in L_2(-1, +1), \quad g(\mu) = g(-\mu) \quad \lambda > 0.$$

Тогда число пар действительных корней уравнения (1)  $\pm k_1, \dots, \pm k_M$  и число  $L$  пар мнимых корней  $\pm i k_{M+1}, \dots, \pm i k_{M+L}$  равно числу функций  $\lambda_m^+(\chi)$  и  $\lambda_\ell^+(\chi)$ , определяющих положительные характеристические числа уравнения (1.16) таких, что

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow -1} \lambda_m^+(\chi) < \lambda < \lambda_m^+(0), \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ \lambda_\ell(0) < \lambda < \lim_{\chi \rightarrow \infty} \lambda_\ell^+(\chi), \quad \ell = M + 1, \dots, M + L. \end{aligned}$$

Следствие. В задачах без мультипликации с неотрицательными индикатрисами число пар корней  $k(\lambda)$  равно числу функций  $\lambda_m^+(\chi)$ , для которых

$$\lim_{\chi \rightarrow -1} \lambda_m^+(\chi) < \lambda.$$

Таким образом, для полного ответа на вопрос о числе корней следует знать значения  $\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n(k)$ .

В этом случае, когда функция  $g(\mu)$  представима рядом (6) с бесконечным числом положительных  $g_n$ , уравнение (1) имеет бесконечное множество характеристических чисел  $\lambda_n^+$ . Однако, как показано Сеттинжером, при достаточно быстрой сходимости этого ряда, когда  $g(\mu)$  аналитична в окрестности интервала  $(-1, +1)$ , существует лишь конечное число корней при заданном  $\lambda$ . Это означает, что лишь для конечного числа функций  $\lambda_n^+$  может быть  $\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n^+(k) = 0$ .

В задачах с индикатрисами, представимыми конечными суммами полиномов Лежандра (6), удастся получить некоторые оценки для  $\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_n^+(k)$ , а при двучленных и трехчленных индикатрисах легко найти формулы для  $\lambda_n(k)$  и  $\lambda_n(\chi)$  и по ним установить все детали поведения этих функций.

Рассмотрим сначала задачи с двучленными индикатрисами.

Пусть

$$g(\mu) = \frac{g_0}{2} + \frac{2N+1}{2} g_N P_N(\mu).$$

Тогда исходное уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$(1+k\mu)f_m = \lambda \hat{g}_m f_m, \quad \hat{g}_m f_m = \int_{-1}^{+1} g_m(\mu, \mu') f_m(\mu') d\mu' \quad (2.16)$$

$$m = 0, 1, \dots, N.$$

$$g_m(\mu, \mu') = \frac{g_0}{2} \delta_{0m} + \frac{(N-m)!}{(N+m)!} \frac{2N+1}{2} g_N P_N^m(\mu) P_N^m(\mu'), \quad (2.17)$$

$$\delta_{0m} = 1 \text{ при } m = 0, \quad \delta_{0m} = 0, \text{ если } m \neq 0,$$

При  $m \neq 0$  пространство решений  $f_m$  одномерно:

$$f_m(\mu) = \frac{\alpha P_N^m(\mu)}{1+k\mu},$$

а при  $m = 0$  - двумерно:

$$f_0(\mu) = \frac{\alpha_0 + \alpha P_N}{1+k\mu}.$$

Следовательно, существует 2 характеристических числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  при  $m = 0$  и 1 ( $\lambda^{(m)}$ ) при каждом  $m \neq 0$ . Это последнее двукратно, так как

$$f_m(\bar{\omega}) = f_m(\mu) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти функцию  $\lambda^{(m)}(k)$  при  $m \neq 0$  умножим обе части уравнения (2.16) на  $P_N^{(m)}(\mu)$  и проинтегрируем по  $\mu$  на  $(-1, +1)$ . Тогда для  $\lambda^{(m)}$  получим выражение:

$$\lambda^{(m)}(k) = \frac{2}{2N+1} \frac{(N+m)!}{(N-m)!} \frac{1}{g_N} \left\{ \int_{-1}^{+1} [P_N^m(\mu)]^2 \frac{d\mu}{1+k\mu} \right\}^{-1} \quad (2.18)$$

Так как  $(P_N^m)^2 = (1-\mu^2)^m \left( \frac{d^m P_N}{d\mu^m} \right)^2$  есть четный полином  $\mu$ , то

$$\int_{-1}^{+1} (P_N^m)^2 \frac{d\mu}{1+k\mu} = 2 \int_0^1 (P_N^m)^2 \frac{d\mu}{1-k^2\mu^2}, \quad (2.19)$$

и  $\lambda^{(m)}(k)$  монотонно возрастает с ростом  $k$  на  $(-1, 0)$ .

$$\text{При } k=0 \quad \lambda^{(m)}(k) = \frac{1}{g_N},$$

$$\lambda^{(m)}(-1) = \frac{1}{g_N} \frac{2}{2N+1} \frac{(N+m)!}{(N-m)!} \left\{ \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^{m-1} \left( \frac{d^m P_N}{d\mu^m} \right)^2 d\mu \right\}^{-1}. \quad (2.20)$$

$$\text{В частности, при } N=1 \quad \lambda^{(1)}(-1) = \frac{2}{3g_1}.$$

Формулы (2.19-2.20) имеют смысл и при  $-k^2 = \chi > 0$ .  $\lambda^{(m)}$  как функция  $\chi$  монотонно возрастает,

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \lambda^m(\chi) = \infty.$$

Пусть теперь  $m = 0$ . Тогда

$$f(\mu) = (1+k\mu)^{-1} \lambda \left[ \frac{g_0}{2} f_0 + \frac{2N+1}{2} g_N f_N P_N(\mu) \right], \quad (2.21)$$

где  $f_0 = \int_{-1}^{+1} f d\mu$ ,  $f_N = \int_{-1}^{+1} f P_N d\mu$ . Умножая (2.21) на 1 и  $P_N$  и интегрируя на промежутке  $(-1, +1)$ , получим линейную однородную систему для  $f_0, f_N$ , определитель которой должен быть равен 0:

$$\left(1 - \frac{\lambda g_0}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1+k\mu}\right) \left(1 - \frac{\lambda g_N(2N+1)}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_N^2 d\mu}{1+k\mu}\right) - \frac{\lambda^2}{4} g_0 g_N (2N+1) \left(\int_{-1}^{+1} \frac{P_N d\mu}{1+k\mu}\right)^2 = 0. \quad (2.22)$$

Чтобы найти  $\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_{1,2}(k)$  воспользуемся соотношением

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\pi_n \mu}{1+k\mu} d\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{\pi_n(1) d\mu}{1+k\mu} + \int_{-1}^{+1} \frac{\pi_n(\mu) - \pi_n(1)}{1-\mu} d\mu + O((1-k)\ln(1-k))$$

справедливым для любого полинома  $\pi_n(\mu)$ . Отсюда

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1+k\mu} = -\ln \frac{2}{1+k} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon = (1+k)\ln(1+k),$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_N(\mu) d\mu}{1+k\mu} = -\ln \frac{2}{1+k} - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right) + O(\varepsilon),$$

так как  $P_N(\mu) - P_N(1) = -(1-\mu) \sum_0^{N-1} \left(\frac{1}{\ell+1} + \dots + \frac{1}{N}\right) (2\ell+1) P_\ell(\mu)$ ,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_N^2 d\mu}{1+k\mu} = -\ln \frac{2}{1+k} - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right) + O(\varepsilon),$$

так как

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_N^2 - 1}{1-\mu} d\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{P_N - 1}{1-\mu} d\mu.$$

Подставляя эти значения интегралов в (2.22), получим:

$$\{\lambda^2 g_0 g_N (2N+1) - \lambda [g_0 + (2N+1)g_N]\} \ln \frac{1}{1+k} + Const = O(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_1(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_2(k) = \frac{\frac{1}{g_0} + \frac{1}{(2N+1)g_N}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}}. \quad (2.23)$$

В частности, при  $N=1$   $\lim_{k \rightarrow -1} \lambda(k) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{g_0} + \frac{1}{3g_1} \end{cases}$  и на  $(-1, +1)$

$$\lambda_{1,2}(k) = \frac{1}{2g_0} + a \frac{1}{3g_1} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2g_0} + \frac{a}{3g_1}\right)^2 - \frac{b}{3g_1 g_0}} \quad (2.24)$$

$$a = \frac{k \ln \frac{1+k}{1-k}}{\frac{2}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} - 4}, \quad b = \frac{k^2}{\frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} - 1}.$$

Формулы (2.20) и (2.23) уточняют оценку (8) из работы [10]:

Из них следует, что при  $g_N \leq g_0$  и

$$\lambda \leq \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{g_0} + \frac{1}{(2N+1)g_N} \right] \quad (2.25)$$

уравнение (1) имеет лишь 1 корень  $k(\lambda)$  на  $(-1, 0)$ .

Для того, чтобы понять, как ведут себя кривые  $\lambda_{1,2}(k)$  при мнимых  $k$ , обратимся к уравнениям (1.15) для  $U$  и (1.18) для  $V$ .

Пусть  $N$  - четно,  $N = 2n$ . Тогда уравнение (1.15) имеет вид

$$(1 + \chi \mu^2)U(\mu) = \lambda \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{g_0}{2} + \frac{(2N+1)g_N}{2} P_N(\mu)P_N(\mu') \right] U(\mu') d\mu'.$$

Отсюда для  $\lambda(\chi)$  получаем, как и ранее для  $\lambda(k)$  уравнение:

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{\lambda g_0}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1 + \chi \mu^2} \right) \left( 1 - \frac{\lambda g_N (2N+1)}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_N^2 d\mu}{1 + \chi \mu^2} \right) - \\ & - \lambda^2 \frac{g_0 g_N (2N+1)}{4} \left( \int_{-1}^{+1} \frac{P_N d\mu}{1 + \chi \mu^2} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Как показано ранее,  $\lambda' > 0$  при  $\chi \in (-1, \infty)$  и

$$\lambda_1 \leq \frac{\chi + 1}{g_0}, \quad \lambda_2 \leq \frac{\chi + 1}{g_N}, \quad \chi \in (0, \infty).$$

Найдем  $\lim_{\chi \rightarrow \infty} \lambda_{1,2}(\chi)$ . При  $\chi \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1 + \chi \mu^2} &= \frac{2}{\sqrt{\chi}} \operatorname{arctg} \sqrt{\chi} = \frac{\pi}{\sqrt{\chi}} - \frac{2}{\chi} + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right), \\ \int_{-1}^{+1} \frac{P_N d\mu}{1 + \chi \mu^2} &= P_N(0) \left( \frac{\pi}{\sqrt{\chi}} - \frac{2}{\chi} \right) + O\left(\frac{1}{\chi^{3/2}}\right), \\ \int_{-1}^{+1} \frac{P_N^2 d\mu}{1 + \chi \mu^2} &= [P_N(0)]^2 \left( \frac{\pi}{\sqrt{\chi}} - \frac{2}{\chi} \right) + O\left(\frac{1}{\chi^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (2.26) при  $\chi \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\lambda^2 + P(\chi)\lambda + q(\chi) = 0, \quad P(\chi) = P_0 \chi + O(\chi^{3/2}), \quad q = q_0 \chi^{3/2} + O(\chi^2)$$

Отсюда для  $g(\mu) \geq 0$ , т.е.  $g_0 \geq g_N(2N+1)$ , когда  $P_0 < 0$ ,  $q_0 > 0$ ,

$$\lambda_1 = O(\sqrt{\chi}), \quad \lambda_2 = O(\chi), \quad \lim_{\chi \rightarrow \infty} \lambda_{1,2}(\chi) = \infty$$

Пусть теперь  $N$  нечетно,  $N = 2k + 1$ . Тогда уравнение для  $V$  (1.18) имеет вид

$$(1 + \chi\mu^2)V = \frac{\lambda g_0}{2(\lambda g_0 - 1)} \chi\mu \int_{-1}^{+1} \mu' V d\mu' + \frac{\lambda g_N(2N+1)}{2} P_N \int_{-1}^{+1} V P_N d\mu'.$$

Уравнение для определения  $\lambda_{1,2}(\chi)$  принимает вид

$$\lambda^2[\omega_0\omega_N\chi(a_0a_{NN} - a_N^2) - a_{NN}g_0\omega_N] - \lambda(\omega_0\chi a_0 - \omega_N a_{NN} - g_0) - 1 = 0, \quad (2.27)$$

где  $\omega_0 = \frac{g_0}{2}$ ,  $\omega_N = \frac{2N+1}{2}g_N$ ,

$$a_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2 d\mu}{1 + \chi\mu^2}, \quad a_N = \int_{-1}^{+1} \frac{\mu P_N d\mu}{1 + \chi\mu^2}, \quad a_{NN} = \int_{-1}^{+1} \frac{P_N^2 d\mu}{1 + \chi\mu^2}.$$

Уравнение (2.27) в зависимости от значения  $\chi$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_N$  может иметь действительные или мнимые корни. Зависимость  $\lambda$  от  $\chi$  оказывается значительно более сложной, нежели в задачах с симметричными индикатрисами. Условием исчезновения действительных корней  $\lambda_{1,2}$  является неравенство

$$\Delta = (\omega_0\chi a_0 + \omega_N a_{NN} - g_0)^2 - 4\omega_0\omega_N\chi a_N^2 \geq 0$$

Так как при  $\chi = 0$   $\Delta = g_0 - g_N \geq 0$ , если  $g(\mu) \geq 0$ , а при

$$\chi \rightarrow \infty \quad a_0, \quad a_N, \quad a_{NN} = O\left(\frac{1}{\chi}\right), \quad \text{т.е.} \quad \Delta \cong \frac{1}{\chi}(g_0 \arctg \sqrt{\chi})^2 - g_0 g_N (2N+1)\chi a_N^2,$$

то чем больше  $g_0 / g_N$  и чем меньше  $N$ , тем больше должно быть значение  $\chi = \chi_0$ , при котором исчезают действительные корни  $\lambda_{1,2}$ .

При  $N = 1$  для  $\lambda_{1,2}$ , имеем выражение

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\tilde{g}} \left[ a + \tilde{g} \pm \sqrt{(a + \tilde{g})^2 - 4b\tilde{g}} \right],$$

где  $\tilde{g} = 3g_1$ ,  $g_0 = 1$ ,  $a = \frac{x^2 \arctg x}{x - \arctg x}$ ,  $b = \frac{x^3}{x - \arctg x}$ .

Кривые  $\lambda_{1,2}(\chi)$  для  $N = 1$  при различных значениях  $\tilde{g}$  и  $g_0 = 1$  изображены на рис. 3. С ростом  $\tilde{g}$  значение  $\chi_0$  приближается к 0 и при  $\tilde{g} = 3$ , т.е.  $g_1 = g_0 = 1$   $\chi_0 = 0$ . Если  $\chi < 0$ , т.е.  $k \in (-1, +1)$ , то при  $g_1 > \frac{1}{3}$  функция  $\lambda_2$  не является монотонно возрастающей функцией  $k$  (на интервале  $(-1, 0)$ ). Она может убывать на всем интервале  $(-1, 0)$  (при  $g_1 = 1$ ) или на части его (при



$g_1 = \frac{2}{3}$ ). Заметим, что эти нарушения имеют место для  $\lambda > \frac{1}{g_0}$  и в том случае,

когда индикатриса

$$g(\mu) = \frac{1}{2}(1 + 3g_1\mu)$$

принимает отрицательные значения на части интервала  $(-1, +1)$ .

Подобным же образом можно рассмотреть задачи с 3-х членными индикатрисами

$$g(\mu) = \frac{1}{2}[g_0 P_0 + \omega_\ell P_\ell(\mu) + \omega_n P_n(\mu)].$$

Для определения  $\lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_{2,3}(k)$  получается квадратное уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

где

$$-p = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{d_\ell} + \frac{1}{\omega_\ell} \frac{d_n}{d_\ell(d_n - d_\ell)} + \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{d_n - d_\ell},$$

$$q = \frac{1}{d_\ell(d_n - d_\ell)} \left[ \frac{1}{\omega_n \omega_\ell} + \frac{1}{\omega_n \omega_0} + \frac{1}{\omega_\ell \omega_0} \right].$$

Пусть  $\ell = 1$ ,  $n = 2$ . Тогда

$$\lambda^2 - \lambda \left( \frac{1}{\omega_0} + \frac{3}{\omega_1} + \frac{2}{\omega_2} \right) + 2 \left( \frac{1}{\omega_0 \omega_1} + \frac{1}{\omega_0 \omega_2} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \right) = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_0} + \frac{3}{\omega_1} + \frac{2}{\omega_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\omega_0} + \frac{3}{\omega_1} + \frac{2}{\omega_2} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{\omega_0 \omega_1} + \frac{1}{\omega_0 \omega_2} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \right)}.$$

В частности, для рэлеевской индикатрисы  $g(\mu) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \mu)$

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}, \quad -3\lambda^2 + \lambda \left( \frac{2}{\omega_2} + \frac{2}{\omega_0} \right) = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_1(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_2(k) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_2} \right) = 2$$

Пусть теперь

$$g(\mu) = \sum_0^N \frac{(2\ell+1)}{2} g_\ell P_\ell(\mu)$$

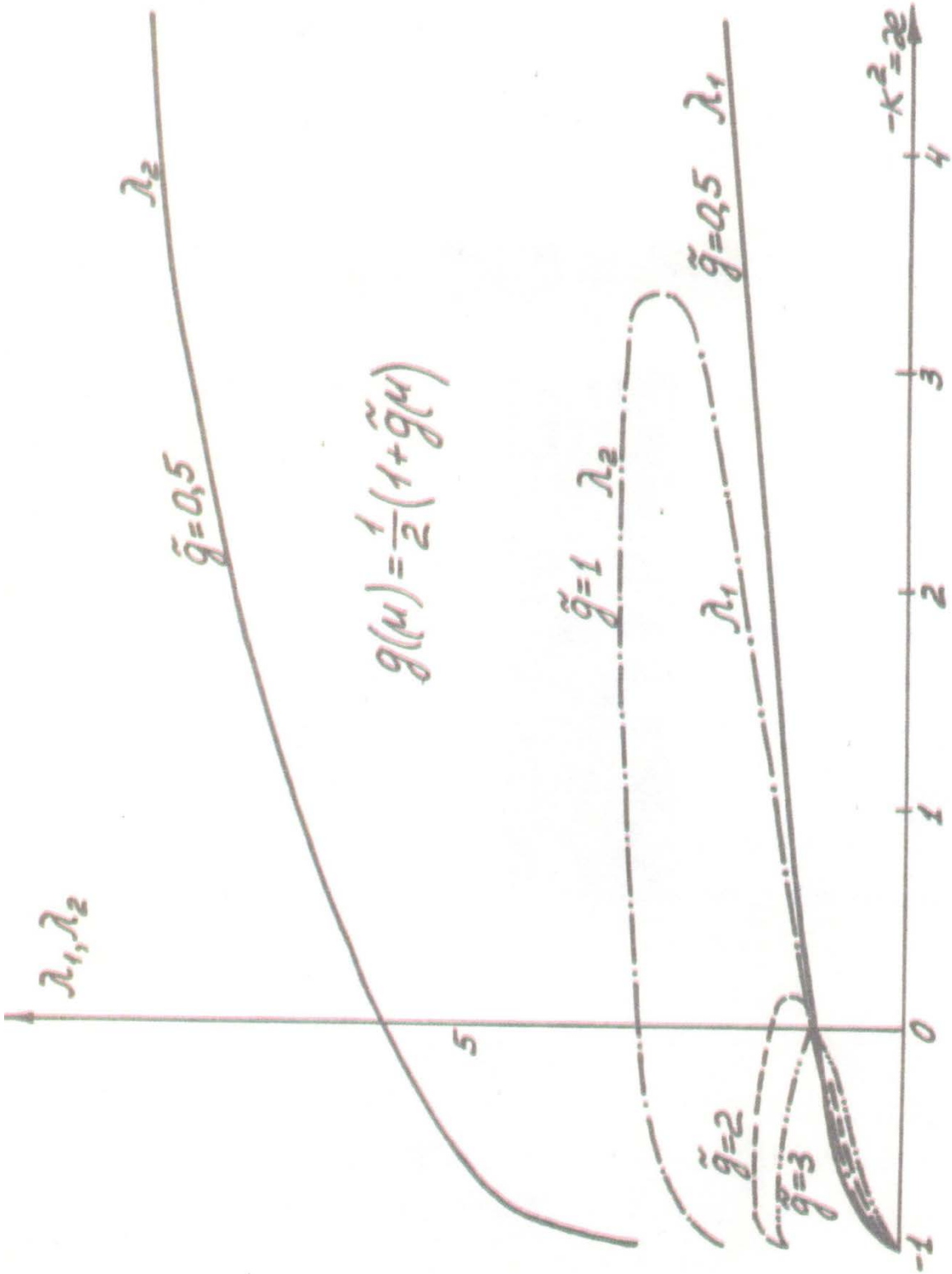


Рис. 3

Все собственные функции уравнения (4) с  $m = 0$  должны иметь вид

$$f(\mu) = \frac{\sum_0^N \alpha_\ell P_\ell(\mu)}{1 + k\mu}, \quad (2.28)$$

где коэффициенты  $\alpha_\ell$  отличны от 0 лишь при тех значениях  $\ell$ , при которых  $g_\ell \neq 0$ .

Вариационный функционал  $J_k[f]$  на таких функциях может быть записан в форме:

$$J_k[f] = \frac{\sum_0^N \frac{2n+1}{2} g_n f_n^2}{\sum_0^N \alpha_n f_n}, \quad f_n = \int_{-1}^{+1} \frac{\sum_0^N \alpha_\ell P_\ell(\mu)}{1 + k\mu} P_n d\mu.$$

Если последовательность  $\{\alpha_n\}_{n=0}^N$  фиксирована, а  $k \rightarrow -1$ , то коэффициенты  $f_\ell$ , а, следовательно, и  $J_k[f]$  могут оставаться ограниченными лишь при выполнении равенства

$$\sum_0^N \alpha_n P_n(1) = 0. \quad (2.30)$$

В противном случае  $f_\ell, J_k \sim \ln(1+k)$  при  $k \rightarrow -1$ . Это означает, что  $\lim_{k \rightarrow -1} \sup_f J = \infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_1(k) = 0$ .

Равенство (2.30) может быть истолковано, как условие ортогональности функции  $f$  вида (2.28) к  $\delta(1-\mu)$ :

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu) \delta(1-\mu) (1+k\mu) d\mu = 0.$$

На этом основании следует ожидать, что обобщенная функция  $\delta(1-\mu)$  есть предельное значение при  $k \rightarrow -1$  первой собственной функции. Заметим, что в [3] получено для  $f_k^{(1)}(\mu)$  приближенное выражение, справедливое при  $|k|$  близком к 1 и  $\lambda \ll 1$ :

$$f_k^{(1)}(\mu) = 2\pi \frac{g(-\mu)}{1+k\mu}.$$

Если в условии ортогональности

$$((1+k\mu)f_k^{(1)}, f) = 0,$$

где  $f$  имеет форму (2.28) перейти к пределу при  $k \rightarrow -1$ , то также придем к (2.30). Используя соотношение (2.30), получим теперь оценки для интервала, содержащего  $\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_n^+(k)$ . Очевидно, что

$$\inf_n \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_n^+(k) = \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_1^+(k),$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \inf_{\psi_1} \sup_{(\psi_1, \hat{k}f)=0} J_k[f] \leq \sup_{(\psi_1^{(0)}, \hat{k}f)=0} J_k[f],$$

где  $\psi_1^{(0)}$  фиксированная функция. Пусть  $\psi_1^{(0)} = (1 + k\mu)^{-1}$ .

Условие ортогональности может быть записано в форме

$$\begin{aligned} 0 = (f \psi_1^{(0)}, 1 + k\mu) &= (f, 1) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sum_0^N \alpha_n P_n}{1 + k\mu} d\mu = \\ &= \sum_0^N \alpha_n P_n(1) \ln(1 + k) + a(k), \end{aligned}$$

где величина  $a(k)$  ограничена вместе с  $\sum_0^N |\alpha_n|$ .

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |f_n| &= \left| \int_{-1}^{+1} \frac{\sum_0^N \alpha_\ell P_\ell}{1 + k\mu} P_n d\mu \right| \leq \int_{-1}^{+1} \frac{\left| \sum_0^N \alpha_\ell P_\ell \right|}{1 + k\mu} d\mu \leq \\ &\leq \int_{-1}^{+1} \frac{\left| \sum_0^N \alpha_m P_m(1) \right|}{1 + k\mu} d\mu + \sum_0^N |\alpha_m| \max_{\xi \in [-1, +1]} |P'_m(\xi)| \leq \\ &\leq \max_{\xi \in [-1, +1]} |P'_N(\xi)| \sum_0^N |\alpha_m|. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_0^N \alpha_n f_n = \int_{-1}^{+1} \frac{\sum (\alpha_m P_m)^2}{1 + k\mu} d\mu \geq \int_{-1}^{+1} \frac{\left( \sum_0^N \alpha_m P_m \right)^2}{2} d\mu \geq \frac{\sum \alpha_m^2}{2N + 1}.$$

Поэтому

$$\sup_{(f, \hat{k}\psi_0)=0} J_k[f] \leq \|g\|_{L_2} A(N), \quad (2.31)$$

где  $A(N)$  растет вместе с  $N$ . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_n^+(k) = \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_{n-1}^+(k) \geq \dots \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_1^+(k) \geq \frac{1}{\|g\|_{L_2} A(N)} \quad (2.32)$$

Согласно этой оценке при достаточно малых  $\lambda$  уравнение (1), действительно, допускает лишь 1 пару корней  $k(\lambda)$ , и затем, по мере увеличения  $\lambda$ , от точек  $k = \pm 1$  отделяются новые дискретные значения  $k$ .

Однако, лишь для четных индикатрис или для индикатрис, удовлетворяющих условию (2.12), можно утверждать, что с ростом  $\lambda$  корни  $k(\lambda)$  монотонно убывают по модулю, достигнув значения  $k=0$ , становятся мнимыми и даже возрастают по модулю (гипотеза Бэррайса). В задачах с иными индикатрисами, как показывает пример с  $g(\mu) = \frac{g_0}{2} + \frac{3g_1}{2}\mu$  (рис. 3) картина может быть значительно более сложной.

Для оценки  $\sup_n \lim_{k \rightarrow -1} \lambda_n^+(k)$  введем систему функций  $\psi^{(\ell)}$ :

$$\Psi^{(\ell)}(\mu) = \frac{\alpha_\ell^{(\ell)} P_\ell(\mu) + \alpha_{\ell-1}^{(\ell)} P_{\ell-1}(\mu)}{1 - \mu},$$

$$\alpha_\ell^{(\ell)} = 1, \quad \alpha_{\ell-1}^{(\ell)} = -1,$$

так, что

$$(1 - \mu, \psi^{(i)} \psi^{(j)}) = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$J[\psi^{(j)}]_{k=-1} = \frac{\sum_0^N \frac{2n+1}{2} g_n \lim_{k \rightarrow -1} [\psi_n^{(j)}]^2}{\lim_{k \rightarrow -1} (\psi_j^{(j)} - \psi_{j-1}^{(j)})}.$$

Предположим, что все  $g_n > 0$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ . Пользуясь рекуррентной формулой для полиномов Лежандра [15], легко получить соотношение

$$(1 - \mu) \sum_0^{\ell-1} (2n+1) P_n(\mu) = \ell [P_{\ell-1}(\mu) - P_\ell(\mu)].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_\ell(\mu) - P_{\ell-1}(\mu)}{1 - \mu} = - \sum_0^{\ell-1} \frac{2n+1}{\ell} P_n(\mu),$$

и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow -1} \psi_n^{(\ell)} \equiv \int_{-1}^{+1} \psi^{(j)} P_n d\mu = -\frac{2}{\ell}, \quad n=0, 1, \dots, \ell-1.$$

Но тогда

$$J[\psi^{(\ell)}]_{k=-1} = \frac{2}{\ell} \sum_0^{\ell-1} \frac{2n+1}{2} g_n \leq \frac{2}{\ell} g(1).$$

Это означает, что

$$\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_N(k) \geq \left[ \frac{2}{N} \tilde{g}(1) \right]^{-1} = \frac{N}{2\tilde{g}(1)}, \quad \tilde{g}(1) = \sum_0^{N-1} \frac{2n+1}{2} g_n \quad (2.33)$$

Если  $g_N > 0$ , а  $g_{N-1} = g_{N-2} = \dots = g_{m+1} = 0$ ,  $g_m \neq 0$ , то аналогичным образом получим

$$\lim_{k \rightarrow -1} \lambda_N(k) \geq \left[ 2 \left( \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{N} \right) \tilde{g}(1) \right]^{-1} \quad (3.34)$$

где  $\lambda_N$  наибольшее характеристическое число. В частности, при  $m=0$ , когда индикатриса двучленная, (2.34) принимает вид

$$\lambda_N \geq \frac{g_0^{-1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}}.$$

Такая оценка грубее точного значения (2.23). Однако, порядок убывания по  $N$  передан правильно.

### Литература

1. В.А.Амбарцумян. Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз.; 1942, №3, 97-103.
2. М.В.Масленников. Проблема Милна с анизотропным рассеянием. Труды МИАН, 97, 1968.
3. M.V.Maslennikov. Atomic Energy Review. 5 № 2 59-158, 1967.
4. I. Kušcer . J. Math. and Phys. 1956, 34, № 4, 256-266.
5. К.М.Сей. Elementary solutions of the Transport Equation and their Applic. Ann. Phys. 1960, 9,1-23.
6. E.H.Barreiss. A spectral Theory for the stationary Transport operator in Slab geometry. J. Math. Anal. and Applications 1966, 13, № 1, 53-92.
7. J.R.Mika. Neutron Transport with anisotropic scattering. Nucl. Sci. and Engn. 1961, 11, 4, 415-427.
8. D.H.Sattinger. The Eigenvalues of an integral Equation in anisotropic Neutron Transport Theory. J of Math and Phys. 1966, 45, 2, 188-196.
9. К.М.Сей, Р.Ф.Звейфель. Linear Transport Theory. 1967, USA.
- 10.М.Г.Кузьмина, М.В.Масленников. О зависимости асимптотических характеристик решения проблемы Милна от индикатрисы рассеяния, ЖВМиМФ, 8 № 3, 573-589.
- 11.В.С.Владимиров. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. МИАН, 1961, 61.
- 12.Д.Ф.Харазов. О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта-Шмидта, УМН, 12, в. 4, 1957, 201-207.
- 13.Ф. Рисс и С.Надь. Лекции по функциональному анализу, Москва, 1954, гл. 9.
- 14.Т.А.Гермогенова. Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса, ЖВМиМФ, 1969, 9, № 3.
- 15.Е. Гобсон. Теория сферических и эллиптических функций. ИЛ, 1952.

## **Асимптотические характеристики решения уравнения переноса в задаче о неоднородном слое**

ЖВМиМФ, 1974, Т. 14, вып. 4

*(совместно с Н.В. Коноваловым)*

УДК 517.9:533.9

### **Аннотация**

Рассматривается задача об асимптотическом описании интенсивности монохроматического излучения, отраженного и пропущенного неоднородной плоскопараллельной средой, и режима внутри такой среды. Среда предполагается состоящей из нескольких различных оптически толстых однородных слоев, в которых имеет место рассеяние и поглощение излучения.

Задачи об определении характеристик излучения, пропущенного и отраженного плоскопараллельным слоем, и радиационного режима внутри такого слоя возникают во многих проблемах физики защиты от излучений, астрофизики, атмосферной оптики и оптики моря. К настоящему времени разработан ряд численных методов интегрирования уравнения переноса и созданы программы, которые дают возможность с высокой степенью точности получить на ЭВМ его решение, определяющее все нужные характеристики поля излучения. Однако в связи со сложностью таких методов продолжает сохраняться интерес и к асимптотическим формулам, позволяющим, с одной стороны, явным образом описать зависимость решения от некоторых параметров задачи, а с другой – осмыслить и организовать численный материал, поступающий с ЭВМ. В [1] даны асимптотические формулы в задаче о плоском однородном слое большой оптической толщины, определяющие как режим внутри слоя, так и интенсивность пропущенного и отраженного излучения. Аналогичные формулы для пропущенного и отраженного излучения получены иным путем в [2]. Коэффициенты отражения и пропускания, зависящие от азимута, найдены в [3] в случае малого истинного поглощения. В [4] получены выражения для коэффициентов отражения и пропускания оптически толстых консервативно рассеивающих слоев с медленно меняющейся формой индикатрисы рассеяния. В [5] значительное место уделено выводу асимптотических формул для коэффициентов отражения и пропускания однородных плоских слоев и исследованию некоторых универсальных функций и параметров, входящих в эти формулы.

В настоящей работе на основе асимптотических формул для однородных слоев строятся подобные формулы для неоднородных слоев<sup>†</sup>.

### § 1

Пусть на плоский слой вещества конечной оптической толщины  $h$  падает внешнее излучение интенсивности  $\psi(\mu)$ . Тогда усредненная по азимуту интенсивность  $I(\tau, \mu)$  радиации на оптической глубине  $\tau$  в направлении, составляющем угол  $\theta = \arccos \mu$  с осью  $\tau$ , определяется краевой задачей

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) &= \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu', \\ -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 < \tau < h, \\ I(0, \mu) &= \psi(\mu), \quad I(h, -\mu) = 0, \quad \mu \geq 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\lambda(\tau)$  - альбеда частицы,

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi$$

есть усредненная по азимуту индикатриса рассеяния,

$$\cos \gamma = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} \cos(\varphi - \varphi').$$

Если  $x(\cos \gamma)$  представима конечной суммой полиномов Лежандра

$$x(\cos \gamma) = \sum_{\ell=0}^L \omega_{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma), \quad \omega_0 = 1, \quad (1.2)$$

то

$$p(\mu, \mu') = \sum_{\ell=0}^L \omega_{\ell} P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu').$$

Интенсивность пропущенной  $I(h, \mu)$  и отраженной  $I(0, -\mu)$  слоев оптической толщины  $h$  радиации представим в виде

---

<sup>†</sup> После того как статья была отослана в редакцию, авторам стало известно об аналогичных результатах В.В.Иванова относительно коэффициентов отражения и пропускания.



$$I(0, -\mu) \equiv \hat{R}_h \psi(\mu) = 2 \int_0^1 \mu' d\mu' \rho(h, \mu, \mu') \psi(\mu'),$$

$$I(h, \mu) \equiv \hat{T}_h \psi(\mu) = 2 \int_0^1 \mu' d\mu' \sigma(h, \mu, \mu') \psi(\mu'),$$
(1.3)

где  $\rho(h, \mu, \mu')$  и  $\sigma(h, \mu, \mu')$  - коэффициенты отражения и пропускания, а  $\hat{R}_h$  и  $\hat{T}_h$  - операторы отражения и пропускания соответственно.

Коэффициенты отражения и пропускания оптически толстого однородного слоя могут быть представлены с точностью до величин  $0(e^{-\chi\tau})$ , где  $\nu < \chi \leq 1$ , в виде [1,2]

$$\rho^{ac}(h, \mu, \mu_0) = \begin{cases} \rho^\infty(\mu, \mu_0) - \frac{u(\mu)u(\mu_0)}{1 - N^2 e^{-2\nu h}} MN e^{-2\nu h}, & \lambda < 1, \\ \rho^\infty(\mu, \mu_0) - \frac{4u(\mu)u(\mu_0)}{3[(1 - \omega_1 / 3)h + 2\delta]} & \lambda = 1, \end{cases}$$
(1.4)

$$\sigma^{ac}(h, \mu, \mu_0) = \begin{cases} \frac{u(\mu)u(\mu_0)}{1 - N^2 e^{-2\nu h}} M e^{-2\nu h}, & \lambda < 1, \\ \frac{4u(\mu)u(\mu_0)}{3[(1 - \omega_1 / 3)h + 2\delta]}, & \lambda = 1. \end{cases}$$
(1.4)

Здесь  $\rho^\infty(\mu, \mu_0)$  - коэффициент отражения полубесконечного слоя;  $u(\mu)$  - интенсивность излучения, диффузно пропущенного полубесконечной средой (закон потемнения к краю в проблеме Милна);  $\nu$  и  $i(\mu)$  - корень и собственная функция характеристического уравнения.

$$i(\mu)(1 - \nu\mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') i(\mu') d\mu';$$
(1.5)

величины

$$M = 2 \int_{-1}^1 i^2(\mu) \mu d\mu; \quad N = 2 \int_0^1 u(\mu) i(-\mu) \mu d\mu,$$

$$\delta = 2 \int_0^1 u(\mu) \mu^2 d\mu.$$

Функции  $i(\mu)$  и  $u(\mu)$  нормированы соотношениями

$$\frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 i(\mu) d\mu = 2 \int_0^1 u(\mu) i(\mu) \mu d\mu = 1.$$

Алгоритм вычисления асимптотических констант и функций при любом конечном  $L$  (см. (1.2)) описан при  $\lambda \leq 1$  в [6] и при  $\lambda = 1$  в [7]. Пусть теперь среда состоит из  $s$  оптически толстых однородных слоев, характеризуемых

значениями  $\lambda_k$ ,  $p_k(\mu, \mu')$  и  $\tau_k \gg 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ ;  $h = \sum_{k=1}^s \tau_k$ .

Обозначим через  $I_k^+(\mu)$  интенсивность излучения на  $k$ -й границе раздела

$h_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$  при  $\mu \geq 0$ , а через  $I_k^-(\mu)$  - при  $\mu \leq 0$ . Тогда из линейности

задачи и определения операторов отражения и пропускания (1.3) следуют функциональные соотношения

$$I_k^+(\mu) = \hat{T}_{1k} \psi(\mu) + \hat{R}_{k1} I_k^-(\mu), \quad (1.6)$$

$$I_k^-(\mu) = \hat{R}_{k+1,s} I_k^+(\mu), \quad (1.7)$$

$$I(0, -\mu) = \hat{R}_{1k} \psi(\mu) + \hat{T}_{k1} I_k^-(\mu), \quad (1.8)$$

$$I(h, \mu) = \hat{T}_{ks+1,s} I_k^+(\mu). \quad (1.9)$$

Здесь через  $\hat{R}_{ij}$  и  $\hat{T}_{ij}$  обозначены, соответственно, операторы отражения и пропускания (в направлении от  $i$ -го слоя к  $j$ -му) группы слоев от  $i$ -го по  $j$ -й включительно.

Из (1.6)-(1.9) следуют равенства

$$I(0, -\mu) = \{ \hat{R}_{1k} + \hat{T}_{k1} \hat{R}_{k+1,s} (1 - \hat{R}_{k1} \hat{R}_{k+1,s})^{-1} \hat{T}_{1k} \} \psi(\mu),$$

$$I(h, \mu) = \hat{T}_{k+1,s} (1 - \hat{R}_{k1} \hat{R}_{k+1,s})^{-1} \hat{T}_{1k} \psi(\mu).$$

Это означает, что операторы отражения  $\hat{R}_{1s}$  и пропускания  $\hat{T}_{1s}$  можно записать в виде

$$\hat{R}_{1s} = \hat{R}_{1k} + \hat{T}_{k1} \hat{R}_{k+1,s} (1 - \hat{R}_{k1} \hat{R}_{k+1,s})^{-1} \hat{T}_{1k}, \quad (1.10)$$

$$\hat{T}_{1s} = \hat{T}_{k+1,s} (1 - \hat{R}_{k1} \hat{R}_{k+1,s})^{-1} \hat{T}_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1. \quad (1.11)$$

Полагая в (1.10) и (1.11)  $k = 1$  и  $k = s-1$  соответственно, получим

$$\hat{R}_{1s} = \hat{R}_1 + \hat{T}_1 \hat{R}_{2s} (1 - \hat{R}_1 \hat{R}_{2s})^{-1} \hat{T}_1, \quad (1.12)$$

$$\hat{T}_{1s} = \hat{T}_s (1 - \hat{R}_1 \hat{R}_{2s})^{-1} \hat{T}_{1,s-1} = \left\{ \prod_{\ell=s}^2 \hat{T}_\ell (1 - \hat{R}_1 \hat{R}_{2\ell})^{-1} \right\} \hat{T}_1. \quad (1.13)$$

Предположим теперь, что каждый слой среды обладает большой оптической толщиной  $\tau_k \gg 1$ , достаточной для того, чтобы отражение и пропускание каждым из них происходило в асимптотическом режиме, т.е. чтобы величинами  $O(e^{-\lambda\tau})$  при определении  $\rho(\tau_k, \mu, \mu_0)$  и  $\sigma(\tau_k, \mu, \mu_0)$  можно было пренебречь и положить  $\rho(\tau_k, \mu, \mu_0) = \rho^{ac}(\tau_k, \mu, \mu_0)$ ,  $\sigma(\tau_k, \mu, \mu_0) = \sigma^{ac}(\tau_k, \mu, \mu_0)$ . Тогда для каждого  $k = 1, 2, \dots, s$

$$\hat{R}_k \approx \hat{R}_k^{ac} = \begin{cases} \hat{R}_k^\infty - \frac{N_k M_k \exp(-2\nu_k \tau_k)}{1 - N_k^2 \exp(-2\nu_k \tau_k)} u_k(\mu) \hat{u}_k, & \lambda_k < 1, \\ \hat{R}_k^\infty - \frac{4}{3[(1 - \omega_{1k}/3)\tau_k + 2\delta_k]} u_k(\mu) \hat{u}_k, & \lambda_k = 1, \end{cases}$$

$$\hat{T}_k \approx \hat{T}_k^{ac} = \begin{cases} \frac{M_k \exp(-\nu_k \tau_k)}{1 - N_k^2 \exp(-2\nu_k \tau_k)} u_k(\mu) \hat{u}_k, & \lambda_k < 1, \\ \frac{4}{3[(1 - \omega_{1k}/3)\tau_k + 2\delta_k]} u_k(\mu) \hat{u}_k, & \lambda_k = 1, \end{cases} \quad (1.14)$$

где  $\hat{u}_k f = 2 \int_0^1 u_k(\mu) f(\mu) \mu d\mu$  - граничный функционал, а  $\hat{R}_k^\infty$  - оператор отражения однородной полубесконечной среды, заполненной веществом  $k$ -го слоя.

Воспользовавшись выражениями (1.14), по формулам (1.12), (1.13) найдем операторы  $\hat{R}_{1s}^{ac}$  и  $\hat{T}_{1s}^{ac}$ , которые можно положить равными  $\hat{R}_{1s}$  и  $\hat{T}_{1s}$  соответственно:

$$\hat{R}_{1s} \approx \hat{R}_{1s}^{ac} = \hat{R}_1^\infty - a_{1s} u_1(\mu) \hat{u}_1, \quad (1.15)$$

$$\hat{T}_{1s} \approx \hat{T}_{1s}^{ac} = b_{1s} u_s(\mu) \hat{u}_1. \quad (1.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
a_{1s} &= a_1 - b_1^2 \hat{u}_1 [\hat{R}_{2s}^{ac} (1 - \hat{R}_1^{ac} \hat{R}_{2s}^{ac})^{-1} u_1], \\
b_{1s} &= b_s b_1 \hat{u}_s \left\{ \left[ \prod_{\ell=s-1}^2 \hat{T}_\ell^{ac} (1 - \hat{R}_1^{ac} \hat{R}_{2\ell}^{ac})^{-1} \right] u_1 \right\}, \\
a_k &= \begin{cases} N_k \exp(-\nu_k \tau_k) b_k = \frac{N_k M_k \exp(-\nu_k \tau_k)}{1 - N_k^2 \exp(-2\nu_k \tau_k)}, & \lambda_k < 1, \\ b_k = \frac{4}{3[(1 - \omega_{1k} / 3)\tau_k + 2\delta_k]}, & \lambda_k = 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Константы  $a_{1s}$  и  $b_{1s}$  определяемые (1.17), как легко видеть, не зависят от  $\mu$  и от условий на внешней границе.

Следует отметить, что выражения (1.15), (1.16) отвечают следующему физическому факту: угловые распределения излучения, отраженного и пропущенного оптически толстой многослойной средой, определяются свойствами первого и последнего слоев соответственно.

Из выражения для константы  $b_{1s}$  следует также, что в случае  $\lambda_k < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ ,

$$b_{1s} \sim \prod_{k=1}^s \frac{M_k \exp(-\nu_k \tau_k)}{1 - N_k^2 \exp(-2\nu_k \tau_k)}.$$

## §2

Введем функции

$$f_{k\ell}^+(\mu) = u_k(\mu) + \hat{R}_k^\infty \hat{R}_\ell^\infty f_{k\ell}^+(\mu), \quad \mu > 0, \tag{2.1}$$

$$f_{k\ell}^-(\mu) = \hat{R}_\ell^\infty f_{k\ell}^+(\mu), \quad \mu > 0,$$

$$f_{k\ell}(\mu) = \begin{cases} f_{k\ell}^-(-\mu), & \mu < 0, \\ f_{k\ell}^+(\mu), & \mu > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Так как  $u_k(\mu)$  описывает излучение, диффузно пропущенное полубесконечным  $k$ -м слоем, то подобно (1.6), (1.7), из уравнения (2.1) и (2.2) видно, что  $f_{k\ell}(\mu)$  представляет собой (определенным образом нормированное) угловое распределение излучения на границе двух

полубесконечных слоев при условии, что в первом слое  $\lambda = \lambda_k$ ,  $p(\mu, \mu') = p_k(\mu, \mu')$ , во втором  $\lambda = \lambda_\ell$ ,  $p(\mu, \mu') = p_\ell(\mu, \mu')$  и внешнее излучение приходит из глубины  $k$ -го слоя.

Функция  $f_{k\ell}(\mu)$  имеет разрыв I рода при  $\mu = 0$ . Действительно, из уравнения переноса (1.1) следует, что на границе двух сред

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} I_k(\tau_{rp}, \mu) [\lim_{\mu \rightarrow -0} I_k(\tau_{rp}, \mu)]^{-1} = \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} f_{k\ell}^+(\mu) [\lim_{\mu \rightarrow 0} I_{k\ell}^-(\mu)]^{-1} = \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell}.$$

Для определения нормировки  $f_{k\ell}(\mu)$  умножим (2.1) на  $\mu i_k(\mu)$  и проинтегрируем по  $\mu$  в пределах от 0 до 1. Используя далее соотношения [5]

$$i_k(-\mu) = 2 \int_0^1 \rho_k^\infty(\mu, \mu') i_k(\mu') \mu' d\mu',$$

$$2 \int_0^1 u_k(\mu) i_k(\mu) \mu d\mu = 1,$$

а также (2.2), получим

$$2 \int_{-1}^1 f_{kl}(\mu) i_k(\mu) \mu d\mu = 1.$$

Представим решение уравнения (2.1) рядом Неймана:

$$f_{k\ell}^+(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [\hat{R}_k^\infty \hat{R}_\ell^\infty]^\ell u_k(\mu). \quad (2.3)$$

Так как

$$\hat{R}_k^\infty u(\mu) \leq \xi_k \max_{\mu \in [0,1]} u(\mu),$$

$$\xi_k = \max_{\mu \in [0,1]} 2 \int_0^1 \rho_k^\infty(\mu, \mu') \mu' d\mu',$$

то в пространстве непрерывных на  $[0,1]$  функций  $u(\mu)$  будет  $\|\hat{R}_k^\infty\| \leq \xi_k$ .

Покажем, что

$$\xi_k = 1, \text{ если } \lambda_k = 1, \quad (2.4)$$

$$\xi_k < \lambda_k, \text{ если } \lambda_k < 1. \quad (2.5)$$

Интегрируя уравнение (1.1) сначала по  $\mu$  в пределах от  $-1$  до  $1$ , а затем по  $\tau$  в пределах от  $0$  до  $\infty$ , получим

$$\int_0^1 I_k(0, \mu) \mu d\mu - \int_0^1 I_k(0, -\mu) \mu d\mu = (1 - \lambda_k) \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 I_k(\tau, \mu) d\mu.$$

С учетом (1.3) при  $\psi(\mu) = (F/2)\delta(\mu - \mu_0)$  отсюда имеем

$$1 - 2 \int_0^1 \rho_k^\infty(\mu, \mu_0) \mu d\mu = (1 - \lambda_k) \frac{2}{F\mu_0} \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 I_k(\tau, \mu) d\mu. \quad (2.6)$$

Так как  $\rho(\mu, \mu_0) = \rho(\mu_0, \mu)$ , то при  $\lambda_k = 1$  из (2.6) следует (2.4).

Если  $\lambda_k < 1$ , то представим  $I_k(\tau, \mu)$  в виде нерассеянной и рассеянной составляющих:

$$I_k(\tau, \mu) = \frac{F}{2} \delta(\mu - \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) + I_k^{\text{расс}}(\tau, \mu).$$

Тогда

$$\frac{2}{F\mu_0} \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 I_k(\tau, \mu) d\mu > \frac{2}{F\mu_0} \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 \frac{F}{2} \delta(\mu - \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) d\mu = 1.$$

Из последнего неравенства и (2.6) следует (2.5).

Согласно (2.4) и (2.5), если  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_\ell < 1$ , то  $\|\hat{R}_k^\infty \hat{R}_\ell^\infty\| \leq \xi_k \xi_\ell < 1$  и ряд (2.3) сходится равномерно на отрезке  $[0, 1]$ . Следовательно доказана

**Теорема 1.** *Если из двух сред  $k$  или  $\ell$  хотя бы одна рассеивает с поглощением, т.е.  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_\ell < 1$ , то уравнение (2.1) имеет единственное ограниченное на отрезке  $[0, 1]$  решение, которое может быть представлено сходящимся рядом Неймана (2.3).*

Выясним, как ведут себя функции  $f_{k\ell}^+(\mu)$  и  $f_{k\ell}^-(\mu)$  при  $\lambda_k$  и  $\lambda_\ell$  близких к 1. Пусть  $(1 - \lambda_k) \ll 1$  и  $(1 - \lambda_\ell) \ll 1$ . В этом случае справедливы разложения [5]

$$\begin{aligned}\rho_k^\infty(\mu, \mu_0) &= \rho_{k0}^\infty(\mu, \mu_0) - \frac{4\nu_k}{3 - \omega_{1k}} u_{k0}(\mu) u_{k0}(\mu_0) + 0(\nu_k^2), \\ u_k(\mu) &= u_{k0}(\mu) \left( 1 - \frac{3\nu_k}{3 - \omega_{1k}} \delta_k \right) + 0(\nu_k^2), \\ \nu_k &= \sqrt{(3 - \omega_{1,k})(1 - \lambda_k)} + 0(1 - \lambda_k).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Функции с индексом «0» относятся к случаю  $\lambda_k = 1$ .

Будем искать функцию  $f_{k\ell}^+(\mu)$  в виде

$$f_{k\ell}(\mu) = C \left[ 1 + \frac{\nu}{3 - \omega_1} \beta(\mu) + 0(\nu^2) \right]\tag{2.8}$$

при условии

$$\frac{\nu}{3 - \omega_1} \equiv \frac{\nu_\ell}{3 - \omega_{1\ell}} = \frac{\nu_k}{3 - \omega_{1k}} \ll 1.\tag{2.9}$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.1), легко увидеть, что  $C \sim (3 - \omega_1) / \nu$ , а следовательно, пренебрегая в полученном уравнении членами  $0(\nu)$ , имеем

$$\beta(\mu) = \frac{3 - \omega_1}{C\nu} u_{k0}(\mu) + \hat{R}_{k0}^\infty \hat{R}_{\ell 0}^\infty \beta(\mu) - 4[u_{k0}(\mu) + \hat{R}_{k0}^\infty u_{\ell 0}(\mu)].\tag{2.10}$$

При выводе этого уравнения использовались равенства

$$2 \int_0^1 u_{k0}(\mu) \mu d\mu = 2 \int_0^1 \rho_{k0}^\infty(\mu, \mu') \mu' d\mu' = 1.$$

Из условия разрешимости уравнения (2.10) следует  $C = (3 - \omega_1) / 8\nu$ . Непосредственной подстановкой в (2.10) убеждаемся, что  $\beta(\mu) = 3\mu$ . Следовательно, для  $f_{k\ell}^+(\mu)$  при условии (2.9) справедливо разложение

$$f_{k\ell}^+(\mu) = \frac{3 - \omega_1}{8\nu} \left[ 1 + \frac{3\nu}{3 - \omega_1} \mu + 0(\nu^2) \right].\tag{2.11}$$

В силу теоремы 1 это разложение единственно.

Подставляя (2.11) в (2.2), с учетом (2.7) находим

$$f_{k\ell}^-(\mu) = \frac{3 - \omega_1}{8\nu} \left[ 1 - \frac{3\nu}{3 - \omega_1} \mu + 0(\nu^2) \right]\tag{2.12}$$

*Замечание.* Условие (2.9) выбрано для простоты дальнейших выкладок. Разложение, аналогичное (2.11), (2.12), можно получить и при произвольных  $v_k$  и  $v_\ell$ :

$$f_{k\ell}^+(\mu) = \frac{1}{4v_k / (3 - \omega_{1k}) + 4v_\ell / (3 - \omega_{1\ell})} \left\{ 1 + \frac{3v_\ell}{3 - \omega_{1\ell}} \mu + 0(v^2) \right\},$$

$$f_{k\ell}^-(\mu) = \frac{1}{4v_k / (3 - \omega_{1k}) + 4v_\ell / (3 - \omega_{1\ell})} \left\{ 1 - \frac{3v_\ell}{3 - \omega_{1\ell}} \mu + 0(v^2) \right\}.$$

Из соотношения (2.11) видно, что в случае  $\lambda_k \rightarrow 1$  и  $\lambda_\ell \rightarrow 1$  решение уравнения (2.1) неограниченно возрастает.

Определим «константы связи» слоев  $k$  и  $\ell$  соотношениями

$$\alpha_{k\ell}^+ = \hat{u}_\ell f_{k\ell}^+, \quad \alpha_{k\ell}^- = \hat{u}_k f_{k\ell}^- = \hat{u}_k \hat{R}_\ell^\infty f_{k\ell}^+. \quad (2.13)$$

Если уравнение (2.1) умножить на  $2\mu f_{\ell k}^+(\mu)$  и проинтегрировать по  $\mu$  в пределах от 0 до 1, то получим равенство  $\alpha_{k\ell}^+ = \alpha_{\ell k}^+$ .

При  $\lambda_k \rightarrow 1$  и  $\lambda_\ell \rightarrow 1$  на основании (2.11), (2.12) и (2.7) имеем

$$\alpha_{k\ell}^+ = \frac{3 - \omega_1}{8\nu} + 0(\nu), \quad (2.14)$$

$$\alpha_{k\ell}^- = \frac{3 - \omega_1}{8\nu} - \frac{3}{4} \delta_k + 0(\nu). \quad (2.15)$$

В заключение параграфа приведем решение уравнения (2.1) в частном случае двух изотропно рассеивающих полупространств. Так как для изотропно рассеивающей среды

$$\rho^\infty(\mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{H(\mu)H(\mu_0)}{\mu + \mu_0}, \quad u(\mu) = \left( \frac{\lambda \nu N}{2M} \right)^{1/2} \frac{H(\mu)}{1 - \nu\mu}, \quad i(\mu) = \frac{1}{1 - \nu\mu},$$

где  $H(\mu)$  - функция Чандрасекара, то уравнение (2.1) приводится к виду

$$f_{12}^+(\mu) = \frac{\sqrt{(\lambda_1 \nu_1 N_1 / 2M_1)}}{1 - \nu_1 \mu} H_1(\mu) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{H_1(\mu)H_1(\mu')H_2(\mu')H_2(\mu'')}{(\mu + \mu')(\mu' + \mu'')} f_{12}^+(\mu'') \mu' \mu'' d\mu' d\mu''. \quad (2.16)$$



Ищем функцию  $f_{12}^+(\mu)$  в виде  $f_{12}^+(\mu) = AH_1(\mu) / (1 - \nu_1 \mu)H_2(\mu)$ . Подставив это выражение в уравнение (2.16), получим

$$\frac{A}{(1 - \nu_1 \mu)H_2(\mu)} = \frac{\sqrt{(\lambda_1 \nu_1 N_1 / 2M_1)}}{1 - \nu_1 \mu} + \frac{A\lambda_2}{4} \int_0^1 \frac{H_2(\mu)}{\mu + \mu'} \times \left[ 2 \int_0^1 \frac{\lambda_1}{4} \frac{H_1(\mu')H_1(\mu'')\mu'' d\mu''}{(\mu' + \mu'')(1 - \nu_1 \mu'')} \right] \mu' d\mu'. \quad (2.17)$$

Учитывая, что  $i(-\mu) = \hat{R}^\infty i(\mu)$ , т.е.

$$2 \int_0^1 \frac{\lambda_1}{4} \frac{H_1(\mu')H_1(\mu'')}{(\mu' + \mu'')(1 - \nu_1 \mu'')} \mu'' d\mu'' = \frac{1}{1 + \nu_1 \mu'},$$

из (2.17) имеем

$$\frac{A}{(1 - \nu_1 \mu)H_2(\mu)} = \frac{\sqrt{(\lambda_1 \nu_1 N_1 / 2M_1)}}{1 - \nu_1 \mu} + \frac{A\lambda_2}{4} \int_0^1 \frac{H_2(\mu')\mu' d\mu'}{(\mu + \mu')(1 + \nu_1 \mu')}.$$

Из последнего соотношения с помощью уравнения для  $H$  - функции [8]

$$1/H_2(\mu) = \sqrt{(1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2}{2} \int_0^1 \frac{H_2(\mu')}{\mu + \mu'} \mu' d\mu'.$$

легко вычисляется константа

$$A = \left( \frac{\lambda_1 \nu_1 N_1}{2M_1} \right)^{1/2} H_2 \left( \frac{1}{\nu_1} \right).$$

Следовательно,

$$f_{12}^+(\mu) = \left( \frac{\lambda_1 \nu_1 N_1}{2M_1} \right)^{1/2} H_2 \left( \frac{1}{\nu_1} \right) \frac{H_1(\mu)}{(1 - \nu_1 \mu)H_2(\mu)}. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.2), после простых преобразований получим

$$f_{12}^-(\mu) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{\lambda_1 \nu_1 N_1}{2M_1} \right)^{1/2} H_2 \left( \frac{1}{\nu_1} \right) \frac{H_2(\mu)}{(1 + \nu_1 \mu)H_1(\mu)}. \quad (2.19)$$

Выражения (2.18) и (2.19) с точностью до постоянного множителя совпадают с полученными в задаче о двух соприкасающихся полупространствах [9].

Константы связи  $\alpha_{12}^+$  и  $\alpha_{12}^-$  легко получить, если соотношения (2.18) и (2.19) подставить в (2.13):

$$\alpha_{12}^+ = \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2 \nu_1 \nu_2 N_1 N_2}{M_1 M_2} \right)^{1/2} H_2 \left( \frac{1}{\nu_1} \right) \int_0^1 \frac{H_1(\mu) \mu d\mu}{(1-\nu_1 \mu)(1-\nu_2 \mu)},$$

$$\alpha_{12}^- = \frac{\lambda_2 \nu_1 N_1}{M_1} H_2 \left( \frac{1}{\nu_1} \right) \int_0^1 \frac{H_2(\mu) \mu d\mu}{(1-\nu_1^2 \mu^2)}.$$

### §3

Соотношения (1.6), (1.7), (1.15) и (1.16) позволяют интенсивность излучения на  $k$ -ой границе многослойной среды, состоящей из оптически толстых слоев, выразить через характеристики излучения на границе двух соприкасающихся полупространств.

**Теорема 2.** *Интенсивность излучения на  $k$ -й границе многослойной среды, состоящей из оптически толстых слоев, определяется из выражений:*

а) при  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_{k+1} < 1$

$$I_k^\pm(\mu) = \frac{b_{1k} \hat{u}_1[\psi]}{(1 + a_{k1} \gamma_{ks})} \left[ f_{k,k+1}^\pm(\mu) - \frac{\alpha_{k,k+1}^- - \gamma_{ks}}{\alpha_{k+1,k}^+} f_{k+1,k}^\mp(\mu) \right], \quad \mu > 0; \quad (3.1)$$

б) при  $\lambda_k = \lambda_{k+1} = 1$

$$I_k^\pm(\mu) = \frac{b_{1k} \hat{u}_1[\psi] [1/a_{k+1,s} + 3/4(\pm\mu - \delta_{k+1})]}{a_{k1} [1/a_{k1} + 1/a_{k+1,s} - 3/4(\delta_k + \delta_{k+1})]}, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (3.2)$$

где константы  $a_{kl}, b_{kl}, \alpha_{kl}^+, \alpha_{kl}^-$  и  $\gamma_{ks}$  не зависят от  $\mu$  и от условий на внешней границе.

**Доказательство.** Из соотношений (1.6) и (1.7) с учетом (1.15), (1.16) следует уравнение

$$I_k^+(\mu) = \hat{u}_1[\psi] b_{1k} u_k(\mu) + (\hat{R}_k^\infty - a_{k1} u_k(\mu) \hat{u}_k) \hat{R}_{k+1,s}^{ac} I_k^+(\mu). \quad (3.3)$$

Будем искать  $I_k^+(\mu)$  в виде

$$I_k^+(\mu) = \hat{u}_1[\psi] b_{1k} g_k(\mu), \quad (3.4)$$

где  $g_k(\mu)$  - пока неизвестная функция.

Подставляя (3.4) в (3.3), найдем уравнение, которому удовлетворяет  $g_k(\mu)$

:

$$g_k(\mu) = (1 - a_{k1}\tilde{\gamma}_{ks})u_k(\mu) + \hat{R}_k^\infty \hat{R}_{k+1,s}^{ac} g_k(\mu). \quad (3.5)$$

Здесь

$$\tilde{\gamma}_{ks} = \hat{u}_k \hat{R}_{k+1,s}^{ac} g_k \quad (3.6)$$

и не зависит от  $\mu$ . Если далее положить

$$g_k(\mu) = (1 - a_{k1}\tilde{\gamma}_{ks})\Delta_k(\mu), \quad (3.7)$$

то из (3.5) с учетом (1.15) получим уравнение

$$\Delta_k(\mu) = u_k(\mu) + \hat{R}_k^\infty \hat{R}_{k+1}^\infty \Delta_k^-(\mu) - a_{k+1,s}(\hat{u}_{k+1}\Delta_k) \hat{R}_k^\infty u_{k+1}(\mu). \quad (3.8)$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$(1 - a_{k1}\tilde{\gamma}_{ks}) = (1 + a_{k1}\tilde{\gamma}_{ks})^{-1}, \quad (3.9)$$

где константа

$$\gamma_{ks} = \hat{u}_k \hat{R}_{k+1,s}^{ac} \Delta_k \quad (3.10)$$

не зависит от  $\mu$ .

Легко проверить непосредственной подстановкой в (3.8), что при  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_{k+1} < 1$

$$\Delta_k(\mu) = f_{k,k+1}^+(\mu) - \frac{a_{k+1,s}\alpha_{k,k+1}}{1 + a_{k+1,s}\alpha_{k+1,k}^-} f_{k+1,k}^-(\mu). \quad (3.11)$$

Для определения  $\gamma_{ks}$  подставим (3.11) в (3.10). После простых преобразований с учетом (1.15), (2.1) и (2.13) получим, что при  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_{k+1} < 1$

$$\gamma_{ks} = \alpha_{k,k+1}^- - \frac{\alpha_{k,k+1}^\pm \alpha_{k+1,k}^+ a_{k+1,s}}{1 + \alpha_{k+1,k}^- a_{k+1,s}}. \quad (3.12)$$

Используя последнее равенство, соотношение (3.11) можно преобразовать к виду

$$\Delta_k(\mu) = f_{k,k+1}^+(\mu) - \frac{\alpha_{k,k+1}^- - \gamma_{ks}}{\alpha_{k+1,k}^+} f_{k+1,k}^-(\mu). \quad (3.13)$$

Объединив соотношения (3.4), (3.7), (3.9) и (3.13), получим искомое выражение для  $I_k^+(\mu)$  при  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_{k+1} < 1$ .

Если  $k$ -й- и  $k+1$ -й слой рассеивают консервативно, то соответствующее выражение для интенсивности  $I_k^+(\mu)$  может быть найдено предельным переходом при  $\lambda_k \rightarrow 1$  и  $\lambda_{k+1} \rightarrow 1$  согласно условию (2.9).

Действительно, полагая  $(1 - \lambda_k) \ll 1$  и  $(1 - \lambda_{k+1}) \ll 1$  и используя разложения (2.14), (2.15), из (3.12) легко найти, что при  $\lambda_k = \lambda_{k+1} = 1$

$$\gamma_{ks} = \frac{1}{a_{k+1,s}} - \frac{3}{4}(\delta_k + \delta_{k+1}). \quad (3.14)$$

Точно так же, совершая предельный переход в (3.13), с помощью разложений (2.11), (2.12) получим

$$\Delta_k(\mu) = \frac{1}{a_{k+1,s}} + \frac{3}{4}(\mu - \delta_{k+1}), \quad (3.15)$$

что приводит к выражению (3.2) для  $I_k^+(\mu)$ .

С помощью равенства (1.7) аналогично определяются формулы для  $I_k^-(\mu)$ .

