



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



Т.А.Гермогенова

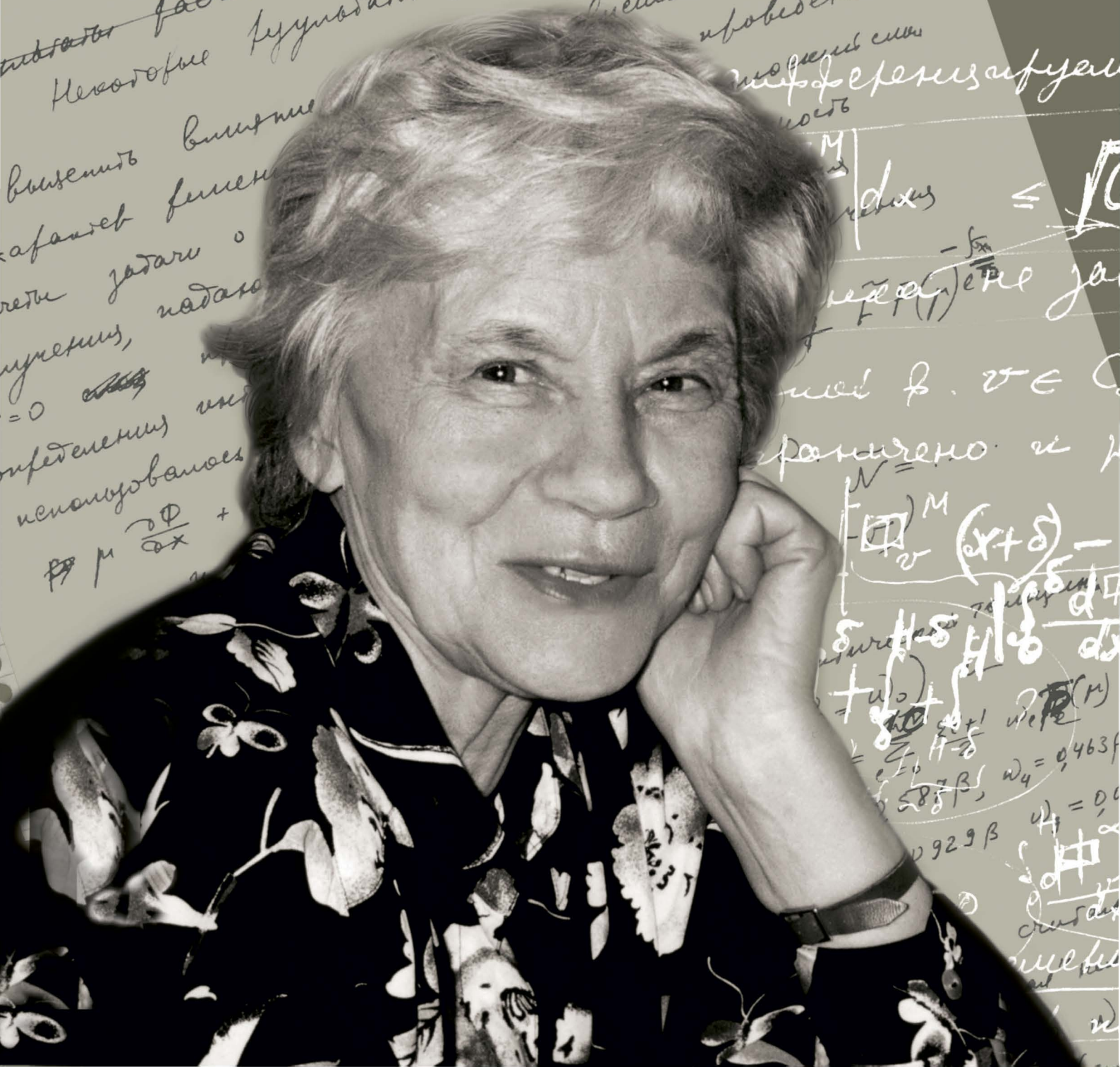
**Избранные труды.
Том 3**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Гермогенова Т.А. Избранные труды. Том 3. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2017. 260 с.
URL: <http://keldysh.ru/e-biblio/germogenova-3>

Т. А. Гермогенова

Э Избранные труды



Т. А. Гермогенова

Избранные труды

Том 3

**ИПМ им. М.В. Келдыша
Москва — 2017**

УДК 517.958
ББК 22.161
Г388

Гермогенова Т.А. **Избранные труды. Том 3** / сост. Л.П. Басс, А.М. Волощенко, О.В. Николаева. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. — 196 с.

В трехтомный сборник трудов Т.А. Гермогеновой вошли работы 1957-2002 годов.

Тематика статей третьего тома: приложения теории переноса в задачах атмосферной оптики и радиационной защиты.

Идея и материалы для обложки — Ю.Н. Днестровский

Оглавление

От составителей.....	4
<i>Т.А.Гермогенова.</i> О влиянии поляризации на распределение интенсивности рассеянного излучения	5
<i>Т.А.Гермогенова, М.С. Малкевич.</i> Спектральное распределение отраженной радиации земли в полосе поглощения озона 0,20-0,34 мкм	11
<i>Т.А.Гермогенова, Л.Д.Краснокутская.</i> Угловое и вертикальное распределение отраженной радиации земли в полосе поглощения озона 0,20-0,34 мкм	27
<i>Т.А.Гермогенова.</i> О диффузии излучения в сферической оболочке, окружающей точечный источник.....	39
<i>В.Г.Курт, Т.А.Гермогенова.</i> Рассеяние солнечного L_{α} излучения на галактическом водороде	54
<i>Т.А.Гермогенова, Э.П.Зега.</i> Решение уравнения переноса с учетом зависимости поглощательной способности вещества от плотности радиации	63
<i>Т.А.Гермогенова, Л.И.Копрова, Т.А.Сушкевич.</i> Исследование угловой, пространственной и спектральной структуры поля яркости Земли для характерной модели сферической атмосферы	73
<i>Т.А.Гермогенова, Н.В.Коновалов.</i> Спектр характеристического уравнения с учетом поляризации	90
<i>Т.А.Гермогенова, Н.В.Коновалов, М.Г.Кузьмина.</i> Основы математической теории переноса поляризованного излучения (строгие результаты).....	140
<i>Т.А.Гермогенова.</i> Discrete Transport Model Eigenfunctions.....	152
<i>О.В.Николаева, Л.П.Басс, Т.А.Гермогенова, В.С.Кузнецов.</i> Algorithms to calculation of radiative fields from localized sources via the code RADUGA-5.1(P).....	169

От составителей

В трехтомный сборник избранных трудов Т.А. Гермогеновой вошли работы 1957-2002 годов: статьи, препринты. Работы сгруппированы по следующим темам.

Том 1- Асимптотические разложения. Спектры.

Том 2 – Численные схемы. Грубосеточные приближения.

Том 3 – Прикладные задачи.

В 3-м томе рассматриваются приложения теории переноса — алгоритмы решения прикладных задач атмосферной оптики и радиационной защиты.

Последняя публикация этого тома (TTSP,v6,2007) включена по следующим причинам:

— она выпущена как продолжение опубликованных для стационарного случая работ Т.А. Гермогеновой и ее рукописей для нестационарного уравнения переноса;

— эти алгоритмы связаны с работами по биомедицине, начатыми Т.А. Гермогеновой;

— соавтор работы В.С. Кузнецов (Курчатовский институт) активно сотрудничает с сектором Т.А. Гермогеновой с 1968 г.

Созданная Т.А. Гермогеновой научная школа (сотрудники, ученики, последователи) успешно продолжает работу по решению задач теории переноса в самых разных приложениях.

25.05.2017

Л.П.Басс, А.М. Волощенко, О.В. Николаева

О ВЛИЯНИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР, СЕРИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ, НАУЧНЫЕ
СООБЩЕНИЯ № 6, 1962 г. с.854-856.

Сложность уравнения переноса, описывающего поле излучения в веществе, значительно возрастает, если принимать во внимание возможность поляризации при рассеянии. Трудности в решении задачи о распространении излучения увеличиваются в этом случае в связи с недостатком экспериментальных и теоретических данных о законе изменения поляризации в акте однократного рассеяния.

Обычно влиянием поляризации на угловое и пространственное распределение интенсивности излучения пренебрегают. Выяснение роли этого явления целесообразно начать в задачах с релеевским законом рассеяния в связи с ясностью и простотой этого закона, с одной стороны, и существованием ряда расчетов Чандрасекара для этого случая – с другой [1,2]. При оптических толщинах достаточно больших величину ошибки, допускаемой при пренебрежении поляризацией, можно оценить на основании сравнения законов диффузного отражения полубесконечной средой при релеевском рассеянии, найденных Чандрасекаром [1], с учетом и без учета поляризации.

Задача о прохождении параллельного пучка излучения через плоский слой малой оптической толщины ($0,1 \div 1$) при релеевском рассеянии с поляризацией рассматривалась Чандрасекаром и Элберт [2]. Методом последовательных приближений из интегральных уравнений для функций отражения и пропускания этими авторами численно найдена интенсивность пропущенного слоя излучения и получены значения ряда вспомогательных функций $(X, Y, \zeta, \eta, \nu, \xi, \varphi, \chi, \psi)$ [1, 2], позволяющих легко вычислить интенсивность отраженного излучения. Эта последняя была рассчитана нами для оптических толщин $\tau^* = 0,15; 0,5; 1$ и ряда углов падения θ_0 по формулам:

$$\Psi(\mu, \varphi) = \Psi_\ell(\mu, \varphi) + \Psi_r(\mu, \varphi);$$

$$\Psi_\ell(\mu, \varphi) = \frac{3}{32} \frac{\mu_0 F}{\mu_0 + \mu} \{ \Psi(\mu)[\Psi(\mu_0) + \chi(\mu_0)] + 2\Phi(\mu)[\Phi(\mu_0) + \zeta(\mu_0)] -$$

$$- \xi(\mu_0)[\xi(\mu_0) + \sigma(\mu_0)] - 2\eta(\mu)[\eta(\mu_0) + \vartheta(\mu_0)] - [X_1(\mu)X_1(\mu_0) -$$

$$- Y_1(\mu)Y_1(\mu_0)] \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sqrt{1 - \mu_0^2} \times 4\mu\mu_0 \cos \varphi - \mu^2(1 - \mu_0^2)[X_2(\mu)X_2(\mu_0) -$$

$$- Y_2(\mu)Y_2(\mu_0)] \cos 2\varphi \};$$

$$\Psi_r(\mu, \varphi) = \frac{3}{32} \frac{\mu_0 F}{\mu_0 + \mu} \{ \chi(\mu) [\chi(\mu_0) + \Psi(\mu_0)] + 2\zeta(\mu) [\Phi(\mu_0) + \zeta(\mu_0)] - \\ - \sigma(\mu) [\xi(\mu_0) + \sigma(\mu_0)] - 2\mathcal{G}(\mu) [\eta(\mu_0) + \mathcal{G}(\mu_0)] + (1 - \mu_0^2) [X_2(\mu) X_2(\mu_0) - \\ - Y_2(\mu) Y_2(\mu_0)] \cos 2\varphi \}.$$

Здесь $\mu_0 = \cos \theta_0$, $\mu = \cos \theta$, F (полный поток излучения) принимался равным $1/\pi$.

Были проведены также обширные расчеты задачи о прохождении параллельного пучка излучения через плоский слой при различных индикатрисах без учета поляризации. Интенсивность рассеянного излучения $\Psi(\theta, \varphi, \tau)$ определена из уравнения переноса

$$\cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi(\theta, \varphi, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \Psi(\theta', \varphi', \tau) \gamma(\cos \bar{\chi}) \sin \theta' d\theta' + \\ + \frac{F}{2} \gamma(\cos \chi_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \quad (1)$$

и краевых условий

$$\Psi(\theta, \varphi, 0) \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Psi(\theta, \varphi, \tau^*) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

конечно-разностным методом [3]. Точность этого метода определяется величиной шага разностной сети. При малых толщинах она может быть сделана весьма высокой. В расчетных результатах, приводимых ниже, ошибка не превышает 0,5%.

Функция $\Psi(\theta, \varphi, \tau)$ определялась при этом в 40 равноудаленных точках по τ при

$$\varphi_1 = 0^0; \varphi_2 = 90^0; \varphi_3 = 180^0; \mu_{\pm 1} = \pm 0.95309; \mu_{\pm 2} = \pm 0.76923;$$

$$\mu_{\pm 3} = \pm 0.5; \mu_{\pm 4} = \pm 0.23077; \mu_{\pm 5} = \pm 0.04691;$$

(μ_i - нули полинома Лежандра 5-го порядка $P_5(\mu)$ на интервале (0,1), $\mu = \cos \theta$).

Значения $\Psi(\theta, \varphi, \tau)$ при $\mu = \pm 1$ вычислялись по интерполяционной формуле Лагранжа, при $\mu = 0$ - из уравнения (1), которое в этом случае имеет простой вид.

На фиг. 1-4 приведены результаты расчета, отраженного (при $\tau = 0$) и пропущенного (при $\tau = \tau^*$) излучения при релеевском законе рассеяния как с

учетом (кривые II), так и без учета (кривые I) поляризации при трех оптических толщинах для $\theta_0 = 0$ и 30° (F положено равным $1/\pi$).

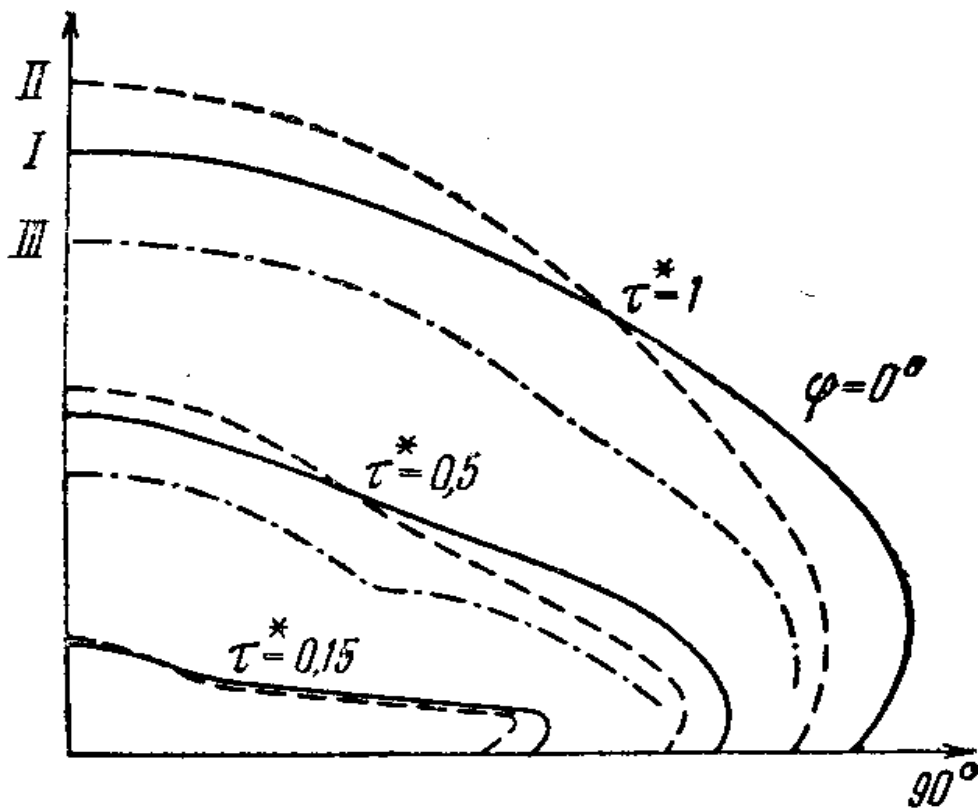
Кривые (III) соответствуют пропущенному и отраженному излучению при индикатрисе

$$\gamma(\cos \bar{\chi}) = \sum_{\ell}^5 \omega_{\ell} P_{\ell}(\cos \chi),$$

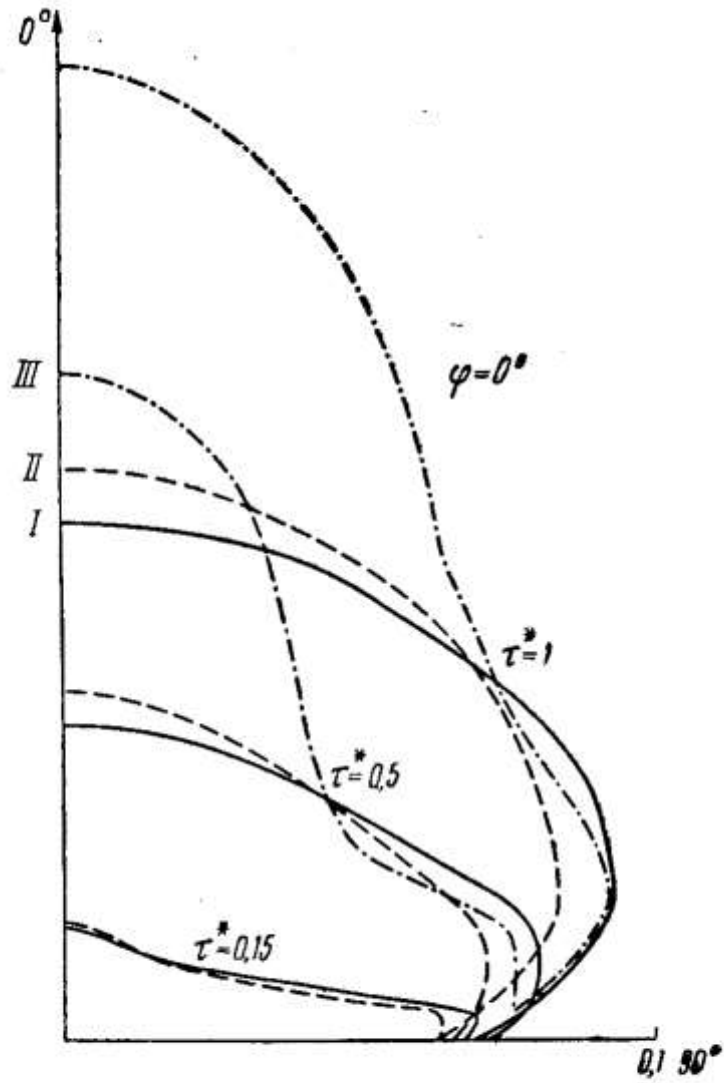
$$\omega_0 = 1; \omega_1 = 0.57789; \omega_2 = 1.0598,$$

$$\omega_3 = 0.54658, \omega_4 = 0.52169; \omega_5 = 0.32928,$$

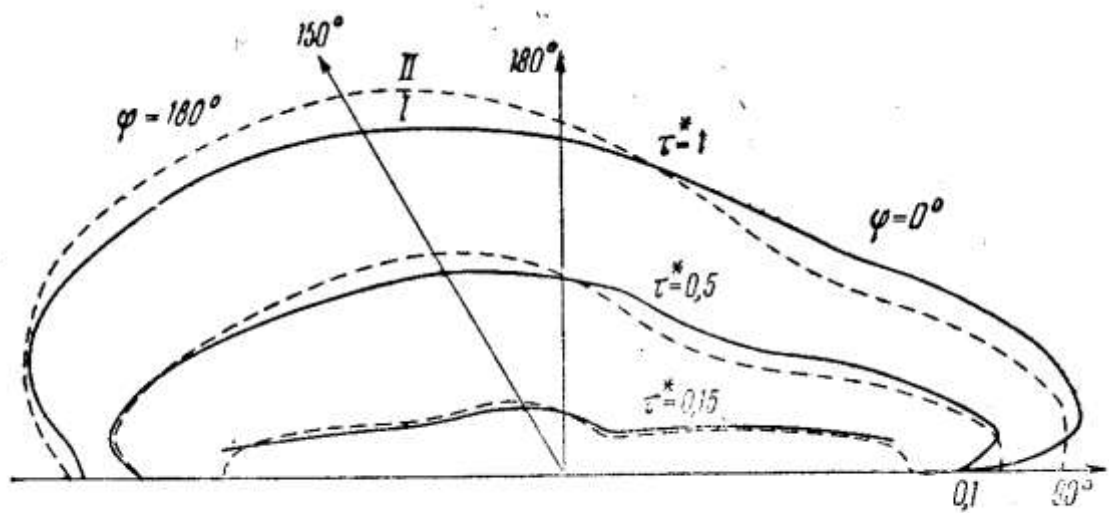
весьма близкой к средней индикатрисе для земной атмосферы, приведенной в [4].



Фиг.1. Интенсивность отраженного излучения при $\theta_0 = 0^\circ$



Фиг.2. Интенсивность пропущенного излучения при $\theta_0 = 0^\circ$



Фиг.3. Интенсивность отраженного излучения при $\theta_0 = 30^\circ$

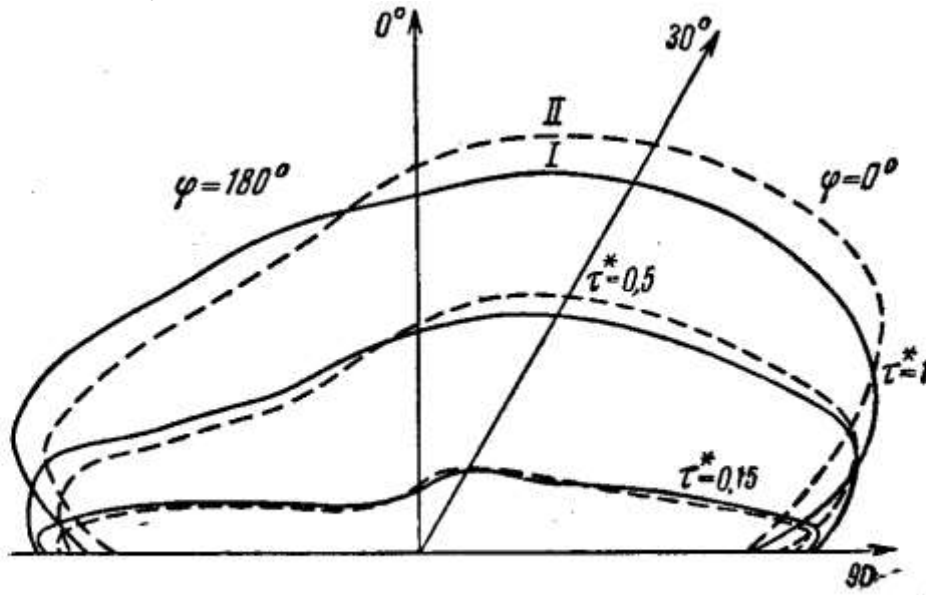
В таблице приведены значения интегралов для плотности и потока рассеянного излучения

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Psi(\theta, \varphi, \tau) \sin \theta d\theta,$$

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Psi(\theta, \varphi, \tau) \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

полученные без учета (1) и с учетом поляризации (2) при $\tau = 0$ и $\tau = \tau^*$, $\theta_0 = 0^\circ$.

Сравнение полученных результатов показывает, что погрешность в расчетах, вызываемая пренебрежением поляризацией, возрастает (до $\sim 10\%$) с ростом оптической толщины слоя от 0 до 1 для отдельных направлений. В интегральных характеристиках – плотности и потоке радиации – эта погрешность значительно меньше. Сильная вытянутость индикатрисы гораздо сильнее сказывается на результатах расчета, особенно для пропущенного излучения.



Фиг.4. Интенсивность пропущенного излучения при $\theta_0 = 30^\circ$

Интересно отметить, что учет поляризации приводит к некоторому увеличению интенсивности рассеянного излучения в направлениях, близких к θ_0 («вперед») и к $\pi + \theta_0$ («назад»).