#### § 4

Для того чтобы найти выражения для коэффициентов  $a_{1s}$  и  $b_{1s}$ , подставим в (1.3) соотношения (1.15), (1.16). Положив  $\psi(\mu) = (F/2)\delta(\mu - \mu_0)$ , получим

$$\begin{aligned} \rho_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) &= \rho_1^\infty(\mu, \mu_0) - a_{1s}u_1(\mu)u_1(\mu_0), \\ \sigma_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) &= b_{1s}u_s(\mu)u_1(\mu_0). \end{aligned} \quad (4.1)$$

С другой стороны, коэффициенты отражения и пропускания можно определить из выражений (1.8) и (1.9). Согласно (1.15), (1.16), соотношение (1.8) при  $\psi(\mu) = (F/2)\delta(\mu - \mu_0)$  преобразуется к виду

$$\rho_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) = \rho_1^\infty(\mu, \mu_0) - [a_{1k}u_1(\mu_0) - b_{k1}(\hat{u}_k I_k^-)]u_1(\mu),$$

или, с учетом (3.1),

$$\rho_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) = \rho_1^\infty(\mu, \mu_0) - \left( a_{1k} - \frac{b_{1k}b_{k1}\gamma_{ks}}{1 + a_{k1}\gamma_{ks}} \right) u_1(\mu)u_1(\mu_0). \quad (4.2)$$

Подставляя (1.16) и (3.1) в (1.9) и используя (3.12), аналогично при  $\psi(\mu) = (F/2)\delta(\mu - \mu_0)$  найдем

$$\sigma_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) = \frac{b_{1k} b_{k+1, s} \alpha_{k, k+1}^+}{(1 + a_{k1} \gamma_{ks})(1 + a_{k+1, s} \alpha_{k+1, k}^-)} u_s(\mu) u_1(\mu_0). \quad (4.3)$$

Из сравнения выражений (4.1)-(4.3) следуют искомые рекуррентные соотношения для определения коэффициентов  $a_{1s}$  и  $b_{1s}$  (формулы «сложения слоев») при  $\lambda_k < 1$  или  $\lambda_{k+1} < 1$ :

$$a_{1s} = a_{1k} - \frac{b_{1k} b_{k1} \gamma_{ks}}{(1 + a_{k1} \gamma_{ks})}, \quad (4.4)$$

$$b_{1s} = \frac{b_{1k} b_{k+1, s} \alpha_{k, k+1}^+}{(1 + a_{k1} \gamma_{ks})(1 + a_{k+1, s} \alpha_{k+1, k}^-)}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1.$$

Входящий сюда коэффициент  $\gamma_{ks}$  определяется по формуле (3.12).

Если  $\lambda_k = \lambda_{k+1} = 1$ , то предельный переход в (4.4) дает

$$a_{1s} = a_{1k} - \frac{b_{1k} b_{k1} \gamma_{ks}}{1 + a_{k1} \gamma_{ks}}, \quad (4.5)$$

$$b_{1s} = \frac{b_{1k} b_{k+1, s}}{a_{k+1, s} (1 + \gamma_{ks} a_{k1})}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1.$$

В этих формулах  $\gamma_{ks}$  определяется из выражения (3.14).

## § 5

Ниже приводится несколько примеров использования формул, полученных в предыдущем параграфе.

*Двухслойная поглощающая среда.* Полагая в (3.12) и (4.4)  $s = 2$  и  $k = 1$ , найдем

$$a_{12} = \frac{M_1 (N_1 - \gamma_{12} M_1) \exp(-2\nu_1 \tau_1)}{1 - (N_1^2 - N_1 M_1 \gamma_{12}) \exp(-2\nu_1 \tau_1)},$$

$$b_{12} = \frac{M_1 M_2 \alpha_{12}^+ \exp[-(\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2)]}{[1 - (N_2^2 - N_2 M_2 \alpha_{21}^-) \exp(-2\nu_2 \tau_2)] [1 - (N_1^2 - N_1 M_1 \gamma_{12}) \exp(-2\nu_1 \tau_1)]},$$

$$\gamma_{1,2} = \alpha_{1,2}^- - \frac{N_2 M_2 \alpha_{12}^+ \alpha_{21}^+ \exp(-2\nu_2 \tau_2)}{1 - (N_2^2 - N_2 M_2 \alpha_{21}^-) \exp(-2\nu_2 \tau_2)}.$$

Многослойная, консервативно рассеивающая среда ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 1$ ).

Подставляя (3.14) в (4.5) и полагая  $k = s - 1$ , имеем

$$a_{1s} = a_{1,s-1} - \frac{b_{1,s-1}b_{s-1,1}[1/a_s - 3/4(\delta_{s-1} + \delta_s)]}{a_{s-1,1}[1/a_{s-1,1} + 1/a_s - 3/4(\delta_{s-1} + \delta_s)]} \quad (5.1)$$

$$b_{1s} = \frac{b_{1,s-1}b_s}{a_{s-1,1}a_s[1/a_{s-1,1} + 1/a_s - 3/4(\delta_{s-1} + \delta_s)]}$$

Согласно (1.4), при  $\lambda_k = 1$

$$a_k = b_k = \frac{4}{3[(1 - \omega_{1k}/3)\tau_k + \delta_k]}. \quad (5.2)$$

Принимая во внимание равенство (5.2), из (5.1) индукцией по  $s$  легко получить

$$a_{1s} = a_{s1} = b_{1s} = b_{s1} = 4 \left\{ 3 \left[ \sum_{k=1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_1 + \delta_s \right] \right\}^{-1}. \quad (5.3)$$

Из (1.15), (1.16) и (5.3) следует

$$\rho_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) = \rho_1^\infty(\mu, \mu_0) - 4u_1(\mu)u_1(\mu_0) \left\{ 3 \left[ \sum_{k=1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_1 + \delta_s \right] \right\}^{-1}$$

,

$$\sigma_{1s}^{ac}(h, \mu, \mu_0) = 4u_1(\mu_0)u_s(\mu) \left\{ 3 \left[ \sum_{k=1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_1 + \delta_s \right] \right\}^{-1}.$$

Аналогичные формулы в случае непрерывной неоднородности получены в [4].

Интенсивность излучения на  $k$ -й границе раздела слоев, в соответствии с (3.2) и (5.3), имеет вид

$$I_k^\pm(\mu) = \left[ \pm\mu + \sum_{i=k+1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_s \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{i=1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_1 + \delta_s \right]^{-1} \hat{u}_1 \psi. \quad (5.4)$$

Среда, первый слой которой рассеивает с поглощением, а остальные – консервативно. Полагая  $k=1$  в (3.12) и (4.4) и рассматривая консервативно рассеивающие слои как многослойную среду, для которой, согласно (5.3),

$$a_{2s} = b_{2s} = 4 \left\{ 3 \left[ \sum_{i=2}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_2 + \delta_s \right] \right\}^{-1},$$

получим

$$a_{1s} = \frac{M_1 (N_1 - M_1 \gamma_{1s}) \exp(-2\nu_1 \tau_1)}{[1 - (N_1^2 - N_1 M_1 \gamma_{1s}) \exp(-2\nu_1 \tau_1)]},$$

$$b_{1s} = 4\alpha_{12} + M_1 \exp(-\nu_1 \tau_1) \left\{ -3[1 - (N_1^2 - N_1 M_1 \gamma_{1s}) \exp(-2\nu_1 \tau_1)] \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \sum_{k=2}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_2 + \delta_s + \frac{4}{3} \alpha_{21}^- \right] \right\}^{-1},$$

где

$$\gamma_{1s} = \alpha_{12}^- - 4\alpha_{12}^+ \alpha_{21}^+ \left\{ 3 \left[ \sum_{k=2}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_2 + \delta_s + \frac{4}{3} \alpha_{21}^- \right] \right\}^{-1}.$$

Многослойная среда, в которой последний слой рассеивает с поглощением, а остальные – консервативно.

Полагая  $k=s-1$  в (3.12) и (4.4) и учитывая, что

$$a_{1,s-1} = a_{s-1,1} = b_{1,s-1} = b_{s-1,1} = 4 \left\{ 3 \left[ \sum_{i=1}^{s-1} \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_1 + \delta_{s-1} \right] \right\}^{-1},$$

найдем

$$a_{1s} = 4 \left\{ 3 \left[ \sum_{k=1}^{s-1} \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_1 + \delta_{s-1} + \frac{4}{3} \gamma_{s-1,s} \right] \right\}^{-1},$$

$$b_{1s} = 4\alpha_{s-1,s}^+ M_s \exp(-\nu_s \tau_s) \left\{ 3 \left[ \sum_{k=1}^{s-1} \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + \delta_1 + \delta_{s-1} + \frac{4}{3} \gamma_{s-1,s} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [1 - (N_s^2 - N_s M_s \alpha_{s,s-1}^-) \exp(-2\nu_s \tau_s)] \right\}^{-1},$$

где

$$\gamma_{s-1,s} = \alpha_{s-1,s}^- - \frac{M_s N_s \alpha_{s-1,s}^+ \alpha_{s,s-1}^+ \exp(-2\nu_s \tau_s)}{1 - (N_s^2 - N_s M_s \alpha_{s,s-1}^-) \exp(-2\nu_s \tau_s)}.$$

## § 6

Поле излучения внутри каждого из однородных слоев  $(h_{k-1}, h_k)$ ,  $h_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$  может быть легко найдено, если известно угловое распределение излучения  $I_k(\mu)$  на граничных поверхностях  $h_{k-1}$  и  $h_k$ . Действительно, если  $\tau$  - внутренняя точка интервала  $(h_{k-1}, h_k)$ , достаточно удаленная от граничных поверхностей, то, согласно [1], с точностью до величин порядка  $e^{-\chi\tau}$ ,  $\nu_k < \chi < 1$ , интенсивность радиации  $I_k(\tau, \mu)$  можно представить в виде

$$I_k(\tau, \mu) \approx I_k^{ac}(\tau, \mu) = \begin{cases} \frac{b_k}{M_k} \{ \hat{u}_k [I_{k-1}^+] I_{Mk}^{ac}(h_k - \tau, -\mu) + \hat{u}_k \times \\ \times [I_k^-] I_{Mk}^{ac}(\tau - h_{k-1}, \mu) \}, \lambda_k < 1, \\ \{ u_k [I_{k-1}^+] I_{Mk}^{ac}(h_k - \tau, -\mu) + u_k [I_k^-] \times \\ \times I_{Mk}^{ac}(\tau - h_{k-1}, \mu) \} [(1 - \omega_{1k} / 3) \tau_k + 2\delta_k]^{-1}, \lambda_k = 1, \end{cases} \quad (6.1)$$

где

$$I_{Mk}^{ac}(\tau, \mu) = \begin{cases} i_k(-\mu) \exp[\nu_k(\tau + x_{\lambda k})] - i_k(\mu) \exp[-\nu_k(\tau_s + x_{\lambda k})], \lambda_k < 1, \\ (1 - \omega_{ik} / 3) \tau - \mu + \delta_k, \lambda_k = 1, \end{cases}$$

есть асимптотическая часть решения проблемы Милна, а  $x_{\lambda k} = (1/2 \nu_k \ln(1/N_k))$  - экстраполированная длина  $k$ -го слоя.

Величины  $A_k = \hat{u}_k [I_k^-] / \hat{u}_1 \psi$  и  $B_k = \hat{u}_k [I_{k-1}^+] / \hat{u}_1 \psi$  легко вычисляются:



$$A_k = \begin{cases} \frac{b_{1k}\gamma_{ks}}{1+a_{k1}\gamma_{ks}}, \lambda_k < 1 \text{ или } \lambda_{k+1} < 1, \\ \frac{b_{1k}[1/a_{k+1,s} - 3/4(\delta_k + \delta_{k+1})]}{a_{k1}[1/a_{k1} + 1/a_{k+1,s} - 3/4(\delta_k + \delta_{k+1})]}, \lambda_k = \lambda_{k+1} = 1, \\ \left[ \sum_{i=k+1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i - \delta_k + \delta_s \right] \left[ \sum_{i=1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_1 + \delta_s \right]^{-1} \\ \lambda_1 = \dots \lambda_s = 1, \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} \frac{b_{1,k-1}\alpha_{k-1,k}^+}{(1+a_{k-1,1}\gamma_{k-1,s})(1+a_{ks}\alpha_{k,k-1}^-)}, \lambda_k < 1 \text{ или } \lambda_{k+1} < 1, \\ \frac{b_{1,k-1}}{a_{ks}a_{k-1,1}[1/a_{k-1,1} + 1/a_{ks} - 3/4(\delta_{k-1} + \delta_k)]}, \lambda_{k-1} = \lambda_k = 1, \\ \left[ \sum_{i=k}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_k + \delta_s \right] \left[ \sum_{i=1}^s \left( 1 - \frac{\omega_{1i}}{3} \right) \tau_i + \delta_1 + \delta_s \right]^{-1}, \\ \lambda_1 = \dots \lambda_s = 1, \end{cases}$$

Тогда окончательно

$$I_k^{ac}(\tau, \mu) = \begin{cases} \frac{b_k}{M_k} \{ \tilde{B}_k [i_k(\mu) \exp[v_k(h_k - \tau)] - \\ - N_k i_k(-\mu) \exp[-v_k(h_k - \tau)] \} + \\ + \tilde{A}_k [i_k(-\mu) \exp[v_k(\tau - h_{k-1})] - \\ - N_k i_k(\mu) \exp[-v_k(\tau - h_{k-1})]] \} \hat{u}_1 \psi, \quad \lambda_k < 1, \\ \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) \tau_k + 2\delta_k \right]^{-1} \left\{ \tilde{B}_k \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) (h_k - \tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu + \delta_k \right] + \tilde{A}_k \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{1k}}{3} \right) (\tau - h_{k-1}) - \mu + \delta_k \right] \right\} \hat{u}_1 \psi, \quad \lambda_k = 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Здесь

$$\tilde{A}_k = \begin{cases} A_k, & k = 1, 2, \dots, s-1, \\ 0, & k = s, \end{cases} \quad \tilde{B}_k = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ B_k, & k = 2, 3, \dots, s. \end{cases}$$

Заметим, что при  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 1$  выражение (6.2) при  $\tau = h_k$  совпадает с (5.4).

Формулы (6.2) справедливы при любой анизотропии рассеяния и позволяют вычислять все угловые моменты интенсивности излучения.

Легко видеть, что в случае  $\lambda < 1$  плотность излучения

$$n^{ac}(\tau) = 2 \int_{-1}^1 I^{ac}(\tau, \mu) d\mu$$

удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{d^2 n^{ac}(\tau)}{d\tau^2} = \nu^2 n^{ac}(\tau).$$

Это означает, что если в качестве  $\nu$  взять асимптотическое значение, то диффузионное уравнение при соответствующих условиях на границах слоев правильно описывает ход плотности излучения с глубиной вдали от границ слоя при больших оптических толщинах  $\tau_k$  независимо от степени анизотропии рассеяния. Сказанное справедливо для любого углового момента интенсивности излучения

$$J_k(\tau) = 2 \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) P_k(\mu) d\mu.$$

Рассмотрение двухслойной задачи позволяет получить «эффективные» граничные условия для уравнения диффузии. Ниже приводятся выражения для величины скачка  $k$ -го момента интенсивности излучения  $J_k(\tau)$  и его производной по  $\tau$  на границе раздела слоев 1 и 2, рассеивающих с поглощением:

$$\begin{aligned} \frac{J_{2k}^+(\tau_1)}{J_{1k}^+(\tau_1)} &= \frac{\lambda_1 M_1 \varepsilon_{2k}(1/\nu_2) \alpha_{12}^+}{\lambda_2 \varepsilon_{1k}(1/\nu_1) [1 - (-1)^k (N_1 - M_1 \alpha_{12}^-)]}, \\ \frac{(J_{2k}^+)'}{(J_{1k}^+)'}(\tau_1) &= \frac{\lambda_1 \nu_2 M_1 \varepsilon_{2k}(1/\nu_2) \alpha_{12}^+}{\lambda_2 \nu_1 \varepsilon_{1k}(1/\nu_1) [1 + (-1)^k (N_1 - M_1 \alpha_{12}^-)]}, \\ \frac{J_{2k}^-(\tau_1)}{J_{1k}^-(\tau_1)} &= \frac{\lambda_1 \varepsilon_{2k}(1/\nu_2) [1 - (-1)^k (N_2 - M_2 \alpha_{21}^-)]}{\lambda_2 M_2 \varepsilon_{1k}(1/\nu_1) \alpha_{21}^+}, \\ \frac{(J_{2k}^-)'}{(J_{1k}^-)'}(\tau_1) &= \frac{\lambda_1 \nu_2 \varepsilon_{2k}(1/\nu_2) [1 + (-1)^k (N_2 - M_2 \alpha_{21}^-)]}{\lambda_2 \nu_1 M_2 \varepsilon_{1k}(1/\nu_1) \alpha_{21}^+}. \end{aligned}$$

Здесь символ «+» означает, что внешнее излучение падает со стороны слоя 1, а «-» - со стороны слоя 2;

$$k \varepsilon_{ik}(1/\nu_i) = (2k - 1 - \lambda_i \omega_{i,k-1}) \varepsilon_{i,k-1}(1/\nu_i) / \nu_i - (k - 1) \varepsilon_{i,k-2}(1/\nu_i),$$

$$\varepsilon_{i0}(1/\nu_i) = 1, \quad \varepsilon_{i1}(1/\nu_i) = (1 - \lambda_i) / \nu_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти граничные условия определяются только рассеивающими и поглощающими свойствами соприкасающихся слоев и не зависят от условий на внешней границе. Однако они зависят от того, с какой стороны падает на среду внешнее излучение, и, как показывают численные расчеты, это различие тем больше, чем сильнее различаются слои по своим поглощающим и рассеивающим свойствам. Отсюда следует, что в общем случае для уравнения диффузии нельзя поставить условий на границе раздела слоев, не зависящих от их толщины.

Аналогично определяются «эффективные» условия для плотности излучения  $n(\tau)$  и ее производной по  $\tau$  на границе консервативно рассеивающих слоев:

$$\frac{n_2^+(\tau_1)}{n_1^+(\tau_1)} = \frac{n_2^-(\tau_1)}{n_1^-(\tau_1)} = 1, \quad \frac{(n_2^+)'}{(n_1^+)'}(\tau_1) = \frac{(n_2^-)'}{(n_1^-)'}(\tau_1) = \frac{3 - \omega_{12}}{3 - \omega_{11}}.$$

Если один из слоев рассеивает консервативно, а второй – с поглощением, то «эффективные» условия на границе их раздела оказываются зависящими от толщин этих слоев.

### § 7

Воспользовавшись методом Кейса, можно оценить относительную точность асимптотических формул для потоков отраженной

$$F_{omp}(h) = 2 \int_0^1 I(0, -\mu) \mu d\mu$$

и пропущенной

$$F(h) = 2 \int_0^1 I(h, \mu) \mu d\mu$$

однородным слоем вещества толщины  $h$  радиации:

а) если существует второй корень характеристического уравнения (1.5)

$\nu < \nu_1 < 1$ , то

$$\frac{\Delta F_{omp}(h)}{F_{omp}(h)} \sim \exp[-(\nu_1 + \nu)h], \quad (7.1)$$

$$\frac{\Delta F(h)}{F(h)} \sim \frac{[1 - N^2 e^{-2\nu h}]}{M} \exp[-(\nu_1 - \nu)h];$$

б) если корень характеристического уравнения (1.5) единственный, то

$$\frac{\Delta F_{omp}(h)}{F_{omp}(h)} \sim e^{-(1+\nu)h}, \quad \frac{\Delta F(h)}{F(h)} \sim \frac{[1 - N^2 e^{-2\nu h}]}{M} e^{-(1-\nu)h}. \quad (7.2)$$

Для иллюстрации точности асимптотических формул и зависимости ее от различных параметров, характеризующих поглощающие и рассеивающие свойства среды, был проведен ряд расчетов по программе РОЗ-0 [10], которые были затем сопоставлены с соответствующими расчетами по асимптотическим формулам.

В табл. 1 представлены значения потоков радиации, прошедшей двухслойные среды различных толщин  $h$ , рассчитанных по программе РОЗ-0  $F(h)$  и по асимптотическим формулам  $F^{ac}(h)$ , в двух случаях.

Таблица 1

Случай	$h$	$F(h)$	$F^{ac}(h)$
I	4	0.360	0.381
	10	0.188	0.189
II	4	0.133	0.143
	6	0.0583	0.0596
	10	0.00981	0.00982

Таблица 2

$\lambda$	$F_{omp}(h)$	$F_{omp}^{ac}(h)$
1.00	0,508	0.529
0.95	0.3529	0.3532
0.80	0.1584	0.1583

*Случай I.* Первый слой рассеивает согласно индикатрисе Хенни-Гринштейна

$$x(\gamma) = (1 - g^2)(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{-3/2}$$

с  $g = 0.5$ , а второй – изотропно ( $g = 0$ ), причем  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

*Случай II.* Оба слоя среды рассеивают изотропно и  $\lambda_1 = 0.95$ ,  $\lambda_2 = 0.9$ .

В обоих случаях внешнее излучение падает плоскопараллельным пучком нормально к поверхности среды и  $\tau_1 = \tau_2 = h/2$ .

Кривые на фигуре (сплошные – для  $g = 0$ , штриховые – для  $g = 0.5$ ) показывают, при каких значениях параметра  $\lambda$ , оптической толщины  $h$  и параметра, характеризующего анизотропию рассеяния  $g$  (индикатриса Хенни-Гринштейна), прошедший через слой асимптотический поток достигнет заданной точности (10 или 5%).

Проведенные сравнения показывают, что при прочих равных условиях точность асимптотики в пропущенном излучении растет: а) при увеличении толщины слоя, б) с увеличением анизотропии рассеяния, в) с уменьшением доли истинного поглощения. Что касается п.п. б) и в), то в отраженном излучении наблюдается обратная картина, т. е. точность асимптотики падает<sup>‡</sup>.

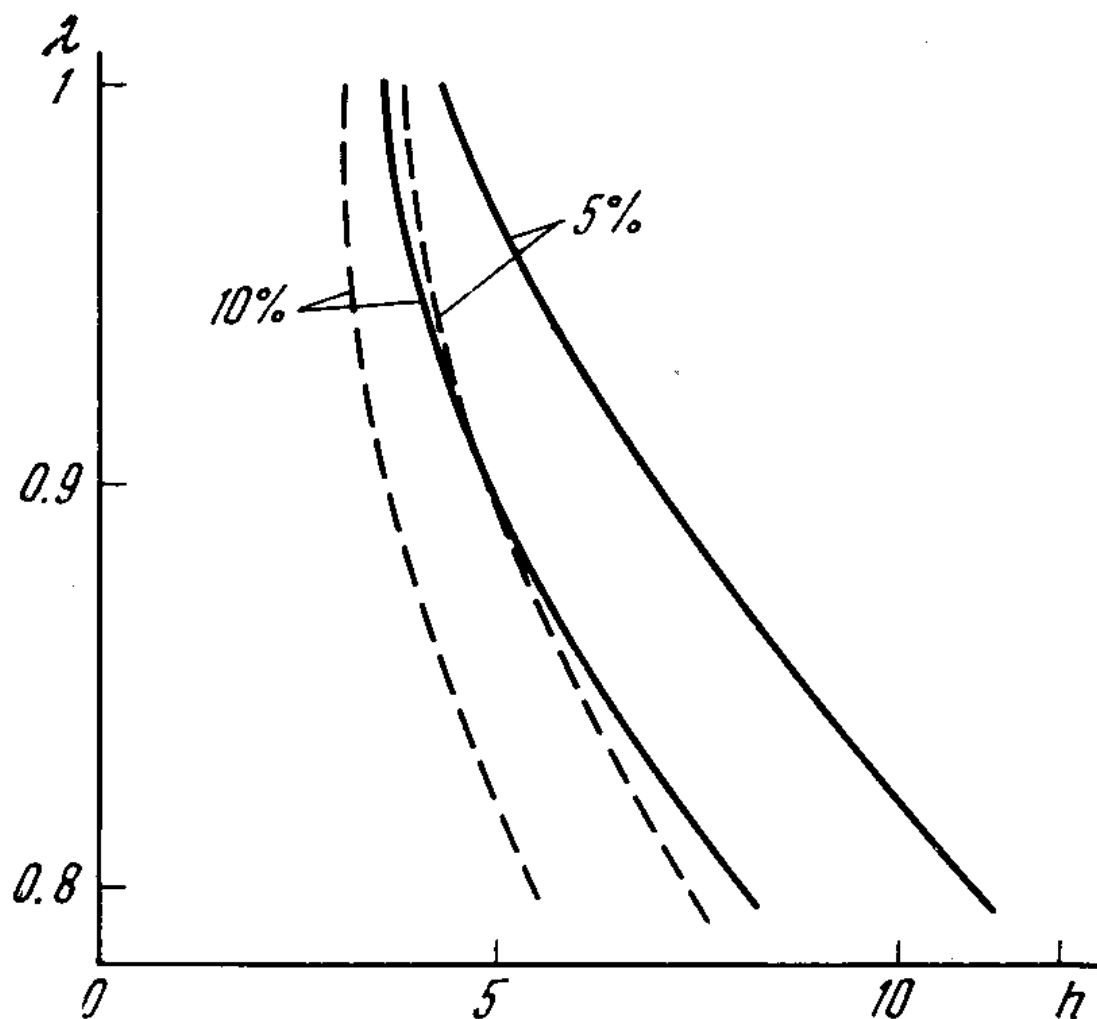
В таблице 2 сравниваются потоки радиации  $F_{omp}(h)$  и  $F_{omp}^{ac}(h)$ , отраженные слоем вещества ( $g = 0.5$ ) толщины  $h = 4$ , при различных значениях параметра  $\lambda$  и нормальном падении внешнего излучения.

Это сравнение показывает, что в отраженном излучении асимптотический режим достигается значительно быстрее, чем в пропущенном.

---

<sup>‡</sup> Эти выводы справедливы для не очень анизотропных индикатрис рассеяния, когда либо  $V_1$  отсутствует, либо  $V_1 \leq 1$ . В данном численном эксперименте набор значений параметра  $g$  удовлетворял этому требованию.

Эти закономерности в установлении асимптотического режима подтверждаются также формулами (7.1), (7.2).



О точности расчетов по асимптотическим формулам для дифференциальных характеристик поля излучения (интенсивности отраженной и пропущенной слоями радиации) можно судить по данным, приведенным в [6].

Пользуемся случаем выразить благодарность В.В. Иванову за полезное обсуждение.

*Поступила в редакцию 03.03.1973*

### Цитированная литература

1. *Т.А. Гермогенова.* О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, №6, 1001-1019.
2. *В.В. Соболев.* Диффузия излучения в среде большой оптической толщины при неанізотропном рассеянии. Докл. АН СССР, 1968, 179, №1, 41-44.
3. *Г.В. Розенберг.* Световые характеристики толстых слоев рассеивающей среды с малым удельным поглощением. Докл. АН СССР, 1962, 145, № 4, 775-777.
4. *Э.Г. Яновицкий.* Анизотропное рассеяние света в неоднородной атмосфере. I. Астрон. ж., 1971, 48, №2, 323-332.
5. *В.В. Соболев.* Рассеяние света в атмосферах планет. М., «Наука», 1972.
6. *Н.В. Коновалов.* Асимптотические характеристики полей монохроматической радиации в задачах о неоднородном плоском слое больших оптических размеров. II. Расчет основных параметров и функций. М., препринт ИПМ, 1974, № 14.
7. *I.W. Busbridge.* Reflection and transmission of light by thick atmospheres of pure scatterers with a phase function  $1 + \sum_{n=1}^N \omega_n P_n(\cos \theta)$  Astrophys. J., 1968, 154, 729-739.
8. *С. Чандрасекар.* Перенос лучистой энергии. М., Изд-во ин. лит., 1953.
9. *Б. Дэвисон.* Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
10. *Т.А. Гермогенова, В.И. Журавлев, А.П. Суворов, В.А. Уткин.* Численные методы решения краевых задач для уравнения переноса в теории радиационной защиты реакторов. В сб. «Вопр. физ. защиты реакторов». Вып. 5. М., Атомиздат, 1972, 22-46.

## Характеристическое уравнение в задачах о переносе излучения в протяженных цилиндрических областях

ЖВМиМФ, 1989, Т. 29, №8  
(совместно с Е.Б. Павельевой)

УДК 517.958:536.71

### Аннотация

Для исследования асимптотического режима в задачах о переносе излучения в протяженных, выпуклых, однородных по высоте цилиндрических областях строится уравнение, подобное уравнению переноса в одномерной цилиндрической геометрии. Оно играет роль характеристического уравнения. На основе теории вполне непрерывных операторов исследуется спектр этого уравнения, устанавливаются свойства первого характеристического числа в зависимости от асимптотического параметра  $k \in (-1, +1)$ . Анализ этих свойств приводит к заключению о разрешимости характеристического уравнения по крайней мере в задачах с изотропным рассеянием при достаточно большом диаметре поперечного сечения области.

### Введение

Важный класс задач теории переноса излучения составляют моноэнергетические (односкоростные) задачи о глубинном режиме – об асимптотике решения уравнения переноса вдали от источников. Такие задачи для полубесконечной однородной среды (проблема Милна), а также для плоскопараллельного и сферического слоев изучались многими авторами (см., например, [1]-[6]). Установленные закономерности играют важную роль как в физических исследованиях, так и в методической отработке алгоритмов численного решения задач о переносе излучения в областях с одномерной геометрией.

В задачах с более сложными геометрическими моделями асимптотические исследования не менее важны. В ряде задач, таких, например, как прохождение нейтронов через каналы радиационной защиты реактора, асимптотические результаты способствуют прояснению физических закономерностей. С другой стороны, асимптотические соотношения в глубоких слоях необходимы как тестовые результаты для отработки численных методов решения задач о переносе излучения в двумерных и трехмерных областях больших оптических размеров.

Как экспериментальные, так и расчетные данные [7] свидетельствуют о том, что в задачах об однородных по высоте цилиндрах, облучаемых с торца, вдали от торцов устанавливается некоторое распределение излучения, а от расстояния до облучаемого торца зависит лишь амплитуда (нормировка) этого асимптотического распределения. В таких задачах, как и в проблеме Милна,



асимптотическое распределение описывается характеристическим уравнением. Хотя определение асимптотического режима требует решения краевой задачи для характеристического уравнения, размерность ее ниже, чем исходной задачи. Так, в двумерной задаче об однородном по высоте круговом цилиндре, облучаемом с торца, асимптотика решения вдали от торцов определяется решением одномерной задачи о бесконечном цилиндре, для которой развиты различные эффективные алгоритмы [8]. Аналогичная трехмерная задача для цилиндра произвольного сечения сводится к соответствующей двумерной задаче для бесконечного цилиндра.

В настоящей работе характеристическое уравнение формулируется (§1) для цилиндрических областей с выпуклым поперечным сечением при постоянном полном сечении взаимодействия излучения с веществом и отличном от 0 сечении рассеяния вида  $\sigma_s(\mathbf{r}_\perp, \chi) = \sigma_s(\mathbf{r}_\perp)g(\chi)$ , где  $\mathbf{r}_\perp$  - проекция  $\mathbf{r}$  на плоскость, ортогональную оси цилиндрической области,  $\chi$  - косинус угла рассеяния, а  $\sigma_s(\mathbf{r}_\perp)$  и  $g(\chi)$  удовлетворяют требованиям

$$0 < \sigma_{s \min} \leq \sigma_s(\mathbf{r}_\perp) \leq \sigma_{s \max} \leq 1, \quad g(\chi) \geq g_{\min} > 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{+1} g(\chi) d\chi = 1.$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением переноса для бесконечного однородного по высоте цилиндра. Однако в коэффициенте, отвечающем полному сечению взаимодействия излучения с веществом, появляется зависимость от угловой переменной и асимптотического параметра  $k$ .

В §2 устанавливаются свойства основных операторов задачи. В §3 исследуется спектр характеристического уравнения при  $\lambda = 1$ . Показано, что точечный спектр может существовать лишь при таких  $k$ , для которых  $|\operatorname{Re} k| \leq 1$ . Но именно область  $\operatorname{Re} k \in (-1, +1)$  представляет в первую очередь интерес для асимптотических исследований, поскольку слагаемые, убывающие как  $e^{-z/\gamma}$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  (нерассеянное излучение) при  $z \gg 1$  обязательно присутствуют в решении, определяя неасимптотическую часть. В §4 рассматриваются свойства первого характеристического числа  $\lambda_1(k)$  при  $k \in (-1, +1)$ . Здесь полное исследование удастся провести только для задач с изотропным рассеянием. В §4 доказано, что для задач с изотропным рассеянием при достаточно большом диаметре поперечного сечения заданной цилиндрической области характеристическое уравнение при  $\lambda = 1$  имеет единственное положительное решение  $k_0 \in (0, 1)$ ,  $\Phi_{k_0} > 0$ . Показано, что это

уравнение неразрешимо в полосе  $0 \leq \text{Re } k \leq k_0$  с исключенной точкой  $k = k_0$ . Отсюда следует, что в задачах с изотропным рассеянием, определяя первое характеристическое число при различных  $k \in (0,1)$ , можно подобрать  $k_0$  и найти распределение  $\Phi_{k_0}$ , определяющее асимптотический режим.

### §1. Характеристическое уравнение для цилиндрической области

В качестве исходной примем краевую задачу для моноэнергетического уравнения переноса.

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \sigma(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \hat{S} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad \mathbf{r} \in G, \quad \mathbf{\Omega} \in P, \quad (1.1)$$

в ограниченном цилиндре  $G$  высоты  $H$  с выпуклым поперечным сечением  $G_{\perp} \in \mathbb{R}^2$ . Через  $\hat{S}$  обозначен интегральный оператор (рассеяния)

$$\hat{S} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_P \sigma_s(\mathbf{r}, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}',$$

$P$  - единичная сфера.

Пусть направление оси  $z$  совпадает с направлением образующей цилиндра и  $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_{\perp}, z\}$ ,  $\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{\Omega}_{\perp} (1 - \gamma^2)^{1/2}, \gamma\}$ , где  $\gamma = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{\Omega})$ ,  $\mathbf{r}_{\perp}$  и  $(1 - \gamma^2)^{1/2} \mathbf{\Omega}_{\perp}$  - проекции векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{\Omega}$  на плоскость  $z = 0$ , перпендикулярную  $\mathbf{e}_z$ . Будем считать выполненными условия

$$\sigma = \text{const} \equiv 1, \quad \sigma_s(\mathbf{r}, \chi) = \sigma_s(\mathbf{r}_{\perp}, \chi) = \sigma_s(\mathbf{r}_{\perp}) g(\chi), \quad (1.2)$$

$$0 < \sigma_{s \min} \leq \sigma_s(\mathbf{r}_{\perp}) \leq \sigma_{s \max} \leq 1, \quad g(\chi) \geq g_{\min} > 0,$$

где  $g(\chi)$  - индикатриса рассеяния, нормированная условием (1). Краевые условия для уравнения (1.1) запишем в виде

$$\psi|_{z=0, \gamma>0} = \psi_0(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}), \quad \psi|_{z=H, \gamma<0} = 0, \quad (1.3a)$$

$$\psi|_{\mathbf{r}_{\perp} \in \Gamma, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0} = \hat{R}[\psi|_{\mathbf{r}_{\perp} \in \Gamma, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) > 0}], \quad (1.3b)$$

где  $\Gamma$  - боковая поверхность цилиндра, которую будем считать кусочно-гладкой,  $\mathbf{n}$  - внешняя нормаль, а  $\hat{R}$  - оператор отражения.

В задачах с вакуумными граничными условиями для выпуклой цилиндрической области  $\hat{R} = 0$ . Оператор  $\hat{R}$  отличен от нуля не только в задачах с отражением, но и при периодических краевых условиях, при условиях прострела, если цилиндрическая область не выпуклая [9].

Так же как и в случае полубесконечной среды [1], [2], будем искать решение задачи (1.1)-(1.3) при  $0 \ll z \ll H$  в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = e^{-kz} \Phi_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}_\perp, \gamma).$$

Подставляя это выражение в (1.1) и учитывая, что

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) = \gamma \partial / \partial z + (1 - \gamma^2)^{1/2} (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp),$$

получаем характеристическое уравнение для  $\Phi_k$ :

$$(1 - \gamma^2)^{1/2} (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp) \Phi_k + (1 - k\gamma) \Phi_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \hat{S} \Phi_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}). \quad (1.4)$$

Краевые условия для него имеют вид

$$\Phi_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) \Big|_{\mathbf{r}_\perp \in \Gamma, (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \mathbf{n}) < 0} = \hat{R} \left[ \Phi_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) \Big|_{\mathbf{r}_\perp \in \Gamma, (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \mathbf{n}) > 0} \right]. \quad (1.5)$$

Эта однородная краевая задача для бесконечной цилиндрической области может иметь нетривиальные решения лишь при некоторых значениях параметра  $k$  (собственных значениях задачи).

В настоящей работе ограничимся исследованием разрешимости характеристической краевой задачи (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$ . Используются следующие функциональные пространства:

1)  $L_p = L_p(G_\perp \times P)$  - пространство функций  $\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega})$ , суммируемых с  $p$ -й степенью модуля,  $1 \leq p < \infty$ , на  $G_\perp \times P$  с нормами

$$\|\Phi\|_p = \left[ \int_{G_\perp} d\mathbf{r}_\perp \int_P |\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega})|^p d\mathbf{\Omega} \right]^{1/p},$$

$L_\infty = L_\infty(G_\perp \times P)$  - пространство измеримых, почти везде ограниченных функций с нормами

$$\|\Phi\|_\infty = \sup_{(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) \in G_\perp \times P} \text{vrai} \left| \Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) \right|;$$

2)  $H_p = H_p(G_\perp \times P)$  - пространство таких функций  $\Phi(\cdot, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega})$ , что  $(1 - \gamma^2)^{1/2} (1 - k\gamma)^{-1} (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp) \Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) + \Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) \in L_p$  (ср. [10], [11]); это пространство является полным в норме

$$\|\Phi\|_{H_p} = \left\| (1 - \gamma^2)^{1/2} (1 - k\gamma)^{-1} (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp) \Phi + \Phi \right\|_p.$$

Производная в (1.4) может быть записана в виде

$$(\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp) \Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = (\partial / \partial \xi) \Phi(\mathbf{r}_\perp + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) \Big|_{\xi=0}, \quad \xi_- < \xi < \xi_+,$$

где  $\xi_{\pm} = \xi_{\pm}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) = \pm |\mathbf{r}_{\pm} - \mathbf{r}_{\mp}|$ ,  $\mathbf{r}_{\mp}$  - точки входа в область  $G_{\perp}$  и выхода из нее проекции на плоскость  $z=0$  луча направления  $\mathbf{\Omega}$ , проходящего через точку  $\{\mathbf{r}_{\perp}, 0\}$ . Каждая функция  $\Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) \in H_p(G_{\perp} \times P)$  эквивалентна сумме

$$\Phi_{-}(\mathbf{r}_{-}, \mathbf{\Omega}) + \tilde{\Phi}(\mathbf{r}_{-} + \xi \mathbf{\Omega}_{\perp}, \mathbf{\Omega}), \quad 0 < \xi < \xi_{+} - \xi_{-}, \quad (1.6)$$

где  $\Phi_{-}$  и  $\tilde{\Phi}$  определены почти для всех точек  $\mathbf{r}_{-} \in \Gamma$  и направлений  $\mathbf{\Omega}$  таких, что  $(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_{-})) < 0$ , а по переменной  $\xi$  функция  $\tilde{\Phi}$  абсолютно непрерывна на интервалах  $(0, \xi_{+} - \xi_{-})$  и  $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}_{-}, \mathbf{\Omega}) = 0$  почти для всех точек  $(\mathbf{r}_{-}, \mathbf{\Omega}) \in \Gamma \times P$ . Указанные свойства пространства  $H_p(G_{\perp} \times P)$  следуют из рассуждений, практически повторяющих проведенные в [11] для пространства  $H_p(G \times P)$  при  $G \subset \mathbb{R}^3$ .

Подпространство функций  $\Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) \in H_p$  для которых в разложении (1.6) будет  $\Phi_{-} \equiv 0$ , обозначим через  $H_p^0$ . Определим на  $H_p^0$  оператор

$$\hat{L}_k \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) = (1 - \gamma^2)^{1/2} (1 - k\gamma)^{-1} (\mathbf{\Omega}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) + \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega})$$

и сопоставим задаче (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$  уравнение в  $H_p^0$ :

$$\hat{L}_k \Phi_k = \lambda(k) (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} \Phi_k, \quad (1.7)$$

где  $\lambda(k)$  - характеристическое число этого уравнения. При  $\lambda(k) = 1$  уравнение (1.7) эквивалентно в  $H_p^0$  задаче (1.4), (1.5) с  $\hat{R} = 0$ .

Под обобщенным решением уравнения (1.7) будем понимать по аналогии с [10], [11] функцию  $\Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) \in H_p^0(G_{\perp} \times P)$ , удовлетворяющую этому уравнению почти всюду в  $G_{\perp} \times P$ .

Отметим, что если  $k$  и  $\Phi_k(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega})$  удовлетворяют уравнению (1.7), то и  $-k, \Phi_k(\mathbf{r}_{\perp}, -\gamma, (1 - \gamma^2)^{1/2} \mathbf{\Omega}_{\perp})$  также удовлетворяют этому уравнению и

$$(1 - \gamma^2)^{1/2} (\mathbf{\Omega}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \Phi_k + [1 - k(-\gamma)] \Phi_k(\mathbf{r}_{\perp}, -\gamma, (1 - \gamma^2)^{1/2} \mathbf{\Omega}_{\perp}) = \lambda \hat{S} \Phi_k.$$

Но это означает, что уравнение (1.7) разрешимо и при  $-k$  и

$$\Phi_{-k}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) = \Phi_k(\mathbf{r}_{\perp}, -\gamma, (1 - \gamma^2)^{1/2} \mathbf{\Omega}_{\perp}).$$

## §2. Свойства операторов $\hat{L}_k^{-1}$ и $\hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}$ .

Основной результат этого параграфа – доказательство полной непрерывности операторов  $\hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}\hat{S}$  в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ , при  $k \in (-1, +1)$ . Трудности в доказательстве связаны с тем обстоятельством, что ни оператор  $\hat{B}_k = \hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}\hat{S}$ , ни оператор  $\hat{T}_k = \hat{S}\hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}$  не являются интегральными. С ними, однако, удается справиться, следуя по пути, указанному в [10]: обращением к интегральному оператору  $\hat{A}_k = \hat{S}\hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}\hat{S}$ , а затем – к  $\hat{B}_k = \hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}\hat{S}$ .

1) Рассмотрим сначала оператор  $\hat{L}_k^{-1}$ , определяющий решение  $\Phi \in H_p^0$  уравнения  $\hat{L}_k\Phi = F$  при  $F \in L_p$ . Положим  $v_k(\gamma) = (1-k\gamma)(1-\gamma^2)^{-1/2}$ , запишем это уравнение в следующем виде:

$$v_k^{-1}(\gamma) \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) + \Phi(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) = F(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}).$$

Решение его в  $H_p^0$  таково:

$$\Phi(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \int_0^\xi F(\mathbf{r}_- + \xi' \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) f_k(\xi - \xi', \gamma) d\xi', \quad (2.1)$$

где  $f_k(\ell, \gamma) = \exp[-v_k(\gamma)\ell]v_k(\gamma)$ . Из (2.1), в частности, вытекает, что уравнение  $\hat{L}_k\Phi = 0$  имеет в  $H_p^0$  только тривиальное решение  $\Phi = 0$  (при любом  $k$ ). Следовательно, обратный оператор  $\hat{L}_k^{-1}$  существует.

Покажем, что при  $\text{Re } k \in (-1, +1)$  оператор  $\hat{L}_k^{-1}$  ограничен в  $L_p$ . Для этого достаточно проверить, что при  $\text{Re } k \in (-1, +1)$  интеграл (2.1) принадлежит  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Действительно, при  $p \neq \infty$

$$\|\Phi\|_p^p = \int_{P \times \Gamma} d\mathbf{\Omega} d\mathbf{r}_- \int_0^{\xi_+ - \xi_-} d\xi \left| \int_0^\xi F(\mathbf{r}_- + \xi' \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) f_k(\xi - \xi', \gamma) d\xi' \right|^p.$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера и полагая  $k = k_0 + ik_1$ , получаем оценку

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_p^p &= \int_{P \times \Gamma} d\Omega dr_- \int_0^{\xi_+ - \xi_-} \left[ \int_0^\xi |F|^p |f_k(\xi - \xi', \gamma)| d\xi' \times \right. \\
&\times \left. \left( \int_0^\xi |f_k| d\xi' \right)^{p-1} \right] d\xi \leq \int_{P \times \Gamma} d\Omega dr_- \int_0^{\xi_+ - \xi_-} \left\{ \left| F(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) \right|^p \times \right. \\
&\times \left. \int_{\xi'}^{\xi_+ - \xi_-} |f_k(\xi - \xi', \gamma)| [1 + k_1^2 (1 - |k_0|)^{-2}]^{(p-1)/2} d\xi \right\} d\xi' \leq \\
&\leq \|F\|_p^p [1 + k_1^2 (1 - |k_0|)^{-2}]^{p/2}, \quad 1 \leq p < \infty.
\end{aligned}$$

Отметим также, что из (2.1) следует оценка

$$\|\Phi\|_\infty \leq \|F\|_\infty [1 + k_1^2 (1 - |k_0|)^{-2}]^{1/2}.$$

Из этих оценок вытекает, что оператор  $\hat{L}_k^{-1}$  ограничен в  $L_p$  при  $\text{Re} k \in (-1, +1)$ , причем  $\|\hat{L}_k^{-1}\| \leq [1 + k_1^2 (1 - |k_0|)^{-2}]^{1/2}$ , где  $k_0 = \text{Re} k$ ,  $k_1 = \text{Im} k$ .

Используя неравенство Гёльдера, легко показать, что оператор  $\hat{S}$  также ограничен в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , причем  $\|\hat{S}\| \leq \sigma_s \max \leq 1$ .

Из приведенных оценок следует существование и ограниченность оператора  $\hat{A}_k$  в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , для любого  $k \in (-1, +1)$ .

2) Покажем, что операторы  $\hat{A}_k$  при  $k \in (-1, +1)$  являются интегральными. С этой целью введем в (2.1) новую переменную интегрирования  $\xi'' = \xi - \xi'$  и положим  $\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp = \mathbf{r}_\perp$ ; тогда

$$\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \hat{L}_k^{-1} F(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \int_0^{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_-|} F(\mathbf{r}_\perp - \xi'' \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) f_k(\xi'', \gamma) d\xi''. \quad (2.2)$$

Принимая во внимание (2.2), для всех  $F \in L_p$  имеем

$$\hat{S}\hat{L}_k^{-1}F(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_P d\mathbf{\Omega}'' \int_0^{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} \sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'')) \times \\ \times F(\mathbf{r}_\perp - \xi'' \mathbf{\Omega}''_\perp, \mathbf{\Omega}'') f_k(\xi'', \gamma'') d\xi''.$$

Вводя в последнем интеграле новые переменные интегрирования по формулам  $\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp - \xi'' \mathbf{\Omega}''_\perp$ ,  $d\mathbf{r}'_\perp = \xi'' d\xi'' d\varphi''$ ,  $\xi'' = |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|$ , получаем окончательно

$$\hat{S}\hat{L}_k^{-1}F(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \int_{G_\perp} d\mathbf{r}'_\perp \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'')) F(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}'') f_k(|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|, \gamma'')}{4\pi |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} d\gamma'', \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{\Omega}'' = \left\{ \frac{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)}{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} (1 - \gamma''^2)^{1/2}, \gamma'' \right\}.$$

Заменяя  $F$  в (2.3) на  $\hat{S}F(1 - k\gamma)^{-1}$  и используя теорему Фубини, получаем для оператора  $\hat{A}_k = \hat{S}\hat{L}_k^{-1}(1 - k\gamma)^{-1}\hat{S}$  интегральное представление

$$\hat{A}_k F(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \int_{G_\perp \times P} F(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') A_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' d\mathbf{r}'_\perp$$

с ядром

$$A_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') = \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'')) \sigma_s(\mathbf{r}'_\perp, (\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}''))}{16\pi^2 (1 - \gamma''^2)^{1/2} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} \times [ ] \quad (2.4) \\ \times \exp[-\nu_k(\gamma'') |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|] d\gamma''.$$

3) Чтобы убедиться в полной непрерывности оператора  $\hat{A}_k$  в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ , при  $k \in (-1, +1)$ , введем операторы

$$\hat{S}^{(n)}\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_P \sigma_s(\mathbf{r}_\perp) g^{(n)}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}', \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $g^{(n)}(\chi)$  - непрерывные на  $[-1, +1]$  функции, сходящиеся в  $L_p$  к функции  $g(\chi)$ . Пусть  $\hat{A}_k^{(n)} = \hat{S}^{(n)} \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S}^{(n)}$ . Докажем полную непрерывность операторов  $\hat{A}_k^{(n)}$  в  $L_p, 1 < p < \infty$ . Для этого, согласно известной теореме теории вполне непрерывных операторов [12, с. 328], достаточно убедиться в том, что выполнены условия

$$I_\alpha = \int_{G_\perp \times P} \left| A_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') \right|^\alpha d\mathbf{\Omega}' d\mathbf{r}'_\perp \leq C_1^\alpha$$

$$I_\beta = \int_{G_\perp \times P} \left| A_k^{(n)}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') \right|^\beta d\mathbf{\Omega} d\mathbf{r}_\perp \leq C_2^\beta$$

где  $0 < \beta < p, (1 - \beta/p)p' < \alpha, p^{-1} + (p')^{-1} = 1$ .

Из (2.4) вытекает, что  $\left| A_k^{(n)} \right| \leq C_n \left| \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp \right|^{-1}$ , где

$C_n = (\sigma_{s \max} g_{\max}^{(n)})^2 / \times (16\pi)^{-1}$ . Поэтому интегралы  $I_\alpha$  и  $I_\beta$  равномерно ограничены в  $G_\perp \times P$  при  $1 \leq \alpha, \beta < 2$ , в частности и при  $\beta = 1, 1 < \alpha < 2$  для любого  $p \in (1, \infty)$ . Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \left\| \hat{A}_k - \hat{A}_k^{(n)} \right\|_p &\leq \left\| (\hat{S} - \hat{S}^{(n)}) \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} \right\|_p + \\ &+ \left\| \hat{S} \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} (\hat{S} - \hat{S}^{(n)}) \right\|_p + \\ &+ \left\| (\hat{S} - \hat{S}^{(n)}) \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} (\hat{S} - \hat{S}^{(n)}) \right\|_p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку оператор  $\hat{A}_k$  может быть аппроксимирован сколь угодно точно по норме в  $L_p$  вполне непрерывными операторами  $\hat{A}_k^{(n)}$  сам оператор  $\hat{A}_k$  также вполне непрерывен в  $L_p, 1 < p < \infty$ .

4) Легко видеть, что при изотропной индикатрисе, т.е. при  $g(\chi) \equiv 1$ ,

$$A_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') = A_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) = A_k(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp)$$

и, следовательно, оператор  $\hat{A}_k$  самосопряженный в  $L_2$ . В противном случае под интегралом в (2.4) стоит функция



$$\omega(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}_\perp, \gamma, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}'_\perp, \gamma', \gamma'') = g \left[ \left( \frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} \cdot \mathbf{\Omega}_\perp \right) (1 - \gamma''^2)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times (1 - \gamma^2)^{1/2} + \gamma\gamma'' \right] g \left[ \left( \frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} \cdot \mathbf{\Omega}'_\perp \right) (1 - \gamma''^2)^{1/2} (1 - \gamma'^2)^{1/2} + \gamma'\gamma'' \right]$$

несимметричная относительно замены переменных  $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}_\perp, \gamma)$  на  $(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}'_\perp, \gamma')$ . Если индикатриса четная, т.е.  $g(\chi) = g(-\chi)$ , то, вводя в (2.4) новую переменную интегрирования  $\tilde{\gamma} = -\gamma''$ , приходим к равенству  $A_k(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}') = A_{-k}(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}', \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega})$ . Следовательно, при четных индикатрисах  $\hat{A}_k^* = \hat{A}_{-k}$ .

Определим оператор  $\hat{U}$  следующим образом: для любой  $\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) \in L_p$

$$\hat{U}\Phi(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}_\perp)(1 - \gamma^2)^{1/2}, \gamma) = \Phi(\mathbf{r}_\perp, -\mathbf{\Omega}_\perp(1 - \gamma^2)^{1/2}, \gamma). \quad (2.5)$$

Поскольку  $\omega(\mathbf{r}_\perp, -\mathbf{\Omega}_\perp, \gamma, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{\Omega}'_\perp, \gamma', \gamma'') = \omega(\mathbf{r}'_\perp, -\mathbf{\Omega}'_\perp, \gamma', \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}_\perp, \gamma, \gamma'')$ , то оператор  $\hat{U}\hat{A}_k$  самосопряженный в  $L_2$ .

5) Чтобы убедиться в полной непрерывности в  $L_p, 1 < p < \infty$ , при  $k \in (-1, +1)$  оператора  $\hat{B}_k = \hat{L}_k^{-1}(1 - k\gamma)^{-1}\hat{S}$ , докажем сначала, что для любой  $\Phi \in H_2^0$  имеет место неравенство

$$(\hat{L}_k\Phi, \Phi) \geq \|\Phi\|_2^2, \quad \Phi \in H_2^0. \quad (2.6)$$

Действительно, учитывая, что  $\Phi(\mathbf{r}_-, \mathbf{\Omega}) \Big|_{(\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \mathbf{n}) < 0} = 0$  (см. (1.5) при  $\hat{R} = 0$ ), а

также что  $\Phi(\mathbf{r}_-, \mathbf{\Omega}) \Big|_{(\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \mathbf{n}) > 0} = \Phi(\mathbf{r}_+, \mathbf{\Omega})$ , получаем

$$\begin{aligned}
(\hat{L}_k \Phi, \Phi) &= \int_{P \times \Gamma} d\Omega dr_- \times \\
&\times \int_0^{\xi_+ - \xi_-} v_k^{-1}(\gamma) \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}_- + \xi \mathbf{\Omega}_\perp, \mathbf{\Omega}) d\xi + \\
+(\Phi, \Phi) &= (\Phi, \Phi) + \frac{1}{2} \int_{P \times \Gamma} v_k^{-1}(\gamma) \Phi^2(\mathbf{r}_+, \mathbf{\Omega}) d\Omega dr_- \geq (\Phi, \Phi).
\end{aligned}$$

Далее докажем, что оператор  $\hat{B}_k$  вполне непрерывен в  $L_2$ . Так как оператор  $\hat{A}_k = \hat{S} \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S}$  вполне непрерывен в  $L_2$ , то из любой ограниченной бесконечной последовательности элементов  $\Phi \in L_2$  можно извлечь подпоследовательность  $\{\Phi_n\}$  такую, что

$$\begin{aligned}
&(\hat{S} \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m), (\Phi_n - \Phi_m)) = \\
&= \left( \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m), \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m) \right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

При  $m, n \rightarrow \infty$ . Применяя неравенство (2.6) при  $\Phi = \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \times \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m)$ , получаем

$$\left\| \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m) \right\|^2 \leq (\hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m), \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m)),$$

$(1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m) \leq (1 - k)^{-1} (\hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m), \hat{S} (\Phi_n - \Phi_m)) \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ . Отсюда следует полная непрерывность оператора  $\hat{B}_k$  в  $L_2$ .

Так как оператор  $\hat{B}_k$  непрерывен в  $L_r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , и вполне непрерывен в  $L_2$ , то, согласно критерию, приведенному в [13, с 247], для доказательства полной непрерывности оператора  $\hat{B}_k$  при любых  $p \in (1, \infty)$ ,  $k \in (-1, +1)$  достаточно отметить, что для любых  $p = q$  найдутся числа  $0 < t < 1$  и  $1 \leq r \leq \infty$ , удовлетворяющие равенству  $1/p = 1/q = t/2 + (1-t)/r$  (т.е.  $r = (1/p - t/2)^{-1} (1-t)$ ).

Итак, оператор  $\hat{B}_k$  вполне непрерывен в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , при  $k \in (-1, +1)$ . Из компактности  $\hat{B}_k$  в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , в частности, следует, что при любом  $k$

оператор  $\hat{B}_k$  состоит из не более чем счетного множества собственных значений, имеющих конечную кратность. Спектр не имеет предельных точек, отличных от нуля.

### §3. Спектральные свойства задачи (1.4), (1.5) при $\hat{R} = 0$

Задача (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$  эквивалентна уравнению (1.7) в  $H_p^0$  при  $\lambda(k) = 1$ . Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\hat{L}_0\Phi - \hat{S}\Phi = k\gamma\Phi,$$

и, следовательно, оно равносильно уравнению

$$(\hat{E} - \hat{L}_0^{-1}\hat{S})\Phi = k\hat{L}_0^{-1}\gamma\Phi. \quad (3.1)$$

Убедимся в существовании и непрерывности оператора  $(\hat{E} - \hat{L}_0^{-1}\hat{S})$ . Для этого покажем, что 1 не совпадает ни с одним характеристическим числом оператора  $\hat{L}_0^{-1}\hat{S}$ . Действительно, пусть  $\lambda$  - характеристическое число оператора  $\hat{L}_0^{-1}\hat{S}$ , т.е. существует  $\Phi \in H_p^0$ ,  $\Phi \neq 0$  такое, что  $\lambda\hat{L}_0^{-1}\hat{S}\Phi = \Phi$ . Тогда  $\hat{L}_0\Phi = \lambda\hat{S}\Phi$ . Воспользуемся утверждениями [9] об однозначной разрешимости неоднородной задачи (т.е. задачи с источниками) для однородного по высоте цилиндра в условиях (1.2) и  $\beta(\mathbf{r}_\perp) = \lambda\sigma_s(\mathbf{r}_\perp) \leq 1$  (для любого  $\mathbf{r}_\perp \in G_\perp$ ). Поскольку однородная задача в этих условиях имеет только нулевое решение, а наша задача имеет отличное от нуля решение, то должна существовать хотя бы одна точка  $\mathbf{r}_{\perp 0}$  такая, что  $\beta(\mathbf{r}_{\perp 0}) = \lambda\sigma_s(\mathbf{r}_{\perp 0}) > 1$ . Но  $\sigma_s(\mathbf{r}_\perp) \leq 1$  всюду в  $G_\perp$  и, следовательно,  $\lambda > 1$ . Более того,  $\lambda > \sigma_{s\max}^{-1} \geq 1$ .

Учитывая, что  $\hat{L}_0^{-1}\hat{S}$  - вполне непрерывный оператор в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ , и что 1 не совпадает ни с одним характеристическим числом  $\hat{L}_0^{-1}\hat{S}$ , заключаем, что оператор  $(\hat{E} - \hat{L}_0^{-1}\hat{S})$  имеет непрерывный обратный оператор, представимый абсолютно сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{L}_0^{-1}\hat{S})^{n-1}$ . Поэтому уравнение (3.1) можно преобразовать к виду

$$\Phi = k\hat{W}\Phi,$$

где  $\hat{W} = \hat{L}_0^{-1}\gamma + \hat{V}$ , а  $\hat{V} = \hat{L}_0^{-1}\hat{S}(\hat{E} - \hat{L}_0^{-1}\hat{S})^{-1}\hat{L}_0^{-1}\gamma$  - вполне непрерывный в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ , оператор. По теореме об относительно компактных

возмущениях [14, с. 306], операторы  $\hat{L}_0^{-1}\gamma$  и  $\hat{W}$  имеют одинаковый существенный спектр в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ .

Для того чтобы установить спектральные свойства оператора  $\hat{L}_0^{-1}\gamma$ , воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \hat{L}_m &= (1 - m\gamma)^{-1} (\hat{L}_0 - m\gamma), \\ (\hat{E} - m\hat{L}_0^{-1}\gamma)^{-1} &= \hat{E} + (\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1} m\gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

и рассмотрим свойства оператора  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$ . Докажем следующую лемму.

**Лемма.** 1) Оператор  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$  существует для любого  $m$  в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , и непрерывен при  $|\operatorname{Re} m| < 1$ .

2) При  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$  оператор  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$  в  $L_\infty$  определен на не всюду плотном множестве, а в  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , - на всюду плотном.

3) Оператор  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$  при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$  не ограничен в  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Доказательство.** Утверждение 1 доказано в §2. Докажем утверждение 2. Для этого, следуя [15], воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} &(\hat{L}_0 - m\gamma)[f \exp[i \operatorname{Im}(m)\gamma(\xi - \xi_-)(1 - \gamma^2)^{-1/2}]] = \\ &= \exp[i \operatorname{Im}(m)\gamma(\xi - \xi_-)(1 - \gamma^2)^{-1/2}](\hat{L}_0 - \operatorname{Re} m\gamma)f \end{aligned}$$

Для любого  $m$  и  $f \in L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , из которой следует, что множества значений операторов  $(\hat{L}_0 - m\gamma)$  и  $(\hat{L}_0 - \operatorname{Re}(m)\gamma)$  плотны и неплотны в  $L_\infty$  одновременно, поскольку оператор умножения на  $\exp[i \operatorname{Im}(m)\gamma(\xi - \xi_-)(1 - \gamma^2)^{-1/2}]$  ограничен и ограниченно обратим в  $L_\infty$ . Поэтому далее ограничимся доказательством того, что в случае, когда  $\operatorname{Im} m = 0$ , найдется такая функция  $f_0 \in L_\infty$ , что для любой  $f : \|f - f_0\|_\infty < 1/2$  выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| (\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1} f \chi(X_\varepsilon) \right\|_\infty = \infty \quad \text{при } |m| \geq 1, \quad (3.3)$$

где

$$X_\varepsilon = \{x \in G_\perp \times P : x = (r_\perp, \Omega_\perp (1 - \gamma^2)^{1/2}, \gamma), -1 + \varepsilon \leq \gamma \leq 1 - \varepsilon\},$$

$$\chi(X_\varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in X_\varepsilon, \\ 0, & x \in X \setminus X_\varepsilon, \quad X = \{x \in G_\perp \times P\}. \end{cases}$$

Пусть  $f_0 = \chi(X)$ . Поскольку

$$(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1} f \chi(X_\varepsilon) = \int_0^{|r_\perp - r_-|} f \exp[-(1 - m\gamma)\xi'(1 - \gamma^2)^{-1/2}](1 - \gamma^2)^{-1/2} d\xi',$$

где  $-1 + \varepsilon \leq \gamma \leq 1 - \varepsilon$ , то для любой функции  $f : \|f - \chi(X)\|_\infty < 1/2$  при  $|m| \geq 1$  выполняется равенство (3.3), а следовательно, на расстоянии меньше  $1/2$  от функции  $f_0$  нет функций из  $D((\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}) = R(\hat{L}_0 - m\gamma)$  при  $|m| \geq 1$ , где  $D$  - область определения оператора,  $R$  - множество его значений.

Оператор  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$  в  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$  определен на всюду плотном множестве. Действительно, рассуждая по аналогии с [15], замечаем, что поскольку для любых  $F$

$$(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1} F = \int_0^\xi F(r_- + \xi' \Omega_\perp, \Omega) \times \\ \times \exp[-(1 - m\gamma)(\xi - \xi')(1 - \gamma^2)^{-1/2}](1 - \gamma^2)^{-1/2} d\xi',$$

то оператор  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$  определен на функциях  $F$  таких, что  $\operatorname{supp} F \subseteq X_\varepsilon$ . Но объединение по  $\varepsilon$  таких функций образует всюду плотное в  $L_p$ ,  $p < \infty$ , множество.

Докажем утверждение 3. Так же как в [15], спектральным типом оператора  $(\hat{L}_0 - m\gamma)$  назовем такое число  $a(m)$ , что для любого фиксированного числа выполняется

$$\ell \in \rho(\hat{L}_0 - m\gamma) \Leftrightarrow \operatorname{Re} \ell > -a(m),$$

где  $\rho(\hat{A})$  - резольвентное множество  $\hat{A}$ . По аналогии с [15] доказывается существование и единственность числа  $a(m)$ , а также и независимость его от индекса  $p$  пространства, в котором определен оператор  $(\hat{L}_0 - m\gamma)$ .

Из определения  $a(m)$  получаем, что  $0 \in \rho(\hat{L}_0 - m\gamma) \Leftrightarrow a(m) > 0$ . Но при  $p = \infty$  имеем  $0 \in \rho(\hat{L}_0 - m\gamma)$  при  $|\operatorname{Re} m| < 1$  и  $0 \notin \rho(\hat{L}_0 - m\gamma)$  при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$ , т.е.  $a(m) > 0$  при  $|\operatorname{Re} m| < 1$  и  $a(m) \leq 0$  при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$ .

Поскольку  $a(m)$  не зависит от индекса  $p$ , то эти неравенства имеют место при любых  $p \in [1, \infty]$ , т.е.  $0 \notin \rho(\hat{L}_0 - m\gamma)$  при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$ . Таким образом,  $(\hat{L}_0 - m\gamma)^{-1}$  в  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$ , будучи определенным на всюду плотном множестве, не ограничен. Все утверждения леммы доказаны.

Из леммы и (3.2) следует, что оператор  $(\hat{E} - m\hat{L}_0^{-1}\gamma)^{-1}$  непрерывен в  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$ , при  $|\operatorname{Re} m| < 1$  и не ограничен, но определен на всюду плотном множестве при  $|\operatorname{Re} m| \geq 1$ , т.е. существенный спектр оператора  $\hat{L}_0^{-1}\gamma$  заполняет множество  $\{\nu : |\operatorname{Re} \nu| \leq 1\}$ . Согласно теореме о компактных возмущениях [14], в полупространствах  $|\operatorname{Re} \nu| > 1$  могут находиться лишь точки дискретного спектра оператора  $\hat{W}$ , причем на каждом множестве  $|\operatorname{Re} \nu| > 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in (0, 1)$ , их конечное число.

Таким образом, задача (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$  разрешима в том и только том случае, когда  $\nu = k^{-1}$  - точка дискретного спектра оператора  $\hat{W}$ , т.е. при  $|\operatorname{Re} k| > 1$  эта задача неразрешима.

Покажем теперь, что в широком круге задач дискретный спектр  $\hat{W}$  не пуст и содержит по крайней мере две точки  $\pm\nu_0 = \pm k_0^{-1}$ ,  $k_0 \in (0, 1)$ , и соответствующие им собственные функции положительны.

#### §4. Свойства функции $\lambda_1(k)$

Справедливо

**Утверждение.** При  $k \in (-1, +1)$  уравнение (1.7) имеет простое положительное характеристическое число  $\lambda_1(k)$ , которое меньше модулей всех других характеристических чисел, ему и только ему отвечает положительная собственная функция  $\Phi_k$ .

Оно вытекает из положительности ядра  $A_k$  интегрального оператора  $\hat{A}_k$ , из положительности ядра  $\hat{L}_k^{-1}(1-k\gamma)^{-1}A_k$  оператора  $\hat{B}_k^2$ , а также из теории вполне непрерывных операторов, оставляющих инвариантным конус в пространстве Банаха, так же как и аналогичное утверждение в [10].

Рассмотрим свойства функции  $\lambda_1(k)$ .

1. Покажем, что  $\lambda_1(k)$  непрерывна и монотонно убывает с ростом  $k$  на  $[0,1)$ . Пусть  $k_0, k_0 + \varepsilon \in (0,1)$ ,  $\varepsilon > 0$ , а  $\Phi_{k_0}$  и  $\Phi_{k_0+\varepsilon}$  - соответствующие собственные функции. Запишем характеристическое уравнение для них в следующем виде:

$$\hat{U}\hat{S}\Phi_{k_0} = \lambda_1(k_0)\hat{U}\hat{A}_{k_0}\Phi_{k_0}, \quad \hat{U}\hat{S}\Phi_{k_0+\varepsilon} = \lambda_1(k_0 + \varepsilon)\hat{U}\hat{A}_{k_0+\varepsilon}\Phi_{k_0+\varepsilon}, \quad (4.1)$$

где  $\hat{U}\hat{A}_k$  - самосопряженный оператор для любого  $k \in [0,1)$ , а оператор  $\hat{U}$  определен соотношением (2.5). Отметим, что  $\hat{U}\hat{S}$  - также самосопряженный оператор, так как, учитывая, что для любых  $\Omega, \Omega' \in P$

$$\begin{aligned} (\tilde{\Omega} \cdot \Omega') &= \gamma\gamma' + (1-\gamma^2)^{1/2}(1-\gamma'^2)^{1/2} \cos(\varphi - \pi - \varphi') = \\ &= \gamma\gamma' + (1-\gamma^2)^{1/2}(1-\gamma'^2)^{1/2} \cos[\varphi - (\varphi' - \pi)] = (\Omega \tilde{\Omega}'), \end{aligned}$$

где  $\Omega = (\Omega_\perp, \gamma)$ ,  $\tilde{\Omega} = (-\Omega_\perp, \gamma)$ , имеем равенства

$$\begin{aligned} (\hat{U}\hat{S}f, h) &= \frac{1}{4\pi} \int_{G_\perp \times P} \left[ h(\mathbf{r}_\perp, \Omega) \int_P \sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\tilde{\Omega} \cdot \Omega')) f(\mathbf{r}_\perp, \Omega') d\Omega' \right] d\mathbf{r}_\perp d\Omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{G_\perp \times P} \left[ f(\mathbf{r}_\perp, \Omega') \int_P \sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\tilde{\Omega}' \cdot \Omega)) h(\mathbf{r}_\perp, \Omega) d\Omega \right] d\mathbf{r}_\perp d\Omega' = (f, \hat{U}\hat{S}h). \end{aligned}$$

Вычитая первое равенство в (4.1) из второго, получаем

$$\begin{aligned} \hat{U}\hat{S}(\Phi_{k_0+\varepsilon} - \Phi_{k_0}) &= \lambda_1(k_0 + \varepsilon)\hat{U}\hat{A}_{k_0+\varepsilon}(\Phi_{k_0+\varepsilon} - \Phi_{k_0}) + \\ &+ [\lambda_1(k_0 + \varepsilon)\hat{U}\hat{A}_{k_0+\varepsilon}\Phi_{k_0} - \lambda_1(k_0)\hat{U}\hat{A}_{k_0}\Phi_{k_0}]. \end{aligned}$$

Так как существует решение этого уравнения в  $L_2$  свободный член его должен быть ортогонален решению соответствующего однородного уравнения  $\Phi_{k_0+\varepsilon}$ , т.е.

$$\lambda_1(k_0 + \varepsilon)(\hat{U}\hat{A}_{k_0+\varepsilon}\Phi_{k_0}, \Phi_{k_0+\varepsilon}) - \lambda_1(k_0)(\hat{U}\hat{A}_{k_0}\Phi_{k_0}, \Phi_{k_0+\varepsilon}) = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda_1(k_0 + \varepsilon) - \lambda_1(k_0) = \lambda_1(k_0) \frac{(\hat{U}(\hat{A}_{k_0} - \hat{A}_{k_0 + \varepsilon})\Phi_{k_0}, \Phi_{k_0 + \varepsilon})}{(\hat{U}\hat{A}_{k_0 + \varepsilon}\Phi_{k_0}, \Phi_{k_0 + \varepsilon})} \quad (4.2)$$

Оператор  $\hat{A}_{k_0} - \hat{A}_{k_0 + \varepsilon}$  интегральный с ядром

$$\begin{aligned} A_{k_0} - A_{k_0 + \varepsilon} &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'')) \sigma_s(\mathbf{r}'_\perp, \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}'')}{16\pi^2 (1 - \gamma^2)^{1/2} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} \times \\ &\times \{ \exp[-\nu_{k_0}(\gamma'') |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|] - \exp[-\nu_{k_0 + \varepsilon}(\gamma'') |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|] \} d\gamma''. \end{aligned}$$

Поскольку экспонента — непрерывная функция и  $(\hat{U}\hat{A}_{k_0 + \varepsilon}\Phi_{k_0}, \Phi_{k_0 + \varepsilon}) > 0$ , то из (4.2) следует непрерывность функции  $\lambda_1(k)$  по  $k$  на  $[0, 1)$ .

Для того чтобы доказать монотонность  $\lambda_1(k)$  по  $k$  на  $[0, 1)$ , воспользуемся тождеством

$$\exp(\varepsilon x) = 1 + \varepsilon x + \int_0^\varepsilon \exp(tx)(\varepsilon - t)x^2 dt.$$

Полагая  $x = \gamma |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp| (1 - \gamma^2)^{-1/2}$ , приходим к неравенству

$$A_{k_0} - A_{k_0 + \varepsilon} \leq -\tilde{D}_{k_0} \varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{k_0} &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_s(\mathbf{r}_\perp, (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'')) \sigma_s(\mathbf{r}'_\perp, \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}'')}{16\pi^2 (1 - \gamma''^2)} \times \\ &\times \gamma'' \exp[-\nu_{k_0}(\gamma'') |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|] d\gamma''. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\hat{D}_{k_0}$  интегральный оператор с ядром  $\tilde{D}_{k_0}$ . Отметим, что поскольку  $\Phi_{k_0} > 0$ ,  $\Phi_{k_0 + \varepsilon} > 0$ ,  $\sigma_s(\mathbf{r}_\perp, \boldsymbol{\chi}) \geq \sigma_s \min g \min > 0$ , то имеет место оценка



$$\int_{-1}^{+1} \exp[-v_{k_0}(\gamma) |r_{\perp} - r'_{\perp}|] \gamma (1 - \gamma^2)^{-1} d\gamma = \int_0^1 \gamma (1 - \gamma^2)^{-1} \times \\ \times \{ \exp[-v_{k_0}(\gamma) |r_{\perp} - r'_{\perp}|] - \exp[-v_{(-k_0)}(\gamma) |r_{\perp} - r'_{\perp}|] \} d\gamma > 0$$

при  $k_0 \in [0, 1)$  и, следовательно,  $(\hat{D}_{k_0} \Phi_{k_0}, \Phi_{k_0+\varepsilon}) > 0$  при  $k_0 \in [0, 1)$ .

Принимая во внимание, что  $(\hat{U}\hat{A}_{k_0+\varepsilon} \Phi_{k_0}, \Phi_{k_0+\varepsilon}) > 0$ , из (4.2) получаем окончательно  $\lambda_1(k_0 + \varepsilon) - \lambda_1(k_0) < 0$  при  $\varepsilon > 0; k_0, k_0 + \varepsilon \in [0, 1)$ , т.е.  $\lambda_1(k)$  – убывающая функция на  $[0, 1)$ .

Отметим, что  $\lambda_1(0) > \sigma_s^{-1} \max \geq 1$ . (см. §3). Отсюда следует

**Теорема 1.** *Задача (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$  в условиях (1.2) имеет положительное решение  $k_0 > 0, \Phi_{k_0} > 0$  в том и только том случае, когда  $\lambda_1(\pm 1) < 1$ , и такое решение единственно.*

2. Установить, что для областей  $G_{\perp}$  достаточно большого диаметра действительно выполняется соотношение  $\lambda_1(\pm 1) < 1$ , удастся лишь в задачах с изотропным рассеянием ( $g(\chi) \equiv 1$ ). Для них вполне непрерывный в  $L_p$  оператор  $\hat{B}_k$  симметризуется слева положительным оператором  $\hat{U}\hat{s} = \hat{s}$ . Поэтому при фиксированном  $k \in (-1, +1)$  для уравнения (1.7) справедлива теория Гильберта – Шмидта [10], из которой получаем следующее:

1) существует по крайней мере одно характеристическое число оператора  $\hat{B}_k$ , множество всех характеристических чисел счетно, все они вещественные, собственные функции могут быть выбраны ортонормированными, присоединенных элементов нет;

2) характеристические числа и собственные элементы обладают экстремальными свойствами; в частности, если  $\lambda_1(k)$  – наименьшее (положительное) характеристическое число, то

$$\frac{1}{\lambda_1(k)} = \sup_{\Phi \in L_2} \frac{(\hat{s}\hat{B}_k \Phi, \Phi)}{(\hat{s}\Phi, \Phi)} = \sup_{\Phi \in L_2} \frac{(\hat{A}_k \Phi, \Phi)}{(\hat{s}\Phi, \Phi)}.$$

Воспользовавшись этим вариационным принципом, оценим предельное значение  $I = \lim_{k \rightarrow \pm 1} \lambda_1^{-1}(k)$ :

$$I = \sup_{\Phi \in L_2} \frac{(\hat{A}_k \Phi, \Phi)}{(\hat{s} \Phi, \Phi)} \Big|_{k=1} \geq \frac{A_k \sigma_s^{-1}(\mathbf{r}_\perp), \sigma_s^{-1}(\mathbf{r}_\perp)}{(\hat{s} \sigma_s^{-1}(\mathbf{r}_\perp), \sigma_s^{-1}(\mathbf{r}_\perp))} \Big|_{k=1}. \quad (4.3)$$

Учитывая, что  $\hat{s} \sigma_s^{-1}(\mathbf{r}_\perp) = 1$ ,  $\hat{A}_k = \hat{s} \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \hat{s}$ ,

$$\hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} \Big|_{k=1} = \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^{1/2} \xi \right] \right\} (1 - \gamma)^{-1},$$

где  $\xi = |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_-|$ , из (4.3) получаем оценку

$$I \geq \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{G_\perp} F(\xi) \frac{\sigma_s \min}{4\pi P_\perp} d\mathbf{r}_\perp, \quad (4.4)$$

где

$$F(\xi) = \int_{-1}^{+1} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^{1/2} \xi \right] \right\} (1 - \gamma)^{-1} d\gamma,$$

$P_\perp$  - площадь  $G_\perp$ . Докажем следующее неравенство:

$$F(\xi) \geq \xi (2D)^{-1} [3D^2 (D^2 + 1)^{-1} + \ln(1 + D^2)], \quad D = \text{diam } G_\perp. \quad (4.5)$$

Введя новую переменную интегрирования  $u = (1 - \gamma)^{1/2} (1 + \gamma)^{-1/2}$ , приведем  $F(\xi)$  к виду

$$F(\xi) = 2 \int_0^\infty (1 - e^{u\xi}) [u(1 + u^2)]^{-1} du.$$

Положив затем  $\omega = uD$ ,  $\beta = \xi / D$ , приходим к равенству

$$F(\xi) = 2D^2 \int_0^\infty [1 - \exp(-\omega\beta)] [\omega(D^2 + \omega^2)]^{-1} d\omega.$$

Оценку величины  $F(\xi)$  проведем отдельно для двух случаев.

*Случай 1.* Если  $\omega \leq 1$ , то

$$1 - e^{-\omega\beta} = \omega\beta - \frac{(\omega\beta)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\omega\beta} e^{-v} (\omega\beta - v)^2 dv > \omega\beta \left( 1 - \frac{\omega\beta}{2} \right) > 0$$

и справедлива оценка

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-\omega\beta}}{\omega(D^2 + \omega^2)} d\omega > \int_0^1 \frac{\beta(1 - \omega\beta/2)}{D^2 + 1} d\omega > \frac{3}{4} \frac{\beta}{D^2 + 1}. \quad (4.6)$$

Случай 2. Если  $\omega > 1$ , то

$$[1 - \exp(-\omega\beta)] > 1 - \exp(-\beta) > \beta(1 - \beta/2) > \beta/2,$$

так как  $\beta \leq 1$ , и имеет место неравенство

$$\int_1^\infty \frac{1 - e^{-\omega\beta}}{\omega(D^2 + \omega^2)} d\omega > \frac{\beta}{2} \frac{\ln(1 + D^2)}{2D^2}. \quad (4.7)$$

Объединяя (4.6) и (4.7), приходим к оценке (4.5), а затем из (4.4) получаем неравенство

$$I > \frac{f(D)\sigma_s \min \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{G_\perp} \xi dr_\perp \right)}{8\pi} (DP_\perp)^{-1}, \quad (4.8)$$

где  $f(D) = 3D^2 / (D^2 + 1) + \ln(1 + D^2)$ .

Пусть  $\ell(G_\perp)$  - радиус максимальной вписанной в  $G_\perp$  окружности, а  $L(G_\perp)$  - минимальной описанной. Тогда  $P_\perp \leq \pi L^2$ , а интеграл в (4.8) оценивается снизу величиной

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{K(\ell)} \xi dr_\perp = 2\pi \int_{-(\ell^2 - y^2)^{1/2}}^{(\ell^2 - y^2)^{1/2}} [x + (\ell^2 - y^2)^{1/2}] dx = \frac{16}{3} \pi \ell^3,$$

где  $K(\ell)$  - круг радиуса  $\ell$ , и, следовательно,

$$I \geq \frac{2\sigma_s \min}{3\pi} f(D) \frac{\ell^3}{DL^2}.$$

При  $D \rightarrow \infty$  функция  $f(D)$  возрастает как  $2 \ln D$ . Если при этом величина  $\ell^3 (DL^2)^{-1} \ln D$  становится достаточно большой, найдется такое значение  $D_0$ , что  $I > 1$  для всех  $D \geq D_0$ . Но это означает, что  $\lambda_1(+1) < 1$ . Так будет, например, при расширении области  $G_\perp$  с сохранением ее формы, когда  $\ell = O(D)$ ,  $L = O(D)$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (1.2),  $g(\chi) \equiv 1$ ,

$$\frac{2\sigma_s \min \ell^3}{3\pi DL^2} \left[ \frac{3D^2}{D^2 + 1} + \ln(1 + D^2) \right] > 1, \quad D = \text{diam } G_\perp,$$

$\ell$  - радиус вписанной в  $G_{\perp}$  окружности,  $L$  - описанной. Тогда задача (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$  имеет единственное положительное решение  $k_0 > 0$ ,  $\Phi_{k_0} > 0$ .

3. Покажем еще, что уравнение (1.7) при  $\lambda(k) = 1$  в случае изотропного рассеяния неразрешимо в полосе  $0 \leq \text{Re} k \leq k_0$  с исключенной точкой  $k = k_0$ . Для этого преобразуем (1.7) к самосопряженной форме при  $k \in (-1, +1)$ .

Обозначив функцию  $\hat{s}|_{g(\chi)=1} \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega})$  через  $N(\mathbf{r}_{\perp})$  придем к уравнению

$$N(\mathbf{r}_{\perp}) = \lambda \hat{s} \hat{L}_k^{-1} (1 - k\gamma)^{-1} N(\mathbf{r}_{\perp}).$$

Используя (2.3) при  $F(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{\Omega}) = N(\mathbf{r}_{\perp})(1 - k\gamma)^{-1}$ , записываем его в виде

$$N(\mathbf{r}_{\perp}) = \lambda \int_{G_{\perp}} N(\mathbf{r}'_{\perp}) C(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}) d\mathbf{r}'_{\perp}, \quad (4.9)$$

где

$$C(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}) = \sigma_s(\mathbf{r}_{\perp}) \int_{-1}^{+1} \frac{\exp[-v_k(\gamma) |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|]}{4\pi(1 - \gamma^2)^{1/2} |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|} d\gamma,$$

$$v_k(\gamma) = (1 - k\gamma)(1 - \gamma^2)^{-1/2}.$$

Пусть  $Q(\mathbf{r}_{\perp}) = N(\mathbf{r}_{\perp}) \sigma_s^{-1/2}(\mathbf{r}_{\perp})$ . Тогда интегральное уравнение (4.9) приводится к виду

$$Q(\mathbf{r}_{\perp}) = \lambda \hat{M}(k) Q(\mathbf{r}_{\perp}) = \lambda \int_{G_{\perp}} M(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}, k) Q(\mathbf{r}'_{\perp}) d\mathbf{r}'_{\perp}, \quad (4.10)$$

где

$$M(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}, k) = [\sigma_s(\mathbf{r}_{\perp}) \sigma_s(\mathbf{r}'_{\perp})]^{1/2} \int_{-1}^{+1} \frac{\exp[-v_k(\gamma) |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|]}{4\pi(1 - \gamma^2)^{1/2} |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|} d\gamma.$$

Оператор  $\hat{M}(k)$  интегральный самосопряженный, с симметричным ядром  $M(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}, k) = M(\mathbf{r}'_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}, k)$  при  $k \in (-1, +1)$ .

Покажем, что уравнение (4.10) при  $\lambda(k) = 1$  неразрешимо в полосе  $0 \leq \text{Re} k \leq k_0$  с исключенной точкой  $k = k_0$ . Пусть  $k = k_1 + ik_2$ , где  $0 \leq k_1 \leq k_0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \|\hat{M}(k)Q\|_{L_2}^2 &= \int_{G_\perp} \left| \int_{G_\perp} M(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, k) Q(\mathbf{r}'_\perp) d\mathbf{r}'_\perp \right|^2 d\mathbf{r}_\perp \leq \\ &\leq \int_{G_\perp} \left[ \int_{G_\perp} |M(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, k)| |Q(\mathbf{r}'_\perp)| d\mathbf{r}'_\perp \right]^2 d\mathbf{r}_\perp. \end{aligned}$$

Покажем, что  $|M(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, k)| < M(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, k_1)$ . Положим

$f(\gamma) = \exp[-(1 - k_1 \gamma) |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp| (1 - \gamma^2)^{-1/2}] (1 - \gamma^2)^{-1/2}$ ,  $\alpha = k_2 |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|$  и введем новую переменную интегрирования  $u = k_2 |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp| \gamma (1 - \gamma^2)^{-1/2}$ .

Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{+1} f(\gamma) \exp[i\alpha \gamma (1 - \gamma^2)^{-1/2}] d\gamma \right| &= \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u(\alpha^2 + u^2)^{-1/2}) \alpha^2 (\alpha^2 + u^2)^{-3/2} e^{iu} du \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u) e^{iu} du \right|, \end{aligned}$$

где  $\tilde{f}(u) = f(u(\alpha^2 + u^2)^{-1/2}) \alpha^2 (\alpha^2 + u^2)^{-3/2} > 0$ . Поскольку  $\tilde{f}(u)$  непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ , можно выбрать интервал  $(a, b)$  такой, что  $\tilde{f}(u) = \delta + f_1(u)$ , где  $\delta > 0$ ,  $f_1(u) \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u) e^{iu} du \right| &= \left| \int_{-\infty}^a \tilde{f}(u) e^{iu} du \right| + \left| \int_b^{+\infty} \tilde{f}(u) e^{iu} du \right| + \\ &\left| \int_a^b [\delta + f_1(u)] e^{iu} du \right| \leq \int_{-\infty}^a \tilde{f}(u) du + \int_b^{+\infty} \tilde{f}(u) du + \\ &+ \int_a^b f_1(u) du + \delta \left| \int_a^b e^{iu} du \right|. \end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое при  $b > a$ :

$$\left| \int_a^b e^{iu} du \right| = \left| \frac{e^{ia}}{i} (e^{i(b-a)} - 1) \right| = \{2[1 - \cos(b-a)]\}^{1/2} = 2 \sin \frac{(b-a)}{2} < (b-a).$$

Таким образом

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u) e^{iu} du \right| < \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u) du.$$

Отсюда следует, что  $\|\hat{M}(k)Q\|_{L_2} < \|\hat{M}(k_1)Q\|_{L_2} \leq \|\hat{M}(k_1)\|_{L_2} \|Q\|_{L_2}$ .

Обозначим через  $Z_0$  множество точек  $k$  комплексной плоскости таких, что  $|\operatorname{Re} k| < 1$ . Отметим, что  $|\lambda_1^{-1}(k)| \leq \|\hat{M}(k)\|$  при  $k \in Z_0$ , а в силу самосопряженности оператора  $\hat{M}(k)$  при  $k \in (-1, +1)$  выполняется равенство  $\lambda_1^{-1}(k) \leq \|\hat{M}(k)\|$  при  $k \in (-1, +1)$ , где  $\lambda_1(k)$  убывает по  $k$  на  $[0, 1)$ . Следовательно,  $|\lambda_1^{-1}(k)| \leq \|\hat{M}(k)\| < \lambda_1^{-1}(k_1) \leq \lambda_1^{-1}(k_0) = 1$ . Это неравенство означает, что при  $0 \leq \operatorname{Re} k \leq k_0$ ,  $k \neq k_0$ ,  $\lambda = 1$  уравнение (4.10), а вместе с ним и (1.7) неразрешимы.

4. В п. 2 было установлено, что для областей  $G_\perp$  достаточно большого диаметра в задачах с изотропным рассеянием существует единственное положительное решение  $k_0 > 0$ ,  $\Phi_{k_0} > 0$ . Докажем, что оно определяет асимптотическое распределение излучения вдали от торца  $z = 0$  в цилиндрической области при  $H = \infty$ .

Действительно, рассмотрим исходную краевую задачу (1.1), (1.2) при  $\hat{R} = 0$ ,  $H = \infty$  и  $\psi_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \delta(\gamma - \gamma_0)$ ,  $0 < \gamma_0 \leq 1$  (т.е. задачу с параллельным источником). Введя новую неизвестную функцию  $\Psi(z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \psi(z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) - \delta(\gamma - \gamma_0) e^{-z/\gamma}$ , придем к следующей краевой задаче:

$$\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (1 - \gamma^2)^{1/2} (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp) \Psi = \hat{S} \Psi + \sigma_s(\mathbf{r}_\perp) e^{-z/\gamma_0} / 2, \quad (4.11a)$$

$$\Psi|_{z=0, \gamma>0} = 0, \quad \Psi|_{\mathbf{r}_\perp \subset \Gamma, (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0} = 0. \quad (4.11b)$$

Решение задачи (4.11) существует, единственно и принадлежит  $L_\infty(G \times P)$  (см. [9]).

Так же как и в [16], воспользуемся преобразованием Лапласа для  $\Psi$ :

$$Q(k, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \int_0^\infty \Psi(z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) e^{-kz} dz.$$

Функция  $Q$  удовлетворяет уравнению

$$(1 - \gamma^2)^{1/2} (\mathbf{\Omega}_\perp \cdot \nabla_\perp) Q + (1 + k\gamma) Q = \hat{S} Q + F,$$

где  $F = \gamma \Psi(0, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) + \sigma_s(\mathbf{r}_\perp) \gamma_0 [2(1 + k\gamma_0)]^{-1}$ . Она аналитична всюду на комплексной плоскости с выколотой точкой  $k = -1/\gamma_0$ ,  $0 < \gamma_0 \leq 1$ .

Как и в §3, преобразуем уравнение (4.11) к виду

$$\hat{W} Q = -Q/k + f/k, \quad f = (\hat{E} - \hat{L}_0^{-1} \hat{S})^{-1} \hat{L}_0^{-1} F.$$

Решение этого уравнения существует, единственно и определяется следующим образом:  $Q = -k^{-1} \bar{R}(-k^{-1}, \hat{W}) f$ , где  $\bar{R}(-k^{-1}, \hat{W})$  - резольвента  $\hat{W}$ . Эта резольвента  $\bar{R}(v, \hat{W})$  является аналитической функцией  $v$  на  $\rho(\hat{W})$ , точки  $v_j$  точечного спектра  $\hat{W}$  служат полюсами  $\bar{R}(v, \hat{W})$ , в окрестности каждой такой точки имеет место разложение  $\bar{R}(v, \hat{W})$  в ряд Лорана

$$\bar{R}(v, \hat{W}) = \sum_{n=-m_j}^{\infty} (v - v_j)^n \hat{A}_n^j,$$

где  $m_j$  - кратность  $v_j$

$$\hat{A}_n^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta(v_j)} (v - v_j)^{-n-1} \bar{R}(v, \hat{W}) dv,$$

$\beta(v_j)$  - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке  $v_j$  не содержащая других точек спектра,  $\hat{A}_{-1}^j = \hat{P}_j$  - проектор на корневое подпространство  $\hat{W}$ , отвечающее собственному значению  $v_j$  (см. [14]).

Применяя к функции  $Q$  обратное преобразование Лапласа, имеем

$$\Psi(z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} Q(k, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) e^{kz} dk,$$

где  $\alpha > 0$  - любое число. Учитывая аналитичность функции  $Q$  на  $\rho(\hat{W})$ , получаем

$$\Psi(z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta(-k_0)} Qe^{kz} dk + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\chi-ib}^{\chi+ib} Qe^{kz} dk +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-\chi+ib}^{\alpha+ib} Qe^{kz} dk + \int_{\alpha-ib}^{-\chi-ib} Qe^{kz} dk + \int_{\alpha+ib}^{\alpha+i\infty} Qe^{kz} dk + \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha-ib} Qe^{kz} dk \right), \quad (4.12)$$

где  $b > 0$  - достаточно большое число. Число  $-\chi < -k_0$  - выбирается так, чтобы в области  $\text{Re } k \leq 0$  правее прямой  $\text{Re } k = -\chi$  лежала только одна точка -  $-k_0$  из точечного спектра  $\hat{W}$  (существование такого числа следует из п. 3). Оценим интегралы (4.12):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta(-k_0)} Qe^{kz} dk = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta(-k_0)} \left[ -\bar{R} \left( -\frac{1}{k}, \hat{W} \right) f \right] e^{kz} k^{-1} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta(1/k_0)} e^{-z/\xi} [\bar{R}(\xi, \hat{W}) f(-\xi^{-1}, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega})] \xi^{-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \text{res}_{\xi=1/k_0} \{ e^{-z/\xi} [\bar{R}(\xi, \hat{W}) f] \xi^{-1} \} = e^{-zk_0} k_0 \hat{A}_{-1}^0 f(-k_0^{-1}, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) =$$

$$= C(\gamma_0) e^{-k_0 z} \Phi_{k_0}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}).$$

Так же как в [16], оценим оставшиеся интегралы:

$$\int_{-\chi-ib}^{-\chi+ib} Qe^{kz} dk = e^{-\chi z} \int_{-b}^{+b} e^{i\xi z} Q(-\chi + i\xi, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) d\xi = O(e^{\chi z}),$$

$$\int_{-\chi+ib}^{\alpha+ib} Qe^{kz} dk + \int_{\alpha-ib}^{-\chi-ib} Qe^{kz} dk + \int_{\alpha+ib}^{\alpha+i\infty} Qe^{kz} dk + \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha-ib} Qe^{kz} dk = O(1/b).$$

Полученные оценки приводят к представлению

$$\Psi(z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) = C(\gamma_0) e^{-k_0 z} \Phi_{k_0}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{\Omega}) + O(e^{-\chi z}), \quad -\chi < -k_0.$$

Но это и означает, что решение характеристического уравнения (1.4), (1.5) при  $\hat{R} = 0$ ,  $H = -\infty - \{k_0, \Phi_{k_0}\}$  определяет асимптотическое распределение излучения вдали от торца  $z = 0$ .



Авторы пользуются возможностью высказать искреннюю благодарность коллегам, принимавшим участие в обсуждении работы, - Н.С. Келлину и Н.В. Коновалову.

### Цитированная литература

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
2. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М.:Наука, 1972
3. Масленников М.В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием //Тр. МИАН СССР. М., 1968. Т. 97.
4. Гермогенова Т.А., Коновалов Н.В. Асимптотические характеристики решения уравнения переноса в задаче о неоднородном слое //Ж. вычисл. Матем. и матем. физ. 1974. Т. 14 № 4. С. 928-946.
5. Гермогенова Т.А. О диффузии излучения в сферической оболочке, окружающей точечный источник //Астрофизика. 1966. Т. 2. №3. С. 251-266.
6. Гермогенова Т.А. О регулярных решениях характеристического уравнения теории переноса: Препринт № 21. М.: ИПМатем. АН СССР, 1972.
7. Гермогенова Т.А., Чеботарева Е.Б. .Решение уравнения переноса для протяженных цилиндрических областей //Вопр. атомной науки и техн. Сер. физ. и техн. ядерных реакторов 1986. Вып. 4. С. 14-17.
8. Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А. .Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМатем. АН СССР, 1986.
9. Гермогенова Т.А. .Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
10. Владимиров В.С. .Математические задачи односкоростной теории переноса частиц//Тр. МИАН СССР. М., 1961. Т.61.
11. Гермогенова Т.А. Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т.9. № 3. С. 605-625.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматиз. 1959.
13. Красносельский М.А. Об одной теореме М. Рисса//Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 2. С. 246-248.
14. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.
15. Келлин Н.С. Оператор переноса частиц в пространствах Лебега.-Деп. в ВИНТИ 15.V.1984, № 1096/84.
16. Коновалов Н.В. Асимптотические свойства решений уравнения переноса в плоско-параллельных слоях: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: ИПМатем. АН СССР, 1982.

Поступила в редакцию 05.07.1988  
Переработанный вариант 26.12.1988

## Слабо-сингулярные интегральные уравнения на интервале большой длины

Препринт № 11 ИПМ АН СССР за 1990 г.

### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются уравнения с интегрируемой особенностью в ядре  $k(z' - z)$  интегрального оператора. Считается, что  $\varepsilon \ll H$ , где  $H$  - длина интервала ( $0 \leq z, z' \leq H$ ),  $\varepsilon$  - характерный размер области сингулярности ядра. Решение разбивается на 2 части: регулярную и сингулярную, каждая из которых представляется равномерно сходящимся разложением по степеням  $\varepsilon$ . В основу полагаются метод пограничных функций, развитый в теории сингулярных возмущений, и анализ асимптотики решений интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.

### Введение

Уравнения со слабой особенностью в ядре интегрального оператора возникают во многих прикладных задачах. Анализ таких уравнений и развитию специальных алгоритмов численного решения посвящена обширная литература (см., например, работу [1] и приведенную в ней библиографию). Как правило, сингулярность ядра связана с присутствием в задаче малого параметра  $\varepsilon$ , определяющего размеры характерной области сингулярности. Будем считать, что ядро неотрицательно, зависит лишь от модуля разности аргументов  $|z - z'|$ ,  $0 \leq z, z' \leq H$ , и в качестве типичных примеров будем рассматривать уравнения с ядрами:

$$k(z - z') = \lambda \sigma / 2 E(\sigma |z - z'|), \quad (1)$$

$$k(z - z') = 2\lambda \rho_0^3 / \pi [(z - z')^2 + \rho_0^2]^{-2} \quad (2)$$

при  $0 < \lambda \leq 1$  и  $\varepsilon = \sigma^{-1}$ ,  $\varepsilon = \rho_0$  соответственно. Первое из них - ядро Милна - отвечает задаче о переносе излучения в среде с изотропным рассеянием, второе - сильно анизотропным индикатрисам рассеяния, характерным для задач о распространении заряженного излучения и задач атмосферной оптики.

В работах [2, 3] предложены асимптотические разложения решения, при гладком источнике  $f(z)$  определяемые слабой особенностью ядра. Для ядра (1), например, [2]

$$y(z) = \sum_{\ell=0}^m \sum_{n=0}^{\ell} [a_{\ell n} \tau^{\ell} (\ln \tau)^n + b_{\ell n} (\tau^* - \tau)^{\ell} (\ln(\tau^* - \tau))^n] + \Phi_m(\tau),$$

где  $\tau = \sigma z$ ,  $\tau^* = \sigma H$ , а  $\Phi_m \in W_1^m$ , если  $f \in W_1^m$ . В тех случаях, когда величина  $\varepsilon$  мала по сравнению с размером расчетной области, интегральный оператор обычно аппроксимируют дифференциальным низкого порядка, опираясь на предположения о гладкости решения и возможность представления его формулой Тейлора в основной части расчетной области. Широко используется диффузионное приближение по пространственным переменным [4] в нейтронной физике для ядер типа (1) и по угловым переменным в задачах с ядрами, близкими к (2) [5]. К настоящему времени накоплен значительный опыт решения практических задач, позволяющий ориентироваться в вопросах точности и областей применимости подобных приближений. В ряде работ (см., например, [6-9]) в целях обоснования диффузионного приближения доказывалось, что в случае постоянных или гладких коэффициентов оно стремится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к решению исходной задачи в интегральных нормах. Однако, нуждаются в исследовании такие вопросы, как построение и обоснование его в более сложных случаях, в частности, при разрывных коэффициентах, построение и обоснование приближений более высокого порядка. Кроме того, сходимость диффузионного приближения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не является равномерной. У граничных точек, например, решение исходной задачи имеет особенности [1], которые дифференциальные приближения неспособны правильно передать. Во многих практических задачах важна проблема построения равномерных приближений. Теоретическое исследование ее в широком круге задач должно служить базой для развития эффективных расчетных алгоритмов, опирающихся на комбинации дифференциальных и более точных приближений.

В настоящей работе рассматриваются неоднородные интегральные уравнения

$$y(z) = \int_0^H k(z-z')y(z')dz' + f(z). \quad (3)$$

Предполагается, что при  $H < \infty$  справедлива оценка

$$r(H) = \sup_{(z)} \int_0^H k(z-z') dz' < 1,$$

а источник – гладкая функция. В основу исследования полагается развитый в теории сингулярных возмущений метод пограничных функций [10], с одной стороны, а с другой – анализ асимптотических свойств решений интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от модуля разности аргументов.

Решение разбивается на 2 части: регулярную и сингулярную, каждая из которых представляется равномерно сходящимся на  $(0, H)$  разложением по степеням  $\varepsilon$ . Коэффициенты разложения регулярной части при  $r_\infty = r(\infty) < 1 - \varepsilon^2$  определяются рекуррентными соотношениями (§2). Определение сингулярной части требует решения интегральных уравнений, однако, уже не на полном интервале, а лишь в пограничных слоях  $z \leq \varepsilon$  и  $H - z \leq \varepsilon$  (§3). Во многих задачах, в частности, в тех случаях, когда интерес представляют интегральные характеристики решения, сингулярной частью можно пренебречь. В [11] такой подход использован для решения ряда задач теории переноса при наличии поглощения ( $r_\infty < 1$ ). Однако, при слабом поглощении ( $1 \geq r_\infty \geq 1 - \varepsilon^2$ ) в задаче появляется еще один малый параметр  $1 - r_\infty$ , что приводит к необходимости использовать для определения регулярной части решения последовательность дифференциальных задач со специальными краевыми условиями (§4).

### §1. Структура решения при гладком источнике

Будем предполагать, что ядро  $k(z)$  интегрального оператора

$$\hat{k}y(z) = \int_0^H k(z-z')y(z')dz' \quad (1.1)$$

- четная неотрицательная функция  $z$ , определенная на  $(-\infty, \infty)$ , имеет интегрируемую особенность в т.  $z=0$ , как ядро (1), или «почти особенность» (как (2)), и «амплитуда» этой особенности зависит от малого параметра  $\varepsilon$  таким образом, что при  $\ell = 0, 1, \dots, L$  справедливы оценки:

$$k_{2\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} z^{2\ell} k(z) dz = O(\varepsilon^{2\ell}). \quad (1.2)$$

Нормировка ядра определяется величиной  $k_0 = r_\infty$ . Условие  $k_0 < 1$ , которое далее будет считаться выполненным, обеспечивает равномерную сходимость ряда Неймана для уравнения (3) в пространстве ограниченных функций, а следовательно, и однозначную разрешимость этого уравнения. Размеры области сингулярности, определяемые величиной  $\sqrt{\langle z^2 \rangle} = \sqrt{k_2 / k_0} = O(\varepsilon)$  считаются значительно меньшими величины интервала  $H$ . Для ядер (1) и (2)  $k_0 = \lambda$ ,  $k_2 = 2\lambda / (3\sigma^2)$ ,  $k_2 = \lambda\rho_0^2$ , а условие  $\varepsilon \ll H$  принимает вид:

$$H\sigma \gg 1, \quad H / \rho_0 \gg 1. \quad (1.3)$$

Будем считать сначала функцию  $f(z)$  достаточно гладкой на  $[0, H]$ :

$$f^{(\ell)}(z) = O(1), \quad \ell = 0, 1, \dots, 2L \quad (1.4)$$

Тогда лишь в окрестности граничных точек  $z=0$  и  $z=H$  производные решения имеют особенности (или «почти особенности» типа (2)) и характер их определяется особенностями ядра. Для ядер со слабыми особенностями справедливы оценки [1]:

$y^{(\ell)}(z) = O(k^{(\ell-1)}(z))$  при  $z \rightarrow 0+$ ,  $y^{(\ell)}(z) = O(k^{(\ell-1)}(H-z))$  при  $z \rightarrow H-$ , а вдали от граничных точек при  $\varepsilon \ll z \ll H - \varepsilon$  в условиях (1.4) производные решения ограничены.

Таким образом, мы имеем дело с ситуацией, типичной для задач с пограничным слоем, возникновение которого вызывается сингулярным возмущением. Чтобы явным образом выделить это возмущение, запишем уравнение (3) в виде

$$[1 - k_0(z)]y(z) = \int_0^H k(z-z')[y(z') - y(z)]dz' + f(z).$$

При численном решении на равномерных сетках такая замена уже позволяет на порядок повышать точность аппроксимации за счет правильной передачи особенности ядра в интеграле  $k_0(z) = \int_0^\infty k(z-z')dz'$  и сглаживания подынтегрального выражения.

Пусть  $L > 1$ . Используя для  $y(z')$  формулу Тейлора в окрестности точки  $z' = z$ , придем к уравнению вида

$$[1 - k_0(z)]y(z) - f(z) = k_1(z)y'(z) + k_2(z)/2! y''(z) + \dots + k_{2L-1}(z)/(2L-1)! y^{(2L-1)}(z) + R_L(z), \quad (1.5)$$

где

$$k_\ell(z) = \int_0^\infty (z' - z)^\ell k(z' - z) dz', \quad \ell = 0, 1, \dots, 2L - 1,$$

$$R_L(z) = \int_0^H r_{2L}(z, z') k(z' - z) dz', \quad r_{2L}(z, z') = \int_z^{z'} (z' - t)^{2L-1} y^{(2L)}(t) dt / (2L - 1)!$$

При  $\varepsilon \ll z \ll H - \varepsilon$  в рассматриваемом случае  $k_{2m+1}(z) = 0$  из-за четности ядра, а  $k_{2m}(z) = O(\varepsilon^{2m})$  согласно (1.2). Если пренебречь правой частью в (1.5), получим «вырожденную задачу», а отбрасывая слагаемые с коэффициентами  $k_\ell$  при  $\ell > 2$  и  $R_L$ , придем к «диффузионному приближению». Отбрасываемые величины и являются здесь «сингулярным возмущением», способным существенно изменить характер приближения в областях негладкости решения.

С целью отыскания решения как в области гладкости, так и в пограничных слоях воспользуемся техникой, развитой в задачах с сингулярными возмущениями [10, 11]. Для этого продолжим функцию  $f(z)$  на бесконечный интервал  $(-\infty, \infty)$  так, чтобы выполнялись условия

$$|f^{(\ell)}(z)|_{z \in (-\infty, \infty)} \leq O(1), \quad \ell = 0, 1, \dots, 2L \quad \text{при} \quad -\infty < z < \infty. \quad (1.6)$$

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$y(z) = y_r(z) + Y^0(\tau) + Y^*(\tau^* - \tau), \quad (1.7)$$

где «регулярная часть» решения  $y_r(z)$  определяется уравнением

$$y_r(z) = \hat{k}^\infty y_r(z) + f(z) \quad (1.8)$$

на всей прямой  $(-\infty, \infty)$  при

$$\hat{k}^\infty y(z) = \int_{-\infty}^\infty k(z' - z) y(z') dz', \quad (1.9)$$

а сингулярные части  $Y^0(\tau)$  и  $Y^*(\tau)$  - уравнениями

$$Y(\tau) = \hat{K}Y(\tau) + F(\tau) \quad (1.10)$$

при  $F(\tau) = F^0(\tau)$  и  $F(\tau) = F^*(\tau)$  соответственно,  $\tau = z / \varepsilon$ ,  $\tau^* = H / \varepsilon$ .

Функции  $y(z)$ ,  $Y^0(\tau)$ ,  $Y^*(\tau)$  зависят от  $\varepsilon$  как от параметра;

$$\hat{K}Y(\tau) = \int_0^{\tau^*} K(\tau' - \tau) Y(\tau') d\tau', \quad K(\tau) = \varepsilon k(\varepsilon\tau), \quad (1.11)$$

$$F^0(\tau) = -\int_0^{\infty} K(\tau' + \tau) y_r(-\varepsilon\tau') d\tau', \quad (1.12)$$

$$F^*(\tau) = -\int_0^{\infty} K(\tau' + \tau) y_r(\varepsilon\tau' + \varepsilon\tau') d\tau'.$$

## §2. Приближения для регулярной части решения.

Примем в качестве исходного уравнение (1.8). Производные  $y^{(\ell)}(z)$  при  $f(z) \in C^{2L}(-\infty, \infty)$  удовлетворяют аналогичным уравнениям:

$$y_r^{(\ell)}(z) = \hat{k}^{\infty} y_r^{(\ell)}(z) + f^{(\ell)}(z), \quad \ell = 0, 1, \dots, 2L, \quad (2.1)$$

поскольку  $[\hat{k}^{\infty} y_r]^{(\ell)} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} k(z') y_r(z - z') dz' \right]^{(\ell)} = \hat{k}^{\infty} [y_r^{(\ell)}]$ .

Следовательно, справедлива оценка  $|y_r^{(\ell)}| \leq O(|f^{(\ell)}|) / (1 - k_0)$ , и можно воспользоваться формулой Тейлора, как при выводе (1.5).

Будем искать приближение порядка  $2m$  к  $y_r(z)$  в виде конечной суммы

$$y^{2m}(z) = y_0(z) + \varepsilon^2 y_1(z) + \dots + \varepsilon^{2m}(z) y_m(z), \quad m < L \quad (2.2)$$

Подставим эту функцию в разложение типа (1.5), отвечающее уравнению (1.8). Отбросив величины порядка  $\varepsilon^{2m+2}$  и выше, учитывая оценки (1.2) и равенства  $k_{2m+1} = 0$ , найдем:

$$y_0(z) = f(z) / (1 - k_0), \quad (2.3)$$

$$y_n(z) = [\tilde{k}_2 / 2! y_{n-1}''(z) + \tilde{k}_4 / 4! y_{n-2}^{(4)}(z) + \dots + \tilde{k}_{2n} / (2n)! y_0^{(2n)}(z)] / (1 - k_0) = c_n f^{(2n)}(z), \quad (2.4)$$

где  $n = 1, 2, \dots, m$ ,  $\tilde{k}_{2n} = k_{2n} / \varepsilon^{2n}$ ,  $c_n$  - коэффициент, определяемый значениями моментов  $\tilde{k}_0, \dots, \tilde{k}_{2n}$ . Очевидно, в условиях (1.6) имеют место оценки

$$y_n^{(2\ell)}(z) = O((1 - k_0)^{-(n+1)}), \quad \ell = 0, 1, \dots, L - n. \quad (2.5)$$

Из разложения типа (1.5) в этом случае следует, что погрешность приближения  $y^{2m}(z)$  определяется величиной

$$|y_r(z) - y^{2m}(z)| \leq k_{2m+2} / (1 - k_0)^{m+3} O(f^{(2m+2)}). \quad (2.6)$$

При  $L = \infty$  и  $f \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$  из (2.2) таким образом получаем разложение  $y_r(z)$  по степеням параметра  $\varepsilon^2 / (1 - k_0)$ . Точное определение радиуса сходимости соответствующего ряда требует учета конкретной зависимости  $k_{2m}(\varepsilon)$ . Отметим, что при таком

построении каждой последующий член разложения определяется соответствующей производной функции  $f(z)$  согласно (2.4), и не требуется решения дифференциальных уравнений.

Проведенные рассуждения справедливы и в условиях, более широких, чем (1.6). Достаточно, чтобы интегралы вида  $\hat{k}^\infty f^{(\ell)}(z)$  были ограниченными при  $\ell = 0, 1, \dots, 2L$ . Если, в частности,  $f(z)$  полином, то и  $y_r(z)$  - полином такого же порядка, что следует и непосредственно из уравнения (1.8).

Обычно используемое в подобных задачах дифференциальное приближение для регулярной части решения определяется уравнением

$$-y_D'' + 2(1 - k_0) / k_2 y_D(z) = 2 / k_2 f(z), \quad k_2 = O(\varepsilon^2) \quad (2.7)$$

при краевых условиях  $y_D(\mp\infty) = 0$  и предположении о достаточно быстром убывании  $f(z)$  при  $z \rightarrow \mp\infty$ . Для его решения имеет место интегральное представление

$$y_D(z) = [2(1 - k_0)k_2]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-[2(1 - k_0)k_2]^{1/2}|z' - z|\} f(z') dz' \quad (2.8)$$

Точность этого решения определяется в соответствии с (1.5) соотношением:

$$|y_r(z) - y_D(z)| \leq O(\varepsilon^4 / 4! y_r^{(4)}(z) / (1 - k_0)^2)$$

и совпадает по порядку величины с точностью приближения

$$y^{2m}(z) \Big|_{m=1} = y_0(z) + \varepsilon^2 y_1(z) = f(z) / (1 - k_0) + k_2 / [2(1 - k_0)^2] f''(z),$$

которое отвечает сумме первых двух членов в разложении интеграла (2.8) по степеням  $k_2 / (1 - k_0)$ .

Отметим еще, что для решения уравнения (1.8) можно воспользоваться методом последовательных приближений в виде:

$$y^m(z) = y_0(z) + y_1(z) + \dots + y_m(z), \quad y_0(z) = f(z) / (1 - k_0), \quad (2.9)$$

$$y_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} k(z' - z)[y_{n-1}(z') - y_{n-1}(z)] dz' / (1 - k_0).$$

Поскольку для производных  $y_n^{(2\ell)}$  при  $\ell = 0, 1, \dots, L - n$  имеют место оценки

$$\begin{aligned} |y_n^{(2\ell)}| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(z' - z)[y_{n-1}^{(2\ell)}(z') - y_{n-1}^{(2\ell)}(z)] dz' / (1 - k_0) \right| \leq \\ &\leq O\{k_2 / [2(1 - k_0)] y^{(2\ell+2)}\} \leq \dots \leq O\{[k_2 / (2(1 - k_0))]^n f^{(2\ell+2)}\}, \end{aligned}$$



ряд  $\sum_0^{\infty} y_n$  сходится, по крайней мере, как геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = k_2 / [2(1 - k_0)]$ . В частности, для ядер (1) и (2)  $q = \lambda / [3(1 - \lambda)\sigma^2]$ ,  $q = \lambda\rho_0^2 / [2(1 - \lambda)]$  соответственно. Таким образом, порядок сходимости по  $\varepsilon^2 / (1 - k_0)$  приближений (2.2) и (2.9) в предположениях (1.2), (1.6) один и тот же, но радиус сходимости для первых определяется зависимостью от  $\varepsilon$  моментов  $k_{2m}$  при  $m \rightarrow \infty$ , а для вторых в условиях (1.6) – лишь зависимостью  $k_2$  от  $\varepsilon$ .

### § 3. Разложения для сингулярных частей решения

Сингулярное слагаемое  $Y^0(\tau)$  в (1.7) определяется уравнением (1.10) при  $F(\tau) = F^0(\tau)$  (см. (1.12)). Вследствие ограниченности  $f(z)$  и  $y_r(z)$  справедливы оценки

$$|F^0(\tau)| \leq \int_0^{\infty} K(\tau' + \tau) |y_r(-\varepsilon\tau')| d\tau' \leq \bar{y} K_2(\tau), \quad (3.1)$$

где  $\bar{y} = \sup |y_r(z)|$ ,  $K_2(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K(\tau') d\tau'$ . Подставив в (1.12) приближение (2.2), получим соответствующее приближение для  $F^0(\tau)$  и затем – для  $Y^0(\tau)$ :

$$Y^{2m}(\tau) = \sum_0^m \varepsilon^{2n} Y_n(\tau), \quad m < L. \quad (3.2)$$

Функции  $Y_n$  определяются уравнениями

$$Y_n(\tau) = \hat{K} Y_n(\tau) + F_n(\tau) \quad (3.3)$$

при  $F_n(\tau) = -\int_0^{\infty} K(\tau' + \tau) y_n(-\varepsilon\tau') d\tau'$ .

Из (2.5) и неравенств, подобных (3.1), следует, что в условиях (1.6) справедлива оценка

$$|F_n(\tau)| \leq O(f^{(2n)}) / (1 - k_0)^{(n+1)},$$

и, следовательно,  $|Y_n(\tau)| \leq O[(1 - k_0)^{-(n+2)}]$  т.е. скорость сходимости приближений (3.2) такая же, как приближений (2.2) для  $y_r(z)$ . Для главной части  $\tilde{Y}_0(\tau)$  функции  $Y_0(\tau)$ , ограничиваясь первым членом (2.3) в разложении (2.2) и учитывая соотношения

$$\begin{aligned}
F^0(\tau) &= -\int_{\tau}^{\infty} f(\varepsilon(\tau' - \tau))K(\tau')d\tau' / (1 - k_0) + O[\varepsilon^2(1 - k_0)]^2 = \\
&= \tilde{F}_0(\tau) + \varepsilon / (1 - k_0) \int_{\tau}^{\infty} (\tau' - \tau)K(\tau')d\tau' O(f') + O[\varepsilon^2 / (1 - k_0)^2],
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где  $\tilde{F}_0(\tau) = -f(0) / (1 - k_0) K_2(\tau)$ , имеем уравнение

$$\tilde{Y}_0(\tau) = \hat{K} \tilde{Y}_0(\tau) + \tilde{F}_0(\tau). \tag{3.5}$$

Погрешность этого приближения определяется оценкой:

$$|Y^0(\tau) - \tilde{Y}_0(\tau)| \leq \varepsilon / (1 - k_0)^2 \int_0^{\infty} \tau' K(\tau') d\tau' + O(f'). \tag{3.6}$$

Аналогичные построения могут быть проведены для  $Y^*(\tau^* - \tau)$  с соответствующей заменой  $\tau$  на  $\tau = \tau^* - \tau$ ,  $F^0$  на  $F^*$ . Для ядер  $k(z)$ , быстро убывающих с ростом  $z$ , источники  $F^0(\tau)$  и  $F^*(\tau)$  в уравнении (1.10) также быстро убывают с ростом  $\tau$  и  $\tilde{\tau}$ , и следует ожидать, что функции  $Y^0(\tau)$ ,  $Y^*(\tilde{\tau})$  пренебрежимо малы по сравнению с  $y_r(z)$  при  $\varepsilon \ll z \ll H - \varepsilon$ . Для того, чтобы убедиться в этом, необходимо изучить вопрос об асимптотике при  $\tau \gg 1$  решения уравнения (1.10).

Исследования в этом направлении активно развивались для уравнений с ядром (1) и близких к нему (проблема Милна, ([12-17])). Сводка используемых здесь результатов и некоторых интегральных формул приведена в Приложении.

Асимптотическое поведение при  $\tau \gg 1$  ограниченного решения уравнения (1.10) определяется расположением в полосе  $|\operatorname{Re} u| < 1$  на комплексной плоскости (и кратностью) корней  $u_j$  ( $j = 0, 1, \dots, J$ ,  $u_{-j} = -u_j$ ) характеристического уравнения (П.4). Ограничимся здесь рассмотрением задач, в которых  $K(\tau)$  четная неотрицательная функция, представимая в виде

$$K(\tau) = \tilde{K}(\tau)e^{-\tau}, \quad 0 \leq \tilde{K}(\tau) \in L_2(0, \infty). \tag{3.7}$$

В этом случае при  $k_0 < 1$  старший корень  $u_0$  простой, действительный и справедлива оценка  $0 < u_0 < |\operatorname{Re} u_j|_{j>0}$ . Поэтому при  $F_0(\tau) \leq O(e^{-\tau})$  согласно (П.9), (П.14) имеет место представление

$$Y^0(\tau) = C_0 e^{-u_0 \tau} + O(e^{-\beta \tau}) + O(e^{-u_0 \tau^*}). \tag{3.8}$$

Здесь

$$\beta = \min_{j>0} |\operatorname{Re} u_j| - \eta \quad \text{при } J > 0, \quad \beta = 1 - \eta \quad \text{при } J = 0 \tag{3.9}$$

$\eta$  - сколь угодно малое число,  $\eta > 0$ ,

$$C_0 = \int_0^{\tau^*} \Phi(\tau) F^0(\tau) d\tau / \int_0^{\infty} \Phi(\tau) K_2^{u_0}(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

$\Phi(\tau)$  - решение однородного уравнения (1.10) на  $(0, \infty)$ , возрастающее, как  $e^{u_0\tau}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ,

$$K_2^{u_0}(\tau) = e^{-u_0\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{u_0\tau'} K(\tau') d\tau'. \quad (3.11)$$

При  $k_0 < 1$  решение уравнения (1.10) может быть представлено рядом Неймана. Поэтому из оценки (3.1), соотношения  $K_2(\tau) \leq K_2^{u_0}(\tau)$  и равенств (П.13) следует оценка:  $|Y^0(\tau)| \leq \bar{y} e^{-u_0\tau}$ , а из (3.4), (3.5) – оценка  $|Y^0(\tau)| \leq |f(0)| / (1 - k_0) e^{-u_0\tau}$ . Область, где значения  $Y^0(\tau)$  могут быть существенными, таким образом, определяется условием  $u_0\tau \leq 1$  или  $z \leq \varepsilon / u_0$ . При  $k_0$  заметно меньшем единицы (т.е. при значительном поглощении) пограничный слой мал, и во многих задачах (в условиях (1.4)) можно вообще пренебречь сингулярной частью решения. С приближением  $k_0$  к 1 размеры пограничного слоя возрастают, т.к. величина  $u_0$  стремится к 0. Для ядра (1), например,  $u_0 \sim \sqrt{3(1 - k_0)}$  [12]. В этом случае параметр  $\varepsilon^2 / (1 - k_0)$  уже не является малым. Исходное уравнение (3) содержит два малых параметра  $\varepsilon$ , и  $1 - k_0$  что требует иного способа построения регулярного решения.

#### § 4. Случай $k_0 \approx 1$ .

Рассмотрим сначала предельный случай, когда  $k_0 = 1$ , а следовательно  $u_0 = 0$ , и решения уравнения (1.10) при  $\tau^* = \infty$ ,  $F^0 \leq O(e^{-\tau})$  в предположениях (3.7) представляются в виде

$$Y(\tau) = C_0 + O(e^{-\beta\tau}), \quad (4.1)$$

где  $\beta$  определяется условием (3.9), а  $C_0$  - (3.10). Покажем, что формулировкой специальных граничных условий при  $z = 0$  и  $z = H$  для дифференциальных приближений к гладкой части решения  $y_r(z)$  можно включить в нее главные члены асимптотики, оставив в  $Y^0$  лишь  $O(e^{-\beta\tau})$ , в  $Y^*$  -  $O(e^{-\beta\tau})$ . Как и ранее, предположим, что  $f(z)$  - гладкая функция – выполняются условия (1.4), и решение исходного уравнения (3) будем искать в виде (1.7). Для определения  $y_r(z)$  воспользуемся приближением, подобным (2.2):

$$y^m(z) = \varepsilon^{-2}[y_0(z) + \varepsilon y_1(z) + \dots + \varepsilon^m y_m(z)], \quad (4.2)$$

предполагая, что  $m < 2L$  (см. (1.4)), а  $|y_n^{(\ell)}| \leq O(1)$ . Положим  $y_r(\tau) = y^m(\varepsilon\tau)$  и представим  $\hat{K}Y_r(\tau)$  формулой (П.23), считая  $L = [m/2] + 2$ , где через  $[m/2]$  обозначена целая часть  $m/2$ . Приравнивая нулю коэффициенты разложения по степеням  $\varepsilon$  регулярной части выражения  $\hat{K}Y_r(\tau) + f(z) - y_r(z)$ , получим, пренебрегая величинами  $\sim \varepsilon^{m+1}, \varepsilon^{m+2}$ , следующие уравнения (при  $k_0 = 1$ )

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 / 2! y_0'' + f(z) = 0, \quad y_{2n+1}''(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, [(m-1)/2], \\ \tilde{k}_2 / 2! y_{2n}''(z) + \tilde{k}_4 / 4! y_{2n-2}^{(4)}(z) + \dots + \tilde{k}_{2n+2} / (2n+2)! y_0^{(2n+2)}(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

при  $n = 1, 2, \dots, [m/2]$ . Поскольку отсюда следует, что

$$y_0'' = a_0 f, \quad y_2'' = \tilde{a}_2 y_0^{(4)} = a_2 f'', \quad y_{2n}'' = a_{2n} f^{(2n)}, \quad (4.4)$$

где величины  $a_{2n}$  определяются значениями  $\tilde{k}_2, \tilde{k}_4, \dots, \tilde{k}_{2n+2}$  и не зависят от  $\varepsilon$ , уравнения (4.3) приводятся к виду

$$y_\ell''(z) = a_\ell f^{(\ell)}(z), \quad \ell = 0, 1, \dots, m \quad (4.5)$$

при  $a_\ell = 0$  для  $\ell$  нечетных. Краевые условия для этих уравнений зададим в виде

$$y_\ell(0) = y_\ell^0, \quad y_\ell(H) = y_\ell^*, \quad \ell = 0, 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

где  $y_\ell^0$  и  $y_\ell^*$  - параметры, значения которых определим далее таким образом, чтобы размеры пограничных слоев для сингулярных слагаемых в (1.7) были минимальными.

Решения задач (4.5)-(4.6) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} y_{2n+1}(z) &= y_{2n+1}^0 + (y_{2n+1}^* - y_{2n+1}^0) z / H, \\ y_{2n}(z) &= G_{2n}(z) + (y_{2n}^0 - G_{2n}(0))(1 - z / H) + (y_{2n}^* - G_{2n}(H)) z / H, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $G_0(z) = a_0 / 2 \int_0^H f(z') |z' - z| dz'$ ,  $G_{2n}(z) = a_{2n} f^{(2n-2)}(z)$   $n = 1, 2, \dots, m$ .

Сингулярные слагаемые  $Y^0(\tau)$  и  $Y^*(\tau)$  в (1.7) определяются в соответствии с (П.23), (П.21) уравнениями (1.10) при

$$F^0(\tau) = \hat{Q}Y_r(0, \tau), \quad F^*(\tau^* - \tau) = \hat{P}Y_r(\tau^*, \tau^* - \tau). \quad (4.8)$$

Ограничиваясь приближением (4.2) для  $y_r(z)$ , найдем:

$$\varepsilon^2 F^0(\tau) = F_0^0(\tau) + \varepsilon F_1^0(\tau) + \dots + \varepsilon^m F_m^0(\tau) + O(\varepsilon^{m+1}) K_2(\tau).$$

где  $F_0^0(\tau) = -y_0^0 K_2(\tau)$ ,

$$F_1^0(\tau) = -y_1^0 K_2(\tau) + y_0'(0) K_3(\tau),$$

.....

$$F_m^0(\tau) = -y_m^0 K_2(\tau) + \dots + (-1)^{m+1} y_0^{(m)}(0) K_{m+2}(\tau), \tag{4.9}$$

$$K_1(\tau) = K(\tau), \quad K_{n+1}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K_n(\tau') d\tau' \leq \|\tilde{K}\|_{L_2(0,\infty)} e^{-\tau}$$

в соответствии с (3.7). Из оценок (П.15), (П.18) следует, что

$$Y^0(\tau) = \varepsilon^{-2} [Y_0^0(\tau) + \varepsilon Y_1^0(\tau) + \dots + \varepsilon^m Y_m^0(\tau) + O(\varepsilon^{m-1})], \tag{4.10}$$

где каждая из функций  $Y_n^0$  определяется уравнением (1.10) при  $F = F_n^0$ . Аналогичными разложениями может быть представлена функция  $Y^*(\tau^* - \tau)$ .

Потребуем, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^{\tau^*} F_n^0(\tau) \Phi(\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^{\tau^*} F_n^*(\tilde{\tau}) \Phi(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = 0. \tag{4.11}$$

Тогда исчезают коэффициенты  $C_0$  в асимптотических представлениях вида (4.1) для функций  $Y_n^0, Y_n^*$ . Из (4.9) следует, что  $F_n^0(\tau) = O(e^{-\tau})$ , а  $F_n^*(\tilde{\tau}) = O(e^{-\tilde{\tau}})$ . Поэтому справедливы оценки  $Y_n^0(\tau) = O(e^{-\beta\tau})$ ,  $Y_n^*(\tilde{\tau}) = O(e^{-\beta\tilde{\tau}})$ , определяющие размеры пограничных слоев:  $z \leq \varepsilon / \beta$ ,  $z \geq H - \varepsilon / \beta$ ,  $\beta$  задается условием (3.9).

Первая группа уравнений (4.11) приводит к следующим уравнениям для параметров  $y_n^0$ :

$$v_2 y_0^0 = 0, \quad v_2 y_1^0 - v_3 y_0'(0) = 0, \tag{4.12}$$

.....

$$v_2 y_m^0 - v_3 y_{m-1}'(0) + \dots + (-1)^m v_{m+2} y_0^{(m)}(0) = 0,$$

где  $v_n = \int_0^{\infty} K_n(\tau) \Phi(\tau) d\tau$ . Используя далее уравнения (4.4), приведем (4.12) к виду

$$y_0^0 = 0, \quad y_1^0 = \ell_0 y_0'(0), \quad y_n^0 = \ell_0 y_{n-1}'(0) + B_n^0 f^{(n-2)}(0), \tag{4.13}$$

где  $n=2,3,\dots,m$ ,  $\ell_0 = v_3/v_2$  экстраполированная длина, коэффициенты  $B_n^0$  определяются значениями  $v_k, a_k$  и не зависят от  $\varepsilon$ . Выражения для  $y_n^*$  получим из второй группы уравнений (4.11):

$$y_0^* = 0, \quad y_1^* = -\ell_0 y_0'(H), \quad y_n^* = -\ell_0 y_{n-1}'(H) + B_n^* f^{(n-2)}(H). \tag{4.14}$$

Уравнения (4.5) с краевыми условиями (4.13), (4.14) образуют замкнутую систему соотношений для определения приближения  $m$  -

го порядка для регулярной части решения. Сингулярные части определяются в этом приближении разложениями типа (4.10), где каждое слагаемое есть решение уравнения (1.10) с источниками вида (4.9). Приведем выражения для первых членов разложения (4.2):

$$\begin{aligned}
 y_0(z) &= -1 / \tilde{k}_2 \int_0^H f(z') [|z' - z| - z - z' + 2zz' / H] dz', \\
 y_1(z) &= 2\ell_0 / \tilde{k}_2 \int_0^H f(z')(1 - z / H - z' / H + 2zz' / H^2) dz', \\
 y_2(z) &= a_2 f(z) + [y_2^0 - a_2 f(0)](1 - z / H) + [y_2^* - a_2 f(H)]z / H, \\
 y_2^0 &= \ell_0 y_1 + 2 / \tilde{k}_2 \ell_1 f(0), \quad y_2^* = -\ell_0 y_1 + 2 / \tilde{k}_2 \ell_1 f(H), \quad \ell_1 = v_4 / v_2, \\
 y_1 &= 2\ell_0 / (\tilde{k}_2 H) \int_0^H f(z')(-1 + 2z' / H) dz' = const, \quad a_2 = -\tilde{k}_4 / (6\tilde{k}_2^2).
 \end{aligned}$$

Отыскание приближения  $y^2(z) = [y_0(z) + \varepsilon y_1(z) + \varepsilon^2 y_2(z)] / \varepsilon^2$  эквивалентно решению краевой задачи

$$\begin{aligned}
 -DY_r''(\tau) &= F(\tau) - CF''(\tau), \quad F(\tau) = f(\varepsilon\tau), \\
 Y_r / Y_r' \Big|_{\tau=0} &= \ell_0 + \ell_1 F(0) / (E_0 - E_1 / \tau^*), \\
 Y_r / Y_r' \Big|_{\tau=\tau^*} &= -[\ell_0 + \ell_1 \tau^* F(H) / E_1], \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

$$D = \tilde{k}_2 / 2, \quad C = \tilde{k}_4 / (12\tilde{k}_2), \quad F_i = \int_0^{\tau^*} \tau^i F(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1.$$

Такая задача является уточнением следующего порядка по  $\varepsilon$  обычно используемого диффузионного приближения

$$-DY_D''(\tau) = F(\tau), \quad Y_D(0) / Y_D'(0) = \ell_0 = -Y_D(\tau^*) / Y_D'(\tau^*), \tag{4.16}$$

отвечающего представлению  $y_r(z)$  функцией  $y^1(z) = y_0(z) / \varepsilon^2 + y_1(z) / \varepsilon$ .