Выводы о малости поляризационных поправок при релеевском рассеянии, разумеется, не могут быть непосредственно распространены на задачи с сильно неизотропным рассеянием или поглощением.

$$\theta_0 = 0$$

Пропущенное излучение

τ^*	$B_1(\tau^*)$	$B_2(\tau^*)$	$F_1(\tau^*)$	$F_2(\tau^*)$
0.15	0.029885	0.028831	0.011039	0.010966
0.5	0.066714	0.064181	0.030450	0.030598
1.0	0.091981	0.088340	0.046422	0.046367

Отраженное излучение

τ^*	$B_1(0)$	$B_2(0)$	$F_1(0)$	$F_2(0)$
0.15	0.030548	0.029609	0.011138	0.011122
0.5	0.073322	0.070595	0.032172	0.032149
1.0	0.11421	0.10959	0.054178	0.053850

Академия наук СССР
 Математический
 институт им.
 В.А.Стеклова

Поступила
 24.11.1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. ИЛ, М., 1953
2. Shandrasekhar S., Elbert D.D. Trans, Amer. Phil., New, Ser., 44, 6, 1954.
3. Гермогенова Т.А. О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. Ж. вычислит. математики и математич. физики, 1, №6, 1961.
4. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. Гостехиздат. М., 1956.

УДК 551.521.14
СПЕКТРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ РАДИАЦИИ ЗЕМЛИ
В ПОЛОСЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ОЗОНА 0,20-0,34 мкм

Т.А.Гермогенова, М.С.Малкевич

Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, т.1, №9, 1965 г.,
с. 941-951.

Проведены результаты расчетов спектрального распределения отраженной от Земли УФ-радиации в полосе поглощения озона 0,2-0,34 мкм в предположении, что атмосфера рассеивает по Релею. Рассмотрен также случай аэрозольного рассеяния в слое, моделирующем серебристое облако.

Солнечная радиация в ультрафиолетовой области спектра 0,20-0,30 мкм сильно поглощается озоном, содержащимся в слое атмосферы 10-50 км, и практически не достигает земной поверхности. Вместе с тем ультрафиолетовая радиация сильно рассеивается молекулами воздуха и аэрозолями даже в разреженной атмосфере, лежащей выше слоя озона. Поэтому можно ожидать, что некоторая доля солнечной энергии в этой области спектра отражается земной атмосферой в мировое пространство, не достигнув тех уровней, где концентрация озона высока. Однако до последнего времени вопрос о том, какова эта энергия, не говоря уже о ее спектральном, угловом, вертикальном и пространственном распределении, в геофизике не рассматривался. Это объяснялось отсутствием возможностей радиационных измерений на больших высотах. По этой же причине, а также в связи с большими трудностями вычислительного характера не проводились и расчеты рассеянной УФ-радиации в области поглощения озона.

Использование ракет и спутников для зондирования атмосферы выше слоя озона расширило возможности исследования радиационного поля Земли, в том числе и в этом спектральном диапазоне. В последнее время появились сообщения о фотометрических и спектроскопических измерениях радиации на ракетах в слое атмосферы 40-75 км в спектральном интервале 0,18-0,35 мкм [1,2] и в отдельных его участках: 0,22 и 0,26 мкм [3]. Недавно были опубликованы результаты измерения отраженной Землей радиации в интервале спектра, центрированном при $\lambda=0,255$ мкм, полученные при помощи спутника ВВС США (4) (полуширина кривой пропускания фотометра равнялась 140 Å). В работе [4] приводятся также некоторые результаты расчетов интенсивности отраженной радиации в полосе озона. Эти единичные данные измерений и расчетов свидетельствуют о значительных вариациях интенсивности отраженной радиации, обусловленных, по-видимому, различиями вертикальных распределений озона, осуществляющихся в момент измерений или использованных в расчетах. Не исключена возможность, что различия расчетных данных связаны с разными методами вычислений. К сожалению в цитируемых

работах не приводятся сведения о вертикальных профилях озона и отсутствуют указания по методике расчетов.

Исключением является работа [5], в которой приведены интенсивности в интервале 0,20-0,32 мкм, рассеянной релеевской атмосферой в мировое пространство, вычисленные при разных положениях Солнца и направлениях наблюдения для некоторых вертикальных распределений концентрации озона. Автор [5] ограничился учетом лишь однократного рассеяния, причем все физические параметры (вертикальные распределения концентрации озона и плотности воздуха, зависимости коэффициентов поглощения и рассеяния, а также солнечного излучения от длины волны) аппроксимировались аналитическими выражениями. Это позволило выразить интенсивность уходящей радиации в аналитическом виде. Никаких соображений о вкладе многократного рассеяния в уходящую радиацию в работе [5] не приводится. Между тем учет рассеяния высоких порядков существен, особенно на крыльях полосы поглощения озона и при больших оптических путях прохождения радиации. Кроме того, при этих условиях заметную роль может играть рассеяние радиации на аэрозолях в высоких слоях атмосферы (метеорные следы, космическая пыль, серебристые облака). Нельзя, вероятно, игнорировать при таких расчетах также явление люминесценции, которое обеспечивает переизлучение солнечной энергии, поглощаемой в полосах Шумана-Рунге (1750-2000 Å), в виде эмиссии дневного неба в области 1750-4500 Å. Как показано в [6], выше 80 км эта эмиссия превосходит релеевское рассеяние. Учет всех этих факторов вполне осуществим при расчетах рассеянной радиации на быстродействующих вычислительных машинах.

В настоящей работе содержатся результаты расчетов характеристик спектрального состава отраженной радиации Земли в интервале спектра 0,20-0,34 мкм для релеевской атмосферы при разных положениях Солнца и направлениях наблюдения. Рассмотрен также случай, когда на некотором уровне в верхней атмосфере содержится аэрозольный слой (модель серебристого облака). Проведено сравнение интенсивностей однократно и многократно рассеянной радиации для распределения озона, использованного в [5].

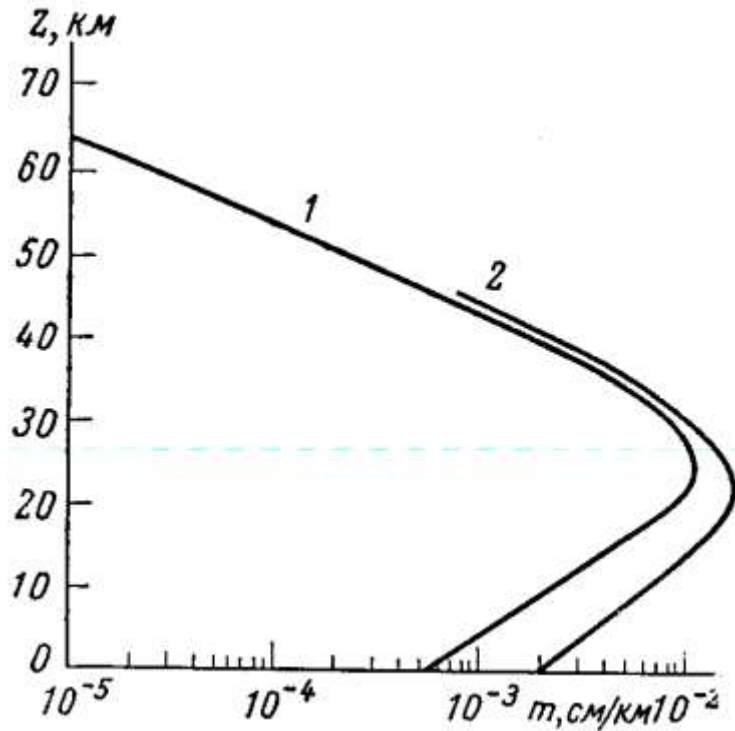


Рис. 1. Примеры вертикальных распределений озона. 1 – ракетные данные [7], использованные в настоящей статье; 2 – стандартное распределение, использованное в работе [5].

Метод расчета

Существенной особенностью переноса радиации в атмосфере для рассматриваемой области спектра является сильное изменение поглощения озона в зависимости как от длины волны λ , так и от высоты z . Последнее связано со сложным вертикальным профилем концентрации озона $m(z)$ (рис. 1). Кроме того, в этом участке спектра атмосфера обладает сильным молекулярным рассеянием, а на крыле полосы озона ($\lambda > 0,3$ мкм) следует учитывать и аэрозольное рассеяние. Два основных параметра, определяющих поле радиации, - оптическая толщина слоя атмосферы $(0, z)$

$$\tau_{\lambda}(z) = \int_0^z [k_{\lambda}(t) + \sigma_{\lambda}(t)] dt \quad (1)$$

и параметр

$$\beta_{\lambda}(z) = \frac{\sigma_{\lambda}(z)}{\sigma(z) + k_{\lambda}(z)} \quad (2)$$

($\sigma_{\lambda}, k_{\lambda}$ - объемные коэффициенты рассеяния и поглощения) имеют довольно сложную вертикальную структуру (рис. 2), что весьма затрудняет расчеты. В области сильного поглощения (большие τ_{λ} , которые могут достигать 150) эффективно отражающий слой атмосферы оптически тонок, поскольку параметр β_{λ} только в тонком слое заметно отличается от нуля. При

уменьшении поглощения этот слой расширяется, и на крыльях полосы (в области чистого рассеяния) поле радиации формируется всей атмосферой.

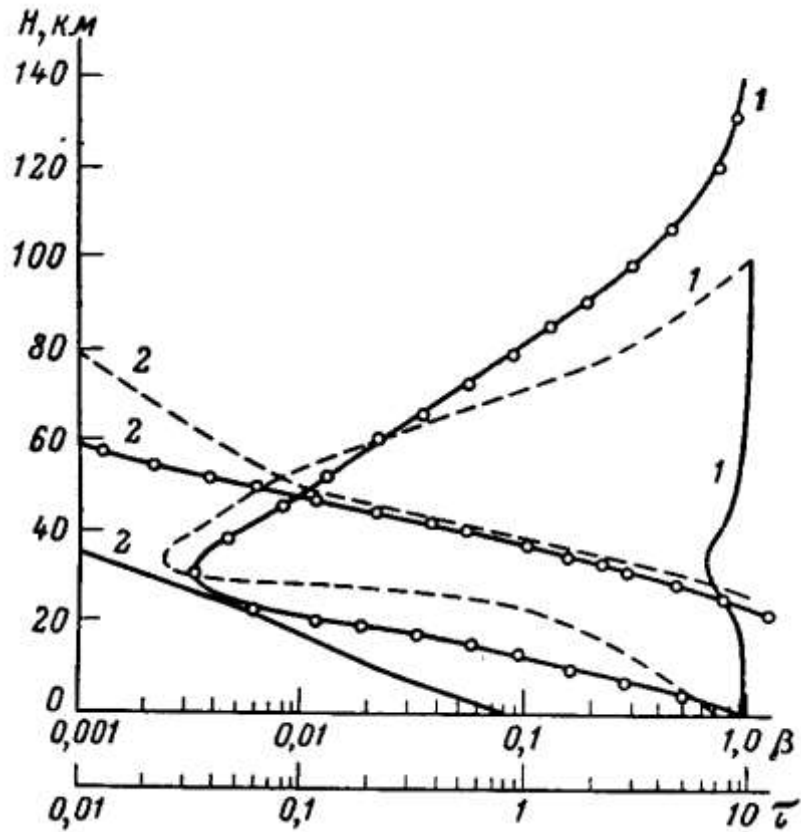


Рис. 2. Вертикальное распределение $\tau_\lambda(z)$ и $\beta_\lambda(z)$ для $\lambda=0.28$ (пунктирные линии) и 0.34 мкм (сплошные кривые); профиль $m(z)$ взят по [7]; кривые, отмеченные кружками, τ_λ и β_λ - по [5] для стандартного профиля O_3 . 1 - $\beta_\lambda(z)$; 2 - $\tau_\lambda(z)$

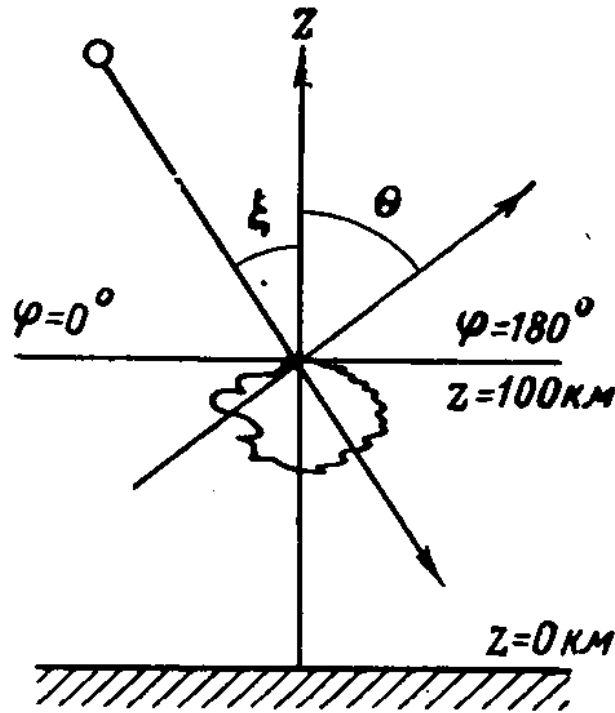


Рис. 3. Схема распространения солнечной радиации в плоскопараллельном слое атмосферы

Если ограничиться плоскопараллельной моделью атмосферы, что возможно при не слишком больших зенитных расстояниях Солнца ζ и углах наблюдения θ (рис. 3), то интенсивность монохроматического излучения $\Psi_\lambda(\tau, \mu, \varphi)$ для данной длины волны на оптической глубине τ в направлении, определяемом углом $\theta = \arccos \mu$ с осью τ и азимутом φ , может быть определена из уравнения переноса (индекс λ в дальнейшем опускаем)

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \Psi(\tau, \mu, \varphi) - \beta(\tau) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} \gamma(\tau, \cos \chi) \Psi(\tau, \mu', \varphi') d\mu' = S_0(\tau, \mu, \varphi) \quad (3)$$

и краевых условий

$$\Psi(0, \mu, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^0 R(\cos \chi) \Psi(\theta, \mu', \varphi') d\mu' + f_0(\mu, \varphi) \quad (\mu > 0), \quad (4)$$

$$\Psi(\tau^*, \mu, \varphi) = f_1(\mu, \varphi) \quad (\cos \chi = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')). \quad (5)$$

Здесь $\mu < 0$, $\gamma(\tau, \cos \chi)$ - индикатриса рассеяния. Функция $R(\cos \chi)$ определяет вероятность отражения излучения от подстилающей поверхности; τ^* - оптическая толщина всего слоя атмосферы; f_0 и f_1 - падающее на границы атмосферы излучение; $S_0(\tau, \mu, \varphi)$ - внутренние источники излучения в атмосфере, возникающие, например, за счет люминесценции.

Когда на верхнюю границу атмосферы падает параллельный пучок солнечного излучения, т.е.

$$f_1(\mu, \varphi) = F\delta(\mu + \mu_0)\delta(\varphi) \quad (\mu_0 = \arccos \zeta > 0), \quad (6)$$

интенсивность излучения имеет вид суммы

$$\Psi(\tau, \mu, \varphi) = F\delta(\mu + \mu_0)\delta(\varphi)e^{-(\tau^* - \tau)/\mu_0} + \Phi(\tau, \mu, \varphi), \quad (7)$$

где первое слагаемое отвечает прямому солнечному излучению, второе – рассеянному; δ - дельта-функция. Функция $\Phi(\tau, \mu, \varphi)$ может быть определена также из уравнения (3), где в качестве свободного члена должна быть взята сумма

$$S_0(\tau, \mu, \varphi) + F\beta(\tau)\gamma(\tau, \cos \chi_0)e^{-(\tau^* - \tau)/\mu_0},$$

$$\cos \chi_0 = \mu\mu_0 + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu_0^2}\cos \varphi$$

(азимут φ отсчитывают от вектора Солнца $\varphi_0 = 0$).

Краевые условия для $\Phi(\tau, \mu, \varphi)$ имеют вид

$$\Phi(0, \mu, \varphi) = f_0(\mu, \varphi) + FR(\cos \chi_0)e^{-\tau/\mu_0} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^0 R(\cos \chi)\Phi(0, \mu', \varphi')d\mu'$$

$$(\mu > 0), \quad \Phi(\tau^*, \mu, \varphi) = 0 \quad (\mu < 0).$$

Для приближенного отыскания функции $\Phi(\tau, \mu, \varphi)$ был использован численный метод [8]. Предположим, что функции $\gamma(\cos \chi)$ и $R(\cos \chi)$ могут быть с достаточной степенью точности представлены конечными суммами полиномов Лежандра

$$\gamma(\cos \chi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N \omega_n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \chi),$$

$$R(\cos \chi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N \eta_n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \chi),$$

а функции $S_0(\tau, \mu, \varphi)$, $f_0(\mu, \varphi)$ - конечными тригонометрическими суммами ($M \leq N$)

$$S_0(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^M S_0^{(m)}(\tau, \mu) \cos m\varphi,$$

$$f_0(\mu, \varphi) = \sum_{m=0}^M f_0^{(m)}(\mu) \cos m\varphi.$$

Тогда, полагая $S_0(\tau, \mu, \varphi) \equiv 0$ и

$$\Phi(\tau, \mu, \varphi) = \frac{1}{2}\Phi_0(\tau, \mu) + \sum_{m=1}^M \Phi_m(\tau, \mu) \cos m\varphi, \quad (8)$$

для каждой функции Φ_m будет иметь краевую задачу

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Phi_m(\tau, \mu) = \beta(\tau) \int_{-1}^{+1} \gamma(\tau, \mu, \mu') \Phi_m(\tau, \mu') d\mu' + F \beta(\tau) \gamma_m(\mu, \mu_0) e^{-(\tau^* - \tau)/\mu_0}, \quad (9)$$

$$\Phi_m(0, \mu) = \int_1^0 R_m(0, \mu') \Phi_m(0, \mu') d\mu' + \tilde{f}_0^{(m)} \quad (\mu > 0),$$

$$\Phi_m(\tau^*, \mu) = 0 \quad (\mu < 0). \quad (10)$$

Здесь

$$\tilde{f}_0^{(n)} = f_0^{(m)} + FR_m e^{-\tau^*/\mu_0}.$$

Требую выполнения уравнения (9) и условий (10) в $2N$ точках $\mu_1, \dots, \mu_N, \dots, \mu_{-1}, \dots, \mu_{-N}$ ($\mu_i > 0$, $\mu_{-i} = -\mu_i$) и интегрируя (9) на каждом интервале $(\tau_\ell, \tau_{\ell+1})$ разностной сетки $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_L < \tau^*$, получаем систему конечно-разностных уравнений для величин $\Phi(\mu_i, \tau_\ell)$. На каждом интервале $(\tau_\ell, \tau_{\ell+1})$ задается свое значение $\beta(\tau) = \beta_\ell$. Чтобы передать зависимость индикатрисы $\gamma(\cos \chi)$ от высоты, атмосфера делится на несколько слоев, в каждом из которых независимо задаются коэффициенты разложения индикатрисы или значения ее в точках $\mu_{\pm i}$.

В основу решения системы (9) положено одно из соотношений принципа инвариантности

$$\Phi_\ell^+ = \bar{S}_\ell \Phi_\ell^- + T_\ell, \quad \Phi_\ell^+ = \{\Phi(\tau_\ell, \mu_1), \dots, \Phi(\tau_\ell, \mu_N)\},$$

$$\Phi_\ell^- = \{\Phi(\tau_\ell, \mu_{-1}), \dots, \Phi(\tau_\ell, \mu_{-N})\},$$

где \bar{S}_ℓ - матрица отражения слоем $(0, \tau_\ell)$; T_ℓ - коэффициент пропускания слоя $(0, \tau_\ell)$. Определив значение $\bar{S}_\ell T_\ell$ из условия (10), можно найти \bar{S}_ℓ и T_ℓ последовательно для $\ell = 1, 2, \dots$ и затем Φ^+ и Φ^- от $\ell = L$ до $\ell = 0$. Программа, осуществляющая этот расчет на ЭВМ, позволяет вычислять также ряд интегралов от решения типа

$$\int_{-1}^{+1} \mu^k \Phi_m(\tau, \mu) d\mu \quad (k = 0, 1, 2).$$

Значения N и L ограничены условиями $N \leq 27$, $L \leq 150$, $NL \leq 900$.

Модели атмосферы, выбранные для расчетов

Основные расчеты были проведены для модели атмосферы, плотность которой изменяется с высотой по показательному закону $\rho = \rho_0 e^{-\alpha z}$ ($\alpha = 0,125 \text{ км}^{-1}$) и в которой происходят релеевское

рассеяние радиации на молекулах воздуха и поглощение молекулами озона. Вертикальное распределение концентрации озона было взято из данных ракетных измерений [7] до уровня 70 км. Это распределение, экстраполированное до высоты 100 км, приведено на рис. 1. Здесь же изображено стандартное распределение озона, которое использовалось в расчетах интенсивности однократно рассеянной радиации Грином [5] и для которого нами получено также вертикальное и угловое распределения многократно рассеянной радиации в трех участках спектра: $\lambda = 0,25, 0,28, 0,32$ мкм

Релеевская индикатриса рассеяния бралась в виде

$$\gamma(\cos \chi) = \frac{3}{4\pi}(1 + \cos^2 \chi).$$

Предполагалось, что излучением и отражением подстилающей поверхности в рассматриваемом интервале спектра можно пренебречь, т.е. $R(\cos \chi) = f_0(\mu, \varphi) = 0$, и что внутри атмосферы отсутствуют внутренние источники излучения ($S_0 = 0$). Постоянная F в формуле (7) полагалась равной 2π . Значения оптической толщины $\tau_\lambda(z)$ и параметра $\beta_\lambda(z)$ для каждой длины волны рассчитывались по кривым $m(z)$, отвечающим принятым распределениям озона (рис. 2).

В качестве точек μ_i брались узлы гауссовой квадратурной формулы при $N=9$ на каждом из интервалов $\mu(-1,0)$ и $(0,1)$, а точки τ_i разностной сетки по τ выбирались таким образом, чтобы зависимость $\beta_\lambda(z)$ передавалась наилучшим образом при ограничении $NL \leq 900$. Непосредственно рассчитывались относительные величины интенсивности восходящей $\Phi_m^+(\tau, \mu, \varphi, \zeta)$ и нисходящей $\Phi_m^-(\tau, \mu, \varphi, \zeta)$ радиаций в отдельных узловых точках τ для десяти направлений $\theta = 10, 23, 36, 48, 60, 70, 80, 85, 89$ и 90° , при четырех значениях $\zeta = 0, 30, 60, 80^\circ$ для избранных длин волн с шагом $\Delta\lambda = 0,01$ мкм. Абсолютные величины интенсивности радиации получались путем умножения на солнечную постоянную $S_\lambda : I_\lambda^+ = S_\lambda \Phi^+$ и $I_\lambda^- = S_\lambda \Phi^-$. Зависимость интенсивности от азимута φ , отсчитываемого от вертикала Солнца ($\varphi = 0$), определялась с помощью формулы (8).

Спектральное распределение уходящей радиации

Результаты расчетов спектрального и углового хода интенсивности радиации, отраженной Землей в мировое пространство, позволяют оценить порядок величин лучистой энергии в рассматриваемом интервале спектра, что существенно при конструировании соответствующей измерительной аппаратуры. Расчеты же для разных моделей атмосферы дают представление о возможных вариациях этой энергии по земному шару.

Примеры спектрального распределения интенсивности уходящей радиации I_{λ}^{+} (в дальнейшем знак плюс опускаем) для случая $\zeta=0^{\circ}$, $\theta=10^{\circ}$, полученные в настоящей работе, представлены на рис. 4. Здесь же приведены результаты аналогичных расчетов других авторов, а также экспериментальные данные, полученные при помощи ракет и спутника [4]. Интересно, что вычисленная нами интенсивность радиации I_{λ} лежит между соответствующими кривыми Чепмэна и Грина. В работе [4] различия между двумя последними кривыми объясняются тем, что расчет Чепмэна был проведен для распределения $m(z)$, убывающего выше уровня 25 км быстрее, нежели $m(z)$ в стандартном распределении O_3 , которым пользовался Грин [5]. Это влечет за собой более медленное убывание параметра β_{λ} с высотой, что обеспечивает увеличение эффективной толщины слоя атмосферы, рассеивающего солнечную УФ-радиацию назад, а следовательно, и рост интенсивности уходящей радиации.