Отметим, что поскольку из (4.9), (4.13), (4.14) следуют равенства

$$F_0^0(\tau) = 0, \quad Y_0^0(\tau) = 0, \quad F_0^*(\tilde{\tau}) = 0, \quad Y_0^*(\tilde{\tau}) = 0,$$

в сингулярных составляющих решения отсутствуют слагаемые  $\sim \varepsilon^2$ .

Рассмотрим 3 характерных частных случая: задачу с постоянным источником  $f(z) = C$ , задачу с экспоненциально убывающим источником  $\sim e^{-z/\varepsilon}$  и задачу с источником, разрывным в т.  $z_0 \in (0, H)$ .

1. При  $f(z) = const = C$  имеем:  $y_0(z) = C / \tilde{k}_2 z(H - z)$ ,

$$y_1(z) = \ell_0 H / \tilde{k}_2 \quad C = const, \quad y_2(z) = 2\ell_1 / \tilde{k}_2 \quad C = const,$$

$$y_n(z) = 0 \quad \text{для} \quad n \geq 3.$$

В этом случае  $y_r(z)$  вычисляется точно:

$$y_r(z) = C / \tilde{k}_2 [z(H-z) / \varepsilon^2 + \ell_0 H / \varepsilon + 2\ell_1] . \quad (4.17)$$

Соответственно:  $Y_0(\tau) = Y_1^0(\tau) / \varepsilon + Y_2^0(\tau)$ ,  $Y^*(\tilde{\tau}) = Y_1^*(\tilde{\tau}) / \varepsilon + Y_2^*(\tilde{\tau})$ ,

$$F_1^0(\tau) = -CH / \tilde{k}_2 [\ell_0 K_2(\tau) - K_3(\tau)] = F_1^*(\tilde{\tau}),$$

$$F_2^0(\tau) = -2C / \tilde{k}_2 [\ell_1 K_2(\tau) - K_4(\tau)] = F_2^*(\tilde{\tau}),$$

Функция  $Y_r(\tau) = y_r(\varepsilon\tau)$  является решением задачи типа (4.15):

$$-DY_r''(\tau) = C, \quad Y_r(0) / Y_r'(0) = \ell_0 + 2\ell_1 \tau^{*-1} = -Y_r(\tau^*) / Y_r'(\tau^*).$$

2. Если источник убывает, как  $e^{-z/\varepsilon}$  при возрастании  $z$ , то условия (1.4), не выполняются. В рамках развиваемого подхода решение такой задачи следует искать в виде (1.7), где гладкая часть  $y_r(z)$  определяется однородным уравнением  $y_r''(z) = 0$  при краевых значениях  $y_r(0) = y^0$ ,  $y_r(H) = y^*$ , которые выбираются так, чтобы сингулярные части  $Y^0(\tau)$  и  $Y^*(\tau)$  убывали бы с ростом  $\tau$  экспоненциально. В этом случае имеем:

$$y_r(z) = y^0 + (y^* - y^0)z / H,$$

$$F^0(\tau) = -y^0 K_2(\tau) + (y^* - y^0) / \tau^* K_3(\tau) + f(\varepsilon\tau),$$

$$F^*(\tau) = -y^* K_2(\tau) + (y^0 - y^*) / \tau^* K_3(\tau),$$

и требования (4.11) приводят к равенствам

$$y^0 = (F, \Phi)(\tau^* + \ell_0) / [v_2(\tau^* + 2\ell_0)], \quad y^* = (F, \Phi)\ell_0 / [v_2(\tau^* + 2\ell_0)], \quad (4.18)$$

$$Y_r(\tau) = y_r(\varepsilon\tau) = (F, \Phi)(\tau^* + \ell_0 - \tau) / [v_2(\tau^* + 2\ell_0)],$$

где  $(F, \Phi) = \int_0^{\tau^*} F(\tau)\Phi(\tau)d\tau$ . Поскольку

$$Y_r(\tau^*) = Y_r(0) = -(F, \Phi) / [v_2(\tau^* + 2\ell_0)],$$

краевые условия могут быть записаны в виде

$$Y_r(0) / Y_r'(0) = -(\tau^* + \ell_0), \quad Y_r(\tau^*) / Y_r'(\tau^*) = -\ell_0.$$

В задачах с ядром (1) отсюда получаем известные асимптотические формулы [17,18] для плотности излучения в рассеивающем изотропно слое большой оптической толщины с оценкой погрешности  $O(e^{-\beta\tau})$ , где  $\beta = 1 - \delta$ ,  $\delta$  - малое положительное число. Традиционное диффузионное приближение (4.16) в этом случае (при  $f(z) \sim e^{-z/\varepsilon}$ ) оказывается хуже. Действительно, решение задачи (4.16) может быть записано в виде  $Y_D(\tau) = A + B\tau + G(\tau)$ , где  $A = N(\tau^*)[2F_0(\tau^* + \ell_0)\ell_0 + F_1\tau^{*2}]$ ,  $B = N(\tau^*)\tau^*(F_0 - 2F_1)$ ,

$$N(\tau^*) = \tau^* / [2D(\tau^* + 2\ell_0)], \quad F_i = (\tau^*)^{-i-1} \int_0^{\tau^*} \tau^i F(\tau) d\tau, \quad i=0,1,$$

$$G(\tau) = -1 / (2D) \int_0^{\tau^*} F(\tau') |\tau' - \tau| d\tau', \quad F(\tau) = f(\varepsilon\tau).$$

В  $G(\tau)$  появляются слагаемые, убывающее как  $e^{-\tau} = e^{-z/\varepsilon}$ , что затрудняет численное решение, требуя более густой сетки в «пограничных слоях» - при  $z \leq \varepsilon$ ,  $z \geq H - \varepsilon$ . В асимптотической области при  $\tau \gg 1$  линейность зависимости от  $\tau$  передается правильно, поскольку  $G(\tau) = O(\tau e^{-\tau})$ . Однако коэффициенты  $A$  и  $B$  не соответствуют асимптотической формуле (4.18). Для иллюстрации рассмотрим уравнение с ядром (1) и  $F(\tau) = E_k(\tau) / 2$ . В этом случае

$$D = \nu_2 = 1/3, \quad \ell_0 = 0.7104,$$

$$Y_r(\tau) = m_1(\tau^* + \ell_0 - \tau) / (\tau^* + 2\ell_0), \quad m_1 = \nu_k / (2\nu_2),$$

$$Y_D(\tau) = m_2(\tau^* + \ell_0 - \tau) / (\tau^* + 2\ell_0) + O(\tau e^{-\tau}), \quad m_2 = 3/2[\ell_0 / k + 1 / (k+1)].$$

Разница в коэффициентах  $m_1$  и  $m_2$  составляет 3-4 % для  $k=1,2,3$ :  $m_1 = 1.73, 1.00, 0.710$ ,  $m_2 = 1.82, 1.04, 0.73$  соответственно. Она убывает с ростом  $k$ , т.е. с возрастанием гладкости  $f(z)$  при  $z \rightarrow 0$ .

### 3. Пусть

$$z_0 \in (0, H), \quad \tau_0 = z_0 / \varepsilon \gg 1, \quad \tau^* - \tau_0 = (H - z_0) / \varepsilon \gg 1, \quad (4.19)$$

и функция  $f(z)$ , удовлетворяя условиям гладкости (1.4) на каждом из интервалов  $(0, z_0)$  и  $(z_0, H)$ , имеет разрыв в т.  $z = z_0$ :

$$f(z)|_{z \leq z_0} = f_1(z), \quad f(z)|_{z \geq z_0} = f_2(z), \quad f_1(z_0) \neq f_2(z_0).$$

Решение такой двузонной задачи можно также представить суммой регулярной и сингулярной частей в каждой зоне

$$y(z)|_{z \leq z_0} = y_{r1}(z) + y_{c1}(\tau), \quad y(z)|_{z \geq z_0} = y_{r2}(z) + y_{c2}(\tau),$$

для регулярных слагаемых воспользоваться разложениями

$$\begin{aligned} y_{r1}(z) &= \varepsilon^{-2} [y_{10}(z) + \varepsilon y_{11}(z) + \dots + \varepsilon^m y_{1m}(z)], \\ y_{r2}(z) &= \varepsilon^{-2} [y_{20}(z) + \varepsilon y_{21}(z) + \dots + \varepsilon^m y_{2m}(z)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

и определить краевые условия для  $y_{1n}(z)$  в т.  $z=0$  и для  $y_{2n}(z)$  в т.  $z=H$ , а также условия сшивки в т.  $z=z_0$  таким образом, чтобы соответствующие сингулярные слагаемые  $Y_{c1}$  и  $Y_{c2}$  были существенны лишь в пограничных слоях при  $z \approx 0$ ,  $z \approx z_0$ ,  $z \approx H$ . Функции  $Y_{c1}$  и  $Y_{c2}$  определяются интегральными уравнениями



$$Y_{C_1}(\tau) = \int_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau) Y_{C_1}(\tau') d\tau' + F_{C_1}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0,$$

$$Y_{C_2}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau^*} K(\tau' - \tau) Y_{C_2}(\tau') d\tau' + F_{C_2}(\tau), \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau^*,$$

где

$$F_{C_1}(\tau) = F_1(\tau) - Y_{r_1}(\tau) + \int_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau) Y_{r_1}(\tau') d\tau' + \int_{\tau_0}^{\tau^*} K(\tau' - \tau) Y_{r_2}(\tau') d\tau', \quad \tau \leq \tau_0,$$

$$F_{C_2}(\tau) = F_2(\tau) - Y_{r_2}(\tau) + \int_0^{\tau_0} K(\tau' - \tau) Y_{r_1}(\tau') d\tau' + \int_{\tau_0}^{\tau^*} K(\tau' - \tau) Y_{r_2}(\tau') d\tau', \quad \tau \geq \tau_0,$$

$$F_{1,2}(\tau) = f_{1,2}(\varepsilon\tau), \quad Y_{r_1,r_2}(\tau) = y_{r_1,r_2}(\varepsilon\tau).$$

Используя разложения (П.22), (П.25), найдем для функций  $F_{C_1}, F_{C_2}$  следующие представления

$$F_{C_1}(\tau) = F_1(\tau) + \sum_1^{L-1} \tilde{k}_{2\ell} (2\ell)! Y_{r_1}^{(2\ell)}(\tau) - \hat{Q} Y_{r_1}(0, \tau) -$$

$$- \hat{P} Y_{r_1}(\tau_0, \tau_0 - \tau) + \hat{P} Y_{r_2}(\tau_0, \tau_0 - \tau) - \hat{P} Y_{r_2}(\tau^*, \tau^* - \tau) + \delta_C(\tau).$$

$$F_{C_2}(\tau) = F_2(\tau) + \sum_1^{L-1} \tilde{k}_{2\ell} (2\ell)! Y_{r_2}^{(2\ell)}(\tau) - \hat{Q} Y_{r_1}(0, \tau) -$$

$$+ \hat{Q} Y_{r_1}(\tau_0, \tau - \tau_0) - \hat{Q} Y_{r_2}(\tau_0, \tau - \tau_0) - \hat{P} Y_{r_2}(\tau^*, \tau^* - \tau) + \delta_C(\tau),$$

где операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$  определяются соотношениями (П.21),  $L = [m/2] + 2$ ,

$$\delta_C(\tau) = \int_0^{\tau_0} K_{2L+1}(\tau' - \tau) Y_{r_1}^{(2\ell)}(\tau') d\tau' + \int_{\tau_0}^{\tau^*} K_{2L+1}(\tau' - \tau) Y_{r_2}^{(2\ell)}(\tau') d\tau' = O(\varepsilon^{2L-2}).$$

Пренебрегая величинами  $\sim \varepsilon^{m+1}, \varepsilon^{m+2}$ , из равенств

$$F_{1,2}(\tau) + \sum_0^{L-1} \tilde{k}_{2\ell} / (2\ell)! Y_{r_1,r_2}^{(2\ell)}(\tau) = 0 \quad (4.22)$$

получим систему уравнений вида (4.5) для коэффициентов  $y_{1n}$  и  $y_{2n}$ , а из (П.26) следуют оценки

$$\left| \hat{P} Y_{r_2}(\tau^*, \tau^* - \tau) \right|_{\tau < \tau_0} \leq O(e^{-(\tau^* - \tau_0)}), \quad \left| \hat{Q} Y_{r_1}(0, \tau) \right|_{\tau > \tau_0} \leq O(e^{-\tau_0}). \quad (4.23)$$

Поэтому с погрешностью  $O(e^{-\tau_0}) + O(e^{-(\tau^* - \tau_0)}) + O(\varepsilon^{2L-2})$  функции  $F_{C_1}, F_{C_2}$  могут быть представлены в виде

$$F_{C_1}(\tau) = F^0(\tau) + F^1(\tau_0 - \tau), \quad F_{C_2}(\tau) = F^*(\tau^* - \tau) + F^2(\tau - \tau_0),$$

где

$$\begin{aligned}
F^0(\tau) &= -\hat{Q}Y_{r_1}(0, \tau) & F^*(\tau^* - \tau) &= -\hat{P}Y_{r_2}(\tau^*, \tau^* - \tau), \\
F^1(\tau_0 - \tau) &= \hat{P}Y_{r_2}(\tau_0, \tau_0 - \tau) - \hat{P}Y_{r_1}(\tau_0, \tau_0 - \tau) = \\
&= \sum_0^{2L-1} (Y_{r_2}^{(\ell)} - Y_{r_1}^{(\ell)})_{\tau=\tau_0} K_{\ell+2}(\tau_0 - \tau), \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2(\tau - \tau_0) &= -\hat{Q}Y_{r_2}(\tau_0, \tau - \tau_0) + \hat{Q}Y_{r_1}(\tau_0, \tau - \tau_0) = \\
&= -\sum_0^{2L-1} (-1)^\ell (Y_{r_2}^{(\ell)} - Y_{r_1}^{(\ell)})_{\tau=\tau_0} K_{\ell+2}(\tau - \tau_0),
\end{aligned}$$

и соответственно с погрешностью  $O(e^{-\tau_0} / \varepsilon^2) + O(e^{-(\tau^* - \tau_0)}) / \varepsilon^2 + O(\varepsilon^{m-1})$  имеем:

$$Y_{C1}(\tau) = Y^0(\tau) + Y^1(\tau_0 - \tau), \quad Y_{C2}(\tau) = Y^*(\tau^* - \tau) + Y^2(\tau - \tau_0).$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^{\tau_0} F^0(\tau)\Phi(\tau)d\tau = 0, \quad \int_0^{\tau^* - \tau_0} F^*(\tau)\Phi(\tau)d\tau = 0, \tag{4.25}$$

$$\int_0^{\tau_0} F^1(\tau)\Phi(\tau)d\tau = 0, \quad \int_0^{\tau^* - \tau_0} F^2(\tau)\Phi(\tau)d\tau = 0. \tag{4.26}$$

Равенства (4.25) приводят к соотношениям (4.12)-(4.14), определяющим краевые условия для функций  $y_{1n}$  в т.  $z=0$  и  $y_{2n}$  в т.  $z=H$ . Из (4.26) получим условия сшивки функций  $y_{1n}$  и  $y_{2n}$  в т.  $z=z_0$ , приравнявая нулю коэффициенты при  $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{m-2}$ :

$$\begin{aligned}
v_2(y_{10} - y_{20})_{z=z_0} = 0 \quad \text{или} \quad y_{10}(z_0) = y_{20}(z_0); \\
[v_2(y_{11} - y_{21}) \pm v_3(y'_{10} - y'_{20})]_{z=z_0} = 0; \tag{4.27}
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$y_{11}(z_0) = y_{21}(z_0), \quad y'_{10}(z_0) = y'_{20}(z_0); \tag{4.28}$$

.....

$$\begin{aligned}
[v_2(y_{1n} - y_{2n}) + v_3(y'_{1n-1} - y'_{2n-1}) + \dots + v_{n+2}(y_{10}^{(n)} - y_{20}^{(n)})]_{z=z_0} = 0, \\
[v_2(y_{1n} - y_{2n}) - v_3(y'_{1n-1} - y'_{2n-1}) + \dots + (-1)^n v_{n+2}(y_{10}^{(n)} - y_{20}^{(n)})]_{z=z_0} = 0,
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
y_{1n}(z_0) - y_{2n}(z_0) &= c_n [f_1^{(n-2)}(z_0) - f_2^{(n-2)}(z_0)], \\
y'_{1n-1}(z_0) - y'_{2n-1}(z_0) &= d_n [f_1^{(n-2)}(z_0) - f_2^{(n-2)}(z_0)], \tag{4.29}
\end{aligned}$$

где величины  $c_n$  и  $d_n$  определяются моментами  $\tilde{k}_{2n}$  и  $v_n = (K_n, \Phi)$  с точностью до величин  $O(e^{-\tau_0}), O(e^{-(\tau^* - \tau_0)})$ ,  $n = 2, 3, \dots, m$ .

Уже из (4.24) следует, что главные члены ( $\sim \varepsilon^{-2}$  и  $\varepsilon^{-1}$ ) функций  $Y^1$  и  $Y^2$  пропадают в условиях сшивки (4.27) (4.28). Условия (4.29) уничтожают гладкую часть соответствующих сингулярных слагаемых ( $\sim \varepsilon^{n-2}$ ), оставляя лишь пограничный слой при  $z \approx z_0$ .

Для примера приведем результаты для задачи с  $f_1 = C_1 = \text{const}$ ,  $f_2 = 0$ . В этом случае коэффициенты  $y_{1n}$  и  $y_{2n}$  разложений (4.20) определяются уравнениями

$$\begin{aligned} y''_{10} + 2A = 0, \quad y''_{1n} = 0 \quad \text{при } n \geq 1, \quad 0 < z < z_0, \\ y''_{2n} = 0, \quad \text{при } n \geq 0, \quad z_0 < z < H, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где  $A = C_1 / \tilde{k}_2$ , а краевые условия задаются соотношениями (4.13)-(4.14) и (4.27)-(4.29). Отсюда следует, что

$$y_{10}(z) = A z_0 z [2 - z / z_0 - z_0 / H], \quad y_{20}(z) = A z_0^2 (1 - z / H), \quad (4.31)$$

а  $y_{1n}$  и  $y_{2n}$  при всех  $n \geq 1$  - линейные функции. Это обстоятельство позволяет легко найти точные выражения для  $y_{r1}(z)$  и  $y_{r2}(z)$ . Полагая

$$\begin{aligned} y_{r1}(z) &= y_{10}(z) / \varepsilon^2 + A / \varepsilon (M_1 + N_1 z), \\ y_{r2}(z) &= y_{20}(z) / \varepsilon^2 + A / \varepsilon (M_2 + N_2 z), \end{aligned}$$

где  $M_1, M_2, N_1, N_2$  - неизвестные коэффициенты, получим краевые условия для этих функций непосредственно из условий ортогональности (4.25)-(4.26):

$$\begin{aligned} y_{r1}(0) = \ell_0 \varepsilon y'_{r1}(0) + 2\ell_1 A, \quad y_{r2}(H) = -\ell_0 \varepsilon y'_{r2}(H), \\ y_{r1}(z_0) = y_{r2}(z_0) + 2\ell_1 A, \quad y'_{r1}(z_0) = y'_{r2}(z_0). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Теперь, учитывая краевые условия для функций  $y_{10}(z)$  и  $y_{20}(z)$ , найдем уравнения для коэффициентов  $M_1, M_2$  и  $N_1, N_2$ :

$$\begin{aligned} M_1 - \ell_0 \varepsilon N_1 = \ell_0 z_0 (2 - z_0 / H) + 2\varepsilon \ell_1, \quad M_2 + (H + \ell_0 \varepsilon) N_2 = \ell_0 z_0^2 / H, \\ M_1 + z_0 N_1 = M_2 + z_0 N_2 + 2\varepsilon \ell_1, \quad N_1 = N_2. \end{aligned}$$

Отсюда для регулярной части решения исходной задачи получаем выражение

$$y_r(z) = \begin{cases} y_{10}(z) + W(z) + 2A\ell_1 & \text{при } 0 \leq z \leq z_0, \\ y_{20}(z) + W(z) & \text{при } z_0 \leq z \leq H, \end{cases} \quad (4.33)$$

где

$$W(z) = A\ell_0 z_0 / \varepsilon [2 - z_0 / H - 2(1 - z_0 / H)(H + 2\ell_0 \varepsilon)(z + \ell_0 \varepsilon)].$$

Функции  $y_{1n}$ ,  $y_{2n}$  - решения системы (4.30) с условиями (4.13)-(4.14), (4.27)-(4.29) отвечают коэффициентам разложения (4.33) по степеням  $\varepsilon$ . Отметим, что регулярное решение в этом случае имеет

разрыв в т.  $z_0$ :  $y_{r1}(z_0) - y_{r2}(z_0) = 2C_1 \ell_1 / \tilde{k}_2$ , его первая производная непрерывна, а  $y_{r1}''(z_0) - y_{r2}''(z_0) = -2C_1 / (\tilde{k}_2 \varepsilon^2)$ ,  $y_{r1}^{(\ell)} = y_{r2}^{(\ell)} = 0$  для  $\ell > 2$ . Поэтому из (4.24), (4.26) и (П.16) следуют соотношения

$$F^1(\tilde{\tau}) = -F^2(\tilde{\tau}), \quad Y^1(\tilde{\tau}) = -Y^2(\tilde{\tau}) + O(e^{-\beta\tau_0}) + O(e^{-\beta(\tilde{\tau}^* - \tau_0)}).$$

Из условий (4.32) и формул (4.24), используя (П.14), (П.18), получаем оценки

$$Y^0(\tau) = O(e^{-\beta\tau} / \varepsilon), \quad Y^1(\tau_0 - \tau) = O(e^{-\beta(\tau_0 - \tau)}) \text{ при } \tau < \tau_0, \\ Y^*(\tilde{\tau}^* - \tau) = O(e^{-\beta(\tilde{\tau}^* - \tau)} / \varepsilon), \quad Y^2(\tau - \tau_0) = O(e^{-\beta(\tau - \tau_0)}) \text{ при } \tau > \tau_0.$$

Остановимся теперь на задачах, где  $k_0 < 1$ , но  $1 - k_0$  малая величина. При  $1 - k_0 \gg \varepsilon$  сходятся приближения, построенные в §2-§3, со скоростью  $O(\varepsilon^2 / (1 - k_0))$ . В этом случае  $u_0 = O(\sqrt{1 - k_0}) \gg \varepsilon$  и, следовательно, размеры пограничного слоя определяются величиной  $\varepsilon / u_0 \ll 1$ .

Если  $1 - k_0 < \varepsilon^2$ , то, представив исходное уравнение (3) в виде

$$k_0 y(z) = \hat{k} y(z) + f(z) - (1 - k_0) y(z),$$

для построения решения также воспользуемся разложениями (4.2), (4.10). Функции  $y_n(z)$  подчиняются уравнениям

$$\tilde{k}_2 / 2 y_0'' + f(z) = 0, \quad y_{2\ell+1}'' = 0, \quad y_{2\ell}'' = a_{2\ell} f^{(2\ell)} + (1 - k_0) y_{2\ell-2}''. \quad (4.34)$$

Уравнения (4.12), определяющие  $y_n^0$ , сохраняют свой вид, а (4.13), (4.14) изменяются для  $n > 2$  вследствие отличия (4.34) от (4.5). Для первых членов разложения (4.2)  $y_0$  и  $y_1$  краевые условия совпадают с установленными при  $k_0 = 1$ , и, следовательно, обычное диффузионное приближение  $y^1(z) = y_0(z) / \varepsilon^2 + y_1(z) / \varepsilon$  не чувствует отклонения  $k_0$  от 1 на величину  $\leq O(\varepsilon^2)$ . Оно сказывается лишь в приближениях более высокого порядка – в слагаемых  $y_n(z)$  при  $n > 1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены простейшие слабо-сингулярные задачи, отвечающие неоднородным интегральным уравнениям с ядрами, зависящими лишь от разности аргументов. Однако развитый здесь алгоритм построения равномерно сходящихся разложений решения по малому параметру, опирающийся на разделение регулярной и сингулярной частей решения, может быть распространен и на более сложные случаи: неодномерные задачи,

задачи для неоднородных сред, где ядра зависят не только от разности аргументов, задачи для систем интегральных уравнений и т.п., если в этих задачах существует малый параметр, определяющий размеры области, где существенна сингулярность решения, а в основной части рассматриваемой области решение является гладкой функцией.

## Приложение

Вопрос о разрешимости интегрального уравнения

$$Y(\tau) = \hat{K}Y(\tau) + F(\tau), \quad \hat{K}Y(\tau) = \int_0^{\infty} K(\tau - \tau')Y(\tau')d\tau' \quad (\text{П.1})$$

и асимптотическом поведении его решений при  $\tau \rightarrow \infty$  рассматривался во многих работах. Приведем здесь используемые в данной работе результаты для однородного ( $F(\tau) = 0$ ) уравнения [15,16] и для неоднородного [14,17].

1. Обозначим через  $L_2^\alpha(0, \infty) = L_2^\alpha$  при  $\alpha \in [-1, 1]$  класс функций  $F(\tau)$ , определенных на  $(0, \infty)$ , таких, что

$$F(\tau) = \tilde{F}(\tau)e^{\alpha\tau}, \quad \tilde{F}(\tau) \in L_2(0, \infty). \quad (\text{П.2})$$

Очевидно,  $L_2^\alpha \subset L_2^\beta$  при  $\alpha > \beta$ .

**Теорема П.1.** Пусть выполняются условия

$$K(-\tau) = K(\tau) \in L_2^{-1}(0, \infty) \quad (\text{П.3})$$

Тогда: 1) характеристическое уравнение

$$1 - \chi(u) = 0, \quad (\text{П.4})$$

где  $\chi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-u\tau}d\tau$ , во всякой полосе  $|\operatorname{Re} u| \leq q < 1$  на комплексной плоскости имеет не более, чем конечное число  $2(J_q + 1)$  корней  $u_{\pm j}$ ,  $u_j = u_{-j}$ ,  $\operatorname{Re} u_j > 0$  при  $j = 0, 1, \dots, J_q$  (кратные корни считаются столько раз, какова их кратность);

2) размерность пространства решений однородного уравнения (П.1) в классе  $L_2^q$  равна  $J_q + 1$ ;

3) Если  $F(\tau) \in L_2^{-\alpha}$ , где  $I \geq \alpha > 0$  и  $J_q + 1 > 0$ , то существует, по крайней мере, одно решение неоднородного уравнения (П.1) в классе  $L_2^{-\beta}$  при  $\beta = \alpha$ , если  $\underline{u} = \min_{j>0} \operatorname{Re} u_j > \alpha$  и при любом  $\beta < \underline{u}$ , если  $\underline{u} \leq \alpha$ , а

решениями из классов  $L_2^\gamma$  при  $\gamma \in (-\beta, q)$  могут быть лишь линейные комбинации решений из  $L_2^{-\beta}$  с решениями однородного уравнения;

4) если в полосе  $|\operatorname{Re} u| < 1$  нет корней уравнения (П.4), т.е.  $J_q + 1 = 0$ , то неоднородное уравнение (П.1) имеет единственное решение и оно принадлежит  $L_2^{-\beta}$  при  $\beta = \alpha$ , если  $\alpha < 1$ , и  $\beta < 1$ , если  $\alpha = 1$ .

2. Пусть наряду с условиями (П.3) выполняются еще условия

$$K(\tau) \geq 0, \chi(0) = k_0 \leq 1, \chi(u) \rightarrow \infty \text{ при } u \rightarrow 1-0. \quad (\text{П.5})$$

Тогда характеристическое уравнение (П.4) имеет 2 и только 2 действительных корня  $u_0, u_{-0}$  на интервале  $(-1, 1)$ .

В самом деле, поскольку  $\chi(u)$  - непрерывная функция на интервале  $[0, 1)$  [15],  $1 - \chi(0) \geq 0$ , а при  $u \rightarrow 1$  вследствие (П.5) функция  $\chi(u)$  должна неограниченно возрастать, то по крайней мере, один корень уравнение (П.4) должно иметь. При  $u > 0$  справедлива оценка

$$\chi'(u) = \int_0^\infty \tau K(\tau) (e^{u\tau} - e^{-u\tau}) d\tau > 0 \text{ для всех } u > 0. \text{ Но это означает, что}$$

функция  $1 - \chi(u)$ , монотонно убывая, не может иметь более одного положительного нуля  $u_0$  при  $k_0 < 1$ . Если  $k_0 = 1$ , то  $u_0 = 0$ . Этот корень двойной,  $u_{-0} = u_0$ , но не более, чем двойной, поскольку

$$\chi'(0) = k_1 = 0, \chi''(0) = \tilde{k}_2 > 0.$$

Если  $u = i\eta$ , то при  $K(\tau) \geq 0, k_0 < 1$  справедливы соотношения:

$$\chi(u) = \int_0^\infty K(\tau) (e^{i\eta\tau} + e^{-i\eta\tau}) d\tau < \int_{-\infty}^\infty K(\tau) d\tau \leq 1.$$

Поэтому мнимых корней уравнение (П.4) не имеет. Комплексные корни  $u_j$ , если они есть, должны составлять четверки:  $\pm\sigma_j \pm i\eta_j$  вследствие действительности и четности ядра.

Покажем, что  $\sigma = \min_{j>0} |\operatorname{Re} u_j| > u_0 \geq 0$ . С этой целью выделим действительную часть уравнения (П.4):

$$1 - \int_0^\infty K(\tau) \cos \eta\tau (e^{\sigma\tau} + e^{-\sigma\tau}) d\tau = 0.$$

Поскольку при  $\eta = 0$  равенство  $\cos \eta\tau = 1$  выполняется лишь на счетном множестве точек, должно выполняться неравенство  $e^{\sigma\tau} + e^{-\sigma\tau} > e^{u_0\tau} + e^{-u_0\tau}$  и, следовательно,  $\sigma > u_0$ .

Если ядро  $K(\tau)$  определяется формулой

$$K(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\tau s} f(s) ds, \quad 1 \leq \beta \leq \infty, \quad f(s) \geq 0, \quad (\text{П.6})$$

то при  $k_0 < 1$  характеристическое уравнение имеет лишь 2 действительных корня  $u_0, u_{-0}$ .

В самом деле, для комплексного корня  $\sigma + i\tau$  при  $\sigma \neq 0$  мнимая часть уравнения (П.4) приводится к виду

$$\eta \int_{\alpha}^{\beta} s f(s) [(s + \sigma)^2 + \eta^2]^{-1} [(s - \sigma)^2 + \eta^2]^{-1} ds = 0.$$

Это равенство не может выполняться при  $\eta \neq 0$ .

Частным случаем ядра (П.6) является ядро (1), для которого  $\alpha = 1, \beta = \infty, f(s) = s^{-1} > 0$ . Для ядра (2) множество корней  $u_j$  наряду с  $u_0, u_{-0}$  может содержать и комплексные числа.

В задачах о переносе излучения с полиномиальными индикатрисами характеристическое уравнение допускает лишь действительные корни, но их может быть и более двух [12]. В таких случаях ядро интегрального уравнения для плотности излучения, к которому приводится исходная задача должно быть знакопеременной функцией на  $(0, \infty)$ .

3. Метод Винера-Хопфа позволяет получить асимптотические представления для решений уравнения (П.1) при  $\tau \rightarrow \infty$  в условиях (П.3) [13-17]. Приведем здесь результаты для того часто встречающегося в прикладных задачах случая, когда старший корень  $u_0$  характеристического уравнения – действительный, простой, если  $k_0 < 1$ , или двойной, если  $k_0 = 1$ , а прочие корни  $u_j$ , перенумерованные в порядке возрастания  $\text{Re} u_j$  или  $\text{Im} u_j$ , если  $\text{Re} u_j$  совпадают (каждый корень считается столько раз какова его кратность  $n_j$ ), удовлетворяют условию:

$$\text{Re} u_j > u_0 \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J_q. \quad (\text{П.7})$$

**Теорема П.2.** В условиях (П.3), (П.7) справедливы следующие утверждения.

1) В качестве базиса пространства решений в  $L_2^q(0, \infty)$  однородного уравнения (П.1) могут быть выбраны решения вида

$$\Phi_{jk}(\tau) = \tau^k e^{u_j \tau} + g_{jk}(\tau), \quad g_{jk}(\tau) \in L_2^q(0, \infty), \quad (\text{П.8})$$

$$j = 0, 1, \dots, J_q, \quad k = 0, 1, \dots, n_{j-1} \quad \text{при} \quad u_j = 0, \quad k = 1 \quad \text{при} \quad u_j = u_0 = 0.$$

2) Пусть  $F(\tau) \in L_2^{-\alpha}(0, \infty)$ , где  $\alpha \in (u_0, 1]$ . Тогда в классе  $L_2^{-u_0}$  существует единственное решение неоднородного уравнения (П.1) и оно может быть представлено в виде

$$Y(\tau) = C_0 e^{-u_0 \tau} + \sum_{j \geq 1} P_{n_{j-1}}(\tau) e^{-u_j \tau} + g(\tau), \quad g(\tau) \in L_2^{-\beta}, \quad (\text{П.9})$$

где  $C_0 = N_0 \int_0^{\infty} \Phi(\tau) F(\tau) d\tau$ ,  $\Phi(\tau) = \Phi_{01}(\tau)$  при  $k_0 = 1$ ,

$\Phi(\tau) = \Phi_{00}(\tau)$  при  $k_0 < 1$ ,  $u_1, \dots, u_L$  - все те корни уравнения (П.4), для которых  $0 < \text{Re } u_j < \alpha$ ,  $P_{n_{j-1}}$  - полином степени  $n_j - 1$ ,

$$P_{n_{j-1}}(\tau) \Big|_{n_j=1} = C_j = N_j \int_0^{\infty} \Phi_{j0}(\tau) F(\tau) d\tau,$$

$\Phi_{01}(\tau), \Phi_{j0}(\tau)$  решения однородного уравнения, определенные выражениями (П.8),  $N_j$  - нормировочные коэффициенты, зависящие лишь от ядра  $K(\tau)$ ,  $\beta > \text{Re } u_1$ .

3) Всякое другое решение неоднородного уравнения (П.1) из классов  $L_2^q$  есть линейная комбинация решения (П.9) с решениями (П.8) однородного уравнения.

При  $k_0 < 1$  ряд Неймана для неотрицательного ядра, очевидно, сходится к решению (П.9) в пространстве ограниченных функций. Покажем, что такая сходимость имеет место и при  $k_0 = 1$ , по крайней мере, в тех случаях, когда выполняются условия теоремы П.2 и

$$K(\tau) \geq 0, \quad |F(\tau)| \leq C \int_{\tau}^{\infty} K(\tau') d\tau' \equiv CK_2(\tau). \quad (\text{П.10})$$

В самом деле, поскольку при  $k_0 = 1$  справедливы соотношения

$$K[1] = \int_0^{\tau} K(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau = 1 - K_2(\tau), \quad (\text{П.11})$$

для любого  $n = 1, 2, \dots$  имеют место равенства

$$1 = K[1] + K_2(\tau) = \sum_0^n K^m K_2(\tau) + K^{n+1}[1].$$



Последовательность  $(\sum_0^n K^m K_2)$  является возрастающей, ограниченной сверху и потому сходящейся всюду на  $(0, \infty)$  к ограниченной функции.

Из единственности решения (П.9) вытекает равенство  $1 = \sum_0^\infty K^m K_2(\tau)$ . Поскольку в условиях (П.10) такой ряд почленно мажорирует ряд Неймана  $\sum_0^\infty K^m F(\tau)/C$ , последний также сходится всюду на  $(0, \infty)$  и  $\sum_0^\infty K^m |F(\tau)| \leq C$ .

Второе из условий (П.10) выполняется, например, для всякой ограниченной финитной функции (т.е. при  $F(\tau) = 0$  для  $\tau > \tau^* > 0$ ).

В этом случае

$$|F(\tau)| \leq [\sup_{(\tau)} |F(\tau)| / K_2(\tau^*)] K_2(\tau)$$

и, следовательно,

$$|Y(\tau)| \leq \sup_{(\tau)} |F(\tau)| / K_2(\tau^*). \quad (\text{П.12})$$

Отметим еще, что из равенства (П.11) при  $k_0 = 1$ , а также равенств

$$K[e^{-\alpha\tau}] = \chi(\alpha)e^{-\alpha\tau} - K_2^\alpha(\tau) = e^{-\alpha\tau} - f(\tau), \quad (\text{П.13})$$

где

$$K_2^\alpha(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_\tau^\infty e^{\alpha\tau} K(\tau) d\tau, \quad f(\tau) = [1 - \chi(\alpha)]e^{-\alpha\tau} + K_2^\alpha(\tau),$$

которые могут рассматриваться как уравнения вида (П.1) с решениями соответственно  $Y(\tau) = 1$ ,  $Y(\tau) = e^{-\alpha\tau}$ , следуют формулы:

$$N_0 = (\Phi_{01}, F) / (\Phi_{01}, K_2) \text{ при } k_0 = 1, \quad N_j = (\Phi_{j0}, F) / (\Phi_{j0}, K_2^{u_j}),$$

если  $u_j$  - простой корень,  $\text{Re } u_j > 0$  -. Здесь  $\Phi_{jk}$  - решения соответствующего однородного уравнения с асимптотикой (П.8),

$$(\Phi, F) = \int_0^\infty \Phi(\tau) F(\tau) d\tau.$$

Для ядра (1), в частности, [14, 17],  $(\Phi_{01}, K_2) = 1/3$  при  $k_0 = 1$ ,

$$(\Phi_{00}, K_2^{u_0}) = (u_0^2 - 1 + k_0)[u_0(1 - u_0^2)]^{-1} e^{-u_0 \ell_0} \text{ при } k_0 < 1,$$

$\ell_0 = \ell_0(k_0)$  - экстраполированная длина ( $0.7 < \ell_0 < 1$ ) [12].

4. Обращаясь к уравнению

$$Y(\tau) = \int_0^{\tau^*} K(\tau - \tau') Y(\tau') d\tau' + F(\tau) \quad (\text{П.14})$$

с конечной величиной  $\tau^*$ , ограничимся случаем, когда выполняются предположения (П.3), (П.7), (П.10). Пусть  $Y_\infty(\tau)$  - решение уравнения (П.1) с источником  $F_\infty(\tau) = F(\tau)$  при  $\tau \leq \tau^*$ ,  $F_\infty(\tau) = 0$  при  $\tau > \tau^*$ . Функция  $\Delta(\tilde{\tau}) = Y_\infty(\tau^* - \tilde{\tau}) - Y(\tau^* - \tilde{\tau})$  при  $\tilde{\tau} = \tau^* - \tau$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\tilde{\tau}) = \int_0^\infty K(\tilde{\tau} - \tau') \Delta(\tau') d\tau' + \delta(\tilde{\tau})$$

$$\text{где } \delta(\tilde{\tau}) = \int_{\tau^*}^\infty K(\tau' - \tau^* + \tilde{\tau}) Y_\infty(\tau') d\tau' = \int_0^\infty K(\tilde{\tau} + \tau'') Y_\infty(\tau^* + \tau'') d\tau''.$$

Если  $Y_\infty \in L_2^{-q}$  при  $0 < q < 1$ , то, опираясь на определение (П.2), имеем оценку  $|\delta(\tilde{\tau})| \leq C e^{-q\tau^* - \tilde{\tau}}$ , где  $C$  не зависит от  $\tau^*$ ,

$$C = \|K\|_{L_2} \|Y\|_{L_2} \geq \int_0^\infty K(\tau' + \tilde{\tau}) Y_\infty(\tau' + \tau^*) d\tau'.$$

Положим  $\delta_\infty(\tilde{\tau}) = \delta(\tilde{\tau})$  при  $\tilde{\tau} \leq \tau^*$ ,  $\delta(\tilde{\tau}) = 0$  при  $\tilde{\tau} > \tau^*$ . Соответствующее решение  $\Delta_\infty(\tilde{\tau})$  уравнения (П.1) положительно и ограничено сверху:

$$|\Delta(\tilde{\tau})| \leq |\Delta_\infty(\tilde{\tau})| < C e^{-q\tau^*} M e^{-u_0 \tilde{\tau}},$$

где  $M = \sup_{0 < \tau < \infty} [z(\tau) e^{u_0 \tau}]$ ,  $Z(\tau)$  - решение уравнения (П.1) при  $F(\tau) = e^{-\tau}$ ,  $M$  не зависит от  $\tau^*$ . Но это означает, что

$$Y(\tau) = Y_\infty(\tau) + O(e^{-q\tau^*}) e^{-u_0(\tau^* - \tau)}. \quad (\text{П.15})$$

Пусть  $Y_\infty(\tau) \in L_2^{-q}$  при  $1 > q > u_0$  в представлении (П.9) величина  $C_0$  обращается в 0. Это означает, что функция  $F_\infty(\tau)$  ортогональна соответствующему решению (П.8) однородного уравнения:

$$\int_0^{\tau^*} \Phi_{01}(\tau) F(\tau) d\tau = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{\tau^*} \Phi_{00}(\tau) F(\tau) d\tau = 0$$

Тогда справедлива следующая оценка скорости убывания  $Y(\tau)$  с ростом  $\tau$ :

$$Y(\tau) = Y_\infty(\tau) + O(e^{-q\tau^*}) e^{-u_0(\tau^* - \tau)}, \quad Y_\infty(\tau) = O(e^{-q\tau}), \quad u_0 < q < 1. \quad (\text{П.16})$$

5. Пусть выполняются ограничения (П.3), а  $f(z)$  - гладкая функция, удовлетворяющая условиям (1.4):  $|f^{(\ell)}(z)| \leq O(1)$  на  $(0, H)$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, 2L$ ,  $F(\tau) = f(\varepsilon\tau)$ ,  $\tau = z/\varepsilon$ . Тогда справедливы оценки

$$d^\ell F(\tau) / d\tau^\ell = O(\varepsilon^\ell) \quad \forall \tau \in (0, \tau^*), \quad \tau^* = H / \varepsilon, \quad \ell = 0, 1, \dots, 2L \quad (\text{П.17})$$

Найдем разложение по степеням  $\varepsilon$  интеграла

$$\int_{\alpha}^B K(\tau' - \tau) F(\tau') d\tau' = \int_{\alpha}^{\tau} K(\tau - \tau') F(\tau') d\tau' + \int_{\tau}^B K(\tau' - \tau) F(\tau') d\tau'$$

С этой целью введем функции

$$K_1(\tau) = K(\tau), \quad K_n(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K_{n-1}(\tau) d\tau = -K_{n+1}(\tau), \quad n = 2, 3, \dots \quad (\text{П.18})$$

и числа

$$\tilde{k}_{2n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2n} K(\tau) d\tau = k_{2n} / \varepsilon^{2n} = 2(2n)! K_{2n+2}(0).$$

Интегрируя по частям, будем иметь при  $\alpha < \tau < B$ :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\tau} K(\tau - \tau') F(\tau') d\tau' &= K_2(0) F(\tau) - K_2(\tau - \alpha) F(\alpha) - \int_{\alpha}^{\tau} K_2(\tau - \tau') F(\tau') d\tau' = \\ &= \dots = \sum_0^{2L-1} (-1)^\ell K_{\ell+2}(0) F^\ell(\tau) - \hat{Q}F(\alpha, \tau - \alpha) + \int_{\alpha}^{\tau} K_{2L+1}(\tau - \tau') F^{(2L)}(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^B K(\tau' - \tau) F(\tau') d\tau' &= K_2(0) F(\tau) - K_2(B - \tau) F(B) + \int_{\tau}^B K_2(\tau' - \tau) F(\tau') d\tau' = \\ &= \dots = \sum_0^{2L-1} K_{\ell+2}(0) F^\ell(\tau) - \hat{P}F(B, B - \tau) + \int_{\tau}^B K_{2L+1}(\tau' - \tau) F^{(2L)}(\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

где

$$\begin{aligned} \hat{Q}F(\alpha, \tau - \alpha) &= \sum_0^{2L-1} (-1)^\ell F^{(\ell)}(\alpha) K_{\ell+2}(\tau - \alpha), \\ \hat{P}F(B, B - \tau) &= \sum_0^{2L-1} F^{(\ell)}(B) K_{\ell+2}(B - \tau). \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

Складывая равенства (П.19), (П.20) и учитывая (П.17), находим искомое разложение при  $\tau \in (\alpha, B)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^B K(\tau' - \tau) F(\tau') d\tau' &= \sum_0^{2L-1} \tilde{k}_{2\ell} / (2\ell)! F^{(2\ell)}(\tau) - \\ &- \hat{Q}F(\alpha, \tau - \alpha) - \hat{P}F(B, B - \tau) + O(\varepsilon^{2L}). \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Полагая  $\alpha = 0$ ,  $B = \tau^*$ , получаем отсюда соотношение

$$\int_0^{\tau^*} K(\tau' - \tau)F(\tau')d\tau' = \sum_0^{2L-1} \tilde{k}_{2\ell} / (2\ell)! F^{(2\ell)}(\tau) - \hat{Q}F(0, \tau) - \hat{P}F(\tau^*, \tau^* - \tau) + O(\varepsilon^{2L}). \quad (\text{П.23})$$

Аналогичным образом найдем следующие представления

$$\int_{\alpha}^B K(\tau - \tau')F(\tau')d\tau' = -\hat{Q}F(\alpha, \tau - \alpha) + \hat{Q}F(B, \tau - B) + O(\varepsilon^{2L}) \quad (\text{П.24})$$

при  $\tau > B > \alpha$

$$\int_{\alpha}^B K(\tau' - \tau)F(\tau')d\tau' = \hat{P}F(\alpha, \alpha - \tau) - \hat{P}F(B, B - \tau) + O(\varepsilon^{2L}) \quad (\text{П.25})$$

при  $\tau < \alpha < B$ .

Здесь  $\hat{Q}F$  и  $\hat{P}F$  по-прежнему определяются формулами (П.21).

Отметим, что из (П.3) и (П.21) следуют оценки

$$|\hat{Q}F(\alpha, \tau - \alpha)| \leq O(e^{-(\tau - \alpha)})|F(\alpha)|, \quad |\hat{P}F(B, B - \tau)| \leq O(e^{-(B - \tau)})|F(B)|. \quad (\text{П.26})$$

Соотношение (П.23) позволяет уточнить оценку (П.12) для решения уравнения (П.14) в том случае, когда  $F(\tau)$  - ограниченная функция ( $|F(\tau)| \leq F < \infty$ ) и дополнительно к (П.3), (П.10) выполняются условия

$$K_3(\tau) \leq C_3 K_2(\tau), \quad K_4(\tau) \leq C_4 K_4(\tau), \quad C_3, C_4 \geq 0. \quad (\text{П.27})$$

Действительно, поскольку функция  $Z_{\infty}(\tau) \equiv 1$  является решением уравнения (П.1) при  $k_0 = 1$ ,  $F(\tau) = K_2(\tau)$ , для решения  $Y(\tau)$  уравнения (П.14) из сходимости рядов Неймана для  $z_{\infty}(\tau)$  и  $Y(\tau)$  следует оценка

$$|Y(\tau)| \leq C \quad \text{при} \quad |F(\tau)| \leq C K_2(\tau), \quad k_0 \leq 1. \quad (\text{П.28})$$

С другой стороны, если решение  $Z(\tau)$  уравнения (П.14) при  $F(\tau) \equiv 1$ ,  $k_0 \leq 1$  представить в виде

$$Z(\tau) = \tilde{k}_2^{-1}[\tau^2 + Z_C(\tau)],$$

то для  $Z_C(\tau)$ , используя (П.23) при  $F(\tau) = \tau^2 / k_2$ , получим уравнение

$$Z_C(\tau) = \int_0^{\tau^*} K(\tau' - \tau)Z_C(\tau')d\tau' + F^0(\tau) + F^*(\tau),$$

где  $F^0(\tau) = -2K_4(\tau)$ ,  $F^*(\tau) = -(\tau^*)^2 K_2(\tau^* - \tau) - 2\tau^* K_3(\tau^* - \tau) - 2K_4(\tau^* - \tau)$ .

Из (П.27) и (П.28) следует неравенство:  $|Z_C| < 4C_4 + 2\tau^* C_3 + (\tau^*)^2$ .

Поэтому для решения уравнения (П.14) при ограниченном источнике  $F(\tau)$  и  $k_0 \leq 1$  справедлива оценка:

$$|Y(\tau)| \leq \sup_{0 < \tau < \tau^*} |F(\tau)| [2[(\tau^*)^2 + C_3 \tau^* + 2C_4]] / k_2. \quad (\text{П.29})$$

### Литература

1. Вайникко Г., Педас А., Уба П. «Методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений, изд. ТГУ, Тарту, 1984 г.
2. Капер Н.Г., Kellogg R.B. "Asymptotic Behavior of the Solution of the Integral Transport Equation in Slab Geometry. SIAM J. Appl. Math., 32, №1, 191-200, 1977.
3. Graham I.G. Singularity Expansions for the Solutions of Second Kind Fredholm Integral Equations with Weakly Singular Convolution Kernels. J. Integr. Equat., 4, №1, 1-30, 1982.
4. Девисон В. «Теория переноса нейтронов». Атомиздат, М., 1960.
5. Калашников Н.П., Ремизович В.С., Рязанов М.И. «Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М., Атомиздат, 1980.
6. Рахматуллина А.Х. «Об асимптотике уравнений переноса» . ЖВМ и МФ, 5, 218-235, 1965.
7. Bardos C., Golse F., Perthame B. "The Radiation Transfere Equation: Existence of Solution and Diffusion Approximation under Accretivity Assumptions. Transp. Th. And Stat. Phys. 16, 637-652, 1987.
8. Larsen E., Keller J.B. "Asimptotic Solution of Neutron Transport Problems". J. Math. Phys. 15, 75-81, 1974.
9. Bardos C., Santos R., Sentis R. "Diffusion Approximation and Computation of the Critical Size. Trans. Amer. Math. Soc. 284, №2, 617-649, 1984.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. «Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений», «Наука», М., 1973.
11. Латышев В.Н., Тупчиев В.А. «Асимптотическое разложение решения уравнения переноса в случае малой средней длины свободного пробега. Диффер. уравнения, 19, №11, 1922 – 1927, 1983.

Латышев В.Н. Асимптотические решения стационарных задач в теории переноса. Автореферат канд. дисс. Институт атомной энргетики, Обнинск, 1989.

12. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса «Мир», М., 1972.
13. Масленников М. В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием. Тр. МИАН СССР, 97, 1968.
14. Гермогенова Т.А. «Некоторые свойства решений интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов». ДАН СССР 126 №2, 251-254, 1959.
15. Wiener N., Hopf E. Uber eine Klasse Singularen Integral Gleichungen., Sitz. Berlin Acad. Wiss. 696-706, 1931.
16. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье ГИТТЛ, М. 1948.
17. Гермогенова Т.А. «Краевые задачи для уравнения переноса». Автореферат докторской диссертации. ИПМ АН СССР. М, 1971.
18. Гермогенова Т.А. «О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. ЖВМ и МФ, 1, №6, 1001-1019, 1961.

## Асимптотические разложения решений уравнения переноса в оптически плотных средах

Препринт № 48 ИПМ АН СССР за 1993 г.

### Аннотация

Регулярная часть решения уравнения переноса излучения для плоскопараллельного слоя в предположениях о гладкости коэффициентов и источников, малости поглощения и слабой анизотропии представляется асимптотическим разложением по степеням параметра  $\varepsilon$  - величины, обратной оптической толщине слоя. Нулевые по угловой переменной моменты коэффициентов этого разложения подчиняются диффузионным уравнениям, краевые условия для которых определяются асимптотической теорией из требования быстрого убывания сингулярной части решения при удалении от граничных поверхностей. Для старших моментов получены рекуррентные формулы. Дана теоретическая оценка точности разложений  $n$ -го порядка ( $AP_N$  приближений,  $N = N(n)$ ), из которой следует, в частности, обоснование диффузионного приближения.  $AP_N$  - приближения отличаются от известных упрощенных  $P_N$  - приближений ( $SP_N$ ) как присутствием слагаемых с нечетными степенями параметра  $\varepsilon$ , так и формулировкой краевых условий. Строятся эквивалентные  $AP_N$  приближения метода дискретных ординат ( $AD_j$ ) с краевыми условиями типа условий отражения. Обсуждаются возможности распространения развитой теории на более широкий круг задач.

В приложении приводятся асимптотические формулы для решения однородного уравнения переноса вдали от облучаемой поверхности, а также оценки решения по параметру  $\varepsilon$  как при произвольных гладких внутренних источниках, так и при источниках, ортогональных  $P_0$  и  $P_1$  полиномам Лежандра.

## 1. Введение

Радиационная защита ядерно-технических установок, как правило, содержит протяженные гомогенные области с размерами во много длин свободных пробегов, обеспечивающие необходимое ослабление потоков излучения (обычно на несколько порядков). В связи с этим численное определение решения уравнения переноса в защитах оказывается особенно трудоемким. Между тем, решение в таких областях при сравнительно гладких источниках имеет достаточно простую структуру [1]: оно оказывается гладким внутри области и имеет особенности лишь у границ слоя.

Это позволяет в широком круге практических задач использовать диффузионное (или  $P_1$ ) приближение. Его теоретическому обоснованию и развитию посвящен большой цикл работ (см. обзор [2], [3-6]), где в основу полагается рассмотрение этого приближения как асимптотического предела уравнения переноса для малых длин среднего свободного пробега ( $1/\Sigma_1 = \varepsilon \ll 1$ ) при малом поглощении и изотропном рассеянии. Обобщение на случай сильно анизотропного рассеяния, где асимптотическим пределом оказывается система уравнений метода сферических гармоник, предлагается в работах [7,8].

*Разложение решения по степеням параметра  $\varepsilon$*  позволяет получить уравнения для кинетических поправок к  $P_1$  - приближению. Одним из практически интересных выходов этих исследований является анализ упрощенных  $P_N$  - уравнений ( $SP_N$  - Simplified  $P_N$  equations). Эти уравнения были предложены еще в 1961 г. Е.М.Гелбардом и использовались при небольших  $N$  рядом авторов для развития эффективного недорогого алгоритма уточнения  $P_1$  - приближения (см. обзор [9], [10-11]).

Теоретическому обоснованию  $SP_N$  - уравнений в простейшем случае (моноэнергетическая задача, однородная изотропно рассеивающая среда со слабым поглощением, вакуумные граничные условия), посвящены недавние работы Ларсена, Мак Ги и Морела [9-10], где показано, что эти уравнения отвечают формальному разложению по четным степеням параметра  $\varepsilon$  уравнения Пайерлса, соответствующего уравнению переноса, взятому в форме «асимптотического диффузионного скейлинга». Они имеют



существенные преимущества по сравнению с традиционными уравнениями метода дискретных ординат (особенно, в неоднородных задачах) в скорости счета, отсутствии лучевых эффектов и т.д. С другой стороны, для их решения могут быть использованы диффузионные программы и программы расчета низких приближений метода дискретных ординат для самосопряженной формы уравнения переноса [9-12].

Остаются, однако, неясными вопросы о выборе краевых условий для таких приближений, об оценке порядка близости их к точному решению. Определенные трудности возникают в задачах с сильной анизотропией, где даже первое приближение (аналог диффузионного) не имеет обоснования, хотя в [8] предложены примеры его успешного использования. Отдельного рассмотрения требуют задачи с сильным поглощением. Отсутствие строгой теории  $\varepsilon$  - разложений для исходного уравнения переноса создает определенные трудности в анализе соответствующих численных методов, в частности, в оценках точности грубосеточных аппроксимаций [5].

В настоящей работе развивается последовательный подход к решению этих вопросов, опирающийся на метод пограничных функций теории сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром [13]\*).

С этой целью строятся разложения решения уравнения переноса излучения по малому параметру  $\varepsilon$  - величине, обратной оптическому размеру области, как для гладкой части решения внутри области, так и для сингулярной - в пограничных слоях. Формулировка краевых условий для коэффициентов разложений этих частей опирается на использование результатов асимптотической теории для уравнения переноса в полупространстве [15, 16]. Такой подход позволяет рассмотреть задачи для сред как со слабым, так и с сильным поглощением, с анизотропным рассеянием.

В качестве основной рассматривается моноэнергетическая краевая задача с азимутальной симметрией для плоскопараллельного слоя  $[0, X]$ . Строгий теоретический анализ этой простейшей задачи

-----  
\*) Применительно к простейшим задачам о плоском слое этот подход использовался в [14] для решения интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности аргументов, на большом интервале.

является необходимым этапом обоснования практически важных алгоритмов для задач с неоднородными геометриями.

Уравнение переноса для функции распределения интенсивности излучения  $\Psi(x, \mu)$  записывается в следующей стандартной форме:

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Sigma_t(x) \Psi(x, \mu) = \Sigma_s(x) \hat{S} \Psi(x, \mu) + F(x, \mu), \quad (1.1)$$

$$x \in (0, X), \quad \mu \in [-1, +1],$$

где 
$$\hat{S} \Psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 p(\mu, \mu'; x) \Psi(x, \mu') d\mu', \quad \Sigma_s(x) \leq \Sigma_t(x).$$

На граничных поверхностях считаются заданными краевые условия

$$\Psi(0, \mu) = q(\mu) \text{ при } \mu > 0, \quad \Psi(X, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (1.2)$$

Источник  $F(x, \mu)$  и индикатриса рассеяния  $p(\mu, \mu'; x)$  представляются конечными отрезками рядов Лежандра.

$$\begin{cases} F(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_0^{L_F} (2\ell + 1) F^\ell(x) P_\ell(\mu), \\ p(\mu, \mu'; x) = \frac{1}{2} \sum_0^{L_P} (2\ell + 1) \omega_\ell(x) P_\ell(\mu) P_\ell(\mu') \end{cases} \quad (1.3)$$

при  $\omega_0 = 1, \quad |\omega_\ell|_{\ell \geq 1} < 1.$

Для областей большого оптического размера

$$\tau^* = \int_0^X \Sigma_t(x) dx \gg 1 \quad (1.4)$$

вводится параметр  $\varepsilon = 1/\tau^*$  посредством замен:  $z = x/X, \quad Z = 1,$

$$\Sigma_t(x) = \sigma(z)/\varepsilon, \quad \Sigma_s(x) = \sigma_s(z)/\varepsilon, \quad \Phi(z, \mu) = \Psi(x, \mu),$$

$$Q(z, \mu) = XF(x, \mu), \quad L_Q = L_F,$$

где  $\sigma(z) = \Sigma_t(x)/\Sigma_t, \quad \sigma_s(z) = \Sigma_s(x)/\Sigma_t, \quad \Sigma_t = \int_0^X \Sigma_t(x) dx / X = \tau^* / X.$

Уравнение (1.1) принимает следующий вид:

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\sigma(z)}{\varepsilon} \Phi(z, \mu) = \frac{\sigma_s(z)}{\varepsilon} \hat{S} \Phi(z, \mu) + Q(z, \mu). \quad (1.5)$$

Функции  $Q(z, \mu)$ ,  $\sigma(z)$ ,  $\sigma_s(z)$  и  $Q^\ell(z)$  предполагаются достаточно гладкими на  $(0, Z)$ :

$$\frac{d^n \sigma}{dz^n}, \frac{d^n \sigma_s}{dz^n}, \frac{d^n Q^\ell}{dz^n} \leq O(1), \quad \ell, n = 0, 1, \dots, \quad (1.6)$$

В принятых предположениях решение уравнения (1.5) при краевых условиях

$$\Phi(0, \mu)|_{\mu > 0} = q(\mu), \quad \Phi(Z, \mu)|_{\mu < 0} = 0 \quad (1.7)$$

представим суммой гладкой (регулярной) части, определяющей радиационное поле внутри слоя, и сингулярной, существенной лишь в пограничных слоях:

$$\Phi(z, \mu) = \Phi^r(z, \mu) + \Phi^s(\tau, \mu), \quad \tau = z/\varepsilon. \quad (1.8)$$

Для обеих частей далее строятся разложения по степеням параметра  $\varepsilon$ . Коэффициенты этих разложений определяются по разному в зависимости от величины поглощения и степени анизотропии рассеяния. При этом решение задачи для регулярной части решения существенно упрощается. Определение сингулярной части хотя и требует решения уравнения переноса, однако, уже не во всей области, а лишь в пограничных слоях. Эти обстоятельства значительно удешевляют расчет по сравнению с традиционными способами. В широком круге задач интерес представляют, в первую очередь, вопросы связанные с определением регулярной части решения. В тех случаях, когда нужны только интегральные по зонам характеристики решения, сингулярной частью можно пренебречь.

В задачах с *сильным поглощением*, когда величина  $\lambda = \Sigma_s / \Sigma_t$  мала, ( $\lambda < 1 - \varepsilon$ ), регулярная часть определяется в каждой точке слоя независимо разложением по степеням параметра  $\chi = O(\varepsilon)$ , коэффициенты которого зависят от  $\sigma, \sigma_s$ , моментов источника  $Q^\ell$  и производных этих функций в той же точке  $z$ .

Действительно, подставляя разложение

$$\Phi_n^r(z, \mu) = \varepsilon [\phi_0(z, \mu) + \varepsilon \phi_1(z, \mu) + \dots + \varepsilon^n \phi_n(z, \mu)] \quad (1.9)$$

в (1.5) и собирая слагаемые при  $\varepsilon^m$ ,  $m = 0, n$ , приходим к следующим уравнениям

$$\phi_m(z, \mu) = \lambda \hat{S} \phi_m - \frac{\mu}{\sigma(z)} \frac{\partial \phi_{m-1}}{\partial z} + \frac{Q(z, \mu)}{\sigma(z)} \delta_{m0}, \quad (1.10)$$

где  $\delta_{m0} = 1$  при  $m = 0$ ,  $\delta_{m0} = 0$  при  $m \neq 0$ ,  $\phi_{-1} \equiv 0$ . Отсюда следует, что

$$\phi_m(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_0^{L_0+m} (2\ell+1) \phi_m^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad m = \overline{0, n},$$

$$\phi_0^\ell(z) = Q^\ell(z) / [\sigma(z)(1 - \lambda\omega_\ell)],$$

при  $m > 0$ ,  $\ell = \overline{0, L_0 + m}$  моменты  $\phi_m^\ell(z) = \int_{-1}^1 \phi_m(z, \mu) P_\ell(\mu) d\mu$

определяются рекуррентными формулами

$$\phi_m^\ell(z) = -\frac{1}{(1 - \lambda\omega_\ell)\sigma(z)} \frac{d}{dz} \left[ \frac{\ell+1}{2\ell+1} \phi_{m-1}^{\ell+1} + \frac{\ell}{2\ell+1} \phi_{m-1}^{\ell-1} \right].$$

Из выражений (1.10) в предположениях (1.3), (1.6) вытекают оценки

$$|\phi_m| \leq O((1 - \bar{\lambda})^{-m-1}), \quad \text{где} \quad \bar{\lambda} = \sup_x \{ \Sigma_s(x) / \Sigma_t(x) \}. \quad \text{Поэтому}$$

последовательность приближений, отвечающая (1.9), сходится не медленнее, чем геометрическая прогрессия с показателем

$$\chi = \varepsilon / (1 - \bar{\lambda}). \quad (1.11)$$

В задачах, где нечетные части индикатрисы и функции источников  $Q(z, \mu)$  малы, сходимость может быть заметно улучшена. Она определяется показателем

$$\chi = \varepsilon^2 / [(1 - \bar{\lambda})(1 - \bar{\lambda}\bar{\omega})] < 1, \quad (1.12)$$

где  $\bar{\omega} = \sup_{\ell, x} \omega_{2\ell+1}(x)$ , что соответствует значению  $\chi = \varepsilon^2 / (1 - \bar{\lambda})$ ,

установленному в задачах с изотропным рассеянием [14].

В настоящей работе основное внимание уделяется регулярным решениям задач для протяженных областей ( $\varepsilon \ll 1$ ) с малым поглощением ( $\Sigma_s \approx \Sigma_t$ ), где неравенство  $\varepsilon^2 / (1 - \bar{\lambda}) < 1$  не выполняется. Численное решение таких задач оказывается особенно трудоемким из-за плохой сходимости обычно используемых итерационных процессов.

В разделе 2 построено  $\varepsilon$  разложение типа (1.9) регулярной части решения для сред с рассеянием близким к изотропному. Определение его коэффициентов сводится к последовательному решению диффузионных уравнений для нулевых моментов  $\Phi_m^0(z)$  и рекуррентному вычислению более высоких моментов. Краевые

условия так же, как в диффузионной теории, определяются требованием быстрого убывания сингулярной части с удалением от граничных поверхностей:

$$\Phi^s(\tau, \mu) = O(e^{-\eta\tau} + e^{-\eta(\tau^* - \tau)}), \quad \eta \approx 1 \quad (1.13)$$

Приближения  $\Phi_n^r(\tau, \mu)$  могут быть представлены конечными суммами полиномов  $P_\ell(\mu)$ ,  $\ell = \overline{0, N}$ ,  $N \geq n$ ,  $N = n$  при изотропном источнике. Однако, такие *Асимптотические*  $P_N$  - приближения ( $AP_N$ ) отличаются от классических  $P_N$  - приближений метода сферических гармоник. Последние аппроксимируют в интегральных нормах полное решение исходной задачи (1.5)-(1.7), в то время как  $AP_N$  - приближения аппроксимируют в равномерной норме лишь его регулярную часть, отличающуюся от решения на величину (1.13).

Оценке точности  $AP_N$  - приближений посвящен раздел 3, где также построены эквивалентные приближения метода дискретных ординат ( $AD_j$ ). Это позволяет использовать стандартные программы метода дискретных ординат определения  $\Phi_n^r(z, \mu)$ . Проводится сравнение с  $SP_N$  - уравнениями и рассмотрены некоторые простые примеры.

В заключительной части (раздел 4) обсуждаются возможности дальнейшего развития и обобщения метода пограничных функций с целью решения практических задач радиационной защиты. Наконец, в разделе 5 (Приложение) приводятся некоторые сведения из асимптотической теории переноса и оценки решения для источников  $Q(z, \mu) = Q^\ell(z)P_\ell(\mu)$  при  $\ell = 0, 1$  и  $\ell \geq 2$ , использованные в работе.

## 2. Разложение регулярной части решения. $AP_N$ - приближения

При малом поглощении, когда  $\lambda \geq 1 - \varepsilon^2$  по крайней мере, главный корень характеристического уравнения (5.3) близок к нулю ( $k_0 \approx O(\sqrt{1 - \lambda})$ ), и поэтому часть решения, несущая информацию о краевых условиях, убывает медленно с удалением от границ [15,16], как

$$O\left(e^{-k_0 z / \varepsilon}\right) + O\left(e^{-k_0 (Z - z) / \varepsilon}\right) \text{ при } \lambda < 1, \quad O(1 - z / Z) \text{ при } \lambda = 1.$$

В этом случае для определения регулярной части решения могут быть использованы приближенные дифференциальные уравнения с краевыми условиями, обеспечивающими включение в их решения такой медленно убывающей части. Схема рассуждений, приводящая в задачах с изотропными и линейными индикатрисами к выделению главной части разложения по параметру  $\varepsilon$ , подчиняющейся диффузионному уравнению, хорошо известна.

Эта же схема может быть использована и для построения приближений более высокого порядка.

Рассмотрим здесь задачи, в которых анизотропия рассеяния невелика (квазиизотропный случай):

$$\omega_0 = 1, \quad |\omega_\ell|_{\ell \geq 1} \ll 1 \quad (2.1)$$

Тогда при  $1 - \lambda \gg O(\varepsilon^2)$  можно воспользоваться разложением (1.9). В противоположном случае, т.е. при

$$1 - \lambda = \varepsilon^2 \sigma_a \text{ или } \sigma_s = \sigma - \varepsilon^2 \sigma_a, \quad \sigma_a \leq O(1), \quad (2.2)$$

лишь главный корень  $k_0$  оказывается малой величиной:  $k_0 = O(\varepsilon)$ , а прочие корни, если они есть, должны быть близки к 1, поскольку из оценок работы [17] следует неравенство  $k_\ell \geq 1 - \bar{\omega}$ , где  $\bar{\omega} = \max_{\ell \geq 1} \omega_\ell$ .

Используя представление решения задачи (1.5)-(1.7) суммой (1.8) гладкой и сингулярной частей, будем искать каждую из них в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ . Опираясь на оценки (5.20), положим

$$\Phi_n^r(z, \mu) = \varepsilon^{-1} [\phi_0(z, \mu) + \varepsilon \phi_1(z, \mu) + \dots + \varepsilon^n \phi_n(z, \mu)], \quad (2.3)$$

Предполагая, что моменты

$$\phi_m^\ell(z) = \int_{-1}^1 \phi_m(z, \mu) P_\ell(\mu) d\mu, \quad m = \overline{0, n}, \quad \ell = \overline{0, L_m},$$

являются гладкими функциями и

$$\frac{\partial^k \phi_m^\ell}{\partial z^k} = O(1), \quad m = \overline{0, n}, \quad \ell = \overline{0, L_m}, \quad k = \overline{0, n - m}, \quad (2.4)$$

подставим (2.3) в уравнение (1.5) и потребуем, чтобы в невязке

$$\mu \frac{\partial \Phi_n^r}{\partial z} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \Phi_n^r - \left( \frac{\sigma}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a \right) \hat{S} \Phi_n^r - Q = \Delta_n(z, \mu) = \sum_{m=-2}^n d_{m+2}(z, \mu) \varepsilon^m \quad (2.5)$$

обращались в 0 коэффициенты при степенях  $\varepsilon^m$  для всех  $m = \overline{-2, n-2}$ :  $d_0 \equiv d_1 \equiv \dots \equiv d_n \equiv 0$ . Это даст следующие уравнения для определения коэффициентов  $\phi_m(z, \mu)$  при  $m = \overline{0, n}$ :

$$\begin{aligned} \phi_m(z, \mu) = & \frac{1}{2} \sum_0^{L_p} (2\ell + 1) P_\ell(\mu) \times \\ & \times \left[ \omega_\ell \left( \phi_m^\ell - \sigma_a / \sigma \phi_{m-2}^\ell \right) + Q^\ell / \sigma \delta_{m-2, 0} \right] - \mu / \sigma \frac{\partial \phi_{m-1}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\delta_{m0} = 1$  при  $m = 0$ ,  $\delta_{m0} = 0$  при  $m \neq 0$ ,  $\phi_1 \equiv \phi_2 \equiv 0$ . Из них в предположениях (2.1), (2.2) и (2.4) получаем соотношения:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_0(z, \mu) &= \frac{1}{2} \phi_0^0(z), \quad \phi_0^\ell(z) \Big|_{\ell \geq 1} \equiv 0, \\ \phi_1(z, \mu) &= \frac{1}{2} \left[ \phi_1^0(z) + 3\mu \phi_1^1(z) \right], \\ \phi_1^1(z) &= -\frac{1}{3(1-\omega_1)\sigma} \frac{d\phi_0^0}{dz}, \quad \phi_1^\ell \Big|_{\ell \geq 2} \equiv 0, \\ \phi_m(z, \mu) \Big|_{m \geq 2} &= \frac{1}{2} \sum_0^{L_m} (2\ell + 1) \phi_m^\ell(z) P_\ell(\mu) \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \phi_m^l(z) &= \frac{1}{(1-\omega_l)\sigma} \left\{ Q^l \delta_{m2} - \sigma_a \omega_l \phi_{m-2}^l - \frac{d}{dz} \left[ \frac{l+1}{2l+1} \phi_{m-1}^{l+1} + \frac{l}{2l+1} \phi_{m-1}^{l-1} \right] \right\}, \\ \ell = \overline{1, L_m}, \quad L_m &= M + m - 2, \quad M = \max\{2, L_Q\}, \quad \phi_n^\ell \Big|_{\ell \geq L_m+1} \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В частности, имеем:

$$\phi_2(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_0^M (2\ell + 1) \phi_2^\ell(z) P_\ell(\mu) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^1(z) &= \frac{1}{3(1-\omega_1)\sigma} \left\{ 3Q^1 - \frac{d\phi_1^0}{dz} \right\}, \quad \phi_2^2(z) = \frac{1}{(1-\omega_2)\sigma} \left[ \frac{2}{5} (\sigma_a \phi_0^0 - Q^0) + Q^2 \right], \\ \phi_2^\ell(z) &= Q^\ell / [(1-\omega_\ell)\sigma], \quad \ell = \overline{3, L_Q}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают следующие утверждения.

1. Функции  $\phi_m(z, \mu)$  представляются полиномами по  $\mu$  порядка  $L_m$ , причем  $L_0 = 0$ ,  $L_1 = 1$ ,

$$L_m \Big|_{m \geq 2} = m \text{ при } L_Q \leq 2, \quad L_m \Big|_{m \geq 2} = m + L_Q - 2 \text{ при } L_Q > 2.$$

Соответственно:

$$d_m(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_0^{L_m} (2\ell + 1) d_m^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad \Delta_n(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_0^{L_n} (2\ell + 1) \Delta_n^\ell(z) P_\ell(\mu)$$

2. Моменты  $\phi_m^\ell(z)$  при  $\ell = \overline{1, L_m}$  выражаются через величины  $\phi_{m-1}^{l \pm 1}$ ,  $\phi_{m-2}^l$  и  $Q^\ell$  рекуррентными формулами (2.8).

3. Нулевые моменты  $\phi_m^0(z)$  для всех  $m = \overline{0, n}$  подчиняются диффузионному уравнению

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(1 - \omega_1)\sigma} \frac{d\phi_m^0}{dz} \right] + \sigma_a \phi_m^0(z) = f_m(z), \quad (2.10)$$

где функции  $f_m(z)$  определяются моментами источника  $Q$  и коэффициентов  $\phi_{m-1}$ ,  $\phi_{m-2}$ .

Действительно, интегрируя (2.6) по  $\mu$  при  $m$  замененном на  $m + 2$ , приходим к уравнению

$$\frac{d}{dz} \phi_{m+1}^1 + \sigma_a \phi_m^0 = Q^0 \cdot \delta_{m0}, \quad (2.11)$$

что отвечает равенству:  $d_{m+2}^0(z) = 0$ . Используя затем формулу

$$\phi_{m+1}^1 = \frac{1}{(1 - \omega_1)\sigma} \left[ Q^1 \delta_m - \sigma_a \omega_1 \phi_{m-1}^1 - \frac{1}{3} \frac{d}{dz} (2\phi_m^2 + \phi_m^0) \right], \quad (2.12)$$

соответствующую (2.7) при  $\ell = 1$  и  $m$  замененном на  $m + 1$  т.е. условию  $d_{m+1}^1(z) = 0$ , приходим к (2.10), где

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(z) = Q^0(z), \quad f_1(z) = -\frac{d}{dz} \frac{Q^1}{(1 - \omega)\sigma}, \\ f_m(z) \Big|_{m \geq 2} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(1 - \omega_1)\sigma} \left( \sigma_a \omega_1 \phi_{m-1}^1 + \frac{2}{3} \frac{d\phi_m^2}{dz} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Соотношения (2.8-2.10) позволяют последовательно для  $m = 0, 1, \dots, n$  определить все моменты  $\phi_m^\ell$  коэффициентов  $\phi_m(z, \mu)$  разложения (2.3), если заданы *краевые условия* для диффузионных уравнений (2.10). Чтобы сформулировать эти условия, обратимся к



рассмотрению функции  $\phi^s(\tau, \mu)$ , отвечающей сингулярной части решения. В условиях (2.1)-(2.2) эту функцию представим разложением, подобным (2.3):

$$\Phi_n^s(\tau, \mu) = \varepsilon^{-1}[\phi_0^s(\tau, \mu) + \varepsilon\phi_1^s(\tau, \mu) + \dots + \varepsilon^n\phi_n^s(\tau, \mu)]. \quad (2.14)$$

Оно должно удовлетворять однородному уравнению

$$\hat{T}\Phi_n^s \equiv \mu \frac{\partial \Phi_n^s}{\partial \tau} + \Phi_n^s(\tau, \mu) - (1 - \lambda_a(\tau)\varepsilon^2)\hat{S}\Phi_n^s(\tau, \mu) = 0, \quad (2.15)$$

где  $\lambda_a(\tau) = \sigma_a(z)/\sigma(z)$ ,  $\tau = z/\varepsilon$ , и краевым условиям

$$\Phi_n^s(0, \mu)\Big|_{\mu>0} = q(\mu) - \Phi_n^r(0, \mu), \quad \Phi_n^s(\tau^*, \mu)\Big|_{\mu<0} = -\Phi_n^r(\tau^*, \mu). \quad (2.16)$$

Ограничиваясь здесь рассмотрением задач для сред, где величины  $\lambda_a$  и  $\omega_\ell$  не зависят от  $\tau$  т.е.

$$\lambda_a(\tau) = \lambda_a = const, \quad \omega_\ell(\tau) = \omega_\ell = const, \quad (2.17)$$

воспользуемся результатами асимптотических исследований, согласно которым в предположениях (2.2) вдали от границ решение может быть представлено в следующем виде (см. Приложение 5.1)

$$\Phi^s(\tau, \mu) = \Phi_{as}(\tau, \mu) + O(e^{-\eta\tau}) + O(e^{-\eta(\tau^*-\tau)}), \quad \eta \approx 1$$

$$\Phi_{as}(\tau, \mu) = C_n^0 e^{-k_0\tau} \varphi_0(\mu) + C_n^* e^{-k_0(\tau^*-\tau)} \varphi_0(-\mu) \quad \text{при } \lambda_a > 0,$$

$$\Phi_{as}(\tau, \mu) = C_n^0 \left( \tau^* - \tau + \tau^1 + \frac{\mu}{1 - \omega_1} \right) + C_n^* \left( \tau + \tau^1 - \frac{\mu}{1 - \omega_1} \right) \quad \text{при } \lambda_a = 0 \quad (2.18)$$

Здесь  $k_0 > 0$  и  $\varphi_0(\mu) > 0$  - корень и собственная функция характеристического уравнения (5.3),  $\tau^1 = const$ . Постоянные  $C_n^0$  и  $C_n^*$  пропорциональны величинам:

$$C_n^0 = \int_0^1 \Phi_n^s(0, \mu) W(\mu) d\mu, \quad C_n^* = \int_{-1}^0 \Phi_n^s(\tau^*, \mu) W(-\mu) d\mu, \quad (2.19)$$

Функция  $W(\mu)$  определяется решением однородной краевой задачи для уравнения (2.15) в полупространстве (соответствующей Проблемы Милна).

Если  $\varepsilon \ll 1$ , то  $k_0 \cong \sqrt{3\sigma_a/\sigma}\varepsilon$ , экспоненты  $e^{-k_0\tau}$  и  $e^{-k_0(\tau^*-\tau)}$  убывают с удалением от границ медленно, и, чтобы размеры

пограничных слоев, где  $\Phi^s(\tau, \mu)$  существенна, были порядка  $\varepsilon$ , следует потребовать выполнения условий:

$$\Phi_{as}(\tau, \mu) = 0 \text{ или } C_n^0 = C_n^* = 0.$$

Из (2.16) и (2.19) находим краевые условия для функции  $\Phi_n^r(z, \mu)$ :

$$\int_0^1 \Phi_n^r(0, \mu) W(\mu) d\mu = \int_0^1 q(\mu) W(\mu) d\mu, \int_0^1 \Phi_n^r(Z, -\mu) W(\mu) d\mu = 0. \quad (2.20)$$

Пусть  $\sigma_a = \lambda_a = 0$ . Тогда функция  $W(\mu) = W_0(\mu)$  не зависит от  $\varepsilon$ . Требуя выполнения условий, подобных (2.20), для всех коэффициентов разложения (2.3) (при  $q(\mu) = O(1)$ ,  $Q(z, \mu) = O(1)$ ), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \phi_0^0(0) = 0, \quad \phi_0^0(Z) = 0, \quad (2.21) \\ \delta_{m1} \int_0^1 q(\mu) W_0(\mu) d\mu = \int_0^1 \phi_m^0(0, \mu) W_0(\mu) d\mu, \int_0^1 \phi_m^0(Z, -\mu) W_0(\mu) d\mu = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем краевые условия для моментов  $\phi_m^0(z)$  с  $m \neq 0$ :

$$\begin{cases} \phi_m^0(0) W_0^0 + \sum_{\ell=1}^{L_m} (2\ell+1) \phi_m^\ell(0) W_0^\ell = 2\delta_{m1} q_0 \\ \phi_m^0(Z) W_0^0 + \sum_{\ell=1}^{L_m} (2\ell+1) (-1)^\ell \phi_m^\ell(Z) W_0^\ell = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Здесь  $m = \overline{1, n}$ ,  $W_0^\ell = \int_0^1 W_0(\mu) P_\ell(\mu) d\mu$ ,  $q_0 = \int_0^1 q(\mu) W_0(\mu) d\mu$ .

Моменты  $\phi_m^\ell(z)$  при  $\ell > 0$  определяются рекуррентными формулами (2.8). При  $\sigma_a \neq 0$  в соотношения (2.20) должны быть подставлены разложения (5.9) функции  $W(\mu)$  по степеням  $\varepsilon$ . Приравнивая нулю коэффициенты при степенях  $m = \overline{-1, n-1}$ , также придем к (2.21) и, соотношениям, подобным (2.22):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \phi_1^0(0, \mu) W_0 d\mu = 1/2 (W_0^0 \phi_1^0 + W_0^1 3\phi_1^1) = q_0, \\ \sum_{m'=1}^m \int_0^1 \phi_{m'}^0(0, \mu) W_{m-m'}(\mu) d\mu = q_{m-1} = \int_0^1 q(\mu) W_{m-1}(\mu) d\mu. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

для  $z = 0$  и аналогичным соотношениям для  $z = Z$ .

Используя представление типа (2.7) для  $\phi_{m'}(z, \mu)$  и последовательно (начиная с  $\ell = m'$ ) применяя рекуррентные формулы (2.8) с учетом уравнений (2.10), формулы (2.23) можно привести к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_m^\ell(0) = f_{m\ell}[q, Q], \quad \ell = \overline{1, m} \\ \phi_m^0(0) = \tau^1 \phi_{m-1}^{0'}(0) + f_{m0}[q, Q], \quad \ell = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Здесь величина  $\tau^1 = W_0^1 / [W_0^0 \sigma(1 - \omega_1)]$  - известный в диффузионной теории параметр-«экстраполированная длина», а величины  $f_{m\ell}$  являются линейными функционалами источников  $q(\mu)$ ,  $Q(z, \mu)$  и  $\phi_{m-1}(0, \mu)$ ,  $\phi_{m-2}(0, \mu), \dots, \phi_1(0, \mu)$ .

В частности,

$$\phi_1^0(0) = \tau^1 \phi_0^{0'}(0) + 2q_0 / W_0^0 \quad (2.25)$$

а для  $\phi_2^0(0)$ , учитывая (2.9) и равенство  $q_1 = \alpha q_0$ , вытекающее из (5.10), получаем следующее выражение

$$\phi_2^0(0) = \tau^1 \phi_0^{0'}(0) + 2 \left[ \tau^2 Q^0(0) - \sum_{\ell=1}^{L_2} (\ell + 1/2) \tau^\ell Q^\ell(0) \right], \quad (2.26)$$

где  $\tau^\ell = W_0^\ell / [W_0^0 \sigma(1 - \omega_\ell)]$ .

Уравнения (2.6)-(2.10) с краевыми условиями (2.21) и (2.22) или (2.24) образуют замкнутую систему, позволяющую определить регулярную часть решения в любом  $n$ -м приближении. Учитывая представление (2.7), будем называть такое приближение *Асимптотическим  $P_N$ -приближением* ( $AP_N$ ), где  $N = L_n$ , т.е.  $N = n$  при  $L_Q \leq 2$ ,  $N = n - 2 + L_Q$  при  $L_Q > 2$ .

Для сингулярной части решения при  $q = O(1)$ ,  $Q = O(1)$  из (2.14) получаем разложение

$$\Phi_n^s(\tau, \mu) = \phi_1^s(\tau, \mu) + \varepsilon \phi_2^s(\tau, \mu) + \dots + \varepsilon^{n-1} \phi_n^s(\tau, \mu), \quad (2.27)$$

т.к. из (2.16) и (2.21) следует, что  $\phi_0^s(\tau, \mu) = 0$ . Каждая из функций  $\phi_m^s(\tau, \mu)$  определяется краевой задачей, аналогичной исходной:

$$\hat{T}\phi_m^s(\tau, \mu) = 0, \quad \phi_m^s(0, \mu)\Big|_{\mu>0} = q(\mu)\delta_{m1} - \phi_m^r(\tau, \mu), \quad \phi_m^s(\tau^*, \mu)\Big|_{\mu<0} = -\phi_m^r(\tau^*, \mu). \quad (2.28)$$

Однако, выполнение условий (2.21)-(2.23) обеспечивает быстрое убывание их суммы (2.27) с удалением от граничных поверхностей.

### 3. Оценка точности $AP_N$ - приближений

Погрешность  $\Delta_n(z, \mu)$  локальной аппроксимации уравнения (1.5) системой  $AP_N$  - уравнений (2.3)-(2.10) при  $n \geq 1$ , определяемая формулой (2.5), имеет следующий вид

$$\Delta_n(z, \mu) = \varepsilon^{n-1}d_{n+1}(z, \mu) + \varepsilon^n d_{n+2}(z, \mu). \quad (3.1)$$

Здесь

$$d_{n+1}(z, \mu) = \sum_{\ell=2}^{L_{n+1}} (\ell + 1/2) \left[ \sigma_a \omega_\ell \phi_{n-1}^\ell + \frac{\ell}{2\ell+1} \phi_n^{\prime\ell-1} + \frac{(\ell+1)}{2\ell+1} \phi_n^{\prime\ell+1} \right] P_\ell(\mu),$$

$$d_{n+2}(z, \mu) = \sigma_a \sum_{\ell=1}^{L_p} (\ell + 1/2) \omega_\ell \phi_n^\ell P_\ell(\mu).$$

В самом деле, формулы (2.6)-(2.7) следуют из равенств  $d_m = 0$  для  $m = 0, \bar{n}$ , а чтобы получить уравнения (2.10) для  $m = n-1$  и  $m = n$ , опираясь на формулы (2.11) и (2.12), следует дополнительно потребовать выполнения равенств  $d_{n+2}^0 = 0$  и  $d_{n+1}^0 = d_{n+1}^1 = 0$ .

Условия (2.21)-(2.23) в предположениях (2.17) обеспечивают обращение коэффициентов  $C^0$  и  $C^*$  в нули с точностью до величин  $O(\varepsilon^n)$ . Это означает, что

$$\Phi_{as}^s = O(\varepsilon^n), \quad \Phi_n^s = O(\varepsilon^n) + O(e^{-\eta\tau} + e^{-\eta(t^*-\tau)}), \quad \eta \approx 1.$$

Однако, при этом функция  $q_n^+(\mu) = \Phi_n^r(0, \mu)\Big|_{\mu>0}$ , вообще говоря, не равна  $q(\mu)$ , а функция  $q_n^-(\mu) = \Phi_n^r(Z, \mu)\Big|_{\mu<0}$  не равна 0.

Чтобы оценить отклонение  $\Phi_n^r$  от точного решения задачи (1.5)-(1.7), введем функцию

$$E_n(z, \mu) = \Phi(z, \mu) - \Phi_n^r(z, \mu) - \Phi_n^s(\tau, \mu).$$

Эта функция есть решение краевой задачи

$$\hat{T}E_n = \Delta_n(z, \mu), \quad E_n(0, \mu)\Big|_{\mu>0} = 0, \quad E_n(Z, \mu)\Big|_{\mu<0} = 0.$$

Поскольку

$$\Delta_n^0(z) = 0, \quad \Delta_n^1(z) = O(\varepsilon^n), \quad \Delta_n^\ell(z)\Big|_{\ell \geq 2} = O(\varepsilon^{n-1}), \quad (3.2)$$

из теоремы 5.1 следует оценка:  $E_n = O(\varepsilon^n)$  для  $n \geq 1$ . Но  $\Phi_1^r = \Phi_0^r + O(1)$ . Следовательно, при всех  $n \geq 0$  в условиях (2.17) для решения задачи (1.5)-(1.7) справедливо представление:

$$\Phi = \Phi_n^r + O(\varepsilon^n) + O(e^{-\eta\tau} + e^{\eta(\tau-t^*)}), \quad \eta \approx 1. \quad (3.3)$$

Опираясь на формулы (2.7), разложение (2.3) можно представить как приближение метода сферических гармоник

$$\Phi_n^r = \sum_{\ell=0}^N (\ell + 1/2) \Phi_n^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad \Phi_n^\ell(z) = \sum_{m=\ell}^N \varepsilon^{m-1} \phi_m^\ell(z) = O(\varepsilon^{\ell-1}) \quad (3.4)$$

Очевидно, нулевая гармоника  $\Phi_n^0(z)$  должна удовлетворять диффузионному уравнению

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(1-\omega_1)\sigma} \frac{d\Phi_n^0}{dz} \right] + \sigma_a \Phi_n^0(z) = F_n(z), \quad (3.5)$$

где функция  $F_n(z) = \sum_{m=0}^n f_m(z) \varepsilon^{m-1}$  определяется моментами  $Q^\ell$  и  $\phi_m^\ell$ .

Краевые условия для функций  $\Phi_n^0$  следуют из (2.21)–(2.23).

Используя формулы (2.24), преобразуем их к виду

$$\begin{cases} \Phi_n^0(0) = \varepsilon\tau^1 \frac{d\Phi_n^0}{dz} \Big|_{z=0} + 2q_0 / W_0^0 + \varepsilon 2G_n^0[q, Q], \\ \Phi_n^0(Z) = -\varepsilon\tau^1 \frac{d\Phi_n^0}{dz} \Big|_{z=Z} + \varepsilon 2G_n^Z[q, Q], \end{cases} \quad (3.6)$$

где функционалы  $G_n^0 = O(1)$  и  $G_n^Z = O(1)$  определяются величинами  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  и значениями моментов  $Q^\ell$  и их производных при  $z = 0$  и  $z = Z$  соответственно. В частности,  $G_1^{0,Z} = 0$ , а при  $n = 2$  из (2.26) получаем:

$$G_2^0[q, Q] = \tau^2 Q^0(0) - \sum_1^{L_2} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \tau^\ell Q^\ell(0),$$

$$G_2^Z[q, Q] = \tau^2 Q^0(z) - \sum_1^{L_2} (-1)^\ell \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \tau^\ell Q^\ell(z).$$

Старшие моменты  $\Phi_m^\ell \Big|_{\ell \geq 1}$  при  $z = 0$  и  $z = Z$  находятся с помощью рекуррентных формул (2.8).

Обращение к задаче (3.5)-(3.6) в тех случаях, когда интерес представляет лишь интегральный поток, может быть предпочтительнее решения исходных уравнений  $AP_N$  - приближения (2.7)-(2.10) при малых значениях  $L_P$  и  $L_Q$ .

Рассмотрим для примера задачи с *анизотропными индикатрисой* и *источником*  $Q$  для однородного слоя, где  $N = n$  и построение  $F_n(z)$  и краевых условий существенно упрощается. В этом случае

$$f_0(z) = Q^0(z), \quad f_1(z) = 0, \quad f_m(z) \Big|_{m \geq 2} = 2\hat{D}\phi_m^2, \quad \text{где } \hat{D} = \frac{1}{3\sigma} \frac{d^2}{dz^2},$$

$$F_0(z) = F_1(z) = Q^0 / \varepsilon, \quad F_2(z) = Q^0 / \varepsilon + \frac{4\varepsilon}{5} \hat{D}^2 \phi_0^0 = \left[ Q^0 - \frac{4\varepsilon^2}{5\sigma} \hat{D}(\sigma_a \phi_0^0 - Q^0) \right] / \varepsilon$$

При  $n = 0$  и  $n = 1$  уравнение (3.5) совпадает с обычным диффузионным уравнением. При  $n = 2$  оно может быть записано в виде

$$-\frac{1}{3\sigma} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \Phi_2^0 + \frac{4\varepsilon^2}{5\sigma} (\sigma_a \Phi_2^0 - Q^0 / \varepsilon) \right] + \sigma_a \Phi_2^0 = Q^0 / \varepsilon \quad (3.7)$$

если отбросить слагаемые  $O(\varepsilon^2)$ .

В [9-10] такие уравнения для  $n = 0$  и  $n = 2$ , названные *упрощенными  $P_n$  - уравнениями (Simplified -  $P_n$  - equations)*  $SP_0$  и  $SP_2$  получены формальным разложением по степеням интегрального оператора уравнения Пайерлса, отвечающего задаче (1.5)-(1.7) для однородной области при изотропных индикатрисе и источнике  $Q$  и вакуумных граничных условиях ( $q = 0$ ). При этом авторы пренебрегают сингулярной частью решения. Это, с одной стороны,

приводит к исчезновению коэффициентов  $\phi_{2m+1}^0(z)$  при нечетных степенях  $\varepsilon$  в  $\Phi_n^0$ , а с другой стороны, не позволяет правильно сформулировать граничные условия для функции  $\Phi_n^0$ , которые обеспечивали бы исчезновение медленно убывающего асимптотического слагаемого в сингулярной части решения. Поэтому уравнения (3.5), опирающиеся на  $AP_N$  - приближения даже в изотропном случае, вообще говоря, не совпадают с  $SP_N$  - приближениями работ [9-10]. Так, в уравнении для  $\Phi_3^0$  появляются слагаемые порядка  $\varepsilon^3$ , поскольку

$$f_3(z) = 2\hat{D}\phi_3^2 = -\frac{4}{5}\frac{d}{dz}\hat{D}\phi_2^1 = \frac{4}{5}\sigma_a^2\phi_1^0,$$

и  $\phi_3^0 \neq 0$  при  $\phi_1^0 \neq 0$ . Если

$$\phi_1^0(0) = \phi_1^0(Z) = 0 \quad (3.8)$$

то, т.к.  $f_1(z) \equiv 0$ , имеем  $\phi_1^0(z) \equiv 0$  и следовательно,  $\phi_1(z, \mu) = \frac{3}{2}\mu\phi_1^1(z)$  - нечетная функция  $\mu$ . Соотношение (2.6) позволяет заключить, что в этом случае при всех  $m=0,1,\dots$   $\phi_{2m}(z, \mu)$  - четные функции  $\mu$ ,  $\phi_{2m+1}(z, \mu)$  - нечетные функции  $\mu$ .

Из равенства  $\phi_{2m+1}^0(z, \mu) = 0$  следует, что  $f_{2m+1}(z) = 0$ . Поэтому уравнения (3.5) для  $n=2m$  и  $n=2m+1$  совпадают, а  $\varepsilon$  - разложение функции  $\Phi_n^0$  (в условиях (3.8)) содержит лишь четные степени  $\varepsilon$ , как в [9-10]. Согласно (2.22) и (2.7) условия (3.8) выполняются лишь в тех частных случаях, когда

$$3\phi_1^1(0) = -\phi_0^{0'}(0) / \sigma = 2q_0 / W_0^1, \quad \phi_0^{0'}(Z) = 0, \quad (3.8-a)$$

т.е. только в этом случае  $AP_N$ -приближения приводят к  $SP_N$  - уравнениям.

Остановимся еще на самом простом случае – *чистого рассеяния* ( $\sigma_a \equiv 0$ ) при  $\sigma = const$  изотропных индикатрисе и источнике  $Q$  и  $q(\mu) \equiv 0$ . Применяя последовательно формулу (2.8) при  $m \geq 3$  и учитывая (2.13)-(2.14), будем иметь:

$$\phi_m^m(z) = -\frac{1}{\sigma} \frac{m}{2m+1} \frac{d}{dz} \phi_{m-1}^{m-1} = \dots = b_m^m \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-2} \phi_0^{0^m} = c_m^m \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-2} Q,$$

$$\phi_m^{m-1}(z) = -\frac{1}{\sigma} \frac{m-1}{2m-1} \frac{d}{dz} \phi_{m-1}^{m-2} = \dots = c_m^{m-1} \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-1} \phi_1^0 = 0.$$

Здесь и далее  $b_m^m, c_m^\ell, c_m$  - числа, не зависящие от  $\varepsilon$ . Предполагая, что при  $m \geq 3, m \geq \ell \geq \ell_0 \geq 2$  справедлива формула

$$\phi_m^\ell(z) = c_m^\ell \left[ \frac{d}{dz} \right]^{m-2} Q(z), \quad (3.9)$$

где  $c_m^\ell = 0$ , если  $m - \ell$  - нечетное число, с помощью (2.8) найдем, что равенства (3.9) выполняются также при  $\ell = \ell_0 - 1$  и поэтому справедливы при всех  $\ell = \overline{1, m}$ . Следовательно, уравнения (2.10) и краевые условия (2.21), (2.22) могут быть записаны в виде:

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi_m^0 = c_m \left[ \frac{d}{dz} \right]^m Q, \quad (3.10)$$

где  $m = \overline{0, n}$ ,  $c_m = 0$  при  $m$  нечетных,

$$\begin{aligned} \phi_0^0(0) = 0, \quad \phi_m^0(0) &= \tau^1 d / dz \phi_{m-1}^0(0) + C_m^0 (d / dz)^{m-2} Q(0), \\ \phi_0^0(Z) = 0, \quad \phi_m^0(Z) &= -\tau^1 d / dz \phi_{m-1}^0(Z) + C_m^* (d / dz)^{m-2} Q(Z), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$C_1^0 = C_1^* = 0, \quad C_2^0 = C_2^* = 4\tau^2 \text{ и т.д.}$$

В этом простейшем случае решение может быть найдено в аналитическом виде. Соответствующие формулы для  $\phi_m^0$  приведены в [14], где уравнения (3.10) и краевые условия (3.11) получены из интегрального уравнения для  $y(z) = \Phi^0(z) / 2 = \hat{S}\Phi(z)$ .

В частности, при  $Q(z) = Q^0 / 2 = const, q(\mu) \equiv 0$  имеем:

$$\Phi^r(z, \mu) \equiv \Phi_2^r(z, \mu) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{3Q}{2} z(Z-z) + \frac{3Q}{2} [\tau^1 Z - \mu(Z-2z)] + \frac{\varepsilon}{\sigma} 2Q [\tau^2 - P_2(\mu)] \quad (3.12)$$

, где  $\tau^\ell = W_0^\ell / W_0^0, \ell = 0, 1$ , и  $\phi_m(z, \mu) \Big|_{m \geq 3} \equiv 0$ .

В общем случае при анизотропных функциях  $Q, p$  и  $\sigma_a \neq 0$  построение в явной форме источников для уравнения (3.5) и краевых



условий (3.6) заметно усложняется. Более разумным может быть обращение к асимптотическому приближению метода дискретных ординат ( $AD_j$ ), эквивалентному рассматриваемому  $AP_N$  - приближению (2.6)-(2.10). Подобный путь приведения  $SP_N$  - уравнений к «канонической форме» - к уравнениям метода дискретных ординат для самосопряженной формы уравнения переноса предложен в [9-10] и задачах об однородном слое при изотропных рассеянии и источнике  $Q$ .

Чтобы получить  $AD_j$  уравнения для функции  $\Phi_n^r(z, \mu)$  в общем случае, подставим ее  $P_N$  - представление (3.4) в уравнение (2.5) и положим  $\Delta_n(z, \mu) \equiv 0$ . Представив интеграл  $\hat{S}\Phi_n$  квадратурной суммой с узлами  $\mu_j$  и весами  $\omega_j$ ,  $j=1, 2, \dots, J$ , потребуем чтобы это уравнение выполнялось при всех  $\mu = \mu_j$ :

$$\mu_j \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial z} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \tilde{\Phi}_j = \left( \frac{\sigma}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a \right) \sum_{j'=1}^J \omega_{j'} \tilde{\Phi}_{j'} P_{jj'} + Q_j, \quad j = \overline{1, J}. \quad (3.13)$$

Здесь  $\tilde{\Phi}_j = \Phi_n^r(z, \mu_j)$ ,  $Q_j = Q(z, \mu_j)$ ,  $p_{jj'} = p(\mu_j, \mu_{j'}; z)$ .

Поскольку  $\Phi_n^r(z, \mu)$  полином порядка  $N$ , квадратурная формула должна быть точна для всех полиномов порядка  $0, 1, \dots, N + L_p$ . С другой стороны, должны точно передаваться значения интегралов

$$\int_{-1}^1 P_\ell(\mu) P_{\ell'}(\mu) d\mu, \quad \text{при } \ell, \ell' = \overline{0, N},$$

которые нужны для построения формул (2.6)-(2.10), определяющих  $AP_N$  - уравнения. Таким образом, если используется гауссова квадратура порядка  $J$ , т.е.  $P_j(\mu_j) = 0$  для  $j=1, 2, \dots, J$ , должны выполняться неравенства

$$2J - 1 \geq N + L_p, \quad 2J - 1 \geq 2N$$

или

$$\begin{cases} 2J \geq n + 1 + \max\{n, L_p\} & \text{при } L_Q \leq 2, \\ 2J \geq n - 1 + L_Q + \max\{n + L_Q - 2, L_p\} & \text{при } L_Q > 2. \end{cases} \quad (3.14)$$

В частности, при  $L_p, L_q \leq 2$  и  $n \geq 1$  достаточно положить  $J = n + 1$ , что соответствует известному результату об эквивалентности уравнений  $P_n$  - приближения уравнениям метода дискретных ординат (3.13).

Для того, чтобы полином (по  $\mu$ )  $J - 1$  - го порядка  $\tilde{\Phi}_j(z, \mu)$ , построенный по значениям  $\tilde{\Phi}_j(z)$ , был равен (с точностью до величины  $O(\varepsilon^n)$ ) полиному (3.4), определяющему  $AP_N$  - приближение  $\Phi_n^r(z, \mu)$ , краевые условия для уравнений (3.13) должны соответствовать условиям (2.21)-(2.24). Для низких приближений ( $J = 2, 3$ ) их легко сформулировать как условия отражения, связывающие значения интенсивностей входящего излучения и выходящего. Действительно, запишем краевое условие (2.20) для  $z = 0$  (для  $z = Z$  рассуждения аналогичны) в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\Phi_n^0(0) + \sum_1^N \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \Phi_n^\ell(0) t^\ell = q_w, \quad (3.15)$$

где  $t^\ell = W^\ell / W^0$ ,  $W^\ell = \int_0^1 P_\ell(\mu) W(\mu) d\mu$ ,  $q_w = \int_0^1 q(\mu) W(\mu) d\mu / W^0$ .

Для  $W(\mu)$  справедливо представление (5.9), и следовательно,

$$t^\ell = t_0^\ell + t_1^\ell \varepsilon + \dots + t_{n-\ell}^\ell \varepsilon^{n-\ell} + O(\varepsilon^{n-\ell+1}), \quad t_m^\ell \leq O(1).$$

Прибавляя и вычитая полиномы  $P_\ell(\mu)$  к  $t^\ell$  в (3.15) и используя представление (3.4), получим соотношение

$$\Phi_n^r(0, \mu) = \sum_{\ell=1}^N \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \Phi_n^\ell(0) [P_\ell(\mu) - t^\ell] + q_w. \quad (3.16)$$

В  $AD_2$  - приближении ( $n = 1$ ) при гауссовой квадратуре второго порядка ( $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $\mu_1 = -\mu_2 = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ ) из равенств (3.16) для  $\mu = \mu_1$  и  $\mu = \mu_2$  получаем следующее условие, эквивалентное (3.16), если пренебречь величинам  $\sim O(\varepsilon)$ :

$$\tilde{\Phi}_1(0, \mu_1) = R \tilde{\Phi}_1(0, \mu_2) + r q_w, \quad (3.17)$$

где

$$R = (t^1 - \mu_1) / (t^1 + \mu_1), \quad r = 1 - R = 2\mu_1 / (t^1 + \mu_1). \quad (3.18)$$

При изотропном рассеянии  $W_0^0 = 1$ ,  $W_0^1 = t_0^1 = \tau^1 = 0.7104$ , и

$$R = 0.103, r = 0.893, q_W = q_0.$$

Если  $L_Q \leq 2$ , то в  $AD_3$  - приближении ( $n = 2$ ,  $\omega_1 = \omega_3 = 5/9$ ,  $\omega_2 = 8/9$ ,  $\mu_1 = -\mu_3 = \sqrt{3/5}$ ,  $\mu_2 = 0$ ), равенства (3.16) при  $\mu = \mu_1$  и  $\mu = \mu_3$  позволяют записать (в пренебрежении величинами  $O(\varepsilon^2)$ ) краевое условие в форме (3.17):

$$\tilde{\Phi}_2(0, \mu_1) = R\tilde{\Phi}_2(0, \mu_3) + r(q_W + \varepsilon q_2), \quad (3.19)$$

где  $q_2 = 5/2[P_2(\mu_1) - t^2]\phi_2^2(0)$ . Коэффициенты  $R$  и  $r$  определяются формулами (3.18) с соответствующими значениями  $\mu_1$  и  $t^1 = t_0^1 + \varepsilon t_1^1$ . Для величины  $q_2$ , используя (2.9), получаем следующее выражение:

$$q_2 = -(Q^0 - \frac{5}{2}Q^2)[P_2(\mu_1) - t^2]/[(1 - \omega_2)\sigma].$$

При  $L_Q > 2$  должно использоваться приближение  $AD_J$  где  $J$  наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям (3.14). В частности,  $J = L_Q + 1$ , если  $L_P \leq L_Q$ . При  $J \geq 4$  краевые условия, вытекающие из (3.16), с помощью рекуррентных формул (2.8) могут быть приведены к матричной форме, подобной (3.18).

Следующие соображения позволяют упростить этот подход. Пусть полином  $\Phi_n(z, \mu)$  вида (3.4) есть некоторое гладкое решение уравнения (2.5), для невязки  $\Delta_n(z, \mu)$  справедливы оценки (3.2), однако, краевые условия (2.20) не выполняются. Тогда регулярное решение  $\Phi_n^r(z, \mu)$  может быть представлено в виде

$$\Phi_n^r(z, \mu) = \Phi_n(z, \mu) + \Phi_{as}^s(\tau, \mu) + O(\varepsilon^n), \quad (3.20)$$

где функция  $\Phi_{as}^s(\tau, \mu)$  определяется формулами (2.18) при

$$\Phi^s(0, \mu) = q(\mu) - \Phi_n(0, \mu), \quad \Phi^s(\tau^*, \mu) = -\Phi_n(Z, \mu)$$

Действительно, функция  $\Phi_{as}^s(\tau, \mu) + \Phi_n(z, \mu)$  удовлетворяет уравнению (2.5), поскольку  $\Phi_{as}^s(\tau, \mu)$  есть решение однородного уравнения, и условиям гладкости типа (2.4). Краевые условия (2.20) для нее также выполняются. Это обстоятельство позволяет использовать упрощенные краевые условия для определения регулярной части решения.

#### 4. Заключение

В настоящей работе построены асимптотические разложения решений простейших краевых задач для уравнения переноса - о плоскопараллельных слоях с гладкими коэффициентами и источниками при азимутальной симметрии. В подобных задачах с азимутальной зависимостью описанная здесь конструкция регулярного решения в ограничениях типа (1.6), (2.1) и (2.2) может быть также использована с очевидным переходом от  $P_n$  - разложений (2.7) к разложениям по сферическим функциям. Действительно, асимптотика сингулярной составляющей  $\Phi^s$  и в этом случае определяется главным корнем характеристического уравнения и соответствующей азимутально-симметричной собственной функцией. Условием исчезновения этой гладкой части  $\Phi^s$  по-прежнему является выполнение равенств (2.20). Азимутальная составляющая регулярной части решения определяется рекуррентными формулами, подобными (2.8).

Практический интерес, однако, представляют более сложные задачи: с разрывными коэффициентами и источниками, с сильной анизотропией, с неоднородной геометрией, нестационарные. Метод асимптотических разложений может быть полезен в случаях, когда на основании качественных представлений о поведении решения можно локализовать его сингулярности и выделить области гладкости. Развитие этого метода представляет интерес как с точки зрения теоретических исследований, так и в связи с возможностью построения новых вычислительных алгоритмов с привлечением аппарата решения диффузионных уравнений, допускающего эффективное использование компьютеров с параллельной архитектурой.

Именно это обстоятельство способствовала появлению в последние годы ряда работ по распространению алгоритмов  $SP_N$  - метода на задачи с неоднородными геометриями, с разрывными источниками [ 9-12]. Из анализа приведенных в них расчетных результатов следует, что уже  $SP_2$  - приближение значительно улучшает традиционное  $P_1$  - приближение как в интегральных

характеристиках, (дает до 80% кинетической поправки в  $k_{eff}$ ), так и в пространственном распределении плотности излучения.

Однако, авторы ограничиваются лишь формальным построением  $SP_n$  - уравнений для  $\Phi_n^0$  в упрощающих предположениях, которые не позволяют собрать все гладкие составляющие решения порядков  $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{n-1}$  (см. (3.8), (3.8-a)). В частности неточности в краевых условиях порождают заметное отклонение от точного решения в области, свободной от источников.

Возможность построения и строгого анализа асимптотических разложений решений задач с плоскопараллельной геометрией, установленная в настоящей работе, позволяет надеяться на распространение полученных результатов на более сложные проблемы.

## 5. Приложение

### 5.1. Основная асимптотическая формула для однородного полубесконечного слоя.

Известно [15, 16], что ограниченное решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Phi(\tau, \mu) = \lambda \hat{S} \Phi, \quad \hat{S} \Phi = \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') \Phi(\tau, \mu') d\mu', \quad (5.1)$$

$$\Phi(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = q(\mu)$$

при  $\lambda \leq 1$  вдали от граничной поверхности  $\tau = 0$  имеет следующий вид:

$$\Phi(\tau, \mu) = \Phi_{as}(\tau, \mu) + O(e^{-\eta\tau}), \quad \Phi_{as}(\tau, \mu) = \sum_{\ell=0}^L C_{\ell} \Phi_{\ell}(\tau, \mu), \quad \eta \approx 1, \quad (5.2)$$

где  $\Phi_{\ell}(\tau, \mu)$  - регулярные собственные функции задачи. Они определяются корнями  $k_{\ell} \in [0, 1)$  и собственными функциями характеристического уравнения

$$(1 - k_{\ell} \mu) \varphi_{\ell}(\mu) = \lambda \hat{S} \varphi_{\ell}(\mu). \quad (5.3)$$

Число неотрицательных корней  $L+1$  не превышает величины  $L_p + 1$ , определяющей количество слагаемых в представлении (1.3) индикатрисы рассеяния. Будем предполагать, что все корни  $k_{\ell}$  простые:  $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_L$ . Тогда

$$\phi_\ell(\tau, \mu) = e^{-k_\ell \tau} \varphi_\ell(\mu), \quad (5.4)$$

собственные функции  $\varphi_\ell(\mu)$  образуют ортонормированную систему,

$$\int_{-1}^1 \varphi_\ell(\mu) \varphi_j(\mu) \mu d\mu = \delta_{\ell j}. \quad (5.5)$$

Коэффициенты  $C_\ell$  в (5.2) определяются распределением входящего излучения  $q(\mu)$ . Чтобы получить формулы для этих величин, рассмотрим однородную задачу, сопряженную к (5.1):

$$-\mu \frac{\partial \Phi^*}{\partial \tau} + \Phi^*(\tau, \mu) = \lambda \hat{S} \Phi^*, \quad \Phi^*(0, \mu) \Big|_{\mu < 0} = 0. \quad (5.6)$$

Эта задача имеет  $L+1$  линейно независимых решений  $\Phi_\ell^*(\tau, \mu)$ ,  $\ell = \overline{0, L}$ . При  $\lambda < 1$  все корни положительны и

$$\Phi_\ell^*(\tau, \mu) = e^{k_\ell \tau} \varphi_\ell(\mu) + O(e^{-\eta \tau}), \quad \eta \approx 1, \quad \ell = 0, 1, \dots, L. \quad (5.7)$$

Домножив уравнение (5.1) на  $\Phi_\ell^*(\tau, \mu)$ , уравнение (5.6) на  $\Phi(\tau, \mu)$ , вычитая второе из первого и интегрируя разность на множестве  $(-1, +1) \cdot (0, \tau_0)$ , придем к соотношениям

$$\int_{-1}^1 \Phi_\ell^*(\tau_0, \mu) \Phi(\tau_0, \mu) \mu d\mu = \int_{-1}^1 \Phi_\ell^*(0, \mu) \Phi(0, \mu) \mu d\mu,$$

справедливым при всех  $\tau_0 \geq 0$ . Полагая  $\tau_0 \gg 1$  и используя формулы (5.2), (5.4), (5.5) и (5.7), получаем выражения:

$$C_\ell = \int_0^1 q(\mu) \Phi_\ell^*(0, \mu) \mu d\mu, \quad \ell = 0, 1, \dots, L. \quad (5.8)$$

Функция  $\Phi_\ell^M(\tau, \mu) = \Phi_\ell^*(\tau, -\mu)$  удовлетворяет исходной однородной краевой задаче (5.1), т.е. является решением проблемы Милна с экспоненциальной асимптотикой, соответствующей (5.7).

В задачах с чистым рассеянием ( $\lambda = 1$ ) наименьшему корню характеристического уравнения  $k_0 = 0$  отвечает собственная функция  $\varphi_0 = \text{const}$  и

$$\Phi_0^*(\tau, \mu) = \Phi_{0as}^*(\tau, \mu) + O(e^{-\eta \tau}), \quad \Phi_{0as}^*(\tau, \mu) = \tau + \tau^1 + \mu / (1 - \omega_1),$$

$\tau^1 = \text{const}$ . Функции  $\Phi_\ell^*(\tau, \mu)$  при  $\ell \geq 1$  т.е. при  $k_\ell > 0$ , по-прежнему определяются формулой (5.7). Если считать  $\varphi_0$  нормированной соотношением

$$\int_{-1}^1 \varphi_0 \Phi_{0as}^*(\tau, \mu) \mu d\mu = 1 \text{ т.е. } \varphi_0 = \frac{3}{2}(1 - \omega_1),$$

то формулы (5.8), определяющие коэффициенты асимптотики (5.3)-(5.5), оказываются справедливыми и в этом случае. При изотропном и близком к изотропному рассеянии, когда уравнение (5.3) имеет только один корень, (5.8) сводится к известному соотношению

$$C_0 = \int_0^1 q(\mu) W(\mu) d\mu,$$

где функция  $W(\mu)$  при малом поглощении ( $\lambda = 1 - \lambda_a \varepsilon^2$ ,  $\lambda_a \leq O(1)$ ) допускает разложение:

$$W(\mu) = W_0(\mu) + \varepsilon W_1(\mu) + \dots + \varepsilon^n W_n(\mu) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (5.9)$$

В [16] установлено соотношение

$$W_1(\mu) = \alpha W_0(\mu), \quad (5.10)$$

где коэффициент  $\alpha$  зависит лишь от параметров индикатрисы  $p(\mu, \mu')$ . При изотропном рассеянии

$$W(\mu) = \frac{\mu}{X(-\mu)} \left[ \int_0^1 \frac{s ds}{X(-s)} \right]^{-1}.$$

Таблицы функции  $X(-\mu)$  приведены в [15].  $W(\mu)$  – гладкая функция, при  $\lambda = 1$  она равна функции  $W_0(\mu) = \sqrt{3/2} \mu H(\mu)$ , где  $H(\mu)$  – функция Чандрасекара [18], и допускает простую аппроксимацию [5]:

$$W_0(\mu) = \mu + 3/2 \mu^2 \pm 1\%$$

Справедливы соотношения

$$\int_0^1 W_0(\mu) d\mu = W_0^0 = 1, \quad \int_0^1 W_0(\mu) \mu d\mu = W_0^1 = 0.7104.$$

Опираясь на (5.2), в соответствующих задачах о конечном слое  $(0, \tau^*)$  при  $\tau^* \gg 1$  и краевых условиях

$$\Phi(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = q(\mu), \quad \Phi(\tau^*, \mu) \Big|_{\mu < 0} = 0$$

удается получить следующие асимптотические формулы [19]:

$$\Phi(\tau, \mu) = \Phi_{as}(\tau, \mu) + O(e^{-\eta\tau}) + O(e^{-\eta(\tau^* - \tau)}),$$

где

$$\Phi_{as}(\tau, \mu) = \begin{cases} \tilde{C}_\lambda e^{-k_0\tau} \varphi_0(\mu) & \text{при } \lambda < 1, \\ \tilde{C}_1 \left( \tau^* - \tau + \tau^1 + \frac{\mu}{1 - \omega_1} \right) & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

Величины  $\tilde{C}_\lambda, \tilde{C}_1$  пропорциональны коэффициенту  $C_0$ , определяемому формулой (5.8), а  $\eta \approx 1$  при  $L = 0$ ,  $\eta = k_1$  при  $L > 0$ .

### 5.2. Оценки решений задачи для конечного слоя

Будем считать выполненными условия

$$\lambda(z) \leq 1, \quad p(\mu, \mu'; z) = \sum_0^{L_p} (\ell + 1/2) \omega_\ell(z) P_\ell(\mu) P_\ell(\mu') \geq 0, \quad (5.11)$$

и рассмотрим сначала задачи для однородного слоя, в котором величины  $\sigma, \sigma_a$  и все коэффициенты  $\omega_\ell$  не зависят от  $z$ .

*Лемма.* В условиях (5.11) решение краевой задачи

$$\hat{T}\Psi_\ell \equiv \mu \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial \tau} + \Psi_\ell(\tau, \mu) - \lambda \hat{S}\Psi_\ell = P_\ell(\mu) \quad (5.12)$$

$$\Psi_\ell(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = 0, \quad \Psi_\ell(\tau^*, \mu) \Big|_{\mu < 0} = 0,$$

для однородного слоя оптической толщины  $\tau^*$  удовлетворяет оценкам:

$$|\Psi_0(\tau, \mu)| \leq 3(1 - \omega_1)\tau^{*2} + 6\tau^* + 4/(1 - \omega_2), \quad (5.13)$$

$$|\Psi_\ell(\tau, \mu)| \leq 2(1 - \lambda\omega_\ell) \quad \text{при всех } \ell \geq 0. \quad (5.14)$$

Чтобы доказать эти оценки, заметим, что для построения мажоранты решения  $\Psi_\ell(\tau, \mu)$  достаточно подобрать функцию  $\Psi_\ell(\tau, \mu)$ , удовлетворяющую уравнению (5.12). Тогда разность  $\zeta_\ell = \Psi_\ell - \Phi_\ell$  должна быть решением однородного уравнения (5.12) при неоднородных краевых условиях

$$\zeta_\ell(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = -\Phi_\ell(0, \mu), \quad \zeta_\ell(\tau^*, \mu) \Big|_{\mu < 0} = -\Phi_\ell(\tau^*, \mu). \quad (5.15)$$



Следовательно, для нее справедлива вытекающая из принципа максимума [1, с. 44] оценка

$$|\zeta_\ell(\tau, \mu)| \leq \sup_{\tau, \mu} |\Phi_\ell(\tau, \mu)|$$

Для доказательства оценки (5.13) положим

$$\Phi_0(\tau, \mu) = -\frac{3}{2}(1 - \omega_1)\tau^2 + 3\mu\tau - 2P_2(\mu)/(1 - \omega_2)$$

Если  $\lambda = 1$ , то, как легко проверить,  $\hat{T}\Phi_0 = 1$ . Следовательно, оценка (5.13) справедлива при  $\lambda = 1$ . Теорема сравнения [1, с. 49] позволяет распространить ее на задачи с  $\lambda = \lambda(z) \leq 1$ . Для доказательства (5.14) достаточно воспользоваться не зависящим от  $\tau$  решением

$$\Phi_\ell(\tau, \mu) = P_\ell(\mu)/(1 - \lambda\omega_\ell).$$

*Следствие.* Решение задачи (1.5)-(1.7) для однородного слоя при ограниченных источниках  $Q(z, \mu)$  и  $q(\mu)$  в условиях (5.11) удовлетворяет оценке

$$|\Phi| \leq Z^2 \bar{Q} \cdot O(1/\varepsilon) + \bar{q}. \quad (5.16)$$

где  $\bar{Q} = \sup_{z, \mu} |Q(z, \mu)|$ ,  $\bar{q} = \sup_{\mu} |q(\mu)|$ .

Пусть теперь  $\sigma = \sigma(z)$ ,  $\sigma_a \equiv 0$ . Вводя новую переменную

$\tilde{z} = \int_0^z \sigma(z) dz$ , придем к рассмотренным выше задачам, где следует

положить  $\sigma$  равным 1. Поэтому оценка (5.16) справедлива и в задачах с переменным по  $z$  коэффициентом  $\sigma$ .

Теорема сравнения [1, с. 49] позволяет распространить эту оценку на задачи для неоднородного слоя с  $\sigma(z) \neq \sigma_s(z)$ ,  $\sigma_a = \sigma_a(z)$  и  $p = p(\mu, \mu'; z)$ , если найдутся такие функции  $\bar{\sigma}(z)$  и

$$\bar{p}(\mu, \mu') = \sum_0^{\bar{L}} (\ell + 1/2) \bar{\omega}_\ell P_\ell(\mu) P_\ell(\mu'), \quad \bar{L} < \infty,$$

для которых выполняются условия

$$\sigma(z) \geq \bar{\sigma}(z), \quad \sigma_s(z) p(\mu, \mu'; z) \leq \bar{\sigma}(z) \bar{p}(\mu, \mu'), \quad \bar{\omega}_0 = 1. \quad (5.17)$$

Чтобы установить более тонкие оценки для задач с источником

$$Q(z, \mu) = Q_\ell(z, \mu) = (\ell + 1/2) Q^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

зависящим как от  $\mu$ , так и от  $z$ , положим

$$\Phi(z, \mu) = \Phi_2(z, \mu) + \zeta_2(\tau, \mu),$$

где

$$\Phi_2(z, \mu) = \frac{1}{\varepsilon} [\phi_0(z) + \varepsilon \phi_1(z, \mu) + \varepsilon^2 \phi_2(z, \mu)], \quad (5.19)$$

а коэффициенты  $\phi_0, \phi_1$  и  $\phi_2$  определяются соотношениями (2.6)-(2.10). Функция  $\phi_2(z, \mu)$  должна удовлетворять уравнению (2.5) с источником  $Q_\ell(z, \mu) + \Delta_2(z, \mu)$ , где

$$\Delta_2(z, \mu) = \varepsilon d_3(z, \mu) + \varepsilon^2 d_4(z, \mu), \quad d_3^0 = d_3^1 = d_4^0 = 0,$$

а  $\zeta_2(z, \mu)$  - уравнению (2.5) с источником, равным  $-\Delta_2(z, \mu)$  и краевым условиям (5.15).

Пусть  $\ell = 1$  в (5.17). Тогда, т.к.  $Q^0(z) = 0$ , исчезает слагаемое  $\phi_0(z)$  в разложении (5.18). Оно принимает вид

$$\Phi_2(z, \mu) = \phi_1(z, \mu) + \varepsilon \phi_2(z, \mu),$$

т.е.  $\phi_2(z, \mu) = O(1)$ . Опираясь на принцип максимума и оценку (5.16), приходим к неравенству  $|\zeta_2(z, \mu)| \leq O(1)$ .

При  $\ell \geq 2$  аналогичным образом получаем соотношения.

$$\begin{aligned} \Phi(z, \mu) &= \Phi_3(z, \mu) + \zeta_3(z, \mu), \\ \phi_0(z) = \phi_1(z, \mu) &= 0, \quad \Phi_3(z, \mu) = \varepsilon \phi_2(z, \mu) + \varepsilon^2 \phi_3(z, \mu), \\ \Delta_3(z, \mu) &= \varepsilon^2 d_4(z, \mu) + \varepsilon^3 d_5(z, \mu), \quad d_4^0 = d_4^1 = d_5^0 = 0. \end{aligned}$$

Поэтому для  $\Phi_3$  и  $\zeta_3$  имеем оценки

$$|\Phi_3| = O(\varepsilon), \quad |\zeta_3(z, \mu)| = O(\varepsilon).$$

Отсюда следуют оценки решения задачи (5.12) с источником (5.18):

$$\Phi = O(1) \text{ при } \ell = 1, \quad \Phi = O(\varepsilon) \text{ при } \ell \geq 2.$$

Таким образом, оказывается справедливым следующее утверждение

**Теорема 5.1.** В условиях (5.11), (5.17) при  $Q(z, \mu) = O(1)$ ,  $q(\mu) \equiv 0$  для решения задачи (1.5)-(1.7) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\Phi(z, \mu) &= O(1/\varepsilon), \quad \text{если } Q^0(z) \neq 0, \\
\Phi(z, \mu) &= O(1), \quad \text{если } Q^0(z) = 0, \quad Q^1(z) \neq 0, \\
\Phi(z, \mu) &= O(\varepsilon), \quad \text{если } Q^0(z) = Q^1(z) = 0, \quad Q(z, \mu) \neq 0.
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

### Литература

1. Т.А.Гермогенова. Локальные свойства решений уравнения переноса излучения. М.: Наука, 1986.
2. E.W.Larsen. Diffusion Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory for Nearly Critical Systems with Small Mean Free Paths. Review of work from 1971-1980. Ann. Nucl. En., **7**, 249-257, 1980.
3. G.J Habetler, B.J.Matkovsky. Uniform Asymptotic Expansions in Transport Theory with Small Mean Free Paths, and the Diffusion Approximation. J. Math. Phys., **16**, 846-854, 1975.
4. E.W.Larsen, J.E.Morel, W.F.Miller, Jr. Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick Diffusive Regimes. J. Comp. Phys., **69**, 283-324, 1987.
5. E.W.Larsen, J.E.Morel. Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick Diffusive Regimes. II. J. Comp. Phys., **83**, 212-236, 1989.
6. E.W.Larsen. Asymptotic Diffusion Limit of Discretized Transport Problems. В сб. тезисов докладов на Международном симпозиуме «Численные методы решения уравнения переноса», 144-146, 26-28 мая, 1992. Москва, Россия.
7. E.W.Larsen, G.C.Pomraning.  $P_N$  - Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry. Part I: Analysis. Nucl. Sci. Eng., **109**, 49-75, 1991.
8. R.P.Rulko, E.W.Larsen, G.C.Pomraning. The  $P_N$  - Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory. Part II: Numerical Results. Nucl. Sci. Eng. **109**, 76, 1991.
9. E.W.Larsen, J.E.Morel, J.M.McGhee. Asymptotic Derivation of the Simplified  $P_N$  - Equations. Proc. Joint Intern. Conf. Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications. April 19-23, 1993, Karlsruhe, **1**, 781-729.

10. E.W.Larsen, J.M.McGhee, J.E.Morel. The Simplified  $P_N$  - Equations as an Asymptotic Limit of the Transport Equation. Tr. Am. N. Soc., **66**, 231, 1992.
11. R.G.Gamino. Three-Dimensional Nodal Transport Using the Simplified  $P_N$  - Method. Proc. ANS Topical Mtg., Advances in Mathematics, Computations and Reactor Physics. April 29 – May 2, 1991, Pittsburgh, **2**, Sec. 7.1, 3-1 - 3-10.
12. D.Tomasevic, E.W. Larsen. The Simplified  $P_2$  Correction to the Multidimensional Diffusion Equation, Trans. Am. Nucl. Soc. **66**, 232, 1992.
13. А.Б.Васильева, В.Ф.Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука. 1973.
14. Т.А.Гермогенова. Слабо сингулярные интегральные уравнения на интервале большой длины. Препринт № 11 ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990.
15. К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса М.: Мир, 1972.
16. В.В.Соболев. Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972.
17. Т.А.Гермогенова. О дискретном спектре характеристического уравнения теории переноса. ЖВМ и МФ, **14**, 1526-1543, 1974.
18. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953.
19. Т.А.Гермогенова. О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. ЖВМ и МФ, **1**, 1001-1019, 1961.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 93-011-1689).

## Регулярные компоненты асимптотических приближений к решениям уравнения переноса в оптически плотных средах

ЖВМиМФ, 1997, Т. 37, вып. 4, с. 464-482<sup>§</sup>

УДК 517.958:536.71

Поступила в редакцию 28.07.95 г.

Переработанный вариант 23.09.96 г.

### Аннотация

Для решения уравнения переноса в однородном плоском слое строятся асимптотические приближения по параметру  $\varepsilon$  - величине, обратной оптической толщине слоя. При гладких индикатрисах рассеяния и источниках излучения находятся формулы и уравнения для отыскания регулярных компонент этих приближений как в средах с сильным поглощением, так и в средах с преобладанием рассеяния. Установлена теоретическая оценка точности асимптотических приближений.

### ВВЕДЕНИЕ

В линейных стационарных задачах структура решения уравнения переноса внутри оптически плотной области с гладкими внутренними источниками определяется, в первую очередь, значениями и соотношением двух параметров: характерного размера рассматриваемой области в длинах свободного пробега излучения – оптической толщины  $\tau^*$ , и характерного расстояния  $\rho$  (так же в длинах свободного пробега), на котором изменения коэффициентов и источников этого уравнения сравнимы с их средними значениями. В ситуациях, типичных для многих проблем

защиты от потоков нейтральных и заряженных частиц, величина  $\tau^*$  может достигать значений  $\sim 10^2$ - $10^4$ , а в оптике атмосферы с облачными и аэрозольными слоями  $\tau^* \sim 10$ - $10^2$ . В условиях

$\tau^* \gg 1$ ,  $\rho/\tau^* \asymp 1$  структура решения оказывается сравнительно простой: оно гладкое внутри области и имеет особенности лишь у граничных поверхностей.

---

<sup>§</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект 115-95)

Дискретизацией по угловым и энергетическим переменным эти задачи обычно сводятся к краевым задачам для систем дифференциальных уравнений, как правило, высокой степени жесткости. Для их численного решения сейчас энергично разрабатываются и используются консервативные схемы метода моментов [1]-[3], ориентированные на использование *грубосеточных алгоритмов* с размером расчетных ячеек  $\Delta$ , значительно превышающим длину свободного пробега. С другой стороны, для определения гладкой составляющей решения уравнения переноса издавна пользуются уравнениями диффузии и  $P_1$  - приближения, отвечающими нулевому и первому приближениям метода сферических гармоник. Эти уравнения могут быть получены также подстановкой формального асимптотического разложения решения по степеням параметра  $\varepsilon = 1/\tau^*$  в уравнение переноса для оптически плотной среды со слабым поглощением. Построению и обоснованию таких разложений для изотропной среды (т.е. с изотропными индикатрисой рассеяния и источником) при отличном от нуля поглощении посвящено много исследований (см. [4], [5] с обширной библиографией). В последние годы с целью определения «наддиффузионных поправок» используются грубосеточные аппроксимации «упрощенных  $P_n$  - уравнений» ( $SP_n$ ) для угловых моментов потока [6].

Остаются, однако, неясными многие вопросы, связанные как с постановкой краевых условий для грубосеточных приближений и выбором параметров алгоритмов, так и с оценкой близости грубосеточных решений к решению исходной задачи. Естественную основу исследований для этих проблем в задачах с большими значениями параметров  $\rho$  и  $\tau^*$  дает метод пограничных слоев сингулярной теории возмущений, опирающийся на известные работы Тихонова и на [7]. Исходным моментом является представление асимптотического приближения к решению краевой задачи для уравнения переноса суммой компонент: регулярной (гладкой) и сингулярной (быстро убывающей с удалением от границ).