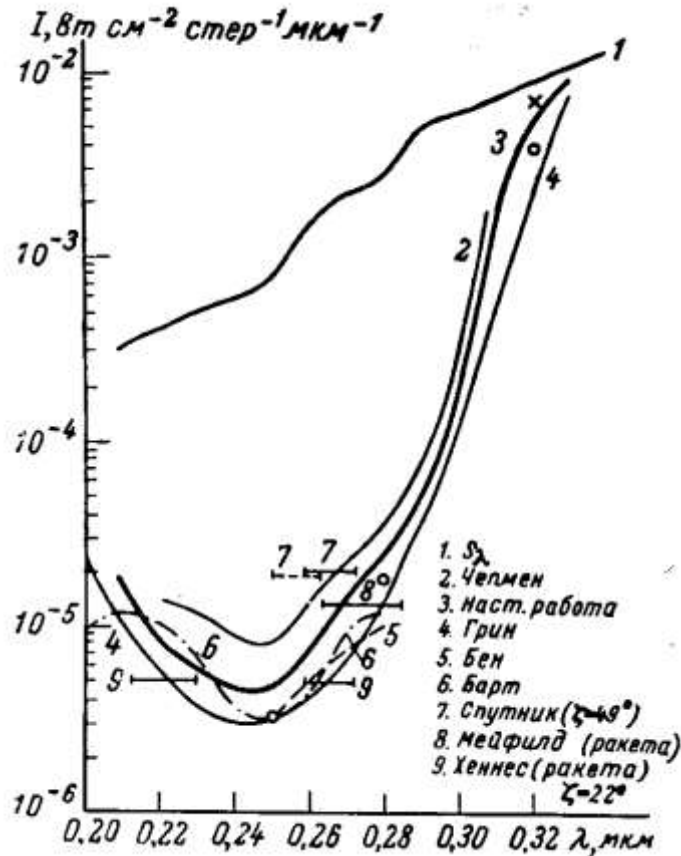


Рис. 4. Результаты расчетов спектрального распределения интенсивности радиации, отраженной в диапазоне спектра 0,20-0,35 μm , и данные ракетных и спутниковых измерений в отдельных участках спектра. Точки означают интенсивности по расчетам для стандартной модели $m(z)$ из [5] с учетом многократного рассеяния; крестиком указано значение, полученное для S_{λ} , аппроксимированной по [5]

Как видно из рис.2, на котором изображены вертикальные распределения параметров $\tau_\lambda, \beta_\lambda$ для моделей атмосферы, использованных в настоящей работе и в работе [5], той же причиной можно частично объяснить завышенные по сравнению с данными Грина наши значения I_λ [7]. Рис. 2 показывает, что в области сильного поглощения функции β_λ различаются для обеих моделей атмосферы в оптически тонком слое атмосферы, лежащем выше 70-80 км ($\tau < 0,05$ даже для $\lambda = 0,28$ мкм,) причем только в этом слое β_λ практически отлично от нуля. По этой причине различия I_λ^+ в области сильного поглощения обусловлены только поведением функции $\beta_\lambda(z)$ на больших высотах. Так как концентрация озона выше 50 км плохо изучена, то упомянутые различия в значительной степени могут быть обусловлены различными экстраполяциями $m(z)$ на большие высоты. Другой вероятной причиной заниженных значений I_λ в [5] является пренебрежение многократным рассеянием, вклад которого в уходящую радиацию возрастает с уменьшением поглощения. Специальный расчет I_λ для модели Грина показал, что при $\lambda = 0,25$ мкм многократное рассеяние вносит действительно пренебрежимый вклад. Однако уже для $\lambda = 0,28$ мкм этот вклад заметен и для $\lambda = 0,32$ мкм достигает 10% от однократного рассеяния (рис. 4, точки).

Отсутствие сведений о методах расчетов I_λ Чепмэна и других авторов [4] не позволяет провести аналогичные сравнения. Сопоставление всех расчетных кривых на рис. 4 показывает, что величины интенсивности уходящей радиации в минимуме различаются в 3-4 раза, а с учетом всех результатов [5] - на порядок величины ($1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$ вт см⁻²стер⁻¹ мкм⁻¹). При этом оказывается, что все расчетные величины I_λ занижены по сравнению с единственной величиной интенсивности уходящей радиации, измеренной при помощи спутника при $\zeta = 49^\circ$ [4]*.

Возможная причина этого несоответствия, на первый взгляд, в дополнительном излучении за счет люминесценции [6], энергия которой превосходит релеевское рассеяние выше 80 км. Это как будто подтверждается и данными ракетных измерений I_λ до высоты 75 км, которые хорошо совпадают с расчетными данными Грина (рис. 4). Однако, как показывают оценки излучения за счет люминесценции [6], оно не превышает величины $10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$ вт см⁻²стер⁻¹ мкм⁻¹, что в несколько раз

* Следует указать, что эта величина, изображенная на рис. 4 в виде отрезка прямой 7, длина которого должна характеризовать длину интервала спектральной чувствительности прибора, не соответствует указанной в [4] длине $\Delta\lambda = 140 \text{ \AA}$ и положению центра 0,255 мкм (истинное положение этой величины изображено на рис. 4 пунктирным отрезком).

меньше разности между вычисленными и измеренными со спутника интенсивностями уходящей радиации для $\lambda=0,25$ мкм . Вместе с тем необходимо отметить, что указанная оценка энергии люминесценции в [6] осреднена по всему интервалу 0,2-0,3 мкм, и нет никаких сведений о ее спектральном распределении. Этот вопрос требует специального рассмотрения с учетом механизма флуоресценции атмосферы под воздействием поглощения УФ-радиации в полосах Шумана-Рунге, тем более, что достоверность расчетов [6] невелика и они могут быть отягощены большими ошибками.

В работах [4,5] приводятся также некоторые результаты измерений I_λ на ракетах (см. рис. 4), однако сведений о методике и о вертикальном распределении озона в период наблюдений в этих работах нет.

Поэтому кроме указанной выше причины в различиях величин I_λ , полученных на ракетах и спутнике, заметную роль могут играть различия вертикальных распределений озона (данные ракетных измерений в одном и том же интервале спектра различаются между собой, см., например, рис.4).

Как указывалось, одной из возможных причин занижения результатов расчета и ракетных измерений I_λ по сравнению с данными спутников является аэрозольное рассеяние солнечной радиации, в том числе в слое, дислоцирующемся по существующим в настоящее время представлениям на уровнях 80-100 км . Этот слой не достигался при ракетных измерениях, а аэрозольное рассеяние не учитывалось в упомянутых выше расчетах, за исключением, быть может, расчетов Чепмэна. Трудности учета аэрозольного рассеяния на этих высотах связаны с отсутствием достоверных сведений об оптических свойствах аэрозоля. Ниже приведем пример расчета при наличии некоторого достаточно плотного аэрозольного слоя на больших высотах. Как и следовало ожидать исходя из спектрального хода коэффициента поглощения озона и коэффициента рассеяния атмосферы, минимум интенсивности радиации, рассеиваемой земной атмосферой в мировое пространство, приходится на $\lambda=0,25$ мкм. Значения этой минимальной энергии I_λ при $\zeta = 0^0$, $\theta \approx 0^0$ по расчетам разных авторов приведены в таблице. Здесь же приведены минимальные величины коэффициента яркости

$$r_\lambda(\theta, \zeta) = \frac{I_\lambda(\theta, \zeta)}{S_\lambda \cos \zeta}, \quad (11)$$

$$S_\lambda = 0,71 \cdot 10^{-3} \text{ вт см}^{-2} \text{ стер}^{-1} \text{ мкм}^{-1}.$$

Спектральные распределения абсолютных величин интенсивности уходящей радиации при различных углах θ в вертикале Солнца ($\varphi = 0^0$) иллюстрируются рис. 5.

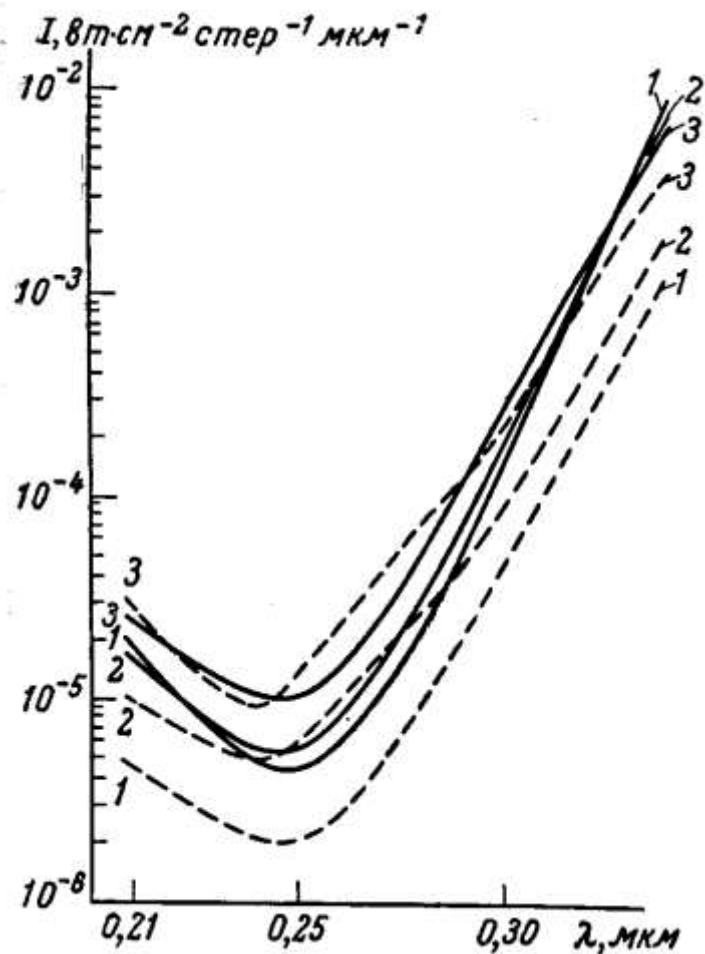


Рис. 5. Зависимость спектрального распределения отраженной радиации для разных θ и ζ (сплошные кривые $\zeta = 0^\circ$, пунктирные $\zeta = 80^\circ$; 1 - $\theta = 10^\circ$; 2 - $\theta = 60^\circ$; 3 - $\theta = 80^\circ$)

Видно, что в области сильного поглощения I_λ с увеличением угла θ возрастает, особенно при больших ζ . Между тем при слабом поглощении I_λ не зависят от θ , если ζ мало. Это противоречит результатам Грина [5], в соответствии с которыми ход I_λ по θ не зависит от ζ . Указанное противоречие объясняется тем, что приближения, которые используются в [5] при расчете однократного рассеяния, заведомо неприменимы на крыльях полосы поглощения озона.

Литература	Тип профиля $m(z)$	$I_\lambda 10^6$ вт см ⁻² стер. ⁻¹ мкм ⁻¹	$\tau, \%$
Грин [5]	Стандартный	2	0,42
" "	Максимальные	1	0,14
Чепмэн [4]	-	7,5	1,1
Бен [4]	-	3	0,4
Барт [4]	-	3	0,4
Биберман [5]	-	3	0,4
Настоящая работа	Джонсон	4.5	0,6
Измерения со	-	20	2,8
спутников ($\zeta = 49^\circ$)	-		
Ракетные	-	5	0,7
измерения [4],	-	10	1.4
$\zeta = 22^\circ, \lambda = 0,26$ мкм	-		
$\lambda = 0,27$ мкм [5]	-		

Кроме интенсивности радиации, наши расчеты позволяли непосредственно определить также альbedo Земли в этой полосе (спектральный ход альbedo приведен на рис. 6).

Учет аэрозольного рассеяния

Как было отмечено выше, заниженные по сравнению с экспериментальными данными значения расчетных величин I_λ частично могут объясняться учетом лишь молекулярного рассеяния УФ-радиации. Заметный вклад в отражение землей этой радиации может внести рассеяние на аэрозолях,

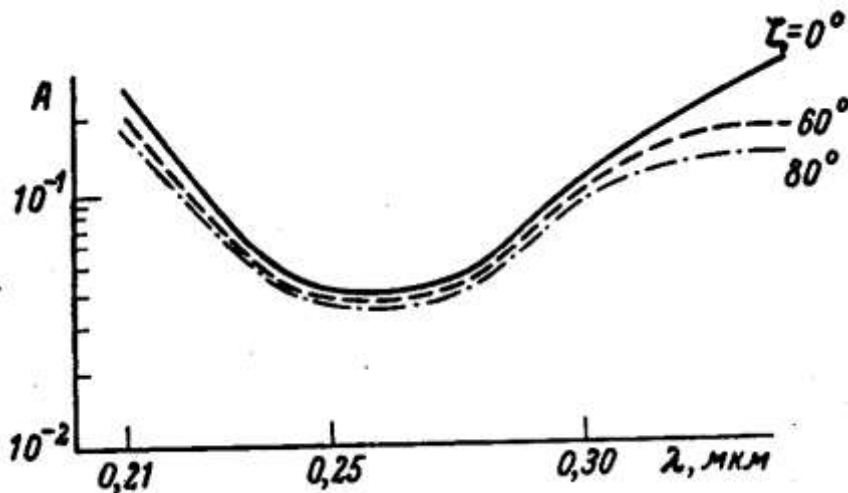


Рис. 6. Спектральный ход альbedo Земли в полосе поглощения озона при разных ζ (альbedo подстилающей поверхности принято равным нулю)

причем для области слабого поглощения необходимо учитывать аэрозольное рассеяние в нижних слоях атмосферы, а для области сильного поглощения – в высоких слоях. К сожалению, распределение аэрозоля по высоте и по размерам частиц, а также его оптические свойства еще мало изучены даже в приземном слое воздуха. Поэтому можно привести лишь модельные оценки аэрозольного рассеяния УФ-радиации, например, на таких уплотнениях аэрозоля в высоких слоях атмосферы, как серебристые облака или метеорные следы, время от времени появляющиеся на высотах порядка 80 км. Известно, что эти аэрозольные слои обладают заметной оптической толщиной, значительно превосходящей оптическую толщину молекулярного слоя того же геометрического размера.

Учитывая, что аэрозольная индикатриса рассеяния сильно вытянута в области малых углов рассеяния, можно ожидать, что при определенных взаимных расположениях Солнца и наблюдателя интенсивность радиации, рассеянной аэрозольным слоем в мировое пространство, будет заметно превосходить интенсивность молекулярного рассеяния. Иными словами, на весьма слабом фоне, который определяется рассеянием молекулами атмосферы в центральной части полосы, например, при $\lambda = 0,25$ мкм, можно будет в дневных условиях обнаружить светящиеся аэрозольные слои типа серебристых облаков, если провести измерения уходящей радиации под разными углами θ (эта идея была выдвинута А.М.Касаткиным). Для проверки этого предположения были проведены расчеты для случая, когда между 75 и 80 км содержится аэрозольный слой (серебристые облака). О размерах частиц и их концентраций в серебристых облаках достоверных данных нет. Размеры частиц a , полученных косвенным образом [9], имеют порядок 1 мкм, концентрация $N_0 = 10^6$ см⁻³. Непосредственные взятия проб путем ракетных зондирований серебристых облаков [10] обнаружили, что $a \approx 0,1$ мкм, а $N_0 = 4 \cdot 30 \cdot 10^4$ см⁻³. Для расчетов использовались данные работы [10], что соответствует полной оптической толщине, равной 0,005 (молекулярная оптическая толщина на порядок меньше). Параметр β_λ в этом слое был взят равным единице. Индикатриса рассеяния, соответствующая значению параметра $2\pi a / \lambda \approx 2,5$ ($\lambda = 0,25$ мкм), была заимствована из таблиц [11] в виде разложения по десяти полиномам Лежандра. Величины ω_n приведены ниже

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_n	0,842	0,703	0,587	0,463	0,338	0,227	0,146	0,093	0,040	0,018

Сравнение углового хода по θ интенсивностей Φ_λ^+ , вычисленных для релеевского и аэрозольного рассеяния при разных ζ и λ дано на рис. 7.

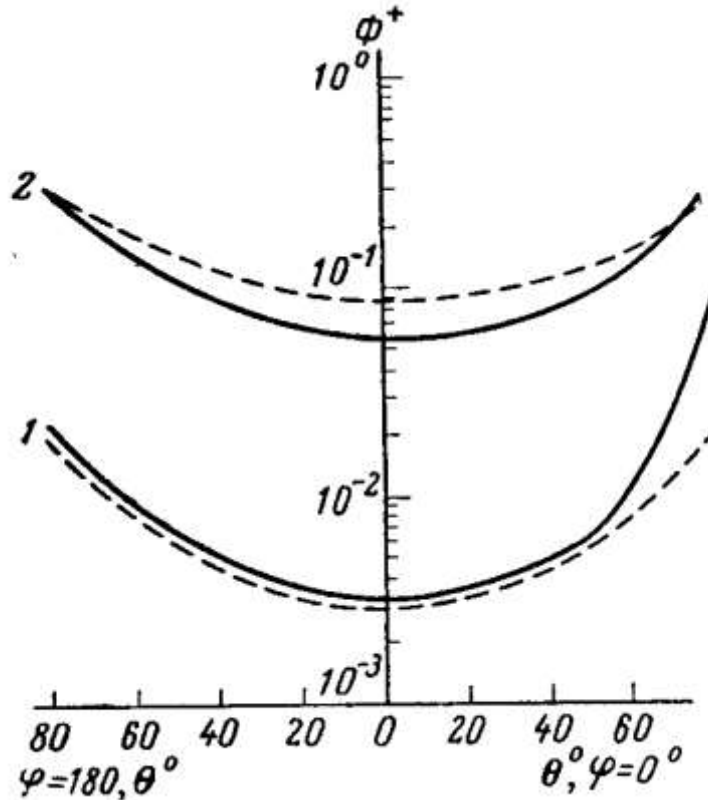


Рис. 7. Сравнение углового хода Φ_{λ}^{+} по θ при $\zeta = 80^{\circ}$ для молекулярной атмосферы (пунктирная кривая) и для случая аэрозольного слоя (сплошная кривая) на уровне 75-80 км и двух длин волн: $\lambda = 0.25$ мкм (1) и $\lambda = 0.34$ мкм (2)

Из кривых рис. 7 следует, что при нормальном падении солнечной радиации или малых ζ интенсивность отраженной Землей радиации при наличии серебристых облаков оказывается даже несколько меньшей аналогичной величины в чисто молекулярной атмосфере, за исключением случаев очень больших углов θ . Очевидная причина состоит в том, что при осуществляющихся в этих случаях углах рассеяния значения аэрозольной индикатрисы рассеяния оказываются настолько меньше значений релеевской, что не компенсируется увеличением интенсивности рассеянной радиации за счет роста оптической толщины рассеивающего слоя. Однако при больших ζ и θ , когда осуществляются малые углы рассеяния и величины аэрозольной индикатрисы становятся значительными, интенсивность отраженной радиации заметно возрастает в аэрозольном случае (при $\zeta = 80^{\circ}$ и $\theta = 80^{\circ}$ примерно в четыре раза для $\lambda = 0,25$ мкм) Таким образом, на основе расчетов можно указать те взаимные положения Солнца и наблюдателя, при которых будет возможно зарегистрировать достаточно резкий контраст между «темным» фотоном в области сильного поглощения УФ-радиации озоном и «ярким» серебристым облаком, сильно отражающим эту радиацию. Заметим, что этот вывод нельзя считать окончательным, так как расчетные величины I_{λ} в случае аэрозольного

рассеяния оказываются меньшими измеренной со спутника интенсивности, приведенной на рис. 4. Более надежное заключение о предлагаемом методе обнаружения аэрозольных скоплений в высоких слоях атмосферы можно будет сделать после исследования вклада излучения за счет люминесценции.

Авторы выражают благодарность Л.Д.Краснокутской и Г.Э.Ришиной, принимавшим участие в выполнении расчетов.

Академия наук СССР
Институт физики атмосферы

Поступила в
редакцию
30 марта 1965 г.

Литература

1. *Edward F., David R., Barth C.A., Mackey E.F., Margetts D.R.* Photometer measurements of the ultraviolet dayglow from 40 to 75 km. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 43, 1962.
2. *Barth C.A.* Spectrometer measurements of the ultraviolet dayglow from 40 to 75 to km. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 43, 1962.
3. *Hennes J.P., Fowler W.R., Dunkelman L.* Middle ultraviolet day radiance of the atmosphere. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 43, 1962.
4. *Friedman R.M., Ratcliffe R.D., Meloy C.E.* Radiance of the upper atmosphere in the middle ultraviolet. *J. Geophys. Res.*, 68, No. 24, 1963.
5. *Green A.E.S.* Attenuation by ozone and the Earth's albedo in the middle ultraviolet. *Appl. Optics*, 3, No 2, 1964.
6. *Tohmatsu T.* The Schuman-Runge day airglow. *Rept. Ionosphere Space Res. Japan*, 17, No. 3, 1963.
7. *Jonson F.S., Purcell L.D.* Direct measurements of the vertical distribution of atmospheric ozone to 70 km altitude. *J. Geophys. Res.*, 57, No. 2, 1952.
8. *Гермогенова Т.А.* О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. *Ж. выч. матем. и матем. физики*, 1, № 6, 1961.
9. *Васильев О.Б.* Результаты абсолютной фотометрии и поляриметрии серебристых облаков. *Тр. совещания по серебристым облакам*, 3. Изд-во АН ЭстССР, Таллин, 1962.
10. *Henenway C.L., Soberman R.K., Witt G.* Sampling of noctilucent cloud particles. *Tellus*, 16, No 1, 1964.
11. *Chu C.-M., Clark G.C., Churchill S.W.* Tables of angular distribution coefficients for lightscattering by spheres. *Eng. Res. Inst. University of Michigan*, 1957.

THE SPECTRAL DISTRIBUTION OF THE RADIATION IN THE OZONE BAND 0,2-0,34 μ REFLECTED BY THE EARTH

T.A.Germogenova, M.S.Malkevich

The calculation results of the spectral distribution of the UV radiation in ozone band 0,2-0,34 μ reflected by the Earth are derived under assumption of Rayleigh scattering. The case of aerosol scattering (noctilucent cloud) is considered.

УДК 551.521.2

УГЛОВОЕ И ВЕРТИКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ОТРАЖЕННОЙ РАДИАЦИИ ЗЕМЛИ В ПОЛОСЕ ПОГЛОЩЕНИЯ
ОЗОНА 0,20-0,34 мк

Т.А.Гермогенова, Л.Д.Краснокутская

Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, т.1, №11,
1965 г., с. 1160-1167.

В результате решения уравнения переноса для плоскопараллельной модели атмосферы были получены характеристики радиационного поля Земли в ультрафиолетовой области спектра 0,20-0,34 мк при учете поглощения радиации озоном и рассеяния на молекулах воздуха.

Исследованы зависимости характеристик радиационного поля от направлений падения солнечной радиации и направлений наблюдения, а также от длины волны на разных высотах над земной поверхностью.

В [1,8] описана методика расчета характеристик радиационного поля Земли в ультрафиолетовой области спектра 0,20-0,34 мк при учете поглощения радиации озоном и рассеянии на молекулах воздуха. В этой работе приведены расчетные данные о спектральном распределении радиации, отраженной Землей в мировое пространство, при фиксированных положения Солнца и направлениях наблюдения. Результаты расчетов позволяют получить гораздо более разносторонние сведения о поле радиации Земли, в том числе данные об угловом и вертикальном распределении ультрафиолетовой радиации в разных участках полосы поглощения озона 0,20-0,34 мк. Как известно [2-6], в настоящее время уже проводятся спектрометрические и фотометрические измерения в этой области спектра на разных уровнях в атмосфере (при помощи ракет) и вне атмосферы (при помощи спутников). Поэтому представляет интерес исследование зависимости характеристик радиационного поля от направлений падения солнечной радиации ζ и наблюдения θ , а также от длины волны λ на разных высотах z над земной поверхностью. Рассмотрение этого вопроса и составляет предмет настоящей работы, являющейся продолжением [1].