В настоящей работе рассматриваются ключевые для развития предлагаемого подхода моноэнергетические задачи с азимутальной симметрией для однородных плоских слоев большой оптической

толщины с гладкими источниками при чистом рассеянии и с учетом поглощения, как слабого, так и сильного, а также анизотропии рассеяния и источников. Математическая постановка таких задач с принятыми ограничениями приводится в разделе 1, где отмечается и ряд используемых в работе свойств точных решений. В частности, даны оценки решений, вытекающие из принципа максимума [8], и асимптотические представления решений задач без внутренних источников вдали от граничных поверхностей [9]-[13]. Необходимые уточнения некоторых оценок классической асимптотической теории [14] приводятся в Приложении.

Коэффициенты разложений по параметру  $\varepsilon$  регулярных компонент для сред с сильным поглощением определяются рекуррентными формулами (раздел 2), а для сред с преобладанием рассеяния и чисто рассеивающих, кроме рекуррентных формул, используются диффузионные уравнения и формулы классической асимптотической теории (раздел 3). Устанавливаются равномерные оценки точности асимптотических приближений и близости их регулярных компонент к решению в зависимости от параметра  $\varepsilon$ .

## 1. Постановка задачи, общие свойства решений

Обозначим через  $\Psi(z, \mu)$  интенсивность излучения в точках  $z$  однородного плоского слоя  $(0, Z)$  в направлениях, составляющих угол  $\arccos \mu$  с осью  $z$ , и уравнение переноса для этой функции запишем в виде

$$\hat{T}\Psi(z, \mu) \equiv \mu \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Sigma_t \Psi(z, \mu) - \Sigma_s \hat{S}\Psi(z, \mu) = F(z, \mu), \quad (1.1)$$

где

$$\hat{S}\Psi(z, \mu) = 1/2 \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') \Psi(z, \mu') d\mu', \quad \{z, \mu\} \in A = (0, Z) \times [-1, 1].$$

На граничных поверхностях задаются краевые условия:

$$\Psi(0, \mu) = q(\mu) \text{ при } \mu > 0, \quad \Psi(Z, \mu) = q(\mu) \text{ при } \mu < 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Sigma_t$  - полное сечение взаимодействия частиц с веществом,  $\Sigma_s$  - сечение рассеяния,  $p(\mu, \mu')$  - усредненная по азимутальному углу индикатриса рассеяния  $\mathbb{P}(\cos \chi)$ :

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{P}(\mu, \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos \varphi) d\varphi.$$

Эти величины считаются не зависящими от  $z$  и предполагается, что

$$\mathbb{P}(\cos \chi) \equiv 0, \quad \mathbb{P}(\cos \chi) \geq 0, \quad \Sigma_t \geq \Sigma_s > 0. \quad (1.3)$$

Функция  $\mathbb{P}(\cos \chi)$  и внутренний источник  $F(z, \mu)$  задаются конечными суммами полиномов Лежандра

$$\mathbb{P}(\cos \chi) = \sum_{\ell=0}^{L_p} (2\ell+1) \omega^\ell P_\ell(\cos \chi), \quad \omega^0 = 1, \quad L_p < \infty, \quad (1.4)$$

$$F(z, \mu) = \sum_{\ell=0}^{L_F} (\ell+1/2) F^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad L_F < \infty, \quad (1.5)$$

где  $F^\ell(z) \in C^J(0, Z)$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, L_F$ ,  $C^J[0, Z]$  - пространство  $J$  раз непрерывно дифференцируемых на  $(0, Z)$  функций  $f(z)$  с ограниченной нормой

$$\|f\|_{C^J|_{0,Z}} = \sum_{j=0}^J \sup_{(0,z)} \left| \frac{d^j f(z)}{dz^j} \right|, \quad J > 0.$$

В условиях (1.3), (1.4) справедливы соотношения [9]

$$P(\mu, \mu') = \sum_{\ell=0}^{L_p} (2\ell+1) \omega^\ell P_\ell(\mu) P_\ell(\mu'), \quad \left| \omega^\ell \right|_{\ell \geq 1} < 1. \quad (1.6)$$

Функция  $q(\mu)$  определяет интенсивность излучения, падающего на поверхность слоя извне. Предполагается, что

$$q(\mu)|_{\mu>0} \in C[0,1], \quad q(\mu)|_{\mu<0} \in C[-1,0]. \quad (1.7)$$

Анализ задачи (1.1), (1.2) в различных предположениях о коэффициентах и источниках содержится в несколько монографиях (см., например, [8], [9], [12], [13]) и обширной журнальной литературе. Отметим некоторые использованные в данной работе результаты, справедливые в принятых предположениях.

1. Решение задачи (1.1)-(1.7) существует и определено однозначно на множестве  $\tilde{A} = [0, Z] \times [-1, 1] \setminus (\{0, 0\}, \{Z, 0\})$ . Во всех точках этого множества оно обладает определенной гладкостью, а в



окрестности особых точек  $\{0,0\}$  и  $\{Z,0\}$  может быть представлено асимптотическими разложениями. Задача (1.1)-(1.7) эквивалентна интегральному уравнению

$$\Psi(z,\mu) \equiv \lambda \hat{L}^{-1} \hat{S} \Psi(z,\mu) + G(z,\mu),$$

где  $\lambda = \Sigma_s / \Sigma_t$ ,

$$\hat{L}^{-1} f(z,\mu) = \begin{cases} \mu^{-1} \int_0^z \exp[-\Sigma_t (z-z')/\mu] f(z',\mu) dz' & \text{при } \mu > 0, \\ 0 & \text{при } \mu = 0, \\ |\mu^{-1}| \int_z^Z \exp[-\Sigma_t (z-z')/|\mu|] f(z',\mu) dz' & \text{при } \mu < 0, \end{cases}$$

$$G(z,\mu) = \hat{L}^{-1} F(z,\mu) + \begin{cases} q(\mu) \exp(-\Sigma_t z/\mu) & \text{при } \mu > 0, \\ 0 & \text{при } \mu = 0, \\ q(\mu) \exp[-\Sigma_t (Z-z)/|\mu|] & \text{при } \mu < 0. \end{cases}$$

Ряд Неймана для этого уравнения сходится на множестве  $A$  в равномерной норме к решению задачи (1.1)-(1.7) (см. [8, гл. 5])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\hat{L}^{-1} \hat{S})^n G(z,\mu) = \Psi(z,\mu).$$

2. Для решения задачи (1.1)-(1.7) справедливы принципы максимума и минимума и вытекающие из них оценки решения [8, § 2.4]. Оно мажорируется решением  $\Psi_0(z,\mu)$  такой же задачи с постоянным источником  $\bar{F} = \sup_A |F(z,\mu)|$  и не зависящей от  $\mu$

интенсивностью внешнего излучения, равной  $\bar{q} = \sup_{0 < \mu \leq 1} |q(\mu)|$ . Если

$\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_s > 0$ , то постоянная  $\Psi_\infty = \bar{F} / \Sigma_a$ , являющаяся решением уравнения (1.1) при  $F(z,\mu) = \bar{F}$  в бесконечной среде с теми же сечениями  $\Sigma_t, \Sigma_s$  и индикатрисой  $p(\mu, \mu')$ , мажорирует функцию  $\Psi_0(z,\mu)$  при  $\bar{q} \leq \Psi_\infty$ . Если же  $\bar{q} > \Psi_\infty$  положим  $\Psi_0(z,\mu) = \Psi_\infty + \Psi_1(z,\mu)$ , где  $\Psi_1(z,\mu)$  - решение однородного уравнения (1.1) при краевых условиях (1.2) с функцией  $q(\mu)$ ,

замененной на  $\bar{q} - \Psi_\infty = \text{const}$ . Очевидно  $0 \leq \Psi_0 \leq \Psi_\infty + (\bar{q} - \Psi_\infty) = \bar{q}$ . Отсюда следует оценка

$$|\Psi(z, \mu)| \leq \max\{\bar{F}/\Sigma_a, \bar{q}\} \text{ при } \Sigma_a > 0 \quad \forall \{z, \mu\} \in \tilde{A}. \quad (1.8)$$

Чтобы найти оценку и при  $\Sigma_a = 0$ , заметим, что принцип максимума справедлив в этом случае при дополнительном условии [8, §2.4]

$$\gamma = \min_{\mu \in [-1, 1]} \int_{-1}^1 \exp(-\Sigma_t Z/|\eta|) p(\eta, \mu) d\eta > 0.$$

Но эта оценка следует из (1.3), (1.4). Действительно, пусть  $\bar{p} = \max_{\eta, \mu} p(\eta, \mu)$  и  $\delta$  - положительное число,  $0 < \delta < 1/\bar{p}$ . Тогда

$$\gamma \geq \exp(-\Sigma_t Z/\delta) \left( \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^1 \right) p(\eta, \mu) d\eta \geq 2 \exp(-\Sigma_t Z/\delta) [1 - \bar{p}\delta] > 0.$$

Рассмотрим сначала задачу, в которой  $\Sigma_a = 0$ ,  $q(\mu) \equiv 0$ , а  $F \equiv \text{const} = \bar{F}$ . Как легко проверить, в этом случае функция

$$\psi(z, \mu) = \bar{F} \{-3/2(1 - \omega^1)\Sigma_t z^2 + 3\mu z - 2P_2(\mu)/[\Sigma_t(1 - \omega^2)]\} \quad (1.9)$$

является решением уравнения (1.1). Согласно принципу максимума, величина  $|\Psi(z, \mu) - \psi(z, \mu)|$  на множестве  $\tilde{A}$  мажорируется величиной  $\bar{\psi} = \sup_A |\psi(z, \mu)| = |\psi(Z, -1)|$ , и поэтому справедлива оценка

$\forall \{z, \mu\} \in \tilde{A} : |\Psi(z, \mu)| \leq 2\bar{\psi}$ . Теорема сравнения [8, §2.2] позволяет распространить эту оценку на задачи с ограниченным источником  $F(z, \mu)$  и  $\Sigma_a \geq 0$ . При  $q(\mu) \equiv 0$  из линейности задачи следует оценка

$$|\Psi(z, \mu)| \leq \bar{F} \{3(1 - \omega^1)\Sigma_t Z^2 + 6Z + 4/[\Sigma_t(1 - \omega^2)]\} + \bar{q} \quad \forall \{z, \mu\} \in \tilde{A}. \quad (1.10)$$

Числовые коэффициенты в правой части могут быть уточнены. Однако из сравнения с (1.9) следует, что порядок по  $\Sigma_t$  главной части при  $\Sigma_t \gg 1$  не завышен. Оценка (1.8) оказывается точнее для сильно

поглощающих сред, где  $\Sigma_a$  сравнимо с  $\Sigma_t$ , а (1.10) – для сред с преобладанием рассеяния, где  $\Sigma_a \ll \Sigma_t$ .

Отметим, что поскольку оценки (1.8) и (1.10) опираются в конечном счете лишь на принципы максимума и минимума, для их справедливости достаточно ограничений более слабых, нежели принятые в настоящей работе (ср. [8]).

3. В задачах для оптически плотных слоев ( $\tau^* = \Sigma_t Z \gg 1$ ) без внутренних источников ( $F \equiv 0$ ,  $q \equiv 0$ ) поведение решений вдали от граничных поверхностей определяется дискретным спектром  $\{k_i\}_{i=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm I}$  и соответствующими собственными функциями хорошо известного характеристического уравнения

$$(1 - k\mu)\varphi(\mu) = \lambda \hat{S}\varphi(\mu), \quad \lambda = \Sigma_s / \Sigma_t. \quad (1.11)$$

Это уравнение изучалось многими авторами [9], [12], [13], [16]. Приведем некоторые результаты, используемые в данной работе. В предположениях (1.3), (1.4) дискретный спектр конечный, непустой, располагается на действительной оси. Справедливы соотношения

$$0 \leq 1 - \lambda \leq k_1 < \dots < k_I < 1, \quad k_{-i} = -k_i \quad 1 \leq I \leq L_p^+ + 1,$$

где  $L_p^+$  число положительных коэффициентов  $\omega^\ell$  (при  $\ell > 0$ ) в представлении (1.4) индикатрисы рассеяния.

Все корни простые,  $k_1 = 0$  при  $\lambda = 1$ , справедливы оценки

$$k_i > 1 - \lambda \omega^{\ell(i)} \quad \text{при} \quad \lambda \omega^{\ell(i)} < 1. \quad (1.12)$$

Здесь  $\ell(i)$  выбраны так, что последовательность  $\{\omega^{\ell(i)}\}_{i=1,2,\dots,I}$  не возрастает:  $\ell(1) = 0$ ,  $\omega^{\ell(i)} = 1$ ,  $0 < \omega^{\ell(i)} \leq \omega^{\ell(i-1)}$  (простота ненулевых корней и неравенства (1.12) доказаны в Приложении). Собственная функция  $\varphi_1(\mu)$ , отвечающая ведущему корню  $k_1$ , и только она одна, знакопостоянна и отлична от нуля [9]. Будем считать далее, что  $\varphi_1(\mu) > 0$  на  $[-1, 1]$ . Все собственные функции уравнения (1.11) непрерывны, и справедливы соотношения [9]

$$\varphi_i(\mu) = \Pi_i(\mu)/(1 - k_i \mu) = \varphi_{-i}(-\mu), \quad \Pi_i(\mu) = \lambda \sum_{\ell=0}^{L_p} (\ell + 1/2) \omega^\ell \varphi_i^\ell P_\ell(\mu), \quad (1.13)$$

где  $\varphi_i^\ell = \int_{-1}^1 \varphi_i(\mu) P_\ell(\mu) d\mu$ ; имеют место соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^1 \varphi_i(\mu) \varphi_j(\mu) d\mu = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \int_{-1}^1 [\varphi_i(\mu)]^2 \mu d\mu > 0 \text{ при } k_i > 0.$$

Соответствующие решения однородного уравнения (1.1) при  $\lambda < 1$  могут быть представлены в виде

$$\Phi_i(z, \mu) = \exp(-k_i \tau) \varphi_i(\mu), \quad \Phi_{-i}(z, \mu) = \exp(-k_i (\tau^* - \tau)) \varphi_{-i}(\mu), \quad (1.14)$$

где  $\tau = \Sigma_t z$ . При чистом рассеянии

$$k_{\pm 1} = 0, \quad \varphi_{\pm 1} = 1, \quad \Phi_1(z, \mu) = 1, \quad \Phi_{-1}(z, \mu) = z - \mu / [\Sigma_t (1 - \omega^1)], \quad (1.15)$$

а функции  $\Phi_{\pm i}(z, \mu)$  при  $1 < i \leq I$  определяются выражениями (1.14).

Интегрируя на интервале  $(-1, 1)$  уравнение (1.11), умноженное на  $P_\ell(\mu)$ , при  $k = k_i \neq 0$ ,  $\varphi(\mu) = \varphi_i(\mu)$ , получаем следующие соотношения:

$$(2\ell + 1)(1 - \lambda \omega^\ell) \varphi_i^\ell = k_i [(\ell + 1) \varphi_i^{\ell+1} + \ell \varphi_i^{\ell-1}], \quad \ell \geq 0, \quad \varphi_i^{-1} = 0. \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что  $\varphi_i^0 \neq 0$  (в противном случае  $\varphi_i^\ell = 0$  для всех  $\ell > 0$ , что противоречит определению собственной функции). Следуя [12], будем считать функции  $\varphi_i(\mu)$  нормированными соотношениями

$$\lambda/2 \int_{-1}^1 \varphi_i(\mu) d\mu = 1 \text{ (или } \varphi_i^0 = 2/\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (1.17)$$

Результаты теории возмущений [15] позволяют прийти к заключению [16] об аналитичности в некоторой окрестности интервала  $(-1, 1)$  на комплексной плоскости функций  $\lambda_i(k)$  и  $\varphi_i(k, \mu)$ , удовлетворяющих уравнению

$$(1 - k\mu)\varphi_i(k, \mu) = \lambda_i(k)\hat{S}\varphi_i(k, \mu), \quad (1.18)$$

как функций параметра  $k$  при всех  $\mu \in [-1, 1]$ . Должны выполняться равенства

$$\lambda_i(k_i) = \lambda, \quad \varphi_i(k_i, \mu) = \varphi_i(\mu) \text{ при } \varphi_i^0(k_i) = 2/\lambda. \quad (1.19)$$

Существует такое значение  $k_0 \in (0, 1)$ , что в круге  $|k| < k_0$  сходятся разложения [9], [16]

$$\lambda_1(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{1m} k^{2m} = 1 - k^2 / [3(1 - \omega^1)] + O(k^4), \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(k, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{1m}(\mu) k^m = 1 + k \mu / (1 - \omega^1) + \\ k^2 [1 + 2P_2(\mu) / (1 - \omega^2)] / [3(1 - \omega^1)] + O(k^3). \end{aligned}$$

Разложение для  $\varphi_1(k, \mu)$  сходится равномерно относительно  $\mu \in [-1, 1]$  и представляет функцию, непрерывную по  $\mu$  на  $[-1, 1]$ .

4. В задачах для слоев большой оптической толщины без внутренних источников ( $F(z, \mu) \equiv 0$ ) вдали от границ решение может быть представлено асимптотическими формулами [11], [12], [14]. Они опираются на исследования решений  $\Psi_{\infty}(z, \mu)$  соответствующих задач для полубесконечного слоя [8] – [10], [12], [13]

$$\hat{T}\Psi_{\infty}(z, \mu) = 0, \quad \Psi_{\infty}(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = q(\mu). \quad (1.21)$$

В условиях (1.3), (1.4) и (1.7) существует единственное ограниченное решение этой задачи и для него справедлива оценка

$$\forall \{z, \mu\} \in \tilde{A}_{\infty}: \quad |\Psi_{\infty}(z, \mu)| \leq \exp[-(1 - \lambda)\Sigma_t z] \bar{q} \quad (1.22)$$

при  $\bar{q} = \sup_{0 < \mu \leq 1} |q(\mu)|$ ,  $\tilde{A}_{\infty} = [0, \infty) \times [-1, 1] / \{0, 0\}$  (см. [8]). В следующей

теореме собраны необходимые для дальнейшего утверждения, вытекающие из более общих результатов [9], [10].

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (1.3) и (1.4),  $Z = \infty$ ,  $\tau = \Sigma_t z$ ,  $k_i$  - корни, а  $\varphi_i(\mu)$  - собственные функции уравнения (1.11) с нормировкой (1.17),

$i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$ ,  $N_\lambda = \int_{-1}^1 \mu \varphi_1(\mu)^2 d\mu$ ,  $\eta$  - любое число,

удовлетворяющее условию  $k_1 < \eta < 1$ , если  $I = 1$ ,  $k_1 < \eta \leq k_2$ , если  $I \geq 2$ , и  $\mathbf{B}$  - класс функций  $\theta(z, \mu)$ , определенных всюду на множестве  $\tilde{A}_\infty$ , интегрируемых по  $\mu$  при любом  $z \geq 0$  и

таких, что  $\exp(-k\Sigma_t z)\theta(z, \mu) \in L_1(\tilde{A}_\infty)$  при любом  $k \in (k_I, 1)$ .

Тогда справедливы такие утверждения

1. В классе  $\mathbf{B}$  существует единственное (с точностью до нормировки) положительное при всех  $z > 0$ ,  $\mu \in [-1, 1]$  и при  $z = 0$ ,  $\mu \in [-1, 0]$  решение  $\theta_\lambda(z, \mu)$  однородной ( $q \equiv 0$ ) задачи (1.21).

2. Пусть решение  $\theta_\lambda(z, \mu)$  нормировано соотношением

$$\int_0^1 \varphi_1(\mu) \mu W_\lambda(\mu) d\mu = 1 \quad \text{при} \quad W_\lambda(\mu) = \mu \theta_\lambda(0, -\mu). \quad (1.23)$$

Тогда  $\theta_\lambda(z, \mu) = \theta_\lambda^{as}(\tau, \mu) + \xi_\lambda(\tau, \mu)$ , где

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^{as}(z, \mu) &= [\varphi_{-1}(\mu) \exp(k_1 \tau) - K_\lambda \varphi_1(\mu) \exp(-k_1 \tau)] / N_\lambda, \quad \lambda < 1, \\ \theta_1^{as}(z, \mu) &= (3/2)(1 - \omega^1) [\tau + \tau_1 - \mu / (1 - \omega^1)], \quad \lambda = 1, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$K_\lambda = \int_0^1 \varphi_1(-\mu) W_\lambda(\mu) d\mu, \quad \tau_1 = \int_0^1 \mu W_1(\mu) d\mu / (1 - \omega^1),$$

$$\xi_\lambda(\tau, \mu) = \exp(-\eta \tau) r_0(\tau, \mu), \quad \sup_A |r_0(\tau, \mu)| = \tilde{r}_0 < \infty.$$

3. При  $q(\mu) \in C[0, 1]$  для всех  $\lambda \in (0, 1]$  ограниченное решение краевой задачи (1.21) на множестве  $\tilde{A}_\infty$  непрерывно и является суммой соответствующего ряда Неймана, сходящегося всюду (равномерно на всяком его замкнутом ограниченном подмножестве); оно может быть представлено в виде

$$\Psi_\infty(z, \mu) = \Psi_\infty^{as}(z, \mu) + \chi_\infty(\tau, \mu), \quad (1.25)$$

где

$$\Psi_{\infty}^{as}(z, \mu) = \Psi_{\lambda}^{+} \varphi_1(\mu) \exp(-k_1 \tau), \quad \Psi_{\lambda}^{+} = \int_0^1 q(\mu) W_{\lambda}(\mu) d\mu,$$

$$\chi_{\infty}(\tau, \mu) = \exp(-\eta \tau) r(\tau, \mu), \quad \sup_{0 \leq \tau < \infty} \|r(\tau, \mu)\|_{L_2(-1,1)} = \bar{r} < \infty. \quad (1.26)$$

Число  $\bar{r}_0$  определяется параметром  $\lambda$  и индикатрисой  $\mathbb{P}(\mu)$ , а  $\bar{r}$  - этими же величинами и функцией  $q(\mu)$ . Оценка чисел  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}$  приведена в [9, §11]. В условиях (1.3), (1.4) и (1.7) функция  $r(\tau, \mu)$  ограничена не только по норме в  $L_2(-1,1)$ , но и равномерно на  $\tilde{A}_{\infty}$ . Действительно, функция  $\chi_{\infty}(\tau, \mu)$  есть решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial \chi_{\infty}}{\partial \tau} + \chi_{\infty}(\tau, \mu) = \lambda \hat{S} \chi_{\infty}(\tau, \mu) = \lambda \hat{S}[r(\tau, \mu)] e^{-\eta \tau},$$

$$\chi_{\infty}(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = q(\mu) - \psi_{\lambda}^{+} \varphi_1(\mu) \equiv \chi_0(\mu).$$

Но величины  $\chi_0(\mu)$  и  $\hat{S}[r(\tau, \mu)]$  ограничены при  $\bar{q} < \infty$  и  $\bar{r} < \infty$ . Следовательно,

$$\left| \chi_{\infty}(r, \mu) \right| \leq \left| \chi_0(\mu) \right| e^{-\tau/|\mu|} + (\lambda/2) \bar{r} \left\| \max \mathbb{P}(\mu) \right\|_{L_2(-1,1)} \hat{L}^{-1}[e^{-\eta \tau}],$$

$$\hat{L}^{-1}[e^{-\eta \tau}]_{\mu > 0} = (e^{-\eta \tau} - e^{-\tau/\mu}) / (1 - \eta \mu), \quad \hat{L}^{-1}[e^{-\eta \tau}]_{\mu \leq 0} = e^{-\eta \tau} / (1 - \eta \mu).$$

Последние соотношения обеспечивают выполнение оценки

$$\left| \chi_{\infty}(\tau, \mu) \right| < \bar{r} e^{-\eta \tau}, \quad (1.27)$$

где  $r$  определяется величинами  $\lambda, \bar{r}, \max \mathbb{P}(\mu), 1/(1 - \eta)$  и  $q(\mu)$ .

Отметим, что в консервативном случае ( $\lambda = 1$ ), когда поток  $\mathbb{F} = \int_{-1}^1 \mu \theta_1(z, \mu) d\mu$  не зависит от  $z$  (см. [12]), нормировка (1.23)

означает, что  $\mathbb{F} = -1$ , а

$$\mathbb{K}(\tau) \equiv \int_{-1}^1 \mu^2 \theta_1(\tau, \mu) d\mu = (1 - \omega^1)(\tau + \tau_1).$$

Решение задачи (1.1), (1.2) для слоя конечной толщины  $\tau^*$  при  $F(z, \mu) \equiv 0$  представим суммой

$$\Psi(z, \mu) = \Psi^+(z, \mu) + \Psi^-(Z - z, -\mu), \quad (1.28)$$

где оба слагаемых являются решениями однородного уравнения (1.1) при краевых условиях (1.2) с функцией  $q(\mu)$ , замененной на функции  $q^\pm(\mu)$  соответственно,  $q^\pm(\mu) = q(\pm\mu)$  при  $\mu > 0$ ,  $q^\pm(\mu) = 0$  при  $\mu < 0$ .

Каждое из решений  $\Psi^\pm(z, \mu)$  мажорируется решениями  $\Psi_\infty^\pm(z, \mu)$  соответствующих задач (1.21) для полубесконечного слоя с  $q(\mu)$ , замененной на  $q^\pm(\mu)$  при  $\mu > 0$ . Поэтому из (1.22) следует, что при сильном поглощении ( $1 - \lambda \gg 1/\tau^*$ ) функция  $\Psi(z, \mu)$  быстро убывает с удалением от границ слоя. При слабом поглощении ( $\lambda \approx 1$ ) из (1.20) и утверждения 3 теоремы 1 следует, что решения  $\Psi_\infty^\pm(z, \mu)$  медленно убывают с удалением от границ, и этому отвечает появление медленно убывающих компонент решения  $\Psi(z, \mu)$ .

$$\text{Положим } \psi_\lambda^\pm = \int_0^1 q(\pm\mu) W_\lambda(\mu) d\mu,$$

$$V_1(\tau, \mu) = \{\tau^* - \tau + \tau_1 + \mu/(-\omega^1)\}/(\tau^* + 2\tau_1) \text{ при } \lambda=1,$$

$$V_\lambda(\tau, \mu) = \{\varphi_1(\mu) \exp(-k_1 \tau) - K_\lambda \varphi_{-1}(\mu) \exp[-k_1(2\tau^* - \tau)]\}/D_\lambda \quad (1.29)$$

при  $\lambda < 1$ . Здесь  $D_\lambda = 1 - [K_\lambda \exp[(-k_1 \tau^*)]^2$ , а величины  $\tau, \tau_1$  и  $K_\lambda$  определяются так же, как в теореме 1. Обоснование следующего утверждения [14] приводится в Приложении.

**Следствие.** В условиях теоремы 1 при  $\lambda = 1$  и при тех значениях  $\lambda$ , для которых  $K_\lambda < 1$ , решение задачи (1.1), (1.2) может быть представлено в виде

$$\Psi(z, \mu) = \Psi^{as}[q](z, \mu) + \chi[q](z, \mu), \quad (1.30)$$

где

$$\Psi^{as}[q](z, \mu) = \psi_\lambda^+ V_\lambda(\tau, \mu) + \psi_\lambda^- V_\lambda(\tau^* - \tau, -\mu),$$

$$\chi[q](z, \mu) = \exp(-\eta\tau) r^+(\tau, \mu) + \exp[-\eta(\tau^* - \tau)] r^-(\tau, \mu),$$

$r^\pm(\tau, \mu)$  - ограниченные функции.



Условие  $K_\lambda < 1$  выполняется, по крайней мере, при  $\lambda$ , достаточно близких к единице (см. Приложение).

5. Нашей целью является построение асимптотических приближений к решению задач (1.1)-(1.7) с гладкими внутренними источниками  $F \equiv 0$  в оптически плотных средах, где параметр  $\varepsilon = 1/\tau^*$  мал ( $\varepsilon \ll 1$ ). Опираясь на метод пограничных функций [7], будем искать равномерные на множестве  $\tilde{A}$  асимптотические приближения  $\Psi_n(z, \mu; \varepsilon)$  (порядка  $n+1$ ), удовлетворяющие оценкам

$$\Psi(z, \mu) - \Psi_n(z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, n = 0, 1, \dots \quad (1.31)$$

Точное решение  $\Psi(z, \mu)$  зависит от  $\varepsilon$ , а также и от других параметров задачи. Поскольку целью работы является построение  $\varepsilon$ -разложений для приближений  $\Psi_n$  здесь и далее явным образом зависимость от  $\varepsilon$  указывается лишь для этих функций и их частей.

Положим  $\Sigma_t = \sigma/\varepsilon$ ,  $\Sigma_s = \sigma_s/\varepsilon$ , и для упрощения изложения будем считать выполненными соотношения

$$\sigma \asymp 1, Z \asymp 1, \Psi(z, \mu) = O(1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.32)$$

В силу линейности задачи, этого всегда можно добиться заменами  $\tilde{z} = z/Z$ ,  $\tilde{\Sigma}_t = \Sigma_t Z$ ,  $\tilde{\Sigma}_s = \Sigma_s Z$  и подходящей нормировкой функции  $q(\mu)$  и источника  $F(z, \mu)$  с учетом оценок (1.8) при существенном поглощении и (1.10) – при преобладании рассеяния. Положим

$$F(z, \mu) = Q(z, \mu)/\varepsilon \text{ при сильном поглощении } (1 - \lambda \gg \varepsilon), \quad (1.33)$$

$$F(z, \mu) = \varepsilon Q(z, \mu) \text{ при слабом поглощении } (1 - \lambda = O(\varepsilon^2)), \quad (1.34)$$

где  $Q(z, \mu)$  в соответствии с (1.5), (1.6) – полином по  $\mu$  (степени  $L_Q = L_F$ ) с гладкими по  $z$  коэффициентами). Будем считать, что при некотором целом  $J > 0$

$$Q(z, \mu) \in C^J(\bar{A}), \quad \|Q\|_{C^J(\bar{A})} = \sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^{J-j} \sup_A \left| \frac{\partial^j Q}{\partial z^i \partial \mu^{j-i}} \right| = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.35)$$

Функции, удовлетворяющие условию (1.35), будем называть в данной работе *регулярными*, а в противном случае – *сингулярными*.

Из оценок (1.12) следует, что при сильном поглощении имеем  $k_i \gg \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, I$ , и следовательно, все функции (1.14) оказываются сингулярными. При слабом поглощении и в промежуточных случаях, когда условие  $1 - \lambda \gg \varepsilon$  не выполняется, ограничимся рассмотрением сред с несильной анизотропией рассеяния, где справедливы соотношения

$$1 - \max_{\ell \geq 1} \omega^\ell \gg \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.36)$$

Согласно (1.12), тогда  $k_i \Big|_{i \geq 2} \gg \varepsilon$  при  $I \geq 2$ . Для ведущего корня  $k_1$  при слабом поглощении из (1.20) следует [12]

$$k_1 = \sqrt{3(1 - \lambda)(1 - \omega^1)} + O((1 - \lambda)^{3/2}) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.37)$$

В этом случае функции  $\Phi_{\pm 1}(z, \mu)$  оказываются регулярными, а все остальные – сингулярными.

Будем искать  $\Psi_n(z, \mu; \varepsilon)$  в виде суммы регулярной и сингулярной компонент:

$$\Psi_n(z, \mu; \varepsilon) = \Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) + \Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon). \quad (1.38)$$

В данной работе построение  $\Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon)$  опирается на отыскание регулярного асимптотического приближения  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$  к решению  $\tilde{\Psi}(z, \mu; \varepsilon)$  уравнения (1.1) при некоторых специальных краевых значениях  $\tilde{q}_n(\mu; \varepsilon)$ , вообще говоря, не совпадающих с  $q(\mu)$ . Для этого приближения строится разложение по степеням  $\varepsilon$  вида

$$\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon) = \sum_{m=0}^n \tilde{\psi}_m(z, \mu) \varepsilon^m. \quad (1.39)$$

Коэффициенты  $\tilde{\psi}_m(z, \mu)$  представляются конечными суммами полиномов Лежандра, и моменты

$$\tilde{\psi}_m^\ell(z, \mu) = \int_0^1 \tilde{\psi}_m(z, \mu) P_\ell(\mu) d\mu, \quad \ell = 0, 1, \dots,$$

определяются по-разному в зависимости от величины поглощения и степени анизотропии рассеяния. Разность

$\varphi(z, \mu; \varepsilon) = \Psi(z, \mu) - \tilde{\Psi}(z, \mu; \varepsilon)$  должна удовлетворять однородному уравнению (1.1) и краевым условиям

$$\varphi(0, \mu; \varepsilon)|_{\mu>0} = q(\mu) - \tilde{q}_n(\mu; \varepsilon), \quad \varphi(Z, \mu; \varepsilon)|_{\mu<0} = q(\mu) - \tilde{q}_n(\mu; \varepsilon).$$

Следовательно, она может быть представлена суммой вида (1.30):

$$\varphi(z, \mu; \varepsilon) = \varphi^{as}[q - \tilde{q}_n] + \chi[q - \tilde{q}_n],$$

где величины  $\varphi^{as}$  и  $\chi$  определяются формулами и оценками, приведенными в теореме 1 и ее следствии. При сильном поглощении функция  $\varphi(z, \mu; \varepsilon)$  в соответствии с оценкой (1.22) быстро убывает с удалением от границ, и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$\Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) = \tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon), \quad \Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon) = \varphi(z, \mu; \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

В задачах со слабым поглощением будем иметь

$$\Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) - \tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon) - \varphi^{as}[q - \tilde{q}_n](z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon) - \chi[q - \tilde{q}_n](z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

## 2. Асимптотические приближения в задачах с сильным поглощением

При  $1 - \lambda \gg \varepsilon$  воспользуемся нормировкой источника (1.33) и подставим разложение (1.39) для  $\Psi_n^{(r)} = \tilde{\Psi}_n$  (с использованием обозначения  $\psi_m(z, \mu) = \tilde{\psi}_m(z, \mu)$ ) в уравнение (1.1). Приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^{m-1}$  в левой и правой частях и учитывая условия (1.32), (1.35), приходим к соотношениям

$$\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial z} + \psi_m(z, \mu) = \lambda \hat{S} \psi_m + \frac{Q(z, \mu)}{\sigma} \delta_{m0}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

где  $\delta_{00} = 1$ ,  $\delta_{m0} = 0$  при  $m \neq 0$ ,  $\psi_{-1} \equiv 0$ . Отсюда следуют формулы

$$\psi_0(z, \mu) = (\hat{I} - \lambda \hat{S})^{-1} [Q/\sigma], \quad (2.2)$$

$$\psi_m(z, m) = -(\hat{I} - \lambda \hat{S})^{-1} [\mu \partial \psi_{m-1} / \partial z] / \sigma, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad n \leq J, \quad (2.3)$$

где  $\hat{I}$  - единичный оператор, а оператор  $(\hat{I} - \lambda \hat{S})^{-1}$  ограничен в пространстве ограниченных и интегрируемых на множестве  $A$  функций (с нормой  $\|\psi\| = \bar{\psi} = \sup_A |\psi(z, \mu)|$ )

$$\|(\hat{I} - \lambda \hat{S})^{-1}\| \leq 1/(1 - \lambda). \quad (2.4)$$

Функции  $\psi_m(z, \mu)$  являются полиномами по  $\mu$  степени  $L_Q + m$  с коэффициентами, зависящими от  $z$ , и моменты  $\psi_m^\ell(z)$  определяются рекуррентными соотношениями

$$\psi_0^\ell(z) = Q^\ell(z) / [\sigma(1 - \lambda \omega^\ell)], \quad \ell = 0, 1, \dots, L_Q \quad (2.5)$$

$$\psi_m^\ell(z) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{\ell+1}{2\ell+1} \psi_{m-1}^{\ell+1} + \frac{\ell}{2\ell+1} \psi_{m-1}^{\ell-1} \right) / [\sigma(1 - \lambda \omega^\ell)], \quad (2.6)$$

где  $m = 1, 2, \dots, n$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, L_Q + m$ ,  $\omega^\ell \Big|_{\ell > L_p} = 0$ .

В условиях (1.3), (1.4) и (1.35) функции  $\psi_m$  вместе с производными  $\partial^i \psi_m / \partial z^i$  при  $i \leq J - m$  также ограничены. Действительно, из (2.2)-(2.4) получаем оценки

$$\left| \frac{\partial^i \psi_m}{\partial z^i} \right| \leq C_Q / [\sigma(1 - \lambda)]^{m+1}, \quad \left| \frac{\partial^i \psi_m^\ell}{\partial z^i} \right| \leq 2C_Q / [\sigma(1 - \lambda)]^{m+1}, \quad (2.7)$$

где  $C_Q = \|Q\|_{C^J(\bar{A})}$ ,  $m \leq n$ ,  $i + m \leq J$ ,  $0 \leq \ell \leq L_Q + m$ .

Вследствие полиномиальной зависимости функций  $\psi_m$  от  $\mu$  эти оценки обеспечивают существование и ограниченность производных  $\partial^{i+J} \psi_m / \partial z^i \partial \mu^j$  при  $i + m \leq J$  и любых  $j = 1, 2, \dots$ . Эти величины определяются значениями  $\lambda$ ,  $p(\mu, \mu') Q(z, \mu)$  и не зависят от  $\varepsilon$ .

Таким образом, построено представление (1.39) для  $\Psi_n^{(r)}$  с коэффициентами  $\psi_m(z, \mu)$ , не зависящими от  $\varepsilon$ , и условие

регулярности (1.35) для этой функции выполняется при любом  $n = 0, 1, \dots, J - 1$ . Функцию  $\Psi_n^{(s)}$  представим разложением

$$\Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon) = \sum_{m=0}^n \psi_m^{(s)}(z, \mu) \varepsilon^m, \quad (2.8)$$

где коэффициенты  $\psi_m^{(s)}(z, \mu)$ , не зависящие от  $\varepsilon$ , удовлетворяют однородным уравнениям (1.1) и краевым условиям

$$\psi_m^{(s)}(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = q(\mu) \delta_{m0} - \psi_m(0, \mu), \quad \psi_m^{(s)}(Z, \mu) \Big|_{\mu < 0} = q(\mu) \delta_{m0} - \psi_m(Z, \mu). \quad (2.9)$$

Поскольку величины  $\psi_m(0, \mu)$  и  $\psi_m(Z, \mu)$  так же, как и  $q(\mu)$  ограничены и не зависят от  $\varepsilon$ , из теоремы 1 и соотношений (1.12) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем оценку

$$\Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon) = O(e^{-\xi z/\varepsilon} + e^{-\zeta(Z-z)/\varepsilon}), \quad \zeta = k_1 \sigma > (1 - \lambda) \sigma \gg \varepsilon. \quad (2.10)$$

Разность  $\Psi - \Psi_n$  должна быть решением задачи (1.1)-(1.4) с источником  $F(z, \mu) = -\mu \partial \psi_n / \partial z \varepsilon^n$  при  $q \equiv 0$ . Поскольку из (2.7) следует оценка  $\partial \psi_n / \partial z = O(1)$ , из соотношения (1.8) получаем

$$\Psi - \Psi_n = O(\varepsilon^{n+1} / [\sigma(1 - \lambda)]^{n+2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad n = 0, 1, \dots, J - 1,$$

и, следовательно, скорость сходимости построенных приближений определяется величиной  $\chi = \varepsilon / (1 - \lambda)$ .

Суммируем полученные результаты в следующих утверждениях.

**Теорема 2.** Для однородного слоя с сильным поглощением ( $1 - \lambda \gg \varepsilon$ ) в предположениях (1.3), (1.4) и (1.33), (1.35) разложение (1.39) для  $\Psi_n^{(r)}$ ,  $n \leq J - 1$ , с коэффициентами

$$\psi_m(z, \mu) = \sum_0^{L_0+m} (\ell + 1/2) \psi_m^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

где угловые моменты  $\psi_m^\ell(z)$  определяются формулами (2.5), (2.6), и разложение (2.8) для  $\Psi_n^{(s)}$ , в котором функциями  $\psi_m^{(s)}(z, \mu)$  являются

решения уравнения (1.1) при  $F(z, \mu) \equiv 0$  и при краевых условиях (2.9), представляют, соответственно, регулярную и сингулярную компоненты асимптотического приближения (1.38) порядка  $n+1$  для решения задачи (1.1)-(1.7).

**Следствие.** В условиях теоремы 2 справедлива оценка

$$\Psi - \Psi_n^{(r)} = O(\varepsilon^{n+1}) + O(\exp(-\zeta z/\varepsilon) + \exp[-\zeta(Z - z/\varepsilon)]), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

где  $\zeta = k_1 \sigma > (1 - \lambda)\sigma \gg \varepsilon$  равномерно на  $\tilde{A}$ .

**Замечание.** В задачах, где нечетная часть индикатрисы мала, а источник  $Q(z, \mu)$  - четная функция  $\mu$ , сходимость асимптотических приближений может быть заметно улучшена. Она определяется величиной

$$\chi = \varepsilon^2 / [(1 - \lambda)(1 - \lambda \bar{\omega})] < 1 \quad \text{при} \quad 1 - \lambda \gg \varepsilon, \quad \bar{\omega} = \sup_{\ell} \omega^{2\ell+1} < 1, \quad (2.13)$$

что соответствует значению  $\chi = \varepsilon^2 / (1 - \lambda)$  при изотропном рассеянии [17]. Действительно, представив  $\Psi$  и  $Q$  суммами

$$\Psi(z, \mu) = \Psi^+(z, \mu) + \Psi^-(z, \mu) \quad \text{и} \quad Q(z, \mu) = Q^+(z, \mu) + Q^-(z, \mu)$$

четных и нечетных частей этих функций, из (1.1) получим уравнения

$$\mu \frac{\partial \Psi^-}{\partial z} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \Psi^+ = \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \hat{S}^+ \Psi^+ + Q^+ / \varepsilon, \quad \mu \frac{\partial \Psi^+}{\partial z} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \Psi^- = \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \hat{S}^- \Psi^- + Q^- / \varepsilon, \quad (2.14)$$

где  $\hat{S}^+ \Psi^+$  и  $\hat{S}^- \Psi^-$  отвечают четной и нечетной частям интеграла столкновений  $\hat{S} \Psi$ ,  $\mu \in [0, 1]$ . Для простоты ограничимся здесь задачами с  $\sigma = 1$ ,  $\sigma_s = \lambda$ . Тогда для  $\Psi^+$  получим уравнение

$$\Psi^+(z, \mu) = \lambda \hat{S}^+ \Psi^+ + \varepsilon^2 \mu (\hat{I} - \lambda \hat{S}^-)^{-1} (\mu \partial^2 \Psi^+ / \partial z^2) + f(z, \mu),$$

где  $f(z, \mu) = Q^+ - \varepsilon \mu (\hat{I} - \lambda \hat{S}^-)^{-1} \partial Q^- / \partial z$ . Полагая теперь  $u_m(z, \mu) = \psi_m(z, \mu) + \psi_m(z, -\mu)$ , где функции  $\psi_m(z, \mu)$  определяются формулами (2.2), (2.3) и, следовательно,

$$\Psi_n^{+(r)}(z, \mu; \varepsilon) = u_0(z, \mu) + \varepsilon u_1(z, \mu) + \dots + \varepsilon^n u_n(z, \mu), \quad (2.15)$$

приходим к следующим уравнениям для коэффициентов  $u_m(z, \mu)$ :

$$u_m(z, \mu) = \lambda \hat{S}^+ u_m(z, \mu) + \mu (\hat{I} - \lambda \hat{S}^-)^{-1} (\mu \partial^2 u_{m-2} / \partial z^2) + h_m(z, \mu),$$

где

$$h_0 = Q^+(z, \mu), \quad h_1 = -\mu (\hat{I} - \lambda \hat{S}^-)^{-1} \frac{\partial Q^-}{\partial z}, \quad h_m = 0 \text{ при } m > 1, \quad u_{-1} = u_{-2} = 0.$$

Последовательности функций  $\{u_{2k}\}_{k=0,1,\dots}$  и  $\{u_{2k+1}\}_{k=0,1,\dots}$  определяются независимо, и в предположении (1.35) для каждой из этих величин справедливы оценки

$$|u_{2k}| \leq C_Q / [(1-\lambda)^{k+1} (1-\lambda\bar{\omega})^k], \quad |u_{2k+1}| \leq C_Q / [(1-\lambda)(1-\lambda\bar{\omega})]^{k+1} \quad (2.16)$$

при  $2k \leq n$  и  $2k+1 \leq n$  соответственно. Для величины  $\Psi_n^{+(s)}(z, \mu; \varepsilon) = [\Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon) + \Psi_n^{(s)}(z, -\mu; \varepsilon)]/2$  справедлива оценка (2.10), а для приближения  $\Psi_n^+ = \Psi_n^{+(r)} + \Psi_n^{+(s)}$  оценка  $\Psi^+ - \Psi_n^+ = O(\varepsilon^{n+1})$ .

Нечетная составляющая регулярной компоненты,  $\Psi_n^{-(r)}(z, \mu; \varepsilon)$  может быть определена из уравнения (2.14), если  $\Psi^+$  в этом уравнении заменить на  $\Psi_n^{+(r)}$ .

Если можно пренебречь нечетной частью источников ( $Q^- \equiv 0$ ), то  $u_{2k+1} \equiv 0$ , и скорость сходимости приближений, отвечающих (2.15), определяется величиной (2.13). Таким образом, при  $1-\lambda \gg \varepsilon$  регулярная компонента асимптотического приближения (1.38) определяется в каждой точке слоя независимо разложением по степеням параметра  $\chi = O(\varepsilon)$  (при четном источнике: четная часть регулярной компоненты – разложением по степеням  $\chi = O(\varepsilon^2)$ ). Коэффициенты разложения зависят от величин  $\sigma, \sigma_s, \omega^\ell$ , моментов источника  $Q^\ell(z)$  и производных этих функций в той же точке  $z$ .

С уменьшением поглощения точность построенных приближений, определяемая малостью величины (2.13), ухудшается. Согласно (1.37) становится близким к нулю ведущий корень  $k_1$

уравнения (1.11), и слагаемое  $\psi^{as}(z, \mu)$  в представлении (1.30) для разности  $\varphi = \Psi - \Psi_n^{(r)}$  медленно убывает с удалением от границ.

В следующем разделе предлагается способ построения асимптотических приближений, позволяющий учесть эту медленно меняющуюся часть при построении регулярной компоненты.

### 3. Асимптотические приближения в задачах со слабым поглощением

Обращаясь к задачам, в которых  $1 - \lambda = O(\varepsilon^2)$ , ограничимся рассмотрением сред со слабой анизотропией рассеяния, когда лишь один корень характеристического уравнения (1.11) оказывается малой величиной (см. (1.36), (1.37)). Сначала построим регулярное асимптотическое приближение  $\Psi_n(z, \mu; \varepsilon)$  к решению  $\tilde{\Psi}(z, \mu; \varepsilon)$  уравнения (1.1) при некоторых специальных значениях  $\tilde{q}_n$  в краевых условиях (1.2). Положим  $\Sigma_s = \Sigma_t - \varepsilon\sigma_a$ , где  $\sigma_a = O(1)$ , подставим разложение (1.39) в уравнение (1.1) при нормировке источника (1.34) и потребуем, чтобы при  $n \leq J$  в невязке

$$\Delta_n(z, \mu; \varepsilon) = \mu \frac{\partial \tilde{\Psi}_n}{\partial z} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \tilde{\Psi}_n - \left( \frac{\sigma}{s} - \varepsilon\sigma_a \right) \hat{S} \tilde{\Psi}_n - \varepsilon Q = \sum_{m=-1}^{n+1} d_m(z, \mu) \varepsilon^m \quad (3.1)$$

обращались в нуль коэффициенты  $d_m$  для всех  $m = -1, 0, \dots, n-1$ .

Условие  $d_{-1} = 0$  приводит к формулам

$$\tilde{\Psi}_0(z, \mu) = \tilde{\psi}_0^0(z)/2, \quad \tilde{\psi}_0^\ell = 0 \quad \text{при } \ell > 0. \quad (3.2)$$

Из равенства  $d_0 = 0$  следуют соотношения

$$\tilde{\psi}_1(z, \mu) = \lambda \hat{S} \tilde{\psi}_1(z, \mu) - \mu/2 d \tilde{\psi}_0^0 / d z = \tilde{\psi}_1^0(z)/2 + 3\mu/2 \tilde{\psi}_1^1(z), \quad (3.3)$$

где

$$\tilde{\psi}_1^1(z) = -d \tilde{\psi}_0^0 / d z [3\sigma(1 - \omega^1)]^{-1}. \quad (3.4)$$

Полагая  $d_{m-1} = 0$ , при  $m = 2, 3, \dots, n$  имеем



$$\tilde{\psi}_m(z, \mu) = \sum_{\ell=0}^{L_{\max}} (\ell + 1/2) P_\ell(\mu) [\omega^\ell (\tilde{\psi}_m^\ell - (\sigma_a/\sigma) \tilde{\psi}_{m-2}^\ell) + Q^\ell / \sigma \delta_{m2}] - (\mu/\sigma) \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Здесь  $\delta_{m2} = 1$  при  $m = 2$ ,  $\delta_{m2} = 0$  при  $m \neq 2$ ,

$Q^\ell \Big|_{\ell > L_Q} = 0$ ,  $\omega^\ell \Big|_{\ell > L_p} = 0$ ,  $L_{\max} \leq \max\{L_p, L_Q\}$ . Кроме того, потребуем,

чтобы выполнялось условие  $d_n^0 = 0$ . Вместе с (3.5) это дает

$$d_{m+1}^0 = \frac{d}{dz} \tilde{\psi}_{m+1}^1 + \sigma_a \tilde{\psi}_m^0 - Q^0 \delta_{m0} = 0 \quad \forall m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.6)$$

Из соотношений (3.3)-(3.6) вытекают следующие утверждения.

1. Функции  $\tilde{\psi}_m(z, \mu)$  представляются полиномами по  $\mu$ :

$$\tilde{\psi}_m(z, \mu) = \sum_{\ell=0}^{L_m} (\ell + 1/2) \tilde{\psi}_m^\ell(z) P_\ell(\mu), \quad \forall m = 0, 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

где  $L_0 = 0$ ,  $L_1 = 1$ ,  $L_m \Big|_{m \geq 2} = m + \max(0, L_Q - 2)$ .

2. Моменты  $\tilde{\psi}_m^\ell(z)$  при  $\ell = 1, 2, \dots, \ell_m$  выражаются через моменты  $\tilde{\psi}_{m-1}^{\ell \pm 1}$ ,  $\tilde{\psi}_{m-2}^\ell$  и  $Q^\ell$  рекуррентными формулами

$$\tilde{\psi}_m^\ell(z) = \frac{1}{\sigma(1-\omega^\ell)} \left[ Q^\ell \delta_{m2} - \sigma_a \omega^\ell \tilde{\psi}_{m-2}^\ell - \frac{d}{dz} \left( \frac{\ell+1}{2\ell+1} \tilde{\psi}_{m-1}^{\ell+1} + \frac{\ell}{2\ell+1} \tilde{\psi}_{m-1}^{\ell-1} \right) \right]. \quad (3.8)$$

В частности,

$$\tilde{\psi}_{m+1}^\ell(z) = \frac{1}{\sigma(1-\omega^1)} \left[ Q^1 \delta_{m1} - \sigma_a \omega^1 \tilde{\psi}_{m-1}^1 - 1/3 \frac{d}{dz} (2\tilde{\psi}_m^2 + \tilde{\psi}_m^0) \right]. \quad (3.9)$$

3. Нулевые моменты  $\tilde{\psi}_m^0(z)$  подчиняются уравнениям

$$-\frac{1}{3\sigma(1-\omega^1)} \frac{d^2 \tilde{\psi}_m^0}{dz^2} + \sigma_a \tilde{\psi}_m^0(z) = f_m(z) \quad \forall m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.10)$$

где функции  $f_m(z)$  определяются моментами источника  $Q$  и коэффициентов  $\tilde{\psi}_{m-1}$ ,  $\tilde{\psi}_{m-2}$ . Действительно, подставив выражение (3.9) в (3.6), приходим к (3.10), где

$$f_0(z) = Q^0(z), \quad f_1(z) = -\frac{1}{\sigma(1-\omega^1)} \frac{dQ^1}{dz}, \quad (3.11)$$

$$f_m(z) = \frac{1}{\sigma(1-\omega^1)} \left( \sigma_a \omega^1 \frac{d}{dz} \psi_{m-1}^1 + 2/3 \frac{d^2 \psi_m^2}{dz^2} \right) \quad \forall m = 2, 3, \dots, n-1, \quad (3.12)$$

а величины  $\tilde{\psi}_m^2$  выражаются через моменты  $Q^2$ ,  $\tilde{\psi}_{m-2}^2$ ,  $\tilde{\psi}_{m-1}^1$ ,  $\tilde{\psi}_{m-1}^3$ :

$$\tilde{\psi}_m^2 = \left[ Q^2 \delta_{m2} - \sigma_a \omega^2 \tilde{\psi}_{m-2}^2 - \frac{d}{dz} (3/5 \tilde{\psi}_{m-1}^3 + 2/5 \tilde{\psi}_{m-1}^1) \right] / [\sigma(1-\omega^2)]. \quad (3.13)$$

Потребуем дополнительно, чтобы момент  $\tilde{\psi}_n^0(z)$  удовлетворял уравнению (3.10) при  $m = n$  и функцию  $f_n(z)$  определим формулами (3.12), (3.13) при  $m = n$ . Тогда при заданных значениях

$$\tilde{\psi}_m^0(0) = \tilde{\psi}_{m0}, \quad \tilde{\psi}_m^0(Z) = \tilde{\psi}_{mZ}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (3.14)$$

уравнения (3.10) и рекуррентные соотношения (3.8) позволяют последовательно определить все коэффициенты  $\tilde{\psi}_m(z, \mu)$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ , и далее построить функцию  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$ .

4. Будем считать параметры  $\tilde{\psi}_{m0}$  и  $\tilde{\psi}_{mZ}$  в (3.14) величинами  $O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon) = O(1)$ . Эта функция – регулярная функция в смысле определения, принятого в разделе 1, при всех  $n \leq J$ . Действительно, соотношения

$$\tilde{\psi}_0^0(z) \in C^{J+2}[0, Z] \quad \text{и} \quad \tilde{\psi}_1^0(z), \quad \tilde{\psi}_1^1(z) \in C^{J+1}[0, Z] \quad (3.15)$$

следуют из уравнений (3.10) при  $m = 0$  и  $m = 1$  и формул (3.11), (3.4). Пусть при некотором  $m$  таком, что  $1 \leq m < n \leq J$ , имеем  $\tilde{\psi}_1^\ell(z) \in C^{J+2-m}[0, Z]$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, m$ . Тогда из (3.8) следует

$$\tilde{\psi}_{m+1}^\ell \in C^{J+1-m}[0, Z], \quad \forall \ell = 0, 1, \dots, m+1. \quad (3.16)$$

Положим  $y(z) = \tilde{\psi}_{m+1}^0 + 2\tilde{\psi}_{m+1}^2$ . Из (3.10) и (3.12) следует, что при  $2 \leq m+1 \leq n$  эта функция должна удовлетворять уравнению

$$-y''/[3\sigma(1-\omega^1)] + \sigma_a y(z) = g_{m+1}(z),$$

где  $g_{m+1}(z) = \sigma_a \{2\tilde{\psi}_{m+1}^2 + \omega^1 d\tilde{\psi}_m^1/dz/[\sigma(1-\omega^1)]\} \in C^{J+1-m}[0, Z]$ , а краевые значения ее являются величинами  $O(1)$ . Следовательно,  $y(z) \in C^{J+3-m}[0, Z]$ , и поэтому  $\tilde{\psi}_{m+1}^0(z) \in C^{J+2-(m+1)}[0, Z]$ . Из этого соотношения с учетом (3.15) и (3.16) следует регулярность функции  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$ :  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon) \in C^{J+2-n}(\bar{A})$ ,  $n \leq J$ .

5. Пусть

$$\tilde{q}_n(\mu; \varepsilon) \Big|_{\mu>0} = \tilde{\Psi}_n(0, \mu; \varepsilon), \quad \tilde{q}_n(\mu; \varepsilon) \Big|_{\mu<0} = \tilde{\Psi}_n(Z, \mu; \varepsilon) \quad (3.17)$$

и  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$  - решение исходной задачи (1.1), (1.2) при  $q = \tilde{q}_n$  и нормировке (1.34). Покажем, что если  $J \geq 2$ , то при  $n \leq J-2$  функция  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$  является асимптотическим приближением к этому решению и оценим порядок приближения. Невязка (3.1) в соответствии с принятыми требованиями  $d_m = 0$  для  $m = -1, 0, \dots, n-1$ ,  $d_n^0 = 0$  имеет следующий вид:

$$\Delta_n(z, \mu; \varepsilon) = \varepsilon^n d_n(z, \mu) + \varepsilon^{n+1} d_{n+1}(z, \mu) = O(\varepsilon^n). \quad (3.18)$$

Здесь

$$d_n(z, \mu) = \sum_{\ell=1}^{L_n+1} \left\{ (2\ell+1)\sigma_a \omega^\ell \tilde{\psi}_{n-1}^\ell + \frac{d}{dz} [\ell \tilde{\psi}_n^{\ell-1} + (\ell+1)\tilde{\psi}_n^{\ell+1}] \right\} P_\ell(\mu)/2, \quad (3.19)$$

$$d_{n+1}(z, \mu) = \sigma_a \sum_{\ell=0}^{L_p} (\ell+1/2) \omega^\ell \tilde{\psi}_n^\ell P_\ell(\mu).$$

Пусть  $\tilde{\Psi}_{n+2}(z, \mu; \varepsilon)$  - функция, построенная тем же способом, что и  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$  при  $n$ , замененном на  $n+2$ , т.е.

$$\tilde{\Psi}_{n+2}(z, \mu; \varepsilon) = \tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon) + \tilde{\Psi}_{n+1}(z, \mu) \varepsilon^{n+1} + \tilde{\Psi}_{n+2}(z, \mu) \varepsilon^{n+2},$$

моменты  $\tilde{\psi}_{n+1}^0$  и  $\tilde{\psi}_{n+2}^0$  определяются уравнениями (3.10) и заданными краевыми значениями (3.14) (величинами  $O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), а прочие моменты – рекуррентными формулами (3.8) при  $m = n + 1$  и  $m = n + 2$ .

Тогда  $\tilde{\Psi}_{n+2}(z, \mu; \varepsilon) \in C^{J-n}(\bar{A})$ ,  $J - n \geq 2$ . Положим

$$\begin{aligned} E_n(z, \mu; \varepsilon) &= \tilde{\Psi}(z, \mu; \varepsilon) - \tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon), \\ E_{n+2}(z, \mu; \varepsilon) &= \tilde{\Psi}(z, \mu; \varepsilon) - \tilde{\Psi}_{n+2}(z, \mu; \varepsilon). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\left| E_n \right| \leq \left| E_{n+2} \right| + \left| \tilde{\Psi}_n - \tilde{\Psi}_{n+2} \right| = \left| E_{n+2} \right| + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (3.20)$$

Функция  $E_{n+2}$  - решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \hat{T}E_{n+2}(z, \mu; \varepsilon) &= \Delta_{n+2}(z, \mu; \varepsilon), \\ E_{n+2}(0, \mu; \varepsilon) \Big|_{\mu > 0} &= \tilde{\Psi}_n(0, \mu; \varepsilon) - \tilde{\Psi}_{n+2}(0, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \\ E_{n+2}(Z, \mu; \varepsilon) \Big|_{\mu < 0} &= \tilde{\Psi}_n(Z, \mu; \varepsilon) - \tilde{\Psi}_{n+2}(Z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Поскольку для  $\Delta_{n+2}(z, \mu; \varepsilon)$  должно быть справедливо соотношение (3.18) с заменой  $n$  на  $n + 2$ , имеем  $\Delta_{n+2}(z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+2})$ . Но тогда из (1.10) получаем  $E_{n+2}(z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$  и с учетом (3.20) приходим к оценке

$$\left| \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_n \right| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad (3.21)$$

т.е. функция  $\tilde{\Psi}_n$  является асимптотическим приближением порядка  $(n + 1)$  к решению  $\tilde{\Psi}$  уравнения (1.1) с краевыми значениями (3.17). Сингулярная компонента в асимптотическом приближении  $\tilde{\Psi}_n$  отсутствует.

Проведенный анализ приближения  $\tilde{\Psi}_n$  и оценки теоремы 1 позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $\tilde{\Psi}(z, \mu)$  - решение задачи (1.1)-(1.7) в условиях (1.34), (1.35) при  $J \geq 2$  для слоя со слабым поглощением ( $1 - \lambda = O(\varepsilon^2)$ ) и несильной анизотропией рассеяния ( $1 - \bar{\omega} \gg \varepsilon$ ,  $\bar{\omega} = \max_{\ell > 0} \omega^\ell$ ), и  $\tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon)$  определяется при  $n \leq J - 2$

соотношениями (1.39), (3.2)-(3.4), (3.7)-(3.14), а функция  $\varphi(z, \mu; \varepsilon)$  - решение однородного уравнения (1.1) при краевых условиях  $\varphi(0, \mu; \varepsilon)|_{\mu>0} = q(\mu) - \tilde{\Psi}_n(0, \mu; \varepsilon)$ ,  $\varphi(Z, \mu; \varepsilon)|_{\mu<0} = q(\mu) - \tilde{\Psi}_n(Z, \mu; \varepsilon)$  с асимптотическим представлением  $\varphi(z, \mu; \varepsilon) = \varphi^{as}(z, \mu; \varepsilon) + \chi(z, \mu; \varepsilon)$ , определяемым следствием к теореме 1. Тогда функции

$$\Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) = \tilde{\Psi}_n(z, \mu; \varepsilon) + \varphi^{as}(z, \mu; \varepsilon), \quad \Psi_n^{(s)}(z, \mu; \varepsilon) = \chi(z, \mu; \varepsilon) \quad (3.22)$$

представляют регулярную и сингулярную компоненты асимптотического приближения  $\Psi_n = \Psi_n^{(r)} + \Psi_n^{(s)}$  порядка  $n+1$  к решению  $\Psi(z, \mu)$  и равномерно на  $\tilde{A}$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\Psi - \Psi_n| &= O(\varepsilon^{n+1}), \quad \Psi_n^{(r)} \in C^{J+2-n}([0, Z] \times [-1, 1]), \\ \Psi_n^{(s)} &= e^{-\zeta z/\varepsilon} r^+(z, \mu; \varepsilon) + e^{-\zeta(Z-z)/\varepsilon} r^-(z, \mu; \varepsilon), \end{aligned}$$

где  $\zeta > (1 - \lambda\bar{\omega})\sigma$ ,  $r^\pm(z, \mu; \varepsilon)$  - ограниченные функции.

Чтобы получить разложения  $\Psi_n^{(r)}$  по степеням  $\varepsilon$  вида (1.39) с коэффициентами  $\psi_m(z, \mu)$ , не зависящими от  $\varepsilon$ , надо иметь, кроме (3.1), еще соответствующие разложения  $\varphi_n^{as}$  для функции  $\varphi^{as}$ , т.е. построить  $\varepsilon$  - разложения для корня  $k_1$  и функций  $\varphi_1(\mu)$ ,  $W_\lambda(\mu)$ . Возможность такого построения следует из формул (1.20). Главные члены и поправки  $\sim O(\varepsilon)$  анализируются в [12] (см. Приложение). В расчетной практике, однако, удобнее использовать численные значения этих параметров и функций, для определения которых создан эффективный программный аппарат на базе алгоритмов, развитых в [18].

Важным вопросом является выбор граничных значений (3.14). Определенными преимуществами обладает используемый в классическом  $P_1$  - приближении подход, обеспечивающий равенства  $\psi_m = \tilde{\psi}_m$ , т.е. исчезновение функции  $\varphi^{as}[q - \tilde{q}_n]$ , что эквивалентно условиям

$$\int_0^1 \left[ q(+\mu) - \sum_{m=0}^n \psi_m(0, \mu) \varepsilon^m \right] W_\lambda(\mu) d\mu = 0,$$

$$\int_0^1 \left[ q(-\mu) - \sum_{m=0}^n \psi_m(Z, -\mu) \varepsilon^m \right] W_\lambda(\mu) d\mu = 0$$

при  $\lambda = 1 - \varepsilon^2 \sigma_a / \sigma$ . Если функция  $W_\lambda(\mu)$  известна, то используя (3.14) и (3.17), получаем отсюда следующие формулы [19]:

$$\psi_{m0}(\varepsilon) = \left[ \delta_{m0} q^+(\varepsilon) - \sum_{\ell=1}^{L_m} (2\ell + 1) \psi_m^\ell(0) W_\lambda^\ell(\varepsilon) \right] [W_\lambda^0(\varepsilon)]^{-1},$$

$$\psi_{mZ}(\varepsilon) = \left[ \delta_{m0} q^-(\varepsilon) - \sum_{\ell=1}^{L_m} (2\ell + 1) (-1)^\ell \psi_m^\ell(Z) W_\lambda^\ell(\varepsilon) \right] [W_\lambda^0(\varepsilon)]^{-1}.$$

(3.23)

Здесь  $m = 0, 1, \dots, n$ ,

$$q^\pm(\varepsilon) = \int_0^1 q(\pm\mu) W_\lambda(\mu) d\mu, \quad W_\lambda^\ell(\varepsilon) = \int_0^1 W_\lambda(\mu) P_\ell(\mu) d\mu,$$

$W_\lambda^0(\varepsilon) > 0$  вследствие положительности  $W_\lambda^0(\mu)$  на  $(0, 1]$ .

Поскольку моменты  $\psi_m^\ell$  при  $\ell > 0$  определяются по формулам (3.8) через моменты коэффициентов  $\psi_{m-1}, \psi_{m-2}$  и  $Q^\ell$ , можно последовательно, начиная с  $\ell = 0$ , найти все необходимые краевые значения (3.14).

6. Для примера приведем соотношения, определяющие регулярные компоненты асимптотических приближений  $\Psi_{1,2}^{(r)}(z, \mu)$ :

$$\psi_1^1(z, \mu) = -\frac{1}{3(1-\omega^1)\sigma} \frac{d\psi_0^0}{dz},$$

$$\psi_2^1(z) = \frac{1}{3\sigma(1-\omega^1)} \left( 3Q^1 - \frac{d\psi_1^0}{dz} \right),$$

$$\psi_2^2(z) = \frac{1}{\sigma(1-\omega^2)} [(2/5)(\sigma_a \psi_0^0 - Q^0) + Q^2],$$

$$\psi_2^\ell(z) = Q^\ell / [\sigma(1 - \omega^\ell)], \quad \ell = 3, 4, \dots, L_Q \quad \text{при } L_Q \geq 3.$$

Нулевые моменты  $\psi_0^0, \psi_1^0$  и  $\psi_2^0$  определяются диффузионными уравнениями (3.10) с источниками (3.11) и

$$f_2(z) = \left( \sigma_a \omega^1 \frac{d\psi_1^1}{dz} + (2/3) \frac{d^2\psi_2^2}{dz^2} \right) / [\sigma(1 - \omega^1)] =$$

$$a(\sigma_a \psi_0^0 - Q^0) + b \frac{d^2}{dz^2} (Q^0 - 5/2 Q^2),$$

где

$$a = (\sigma_a / \sigma) \left[ \frac{4}{5(1 - \omega^2)} - \frac{\omega^1}{(1 - \omega^1)} \right], \quad b = -\frac{4}{15\sigma^2(1 - \omega^1)(1 - \omega^2)},$$

и краевыми условиями, которые при  $z = 0$  записываются в виде

$$\psi_0^0(0) = 2q^+ / W_\lambda^0, \quad \psi_1^0(0) = \tau_1 / \sigma \psi_0^0(0),$$

$$\psi_2^0(0) = \left\{ \tau_1 \psi_1^0(0) + 2 \left[ \tau_2 Q^0(0) - \sum_{\ell=1}^{L_2} (\ell + 1/2) \tau_\ell Q^\ell(0) \right] \right\} \sigma^{-1},$$

где  $\tau_\ell = W_\lambda^\ell / [W_\lambda^0(1 - \omega^\ell)]$ , и аналогичными условиями при  $z = Z$ .

Отметим, что в задачах с изотропным рассеянием при  $Q(z, \mu) = \bar{Q} = const$ ,  $q(\mu) = 0$  и  $\lambda = 1$  приближение  $\Psi_2^{(r)}(z, \mu)$  совпадает с точным выражением для регулярной компоненты:

$$\Psi^{(r)}(z, \mu) = \bar{Q} \{ (3\sigma/2)z(Z - z) + (3/2)[\tau_1 Z - \mu(Z - 2z)]\varepsilon +$$

$$(2/\sigma)[\tau_2 - P_2(\mu)]\varepsilon^2 \}$$

( $\tau_1 \approx 0.710$ ,  $\tau_2 \approx 0.328$ ), а в качестве частного регулярного решения  $\tilde{\Psi}_2^{(r)}$  может быть взята функция (1.9) при нормировке источника

(1.34). Хотя  $\Psi^{(r)}(z, \mu)|_{m>0} \neq 0$ ,  $\Psi^{(r)}(Z, \mu)|_{m<0} \neq 0$ , но

$$\int_0^1 \Psi^{(r)}(0, \mu) W_1(\mu) d\mu = 0, \quad \int_{-1}^0 \Psi^{(r)}(Z, \mu) W_1(-\mu) d\mu = 0.$$

Как показано в [5], функция  $\tilde{W}_1(\mu) = 0.956\mu + 1.565\mu^2$  аппроксимирует  $W_1(\mu)$  с хорошей точностью:

$$\left| W_1(\mu) - \tilde{W}_1(\mu) \right| \leq 0.0035.$$

### Заключение

В широком классе задач, в частности, в задачах радиационной защиты определение регулярной компоненты оказывается наиболее важной целью расчета. Расчетный аппарат в этой части может быть значительно проще, чем в решении исходной задачи, а использование грубосеточных алгоритмов дает существенный выигрыш как в объемах используемой памяти ЭВМ, так и в скорости счета.

Построенные в данной работе регулярные компоненты асимптотических приближений можно представить в форме  $P_N$  приближений метода сферических гармоник:

$$\Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) = \sum_{\ell=0}^N (\ell + 1/2) \Psi_n^\ell(z; \varepsilon) P_\ell(\mu),$$

где

$$\Psi_n^{(\ell)}(z; \varepsilon) = \sum_{m=\ell}^n \psi_m^\ell(z; \varepsilon) = O(\varepsilon^\ell),$$

$N = n + L_Q$  в задачах с сильным поглощением, при слабом поглощении  $N = n$  при  $n \leq 2$ , а при  $n > 2$  имеем  $N = n + \max(0, L_Q - 2)$ . В то время, как классические  $P_N$  - приближения аппроксимируют в интегральных нормах полное решение исходной задачи, функция  $\Psi_n^{(r)}(z, \mu; \varepsilon)$  аппроксимирует в равномерной норме лишь регулярную часть асимптотических приближений.

В построении уравнений для моментов  $\Psi_n^\ell(z)$  могут быть использованы полученные формулы и уравнения для коэффициентов  $\psi_m^\ell(z; \varepsilon)$ . Переход к таким уравнениям или к эквивалентным им уравнениям метода дискретных ординат [19] представляет интерес с точки зрения разработки эффективных расчетных алгоритмов.

В [6] рассматриваются «упрощенные  $P_N$  - уравнения» для определения коэффициентов  $\Psi_n^\ell(z)$  в задачах с изотропными источниками. Они получены формальным разложением по степеням



$\varepsilon$  интегрального уравнения, отвечающего задаче (1.1), (1.2). Такой подход сравнительно просто переносится на задачи для неоднородных сред и задачи с неодномерными геометриями [20]. Принимаемые авторами допущения обеспечивают исчезновение нечетных степеней в разложениях моментов  $\Psi_n^\ell(z; \varepsilon)$  и существенно упрощают краевые условия. Вместе с тем возникает заметная погрешность, особенно в областях, свободных от внутренних источников. В решении проблем, возникающих в теории асимптотических приближений для подобных задач, существенное значение могут иметь подходы и результаты предложенной в настоящей работе асимптотической теории для класса сравнительно простых одномерных задач.

Автор признателен рецензенту, тщательно проверившему работу и высказавшему ряд предложений по уточнению результатов, и благодарен ГЭ. Косаревой за большую помощь в работе над текстом.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

1. Покажем, что ненулевые корни характеристического уравнения (1.11) простые и для них справедливы оценки (1.12). Оператор  $\hat{V} = (1 - k\mu)^{-1} \hat{S}$ , являясь симметризуемым интегральным оператором с вырожденным ядром, имеет  $\tilde{I}$  характеристических чисел  $\lambda_i(k)$  при всех  $k \in (-1, 1)$  и соответствующие собственные функции  $\varphi_i(k, \mu)$  удовлетворяют уравнению (1.18). Число  $\tilde{I}$  совпадает с числом коэффициентов  $\omega^\ell \neq 0$  в разложении (1.4),  $\tilde{I} \leq L_p + 1$  (см. [16]). Функции  $\lambda_i(k)$  вещественные при  $k \in (-1, 1)$ , аналитические в некоторой окрестности интервала  $(-1, 1)$  и для них выполняются соотношения [9]

$$\lambda_i(k) = \lambda_i(-k) \neq 0, \quad \lambda_i(0) = 1/\omega^{\ell(i)}, \quad \lambda_i'(0) = 0, \quad (\text{П.1})$$

$$\lambda_i(k_i) = \lambda. \quad (\text{П.2})$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, I$ ,  $I \leq \tilde{I}$ , так как значение  $\lambda > 0$  на интервале  $(-1, 1)$  могут принимать лишь те функции  $\lambda_i(k)$ , для которых

$\omega^{\ell(i)} > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow 1} \lambda_i(k) < \lambda$  (см. [16]). Числа  $\ell(i)$  выбраны так, чтобы последовательность  $\omega^{\ell(i)}$  была невозрастающей,  $\ell(1) = 0$ .

Пусть  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(\mu) g(\mu) d\mu$ , если функции  $f(\mu)$  и  $g(\mu)$

такие, что существует этот интеграл. Дифференцированием по  $k$  на интервале  $(-1, 1)$  уравнения (1.18) в [16] получены соотношения

$$d \lambda_i / dk = -(\mu \varphi_i, \varphi_i) / (\hat{S} \varphi_i, \varphi_i) = \lambda_i / [k - (\varphi_i, \varphi_i) / (\mu \varphi_i, \varphi_i)], \quad (\text{П.3})$$

при  $i = 1, 2, \dots, I$ . Умножая (1.18) на  $\varphi_i(k, \mu)$  и интегрируя полученное соотношение на  $(-1, 1)$ , приходим к равенствам

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1/2)(1 - \lambda_i \omega^\ell)(\varphi_i^\ell)^2 = k(\mu \varphi_i, \varphi_i).$$

Если  $0 < \lambda_i \leq 1$ , то при  $k > 0$  также  $(\mu \varphi_i, \varphi_i) > 0$ . Действительно, при  $\lambda_i < 1$  это очевидно. Если  $\lambda_i = 1$ , то, используя соотношения (1.16) при  $\lambda = \lambda_i$ ,  $\ell = 0$  и  $\ell = 1$  и (1.19), находим  $\varphi_i^0 = 2$ ,  $\varphi_i^1 = 0$ ,  $\varphi_i^2 = -1$ . Следовательно,  $(\mu \varphi_i, \varphi_i) \geq (5/2)(1 - \omega^2)/k > 0$ . Поскольку функции  $\varphi_i(\mu)$  непрерывны на  $[-1, 1]$ , то имеем  $(\mu \varphi_i, \varphi_i) < (\varphi_i, \varphi_i)$ . Поэтому из (П.3) получаем оценку

$$d \lambda_i / dk < 0 \quad \forall \lambda_i \in (0, 1], k \in (0, 1). \quad (\text{П.4})$$

Если  $k_i$  - наименьший корень уравнения (П.2), то в соответствии с этой оценкой он не может быть кратным, а функция  $\lambda_i(k)$  убывает на интервале  $(k_i, 1)$ . Поэтому уравнение (П.2) для каждого значения  $i = 1, 2, \dots, \tilde{I}$  имеет лишь один простой корень.

Функция  $\varphi_i(\mu)$  соотношениями (1.16) и (1.17) определяется по значению  $k_i$  однозначно, т.е. ненулевые корни характеристического уравнения (1.11) не могут быть кратными.

Чтобы получить оценки (1.12) при  $I \geq i \geq 1$ ,  $\omega^{\ell(i)} > 0$ , введем линейную функцию  $\Lambda_i(k) = (1 - \beta_i k) / \omega^{\ell(i)}$ , где  $\beta_i = (1 - \lambda \omega^{\ell(i)}) / k_i > 0$ . Очевидно, что  $\Lambda_i(0) = \lambda_i(0) > 0$ ,  $\Lambda_i(k_i) = \lambda_i(k_i) = \lambda$ . При  $k \rightarrow 0$ , согласно (П.1),  $\lambda_i(k) = 1 / \omega^{\ell(i)} + O(k^2) > \Lambda_i(k)$ . Пусть  $k^* \in (0, k_i]$  - ближайшая к нулю точка, где значения функций  $\Lambda_i$  и  $\lambda_i$  совпадают:  $\Lambda_i(k^*) = \lambda_i(k^*) = \lambda^* \geq \lambda$ . Тогда  $1 - \beta_i k^* = \lambda^* \omega^{\ell(i)} > 0$  и справедливы неравенства  $\left| d\lambda_i / dk \right|_{k=k^*} \leq \left| d\Lambda_i / dk \right|_{k=k^*} < 0$ . Поэтому из (П.3) и определения  $\Lambda_i(k)$  следуют соотношения

$$\lambda^* / (1 - \beta_i k^*) > \left| d\lambda_i / dk \right|_{k=k^*} \geq \left| d\Lambda_i / dk \right|_{k=k^*} = \beta_i / \omega^{\ell(i)} = \lambda^* \beta_i / (1 - \beta_i k^*) > 0.$$

Они возможны лишь при  $\beta_i (1 - k^*) < 1 - \beta_i k^*$ , т.е. при  $\beta_i < 1$ . Следовательно, оценки (1.12) справедливы.

2. Асимптотическое представление (1.30) решения задачи (1.1)-(1.7) при  $F(z, \mu) \equiv 0$  получаем, следуя [14]. Достаточно рассмотреть лишь задачу для слагаемого  $\Psi^+(z, \mu)$  в (1.28). Положим

$$\Psi^+(z, \mu) = \Psi^{as}(z, \mu) + \chi(\tau, \mu),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi^{as}(z, \mu) &= \Psi_{\infty}^{as}(z, \mu) + C^+ \Phi_1(z, \mu) + C^- \Phi_{-1}(z, \mu), \\ \chi(\tau, \mu) &= \chi_{\infty}(\tau, \mu) + \chi^+(\tau, \mu) + \chi^-(\tau^* - \tau, -\mu), \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

функции  $\Psi_{\infty}^{as}(z, \mu)$  и  $\chi_{\infty}(\tau, \mu)$  определяются соотношениями (1.26),  $C^{\pm}$  - пока не известные коэффициенты, а функции  $\chi^{\pm}(\tau, \mu)$  удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\begin{aligned} \hat{T} \chi^{\pm} &= 0, \quad \chi^{\pm}(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} = \chi_0^{\pm}(\mu), \quad \chi^{\pm}(\tau^*, \mu) \Big|_{\mu < 0} = 0, \\ \chi_0^+(\mu) \Big|_{\mu > 0} &= -C^+ \Phi_1(0, \mu) - C^- \Phi_{-1}(0, \mu), \end{aligned}$$

$$\chi_0^-(\mu)\Big|_{\mu>0} = -C^+\Phi_1(Z, -\mu) - C^-\Phi_{-1}(Z, -\mu) - \Psi_\infty^{as}(Z, -\mu) - \chi_\infty(\tau^*, -\mu).$$

Коэффициенты  $C^\pm$  определим из условий

$$\int_0^1 \chi_0^+(\mu)W_\lambda(\mu)d\mu = 0, \quad \int_0^1 [\chi_0^-(\mu) + \chi_\infty(\tau^*, -\mu)]W_\lambda(\mu)d\mu = 0. \quad (\text{П.6})$$

Используя формулы (1.14), (1.23) и (1.26), при  $\lambda < 1$  получаем следующую систему уравнений для определения  $C^\pm$ :

$$C^+ + \tilde{K}_\lambda C^- = 0, \quad \tilde{K}_\lambda C^+ + C^- = -\tilde{K}_\lambda \psi_\lambda^+,$$

где  $\tilde{K}_\lambda = K_\lambda \exp(-k_1 \tau^*)$ . Определитель этой системы  $D_\lambda = 1 - \tilde{K}_\lambda^2$  положителен при  $K_\lambda < 1$ , и ее решение имеет следующий вид:

$$C^- = -(\tilde{K}_\lambda / D_\lambda) \psi_\lambda^+, \quad C^+ = (\tilde{K}_\lambda^2 / D_\lambda) \psi_\lambda^+. \quad (\text{П.7})$$

При  $\lambda = 1$  функции  $\Phi_{\pm 1}$  определяются формулами (1.15) и величины  $C^\pm$ , удовлетворяющие уравнениям

$$C^+ - (\tau_1 / \Sigma_t) C^- = 0, \quad C^+ + [(\tau^* + \tau_1) / \Sigma_t] C^- = -\psi_1^+,$$

имеют следующий вид:

$$C^- = -[\Sigma_t / (\tau^* + 2\tau_1)] \psi_1^+, \quad C^+ = -[\tau_1 / (\tau^* + 2\tau_1)] \psi_1^+. \quad (\text{П.8})$$

Подставляя формулы (П.7) и (П.8) в (П.5), приходим к выражениям (1.29), определяющим величину  $\Psi^{as}$  в (1.30) при  $\psi_\lambda^- = 0$ .

Чтобы оценить слагаемое  $\chi(\tau, \mu)$ , воспользуемся следующими из теоремы 1 оценками функций  $\chi_\infty^\pm(\tau, \mu)$  - ограниченных решений краевых задач для полубесконечного слоя:

$$\hat{T} \chi_\infty^\pm = 0, \quad \chi_\infty^\pm(0, \mu) = \chi_0^\pm(\mu) \quad \text{при} \quad \mu > 0.$$

В условиях (П.6) имеем  $\chi_\infty^\pm(\tau, \mu) = \exp(-\eta\tau) r_\infty^\pm(\tau, \mu)$ , где  $\eta$  определяется так же, как в теореме 1, а  $r_\infty^\pm(\tau, \mu)$  - ограниченные на  $\tilde{A}$  функции. Поскольку функции  $\Delta^\pm(\tau, \mu) = \chi_\infty^\pm(\tau, \mu) - \chi^\pm(\tau, \mu)$  являются решениями краевых задач

$$\hat{T} \Delta^\pm = 0, \quad \Delta^\pm(0, \mu)\Big|_{\mu>0} = 0, \quad \Delta^\pm(\tau^*, \mu)\Big|_{\mu<0} = \chi_\infty^\pm(\tau^*, \mu),$$

то справедливы оценки  $|\Delta^\pm(\tau, \mu)| \leq \text{const} \exp(-\eta\tau^*)$ , и следовательно,

$$\chi^\pm(\tau, \mu) = \exp(-\eta\tau) r_*^\pm(\tau, \mu), \quad (\text{П.9})$$

где  $r_*^\pm(\tau, \mu)$  - ограниченные функции на  $\tilde{A}$ . Отсюда, учитывая (П.5) и (1.27), приходим к формуле

$$\chi(\tau, \mu) = \exp(-\eta\tau) r^+(\tau, \mu) + \exp[-\eta(\tau^* - \tau)] r^-(\tau, \mu),$$

где  $r^\pm(\tau, \mu)$  - ограниченные на  $\tilde{A}$  функции. Опираясь на определение слагаемых  $\Psi^\pm$  в (1.28), из результатов, установленных для  $\Psi^+(z, \mu)$ , получаем (1.30) для  $\Psi^-(Z - z, -\mu)$  и затем формулу (1.30) для  $\Psi(z, \mu)$ .

Покажем, что при малых значениях  $k_1$ , т.е. при  $\lambda \approx 1$ , справедлива оценка  $K_\lambda < 1$ . Действительно, разложение (1.20) позволяет при  $k_1 \rightarrow 0$  установить соотношения

$$N_\lambda = 4k_1 / [3(1 - \omega^1)] + O(k_1^3), \quad (\text{П.10})$$

$$1 - K_\lambda = \int_0^1 [\varphi_1(\mu) - \varphi_1(-\mu)] W_\lambda(\mu) d\mu = 2k_1 W_\lambda^1 / (1 - \omega^1) + O(k_1^3), \quad (\text{П.11})$$

где  $W_\lambda^1 = \int_0^1 \mu W_\lambda(\mu) d\mu$ . Чтобы убедиться в том, что  $K_\lambda < 1$ ,

достаточно показать, что  $W_\lambda^1 = 1$  при  $k_1 \rightarrow 0$ .

С этой целью положим

$$\theta_\lambda(z, \mu) = \mathcal{G}_\lambda(z, \mu) + \zeta_\lambda(z, \mu), \quad (\text{П.12})$$

где при  $\lambda < 1$

$$\mathcal{G}_\lambda(z, \mu) = [\varphi_{-1}(\mu) \exp(k_1 \tau) - \varphi_1(\mu) \exp(-k_1 \tau)] / N_\lambda,$$

а  $\zeta_\lambda(z, \mu)$  - ограниченное решение краевой задачи

$$\hat{T}\zeta_\lambda = 0, \quad \zeta_\lambda(0, \mu) \Big|_{\mu>0} = -\mathcal{G}_\lambda(0, \mu),$$

для полубесконечного слоя. Используя разложение (1.20) для  $\varphi_1(\mu)$  и (П.10) при  $k_1 \rightarrow 0$ , имеем

$$\mathcal{G}_\lambda(0, \mu) = -\frac{3}{2}\mu + O(k_1^2), \quad \zeta_\lambda(0, \mu) \Big|_{\mu>0} = \frac{3}{2}\mu + O(k_1^2) \quad (\text{П.13})$$

и следовательно,

$$3/2 + O(k_1^2) \geq \zeta_\lambda(0, -\mu) \Big|_{\mu>0} = \zeta_1(-\mu) + O(k_1^2),$$

где  $\zeta_1(-\mu) > 0$ . Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{3}{2}(1 + \mu) + O(k_1^2) \geq \theta_\lambda(0, -\mu) \geq \frac{3}{2}\mu + O(k_1^2) \quad \text{при } \mu > 0,$$

из которых получаем следующую оценку для величины  $W_\lambda^1$ :

$$3/4 + O(k_1^2) \geq W_\lambda^1 \geq 3/8 + O(k_1^2).$$

Из (П.11) теперь следует, что  $K_\lambda < 1$  при  $k_1 \rightarrow 0$ .

3. Покажем, что асимптотические представления (1.24), (1.26) и (1.30) для  $\lambda < 1$  при  $\Sigma_s \rightarrow \Sigma_t$ , т.е. при  $\lambda \rightarrow 1$ , непрерывным образом переходят в соответствующие представления для  $\lambda = 1$ .

Пусть  $\lambda \in (0, 1]$ ,  $\Sigma_s = \lambda \Sigma_t$ . Соответствующий оператор  $\hat{T}$  обозначим через  $\hat{T}_\lambda$ , а решение задачи (1.21) – через  $\Psi_\infty^\lambda(z, \mu)$ . При  $\lambda \rightarrow 1$  пределом каждого члена ряда Неймана, представляющего  $\Psi_\infty^\lambda(z, \mu)$ , является соответствующий член ряда Неймана для  $\Psi_\infty^1(z, \mu)$ , т.е. на множестве  $\tilde{A}_\infty$  справедливо соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \Psi_\infty^\lambda(z, \mu) = \Psi_\infty^1(z, \mu). \quad \text{В силу теоремы 1, эта сходимость}$$

является равномерной на всяком замкнутом ограниченном множестве из  $\tilde{A}_\infty$ .

Опираясь на формулы (1.24), полагаем (подобно (П.12))

$$\theta_1(z, \mu) = (3/2)[(1 - \omega^1)z - \mu] + \zeta_1(z, \mu), \quad (\text{П.14})$$

где функция  $\zeta_1(z, \mu)$  - ограниченное решение краевой задачи

$$\hat{T}_1 \zeta_1 = 0, \quad \zeta_1(0, \mu) \Big| = \frac{3}{2}\mu.$$

Из (П.13) вытекает предельное соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \zeta_{\lambda}(\tau, \mu) = \zeta_1(\tau, \mu).$$

Отсюда, учитывая (П.12) и (П.14), получаем равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} W_{\lambda}^1 / (1 - \omega^1) = \tau_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \psi_{\lambda}^+ = \psi_1^+, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \theta_{\lambda}(z, \mu) = \theta_1(z, \mu) \quad \forall \{z, \mu\} \in \tilde{A}_{\infty}.$$

Вместе с (1.20), (П.10) и (П.11) они обеспечивают выполнение предельных соотношений

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \theta_{\lambda}^{as}(\tau, \mu) = \theta_1^{as}(\tau, \mu), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} V_{\lambda}(\tau, \mu) = V_1(\tau, \mu),$$

и следовательно, непрерывный переход формул (1.24), (1.26) и (1.30) для  $\lambda < 1$  в соответствующие формулы для  $\lambda = 1$  (равномерный на всяком ограниченном замкнутом множестве из  $\tilde{A}_{\infty}$ ).

### Список литературы

1. *Badruzzaman A.* Asymptotic analysis of the finite moments transport method in optically thick media // Nucl. Sci. Engng. 1992. V. 112. № 2. P. 321-335.
2. *Germogenova T.A., Shwetsov A.V., Voloschenko A.M.* Adaptive positive nodal method for transport equation // Transp. Theory and Statist. Phys. 1994. V. 23. № 7. P. 923-970.
3. *Hennart J.P., Del Valle E.* A generalized nodal finite element formalism for discrete ordinates equations in slab geometry. Part 1: Theory in the continuous moment case. Part 2: Theory in the discontinuous moment case // Transp. Theory and Statist. Phys. 1995. V. 24. №4. P. 268-282.
4. *Habetler G., Matkowsky B.* Uniform asymptotic expansions in transport theory with small mean free paths and the diffusion approximation // J. Math. Phys. 1975. V. 16. №4-5. p. 846-854.
5. *Larsen E.W., Morel J.E.* Asymptotic solution of numerical transport problems in optically thick, diffusive regimes. II // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. №1. P. 212-236.
6. *Larsen E.W., Morel J.E., McGhee J.M.* Asymptotic derivation of the simplified  $P_N$  – equation // Proc. Joint Internat. Conf. Math. Meth. and Supercomput. in Nucl. Appl. Karlsruhe, April 19-23, 1993. V. 1. p. 718-729.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.П.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

8. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса излучения. М.: Наука, 1986.
9. Масленников М.В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием // Тр. МИ АН СССР М., 1968. Т. 97. С. 3-133.
10. *Масленников М.В.* Некоторые интегральные соотношения в теории переноса излучения: Препринт № 6. М.: ИПМатем. АН СССР, 1970.
11. *Гермогенова Т.А.* О характере решения уравнения переноса для плоского слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 6. С. 1001-1019.
12. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972.
13. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса М.: Мир, 1972.
14. *Гермогенова Т.А.* Краевые задачи для уравнения переноса. Докт. дисс. М.: ИПМатем. АН СССР, 1971.
15. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу М.: Мир, 1979.
16. *Гермогенова Т.А.* О дискретном спектре характеристического уравнения теории переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 6. С. 1526-1543.
17. *Гермогенова Т.А.* Слабо сингулярные интегральные уравнения на интервале большой длины: Препринт №11. М.: ИПМатем. АН СССР, 1990.
18. *Гермогенова Т.А., Коновалов Н.В.* Асимптотические характеристики решения уравнения переноса в задаче о неоднородном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14 № 4. С. 928-946.
19. *Germogenova T.A.* Asymptotic Expansions of the Transport Equation Solutions in optically thick media // Proc. 8-th Conf. on Radiation Shielding. Arlington, Texas, USA, April 24-27, 1994. V. 1. P. 564-571.
20. *Larsen E.W., Morel J.E., McGhee J.M.* Asymptotic derivation of the multigroup  $P_1$  and simplified  $P_N$  – equations with anisotropic scattering // Proc. Internat. Conf. Math. Comput., Reactor Phys., and Environmental Analyses. Portland, Oregon, USA, Apr. 30-May 4, 1995. V. 1. P. 309-318.



## Asymptotic approximations to transport equation solution in optically thick domain

TTSP, 27, 523 (1998)

### ABSTRACT

Steady-state monoenergetic transport problems for homogeneous domains of large optical thickness  $\tau^*$  with smooth scattering functions and sources are considered. The asymptotic approximation to the solution is decomposed into two parts: a regular component and a singular one. Expansions in powers of  $\varepsilon = 1/\tau^*$  are constructed for these components on the basis of the boundary layer method and accuracy estimates of asymptotic approximations are established. For slab geometry problems some algorithms are proposed to construct the asymptotic approximation with the singular component exponentially decreasing with moving away from boundaries. Some discrete transport models for these problems are considered and a new approach to construct and investigate coarse-mesh solutions is proposed. It is based on the analysis of the regular and singular components of the mesh solution.

### I. INTRODUCTION

The transport problem for domains of a large optical thickness  $\tau^*$  are typical in the theory of shielding from charged and neutral particles where  $\tau^*$  can be as large as  $10^3$ - $10^6$ , and in the optics of atmospheres with cloud and aerosol layers with  $\tau^*=10$ - $10^2$ . When  $\tau^* \gg 1$  just as transport equation coefficients and inner sources of radiation are smooth enough the structure of the solution is relatively simple: it is smooth inside the domain and has singularities only in the vicinity of the boundary surfaces [1], [2].

Currently, conservative nodal schemes (e. g. [3] – [6]) are intensively developed and used for solving such problems with *coarse-mesh algorithms*, in which the space cell size  $\Delta$  is much greater than the mean free path  $l$ . On the other hand it is a long-established practice to calculate the smooth part of transport equation solution by solving the diffusion and  $P_1$  – approximation equations. Recently coarse-mesh approximations of the simplified  $P_N$  – equations ( $SP_N$  – equations) begun to be applied to determine transport corrections to diffusion results [7] – [9].

However many issues concerning the constructing coarse-mesh approximations and parameters of calculational algorithms, as well as estimations of the accuracy of coarse-mesh solutions, remain unclear. As a rule, authors restrict oneself to the construction of the asymptotic expansion in powers of a small parameter  $\varepsilon=1/\tau^*$  for the “interior solution”, disregarding the solution transient part. Equations for coefficients of this  $\varepsilon$  – expansion have been derived by several authors both for plane geometry problems (see [7], [8] and the extensive literature cited therein, [10]) and in general cases [9], [11], [12]. The most complicated problem is now to set up the boundary conditions for the interior solutions. They have to be constructed in the form providing the calculation of the all smooth part of the solution with a given accuracy  $\sim O(\varepsilon^N)$ . Tomašević and Larsen [13] have used the integral Roussopoulos variational principle to derive the  $SP_2$  equations with interface and boundary conditions. In this way they obtain Marshak-like boundary conditions as it should be in integral norm approximations [14]. However the effect of ordering by importance the various terms with respect to parameter  $\varepsilon$  in the boundary conditions has turned out to be lost. As more proper to asymptotic techniques it seems the approach proposed by Losey with coauthors [15], in which interior and boundary layer expansions are matched in an overlap region to form a composite solution that is valid throughout. This approach is based on the Case representation of the solution to the Milne Problem for isotropic scattering medium without absorption. However it is tedious enough in the extension on more complicative problems.

We use in investigations of considered problems with the small parameter  $\varepsilon$  the boundary layer method of the singular perturbation theory [16], which is based on the well-known results obtained by Tikhonov [16]. The starting point here is the construction of asymptotic approximations to the solution to transport boundary problem as the sum of *regular* (smooth) and *singular* (rapidly decreasing away from the boundaries) components. In this paper we consider monoenergetic problems for optically thick homogeneous domains with smooth sources, including the cases of pure scattering and weak and strong absorption and taking into account the scattering and source anisotropy. These problems are the key problems in the development of the proposed approach. The mathematical formulation of the problems and the adopted constraints are discussed in Section II,

where some useful properties of exact solutions are also indicated. In particular, we use the maximum principle [2] to obtain the uniform estimates of the solutions both in the case of pure scattering and in the presence of absorption. They allow us to obtain the uniform estimates of the accuracy of asymptotic approximations constructed in the form of  $\varepsilon$  – expansions of regular and singular components. The boundary condition statement in scattering dominated problems with plane geometry both for regular components and for singular ones is discussed in Section III. Proposed boundary conditions provide the exponential decreasing of the singular component with moving away from boundaries. In Section IV some discrete transport models of these problems are considered. They correspond to the discrete ordinates angle approximation and to the finite moment space on. Asymptotic approximations to the coarse-mesh solutions are constructed and properties of their regular and singular components are investigated.

## II. STRUCTURE OF ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS

We consider the steady-state one-speed boundary problem for the angular radiation flux  $\Psi(r, \Omega)$  traveling in direction  $\Omega$  at position  $r$  in a domain  $G$  with anisotropic scattering and sources:

$$\hat{T}\Psi(r, \Omega) = \Omega \nabla \Psi + \Sigma_t \Psi(r, \Omega) - \Sigma_s \hat{S}\Psi(r, \Omega) = F(r, \Omega), \quad (1)$$

$$\Psi(r, \Omega)|_{r \in \partial G} = q(r, \Omega) \text{ at } \Omega n(r) < 0. \quad (2)$$

Here the standard neutronic notations are used,

$$\hat{S}\Psi(r, \Omega) = 1 / (4\pi) \int_S \mathcal{P}(\Omega \Omega') \Psi(r, \Omega') d\Omega', \quad (3)$$

$$\mathcal{P}(\Omega \Omega') = \sum_{\ell=0}^L (2\ell + 1) \omega_\ell P_\ell(\Omega \cdot \Omega'). \quad (4)$$

It is supposed that

$$\mathcal{P}(\Omega \Omega') \geq 0, \quad \omega_0 = 1, \quad |\omega_\ell|_{\ell > 0} < 1, \quad L < \infty. \quad (5)$$

$G$  is a convex open domain with a smooth boundary surface  $\partial G$ ,  $n(r)$  is an outer normal in a point  $r \in \partial G$ , and cross sections  $\Sigma_t$  and  $\Sigma_s$  are constants,

$$\Sigma_t \leq \Sigma_s, \quad \lambda = \Sigma_s / \Sigma_t \leq 1, \quad (6)$$

$F(r, \Omega)$  is a smooth function:  $F(r, \Omega) \in C^J(\bar{A})$ , where  $A = G \times S$ ,  $J > 0$ , and  $q(r, \Omega)$  is a bounded function.

Several monographs (e.g. [1], [2], [14]) and numerous journal papers contain analyses of problem (1) – (3) performed under various assumptions concerning the coefficients and the source terms. Here we note some results that are valid under the assumptions made above.

1. There exists a unique solution to the problem (1) – (6) on the set  $\tilde{A} = (G \times S) \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$ , where

$$\Gamma_- = \{(r, \Omega); r \in \partial G, \Omega n(r) < 0\}, \quad \Gamma_+ = \{(r, \Omega); r \in \partial G, \Omega n(r) > 0\}.$$

The solution has certain smoothness properties at all points of this set and can be represented by asymptotic expansions in a neighborhood of the surface  $\partial G$ .

2. The maximum and minimum principles apply to the solution to problem (1) – (6) [2]. It is majorized by the solution  $\tilde{\Psi}(r, \Omega)$  to a similar problem with the constant inner source  $\bar{F}$  and the constant external radiant flux  $\bar{q}$  where.

$$\bar{F} = \sup_{G \times S} |F(r, \Omega)|, \quad \bar{q} = \sup_{\Gamma_-} |q(r, \Omega)|.$$

If  $\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_s > 0$ , then the constant  $\Psi_\infty = \bar{F} / \Sigma_a$ , which is the solution to equation (1) with  $F(r, \Omega) \equiv \bar{F}$  with in an infinite medium characterized by the same cross sections  $\Sigma_t, \Sigma_s$  and by scattering indicatrix  $\mathcal{P}(\Omega\Omega')$  majorizes the function

$\tilde{\Psi}(r, \Omega)$  at  $\bar{q} \leq \Psi_\infty$ . If  $\bar{q} > \Psi_\infty$  we set  $\tilde{\Psi}(r, \Omega) = \Psi_\infty + \Psi_1(r, \Omega)$ , and  $\Psi_1(r, \Omega)$  is the solution to the homogeneous equation (1) supplemented with boundary conditions (2), where the function  $q(r, \Omega)$  is replaced with  $\bar{q} - \Psi_\infty$ . It is obvious that

$$0 \leq \tilde{\Psi} \leq \Psi_\infty + (\bar{q} - \Psi_\infty) = \bar{q}.$$

Hence we obtain we following estimate

$$\forall \{r, \Omega\} \in \tilde{A}: |\Psi(r, \Omega)| \leq \max\{\bar{F} / \Sigma_a, \bar{q}\} \text{ at } \Sigma_a > 0. \quad (7)$$

In problems with a small absorption ( $\Sigma_s \approx \Sigma_t, \lambda \approx 1$ ) that estimate is too overstated. To obtain a better estimate we consider at first the auxiliary problem with  $\Sigma_a = 0, q(r, \Omega) \equiv 0, F(r, \Omega) \equiv \text{const} = \bar{F}$  for the slab  $(0, Z)$  of thickness  $Z = D = \text{diam } G$ . Let  $\psi(z, \mu)$  with  $\mu = e_z \Omega, z = e_z r$  is the solution to this slab problem. From comparison theorem [2] the following estimate for the solution to the original problem (1) – (6) with  $q \equiv 0$  implies:

$$|\Psi(r, \Omega)| \leq \psi(z, \mu).$$

The exact solution to the slab equation (1)

$$\psi_0(z, \mu) = \bar{F} \{ 3/2 [\Sigma_t (1 - \omega_1) z (Z - z) + Z - \mu (Z - 2z)] + 2(1 - P_2(\mu) / \Sigma_t (1 - \omega_2)) \} \quad (8)$$

majorizes the considered auxiliary slab problem solution  $\psi(z, \mu)$  since at  $\mu > 0$

$$\psi_0(0, \mu) = \psi_0(Z, -\mu) = \bar{F} [3/2(1 - \mu)Z + 2(1 - P_2(\mu)) / [\Sigma_t (1 - \omega_2)]] \geq 0.$$

Consequently we have

$$\forall \{r, \Omega\} \in \tilde{A}: \Psi(r, \Omega) \leq \psi_0(z, \mu) \text{ at } z = e_z r \quad \mu = e_z \Omega, \quad (9)$$

Now using relations (8) and (9), basing on the linearity of the problem and the maximum principle, we obtain the desired estimates in general problems with  $q(r, \Omega) \neq 0$ :

$$|\Psi(r, \Omega)| \leq 3\bar{F} \{ \Sigma_t (1 - \omega_1) D^2 / 8 + D + [\Sigma_t (1 - \omega_2)]^{-1} \} + \bar{q}, \quad (10)$$

$$|\Psi(r, \Omega)|_{r \in \partial G} \leq 3\bar{F} \{ D + [\Sigma_t (1 - \omega_2)]^{-1} \} + \bar{q}. \quad (11)$$

Numerical coefficients on the right – hand side can be refined. However comparing this with (8) we see that for  $\Sigma_t Z \gg 1$  the main term order is not overestimated.

3. In problems for optically thick regions ( $\Sigma_t D \gg 1$ ) the small dimensionless parameter  $\varepsilon = 1 / (\Sigma_t D)$  is introduced, the transport equation (1) by means of a simple change of variables is reduced to the same form with the coefficients  $\Sigma_t = \sigma / \varepsilon$ ,  $\Sigma_s = \sigma_s / \varepsilon$ , and we have

$$\sigma \asymp 1, \quad \sigma_s \leq \sigma, \quad D = \text{diam} G \asymp 1. \quad (12)$$

As it follows from the estimates (7) and (10), in order the relation

$$\Psi(r, \Omega) = 0(1) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (13)$$

will be satisfied, we must set:  $q(r, \Omega) = 0(1)$ ,

$$F(r, \Omega) = Q(r, \Omega) / \varepsilon \text{ for essential absorption } (1 - \lambda > \varepsilon, \text{ i.e. } 1 - \lambda \asymp 1), \quad (14)$$

$$F(r, \Omega) = \varepsilon Q(r, \Omega) \text{ for small absorption } (1 - \lambda = 0(\varepsilon^2)), \quad (15)$$

where  $Q(r, \Omega)$  is assumed to be a smooth function

$$Q(r, \Omega) \in C^J(\bar{A}), \quad \|Q\|_{C^J(\bar{A})} = 0(1) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \quad J > 0. \quad (16)$$

Functions that satisfy this conditions are called *regular* in this paper, those that do not, *singular*.

*Asymptotic approximations*  $\Psi_N(r, \Omega; \varepsilon)$  to the problem (1) – (6) solution must satisfy to the estimates

$$\Psi(r, \Omega) - \Psi_N(r, \Omega; \varepsilon) = 0(\varepsilon^{N+1}) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

uniformly on the set  $\tilde{A}$ . Those approximations are sought in the form of a sum of a regular component and a singular one:

$$\Psi_N(r, \Omega; \varepsilon) = \Psi_N^{(r)}(r, \Omega; \varepsilon) + \Psi_N^{(s)}(r, \Omega; \varepsilon) \quad (18)$$

Every component is presented by expansion in powers of parameter  $\varepsilon$

$$\Psi_N^{(r,s)}(r, \Omega; \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \psi_n^{(r,s)}(r, \Omega) \varepsilon^n. \quad (19)$$

Let

$$Q(r, \Omega) = \sum_{\ell=0}^{L_Q} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Q^{(\ell m)}(r) Y_{\ell m}(\Omega), \quad (20)$$

where  $Y_{\ell m}(\Omega)$  are the spherical harmonics and  $L_Q < \infty$ .

Then in problems with *an essential absorption* by substituting  $\Psi_N^{(r)}(r, \Omega; \varepsilon)$  into equation (1) and equating to zero all terms  $\sim \varepsilon^n$ ,  $n = -1, 0, \dots, N-1$ , we obtain the following expressions

$$\psi_n^{(r)}(r, \Omega) = \sum_{\ell=0}^{L_Q+n} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \phi_n^{(\ell m)}(r) Y_{\ell m}(\Omega), \quad (21)$$

and the moments  $\phi_n^{(\ell m)}(r)$  are determined by simple recursion relations. Expansion (19) for this component converges as geometric progression with exponent  $\chi = O(\varepsilon / (1 - \lambda))$ . The transition to the equations for even and odd components of  $\Psi_N^{(r)}(r, \Omega; \varepsilon)$  allows one to improve the convergence apart even and odd parts of those expansions;  $\chi = O(\varepsilon^2 / [(1 - \lambda)(1 - \lambda \bar{\omega})])$ , where  $\bar{\omega} = \max_{\ell} \{\omega_{2\ell+1}\}$ . In problems with an even indicatrix we have:  $\chi = O(\varepsilon^2 / (1 - \lambda))$  [10].

Coefficients  $\psi_n^{(s)}(r, \Omega)$  satisfy homogeneous equations (1) and the boundary conditions

$$\psi_n^{(s)}(r, \Omega) \Big|_{r \in \partial G} = q(r, \Omega) \delta_{n0} - \psi_n^{(r)}(r, \Omega) \quad \text{at } \Omega n(r) < 0 \quad (22)$$

Since  $\psi_n^{(r)}(r, \Omega)$  at  $n \leq J$ , as well as  $q(r, \Omega)$ , are bounded and do not depend on  $\varepsilon$ , using the known estimates of Green function [1], we obtain under conditions  $F = O(1/\varepsilon)$ ,  $q = O(1)$  the following estimate for the singular component

$$\Psi_N^{(s)}(r, \Omega; \varepsilon) = O\{\exp(-\eta p(r, \partial G) / \varepsilon)\}, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (23)$$

Here  $\eta \approx 1$ ,  $p(r, \partial G) = \min_{r' \in \partial G} |r - r'|$ .

In this approach it is not difficult to prove the estimate (17). Really, substituting the sum (18) into equation (1) and taking into account expansions (19) and the estimate (7), we obtain for the discrepancy

$$\hat{\Delta}\Psi_N(r, \Omega; \varepsilon) \equiv \hat{T}\Psi_N(r, \Omega; \varepsilon) - F(r, \Omega) \quad (24)$$

the estimate  $\hat{\Delta}\Psi_N(r, \Omega; \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$  and consequently  $\Psi_N(r, \Omega; \varepsilon)$  satisfies to the estimate (17) uniform on the set  $\tilde{A}$ . The detailed proof of these results for slab problem is contained in [10]. It extends without difficulties on the nononedimensional problems (1) – (6) with an essential absorption.

More complicated was found to be the construction of asymptotic approximation in problems with a small absorption. Equations for coefficients  $\psi_n^{(r)}(r, \Omega)$  in this case may be also obtained by substituting the expansion for  $\Psi_{N+2}^{(r)}(r, \Omega; \varepsilon)$  into Eq. (1) and equating to zero of all terms  $\sim \varepsilon^n$ ,  $n = -1, 0, \dots, N+1$ . Further we find for  $\psi_n^{(r)}(r, \Omega)$  expressions similar to (21). However a sequence of diffusion equations for zero angular moments

$$\phi_n^{(00)} = \int \psi_n^{(r)}(r, \Omega) d\Omega \quad (25)$$

is obtained, while for higher moments a set of simple recursion relations is derived. Similar constructions have been presented in several papers both for plane geometry problems [7], [8], [10] and in general cases [9], [11], [12].

On the whole the obtained equations correspond to the equations of spherical harmonics method usually named as  $P_\ell$  - method. However the introduction of the small parameter  $\varepsilon$  allows one to put in order terms of this system selecting  $N+1$  diffusion equations for zero angular moments and considering all other equations as the recursion relations. It was the base to call the set of diffusion equations together with recursion relations constructed for  $\Psi_N^{(r)}$  asymptotic expansions as Simplified  $P_N$  equations [9]. The advantage of  $SP_N$  equations is especially important in general geometry problems. They are fewer in a number ( $\sim (N+1)$  versus  $\sim (N+1)^2$ ) and simpler to implement than the full system  $P_N$  equations.

For low orders  $N$  it is not difficult to reduce the system of  $SP_N$  equations for  $\phi_n^{(00)}(r)$  to the unique differential equation of a high order for the full scalar flux

$$\Phi_N^{(00)}(r; \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \phi_n^{(00)}(r) \varepsilon^n$$

of the regular component  $\Psi_N^{(r)}(r, \Omega; \varepsilon)$  and precisely this equation has been used initially in asymptotic approximation calculations albeit there are some reasons to use the original  $SP_N$  equations. Particularly, in this case we solve equations without the small parameter  $\varepsilon$  and can use coarse-

mesh algorithms. On the other hand the boundary condition may be more simple.

The most unclear problem is now to set up accurately the boundary conditions for the zero angular moments  $\phi_n^{(00)}(r)$ . If those conditions provide the regularity of the moments  $\phi_n^{(\ell m)}$ , then using the  $\varepsilon$  - expansion (19) for  $\Psi_{N+2}^{(s)}(r, \Omega; \varepsilon)$  we can

consider the coefficients  $\psi_n^{(s)}(r, \Omega)$  as the solutions to the homogeneous equation (1) with boundary conditions (22). Taking into account the estimate

$$\hat{\Delta}\Psi_{N+2}(r, \Omega; \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+2})$$

for the discrepancy (24) and basing on the relation (10) we find that the approximation (18) satisfies to the estimate (17).

However in this case the function  $\Psi_N^{(s)}(r, \Omega; \varepsilon)$ , as a rule, will contain together with an exponentially decreasing part (similar to (23)) also terms  $\sim \exp(-k_1 \rho(r, \partial G) / \varepsilon)$  slowly decreasing with moving away from boundaries according to the estimate  $k_1 = O(\varepsilon)$  [1]. At present one succeeded to formulate rigorously the boundary conditions excluding the regular term in  $\Psi_N^{(s)}(r, \Omega; \varepsilon)$  only for some slab problems.

### III. BOUNDARY CONDITIONS IN SLAB GEOMETRY PROBLEMS

In problems with an essential absorption under condition (14) the regular component is determined by the recursion relations in detail considered in Ref. [10], and the singular component exponentially decreasing have to be calculated only for boundary layers. Therefore we consider here the problem for homogeneous scattering dominated slab without azimuth dependence. Let us set

$$\tau = \sum_t z, \tau^* = \sum_t Z = 1 / \varepsilon \gg 1, 1 - \lambda = \sigma_a \varepsilon^2, \sigma_a = 0(1), Z \approx 1, \quad (26)$$

and the boundary conditions (2) write in the form

$$\Psi(0, \mu) = q(\mu) \text{ if } \mu > 0, \Psi(Z, \mu) = q(\mu) \text{ if } \mu < 0. \quad (27)$$

1. In problems without interior sources ( $F \equiv 0$ ) the behavior of solutions far from the boundary surfaces is determined by the real discrete spectrum  $\{k_{\pm i}\}$  and by the corresponding eigenfunctions  $\varphi_{\pm i}(\mu)$  of the well-known characteristic equation [1],  
 $i = 1, 2, \dots, I, I \leq L + 1, k_{-i} = -k_i, \varphi_{-i}(\mu) = \varphi_i(-\mu), \varphi_1(\mu) > 0..$



For scattering dominated media with a small scattering anisotropy we have [20]:

$$k_1 = \sqrt{3(1-\lambda)(1-\lambda\omega_1)} + O(\varepsilon^3) = O(\varepsilon), \quad k_i \Big|_{i \geq 2} \asymp 1. \quad (28)$$

(more accurate estimates see in [10]).

When  $\lambda < 1$ , all eigenvalues  $k_i$  are simple and the corresponding solutions to the homogeneous equation (1) in plane geometry can be represented as

$$\theta^{(i)}(z, \mu) = \exp(-k_i \tau) \varphi_i(\mu), \quad \theta^{(-i)}(z, \mu) = \exp(-k_i (\tau^* - \tau)) \varphi_{-i}(\mu), \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (29)$$

In case of pure scattering we have:  $k_{\pm 1} = 0$ ,

$$\theta^{(1)}(z, \mu) = 1, \quad \theta^{(-1)}(z, \mu) = z - \mu / [\Sigma_t (1 - \omega_1)], \quad (30)$$

and for  $i > 1$  the functions  $\theta^{(\pm i)}(z, \mu)$  are determined by (29). In conditions (26) and (28), only the functions  $\theta^{(\pm 1)}(z, \mu)$  prove to be regular and all other are singular. Thus in problems without interior sources regular components can be represented as a linear combination of these function.

Let us denote by  $q^\pm$  the averaged boundary values

$$q^\pm = \int_0^1 q(\pm\mu) W(\mu) d\mu, \quad (31)$$

where  $W(\mu) = \mu \Theta(0, -\mu)$ ,  $\Theta(z, -\mu)$  is a positive solution (for all  $z > 0$ ,  $\mu \in [-1, 1]$  and for all  $\mu \in (0, 1]$  at  $z = 0$ ) to the homogeneous ( $F \equiv 0$ ,  $q \equiv 0$ ) problem (1), (2) for the semi-infinite slab (the Milne problem). It is normalized by the relations

$$\int_0^1 \varphi_1(\mu) W(\mu) d\mu = 1, \quad \lambda / 2 \int_{-1}^1 \varphi_1(\mu) d\mu = 1. \quad (32)$$

Let

$$V(\tau, \mu) = \{\tau^* - \tau + \tau_1 + \mu / (1 - \omega_1)\} / (\tau^* + 2\tau_1) \quad \text{if } \lambda = 1, \quad (33)$$

$$V(\tau, \mu) = \{\exp(-k_1 \tau) \varphi_1(\mu) - W_{(-1)} \varphi_{-1}(\mu) \exp[-k_1 (2\tau^* - \tau)]\} / D \quad \text{if } \lambda < 1, \quad (34)$$

where

$$D = 1 - [W_{(-1)} \exp(-k_1 \tau^*)]^2, \quad W_{(-1)} = \int_0^1 \varphi_{-1}(-\mu) W(\mu) d\mu, \quad \tau_1 = \int_0^1 \mu W(\mu) d\mu / (1 - \omega_1).$$

Then under the conditions (26), (28) the solution of the slab problem can be represented [10] as

$$\Psi(z, \mu) = \Psi^{(r)}[q](z, \mu) + \Psi^{(s)}[q](z, \mu), \quad (35)$$

where

$$\Psi^{(r)}[q](z, \mu) = C_1 \theta^{(1)}(z, \mu) + C_{-1} \theta^{(-1)}(z, \mu) = q^+ V(\tau, \mu) + q^- V(\tau^* - \tau, -\mu), \quad (36)$$

$$C_1 = (q^+ - q^- W_{(-1)} e^{-k_1 \tau^*}) / D, \quad C_{-1} = (q^- - q^+ W_{(-1)} e^{-k_1 \tau^*}) / D, \quad (37)$$

$$\Psi^{(s)}[q](z, \mu) = r^+(\tau, \mu) \exp(-\eta \tau) + r^-(\tau, \mu) \exp[-\eta(\tau^* - \tau)], \quad (38)$$

and  $r^\pm(\tau, \mu)$  are bounded functions,  $\eta \asymp 1$ . The following boundary conditions for the solution regular component imply from those formulas:

$$\Psi^{(r)}(0, \mu) = q^+ V(0, \mu) + q^- V(\tau^*, -\mu) \quad \text{at } \mu > 0, \quad (39)$$

$$\Psi^{(r)}(Z, \mu) = q^+ V(\tau^*, \mu) + q^- V(0, -\mu) \quad \text{at } \mu < 0. \quad (40)$$

These conditions we'll name as *the asymptotic exact boundary conditions for the slab solution regular component* in problems without interior sources because they provide the estimate (38) for the solution singular component.

For the regular component scalar flux,

$$\Phi^{(0)}(z) = \int_{-1}^1 \Psi^{(r)}(z, \mu) d\mu,$$

we obtain the following asymptotic exact boundary conditions.

In conservative problems ( $\lambda = 1$ ):

$$\Phi^{(0)}(0) = 2[q^+ \tau^* + (q^+ + q^-) \tau_1] / (\tau^* + 2\tau_1), \quad (41)$$

$$\Phi^{(0)}(Z) = 2[q^- \tau^* + (q^+ + q^-) \tau_1] / (\tau^* + 2\tau_1). \quad (42)$$

In nonconservative problems ( $\lambda < 1$ ) taking into account the normalization (32) of the functions  $\varphi_{\pm 1}(\mu)$  we have:

$$\Phi^{(0)}(0) = 2[q^+ (1 - W_{(-1)} e^{-2k_1 \tau^*}) + q^- (1 - W_{(-1)} e^{-k_1 \tau^*})] / (\lambda D), \quad (43)$$

$$\Phi^{(0)}(Z) = 2[q^- (1 - W_{(-1)} e^{-2k_1 \tau^*}) + q^+ (1 - W_{(-1)} e^{-k_1 \tau^*})] / (\lambda D). \quad (44)$$

If  $\lambda \rightarrow 1$ , these formulas pass on formulas (41) and (42) by a continuous way [10]. It is possible to obtain from these relations the asymptotic boundary conditions  $\sim 0(\varepsilon^N)$ , using  $\varepsilon$ -expansions for values  $k_1, W_{(-1)}, W(\mu)$  as  $\lambda < 1$ .

The using of those conditions in real applications requires preliminary determination of asymptotic parameters and functions ( $k_1, \varphi_1(\mu), W(\mu)$ ) for each couple  $\{\lambda, \mathcal{P}(\Omega\Omega')\}$ . Recently the special code ASYMPZ based on algorithms proposed in [19] has been created for those values calculations.

2. In problems with  $F \neq 0$  we use formulas similar to (18) and (19) in order to represent the asymptotic approximation  $\Psi_N(z, \mu; \varepsilon)$ . Diffusion equations for the zero angular moments  $\phi_n^{(0)}(z) = \int_{-1}^1 \psi_n^{(r)}(z, \mu) d\mu$  have the following form:

$$-\frac{1}{3\sigma(1-\omega_1)} \frac{d^2 \phi_n^{(0)}}{dz^2} + \sigma_a \phi_n^{(0)}(z) = f_n(z), \quad (45)$$

where the sources  $f_n(z)$  are determined by angular moments of functions  $\psi_{n-1}^{(r)}(z, \mu)$ ,  $\psi_{n-2}^{(r)}(z, \mu)$  and  $Q(z, \mu)$ . For higher angular moments we obtain a set of simple recursion relations [10]. Boundary conditions

$$\phi_n^{(0)}(0) = c_{n0}, \quad \phi_n^{(0)}(Z) = c_{nZ}, \quad (46)$$

where constants  $c_{n0}$  and  $c_{nZ}$  are any values  $\sim O(1)$ , provide the regularity of the functions  $\phi_n^{(0)}(z)$  and consequently the component  $\Psi_N^{(r)}(z, \mu; \varepsilon, \mathbf{c})$  regularity (here by  $\mathbf{c}$  the set  $\{c_{n0}, c_{nZ}, n = 0, 1, \dots, N\}$  is denoted).

The singular component  $\Psi_N^{(s)}(z, \mu; \varepsilon, \mathbf{c})$  should satisfy to the relation (35). Let us set

$$\tilde{\Psi}_N^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) = \Psi_N^{(r)}(z, \mu; \varepsilon, \mathbf{c}) + \tilde{q}^+ V(\tau, \mu) + \tilde{q}^- V(\tau^* - \tau, -\mu), \quad (47)$$

where  $\tilde{q}^\pm$  are determined by the integrals (31) in which we must use the functions

$$\tilde{q}(\mu) = q(\mu) - \Psi_N^{(r)}(z, \mu; \varepsilon, \mathbf{c}) \text{ at } z=0 \text{ if } \mu > 0, \text{ } z=Z \text{ if } \mu < 0$$

instead of  $q(\mu)$ . For the difference

$$\Psi_N^{(s)}(z, \mu; \varepsilon, \mathbf{c}) - [\tilde{q}^+ V(\tau, \mu) + \tilde{q}^- V(\tau^* - \tau, -\mu)]$$

the estimate (38) is valid. Consequently this difference represents the singular component  $\tilde{\Psi}_N^{(s)}(z, \mu; \varepsilon)$  of asymptotic approximation (18), exponentially decreasing with moving away from boundaries.

The more natural approach implies from the requirement that the equality  $\Psi_N^{(s)} = \tilde{\Psi}_N^{(s)}$  holds. Then taking into account relations (31) and (36) we obtain the following conditions

$$\int_0^1 [q(\mu) - \sum_{n=0}^N \psi_n^{(r)}(0, \mu) \varepsilon^n] W(\mu) d\mu = 0,$$

$$\int_0^1 [q(-\mu) - \sum_{n=0}^N \psi_n^{(r)}(Z, -\mu) \varepsilon^n] W(\mu) d\mu = 0$$

and consequently

$$\begin{aligned}\phi_0^{(0)}(0) &= 2q^+ / W^{(0)}, \quad \phi_0^{(0)}(Z) = 2q^- / W^{(0)}, \\ \phi_n^{(0)}(0) \Big|_{n \geq 1} &= - \sum_{\ell=1}^{L_n} (2\ell+1) W^{(\ell)} \phi_n^{(\ell)}(0) / W^{(0)}, \\ \phi_n^{(0)}(Z) \Big|_{n \geq 1} &= - \sum_{\ell=1}^{L_n} (2\ell+1) W^{(\ell)} \phi_n^{(\ell)}(Z) / W^{(0)}.\end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}n = 0, 1, \dots, N, \quad W^{(\ell)} &= \int_0^1 W(\mu) P_\ell(\mu) d\mu, \\ W(\mu) > 0, \quad L_1 &= 1, \quad L_n \Big|_{n \geq 2} = n + \max\{0, L_Q - 2\}.\end{aligned}$$

Since the moments  $\phi_n^{(\ell)}$  for  $\ell > 0$  are determined by recursion formulas in terms of the moments of coefficients  $\psi_{n-1}, \psi_{n-2}$ , and  $Q$ , all necessary values  $\phi_n^{(0)}(0)$ , and  $\phi_n^{(0)}(Z)$  can be found successively by starting at  $l = 0$ .

The estimate (38) allows one to obtain the following estimate of the regular component proximity to the exact solution  ${}^{ex}\Psi(z, \mu)$  of the considered problem:

$${}^{ex}\Psi(z, \mu) - \Psi_N^{(r)}(z, \mu; \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(e^{-\eta z/\varepsilon} + e^{-\eta(Z-z)/\varepsilon}), \quad \eta \approx 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (48)$$

3. As an example we present here the relations that determine the regular components moments  $\phi_{0,1,2}^{(0)}(z)$ . The zeroth-order moments  $\phi_0^{(0)}$ ,  $\phi_1^{(0)}$  and  $\phi_2^{(0)}$  are determined by diffusion equation (45) with sources functions given by

$$\begin{aligned}f_0(z) &= Q^{(0)}(z), \quad f_1(z) = -\frac{1}{\sigma(1-\omega_1)} \frac{dQ^{(1)}}{dz}, \\ f_2(z) &= a(\sigma_a \phi_0^{(0)}(z) - Q^{(0)}) + b \frac{d^2}{dz^2} (Q^{(0)} - (5/2)Q^{(2)}),\end{aligned}$$

where

$$a = (\sigma_a / \sigma) \left[ \frac{4}{5(1-\omega_2)} - \frac{\omega_1}{1-\omega_1} \right], \quad b = \frac{4}{15\sigma^2(1-\omega_1)(1-\omega_2)}.$$

Boundary conditions at  $z = 0$  are written in the form

$$\phi_0^{(0)}(0) = 2q^+ / W^{(0)} \quad \phi_1^{(0)} = (\tau_1 / \sigma) \frac{d\phi_0^{(0)}}{dz}, \quad (49)$$

$$\phi_2^{(0)}(0) = \left\{ \tau_1 \frac{d\phi_1^{(0)}(0)}{dz} + 2[\tau_2 Q^{(0)}(0) - \sum_{\ell=1}^{L_0} (\ell + 1/2) \tau_1 Q^{(\ell)}(0)] \right\} / \sigma \quad (50)$$

where  $\tau_\ell = W^{(\ell)} / [W^{(0)}(1 - \omega_\ell)]$ , and in a similar form at  $z = Z$ .

Note that in the case of isotropic scattering with  $q(\mu) = 0$  and  $\lambda = 1$  boundary conditions (49) and (50) are identical with ones constructed in [15]. If in addition  $Q(z, \mu) = \bar{Q} = \text{const}$ , the approximation  $\Psi_2^{(r)}(z, \mu; \varepsilon)$  coincides with the exact expression for the regular component [10]:

$\Psi^{(r)}(z, \mu) = \bar{Q} \{ (3\sigma / 2)z(Z - z) + 3 / 2[\tau_1 Z - \mu(Z - 2z)]\varepsilon + (2 / \sigma)[\tau_2 - P_2(\mu)\varepsilon^2] \}$ ,  
where  $\tau_1 \approx 0.710$ ,  $\tau_2 \approx 0.328$ . We then have

$$\Psi^{(r)}(0, \mu) \Big|_{\mu > 0} \neq q(\mu) = 0 \quad \text{and} \quad \Psi^{(r)}(Z, \mu) \Big|_{\mu < 0} \neq q(\mu) = 0,$$

but

$$\int_0^1 \Psi^{(r)}(0, \mu) W(\mu) d\mu = 0, \quad \int_{-1}^0 \Psi^{(r)}(Z, \mu) W(-\mu) d\mu = 0$$

$$\text{at } W(\mu) \approx \tilde{W}(\mu) = 0.956\mu + 1.565\mu^2, \quad |W(\mu) - \tilde{W}(\mu)| \leq 0.0035 \quad [8]$$

## VI. SOME DISCRETE TRANSPORT MODELS FOR SLAB

1. We consider the discrete ordinates version of the boundary value problem (1) – (6) for a homogeneous slab as an original one:

$$\mu_m \frac{d\Psi_m}{dz} + \Sigma_t \Psi_m(Z) = \frac{\Sigma_s}{2} \sum_{m'} \omega_{m'} \mathcal{P}_{mm'} \Psi_{m'}(Z) + F_m(z) \quad (51)$$

$$0 < z < Z, \quad -1 < \mu_m < 1, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M, \quad M \geq 1,$$

$$\Psi_m(0) = q_m \quad \text{if } m > 0, \quad \Psi_m(Z) = q_m \quad \text{if } m < 0. \quad (52)$$

Any symmetric quadrature set  $\{\mu_m, \omega_m\}$  of even order  $2M$  is used that satisfies

$$1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_M > 0, \quad \mu_{-m} = -\mu_m, \quad \omega_{-m} = -\omega_m > 0$$

$$\sum_{m>0} \omega_m \mu_m^{2k} = 1 / (2k + 1), \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad 2M - 1 \leq 2K \leq 4M - 1. \quad (53)$$

It is supposed that this approximation conserves the main properties of the original physical problem:

$$\Sigma_t \geq \Sigma_s > 0, \quad \mathcal{P}_{mm'} = \mathcal{P}_{m'm} = \mathcal{P}_{-m-m'} \geq 0, \quad \sum_{m'} \omega_{m'} \mathcal{P}_{mm'} = 2. \quad (54)$$

Solutions  $\theta_m^{(i)}(z)$  ( $i, m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ ) to the homogeneous system (51) have the same forms (29) and (30) as they have in the continuous case (with the substitution  $\mu_m$  and  $\varphi_{im}$  instead of  $\mu$  and  $\varphi_i(\mu)$ ). Numbers  $k_i$  and mesh functions  $\varphi_{im}$  are eigenvalues and eigenfunctions of the characteristic equation in discrete ordinates approximation

$$(1 - k_i \mu_m) \varphi_{im} = \lambda / 2 \sum_{m'} \omega_{m'} \mathcal{P}_{mm'} \varphi_{im'} . \quad (55)$$

Also, solutions to the problem (51), (52) can be represented by the same similar to the sum (35) and the consequent formulas are valid in the corresponding discrete ordinates approximation.

2. A spatial mesh with cells  $(z_{j-1/2}, z_{j+1/2})$  for  $j = 1, 2, \dots, J$  is supposed uniform with cell width  $\Delta = z_{j+1/2} - z_{j-1/2}$ ,  $z_{1/2} = 0$ ,  $z_{J+1/2} = Z$  and  $z_j = (z_{j-1/2} + z_{j+1/2}) / 2$  cell center. Also, integer  $\pm 1/2$  subscripts refer to cell-edge quantities and integer subscripts refer to cell-average ones.