**Зависимость спектрального распределения радиации
от углов и высоты.**

В [1] было приведено спектральное распределение интенсивности отраженной радиации $I_{\lambda} \uparrow$ при некоторых зенитных углах Солнца ζ и наблюдателя θ в плоскости солнечного вертикала. Было отмечено, что имеется существенное различие между зависимостью $I_{\lambda} \uparrow$ от ζ и θ в

областях сильного и слабого поглощения. Именно, при сильном поглощении интенсивность уходящей радиации возрастает с углом θ , особенно для больших ζ , а при слабом поглощении она практически не зависит от θ для $\zeta = 0$, хотя для больших ζ по-прежнему наблюдается заметное различие I_λ при разных углах визирования θ .

Более ясную картину угловой зависимости отраженной радиации дают коэффициенты яркости атмосферы $r_\lambda(\theta, \zeta, \varphi)$ спектральный ход которых для $\varphi = 0$ и для некоторых θ и ζ представлен на рис. 1.

Величины r_λ четко разделяются для случаев двух положений Солнца. Как и следовало ожидать, увеличение ζ ведет к росту коэффициента яркости, особенно в области сильного поглощения. Например, для $\lambda = 0,25 \text{ мк}$ значение r_λ возрастает от 0,006 при $\zeta = 0, \theta = 10$, до 0,15 при $\zeta = \theta = 80^\circ$. Интересно, что с большой степенью точности выполняется условие симметрии коэффициента яркости $r_\lambda(\theta, \zeta) = r_\lambda(\zeta, \theta)$ (рис. 1, кривые 1 (пунктир) и 3 (сплошная кривая)).

В основе различий r_λ для различных θ лежат два эффекта:

1) изменение угла рассеяния и связанное с этим изменение доли рассеянной радиации, определяемой соответствующим значением индикатрисы рассеяния;

2) увеличение геометрической толщины рассеивающего слоя при фиксированном ζ . Тот факт, что при $\zeta = 0$ рост r_λ с увеличением θ менее заметен по сравнению со случаем $\zeta = 80^\circ$, объясняется сочетанием этих противоположно действующих эффектов: с одной стороны, с увеличением θ угол рассеяния убывает от 180° (при $\theta = 0, \zeta = 0$) до 100° (при $\theta = 0, \zeta = 80^\circ$), а индикатриса уменьшается примерно вдвое; с другой, - увеличивается толщина рассеивающего слоя. В области слабого поглощения эти факторы практически компенсируют друг друга.

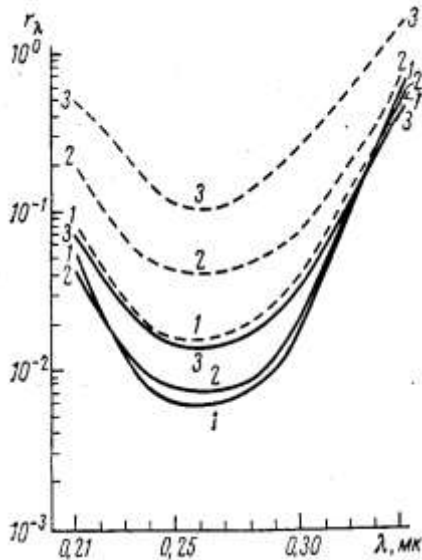


Рис.1.Спектральное распределение коэффициента яркости

для $\zeta = 0^\circ$ (сплошные кривые) и $\zeta = 80^\circ$ (пунктирные): 1 - $\theta = 10^\circ$; 2 - $\theta = 60^\circ$; 3 - $\theta = 80^\circ$

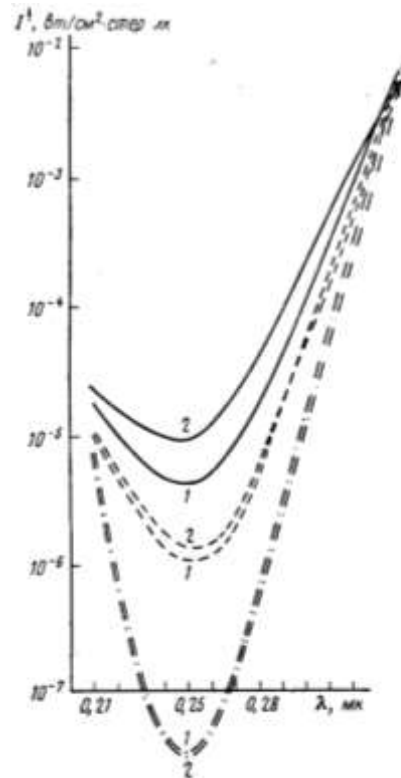


Рис.2.Спектральное распределение $I_\lambda \uparrow$ для $z=100$ км (сплошные кривые), $z=60$ км (пунктирные) и $z=40$ км (штрих--пунктирные): 1 - $\theta = 10^\circ$; 2 - $\theta = 80^\circ$

Представляет интерес проследить изменение спектрального распределения характеристик поля радиации с высотой. На рис. 2 изображена зависимость интенсивности восходящей радиации от λ для разных высот z и θ при $\zeta = 0$. В центральной части полосы поглощения имеет место резкое изменение восходящей радиации при переходе через область максимального содержания озона. При этом на уровнях ниже 40 км зависимость $I_\lambda \uparrow$ от θ оказывается незначительной, что связано с сильным эффектом поглощения радиации, почти полностью компенсирующим эффект рассеяния, в том числе и при больших θ . В частности, на высоте 40 км в этой части полосы значения $I_\lambda \uparrow$ при $\theta = 80^\circ$ даже меньше величины $I_\lambda \uparrow$ при $\theta = 10^\circ$. По мере продвижения в область слабого поглощения наблюдается ослабление спектральной зависимости при изменении высоты. На длинноволновом крыле полосы поглощения озона ($\lambda = 0,34$ мкм) $I_\lambda \uparrow$ выше 40 км практически не изменяется, поскольку в этой области спектра поле отраженной радиации уже сформировалось в нижележащих слоях атмосферы.

Спектральное распределение падающей радиации представлено на рис. 3 Интересно проследить формирование характерного распределения

радиации по спектру. На высоте 98 км слой атмосферы оптически тонок, и спектральный ход падающей радиации при $\theta = 10^\circ$ мало отличается от спектрального распределения падающей солнечной радиации S_λ . Однако при $\theta = 80^\circ$ даже в этом слое слегка намечается характерный ход радиации в полосе поглощения озона. С уменьшением высоты до 40 км устанавливается ярко выраженный минимум интенсивности падающей радиации $I_\lambda \downarrow$ в области сильного поглощения по сравнению с $I_\lambda \downarrow$ на крыльях полосы.

Максимальные значения падающей радиации для области сильного поглощения получаются на высоте ~ 60 км, поскольку геометрическая толщина рассеивающего слоя на этой высоте уже достаточно велика, а содержание озона еще незначительно. При больших углах наблюдения ($\theta = 80^\circ$) на этой высоте также имеет место увеличение $I_\lambda \downarrow$. Отметим, что на высоте 40 км изменение спектрального распределения падающей радиации при увеличении θ подобно спектральному ходу уходящей радиации на этой высоте (рис. 2 и 3).

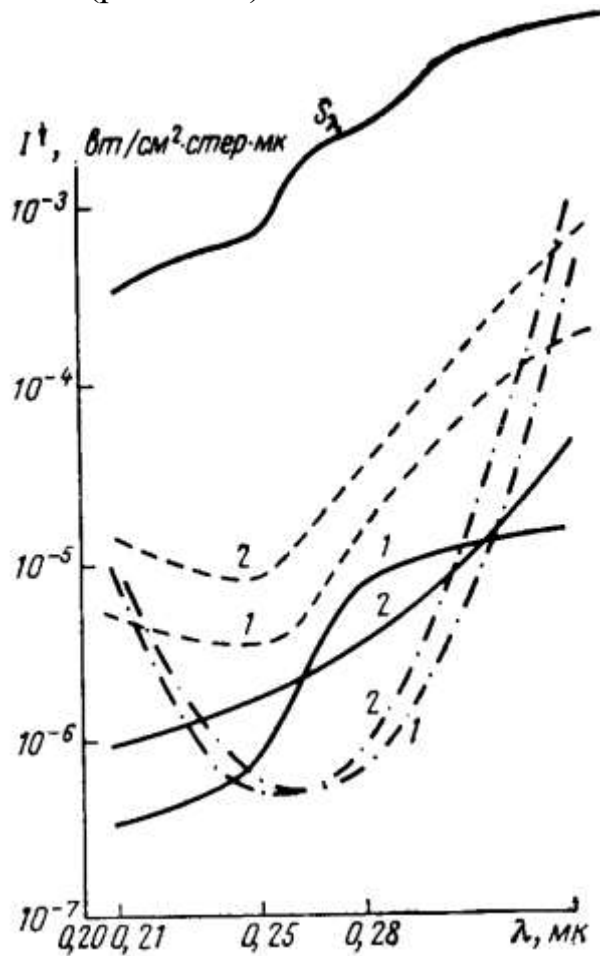


Рис. 3. Спектральное распределение $I_\lambda \uparrow$ для $z=100$ (сплошные кривые), $z=60$ (пунктирные) и 40 км (штрих-пунктирные): 1 - $\theta = 10^\circ$; 2 - $\theta = 80^\circ$

Угловое распределение уходящей радиации

Результаты расчетов $I_{\lambda} \uparrow$ позволяют исследовать также угловую структуру поля уходящей радиации в различных участках полосы поглощения озона при разных положениях Солнца и на разных высотах. Для модели плоскопараллельной атмосферы эта угловая зависимость будет определяться главным образом вертикальным распределением озона и соотношением между рассеянием и поглощением атмосферы при распространении радиации в различных направлениях. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим зависимость $\Phi_{\lambda} \uparrow = I_{\lambda} \uparrow / S_{\lambda}$ от θ при разных λ и ζ в плоскости вертикала Солнца (рис. 4). Обращает на себя внимание заметное различие угловых профилей для центральной части полосы поглощения ($\lambda = 0,25 \text{ мк}$) и для области слабого поглощения ($\lambda = 0,34 \text{ мк}$).

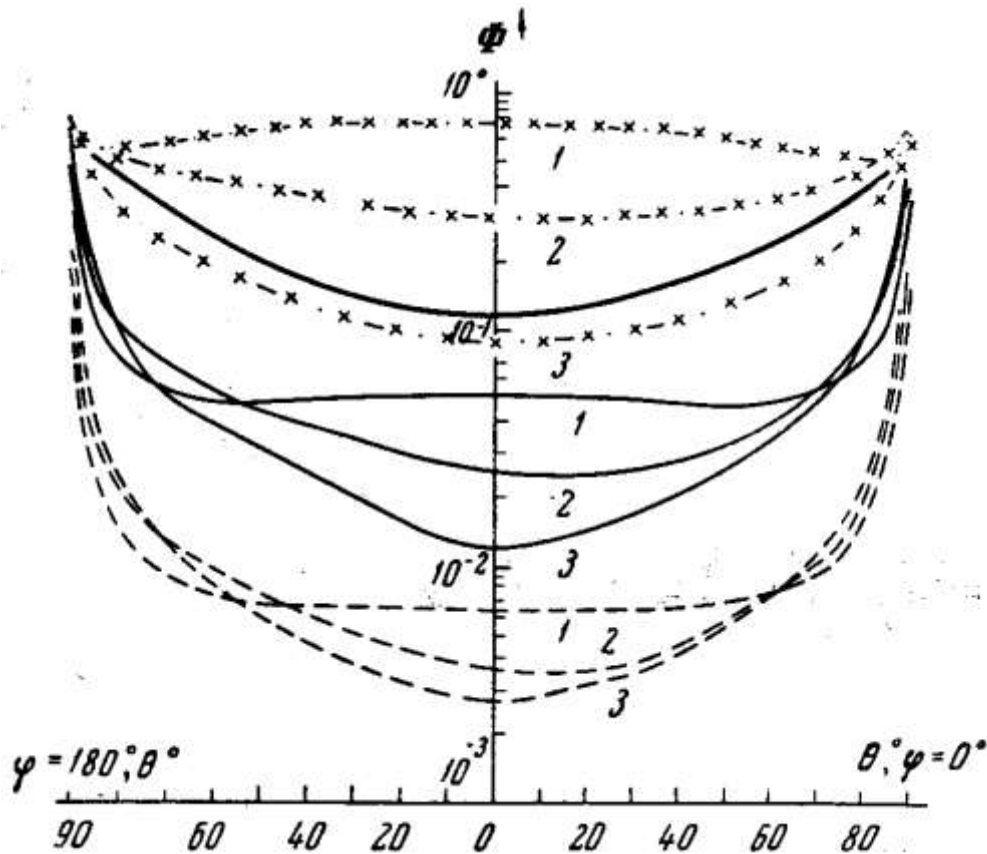


Рис. 4. Угловой ход относительной интенсивности $\Phi_{\lambda} \uparrow$ по θ для $\lambda = 0,21$ (сплошные кривые), $0,25$ (пунктирные) и $0,34 \text{ мк}$ (кривые с крестиками): 1- $\zeta = 10^{\circ}$, 2- $\zeta = 60^{\circ}$, 3- $\zeta = 80^{\circ}$. Жирной линией изображена кривая для $\tau = 0,80$ (чистое рассеяние).

Для области сильного поглощения $\Phi_\lambda \uparrow$ мало изменяется при $0 \leq 60^\circ$ и резко возрастает при $\theta \rightarrow 90^\circ$, причем с увеличением ζ этот рост начинается уже при малых θ , и отношения $\Phi_\lambda(90)/\Phi_\lambda(0)$ становятся значительно большими. В области слабого поглощения ($\lambda = 0,34 \text{ мк}$) такой ход наблюдается только при больших углах ζ (а также в случае чистого рассеяния), тогда как при небольших углах падения солнечной радиации имеет место слабое убывание $\Phi_\lambda \uparrow$ по θ и некоторый рост лишь вблизи $\theta = 90^\circ$.

Совершенно ясно, что рост $\Phi_\lambda \uparrow$ при больших θ определяется увеличением геометрической толщины слоя атмосферы, в котором главным образом и генерируется поток отраженной назад радиации. В области сильного поглощения этот слой оптически тонок и начинает играть заметную роль лишь при очень больших θ . При слабом же поглощении, наоборот, рассеивает вся атмосфера. Это обеспечивает, по-видимому, существенный вклад многократного рассеяния, которое в значительной степени компенсирует потемнение к краю, обусловленное уменьшением угла рассеяния от 180° при $\theta = 0$ до 90° при $\theta = 90^\circ$.

Заметим, что результаты расчетов [5] показывают отсутствие зависимости углового хода I_λ по θ от длины волны. Это связано с приближениями, использованными в [5] при вычислении интенсивности однократно рассеянной радиации, которые заведомо должны приводить к большим погрешностям на крыльях полосы поглощения озона.

Удобно использовать для характеристики углового распределения уходящей радиации коэффициент яркости, который для разных λ и ζ изображен на рис. 5. Обращает на себя внимание значительное отклонение индикатрисы яркости от закона Ламберта, за исключением случая слабого поглощения при нормальном падении радиации.

Рис. 4 и 5 показывают, что азимутальная асимметрия мала даже в плоскости вертикала Солнца ($\varphi = 0$ и 180°). Это связано с тем, что в расчетах предполагалось релеевское рассеяние, характеризующееся симметричной индикатрисой. Яркости горизонта в направлении на Солнце и в противоположном направлении оказались близкими.

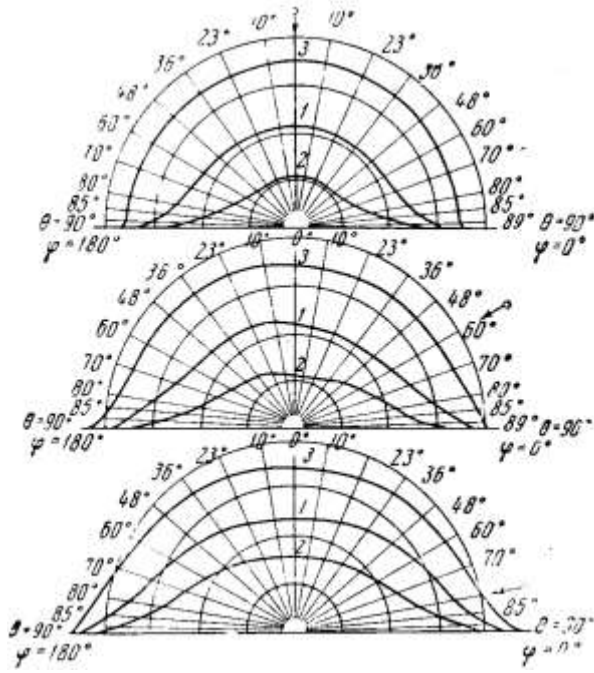


Рис. 5. Коэффициенты яркости атмосферы r_λ для плоскости вертикала Солнца в разных участках полосы поглощения озона при разных ζ (направление падения солнечных лучей указано стрелкой): 1- $r_\lambda=0,21 \text{ мк}$, 2- $r_\lambda=0,25 \text{ мк}$, 3- $r_\lambda=0,34 \text{ мк}$.

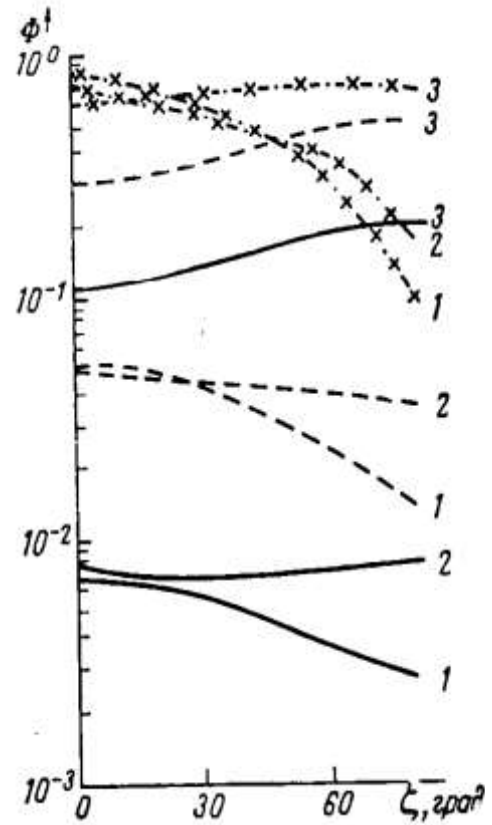


Рис.6. Зависимость $\Phi_\lambda \uparrow$ от ζ при $\lambda = 0,25$ (сплошные кривые), $0,21$ (пунктирные) и $0,34 \text{ мк}$ (крестики): 1- $\theta=10^\circ$, 2- $\theta=60^\circ$, 3- $\theta=80^\circ$; $\varphi=0$

Представляет интерес исследовать зависимость $\Phi_\lambda \uparrow$ от ζ для разных участков полосы при фиксированных направлениях визирования θ, φ . Примеры этой зависимости даны на рис. 6. При малых θ интенсивность радиации $\Phi_\lambda \uparrow$ убывает с ростом ζ тем быстрее, чем меньше поглощение. Наоборот, при больших θ наблюдается рост $\Phi_\lambda \uparrow$ по ζ , на этот раз $\Phi_\lambda \uparrow$ растет быстрее в области сильного поглощения и почти постоянна на крыле полосы $\lambda = 0,34 \text{ мк}$. Кривые на рис. 6 позволяют экстраполировать результаты измерений, полученные при фиксированном значении угла ζ на другие зенитные расстояния Солнца. Эти экстраполяционные кривые различны для разных участков полосы поглощения озона. Поэтому ни одной из них нельзя пользоваться с целью экстраполяции $\Phi_\lambda \uparrow$ по ζ для всех остальных длин волн, как это предлагается в [4] на основе результатов

расчетов Грина [5]. Причина независимости от λ углового распределения I_λ по θ и ζ , полученная в работе [5], была указана выше.

Рассмотрим деформацию углового хода уходящей радиации с высотой (рис.7). В области сильного поглощения до высоты 60 км угловой ход $\Phi_\lambda \uparrow$ с увеличением высоты практически не меняется в диапазоне углов $0^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$. Интересно отметить различный ход $\Phi_\lambda \uparrow$ при $\theta \rightarrow 90^\circ$ на разных высотах: если на уровне $z = 40$ км $\Phi_\lambda \uparrow$ очень мало меняется, то вблизи верхней границы слоя атмосферы ($z = 95$ км) $\Phi_\lambda \uparrow$ увеличивается на порядок при $\theta \rightarrow 90^\circ$. Более яркий горизонт на больших высотах объясняется, очевидно, малой концентрацией поглощающего вещества на пути лучей.

Совершенно иная картина хода $\Phi_\lambda \uparrow$ по θ наблюдается в области слабого поглощения ($\lambda = 0,34$ мк). Здесь с высотой происходит выравнивание углового распределения отраженной радиации.

Представляет интерес формирование с высотой углового хода $\Phi_\lambda \uparrow$ в области сравнимых поглощения и рассеяния ($\lambda = 0,21$ мк). В области максимальной концентрации O_3 (20–40 км) $\Phi_\lambda \uparrow$ убывает с ростом θ (поглощение более существенно, нежели рассеяние), а в слое небольших концентраций – возрастает.

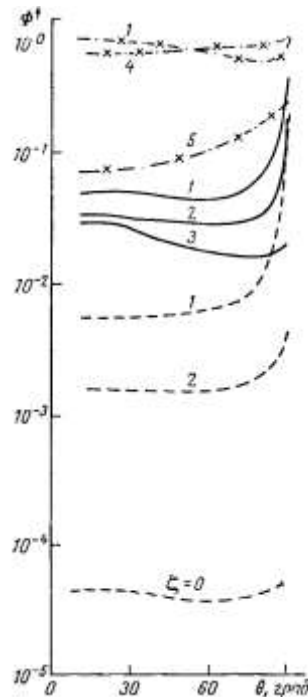


Рис. 7. Угловой ход относительной интенсивности уходящей радиации $\Phi_\lambda \uparrow$ по θ для $\lambda = 0,21$ (сплошные кривые), $0,25$ (пунктирные) и $0,34$ мк (крестики); z , км: 1- 95, 2- 60, 3- 40, 4- 20, 5- 2

Аналогично можно объяснить формирование углового хода падающей радиации $\Phi_{\lambda} \downarrow$ на разных высотах (рис. 8).

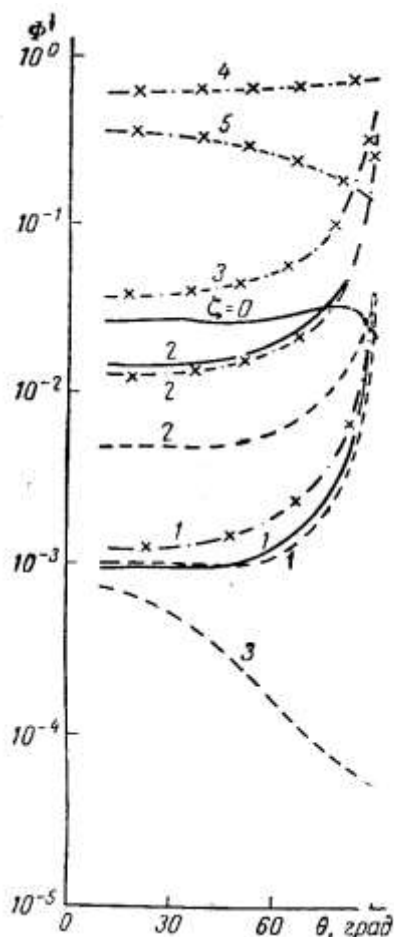


Рис. 8. Угловой ход относительной интенсивности падающей радиации $\Phi_{\lambda} \downarrow$ по θ для $\lambda = 0,21$ (сплошные кривые), $0,25$ (пунктирные) и $0,34 \text{ мк}$ (крестики); z , км: 1- 95, 2- 60, 3- 40, 4- 20, 5- 2

Вертикальное распределение радиации

Для ряда приложений представляет интерес зависимость вертикальных распределений падающей и восходящей ультрафиолетовой радиации от вертикальных распределений концентрации O_3 и плотности воздуха. Для иллюстрации этой зависимости рассмотрим высотный ход интенсивности ультрафиолетовой радиации для двух моделей атмосферы: 1) использованное в настоящих расчетах вертикальное распределение концентрации O_3 по Джонсону [7] и плотности воздуха ρ_1 в изотермической молекулярной атмосфере; 2) использованное в работе Грина [5] стандартное распределение O_3 и плотности воздуха ρ_2 (рис. 9).

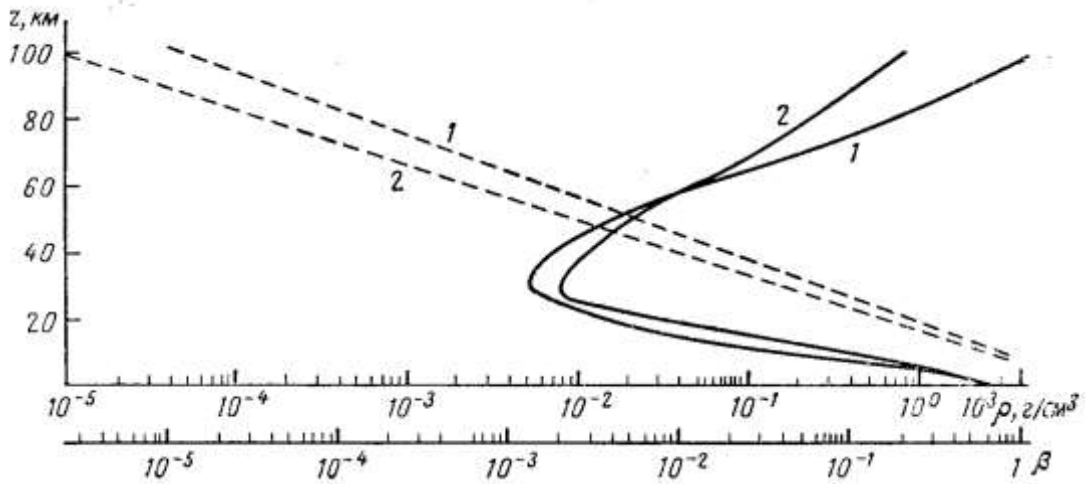


Рис. 9. Вертикальное распределение для $\beta_\lambda(z)$ для $\lambda = 0,25 \text{ мк}$ (сплошные кривые) и ρ воздуха (пунктирные): 1- распределение O_3 по Джонсону [7] и $\rho = \rho_0 e^{-0,125z}$; 2- стандартные распределения O_3 и плотности воздуха по Грину [5]

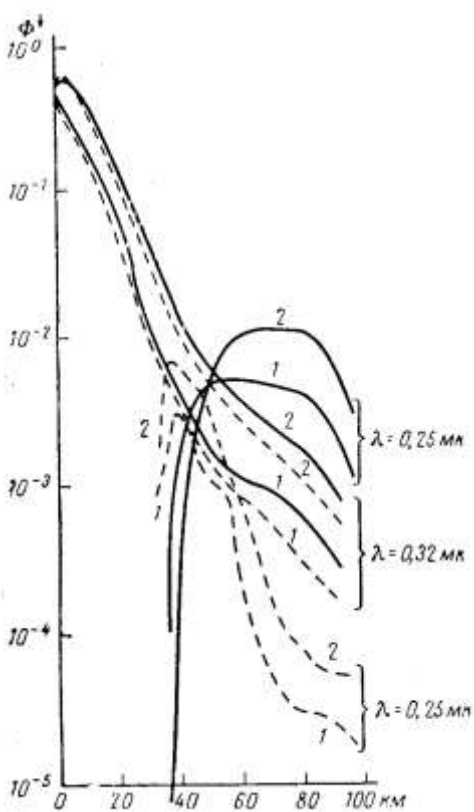


Рис.10. Вертикальное распределение падающей радиации $\Phi_\lambda \downarrow$ для двух моделей атмосферы (сплошные кривые для данной статьи, пунктирные – для модели Грина): 1- $\theta = 10^\circ$, 2- $\theta = 80^\circ$

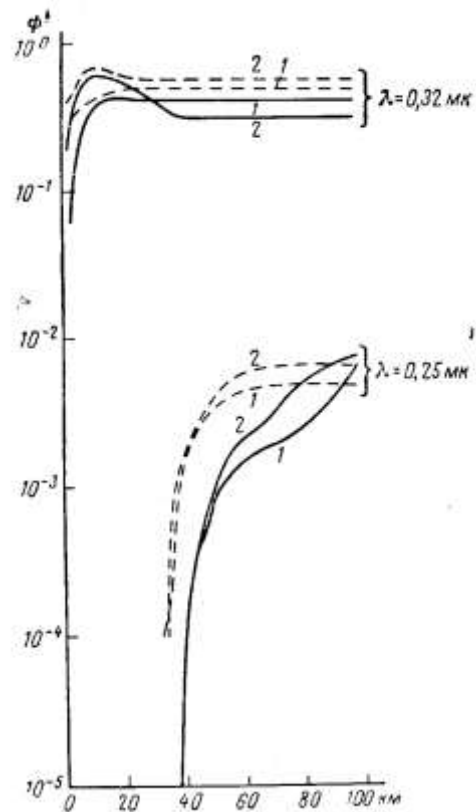


Рис.11. Вертикальное распределение уходящей радиации $\Phi_\lambda \uparrow$ для двух моделей атмосферы (сплошные кривые для данной статьи, пунктирные – для модели Грина): 1- $\theta = 10^\circ$, 2- $\theta = 80^\circ$

Примеры рассчитанных для указанных моделей функций $\Phi \downarrow(z)$ и $\Phi \uparrow(z)$ приведены на рис. 10,11. Интенсивность падающей радиации $\Phi \downarrow$, равная нулю на верхней границе атмосферы, очень быстро возрастает во всех интервалах спектра за счет рассеяния на молекулах воздуха. Так как $\rho_1 > \rho_2$ то, естественно и $\Phi_1 \uparrow > \Phi_2 \downarrow$ по крайней мере в высоких слоях атмосферы. В области сильного поглощения ($\lambda = 0,25 \text{ мк}$) интенсивность падающей радиации $\Phi \downarrow$ достигает максимума на некоторой высоте, зависящей от модели атмосферы, а затем убывает с уменьшением высоты благодаря сильному поглощению падающей радиации озоном. В области слабого поглощения $\Phi \downarrow$ возрастает во всем слое атмосферы.

Как следует из рис. 10 в области сильного поглощения неравенство $\Phi_1 \uparrow > \Phi_2 \downarrow$ меняется на противоположное на уровне примерно 40 км. Это связано, вероятно, с тем, что для этих длин волн параметр $\beta_\lambda = \sigma\lambda \times (\sigma_\lambda + \alpha_\lambda)^{-1}$, характеризующий вероятность выживания кванта, в слое между 35 и 60 км оказывается заметно меньшим для модели атмосферы 1 по сравнению с моделью 2 (рис. 9). В результате $\Phi_1 \uparrow$ уменьшается с приближением к земной поверхности быстрее, чем $\Phi_2 \downarrow$. Соотношение интенсивности восходящей радиации $\Phi_1 \uparrow < \Phi_2 \uparrow$, которая генерируется из выживших квантов, оказывается аналогичным, но со сдвигом по высотам. Рассеянная назад часть этих квантов в первой модели оказывается меньшей, чем во второй, но и ослабляется на обратном пути также меньше (рис. 9, β_λ). В результате этого на верхней границе устанавливается соотношение $\Phi_1 \uparrow > \Phi_2 \uparrow$. Однако в области слабого поглощения на всех высотах $\Phi_1 \uparrow < \Phi_2 \uparrow$.

Приведенные примеры показывают, что поле радиации Земли в рассматриваемой области спектра существенно зависит от вертикальных распределений поглощающих и рассеивающих веществ.

Авторы благодарят М.С.Малкевича, оказавшего помощь в выполнении данной работы, и Г.Э.Ришину, проводившую расчеты на ЭВМ.

Академия наук СССР
Институт физики атмосферы

Поступила в редакцию
8 июня 1965 г.

Литература

1. Гермогенова Т.А., Малкевич М.С. Спектральное распределение отраженной радиации Земли в полосе поглощения озона 0,20-0,34 мк. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1, №9, 1965.

2. *Barth C.A.* Spectrometer measurements of the ultraviolet dayglow from 40 to 75 km. Trans. Amer. Geophys. Union, 43, No. 4, 1962.
3. *Hennes J.P., Fowler W.R., Dukelman L.* Middle ultraviolet day radiance of the atmosphere. J. Geophys. Res., 69, No. 13, 1964.
4. *Friedman R.M., Ratcliffe R.D., Melow C.E.* Radiance of the upper atmosphere in the middle ultraviolet. J. Geophys. Res., 68, No. 2, 1963.
5. *Green E.M.* Attenuation by ozone and Earth's albedo in the middle ultraviolet. Appl. Optics, 3, No. 2, 1964.
6. *Tohmatsu T.* The Schumann-Runge day airglow. Rept. Ionosph. and Space Res. Japan, 17, No. 3, 1963.
7. *Jonson F.S., Purcell L.D.* Direct measurements of the vertical distribution of atmospheric ozone to 70 km altitude. J. Geophys. Res., 57, No. 13, 1952.
8. *Гермогенова Т.А.* О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. Вычисл. матем. и матем. физика, №6, 1961.

THE FIELD OF THE REFLECTED EARTH'S RADIATION IN THE OZONE ABSORPTION BAND OF 0.20-0.34 μ

T.A. GERMOGENOVA, L.D. KRASNOKUTSKAYA

From the radiation transfer equation for the plane parallel model of the atmosphere the characteristics of the Earth's radiation field are obtained for the region of 0.20-0.34 μ taking into account the ozone absorption and molecular scattering. The dependencies of the radiation field characteristics on the direction of incident solar radiation, on the direction of observation and on the wave length for different heights are investigated.

О диффузии излучения в сферической оболочке,
окружающей точечный источник

Т.А.Гермогенова

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР, АСТРОФИЗИКА
том 2, выпуск 3, сентябрь, 1966, стр.251-266

Исследуется решение уравнения переноса в однородной поглощающей и изотропно рассеивающей сферической оболочке, в центре которой находится точечный изотропный источник. Устанавливается характер поведения решения на больших расстояниях от внутренней поверхности оболочки, как при конечном внешнем радиусе оболочки, так и при бесконечном и выясняется связь этих двух задач. Изучается зависимость решения от внутреннего радиуса оболочки. Особое внимание обращено на описание внутреннего альбеда оболочки.

Задача о распространении излучения в сферической оболочке представляет интерес в связи с исследованием диффузии излучения в газовых и пылевых туманностях.

В работах [1] и [2] исследуются асимптотические свойства решения задачи об оболочке большой оптической толщины. Авторы предполагают, что внутренний радиус оболочки велик по сравнению с ее геометрической толщиной. Это предположение, по существу, сводит задачу к плоской.

В ряде задач представляет интерес более точное исследование, связанное с учетом сферичности оболочки [3].

В настоящей работе проводится исследование решения уравнения переноса в однородной поглощающей и изотропно рассеивающей сферической оболочке с точечным изотропным источником в центре ее. Установление существования ограниченного решения (раздел 1) позволяет дать анализ асимптотического поведения решения на больших расстояниях от внутренней поверхности оболочки как при конечном внешнем радиусе оболочки, так и при бесконечном, и выяснить связь этих двух задач (раздел 2). Изучению зависимости решения от внутреннего радиуса оболочки посвящен раздел 3 работы.

1. Интенсивность излучения в точке с радиусом \bar{r} в направлении, составляющем угол $\Theta = \arccos \mu$ с радиусом-вектором, $\Psi(\bar{r}, \mu)$ есть решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} + \frac{1 - \mu^2}{\bar{r}} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \sigma \Psi(\bar{r}, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \Psi(\bar{r}, \mu) d\mu$$

$$\bar{R}_0 < \bar{r} < \bar{R}, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\Psi(\bar{R}_0, \mu) = \gamma \Psi(\bar{R}_0, -\mu) + \frac{S \delta(\mu - 1)}{4\pi \bar{R}_0^2}, \quad \mu > 0,$$

$$\Psi(\bar{R}_0, \mu) = 0, \quad \mu < 0.$$

Здесь S - число частиц, излучаемых источником в точке $\bar{r} = 0$ в единицу времени, σ - полное сечение взаимодействия излучения с веществом, σ_s - сечение рассеяния, \bar{R}_0 и \bar{R} - внутренний и внешний радиусы сферической оболочки. Краевое условие (1.1) отвечает возможности «прострела» через полость $0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}_0$ при $\gamma = 1$ или при $\gamma = 0$ - абсолютно черной сфере радиуса \bar{R}_0 , полностью поглощающей отраженное сферической оболочкой излучение и излучающей по закону $\frac{S \delta(\mu - 1)}{4\pi \bar{R}_0^2}$.

В такой постановке задача аналогична проблеме Милна с инсоляцией в плоском случае с условием зеркального внутреннего отражения на облучаемой поверхности с коэффициентом отражения γ .

При $\gamma = 0$ приходим к классической проблеме Милна с инсоляцией [4]. Существование, единственность и общие свойства решения этой неоднородной при $S \neq 0$ задачи сферической оболочки конечной оптической толщины следует из общих исследований теории переноса [5]. При $\bar{R} = \infty$ и $\sigma = \sigma_s$ однородная задача с $S = 0$, очевидно, обладает решением $\Psi = \text{const}$. Существует ли решение неоднородной задачи при $\bar{R} = \infty$, какова его связь с решением для конечного \bar{R} , характер зависимости от $\sigma, \sigma_s, \bar{R}_0$. Для исследования этих вопросов перейдем к интегральному уравнению для функции источника $B(r)$ так же, как это делается в [6] при исследовании задачи с $\gamma = 0$. Для задач с $\bar{R} = \infty$ второе краевое условие мы заменим естественным требованием ограниченности $\Psi(\bar{r}, \mu)$ при $\mu < 0, \bar{r} \rightarrow \infty$.

Пусть $r = \bar{r} \sigma, R_0 = \bar{R}_0 \sigma, R = \bar{R} \sigma, \omega_0 = \frac{\sigma_s}{\sigma}$. Введем функцию $\Phi(r, \mu)$ - интенсивность рассеянного излучения – соотношением

$$\Psi(\bar{r}, \mu) = \Phi(r, \mu) + \frac{S \delta(\mu - 1)}{4\pi \bar{R}_0^2} e^{-\sigma(r - \bar{R}_0)}.$$

Тогда для $\Phi(r, \mu)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + \Phi(r, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(r, \mu') d\mu' + F \frac{e^{-r}}{r^2} \equiv B(r), \quad (1.2)$$

где

$$F = F(R_0) = \frac{S\sigma\sigma_s e^{R_0}}{8\pi}$$

$$\Phi(R_0, \mu) = \gamma \Phi(R_0, -\mu), \quad \mu > 0$$

$$\Phi(R, \mu) = 0, \quad \mu < 0 \text{ при } R < \infty$$

$\Phi(r, \mu)$ ограничена при $r \rightarrow \infty$, при $R = \infty$.

Интегрируя (1.2), будем иметь для μ отрицательных

$$\Phi(r, \mu) = \Phi_1(r, \mu) \equiv \int_r^R \frac{\rho B(\rho) e^{-\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)} + r|\mu|}}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}} d\rho \quad (1.3)$$

Для μ положительных:

при

$$0 \leq \mu \leq \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \mu) = \Phi_2(r, \mu) \equiv & \int_{r\sqrt{1-\mu^2}}^r \frac{\rho B(\rho) e^{-r\mu + \sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}} d\rho + \\ & + \int_{r\sqrt{1-\mu^2}}^R \frac{\rho B(\rho) e^{-r\mu - \sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}} d\rho, \end{aligned} \quad (1.4)$$

при

$$\sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \leq \mu \leq 1$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \mu) = \Phi_3(r, \mu) \equiv & \gamma \Phi_1(R_0, -\mu) e^{-r\mu} + \sqrt{R_0^2 - r^2(1-\mu^2)} + \\ & + \int_{R_0}^r \frac{\rho B(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}} e^{-r\mu + \sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя теперь для $B(r)$ выражение

$$B(r) = \frac{\omega_0}{2} \left\{ \int_{-1}^0 \Phi_1(r, \mu) d\mu + \int_0^{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}} \Phi_2(r, \mu) d\mu + \int_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^1 \Phi_3(r, \mu) d\mu \right\} + F \frac{e^{-r}}{r^2},$$

придем к интегральному уравнению

$$rB(r) = \Lambda[\rho B(\rho)]_r + F \frac{e^{-r}}{r} \quad (1.6)$$

где

$$\Lambda[\rho B(\rho)]_r = \frac{\omega_0}{2} \int_{R_0}^R \{E(|r-\rho|) - E(\sqrt{r^2 - R_0^2} + \sqrt{\rho^2 - R_0^2}) + \gamma K(r, \rho)\} \rho B(\rho) d\rho \quad (1.7)$$

$$K(r, \rho) = r \int_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{\rho^2 - R_0^2(1-\mu^2)}} e^{-\sqrt{\rho^2 - R_0^2(1-\mu^2)} + \sqrt{R_0^2 - r^2(1-\mu^2)} - \mu(r-R_0)}$$

$$E(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s} ds.$$

Преобразования, приводящие к (1.6), связанные с заменами переменных интегрирования и порядка интегрирования, законны вследствие положительности и интегрируемости подынтегральных выражений как при R ограниченном, так и $R = \infty$.

Лемма 1. Справедливы оценки*

$$0 < \Lambda[1]_r < \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2} E_2(r + R_0) \right] \quad (1.8)$$

для всех $r \geq R_0 \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$.

* Через $E_n(x)$ здесь и далее обозначаются интегральные показательные функции

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s^n} ds, \quad E_1(x) \equiv E(x).$$

Действительно, запишем $\int_{R_0}^{\infty} K(r, \rho) d\rho$ в виде

$$r \int_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^1 e^{-\mu r + \sqrt{R_0^2 - r^2(1-\mu^2)}} \left\{ \int_{R_0}^{\infty} \frac{e^{\mu R_0 - \sqrt{\rho^2 - R_0^2(1-\mu^2)}}}{\sqrt{\rho^2 - R_0^2(1-\mu^2)}} d\rho \right\} d\mu.$$

Для внутреннего интеграла, пользуясь заменой

$$z = \sqrt{\rho^2 - R_0^2(1-\mu^2)}, \quad z dz = \rho d\rho, \quad \rho = \sqrt{z^2 + R_0^2(1-\mu^2)},$$

получим оценку

$$\frac{1}{\sqrt{2R_0}} < \int_{R_0}^{\infty} \frac{e^{\mu R_0 - z} dz}{\sqrt{z^2 + R_0^2(1-\mu^2)}} = \frac{1}{R_0} - \frac{\mu}{R_0^2} + O\left(\frac{1}{R_0^3}\right) < \frac{1}{R_0}. \quad (1.9)$$

И так как

$$\int_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^1 e^{-\mu r + \sqrt{R_0^2 - r^2(1-\mu^2)}} d\mu \text{ заменой } \mu r - \sqrt{R_0^2 - r^2(1-\mu^2)} = z$$

сводится к интегралу

$$\frac{1}{2r} \int_{r-R_0}^{\sqrt{r^2 - R_0^2}} e^{-z} \left| \frac{r^2 - R_0^2}{z^2} - 1 \right| dz,$$

то

$$\int_{R_0}^{\infty} K(r, \rho) d\rho = E_2(r - R_0) - \frac{1}{R_0} [2E_3(r - R_0) - E_3(\sqrt{r^2 - R_0^2})] + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right) < E_2(r - R_0). \quad (1.10)$$

Учитывая теперь, что

$$\int_{R_0}^{\infty} E(|r - \rho|) d\rho = 2 - E_2(r - R_0), \quad \text{а}$$

$$\int_{R_0}^{\infty} E(\sqrt{r^2 - R_0^2} + \sqrt{\rho^2 - R_0^2}) d\rho > \int_{R_0}^{\infty} E(r + \rho) d\rho = E_2(r + R_0),$$

придем к оценке (1.8).

Теорема 1. Ряд Неймана для уравнения (1.6) при $R = \infty$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \Lambda^v \left[F \frac{e^{-\rho}}{\rho} \right] \quad (1.11)$$

сходится на $[R_0, \infty)$ к функции, ограниченной величиной

$$4Fe^{R_0} \frac{R_0 + 1}{R_0}. \quad (1.12)$$

Функция $B(r) = \frac{1}{r} \sum_{v=0}^{\infty} \Lambda^v \left[F \frac{e^{-\rho}}{\rho} \right]$ является единственным

решением (1.6) из $L_2[R_0, \infty)$, если $\omega_0 < 1$. При $\omega_0 = 1$ любое другое решение из $L_2[R_0, \infty)$ отличается от этой функции, обращаясь в 0 при $r \rightarrow \infty$, на постоянную при $\gamma = 1$ или на функцию, стремящуюся к постоянной при $r \rightarrow \infty$ при $\gamma < 1$.

При $\omega_0 < 1$, согласно оценкам (3.8), ряд Неймана (1.11) сходится, по крайней мере, как геометрическая прогрессия с показателем ω_0 . Для доказательства сходимости ряда (1.11) при $\omega_0 = 1$ воспользуемся методом, развитым в [7] при исследовании классической проблемы Милна и заключающемся в анализе сходимости ряда Неймана для некоторой функции, мажорирующей свободный член (1.6). В качестве этой мажорирующей функции может быть взята, например, $E_2(r + R_0)$. Действительно, используя (3.8), легко получить неравенства

$$0 < \Lambda^n[1]_r < 1 - \frac{1}{2} \sum_{v=0}^{n-1} \Lambda^v[E_2(\rho + R_0)]_r$$

при $n = 2, 3, \dots$

Отсюда следует, что ряд Неймана $\sum_{v=0}^{\infty} \Lambda^v[E_2(\rho + R_0)]_r$ сходится при всех $r \geq R_0$ и его сумма не больше 2. Но

$$F \frac{e^{-r}}{r} < \frac{2(R_0 + 1)}{R_0} E_2(r + R_0) F e^{R_0},$$

так как

$$E_2(r + R_0) > \frac{e^{-(r+R_0)}}{r + R_0 + 1}, \quad \frac{2(R_0 + 1)}{R_0(R_0 + r + 1)} > \frac{1}{r}.$$

Поэтому ряд Неймана (1.11) также сходится и его сумма не превышает величины $\frac{4(R_0 + 1)}{R_0} Fe^{R_0}$. Функция $B(r) = \frac{E}{r} \sum_{v=0}^{\infty} \Lambda^v \left[\frac{e^{-\rho}}{\rho} \right]_r$ очевидно,

убывает при $r \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $\frac{1}{r}$.

Функции $K(r, \rho)e^{\lambda(r+\rho)}$ и $E(\sqrt{r^2 - R_0^2} + \sqrt{\rho^2 - R_0^2})e^{\lambda(r+\rho)}$ при любом $\lambda < 1$, как нетрудно показать, интегрируемы с квадратом в двумерной области $(R_0, \infty) \times (R_0, \infty)$. Следовательно, характер решений, как однородного уравнения $y = \Lambda[y]_r$, так и неоднородного $y = \Lambda[y]_r + f(r)$ определяется свойством сингулярной части ядра - $E(|r - \rho|)$ [8]. Это означает, что в классе функций, интегрируемых с весом e^{-r} на (R_0, ∞) , существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение однородной задачи. Оно возрастает как e^{vr} (при $\omega_0 < 1$) или как r (при $\omega_0 = 1$) при $r \rightarrow \infty$. Здесь v - неотрицательный корень характеристического уравнения

$$\frac{\omega_0}{2v} \ln \frac{1+v}{1-v} = 1 \quad \begin{array}{l} v = 0 \text{ при } \omega_0 = 1 \\ 0 < v < 1 \text{ при } \omega_0 < 1. \end{array}$$

Асимптотика ограниченного решения неоднородного уравнения

$$y(r) = \Lambda[y]_r + f(r) \quad (1.13)$$

- единственного решения из $L_2(R_0, \infty)$ определяется функцией

$$y_{as}(r) = Ce^{-v(r-R_0)} + O(e^{-(r-R_0)}), \quad (1.14)$$

где множитель C зависит от ω_0, R_0, γ , но не зависит от r . Основываясь на этих результатах и учитывая, что $y = \text{const} \cdot r$ ($B = \text{const}$) является решением однородного уравнения $y = \Lambda[y]_r$, при $\omega_0 = 1, \gamma = 1$, легко видеть, что справедлива и вторая часть теоремы 1.