Let  $p_{jk}(z)$  be the Legendre polynomial of order  $k$  relating to the  $j$ 'th cell and let the values

$$\Psi_{mj}^{(k)} = \frac{2k+1}{\Delta} \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} \Psi_m(z) p_{jk}(z) dz \quad (56)$$

be the function  $\Psi_m(z)$  interior moments of order  $k$  in this cell,  $k = 0, 1, \dots, K$ . The generalized moments balance equations are obtained [3] by averaging of the equation (51) with the weights  $p_{jk}(z)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2k+1}{\Sigma_t \Delta} \mu_m [\Psi_{mj+1/2} + (-1)^{k-1} \Psi_{mj-1/2} - 2(\Psi_{mj}^{(k-1)} + \\ & + \Psi_{mj}^{(k-3)} + \dots + \Psi_{mj}^{[\nu(k-1)]})] + \Psi_{mj}^{(k)} = S_{mj}^{(k)} , \end{aligned} \quad (57)$$

where

$$S_{mj}^{(k)} = \lambda / 2 \sum_{m'} \omega_{m'} \mathcal{P}_{mm'} \Psi_{m'j}^{(k)} + F_{mj}^{(k)} / \Sigma_t , \quad \Psi_{mj}^{(-k)} = 0 ,$$

the values  $Q_{mj}^{(k)}$  are defined according to Eq. (56), and  $k = 0, 1, \dots, K$ ,  $\nu(k) = 0$  if  $k$  is even,  $\nu(k) = 1$  if  $k$  is odd. This set of equations we close by the truncated balance conditions:  $\Psi_{mj}^{(K+1)} \equiv S_{mj}^{(K+1)}$ , i.e.

$$\Psi_{mj+1/2} + (-1)^K \Psi_{mj-1/2} = 2(\Psi_{mj}^{(K)} + \Psi_{mj}^{(K-2)} + \dots + \Psi_{mj}^{[\nu(K)]}) . \quad (58)$$

Note that at  $K = 0$  we obtain the well-known Diamonde Difference (*DD*) scheme and at  $K = 1$  the Quadratic Continuous [3, 6] or Linear Moment [5]

*QC/LM* scheme.

In Ref. [17] it was shown that the set of Eqs. (57), (58) allows one to determine uniquely all the unknown values  $\Psi_{mj}^{(0)}, \Psi_{mj}^{(1)}, \dots, \Psi_{mj}^{(K)}$  and  $\Psi_{mj \pm 1/2}$  under boundary conditions

$$\Psi_{m1/2} = q_m \quad \text{if } m > 0, \quad \Psi_{mJ+1/2} = q_m \quad \text{if } m < 0. \quad (59)$$

The global accuracy of these schemes is estimated by the following relations:

$$\begin{aligned} {}^{ex}\Psi_m(z_{j+1/2}) - \Psi_{mj+1/2} &= O((\Sigma_t \Delta)^{2K+2}), \\ {}^{ex}\Psi_{mj}^{(k)} - \Psi_{mj}^{(k)} &= O((\Sigma_t \Delta)^{2K+2-k}), \quad \text{as } \Sigma_t \Delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (60)$$

where functions  ${}^{ex}\Psi_m(z)$  response to the exact solution to the problem (51), (52) and their moments  ${}^{ex}\Psi_{mj}^{(k)}$  are defined by formulas (56). Particularly, the superconvergence of edge and cell average values has been established for arbitrary  $K$  : passing to the following approximation ( $K \Rightarrow K + 1$ ) we improve the error estimate on two orders:

$$O[(\Sigma_t \Delta)^{2K+2}] \Rightarrow O[(\Sigma_t \Delta)^{2K+4}], \quad \text{as } \Sigma_t \Delta \rightarrow 0.$$

Solutions  $\theta_{mj+1/2}^{(\pm i)}, \theta_{mj}^{(\pm i)(k)}$  to the homogeneous system of equations (57) and (58) may be represented in the form [18]:

$$\begin{aligned} \theta_{mj+1/2}^{(i)} &= (\rho_i)^j \varphi_{im}, \quad \theta_{mj}^{(i)(k)} = \rho_{ik} (\rho_i)^{j-1} \varphi_{im} \\ \theta_{mj+1/2}^{(-i)} &= (\rho_i)^{J-j} \varphi_{-im}, \quad \theta_{mj}^{(-i)(k)} = \rho_{-ik} \rho_i^{J-j+1} \varphi_{-im} \end{aligned} \quad (61)$$

for all nonzero eigenvalues  $k_i > 0, i = 1, 2, \dots, M..$  Here each value  $\rho_i$  is the Pade ( $N + 1, N + 1$ ) approximation  $\rho_i = P_{K+1}^-(k_i \Sigma_t \Delta) / P_{K+1}^+(k_i \Sigma_t \Delta)$  to the exponential function  $\exp(-k_i \Sigma_t \Delta)$ , which describes a decrease on the step  $\Delta$  of the  $i$ 'th elementary function (29) of the original equation set (51),  $P_{K+1}^\pm$  are polynomials of order  $K + 1$ . Values  $\rho_{ik}$  are the moments of order  $k$  for this exponential function which are defined according to Eq. (56).

In particular, we have in *DD* scheme:

$$\rho_i = (1 - \eta_i) / (1 + \eta_i), \quad \rho_{\pm i 0} = 1 / (1 + \eta_i), \quad \rho_{\pm i 1} = 0, \quad (62)$$

and in the *QC/LM* scheme:

$$\rho_i = (1 - \eta_i + \eta_i^2 / 3) / D_i, \quad \rho_{\pm i 0} = 1 / D_i, \quad \rho_{\pm i 1} = \mp \eta_i / D_i. \quad (63)$$

where  $\eta_i = k_i \Sigma_t \Delta / 2, \quad D_i = 1 + \eta_i + \eta_i^2 / 3, \quad i = 1, 2, \dots, M.$

It is valid the estimate

$$\exp(-k_i \Sigma_t \Delta) - \rho_i = O((k_i \Sigma_t \Delta)^{2K+3}), \text{ as } k_i \Sigma_t \Delta \rightarrow 0. \quad (64)$$

However the accuracy of the moments  $\rho_{ik}$ ,  $k > 0$ , is not so high: it is determined by the values  $O((k_i \Sigma_t \Delta)^{2K+2-k})$ . Correspondingly the accuracy of the components (61) is estimated by the values  $O(J(k_i \Sigma_t \Delta)^{2K+3})$  for  $\theta_{mj+1/2}^{(\pm i)}$ ,  $O((k_i \Sigma_t \Delta)^{2K+2-k})$  for  $\theta_{mj}^{(\pm i)(k)}$  (65)

3. In coarse-mesh schemes we have:

$$\Sigma_t \Delta = \sigma \Delta / \varepsilon \gg 1 \text{ as } \varepsilon \ll \Delta < 1, \quad (66)$$

and therefore it is impossible to use the accuracy estimates (60). Using coarse-mesh schemes we obtain solutions strongly differing from exact ones: “transient layers” (often with solution oscillations) appear near boundary surfaces and they are essentially larger than the exact problem boundary layers [4, 18].

We’ll name a mesh function

$$\underline{\Psi} = \{ \Psi_{mj+1/2}, \Psi_{mj}^{(k)}; m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M, j = 0, 1, \dots, J, k = 0, 1, \dots, K \}$$

as a *regular* one, when the relative changes of all its components on the step  $\Delta$  are values  $O(\Delta)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . All other mesh functions are regarded as *singular* ones. The relative changes on the step  $\Delta$  of the elementary solutions components have the following forms

$$(\theta_{mj+1/2}^{(i)} - \theta_{mj-1/2}^{(i)}) / \theta_{mj-1/2}^{(i)} = \rho_i - 1 = (\theta_{mj+1}^{(i)(k)} - \theta_{mj}^{(i)(k)}) / \theta_{mj}^{(i)(k)}. \quad (67)$$

Under the coarse-mesh algorithm conditions (66) the function  $\underline{\theta}^{(\pm 1)}$  (in problems with small absorption) are the regular functions, since according to (28)

$$\rho_{\pm 1} - 1 = O(k_1 \Sigma_t \Delta) = O(\Delta). \quad (68)$$

Relative changes of the remaining functions  $\underline{\theta}^{(\pm i)} \Big|_{i \geq 2}$  are determined by the  $\rho_i$  values at large  $\eta_i \asymp \Delta / \varepsilon$  and do not correspond to the exponential behavior of the exact functions  $\theta_m^{(\pm i)}(z)$  [Eqs. (29)]. Therefore we consider functions  $\underline{\theta}^{(\pm i)} \Big|_{i > 2}$  as singular ones in optically thick scattering dominated media under conditions (66). Note that the number  $k_1$  rises rapidly and approaches unity if the absorption increases. Consequently, the  $\underline{\theta}^{(\pm 1)}$  functions get singular in high – absorption media.

The general solution of the Eqs. (57) and (58) in problems without interior sources ( $F_m(z) \equiv 0$ ) can be represented as follows:

$$\underline{\Psi} = \underline{\Psi}^{(r)} + \underline{\Psi}^{(s)} \quad (69)$$



where  $\underline{\Psi}^{(r)} = C_1 \underline{\theta}^{(1)} + C_{-1} \underline{\theta}^{(-1)}$ ,  $\underline{\Psi}^{(s)} = \sum_{i=2}^M (C_i \underline{\theta}^{(i)} + C_{-i} \underline{\theta}^{(-i)})$  if  $1 - \lambda = O(\varepsilon^2)$ , and coefficients  $C_i$  are constants determined by the boundary conditions (59).

If we use formulas (37) for  $C_{\pm 1}$  with parameters  $q^{\pm}, W_{(-1)}$ , and  $k_1$  calculated in considered discrete ordinates approximation, then in view of relations (65) the following accuracy estimates are valid:

$${}^{ex} \Psi_m^{(r)}(z_{j+1/2}) - \Psi_{mj+1/2}^{(r)} = O((k_1 \Sigma_t \Delta)^{2K+2}) \tag{70}$$

$${}^{ex} \Psi_{mj}^{(r)(k)} - \Psi_{mj}^{(r)(k)} = O((k_1 \Sigma_t \Delta)^{2K+2-k}) \tag{71}$$

where functions  ${}^{ex} \Psi_m^{(r)}(z)$  and their moments  ${}^{ex} \Psi_{mj}^{(r)(k)}$  are defined by the formulas (36) and (56) correspondingly.

Evidently, in the case  $F \equiv 0$  and  $1 - \lambda = O(\varepsilon^2)$ , we can determine the component  $\underline{\Psi}^{(r)}$  by solving the system of mesh equations (57), (58) at the asymptotic exact conditions (39), (40) in the corresponding discrete ordinates approximation.

4. We become now to problems with  $F \neq 0$ . Basic solution estimates similar to the estimates (7) and (10) have been obtained [17] for coarse-mesh schemes of low orders ( $K = 0$  and  $K = 1$ ) only in problem with isotropic scattering and sources under condition that parameters of the quadrature formulas  $M, \mu_m, \omega_m$ , and  $|\mu_m - \mu_{m'}|_{m \neq m'}$  are comparable with unity in the “ $\varepsilon$  – scale”.

Let

$$\|\underline{\Psi}\| = \max_{m,j} \{ |\Psi_{m,j+1/2}|, |\Psi_{mj}^{(0)}|, |\Psi_{mj}^{(1)}| \}$$

and  $\Psi_{mj}^{(1)} \equiv 0$  if  $K = 0$ . The solutions of the mesh equation system (57), (58) under the conditions  $\mathcal{P}_{mm'} = 1, F_m(z) = F(z)$ ,

$$1 / \varepsilon \gg M, \mu_m^{-1}, \omega_m, |\mu_m - \mu_{m'}|_{m \neq m'}^{-1} \gg \varepsilon \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \tag{72}$$

for  $K = 0$  and  $K = 1$  satisfy the following estimates [17]:

$$\|\underline{\Psi}\| = \max\{\varepsilon \bar{F}, \bar{q}\} O(1) \text{ if } 1 - \lambda \asymp 1, \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \tag{73}$$

$$\|\underline{\Psi}\| = \max\{\bar{F} / \varepsilon, \bar{q}\} O(1) \text{ if } 1 - \lambda = 0(\varepsilon^2), \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{74}$$

Asymptotic approximations  $\underline{\Psi}_N$  to the mesh problem (57) – (59) we’ll search in the form (69). Substituting the  $\varepsilon$  – expansion

$$\underline{\Psi}_N^{(r)} = \sum_0^N \underline{\psi}_n \varepsilon^n$$

into equations (57) – (58) and equating to zero all terms  $\sim \varepsilon^n$ , as in Sec. III, we obtain equations approximating the corresponding equations for coefficients  $\psi_{mm}^{(r)}(z)$  in the exact problem (51), (52). In Ref. [21] it was shown that the accuracy of the equations for cell edge values  $\phi_{0,j+1/2}^{(0)}$ , which approximate the diffusion equation (45), is estimated by the values  $O(\Delta^{2(K+1)})$  for  $K=0, K=1$ . At the boundary conditions (49) for  $\phi_{0,j+1/2}^{(0)}$  the following accuracy estimates have been obtained:  $\|\underline{\Psi} - \underline{\Psi}_0\| = O(\varepsilon)$ ,  $\|\underline{\Psi}_0^{(s)}\| = O(\varepsilon)$ . Consequently

$${}^{ex}\Psi_m(z_{j+1/2}) - \Psi_{mj+1/2} = O(\varepsilon) + O(\Delta^{2K+2}), \quad (75)$$

$${}^{ex}\Psi_{mj}^{(k)} - \Psi_{mj}^{(k)} = O(\varepsilon) + O(\Delta^{2K+2-k}), \quad (76)$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0, \Delta \gg \varepsilon$ . Here  ${}^{ex}\Psi_m(z_{j+1/2})$  and  ${}^{ex}\Psi_{mj}^{(k)}$  correspond to the problem (51), (52) exact solution.

Generally speaking, we can not to approximate satisfactorily the singular component  $= O(\varepsilon)$  using coarse-mesh approximation of any order  $N$ . However the correct boundary conditions allow one to eliminate the appearance in the coarse-mesh solution of any spurious “transient layers” with oscillations or solutions too weak decreasing with moving away from boundaries. Using a fine mesh in boundary layers and taking into account the estimate (38) we can calculate accurately the singular component  $\underline{\Psi}^{(s)}$  only in these layers. The relation (69) allows then to find the composite solution that is valid throughout.

5. Some calculational results are presented in Fig. 1.

They have been obtained by Nikolaeva [22] for the slab problem with parameters  $Z=1, \Sigma_t=15, \Sigma_s=14.975, \mathcal{P}_{mm'} \equiv 1..$  The  $S_4$  angular approximation with  $\mu_1=0.78868, \mu_2=0.21132, \omega_1=\omega_2=0.5$  has been used. It was supposed that  $F_m(z) \equiv 0$ ,

$$q_1=5, q_2=0, q_{-1}=q_{-2}=0. \quad (77)$$

In this problem we have:  $\varepsilon=1/15, 1-\lambda=0.375\varepsilon^2$  and  $k_1=0.070665, k_2=3.4663, W_1=1.6452, W_2=0.25384, W_{(-1)}=0.90422$ .

Code ROZ-6.4 [23] has been used in these calculations. The solution obtained by the  $QC/LM$  scheme for the fine mesh arrangement with  $\Sigma_t\Delta=0.1$  (the finer mesh gives a relative error  $\sim 10^{-4}$ ) has been used as the “exact” one. The pointwise convergence criterion is  $10^{-4}$  for the zeroth moments of scalar flux.

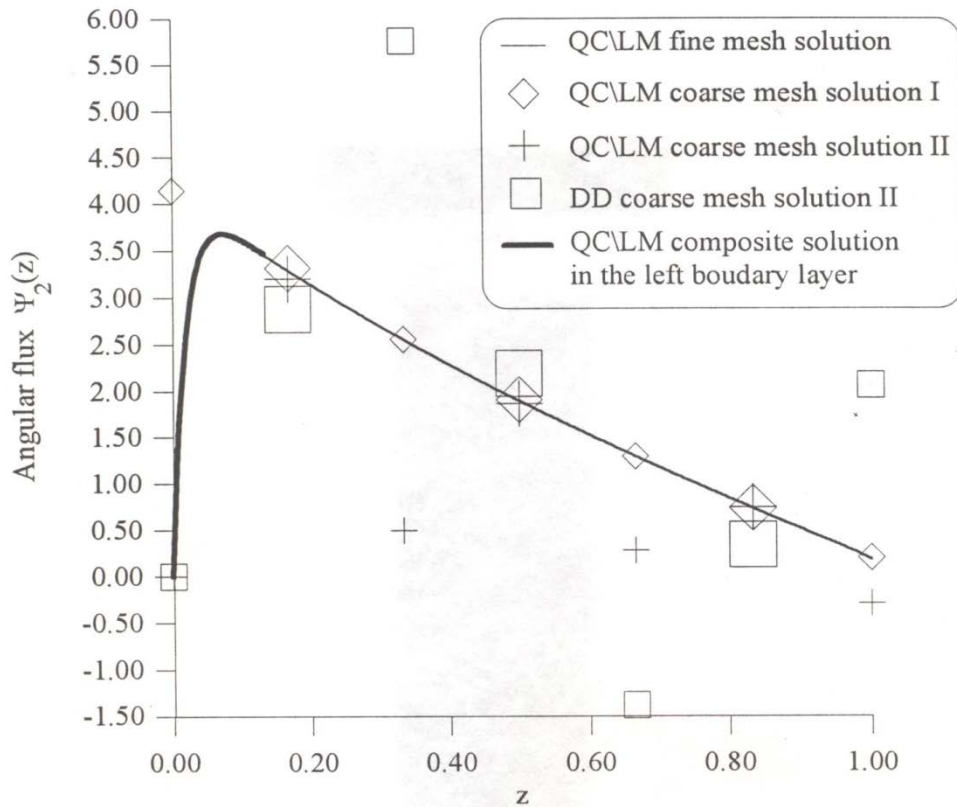


Fig. 1. Angular flux  $\Psi_2(z)$

In Fig. 1 together with the “exact” values of the angular flux  $\Psi_2(z)$  the corresponding results of coarse-mesh calculation ( $\Sigma_i \Delta = 5$ ) are depicted for two schemes *DD* and *QC/LM*. Both the *asymptotic exact boundary conditions* (39), (40) with  $q^+ = \omega_1 q_1 W_1 + \omega_2 q_2 W_2 = 4.11295$ ,  $q^- = 0$  and the *exact boundary conditions* (77) have been used in calculations of the Solutions I and solutions II correspondingly. The large marks response to the cell averaged values  $\Psi_{2j}^{(0)}$  while the small ones correspond to the cell edge values  $\Psi_{2j+1/2}$ .

We see that the coarse-mesh results differ essentially from the exact ones when the original boundary conditions (77) are used. This difference is noticeably larger for oscillating results of the *DD* – scheme. In practically disappears in both schemes everywhere except the boundary layers when the asymptotic exact boundary conditions are used. The difference *DD* solution I from the *QC/LM* one did not exceed 1.5%. Note that *DD* results (II) for the cell averaged values are more accurate than corresponding *QC/LM* – results. It may be explained by the proximity of

the exact solution to the linear function. Calculations of the singular component  $\Psi_m^{(s)}(z)$  have been carried out on the fine mesh ( $\Sigma_t \Delta = 0.1$ ) only for the left boundary layer  $(0, Z_b)$  with boundary conditions

$$\Psi_m^{(s)}(0)\Big|_{m>0} = q_m - \Psi_{m1/2}^{(r)}, \quad \Psi_m^{(s)}(Z)\Big|_{m<0} = 0 \quad \text{at } \Sigma_t Z_b = 2.$$

The difference of the composite solution determined by the formula (69) from the “exact” one did not exceed 1.5% for the *DD* scheme and 0.05% for the *QC/LM* scheme (everywhere except the small vicinity of the point  $Z = 1$ ) both in cell averaged and cell edge values.

Note, that the replacement of the step boundary function (77) by the smooth one (for example  $q_m = \mu_m$ ) did not change the quality properties of considered approximations only slightly decreasing the difference of the coarse-mesh solutions from the exact one inside the slab.

## V. CONCLUSIONS

In this paper asymptotic approximations to the transport equation solutions in optically thick domains are constructed on the basis of the boundary layer method of the singular perturbation theory. This approach allows one both to obtain the theoretical estimates of the asymptotic approximation accuracy and to develop correct coarse-mesh algorithms. Established results are based on the investigations of the regular and singular components of asymptotic approximations. Correct boundary conditions are proposed for these components.

Now in coarse-mesh calculations transport numerical methods are used, as a rule with correction algorithms, and diffusion ones in procedures of the source iteration convergence acceleration.

The proposed asymptotic approach takes off some difficulties, connected both with the non-positivity of coarse-mesh schemes and with the slow convergence of source iteration. The effective coarse-mesh algorithm is constructed and justified both theoretically and numerically in problems for homogeneous slabs.

The development of similar techniques in more complicated problems for heterogeneous slab, for high scattering anisotropy media and further application of these techniques to many-dimensional problems seems to be within reach.

## ACKNOWLEDGMENT

This work was performed under auspices of the International Science and Technology Center, grant No. 115-95.

I am grateful to Ms. G.E.Kosareva for her assistance in preparing the manuscript and to Ms. O.V.Nikolaeva and Dr. A.M.Voloschenko for discussions and the realization of calculations.

#### REFERENCES

1. K.M.Case, P.F.Zweifel, *Linear Transport Theory*. Reading (Mass): Addison-Wesley (1967).
2. T.A.Germogenova, *Local Properties of the Solutions to the Radiation Transport Equation*. Moscow: Nauka (1986), in Russian.
3. A. Badruzzaman, "Nodal Methods in Transport Theory". *Advances in Nuclear Science and Technology*, 21, 1-119, J. Lewis, M. Backer, Eds., Plenum Press, N.-Y. (1990).
4. A. Badruzzaman, "Asymptotic Analysis of the Finite Moments Transport Method in Optically Thick Media". *Nucl. Sci. Eng.* 112, 321-335 (1992).
5. T.A. Germogenova, A.V.Shwetsov, A.M.Voloschenko, "Adaptive Positive Nodal Method for Transport Equation". *Transport Th. Phys. Stat.* 23, 923 – 970 (1994).
6. J.P. Hennart, Del E.Valle, "Generalized Nodal Finite Element Formalism for Discrete Ordinates Equations in Slab Geometry. Part 1: Theory in the Continuous Moment Case. Part 2: Theory in the Discontinuous Moment Case". *Transport Th. Stat. Phys.* 24, 268-282 (1995).
7. G.Habetler, B. Matkowsky, "Uniform Asymptotic Expansions in Transport Theory with Small Mean Free Paths and the Diffusion Approximation". *J. Math. Phys.* 16, 846 – 854 (1975).
8. E.W.Larsen, J.E.Morel, "Asymptotic Solution of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes II". *J. of Comput. Phys.* 83, 212 – 236 (1989).
9. E.W.Larsen, J.E.Morel, J.M.McGhee, "Asymptotic Derivation of the Multigroup  $P_1$  and Simplified  $P_N$  – Equations with Anisotropic Scattering". *Nucl. Sci. Eng.* 123, 328 – 342 (1996).
10. T.A. Germogenova, "The Regular Components of Asymptotic Approximations of Solutions to the Transport Equation for Optically Thick Media". *Comp. Math. and Math. Phys.* 37, 464 – 482 (1997).

11. M. Ribarič, L. Šušteršič, “Asymptotic Approximations to a Linear Transport Equation”. *Transport Th. Stat. Phys.* 23, 815 – 844 (1994).
12. V.P.Zharkov, “Theoretical Justification and Validation of the  $SP_L$  Method for Shielding Calculation. Part 1”. *Proc. Joint Int. Conf. on Math. Methods and Supercomputing for Nucl. Applic.* Saratoga, N.-Y., 1, 741 – 749 (1997).
13. D.T. Tomašević, E.W. Larsen, “The Simplified  $P_2$  Approximation”. *Nucl. Sci. Eng.* 122, 309 – 325 (1996).
14. V.S. Vladimirov, *Mathematical Problems in the One-Velocity Theory of Particle Transport*. Atomic Energy of Canada Lim. Chalk River, Ontario: AECL – 1661 (1963).
15. D.C. Losey, J.C. Lee, W.R. Martin, T.C. Adamson Jr., “Singular Perturbation Solutions of the Neutron Transport Equation”. *Nucl. Sci. Eng.* 123, 68 – 85 (1996).
16. A.B. Vasil’eva, V.F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of the Solutions of Singular Perturbed Equations*. Moscow: Nauka (1973), in Russian.
17. T.A. Germogenova, “Space Moment Approximations for Transport Problems in Slab”. *Preprint №39 KIAM RAS* (1997), in Russian.
18. T.A. Germogenova, “Discrete Transport Model Eigenfunctions”. *Nucl. Sci. Eng.* 124, 63–71 (1996).
19. T.A. Germogenova, N.V. Konovalov, “Asymptotic Characteristics of the Solution to the Transport Equation in the Problem of a Nonhomogeneous Layer”. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 14, 928 – 946 (1974), in Russian.
20. V.V. Sobolev, *Light Scattering in Planetary Atmospheres*. Pergamon Press, Oxford (1972).
21. T.A. Germogenova, O.V. Nikolaeva, “Asymptotic Limits of Some Coarse mesh Nodal Approximations to radiation Transport Equation”. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* (to be published).
22. T.A. Germogenova, O.V. Nikolaeva, “Boundary Conditions for Asymptotic Approximations to Transport Equation Solutions”. *Report KIAM RAS* (1997), in Russian.
23. A.V. Averin, A.M. Voloschenko, E.P. Kondratenko, A.A. Dubinin. “The ROZ-6.4 One-Dimensional Discrete Ordinates Neutrons, Gamma Rays and Charged Particles Transport Code”. *Proc. Int. Topical Meeting on Advances in Mathematics, Computations and Reactor Physics*, April 28 – May 2, 1991, Pittsburgh, USA 5, 30.3, 5-1.

## Приложение I. Основные даты

Для характеристики организаторской и творческой активности Т.А. Гермогеновой приведем краткую хронологию событий, к которым она имела прямое отношение.

В начале самостоятельной работы она выбрала одним из инструментов исследования сеточный (детерминистский) численный метод решения уравнения переноса. На вопрос об этом выборе Татьяна Анатольевна пояснила, что выбор был связан со спецификой возникающих в то время задач.

Эти задачи 09.07.1981 г. кратко описал в докладной записке зав. отделом № 7 ИПМ им. М.В. Келдыша М.В. Масленников.

«Отдел № 7 ИПМ с начала 60-х годов ведет совместно с рядом заинтересованных организаций работу по созданию математического обеспечения задач физики защиты от излучений. В последние годы эта работа ведется по договорам и координационным планам научно-технического сотрудничества организаций ИПМ, ИАЭ, ВНИИСтали, НИКИЭТ, ОКБ Гидропресс, ИФВЭ, МИФИ, ФЭИ, ВНИИ АЭС, НПО Энергия, ВТИ».

В 2000 году Программа работ в 2000-2005 гг. сектора № 2 отдела № 7 ИПМ изложена Т.А. Гермогеновой более подробно.

«Основное содержание работ составят аналитические и численные исследования полей нейтральных и заряженных частиц в оптически плотных средах сложной структуры, развитие вычислительных алгоритмов, разработка программного аппарата. Особое внимание будет обращено на новые вычислительные проблемы, возникающие в практике использования разного рода излучений в георазведке, экологических исследованиях, в медицине. С другой стороны, существенные усилия предполагается направить на использование возможностей нового поколения компьютеров с параллельной архитектурой.

Характерные прикладные задачи:

- обеспечение безопасности действующих и проектируемых ядерно-энергетических установок;
- дистанционное зондирование атмосферы и океана (восстановление свойств среды по отраженному солнечному и лазерному излучению);
- использование излучений в медицинской диагностике и терапии».

Описание событий начнем с 1965 года.

1965 г. Всесоюзная конференция по вычислительной математике. Москва. Доклад Т.А. Гермогеновой «Прохождение излучений через защитные среды с плоской и сферической геометрией».

1967 г. 29 июня – 6 июля. Всесоюзный межведомственный симпозиум по рассеянию света в атмосфере. Черновцы, УССР.

1968 г. 23-29 сентября. Конференция «Проблемы автоматизации реакторных расчетов», г. Мелекес (переименован в г. Дмитровград).

1969 г., 21-29 апреля. Симпозиум стран СЭВ «Проблемы защиты от проникающих излучений реакторных установок», г. Мелекесс.

1970 г., 6-10 апреля. Всесоюзный симпозиум по вычислительным методам в теории переноса излучения, г. Новосибирск, СО АН СССР.

1970 г., 22 июня-1 июля. VIII Всесоюзное совещание по оптике атмосферы и актинометрии, г. Томск.

1973 г., 1-я конференция по защите «Радиационная защита и радиационная безопасность в ядерных технологиях».

1975-1990 гг. Работа по координационным планам №1-№5. Каждый план на 3 года. Организации- участники: ИАЭ им. И.В.Курчатова, ФЭИ, МИФИ, НИКИЭТ, ВТИ им. Ф.Э. Дзержинского, ОКБ Гидропресс, ВНИИ АЭС, ВНИИ Стали, ИФВЭ, НПО Энергия, ИПМ.

1977 г. 2-я конференция по защите.

1978-1990 гг. Работа в интересах МО по численному решению 2-мерного уравнения переноса сеточным методом на ЭВМ БЭСМ-6 по программе Радуга для определения энерго-угловых характеристик нейтронного и гамма-излучения. Тема Аргон –АН.

1981 г. 3-я конференция по защите, г. Тбилиси.

1988-1990 гг. Работа во Временной научно-технической лаборатории (ВНТЛ-70), созданной при отделе №7 ИПМ (1.01.1988-31.10.1990). Руководитель лаборатории Т.А. Гермогенова. Режим работы сотрудников – дополнительно 1/3 работы сотрудников к основному рабочему времени, т. е. за три года дополнительно 1 год.

Одной из целей, определяемых договором №7-87/70 от 19.10.87, в этот период является выполнение первого этапа работ по созданию на ЕС ЭВМ программного комплекса ЗАЩИТА (от излучений) и комплекса РЕАКТОР +ЗАЩИТА (для расчета источников деления в реакторе).

1990 г. Int. Conf. «Physics of Reactors: Operation, Design and Computation». Marseille, France, April 23-27, 1990.

1991 г. Int. Top. Meet.: "Advances in Mathematics, Computations and Reactor Physics". Pittsburgh, USA, Apr. 28 – May 2, 1991.

1992 г. Международный симпозиум «Численные методы решения уравнения переноса». Москва, 26-28 мая. Председатель оргкомитета Т.А. Гермогенова.

1993 г. Разработка проекта и начало реализации алгоритмов Банка тестовых задач радиационной защиты. Работа выполнялась совместно с Научно-технической ассоциацией АКТИС. Руководитель ВТК (временного трудового коллектива) Т.А. Гермогенова.

1994 г. 8th Intern. Conf. "Radiation Shielding". Arlington Texas, April 24- 28, 1994.

1995-1997 гг. Работа по гранту МНТЦ 115-95. Тема: Сотрудничество в области фундаментальных исследований и образования по проблемам безопасности ядерных реакторов и новых применений теории переноса. Рук.



проекта М.В. Масленников. Подпроект 1. Математические исследования численных аппроксимаций в линейной теории переноса частиц. Рук. Т.А. Гермогенова. Подпроект 2. Параллельные алгоритмы для безопасности ядерных реакторов. Рук. А.В. Воронков.

1995- Intern. Conf. on “Math. and Comput., Reactor Physics and Environmental Analysis”. Portland, Oregon, USA , Apr. 30 – May 4, 1995.

1997 г. Joint Intern. Conf. on Mathem. Methods and Supercomputing for Nuclear Applications, Saratoga Springs, N-Y, USA, Oct. 5-9, 1997.

1998 г. VII Российская научная конференция «Защита от ионизирующих излучений ядерно–технических установок», 22-25 сентября, 1998 г.

1999 г. Int. Conf. “Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications (M&C-99), Sept. 27-30, Madrid Spain. 1999.

1999, 2002, 2004 гг. Международный симпозиум стран СНГ (МСАР) «Атмосферная радиация». Т.А. Гермогенова – Председатель 3-й Секции – Теория переноса излучения.

2002 г. Юбилейная научно-техническая конференция НИКИЭТ. «Опыт конструирования ядерных реакторов», 27-28 мая , Москва, 2002 г.

2002 г. Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, Россия, 17-21 июня, 2002 г.

## Приложение II. Отчет о командировке в США

### ОТЧЕТ

Г.А.Гермогеновой о поездке на 8 Международную Конференцию по радиационной защите  
(США, Техас, Арлингтон 24–28 апреля 1994 г.)

На Конференции мною были представлены следующие 2 доклада

1) Полуаналитические эталонные расчеты для дву- и трехмерных задач о глубоко проникающем излучении

(авт.: Т.А.Гермогенова, Е.Б.Павельева)

2) Асимптотические разложения решений уравнения переноса в оптически плотных средах

(авт.: Т.А.Гермогенова)

Во время Конференции были проведены обсуждения научных проблем с американскими учеными, работающими в крупных научных Лабораториях (Лос Аламос, Окридж и др.)

Предметом обсуждения были вопросы, связанные с развитием эффективных численных методов решения задач радиационной защиты.

После конференции я посетила 3 крупных Университета, из которых мною были получены приглашения, с целью обсуждения научных проблем и возможностей научного сотрудничества

1. Техасский Государственный Университет (г. Остин), Лаборатория Физики плазмы, руководителем которой является известный ученый Д.Бенгтсон. Обсуждались проблемы, возникающие в анализе радиационных полей и конструировании радиационной защиты термоядерных установок типа ТОКОМАК.

2. Техасский Сельско-хозяйственный и Механический Университет (г. Коллеж Стейши), Отделение Ядерной инженерии, группа профессора П.Нельсона. Обсуждались вопросы организации научного сотрудничества в рамках проекта, поданного нами в Международный научный и технологический Центр. Мною также сделан доклад на научном семинаре "Сингулярные собственные функции дискретных моделей краевых задач для уравнения переноса излучения"

3. Пенсильванский Государственный Университет (г. Стэйт

- 2 -

Колледж), Отделение Ядерной Инженерии, группа доктора Алиреза Хагига. Мною прочитаны 2 лекции на тему "Источники осцилляций, возникающих при численном решении краевых задач для уравнения переноса излучения"

Проведен семинар с обсуждением работ сотрудников и аспирантов группы доктора А.Хагига. Обсуждались также вопросы научного сотрудничества.

Существенной для дальнейшей работы явилась возможность ознакомиться с последними статьями в авторитетных научных журналах и научными отчетами Лабораторий, которые я посетила, а также привезти с собой их копии.

Поездка, продолжавшаяся 2 недели (23 апреля - 9 мая), финансировалась Международным фондом Сороса и отчасти пригласившими меня Университетами.

Зав. сект. отд. №7

Г.А.Гермогенова

12 мая 1994

## Приложение III. Список научных трудов

### Статьи

№ № п/п	Название научного труда	Печатный или рукописный	Издательство, журнал (номер, год) или номер авторского свидетельства.	Кол-во п. л. или страниц	Соавторы работы
1	2	3	4	5	6
1.	О решении уравнения переноса при сильно неизотропном рассеянии.	печ.	ДАН СССР, 113, №2, с.297–300, 1957.	4	
2.	К уточнению приближения для малых углов в задачах о многократном рассеянии.	печ.	ЖЭТФ, 33, в.4, с. 1067–1069, 1957.	3	
3.	Об ограниченных решениях заданного на полубесконечном интервале неоднородного интегрального уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов.	печ.	ДАН СССР, 115, № 1, с. 23–26, 1957.	4	
4.	Некоторые свойства решения интегрального уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности.	печ.	ДАН СССР, 126, № 2, с. 251–254, 1959.	4	
5.	Экстраполированная длина и плотность вблизи границы в сферической задаче Милна.	печ.	Сб. "Математические задачи нейтронной физики". изд. МГУ М., с. 80–119, 1960.	40	
6.	О характере решения уравнения переноса для плоского слоя.	печ.	ЖВМ и МФ, 1, № 6, с. 1001–1019, 1961.	19	
7.	Принцип максимума для уравнения переноса.	печ.	ЖВМ и МФ, 2, № 1, с. 169–174, 1962.	6	
8.	О влиянии поляризации на распределение интенсивности рассеянного излучения.	печ.	Известия АН СССР, сер. геофиз. , № 6, с. 854–856, 1962.	3	
9.	Обратная задача в теории переноса.	печ.	Сб. "Актинометрия и оптика атмосферы. Изд. "Наука" М. с. 256–260, 1964.	5	
10.	К вопросу о взаимодействии квантовой системы с полем.	печ.	ЖЭТФ, 46, вып. 2, с. 745–754, 1964.	10	С.Г.Раутиан.
11.	Вынужденное излучение атомов, движущихся в поле сильной стоячей волны.	печ.	Оптика и спектроскопия, 17, вып. 2, с. 157–167, 1964.	11	С.Г.Раутиан.

12.	Спектральное распределение отраженной радиации Земли в полосе поглощения озона 0.20–0.34 мкм.	печ.	Изв. АН СССР, ФАО, 1, № 9, с. 941–951, 1965.	11	М.С.Малкевич, Л.Д.Краснокутская.
13.	Угловое и вертикальное распределение отраженной радиации Земли в полосе поглощения озона 0.20–0.34 мкм.	печ.	Там же, 1, № 11, с. 1160–1168, 1965.	9	Л.Д.Краснокутская.
14.	О диффузии излучения в сферической оболочке, окружающей точечный источник.	печ.	Астрофизика, 2, №3, с. 251–266, 1965.	16	
15.	Прохождение нейтронов в плоско–параллельных защитах.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов, Атомиздат, вып. 2, с. 22–39., 1966.	18	А.П.Суворов, В.А.Уткин.
16.	Перенос нейтронов в неразмножающих средах со сферической симметрией.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 2, с. 57–66, 1966.	10	Л.П.Басс, В.А.Уткин.
17.	Угловые и энергетические спектры нейтронов за железными экранами.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 2, с. 74–87, 1966.	14	А.П.Суворов.
18.	Рассеяние солнечного $\gamma$ –излучения на галактическом водороде.	печ.	Астрономический журнал, 44, № 2, с. 352–357, 1967.	6	В.Г.Курт.
19.	Решение уравнения переноса с учетом зависимости поглощательной способности вещества от плотности радиации.	печ.	Изв. АН СССР, ФАО, 3, № 2 с. 166–171, 1967.	6	Э.П.Зеге.
20.	Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса.	печ.	ЖВМ и МФ, 9, № 3, с. 605–625, 1967.	21	
21.	О сходимости некоторых приближенных методов решения уравнения переноса.	печ.	ДАН СССР, 181, № 3, с. 519–522, 1968.	4	
22.	Локальные свойства решения уравнения переноса.	печ.	ДАН СССР, 187, № 5, с. 18–21, 1969.	4	
23.	Исследование угловой, пространственной и спектральной структуры поля яркости Земли для одной характерной модели сферической атмосферы.	печ.	Изв. АН СССР, ФАО, 5, № 12, с. 1266–1277, 1969.	12	Л.И.Копрова, Т.А.Сушкевич.

24.	Некоторые свойства решения первой краевой задачи для уравнения переноса.	печ.	Сб. "Вычислительные методы в теории переноса" под ред. академика Г.И.Марчука, Атомиздат, с. 34–59, 1969.	26	
25.	Решение уравнения переноса методом средних потоков.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 3, с. 34–46, 1969.	13	Т.А.Сушкевич.
26.	О решении уравнения переноса методом характеристик.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 3, с. 69–77, 1969.	9	Л.П.Басс.
27.	Альбедные задачи теории переноса.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 4, с. 7–16, 1969.	10	В.И.Журавлев, М.Г.Кобозев, А.П.Суворов, В.А.Уткин.
28.	Поиск оптимальных вариантов защиты методом оврагов.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты ядерных реакторов" вып. 4, с. 84–93. Атомиздат, 1969.	10	Ю.П.Федоров, А.П.Суворов, В.А.Уткин.
29.	Односкоростная диффузия нейтронов в неразмножающих двумерных системах с цилиндрической симметрией.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 4, с. 203 – 216, 1969.	14	Л.П.Басс, А.П.Суворов.
30.	Расчет одномерных плоско–параллельных защит численным интегрированием уравнения переноса излучения.	печ.	Сб. "Проблемы защиты от проникающих излучений реакторных установок", Атомиздат, Мелекес, 1, с. 157–178, 1969.	22	В.И.Журавлев, А.П.Суворов, В.А.Уткин.
31.	Двумерный расчет нейтронных полей в осесимметричных радиационных защитах.	печ.	Там же, с. 185–193.	9	Л.П.Басс, А.А.Дубинин, А.П.Суворов.
32.	Пространственно–энергетическое распределения $\gamma$ – квантов в гетерогенных средах.	печ.	Там же, 3, с. 87–103.	17	А.А.Абагян и др.
33.	Расчет вторичного $\gamma$ – излучения в защите.	печ.	Там же, 3, с. 160–176.	17	А.А.Абагян и др.
34.	Исследование дифференциальных альбедо нейтронов для защитных материалов различной толщины.	печ.	Там же, 4, с. 35–50.	16	В.П.Машкович и др.
35.	Расчет выхода нейтронов через цилиндрические каналы с малым диаметром.	печ.	Там же, 4, с. 113–127.	15	В.П.Машкович и др.

36.	Численные методы решения краевых задач для уравнения переноса.	печ.	Труды Всесоюзного симпозиума по оптике рассеивающих сред, Наука, Минск, с. 17–32, 1969.	16	
37.	Перенос быстрых нейтронов в защитах ограниченных размеров.	печ.	Сб. "Вопросы физики защиты реакторов", Атомиздат, вып. 5, с. 112–122, 1972.	11	Л.П.Басс, А.П.Суворов, В.А.Уткин.
38.	Численные методы решения краевых задач для уравнения переноса в теории радиационной защиты реакторов.	печ.	Там же, с. 22–46, 1972.	25	В.И.Журавлев, А.П.Суворов, В.А.Уткин.
39.	Односкоростной анализ переноса нейтронов промежуточных энергий через цилиндрические каналы в защите.	печ.	Там же, с. 145–151, 1972.	7	Л.П.Басс, В.В.Болятко, В.П.Машкович и др.
40.	Дифференциальные характеристики альbedo нейтронов промежуточных энергий для плоских рассеивателей.	печ.	Там же, с. 170–175.	6	Е.И.Панфилова, А.П.Суворов, В.А.Уткин.
41.	Исследование характеристик поля рассеянного солнечного излучения в сферической атмосфере.	печ.	Сб. "Рассеяние света в земной атмосфере", "Наука", Алма-Ата, с. 17–20, 1972.	4	Т.А.Сушкевич
42.	Использование метода подгрупп для учета резонансной структуры сечений в расчетах прохождения через плоские слои защиты.	печ.	Вопросы физики защиты реакторов, Атомиздат, вып. 6, с. 14–20, 1974.	7	М.Н.Николаев, Н.В.Исаев.
43.	Асимптотические характеристики распределений потоков быстрых нейтронов в гетерогенных защитах.	печ.	Там же, с. 20–29.	10	Н.В.Коновалов, А.П.Суворов.
44.	Пространственные и угловые распределения быстрых нейтронов в конических защитах.	печ.	Там же, с. 29–37.	9	Л.П.Басс.
45.	Асимптотические характеристики решения уравнения переноса в задаче о неоднородном слое.	печ.	ЖВМ и МФ, 14, № 4, с. 928–946, 1974.	19	Н.В.Коновалов.
46.	О дискретном спектре характеристического уравнения теории переноса.	печ.	ЖВМ и МФ, 14, № 6, с. 1526–1543, 1974.	18	
47.	Расчет двумерной защиты реактора по многогрупповой программе "РАДУГА".	печ.	Сб. "Радиационная безопасность и защита АЭС", Атомиздат, вып. 1, с. 5–10, 1975.	6	Л.П.Басс, А.А.Дубинин, А.Н.Хмылев.

48.	Комплекс программ РОЗ-6 для расчета одномерной защиты.	печ.	Там же, с. 22–24.	4	В.И.Журавлев, В.А.Уткин, Е.И.Костин.
49.	Оценка точности решения многогрупповой системы уравнений переноса в плоской геометрии.	печ.	Там же, с. 29–34.	6	В.А.Уткин.
50.	Численные методы решения кинетического уравнения в задачах физики защиты от излучений.	печ.	Атомная Энергия, 38, № 6, с. 401–405, 1975.	5	
51.	Проблемы вторичного $\gamma$ – излучения в защитах реакторов.	печ.	Там же, с. 406–411.	6	В.И.Журавлев, А.А.Дубинин, В.А.Уткин.
52.	О характеристическом уравнении теории переноса излучения.	печ.	ДАН СССР, 231, № 4, с. 841–844, 1976.	4	Д.А.Шулая.
53.	Применение $2P_n$ – метода в решении многогрупповой системы уравнений переноса в плоских гетерогенных средах.	печ.	Сб. "Вопросы дозиметрии и защиты от излучений, Атомиздат, вып. 15, с. 82-89, 1976.	8	Ю.М.Вырский.
54.	Распределение плотности потока быстрых нейтронов в радиационной защите ВВЭР-440.	печ.	Сб. "Радиационная безопасность и защита АЭС, Атомиздат, вып. 3, с. 58–64, 1977.	7	Л.П.Басс, М.Ю.Вырский, А.А.Дубинин и др.
55.	К интерпретации оптических измерений на АМС "Венера-6".	печ.	Космические исследования, 15, вып. 5, с. 755–766, 1977.	12	Н.В.Коновалов, Е.М.Фейгельсон.
56.	Полуэмпирическая модель расчета дифференциальных и интегральных характеристик квазиальbedo типа нейтрон – $\gamma$ – квант.	печ.	Сб. "Радиационная безопасность и защита АЭС", Атомиздат, вып. 4, с. 94–101, 1980.	8	А.А.Абагян, А.А.Дубинин, В.А.Уткин и др.
57.	Развитие численных методов решения кинетического уравнения в задачах физики защиты от излучений.	печ.	Сб. "Радиационная безопасность и защита АЭС", Атомиздат, вып. 5, с. 152–158, 1981.	7	
58.	Дифференциальные свойства решения односкоростного уравнения переноса в задачах с плоской и сферической геометриями.	печ.	Сб. "Численное решение уравнения переноса в одномерных задачах" под ред. Т.А.Гермогеновой, ИПМ АН СССР, с. 8–32, 1982.	25	
59.	О решении уравнения переноса $DS_n$ – методом в гетерогенных средах ч.І. Плоская геометрия.	печ.	Там же, с. 33–63	31	А.М.Волощенко.



60.	Вариационно–разностный метод решения уравнения переноса в плоской и сферической геометриях.	печ.	Там же, с. 116–136.	21	А.И.Илюшкин.
61.	Программа расчета полей излучения и функции ценности в одномерных гетерогенных плоских и сферических слоях - РОЗ-11.	печ.	Там же, с.222–224.	3	М.Ю.Вырский, А.И.Илюшкин, И.И.Линге, А.В.Шикин.
62.	Развитие численных методов решения уравнения переноса излучения.	печ.	В кн. " Распространение света в дисперсной среде", Наука и техника, Минск, с. 105–118, 1982.	14	
63.	ОКС–пакет программ константного обеспечения.	печ.	ВАНТ. Физ. и техн. ядерных реакторов вып. 4 (33), с. 72–75, 1983.	4	Д.А.Корягин, Э.Л.Луховицкая, Н.Н.Николаев и др
64.	Сравнение численных методов решения уравнения переноса на тестовой задаче в $(r, z)$ – геометрии.	печ.	Защита от ионизирующих излучений ядерно–технических установок. Труды III Всесоюзной конференции II, Тбилиси, ТГУ, с. 33–41, 1983.	9	Э.Б.Бродкин, А.Н.Хмылев.
65.	Расчетный анализ реперных интегральных экспериментов с калифорниевым источником.	печ.	Там же, IY, с. 42–52.	11	А.М.Волощенко , А.А.Дубинин, Л.А.Трыков и др.
66.	Пространственно–энергетические распределения излучений в жидком воздухе.	печ.	Там же, IY, с. 109–118.	10	А.М.Волощенко, А.Н.Гончаров, А.А.Дубинин и др.
67.	Математическое обеспечение задач радиационной защиты.	печ.	ВАНТ, Сер. Физ. и техника. ядерных реакторов, вып. 4, с. 15–21, 1985.	7	
68.	К развитию метода дискретных ординат.	печ.	Там же, с.57–62.	6	А.М.Волощенко.
69.	Комплекс РАДУГА–4 для численного решения уравнения переноса поляризованного излучения в осесимметричных средах.	печ.	Сб. Фотометрические и поляриметрические исследования небесных тел. Наукова Думка, Киев, с. 133–135, 1985.	3	Л.П.Басс, Н.В.Коновалов.
70.	Об обратных задачах атмосферной оптики.	печ.	ДАН СССР, 285, №5, с. 1091–1096, 1985.	5	
71.	Решение уравнения переноса для протяженных цилиндрических областей.	печ.	ВАНТ, Сер. Физ. и техника. ядерных реакторов, вып. 4, с. 14–17, 1986.	4	Е.В.Чеботарева.

72.	Двумерное распределение функционалов от поля нейтронов с энергией более 0.1 Мэв за радиационной защитой термоядерной установки ИНТОР.	печ.	ВАНТ, Сер. Термоядерный синтез, в. 4, с. 18–24, 1986.	6	Л.П.Басс, А.А.Петрулевич, А.Н.Хмылев, Г.Е.Шаталов.
73.	Методы дискретных ординат в двумерных задачах с $(r,z)$ – геометрий.	печ.	ВАНТ, Сер. Физика и техника реакторов, вып. 4, с. 9–12, 1986.	4	Л.П.Басс, А.Н.Гончаров, Н.А.Кондурушкин, А.Н.Хмылев.
74.	Сопряженное уравнение переноса в задачах о точечном источнике у границы раздела.	печ.	Там же, с. 12–14, 1986.	3	Л.П.Басс, А.Гончаров, Н.А.Кондурушкин.
75.	Основы математической теории переноса поляризованного излучения (строгие результаты).	печ.	В кн. "Принцип инвариантности и его приложения". Изд. АН Арм. ССР Ереван, с. 271–284, 1989.	14	Н.В.Коновалов, М.Г.Кузьмина.
76.	Характеристическое уравнение Амбарцумяна.	печ.	Там же, с.315–325, 1989.	11	М.В.Масленников.
77.	Характеристическое уравнение в задачах о переносе излучения в протяженных цилиндрических областях.	печ.	ЖВМ и МФ, 29, №8, с. 1195–1211, 1989.	21	Е.Б.Павельева.
78.	К развитию численных методов в задачах о распространении излучения.	печ.	Атомная энергия, 69, № 1, с. 41–45, 1990.	5	
79.	Adaptive Positive Nodal Method for the Transport Equation in Two–Dimensional Curvilinear Geometries.		Proc. Int. Conf. "Physics of Reactors: Operation, Design and Computation". Marseille, France, April 23–27, 1990, 2, s. XII, pp 49–58. 1990.	10	А.М.Voloschenko.
80.	Mathematical Simulation in Large–Scale problems of Nuclear Power Plant Radiation Shielding.		Proc. Int. Top. Meet.: "Advances in Mathematics, Computations and Reactor Physics". Pittsburgh, USA, Apr. 28 – May 2, 1991, 2, s.7.2, pp 4.1–4.11, 1991.	10	L.P.Bass, A.A.Petrulevich, A.M.Voloschenko, A.A.Dubinina, A.V.Shwetsov.
81.	Centennial of the Integral Transport Equation, Symposium in Leningrad.		Transp. Theory and Stat. Phys., 20, №5&6, pp 525–539, 1991.	15	
82.	Characteristic Values of Transport Equation as Functions of Problem Parameters.		Transp. Theory and Stat. Phys., 22, №2&3, pp 293–329, 1993.	26	A.A.Petrulevich.

83.	Банк тестовых задач радиационной защиты. Демонстрационная версия.		Сб. трудов Сем. Нейтроника–93: "Алгоритмы и программы для нейтронно–физических расчетов ядерных реакторов". Обнинск, 26–28 октября 1993, с. 54–63, 1995.	10	Н.В.Коновалов, Е.Б.Павельева.
84.	Numerical Solution of Time–Dependent Transport Equation with Pulsed Sources.		Transp. Theory and Stat. Phys., 23, №6, pp 845–860, 1994.	25	A.M.Voloschenko.
85.	Adaptive Positive Nodal Method for the Transport Equation.		Ibid. 23, №7, pp 923–970, 1994.	48	A.V.Shwetsov, A.M.Voloschenko.
86.	Semi–Analytical Benchmark Calculations for Two–and Three–Dimensional Deep Penetration Problems.	печ.	Proc. of 8 th Intern. Conf. "Radiation Shielding", Arlington Texas, Vol. 1, pp 185–192, Apr. 24–28, 1994.	8	E.B.Pavelyeva.
87.	Regular and Singular Eigenfunctions of the Finite Moments Transport Methods in Optically Thick Media.	печ.	Proc. of Intern. Conf. on Math. and Comput., Reactor Physics and Environmental Analysis, Portland, Oregon, USA, 2, pp 941–950, , Apr.30 – May 4, 1995.	10	
88.	Discrete Transport Model Eigenfunctions.	печ.	Nucl. Sci. Eng., 124, № 1, pp 63–78, 1996.	16	
89.	Регулярные компоненты асимптотических приближений к решениям уравнения переноса в оптически плотных средах.	печ.	ЖВМ и МФ, 37, № 4, с. 464–482, 1997.	19	
90.	Radiation Shielding Benchmark Bank Demonstration Version.	печ.	Proc. of Joint Intern. Conf. on Mathem. Methods and Supercomputing for Nuclear Applications, Saratoga Springs, N.–Y, USA, 1, pp 331–340, Oct. 5 – 9, 1997.	10	N.V.Konovalev, E.B.Pavelyeva, V.A.Choromsky, A.A.Dubinin.
91.	Asymptotic Approximations to Transport Equation Solutions in Optically Thick Domains.	печ.	Transp. Th. and Stat. Phys., 27, № 5–7, pp 523–546, 1998.	24	
92.	Грубосеточные алгоритмы в задачах радиационной защиты.	печ.	Сб. трудов Сем. НЕЙТРОНИКА–99: "Алгоритмы и программы для нейтронно–физических расчетов ядерных реакторов", 26–28 окт., 1999, с. 150–159, Обнинск 2000.	12	О.В.Николаева.

93.	Boundary Conditions for Asymptotic Approximations in Two-Region Transport Problem.	печ.	Proc. of Int. Conf. "Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications" (M&C' -99), Sept. 27-30, 1999, Madrid, Spain, 2, pp 1977-1986, 1999.	10	О.В.Николаева
94.	Accuracy Estimations of Computational Results in Radiative Transfer problems.	печ.	Proc. of Int. Radiation Symposium "Current Problems in Atmospheric Radiation". 24-29 July 2000, St.-Petersburg, Russia, pp 303-307.	5	L.P.Bass, N.V.Kononov, O.V.Nikolaeva, A.M.Voloschenko
95.	Numerical Solving of Polarized Radiation Transfer Equation in Axially Symmetric Domains.	печ.	Ibid. pp 238-242.	5	L.P.Bass, N.V.Kononov.
96.	База данных экспериментальных и вычислительных тестов для обоснования проектов радиационной защиты.	печ.	Сб. трудов Сем. НЕЙТРОНИКА-2000: "Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов", 24-26 окт., 2000, Обнинск (в печати).	14	Н.В.Коновалов, В.П.Жарков.
97.	Грубосеточные аппроксимации уравнения переноса излучения. Задачи с существенным поглощением.	печ.	ЖВМ и МФ, 41, №4, с.620-640, 2001.	21	О.В.Николаева.
98.	Грубосеточные аппроксимации уравнения переноса излучения. Задачи со слабым поглощением.	печ.	ЖВМ и МФ, 41, №5, с.732-755, 2001.	24	О.В.Николаева.
99.	Новые информационные и вычислительные технологии в развитии ядерной энергетики.		Сб. трудов Юбилейная научно-техн. конф. "Опыт конструирования ядерных реакторов" ФГУП НИКИЭТ им. Н.А.Доллежалея 27-28 мая 2002 г. с. 188-202, 2002.		Р.П.Федоренко, Л.П.Басс, А.М.Волощенко и др.

### Монографии

№ п/п	Название научного труда	Печатный или рукописный	Издательство, журнал (номер, год) или номер авторского свидетельства.	Количество п. л. или страниц	Соавторы работы
1	2	3	4	5	6
1.	Перенос быстрых нейтронов в плоских защитах.	печ.	М., Атомиздат, 1971.	291	С.Ф.Дегтярев, В.В.Орлов, А.П.Суворов.
2.	Альbedo нейтронов.	печ.	М., Атомиздат, 1973.	277	В.Г.Золотухин, В.А.Климанов, В.П.Машкович и др.
3.	Локальные свойства решений уравнения переноса.	печ.	М., Наука, 1986.	270	
4.	Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения.	печ.	ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1986.	231	Л.П.Басс, А.М.Волощенко.

### Диссертации

№ № п/п	Название научного труда	Печатный или рукописный	Издательство, журнал (номер, год) или номер авторского свидетельства.	Количество п. л. или страниц	Соавторы работы
1	2	3	4	5	6
1.	О методах решения уравнения переноса при сильно неизотропном рассеянии. Кандидатская диссертация.	рук.	ОПМ МИ АН СССР, 1957.	143	
2.	Краевые задачи для уравнения переноса. Докторская диссертация	рук.	ИПМ АН СССР, 1971.	379	

### Препринты

№ п/п	Название научного труда	Печатный или рукописный	Издательство, журнал (номер, год) или номер авторского свидетельства.	Количество п. л. или страниц	Соавторы работы
1	2	3	4	5	6
1.	Задачи с сосредоточенными источниками в стационарной теории переноса.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 23, 1971.	24	
2.	Численное решение краевых задач для уравнения переноса в системах с осевой симметрией.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 51, 1972.	21	Л.П.Басс, А.Н.Хмылев.
3.	Распространение излучения через конические преграды.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 52, 1972.	73	Л.П.Басс, А.А.Дубинин, А.Н.Хмылев.

4.	О регулярных решениях характеристического уравнения теории переноса.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР № 21, 1972.	40	
5.	Однокоростная программа "РАДУГА-1".	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 11, 1973.	69	Л.П.Басс, А.Н.Хмылев.
6.	Модульная структура программ в осесимметричных задачах теории переноса. Система "РАДУГА".	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 97, 1973.	69	Л.П.Басс, А.Н.Хмылев.
7.	К решению неоднородного уравнения переноса.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 133, 1974.	24	
8.	Метод оврагов в задачах оптимизации параметров защиты реакторов. Программа "КРОВ"	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 23, 1975.	25	Ю.Г.Федоров, В.И.Журавлев, А.П.Суворов.
9.	АРАМАКО -2 F - Система обеспечения нейтронными групповыми константами расчетов реакторов и защиты.	печ.	Инструкция, ИПМ АН СССР, 1976.	66	М.Ю.Вырский, А.А.Дубинин, Н.Н.Николаев.
10.	О полноте системы собственных функций характеристического уравнения теории переноса.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 103, 1976.	55	
11.	Спектр характеристического уравнения теории переноса с учетом поляризации.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 62, 1978.	51	Н.В.Коновалов.
12.	Принципы разработки пакета прикладных программ на базе нестандартизированного функционального наполнения.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР № 44, 1979.	19	Л.П.Басс, В.И.Журавлев, Д.А.Корягин и др.
13.	Объединенная система константного обеспечения - ОКС. Общее описание.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР № 140, 1979.	25	Д.А.Корягин, Э.Л.Луховицкая, М.Н.Николаев и др.
14.	Система ПНФ, Принципы создания пакетов программ на базе нестандартизированного фонда.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 154, 1980.	25	Л.П.Басс, И.Х.Зусман, Д.А.Корягин и др.
15.	Типичные задачи расчета полей нейтронов и гамма-квантов в радиационной защите реакторов.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 84, 1981.	24	М.Н.Николаев, А.П.Суворов.
16.	Программное обеспечение задач физики защиты реакторов.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 86, 1981.	24	Л.П.Басс, Д.А.Корягин, М.Н.Николаев, А.П.Суворов.

17.	Оценки решений краевых задач для уравнения переноса.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 139, 1982.	28	
18.	Многогрупповая программа РАДУГА-2.		Инструкция для пользователя, ИПМ АН СССР, 1982.	163	Л.П.Басс, А.А.Дубинин, А.А.Петрулевич и др.
19.	Объединенная система константного обеспечения – ОКС. Версия 3.0.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 20, 1984.	30	А.М.Волощенко, Д.А.Корягин, Э.Л.Луховицкая, Т.Г.Исаенко и др.
20.	Групповые константы для расчета торможения заряженных частиц в многокомпонентных матрицах.	печ.	Препринт № 4141/11 ИАЭ им. И.В.Курчатова, 1985.	24	А.М.Волощенко, Ю.Д.Лизунов, А.И.Рязанов и др.
21.	Метод дискретных ординат в осесимметричных задачах.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, №83, 1985.	25	Л.П.Басс, А.Н.Гончаров, А.Н.Хмылев.
22.	Эффективность схем метода дискретных ординат в задачах о переносе излучения от точечного источника.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, № 84, 1985.	27	Л.П.Басс, А.Н.Гончаров, Н.А.Кондурушкин.
23.	Решение уравнения переноса с высокой степенью точности. Программа TEST.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, №139, 1985.	24	А.С.Дятлова.
24.	Простейшие разностные схемы решения уравнения переноса в (х,у) – геометрии и способы их коррекции.	печ.	Препринт ИПМ АН СССР, №91, 1986.	26	Д.А.Баюк.
25.	Слабо-сингулярные интегральные уравнения на интервале большой длины.	печ.	Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, №11, 1990.	27	
26.	Асимптотические разложения решений уравнения переноса в оптически плотных средах.		Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, №48, 1993.	27	
27.	Диффузионный предел некоторых разностных схем метода дискретных ординат.	печ.	Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, №50, 1994.	27	О.В.Николаева.
28.	Метод пространственных моментов в задачах о переносе излучения в слое.	печ.	Препринт № 39, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1997.	31	

## Отчеты

№ № п/п	Название научного труда	Печатный или рукописный	Издательство, журнал (номер, год) или номер авторского свидетельства.	Количество о п. л. или страниц	Соавторы работы
1	2	3	4	5	6
1.	Отчет по теме "Езель–АН".	рук.	ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1987.	85	Н.В.Коновалов, Д.А.Баюк, Г.Э.Косарева.
2.	Грубосеточные аппроксимации в задачах о переносе излучения в оптически плотных областях.	рук.	Отчет по теме АВРОРА, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1994.	48	Н.В.Коновалов, Г.Э.Косарева, О.В.Николаева.
3.	Алгоритмы расчета асимптотических приближений в задачах о плоскопараллельных слоях большой оптической толщины.	рук.	Отчет № 7–4–95 по теме АВРОРА, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1994.	45	Н.В.Коновалов, Г.Э.Косарева, О.В.Николаева.
4.	Расчет асимптотических характеристик световых полей в оптически плотных плоскопараллельных слоях. Программа ASYMP–Z.	рук.	Отчет № 7–25–96, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1996.	17	Н.В.Коновалов, Г.Э.Косарева.
5	Краевые условия для асимптотических приближений к решению уравнения переноса излучения.	рук	Отчет № 7–8–97, ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 1997.	29	О.В.Николаева

## Доклады

№ № п/п	Название научного труда	Печатный или рукописный	Издательство, журнал (номер, год) или номер авторского свидетельства.	Количество о п. л. или страниц	Соавторы работы
1	2	3	4	5	6
1.	Программно–константное обеспечение расчетов радиационных полей в космических аппаратах с ЯЭУ.	печ.	Сб. тезисов докл. на конф. "Ядерная энергетика в космосе", Обнинск, 15–19 мая, ч. 1, с. 254–256, 1990.	3	Л.П.Басс, А.М.Волощенко, А.В.Воронков, В.И.Журавлев, А.А.Дубинин.
2.	Численный алгоритм решения уравнения переноса заряженного излучения Больцмана–Фоккера–Планка.	печ.	Численные методы решения уравнения переноса. Тезисы докладов Всесоюзного семинара 15–18 мая, 1990, Гарту, с. 29–32, 1990.	4	А.М.Волощенко.



3.	Исследование устойчивости схем 3–4 го порядка точности для уравнения переноса в $(x,y)$ – геометрии.	печ.	Там же с. 33–36.		А.М.Волощенко, А.В.Швецов.
4.	Некоторые задачи с сингулярными возмущениями в теории переноса излучения.	печ.	Там же с. 45–48.	4	
5.	Асимптотика решения уравнения переноса в цилиндрических областях большого размера вдали от источников.	печ.	Там же с. 49–51.	4	Е.Б.Павельева.
6.	Метод пограничных функций в задачах о переносе гамма–излучения.	печ.	Там же с. 53–55.	3	А.В.Гринев.
7.	Дискретные модели краевых задач для уравнения Больцмана–Фоккера–Планка.		Тезисы докладов на Межд. Симп. "Численные методы решения уравнения переноса", Москва, 26–28 мая 1992, с. 86–89, 1992.	4	
8.	Использование неоднородных разностных схем для решения уравнения переноса на компьютерах с различной архитектурой.		Там же, с. 64–67.	4	Л.П.Басс, А.А.Петрулевич.
9.	Комбинирование алгоритмов различных классов точности в расчетах радиационных полей.	печ.	Сб. аннотаций докладов на VII Российской конф. "Защита от ионизирующих излучений яд. – техн. установок", 22–24 сент. 1998, с. 22–23, 1998.	2	
10.	Новые материалы в Банке тестовых задач радиационной защиты.	печ.	Там же, с. 63–65.	3	А.А.Дубинин, В.П.Жарков, Н.В.Коновалов, Е.Б.Павельева.
11.	Concept of Polarized Light Scattering Matrix Correctness.	печ.	Proc. of the Fourth Intern. Aerosol Symposium, July 6–9, 1998, St. Petersburg, Russia, p. 100, 1998.	1	Н.В.Коновалов, Е.Б.Павельева.
12.	Алгоритм расчета поля излучения от узконаправленного пучка частиц в программе РАДУГА–5.	печ.	Сб. тезисов докладов Межд. Симп. стран СНГ "АТМОСФЕРНАЯ РАДИАЦИЯ" (мсар–99), 12–15 июля 1999, Санкт–Петербург, с. 21–22, 1999.	2	Л.П.Басс, Р.М.Мокеев.
13.	Асимптотические приближения в задачах о переносе излучения.	печ.	Там же, с.14–15.	2	