Отметим, что при $R_0 \rightarrow \infty$ в случае, когда $\omega_0 = 1, \gamma = 1$, наши оценки перестают быть справедливыми. Ограниченного решения предельной задачи - о распространении излучения от плоского источника в бесконечной чисто рассеивающей среде - не существует. Действительно, в этом случае плотность излучения должна быть решением неоднородной задачи с предельным ядром

$$\tilde{y}(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{E(|r - \rho|) + E(r + \rho)\} \tilde{y}(\rho) d\rho + Ae^{-r}.$$

Так как решением соответствующей однородной задачи является постоянная, то, как легко видеть, для всякого конечного r справедливо неравенство

$$\tilde{y}(r) \geq \tilde{y}(\infty) > 0, \quad (1.15)$$

где $\tilde{y}(\infty)$ - предельное значение $\tilde{y}(r)$ при $r \rightarrow \infty$, согласно [8] может быть найдено по формуле

$$\tilde{y}(\infty) = \alpha \left\{ A \int_0^{\infty} [r + q(r)] e^{-r} dr + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} d\rho E(r + \rho) \tilde{y}(\rho) [r + q(r)] \right\} > 0,$$

где $\alpha > 0$, $0 < q(r) < 1$.

Уравнение для производной решения \tilde{y}' имеет вид

$$\tilde{y}'(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{E(|r - \rho|) - E(r + \rho)\} \tilde{y}'(\rho) d\rho - A e^{-r}.$$

Следовательно, $\tilde{y}'(r) < 0$, и при $r \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу [8]

$$\tilde{y}'(\infty) = -A\alpha \int_0^{\infty} r e^{-r} dr = -A\alpha < 0,$$

что противоречит (1.15).

2. Обратимся теперь к исследованию характера зависимости решения от r и параметров задачи R и R_0 . Согласно (1.14), при $r - R_0 \rightarrow \infty$, $R = \infty$

$$B_{\infty}(r) = \frac{C e^{-v(r-R_0)}}{r} + O\left(\frac{e^{-(r-R_0)}}{r}\right) \quad (2.1)$$

Пользуясь формулами (1.3-1.5), найдем

$$\Phi_{\infty}(r, \mu) = \frac{C}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при} \quad \omega_0 = 1, \quad (2.2)$$

$$\Phi_{\infty}(r, \mu) = \frac{e^{-vr}}{(1 - \mu v)r} + O\left(\frac{e^{-vr}}{r^2}\right) \quad \text{при} \quad \omega_0 < 1,$$

то есть асимптотика Φ_{∞} по r такая же как в задаче о точечном источнике в бесконечной среде [9, 10].

Для того, чтобы исследовать зависимость решения Φ_R от r и R в задаче о сферической оболочке конечной толщины $R - R_0$ при R достаточно большом, как в [11], введем функцию $\bar{\Phi}_R(r, \mu)$,

$$\bar{\Phi}_R(r, \mu) = \Phi_{\infty}(r, \mu) - \Phi_R(r, \mu),$$

$\bar{\Phi}_R$ есть, очевидно, решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mu} + \bar{\Phi}(r, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} \bar{\Phi}(r, \mu) d\mu$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(R_0, \mu) &= \gamma \bar{\Phi}(R_0 - \mu), & \mu > 0 \\ \bar{\Phi}(R, \mu) &= \Phi_\infty(R, \mu), & \mu < 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя (2.2), придем к следующим выражениям для $\bar{\Phi}_R$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_R(r, \mu) &= \frac{C}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при } \omega_0 = 1, \\ \bar{\Phi}_R(r, \mu) &= \frac{e^{-vR}}{R} \varphi(r, \mu) \quad \text{при } \omega_0 < 1, \end{aligned}$$

где $\varphi(r, \mu)$ ограничено сверху решением $f(r)$ неоднородного уравнения

$$f(r) = \Lambda[f]_r + O(e^{-(R-r)}).$$

Функция $f(r)$ ведет себя, по крайней мере как $e^{-v(R-r)}$ при $R-r$ достаточно большом. Этот результат можно получить, пользуясь асимптотическими формулами типа (1.4) для $f(r)$ при $-r+R \rightarrow \infty$.

Таким образом, при достаточно больших R с точностью до величин $\sim \frac{1}{R^2}$

$$\begin{aligned} \Phi_R(r, \mu) &= \Phi_\infty(r, \mu) - \frac{C(R_0)}{R} \quad \text{при } \omega_0 = 1, \\ \Phi_R(r, \mu) &= \Phi_\infty(r, \mu) + O\left(\frac{e^{-vR}}{R}\right) \quad \text{при } \omega_0 < 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В частности, обозначив через $A_R(R_0, \mu)$ функцию $\Phi_R(R_0, \mu)$, будем иметь

$$\begin{aligned} A_R(R_0, \mu) &= A_\infty(R_0, \mu) - \frac{C(R_0)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), & \omega_0 = 1, \\ A_R(R_0, \mu) &= A_\infty(R_0, \mu) + O\left(\frac{e^{-vR}}{R}\right), & \omega_0 < 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Рассмотрим теперь зависимость решения задачи (1.6) при $R = \infty$ от параметра R_0 .

При $R_0 \ll 1$ из оценки (1.12) следует, что $B < \frac{\text{const}}{rR_0}$.

Записывая (1.6) в виде

$$rB(r) = \Lambda_0[\rho B(\rho)]_r + F \frac{e^{-r}}{r} + \Lambda_1[\rho B(\rho)]_r + \Lambda_2[\rho B(\rho)]_r,$$

где

$$\Lambda_0[f]_r = \frac{\omega_0}{2} \int_0^\infty \{E(|r - \rho|) - E(r + \rho)\} f(\rho) d\rho,$$

$$\Lambda_1[f]_r = -\frac{\omega_0}{2} \int_0^{R_0} \{E(|r - \rho|) - E(r + \rho)\} f(\rho) d\rho,$$

$$\Lambda_2[f]_r = \frac{\omega_0}{2} \int_2^\infty \{\gamma K(r, \rho) - E(\sqrt{r^2 - R_0^2} + \sqrt{\rho^2 - R_0^2}) + E(r + \rho)\} f(\rho) d\rho,$$

и учитывая, что $\Lambda_{1,2}[1] \sim R_0 \ln R_0$ получим, что с точностью до величин порядка $\ln R_0 rB(r)$, а следовательно, $\Phi(r, \mu)$ совпадает с решением задачи о точечном источнике в бесконечной среде.

Отсюда

$$B(R_0) = \frac{F}{R_0^2} + O\left(\frac{\ln R_0}{R_0}\right), \quad (3.1)$$

$$A(R_0, \mu) = \frac{F}{R_0} \frac{\mathcal{G}}{\sin \mathcal{G}} + O(\ln R_0), \quad \mathcal{G} = \pi - \arccos \mu.$$

В задачах с $R_0 \gg 1$ оценки (1.12) оказываются слишком грубыми. В тех случаях, когда $\omega_0 < 1$ пользуясь (1.10) и учитывая, что

$$\frac{1}{R_0} E_3(a) - \frac{3}{R_0^3} E_5(a) < \int_{R_0}^\infty E(a + \sqrt{\rho^2 - R_0^2}) d\rho < \frac{1}{R_0} E_3(a) \quad (3.2)$$

будем иметь

$$\int_{R_0}^\infty \{\gamma K(r, \rho) - \gamma E(r + \rho - 2R_0) - E(\sqrt{\rho^2 - R_0^2} + \sqrt{r^2 - R_0^2})\} d\rho = O\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

Так как ряд Неймана (1.11) при $\omega_0 < 1$ сходится, как геометрическая прогрессия с показателем ω_0 , то главная часть решения при $R_0 \rightarrow \infty$ $y_0(x)$ ($x = r - R_0$) может быть найдена из уравнения с предельным ядром:

$$y_0(x) = \frac{\omega_0}{2} \int_0^\infty \{E(|x - x'|) + \gamma E(x + x')\} y(x') dx' + \frac{\tilde{F} e^{-x}}{R_0 + x}, \quad \tilde{F} = F e^{R_0}.$$

Очевидно, $y_0(x) = O\left(\frac{\tilde{F}}{R_0}\right)$ и, следовательно, при $\omega_0 < 1$ и $r \approx R_0$

$$B(r) \sim \frac{\tilde{F}}{R_0 r}, \quad A \sim \frac{\tilde{F}}{R_0^2}.$$

Для того, чтобы оценить поведение решения при $R_0 \rightarrow \infty$ в случае $\omega_0 = 1$, запишем (1.6) в виде

$$y(r) = L_0[y] + L_1[y] + \frac{F e^{-r}}{r},$$

где при $\gamma = 1$

$$\begin{aligned} L_0[y] &= \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\infty} \{E(|r - \rho|) + E(r + \rho - 2R_0) - 2E(r - R_0 + \\ &\quad + \sqrt{\rho^2 - R_0^2})\} y(\rho) d\rho \\ L_1[y] &= \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\infty} \{K(r, \rho) - E(\sqrt{r^2 - R_0^2} + \sqrt{\rho^2 - R_0^2}) - E(r + \rho - 2R_0) + \\ &\quad + 2E(r - R_0 + \sqrt{\rho^2 - R_0^2})\} y(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

а при $\gamma < 1$

$$\begin{aligned} L_0[y] &= \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\infty} \{E(|r - \rho|) + \gamma E(r + \rho - 2R_0)\} y(\rho) d\rho \\ L_1[y] &= \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\infty} \{\gamma K(r, \rho) - E(\sqrt{r^2 - R_0^2} + \sqrt{\rho^2 - R_0^2}) - \\ &\quad - \gamma E(r + \rho - 2R_0)\} y(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Согласно (1.10) и (3.2) будем иметь

при $\gamma = 1$: $L_0[1] = 1 - \frac{1}{R_0} E_3(r - R_0) + O\left(\frac{e^{-(r-R_0)}}{R_0^3}\right),$

$$L_1[1] = O\left(\frac{e^{-(r-R_0)}}{R_0^3}\right), \tag{3.3}$$

при $\gamma < 1$: $L_0[1] = 1 - \frac{1-\gamma}{2} E_2(r - R_0),$

$$L_1[1] = O\left(\frac{E_3(r - R_0)}{R_0}\right).$$

Так же как при доказательстве теоремы 1, получим

$$\sum_{v=0}^{\infty} L_0^v \left[\frac{1}{R_0} E_3(\rho - R_0) \right]_r < 1 + O\left(\frac{1}{R_0^3}\right) \quad \text{при } \gamma = 1,$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} L_0^v \left[\frac{1-\gamma}{2} E_2(r - R_0) \right] < 1 + O\left(\frac{1}{R_0}\right) \quad \text{при } \gamma < 1.$$

Отсюда следует, что, пренебрегая величинами порядка $1/R_0^2$, мы можем определить решение $y(r)$ из приближенного уравнения

$$y(r) = L_0[y] + F \frac{e^{-r}}{r}, \quad (3.4)$$

и при $\gamma < 1$ $y(r) \sim \frac{1}{R_0}$, при $\gamma = 1$ $y(r) < R_0$.

Таким образом, при $\gamma < 1$, $\omega_0 = 1$ $B(r) \sim \frac{\tilde{F}}{rR_0}$, $A \sim \frac{\tilde{F}}{rR_0^2}$ так же, как в задачах с $\omega_0 < 1$.

В задачах с $\gamma = 1$ производная $y'(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$y'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{E(|x - x'|) + E(x + x')\} y'(x') dx' + F(x),$$

где

$$F(x) = - \int_0^{\infty} E(x + \sqrt{x'^2 + 2R_0 x'}) y(x') dx' - \frac{F e^{-x} (R_0 + x + 1)}{(R_0 + x)^2}.$$

Так как при $x \rightarrow \infty$ $y'(x)$ обращается в 0, а с другой стороны, согласно [12]

$$y'(\infty) = 3 \int_0^{\infty} x F(x) dx,$$

то должно выполняться равенство

$$\int_0^{\infty} E_2(\sqrt{x'^2 + 2R_0 x'}) y(x') dx' = FE(R_0) = \frac{\tilde{F}}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right). \quad (3.5)$$

Легко видеть, что

$$|F| < \frac{\max y}{R_0} e^{-x} + O\left(\frac{\tilde{F} e^{-x}}{R_0}\right).$$

Так как $\max y < R_0$, то $|y'| < \bar{q} + O\left(\frac{1}{R_0}\right)$, где \bar{q} - максимум решения уравнения

$$q(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E(|x - x'|) q(x') dx' + e^{-x},$$

не превышающий, как известно [4], значения $q_{\infty} \approx 5$. Подставляя в (3.5) вместо $y(x)$ выражение

$$y(x) = y(0) + y'(\xi)x, \quad R_0 < \xi < \infty, \quad (3.6)$$

получим

$$y(0) = \frac{\tilde{F}}{R_0} \frac{1}{\int_0^{\infty} E_2(\sqrt{x^2 + 2R_0x}) dx} + O\left(\frac{1}{R_0}\right) = 3\tilde{F} + O\left(\frac{1}{R_0}\right). \quad (3.7)$$

Записывая (3.4) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{E(|x - x'|) - E(x + x')\} y(x') dx' + f(x),$$

где

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{E(|x + x'|) - E(x + \sqrt{x'^2 + 2R_0x'})\} y(x') dx' + \frac{\tilde{F}e^{-x}}{R_0 + x},$$

и для значения $y(\infty)$, пользуясь выражением [12]

$$y(\infty) = 3 \int_0^{\infty} xf(x) dx,$$

получим

$$y(\infty) = 3 \int_0^{\infty} y(x') E_3(x') dx' - 3 \int_0^{\infty} y(x') E_3(\sqrt{x'^2 + 2R_0x'}) dx' + 3FE_2(R_0).$$

Мы воспользуемся тем обстоятельством, что в этом случае с точностью до величин $\sim \frac{1}{R_0^3}$ функция $z = 1$, согласно (3.3) есть решение уравнения

$$z(r) = L_0(z) + \frac{1}{R_0} E_3(r - R_0).$$

Так как $y(x') = \sum_{v=0}^{\infty} L_0^v \left[F \frac{e^{-r}}{r} \right]_r$, то меняя порядок интегрирования, как

в [4], найдем

$$\int_0^{\infty} y(x') E_3(x') dx' = \tilde{F} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{R_0 + x} \sum_0^{\infty} L_0^v[E_3(x)] dx = \tilde{F} + O\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

Но

$$\int_0^{\infty} y(x') E_3(\sqrt{x'^2 + 2R_0 x'}) dx' < \int_0^{\infty} y(x) E_2(\sqrt{x^2 + 2R_0 x}) dx = FE(R_0),$$

$$\text{а } E_n(R_0) = \frac{e^{-R_0}}{R_0} + O\left(\frac{e^{-R_0}}{R_0^2}\right).$$

Таким образом,

$$y(\infty) = 3\tilde{F} + O\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

Оценивая с помощью (3.6) $f(x)$, легко получить, что

$$f(x) = \frac{\tilde{F}}{R_0} \left[\frac{3}{2} E_2(x) - e^{-x} \right] + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Следовательно, $y'(x) = O\left(\frac{1}{R_0}\right)$, в частности, полагая $x=0$ в (3.4),

получаем

$$y'(0) = f(0) = \frac{\tilde{F}}{2R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Поскольку при $x \geq 1$ $f(x) < 0$, следует ожидать, что при $x \rightarrow \infty$ $y'(x) \rightarrow 0$, оставаясь отрицательной и, таким образом, $y(x)$ при изменении x от 0 до ∞ сначала возрастает от значения $y(0) = 3\tilde{F}$, проходит через максимум и затем убывает от $y(\infty) = 3\tilde{F}$ - своего минимального значения. Следовательно, в том случае

$$B(r) = \frac{3\tilde{F}}{r} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad B(R_0) = \frac{3\tilde{F}}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Чтобы найти $A(R_0, \mu)$, подставим (3.6) в (1.3) и выделяя главный член разложения по степеням $1/R_0$ получим

$$A(R_0, \mu) = \frac{3\tilde{F}}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Проведенный анализ показывает, что когда $\omega_0 = 1$, решение задачи о точечном источнике в сферической полости оказывается весьма близким к решению задачи о точечном источнике в бесконечном пространстве, по крайней мере, в двух предельных случаях – при очень малом радиусе R_0 полости и при очень большом. В том случае, когда $\omega_0 < 1$, наличие полости

мало сказывается на результате лишь при $R_0 \ll 1$. Задача же с $R_0 \gg 1$ существенно отличается от задачи с $R_0 = 0$, как и следует ожидать.

Автор пользуется случаем высказать благодарность В.Г.Курту, по предложению которого была предпринята настоящая работа.

Математический институт АН СССР
им. В.А.Стеклова

ON THE DIFFUSION OF RADIATION IN A SPHERICAL LAYER AROUND A POINT SOURCE

T.A.Germogenova

The solution of the equation of radiative transfer for a homogeneous absorbing and isotropically scattering spherical layer is investigated, an isotropical point source being at the centre. An asymptotic of intensity of radiation at great distances from the inner surface of the layer is obtained. Two cases of this problem are considered: that with infinite optical thickness of the layer and the other with a finite one.

The connection between these cases is discussed. The dependence of the solution on inner radius of the layer is studied.

Specific attention is paid to the evaluation of the inner surface albedo.

Литература

1. *В.В.Соболев*, сб «Кинематика и динамика звездных систем и физика межзвездной среды», «Наука», Алма-Ата, 1965, 285.
2. *Д.И.Нагирнер*, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., №32, 1965, 66.
3. *В.Г.Курт, Т.А.Гермогенова*, Астрон. ж., (в печати), 1966.
4. *Е.Норф*, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tracts №31, 1934.
5. *В.С.Владимиров*, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 3, 1957.
6. *Е.С.Кузнецов*, Изв. АН СССР, сер. геофиз., №3, 1951.
7. *М.В.Масленников*, Труды МИАН СССР, вып., 97, (в печати).
8. *Т.А.Гермогенова*, ДАН СССР, 115, 23, 1957.
9. *К.М.Сейф, F. de Hoffmann, G Praszek*, Introduction to the theory of neutron diffusion, v. I, Los Alamos, June, 1953
10. *В.А.Амбарцумян*, Бюлл. Ереванск астрон. обс. №6, 3, 1945.
11. *Т.А.Гермогенова*, Журн. ВМ и МФ, 1, 1002, 1961.
12. *Т.А.Гермогенова*, сб. «Некоторые математические задачи нейтронной физики», М., 1960, 80.

РАССЕЯНИЕ СОЛНЕЧНОГО L_α ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ГАЛАКТИЧЕСКОМ ВОДОРОДЕ

В.Г.Курт, Т.А.Гермогенова

Астрономический журнал, 1967, 44, №2, стр.352-357.

Рассматривается задача о когерентном рассеянии L_α - излучения в однородной изотропной среде с точечным источником, окруженным полостью. Сравнение теории с наблюдаемой в солнечной системе интенсивностью показывает, что зона ионизованного водорода (зона H II), окружающая Солнце, имеет радиус не менее 10^3 а.е. В связи с этим остается открытым вопрос о природе горячих ($T \sim 10^5$ °К) атомов водорода с концентрацией $\sim 10^{-2}$ см $^{-3}$ вблизи орбиты Земли.

THE SCATTERING OF THE SOLAR L_α RADIATION ON GALACTIC HYDROGEN, by V.G.Kurt, T.A.Germogenova. – The problem on the coherent scattering of L_α radiation in the homogeneous isotropic medium with a point source surrounded by a hole is considered. The comparison of the theory with the intensity observing in the Solar System shows that the ionized hydrogen zone (zone H II), surrounding the Sun, has a radius no less than 10^3 a.u. In connection with it a question on the origin of hot ($t \sim 10^5$ °K) hydrogen atoms with the concentration $\sim 10^{-2}$ cm $^{-3}$ near the Earth orbit is left open.

В последнее время ракетные наблюдения показали наличие L_α - излучения, не связанного с водородной короной Земли [1-3]. Первый косвенный эксперимент был выполнен Мартоном и Парселлом в 1961 г. с помощью водородного фильтра, срезающего излучение в полосе 0.08 \AA , около $\lambda 1215.8 \text{ \AA}$. При этом авторы [1] обнаружили, что 15% излучения, идущего от зенита, проходит через фильтр, в то время как излучение, идущее от надира, полностью поглощается. Интенсивность излучения, пропущенного фильтром, равнялась примерно $3 \cdot 10^{-4}$ эрг/см 2 ·сек·стер. Аналогичный эксперимент был выполнен теми же авторами в 1965 г. и привел, примерно, к подобным результатам: интенсивность излучения, прошедшего через фильтр шириной 0.05 \AA , составляла 45% от излучения без фильтра, что соответствует $\sim 5 \cdot 10^{-4}$ эрг/см 2 ·сек·стер.

Оба эксперимента были выполнены с высоты ~ 200 км. В опыте [2], осуществленном одним из авторов настоящей работы, было непосредственно зарегистрировано L_α - излучение вдали от геокороны, на расстоянии, примерно равном $15 \cdot 10^6$ км. Наблюдаемое излучение было практически изотропным, и его интенсивность равнялась примерно 10^{-4} эрг/см 2 ·сек·стер. Можно утверждать, что с точностью 20% отсутствует концентрация наблюдавшегося излучения плоскости эклиптики. В этом

эксперименте регистрировалось излучение в полосе 1225-1340 Å. По-видимому, весь наблюдавшийся эффект связан с L_α - излучением, поскольку контрольный счетчик, чувствительный в полосе вне L_α , регистрировал фон, равный ожидаемому фону космических лучей. В последнее время были выполнены длительные эксперименты [4] на автоматических межпланетных станциях «Венера-2» и «Венера-3», давшие сходные результаты. Наблюдавшаяся интенсивность практически постоянна и ее флуктуации, осредненные за сутки, не превышают 30%. Этот материал в настоящее время подробно анализируется.

Наиболее примечательным является согласие друг с другом обеих групп наблюдений. Можно предположить три чисто умозрительные гипотезы, объясняющие одинаковую наблюдаемую интенсивность L_α - излучения: 1) ширина эмиссионной линии $\gg 0.08 \text{ Å}$, что соответствует температуре, значительно превышающей 10^{40} K ; 2) имеется доплеровское смещение, соответствующее лучевой скорости $> 10 \text{ км/сек}$; 3) профиль эмиссионной линии имеет значительную депрессию в центре, полуширина которой $> 0.04 \text{ Å}$. Физическая картина, отвечающая первому случаю, соответствует модели горячего нейтрального водорода в солнечной системе с концентрацией $10^{-2} \div 10^{-3} \text{ ат/см}^3$ [5, 6]. Наличие больших доплеровских скоростей, связанных с орбитальным движением Земли или атомов водорода в солнечной системе, находится в противоречии с наблюдениями Мортон и Перселла [1], не обнаружившими вариаций интенсивности L_α - излучения при различной ориентации прибора. Остается проанализировать возможность объяснения наблюдений в рамках рассеяния солнечной эмиссионной линии L_α на холодном галактическом водороде. Весьма приблизительно эта задача рассматривалась в работе [6]. Указанная проблема соответствует задаче о распространении излучения в однородной, изотропной среде с точечным, изотропным источником в центре, окруженным полостью. Область, свободная от рассеивающих атомов, соответствует зоне Н II Стремгрена, где L_α - излучение распространяется без поглощения и рассеяния. Уравнение переноса L_α - излучения для случая когерентного рассеяния может быть записано в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \bar{r}} + \frac{1 - \bar{r}^2}{\bar{r}} \frac{\partial I}{\partial \mu} + \sigma I(\bar{r}, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} I(\bar{r}, \mu') d\mu',$$

$$\bar{R}_0 < \bar{r} < \bar{R}, \quad -1 < \mu < +1;$$

$$I(\bar{R}_0, \mu) = I(\bar{R}_0, -\mu) + \frac{J_0 \delta(\mu - 1)}{4\pi \bar{R}_0^2} \quad \text{для } \mu > 0$$

$$I(\bar{R}, \mu) = 0 \quad \text{для } \mu < 0$$
(1)

Здесь J_0 - мощность центрального источника в единицах эрг/сек, отнесенная к спектральному интервалу шириной $\Delta\lambda_D$, соответствующей температуре среды; σ - полное сечение взаимодействия с веществом, рассчитанное на единицу пути; σ_s - сечение рассеяния; \bar{R}_0 - внутренний радиус полости; \bar{R} - внешний радиус сферической оболочки, равный в нашем случае ∞ ; $\Delta\lambda_D$ - доплеровская ширина линии рассеяния.

Переходя к безразмерным величинам $r = \bar{r}\sigma$; $R_0 = \bar{R}_0\sigma$; $R = \bar{R}\sigma$ и $\omega = \sigma_s / \sigma$, введем функцию $J(r, \mu)$ - равную интенсивности рассеянного излучения:

$$J(r, \mu) = I(\bar{r}, \mu) - \frac{J_0 \delta(\mu - 1)}{4\pi \bar{r}^2} e^{-\sigma(\bar{r} - \bar{R}_0)} \quad (2)$$

Тогда для $J(r, \mu)$ будем иметь следующую краевую задачу

$$\mu \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{1-r^2}{r} \frac{\partial J}{\partial \mu} + J(r, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} J(r, \mu') d\mu' + \frac{F e^{-r}}{r^2} \equiv B(r), \quad (3)$$

$$F = F(R_0) = \frac{J_0 \sigma \sigma_s e^{R_0}}{8\pi} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} J(r, \mu) &= J(r, -\mu) \quad \text{для } \mu > 0 \text{ при } r = R_0 \\ J(r, \mu) &= 0 \quad \text{для } \mu < 0 \text{ при } R < \infty, \end{aligned}$$

$B(r)$ - функция источника.

Исследованию указанной задачи посвящена работа [7]. Здесь мы приводим только окончательные формулы для интересующего нас случая $R \rightarrow \infty$ и $\sigma = \sigma_s$. При r , достаточно большом, решение задачи $R \rightarrow \infty$ описывается выражениями:

$$\begin{aligned} J_\infty(r, \mu) &= \frac{C}{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } \omega_0 = 1, \\ J_\infty(r, \mu) &= \frac{C}{1 - \mu\nu} \frac{1}{r} e^{-\nu r} + o\left(\frac{e^{-\nu r}}{r}\right) \quad \text{при } \omega_0 < 1, \end{aligned}$$

т.е. асимптотические решения имеют тот же вид, что и в задаче о точечном источнике в бесконечной среде [8, 9]. Здесь ν - корень характеристического уравнения

$$\frac{\omega_0}{2\nu} \ln \frac{1+\nu}{1-\nu} = 1. \quad (5)$$

Пусть J_R есть решение задачи (3) и (4) при R конечном. Тогда при достаточно больших R с точностью до величин $\sim 1/R^2$

$$J_\infty(r, \mu) = J_R(r, \mu) + \frac{C(R_0)}{R} + o\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \text{при } \omega_0 = 1; \quad (6)$$

$$J_\infty(r, \mu) = J_R(r, \mu) + o\left[\frac{e^{-v(R-R_0)}}{R}\right], \quad \text{при } \omega_0 < 1.$$

Для альbedo будут выполняться формулы, аналогичные (6):

$$A_\infty(R_0, \mu) = A_R(R_0, \mu) + \frac{c(R_0)}{R} + \left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \omega_0 = 1; \quad (7)$$

$$A_\infty(R_0, \mu) = A_R(R_0, \mu) + o\left[\frac{e^{-v(R-R_0)}}{R}\right], \quad \omega_0 < 1$$

Под альbedo мы будем в дальнейшем понимать интенсивность излучения на границе внутренней сферы, свободной от рассеивающих атомов.

Рассмотрим теперь зависимость решения от параметра R_0 , т.е. от размера зоны, свободной от рассеивающих атомов. При $R_0 \ll 1$ можно показать, что функция источника B :

$$B(R_0) = \frac{Fe^{-R_0}}{R_0} + o\left(\frac{\ln R_0}{R_0}\right) \quad (8)$$

$$A(R_0, \mu) = \frac{Fe^{-R_0}}{R_0} \left(\frac{\mathcal{G}}{\sin \mathcal{G}}\right) + o\left(\frac{\ln R_0}{R_0}\right),$$

где угол $\mathcal{G} = \pi - \arccos \mu$ отсчитывается от точки, противоположной источнику.

Для $R_0 \gg 1$

$$B(r) = \frac{3Fe^{-R_0}}{R_0}, \quad r \rightarrow \infty$$

$$B(R_0) = \frac{3Fe^{-R_0}}{R_0} + o\left(\frac{1}{R_0^2}\right), \quad (9)$$

$$A(R_0) = \frac{3Fe^{-R_0}}{R_0} + o\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Отметим, что полученные формулы для $B(r)$ совпадают с асимптотическими формулами для случая точечного источника в бесконечной рассеивающей среде.

Подставляя в выражения (8) и (9) значения для F из (4), получим для интенсивности рассеянного излучения окончательные формулы:

$$A_D = \frac{3J_0 k_\lambda n}{8\pi \bar{R}_0} \quad \text{для } R_0 \gg 1, \quad (10)$$

$$A_L = \frac{J_0 k_\lambda n}{8\pi \bar{R}_0} \left(\frac{\mathcal{G}}{\sin \mathcal{G}} \right) \quad \text{для } R_0 \ll 1,$$

где k_λ - эффективное сечение рассеяния, рассчитанное на один атом в функции длины волны λ . Очевидно, что в рассматриваемой проблеме область $R_0 \gg 1$ соответствует центральной, доплеровской части линии, где $k_\lambda = k_0 e^{-x^2}$ x - расстояние от центра линии, измеряемое в единицах доплеровской полуширины, равной $\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{C} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, а k_0 - значение эффективного сечения в центре линии

$$k_0 = \frac{5.9 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{T}} \text{ см}^2.$$

Так как \bar{R}_0 , т.е. размер зоны Н II, не менее 10^3 а.е., или $1.5 \cdot 10^{16}$ см. (см. ниже), то область, где применима первая формула (10), для $T \sim 10^2$ °К соответствует пределам изменения x от $-2.8+2.8$.

В лоренцевской области эффективное сечение рассеяния можно представить в виде

$$k_\lambda = \frac{k_0}{x^2}, \quad \text{где } k_0 = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2.$$

Формула справедлива для $x > 3$, однако в нашем случае ею можно воспользоваться при подстановке в (10) только для $x > 4.5$, так как только в этом случае значение $R_0 = \bar{R}_0 n k_\lambda$ будет существенно меньше единицы. Соответственно сказанному, интенсивности в разных частях линии обозначены через A_D, A_L .

Для вычисления интенсивности и сравнения ее с наблюдениями необходимо проинтегрировать выражения (10) по x . Тогда получим для доплеровского ядра:

$$J_D = 2 \int_0^{2.8} A_D dx = \frac{3J_0 n k_0 \Phi(2.8\sqrt{2})}{8\sqrt{\pi} \bar{R}_0}, \quad (11)$$

где Φ - интеграл вероятности.

Подставляя в (11) численные значения: $J_0 = 4.2 \cdot 10^{25}$ эрг/сек $\Delta\lambda_D$, что соответствует потоку в линии L_α на границе земной атмосферы ~ 3 эрг/см²·сек, ширине линии 1Å и $\Delta\lambda_D = 5 \cdot 10^{-3}$ Å при температуре межзвездного водорода $\sim 10^2$ °К; $n = 1$ ат/см³ - получим

$$J_D = \frac{5.3 \cdot 10^{12}}{\bar{R}_0} \text{ эрг / см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер.} \quad (11')$$

Аналогично для лоренцевской области получим

$$J_L = \frac{J_0 n}{4\pi \bar{R}_0} \left(\frac{\mathcal{G}}{\sin \mathcal{G}} \right) \int_{4.5}^{100} \frac{k_0}{x^2} dx = \frac{10^9}{\bar{R}_0} \left(\frac{\mathcal{G}}{\sin \mathcal{G}} \right) \text{ эрг / см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер.} \quad (12)$$

Очевидно, что основной вклад в наблюдаемую интенсивность вносит ядро линии, и лоренцевскими крыльями можно вполне пренебречь. Необходимо, однако, хотя бы приблизительно учесть область профиля линии рассеянного излучения в пределах изменения x от 2.8 до 4.5. Заведомо большее значение этой величины может быть получено по формуле (12), что дает

$$J_L(2.8 < x < 4.5) = \frac{6.3 \cdot 10^8}{R_0} \text{ эрг / см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер.} \quad (12')$$

Найденное значение существенно меньше интенсивности в пределах доплеровского ядра. Расчетный профиль линии рассеянного L_α - излучения представлен на рис. 1 в относительных единицах; для перевода последних в $\text{эрг / см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер} \Delta\lambda_D$ необходимо умножить приведенные величины на $3 \cdot 10^{12} n / \bar{R}_0$.

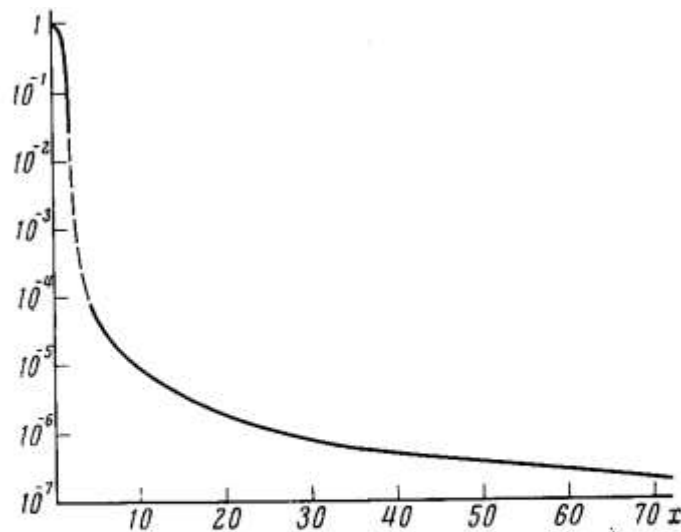


Рис.1. Профиль линии L_α , рассеянной на межзвездном холодном водороде с $T = 10^2$ °К. Сплошные кривые - результат применения формул (10), пунктир- интерполяция.

Сопоставим теперь вычисленные значения с наблюдениями, для чего положим $n = 1 \text{ см}^{-3}$, что соответствует межзвездной плотности нейтрального водорода вне облаков. Максимально возможное значение для $n \sim 10 \text{ см}^{-3}$.

В этом случае можно получить для \bar{R}_0 нижнюю границу, полагая, что весь наблюдаемый эффект связан с рассеянием солнечной эмиссионной линии только на межзвездном водороде. Тогда, приравнивая значение (11') $10^{-4} \text{ эрг} / \text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{стер}$, получим для радиуса зоны Н II: $\bar{R}_0 = 5.3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} = 3500 \text{ а.е.}$

Однако можно утверждать, что существенная часть наблюдаемой интенсивности связана с рассеянием на горячем межпланетном водороде с $T > 10^4 \text{ }^\circ\text{К}$, что является следствием равенства интенсивности при измерениях с помощью фильтровой методики и измерений вне геокороны с широкой полосой пропускания аппаратуры. Полагая, что фильтр полностью обрезал излучение в полосе 0.08 \AA [1], что соответствует $-8 < x < 8$, найдем отношение показаний приборов

$$p = \frac{J(0 < x < 100)}{J(8 < x < 100)},$$

равное примерно 10^4 , что полностью противоречит эксперименту: если воспользоваться результатами работы [2], согласно которой фильтр срезал излучение в полосе 0.05 \AA , то $p = 5 \cdot 10^3$.

Остается рассмотреть третью возможность объяснить наблюдаемый результат в рамках теории рассеяния на межзвездном водороде, связанную с появлением депрессии в центре линии из-за учета некогерентности процесса рассеяния.

Так как профиль в области Н I вне доплеровского ядра определяется исключительно затуханием излучения, то рассеяние L_α - квантов является когерентным. Учет некогерентности в области доплеровского ядра способствует выводу квантов в крылья, что уменьшает интенсивность в центре линии. Однако решение уравнения переноса с учетом перераспределения по частотам в пределах $\Delta\lambda_D$ слишком сложно. Если считать в соответствии с [10], что максимум линии смещается в обе стороны на величину порядка $3\Delta\lambda_D$, то $p = 3$, что уже вполне приемлемо. Вряд ли можно полагать, что интенсивность в центре линии падает практически до нуля. Поэтому этот вариант, хотя полностью не может быть исключен, все же остается маловероятным.

В свете сказанного проанализируем данные относительно природы нейтрального водорода в пределах солнечной системы. Расчет величины зоны Н II в последнее время выполнялся несколькими авторами [11, 12]. Однако вычисления, основанные на использовании планковского характера

ультрафиолетового конца спектра Солнца, вряд ли могут быть правильными. Как правило, они приводили к сильно заниженным, на наш взгляд, величинам радиуса зоны Н II ~ 200 а.е. Использование новых данных относительно ультрафиолетового спектра Солнца, полученных с помощью ракетных измерений, дает для \bar{R}_0 значение существенно большее.

Так, например, согласно результатам расчета Вильямса [12], радиус зоны Н II ~ 1500 а.е. при плотности межзвездной среды 1 см^{-3} и $T = (1 \div 2) \cdot 10^4$ °К (степень ионизации, $\alpha = n_i / (n_i + n_0) = 0.5$, где n_i - концентрация протонов, n_0 - концентрация нейтральных атомов); для $n_0 = 10 \text{ см}^{-3}$; $\bar{R}_0 = 500$ а.е. В связи со сказанным следует обратить внимание на косвенное определение величины \bar{R}_0 , выполненное Разиным [13], по оценкам величины фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения в солнечной системе. При $n_i = 1 \text{ см}^{-3}$, напряженности магнитного поля $\sim 1 \gamma$ протяженность зоны с высокой степенью ионизации $\sim 2 \cdot 10^4$ а.е. Полученная величина относится к направлению, близкому к плоскости эклиптики для периода максимума солнечной активности.

Таким образом, расчет яркости диффузного отраженного излучения в линии L_α не находится в противоречии с данными наблюдений, если предположить, что зона Н II простирается до $3 \cdot 10^3 \div 10^4$ а.е. В этом случае взаимодействие протонов солнечного ветра с нейтральным холодным водородом будет протекать иначе, чем предполагали Джонсон, Хансон и Паттерсон [5]. В частности, галактическое магнитное поле не сможет проникнуть вплоть до расстояния ~ 30 а.е. от Солнца, где, по-видимому, более существенную роль играет общее магнитное поле солнечной системы, связанное с магнитным полем Солнца и полем корпускулярных потоков. Если это так, то следует искать дополнительный источник горячих атомов водорода со скоростями ~ 100 км/сек. Кроме того, даже при весьма узком фронте ударной волны, где происходит «перекачка» направленной скорости протонов в хаотическую, фронт перезарядки с межзвездным водородом простирается на величину $\sim \bar{R}_0$. Однако на расстоянии ~ 30 а.е. от Солнца концентрация нейтральных атомов очень мала, что сильно уменьшит поступление горячих нейтральных атомов водорода.

Гос. Астрономический ин-т им.
П.К.Штернберга

Поступила в редакцию 6 мая
1966 г.

Литература

1. D.C.Morton, J.D.Purcell, Planet. Space Sci., 9,455,1962.
2. В.Г.Курт. Исследования космического пространства. Изд-во АН СССР, 1965, 195.
3. H.Friedman. Astron. J., 70, 10, 774, 1965.
4. V.G.Kurt. Space Res. VII, Viena, North-Holl and, Pubs. Co. Amsterdam, 1966.

5. T.N.Patterson, F.S.Johnson, W.B.Hanson. Planet Space Sci. 11, 767, 1963.
6. V.G.Kurt. Space Res. VI, Buenos-Aires, North-Holland Pubs. Co. Amsterdam, 1965.
7. Т.А.Гемогенова. Астрофизика, 1966 г. (в печати)
8. K.M.Gase, F.Hoffman, G.Placzek, Introduction to the theory of Neutron Diffusion, 1, Los Alamos, 1953.
9. M.G.Smith, Proc. Phil. Soc., Cambridge, 60, 105, 1964.
10. С.А.Каплан, С.Б.Пикельнер. Межзвездная среда, Физматгиз, М., 1963, 64.
11. A.M.Lenckek, Ann. Astrophys., 27, 4, 219, 1964.
12. P.E.Williams, Astrophys. J., 142, 1, 314, 1965.
13. О.А.Разин. Радиофизика, 7, 395, 964.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ
ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ВЕЩЕСТВА
ОТ ПЛОТНОСТИ РАДИАЦИИ

Т.А.Гермогенова, Э.П.Зега

Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, т.3, №2, 1967 г., с. 165-171.

На основе численного решения нелинейного уравнения переноса проведено исследование влияния плотности падающей радиации на угловые и интегральные характеристики светового поля в плоском рассеивающем слое в случае зависимости показателя поглощения вещества от плотности радиации. Обсуждается вопрос о точности двухпоточкового приближения для расчета интегральных коэффициентов отражения и пропускания в нелинейной задаче.

Оптические свойства вещества, облучаемого мощной радиацией, зависят от плотности последней. В настоящей работе учтено влияние одного фактора – изменения поглотительной способности вещества под действием интенсивного излучения (эффекта насыщения) – на закономерности переноса радиации в рассеивающих средах.

Для описания процесса распространения излучения, состоящего из одной линии (независимо от ее ширины), в случае стационарного режима при наличии явления насыщения применимо уравнение переноса [1,2]. В работе [3] описаны результаты решения нелинейного уравнения переноса в двухпоточковом приближении и показано, что нелинейность поглощения вызывает значительное изменение в закономерностях распространения света. Следует отметить также работу [4], в которой показана применимость метода сложения слоев к решению нелинейных задач. Здесь излагаются некоторые результаты численного решения нелинейного уравнения переноса.

В общем случае относительно зависимости показателя поглощения от плотности радиации и можно лишь утверждать, что она выражается некоторым монотонно убывающим по абсолютной величине функционалом. Ограничимся рассмотрением сред с положительной абсорбцией. При этих предположениях ранее одним из авторов [5] доказаны существование и единственность решения уравнения переноса для тел произвольной формы и произвольных граничных условий.

Распространение излучения в плоском слое поглощающего и рассеивающего вещества, характеризуемого показателями поглощения χ и рассеяния ρ , при освещении с одной стороны бесконечно широким параллельным пучком монохроматической радиации, падающим нормально к границе слоя и создающим на ней освещенность S_0 , описывается уравнением

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I}{\partial x} + \sigma(x, I) I(\mu, x) = \\ = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') I(\mu', x) d\mu' + \frac{\rho}{2} S_0 \exp\left(-\int_0^x \sigma dx'\right) P(\mu). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $I(\mu, x)$ - интенсивность излучения на глубине x , отсчитываемой по нормали от верхней границы слоя, в направлении, характеризуемом углом $\arccos \mu$; с осью x ; $\sigma = \chi + \rho$ - показатель ослабления. Индикатриса рассеяния элементарного объема $P(\mu, \mu')$ нормирована соотношением

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') d\mu = 1. \quad (2)$$

Краевые условия для уравнения (1) формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} I(0, \mu) = 0 \quad \text{при } \mu > 0, \\ I(\ell, \mu) = 0 \quad \text{при } \mu < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ℓ - толщина слоя.

Для проведения расчетов необходимо задаться конкретным видом зависимости показателя поглощения от плотности радиации. Как показывают исследования [1, 2, 6, 7], в большом числе ситуаций имеет место следующая простая формула:

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 + \alpha u} \quad (4)$$

Здесь χ_0 - показатель поглощения при $u \rightarrow 0$; α - параметр нелинейности вещества. Указанная формула применима, например, при облучении монохроматической радиацией системы с однородным уширением линий или при облучении радиацией, содержащей широкие спектральные линии, средняя частота которых совпадает с собственными частотами вещества.

Если имеет место соотношение (4), то показатель ослабления равен

$$\sigma = \rho + \frac{\chi_0}{1 + \alpha u(x)} \quad (5)$$

где

$$u(x) = \frac{1}{v} \left[\int_{-1}^1 I(\mu, x) d\mu + S_0 \exp\left(-\int_0^x \sigma(x') dx'\right) \right], \quad (6)$$

v - скорость света в среде.

Решение (1) с учетом (3), (5), (6) выполнялось в численной форме конечноразностным методом, подробно описанным в работе [8]. Основой послужила разработанная ранее программа решения линейного уравнения

переноса для плоского слоя [8]. Дополнительно был предусмотрен итерационный процесс, позволяющий учесть зависимость показателя поглощения от плотности излучения. Следует отметить, что эта программа позволяет проводить расчеты для любого вида зависимости $\chi(u)$, при условии, что эта зависимость передается положительной, монотонно убывающей функцией.

Расчеты проводились для случаев сферической P_I и сильно вытянутой P_{II} индикатрис рассеяния. Доля света, рассеянного назад элементарным объемом, облучаемым параллельным пучком, равная

$$\int_{-1}^0 P(\mu) d\mu / \int_{-1}^1 P(\mu) d\mu, \text{ для индикатрисы } P_{II} \text{ имеет значение } \sim 0,05.$$

Рассматривались слои разной оптической толщины $\tau = (\chi_0 + \rho)\ell$ с разными значениями вероятности выживания кванта света $\Lambda = \rho / (\chi_0 + \rho)$.

Параметр αu_0 ($u_0 = S_0 / v$ плотность падающей радиации у верхней границы слоя) принимал следующие значения: 0 («линейный случай»), 1, 10, ∞ (чистое рассеяние). Некоторые из полученных результатов представлены на рис. 1-3.

На рис. 1 показано изменение углового распределения излучения, выходящего из слоев малой ($\tau = 1$) и большой ($\tau = 10$) оптической толщины в случае изотропного рассеяния при увеличении плотности падающей радиации или параметра нелинейности. За единицу для интенсивности отраженного излучения принято значение $I(x = 0, \mu = -1)$, для пропущенного $-I(x = \ell, \mu = 1)$, причем в последнем случае не учитывается интенсивность прямо прошедшего излучения, равная

$$S_0 \exp\left(-\int_0^\ell \sigma dx\right) \delta(\mu - 1).$$

Поскольку угловое распределение симметрично относительно оси x , на рис. 1 приведена лишь правая его половина. Рис. 1 показывает, что для слоя небольшой оптической толщины с увеличением αu_0 возрастает доля энергии, распространяющаяся в боковых направлениях.

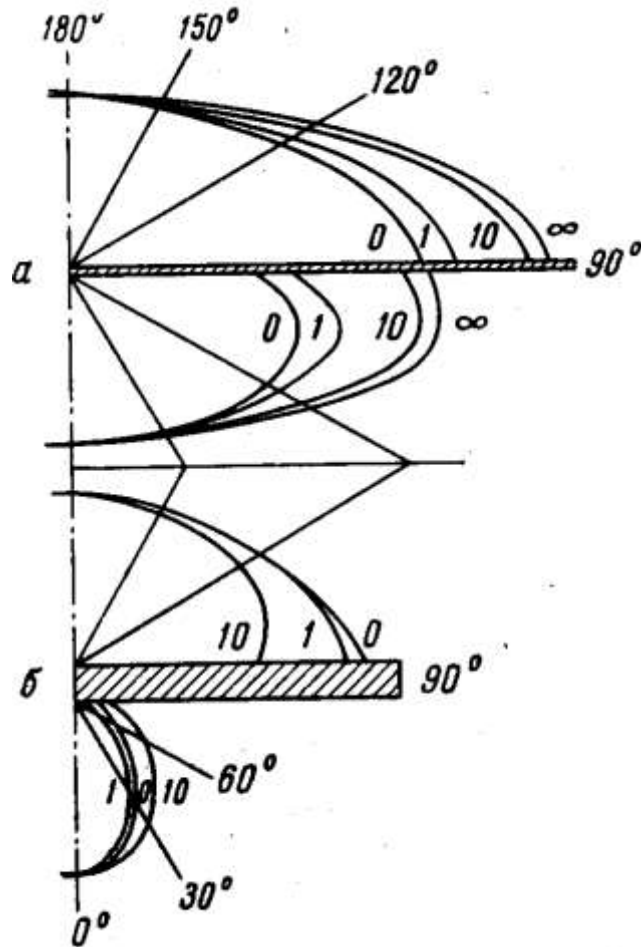


Рис. 1. Угловое распределение излучения диффузно отраженного и диффузно пропущенного слоями оптической толщины $\tau = 1$ (а) и 10 (б), $\Lambda = 0,5$, $P = P_I$. Числа у кривых указывают значение параметра αu_0

Угловое распределение радиации размывается. При изменении αu_0 от 0 до ∞ все кривые, описывающие угловое распределение интенсивности выходящего излучения, равномерно заполняют часть плоскости, ограниченную кривыми, соответствующими решению линейной задачи с $\chi = \chi_0$ и $\chi = 0$, $\sigma = \rho$. Эти результаты становятся очень наглядными при сопоставлении с рис. 2, на котором показано изменение показателя ослабления и плотности радиации, отнесенной к плотности падающего на слой излучения, по глубине слоя для рассмотренного случая. Показатель ослабления сравнительно слабо изменяется вдоль слоя.

Поэтому решение нелинейной задачи с $\alpha u_0 = 0; 1; 10; \infty$ приближенно равно решению линейного уравнения с показателем ослабления, равным соответственно $\chi_0 + \rho; 0,5\chi_0 + \rho; 0,1\chi_0 + \rho; \rho$. При плавном уменьшении поглощательной способности происходит монотонное уширение углового распределения интенсивности отраженной и пропущенной радиации.

В случае больших оптических толщин угловое распределение излучения, вышедшего из слоя, не является монотонной функцией плотности

падающей радиации и параметра нелинейности. При малых αu_0 происходит даже некоторое сужение углового распределения прошедшей радиации и лишь при очень больших значениях αu_0 наблюдается процесс уширения углового распределения, имеющий место в слоях малой оптической толщины. Несколько иного рода, но тоже не монотонна зависимость от плотности радиации углового распределения отраженного слоем излучения. Причина этого весьма неожиданного на первый взгляд явления заключается в значительной неоднородности слоя большой оптической толщины: величина σ сильно изменяется с координатой (рис. 2, б).

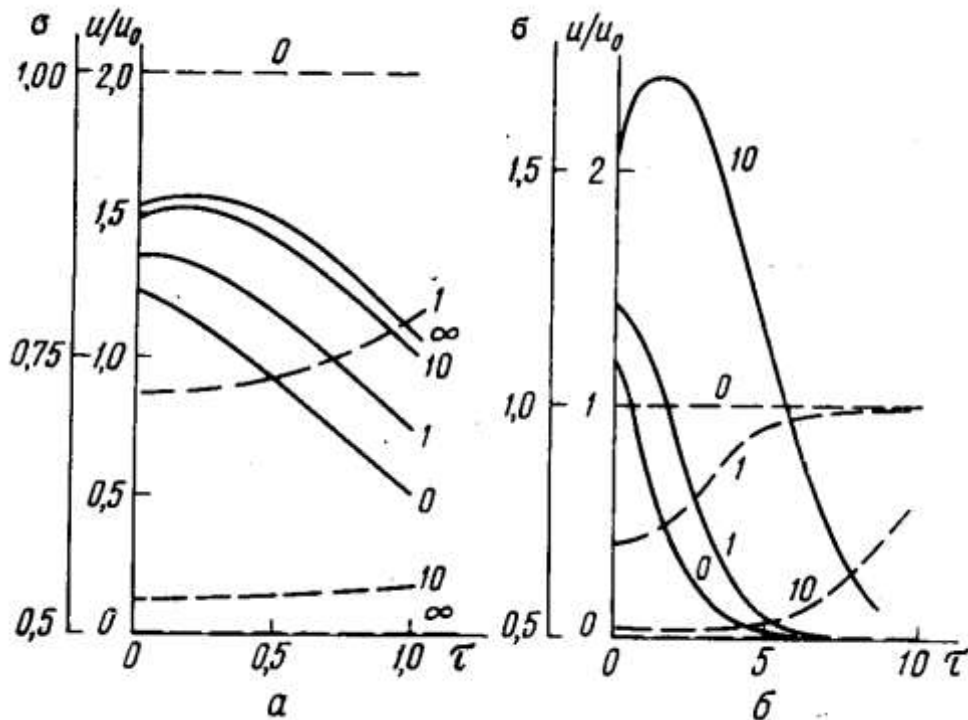


Рис. 2. Изменение величины u/u_0 (сплошные кривые) и показателя ослабления σ (прерывистые кривые) с глубиной в слоях с оптической толщиной $\tau = 1$ (а) и 10(б), $\Lambda = 0,5$, $P = P_I$. Числа у кривых указывают значение параметра αu_0

Аналогичные зависимости наблюдаются и в случае анизотропного рассеяния, но на других оптических толщинах. Последнее связано с более слабым влиянием удельного поглощения на форму тела яркости в случае сильно вытянутой индикатрисы элементарного объема (рис. 3, а). В частности, на рис. 3, б, в показано изменение углового распределения для слоев оптической толщины 1 и 10 с индикатрисой P_{II} при увеличении αu_0 . В случае $\tau = 1$ тело яркости вообще не зависит от αu_0 , при $\tau = 10$

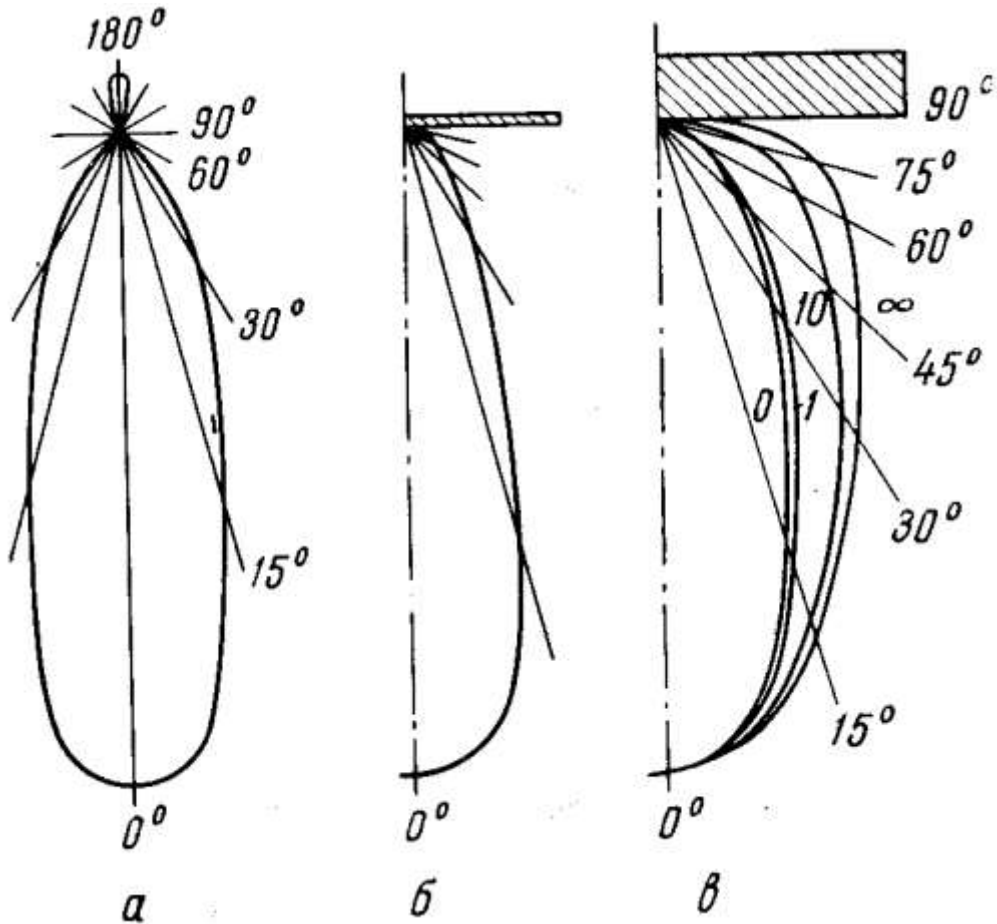


Рис. 3. *a* – индикатриса элементарного объема P_{II} , *б* и *в* – угловое распределение излучения, диффузно пропущенного слоем оптической толщины $\tau = 1$ и 10 соответственно для $\Lambda = 0,5$ и $P = P_{II}$

наблюдается некоторое увеличение доли света, идущего в боковых направлениях при возрастании αu_0 .

Возвращаясь к рис. 2, следует отметить, что интегральная плотность радиации достигает своего наибольшего значения в некоторой точке внутри слоя. Это характерное для линейной теории положение объясняется изменением угловой структуры излучения в связи с рассеянием его внутри слоя.

Анализ расчетных данных показывает, что глубина $x_{\text{макс}}$, на которой плотность радиации достигает экстремального значения, увеличивается с возрастанием параметра αu_0 характеризующего «нелинейность» задачи, с уменьшением поглощательной способности среды χ_0 и степени вытянутости индикатрисы.

Интегральные коэффициенты отражения R и пропускания T слоя определяются следующими соотношениями;

$$R = - \int_{-1}^0 \mu I(\mu, 0) d\mu, \quad (7)$$

$$T = \int_0^1 \mu I(\mu, \ell) d\mu + \exp \left(- \int_0^{\ell} \sigma(I, x') dx' \right). \quad (8)$$

На рис. 4 представлена зависимость R и T от параметра αu_0 для различных значений характеристик слоя τ , Λ , P .

Коэффициенты диффузного пропускания и отражения возрастают с увеличением αu_0 , причем для сред с малой вероятностью выживания кванта и вытянутой индикатрисой рассеяния они могут изменяться на порядок при увеличении αu_0 от 0 до 1.

Интересные результаты получаются при сопоставлении полученных расчетных данных для R и T с результатами решения нелинейного уравнения переноса в двухпоточковом приближении [3]. Для проведения такого сопоставления необходимо учитывать связь между константами рассеяния s и поглощения k слоя, фигурирующими в приближенном решении задачи, и параметрами элементарного объема ρ , χ и P .

Как следует из [9], величины k и s зависят не только от свойств вещества, но и от угловой структуры излучения, падающего на рассматриваемый элементарный слой, причем имеют место следующие соотношения:

$$k = \frac{E_0}{E} \chi, \quad s = \frac{E_0}{E} \varphi \rho \quad (9)$$

Здесь E_0 - объемная освещенность, пропорциональная плотности радиации ($E_0 = \nu u$);

E - плоская освещенность;

φ - доля света, рассеянного элементарным слоем назад, равная

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\int_{-1}^1 I(\mu, x) d\mu \int_{-1}^0 P(\mu, \mu') d\mu'}{\int_0^1 I(\mu, x) d\mu}.$$

Величины E_0 / E и φ зависят от формы тела яркости и, вообще говоря, переменны по слою. Они постоянны, если предъявить весьма жесткие требования к функции $I(\mu, x)$. Следует предположить, в частности, что форма тела яркости неизменна по глубине слоя. Мы предположили, что $E_0 / E = 1$. Это физически соответствует представлению о том, что в среде имеет место только направленное излучение. При таком упрощении φ есть доля света, рассеянная назад элементарным объемом при облучении

параллельным пучком. Следует отметить, что в случае изотропного рассеяния $\varphi = 0,5$, независимо от угловой структуры светового поля.

Проведенное при таких грубых предположениях сравнение полученных данных показывает: 1) решение нелинейной задачи приближенным методом [3] во всех рассмотренных случаях позволяет определить интегральные коэффициенты отражения и пропускания с относительной погрешностью 5% при $R, T > 40\%$, 25% - при $R, T > 10\%$ и 300% - при $10^{-4} < R, T < 10^{-2}$, что сопоставимо с точностью экспериментальных измерений этих величин; 2) увеличение αu_0 приводит к улучшению совпадения точных и приближенных данных.

Указанные сопоставления были выполнены для малых Λ и направленного освещения слоя. Часть их относится к случаю сильно вытянутой индикатрисы. Ясно, что совпадение должно улучшаться для

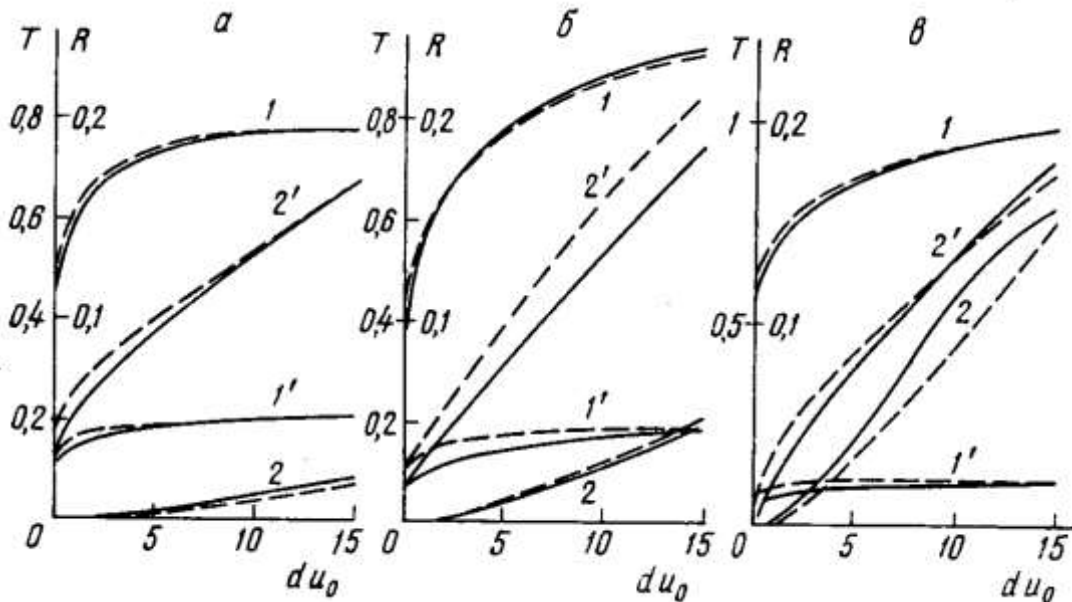


Рис. 4. Зависимость интегральных коэффициентов диффузного отражения (кривые $1', 2'$) и пропускания (кривые $1, 2$) от параметра αu_0 , $1, 1' - \tau = 1$; $2, 2' - \tau = 10$. Пунктирные кривые построены по данным работы [3], сплошные - по данным настоящей работы.

$$a - P_{\perp}, \Lambda = 0,5; \quad б - P_{\perp}, \Lambda = 0,1; \quad в - P_{\parallel}, \Lambda = 0,5$$

больших Λ , менее вытянутых индикатрис, освещения диффузным, а тем более квазидиффузным [10] светом (при соответствующих предположениях относительно величин E_0 / E и φ).

Все изложенное выше позволяет считать, что для определения интегральных коэффициентов отражения и пропускания среды с нелинейным поглощением с точностью, удовлетворяющей многим практическим задачам, независимо от вида индикатрисы элементарного объема и способа освещения можно использовать результаты работы [3].

Кроме того, полученные данные свидетельствуют о возможности усреднения интенсивности по углам при определении интегральных характеристик светового поля в слое с монотонно изменяющимся показателем ослабления. Однако при решении задачи в двухпоточковом приближении полностью выпадает из рассмотрения ряд вопросов, связанных с угловыми характеристиками поля излучения и их изменением при увеличении плотности радиации, нелинейности среды; невозможно изучение светового поля внутри среды, вопросов влияния условий освещения на интегральные и угловые характеристики и т.д. Численное решение нелинейного уравнения переноса, результаты которого здесь приведены, позволяет подробно рассмотреть все эти вопросы.

В заключение авторы выражают благодарность Л.П.Бассу и Б.З.Оссеровичу за помощь при программировании и проведение расчетов на ЭВМ.

Поступила в редакцию
15 июня 1966 г.

Литература

1. *Апанасевич П.А.* Поглощение мощных некогерентных потоков излучения. Докл. АН БССР, 7, 1963.
2. *Апанасевич П.А.* К теории поглощения мощных потоков излучения. Czech. J. Phys., 13, 1963.
3. *Зега Э.П., Иванов А.П.* Распространение света в рассеивающих средах с коэффициентом поглощения, зависящим от интенсивности радиации. Сб. «Актинометрия и оптика атмосферы». Изд-во «Наука», 1964.
4. *Амбарцумян В.А.* Об одной задаче нелинейной теории рассеяния света в мутной среде. Докл. АН АрмССР, 38, №4, 1964.
5. *Гермогенова Т.А.* Решение уравнения переноса при нелинейной зависимости поглощения от интенсивности излучения. Ж. вычислит. мат. и мат. физики (в печати).
6. *Степанов Б.И., Грибковский В.П.* Введение в теорию люминесценции. Изд-во АН БССР, 1963.
7. *Рубанов В.С.* О характере нелинейности коэффициента усиления в газовых средах. Отчет №30 Ин-та физики АН БССР, Минск, 1964.
8. *Гермогенова Т.А.* О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. Ж. вычислит. мат. и мат. физики 1, №6 1961.
9. *Гершун А.А.* Прохождение света через плоский слой светорассеивающей среды. Избр. тр. по фотометрии и светотехнике. Физматгиз. 1958.
10. *Розенберг Г.В.* Оптические свойства толстых слоев однородной рассеивающей среды. Сб. «Спектроскопия светорассеивающих сред». Изд-во АН БССР, 1963.

THE SOLUTION OF THE TRANSFER EQUATION
WITH THE DEPENDENCE OF THE ABSORPTION
OF A MEDIUM ON THE INTENSITY OF LIGHT

T.A.Germogenova, E.P.Zege

The radiative transfer in a plane-parallel medium is investigated, the dependence of absorption on the intensity of radiation being taken into account. This investigation is founded on the results of the numerical solution of the nonlinear transfer equation obtained with high accuracy. The accuracy of the two-flows approximation is discussed.

Исследование угловой, пространственной и спектральной структуры поля яркости Земли для характерной модели сферической атмосферы

Т. А. Гермогенова, Л. И. Копрова, Т. А. Сушкевич

Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, т.5, №12, 1969 г., с. 1266-1277.

Для определения угловой и пространственной структуры радиационного поля Земли предпринята попытка численного решения уравнения переноса (солнечной и тепловой радиации) для двумерной модели рассеивающей, поглощающей сферической атмосферы с осевой симметрией относительно линии центр Земли-Солнце. Задача решается методом последовательных приближений – итерациями по столкновениям. На каждой итерации используется конечноразностный метод интегрирования уравнения по характеристикам с интерполяцией. Анализируются результаты расчетов яркости сферической Земли для характерной модели атмосферы и подстилающей поверхности в области поглощения H_2O 2.7 мкм, полученные в приближении однократного рассеяния. Отмечаются некоторые закономерности в угловом пространственном распределении яркости, а при исследовании спектрального хода яркости в случае селективного поглощения радиации устанавливается параметрическая зависимость ее, имеющая сравнительно простой характер.

Введение

Исследования нижних слоев атмосферы с помощью спутников, проводящиеся в настоящее время в широких масштабах, нуждаются в расчетах вертикальных, угловых и спектральных распределений отраженной солнечной радиации и собственного излучения Земли с учетом ее сферичности. Если не учитывать поляризацию радиации, то наиболее полной характеристикой радиационного поля Земли является энергетическая яркость $I(C, s, \lambda)$ в точке пространства C в направлении s для длины волны λ . Эта величина зависит от коэффициентов рассеяния $\sigma_s(C, \lambda)$ радиации атмосферой или облаками, индикатрисы рассеяния $\gamma(C, \chi, \lambda)$ (χ - угол рассеяния), плотности поглощающих веществ $\rho_i(C)$, температуры атмосферы и земной поверхности $T(C)$, отражательной и излучательной способности подстилающей поверхности $R(\lambda)$, направления падения солнечной радиации s_0 . Вследствие больших вариаций атмосферных параметров функция $I(C, s, \lambda)$ сильно варьирует во времени и пространстве.

Для изучения закономерностей радиационного поля Земли необходимо использовать как статистические методы, позволяющие описать вариации атмосферных параметров и характеристик радиационного поля, так и

детерминированные методы, когда для данного состояния атмосферы или для экстремальных условий (для данной модели атмосферы) вычисляются конкретные реализации ее оптического состояния. Модель атмосферы определяется некоторой совокупностью параметров, описывающих а) вертикальную, пространственную и временную структуры метеорологических характеристик атмосферы; б) пространственно-временную структуру и спектральный ход характеристик рассеяния, поглощения и излучения атмосферы; в) отражательную и излучательную способности подстилающей поверхности.

В настоящей работе приводятся результаты расчетов яркости сферической Земли для характерной модели атмосферы и подстилающей поверхности в области полосы поглощения H_2O 2.7 мкм в приближении однократного рассеяния. На основе этих расчетов определяются угловые и вертикальные распределения абсолютной яркости Земли в характерных участках полосы при различных условиях освещения и наблюдения. Даются предварительные оценки вклада многократного рассеяния, учет которого предполагается провести в дальнейшем.

Физическая модель атмосферы

Метеорологические элементы. Вертикальная структура метеорологических элементов – температуры $T(C)$, плотности водяного пара $\rho(C)$ и давления $p(C)$ и граница облачности выбирались согласно результатам работ [1-4].

Аэрозольное рассеяние. Вертикальная структура аэрозольного рассеяния бралась из работы [5]. Для высот h до 10 км использовались аппроксимации средних кривых $\sigma_s(h, \lambda)$ формулой

$$\sigma_s(h, \lambda) = \bar{\sigma}_s(h_i, \lambda) e^{-\beta_i(h-h_i)}. \quad (1)$$

Параметры $\bar{\sigma}_s(h_i, \lambda)$ и β_i (табл. 1) определялись путем обработки данных из работы [6].

Для высот $10 \text{ км} < h \leq 30 \text{ км}$ взяты значения коэффициента аэрозольного ослабления, осредненные по измерениям, полученным с помощью

Таблица 1.

i	$h, \text{ км}$	$h_i, \text{ км}$	$\bar{\sigma}_s(h_i), \text{ км}^{-1}$	$\beta_i, \text{ км}^{-1}$
1	$0 < h \leq 1,5$	0	0,1110	0,872
2	$1,5 < h \leq 3,5$	1,5	0,0346	0,439
3	$3,5 < h \leq 10$	3,5	0,0144	0,235

Индикатрисы рассеяния: $\gamma_1(\cos \chi)$ для высот до 25 км и $\gamma_2(\cos \chi)$ для высот выше 25

χ	$\gamma_1(\cos \chi)$	χ	$\gamma_1(\cos \chi)$	χ	$\gamma_2(\cos \chi)$	χ	$\gamma_2(\cos \chi)$
0°	5,050	90°	0,295	0°	2,761	95°47'	0,1027
10°	3,825	100°	0,270	25°50'	2,143	101°34'	0,0379
15°	2,305	110°	0,270	36°50'	1,653	107°28'	0,0427
20°	1,745	120°	0,265	45°33'	1,267	113°36'	0,0253
30°	1,030	130°	0,280	53°07'	0,964	120°01'	0,0142
40°	0,855	140°	0,290	59°59'	0,728	126°53'	0,0086
50°	0,650	150°	0,305	66°24'	0,545	134°27'	0,00772
60°	0,485	160°	0,320	72°32'	0,404	143°10'	0,0112
70°	0,380	180°	0,332	78°26'	0,295	154°10'	0,0189
80°	0,325			84°13'	0,212	180°	0,0305
				90°	0,150		

прожекторного метода [7]. Выше 30 км коэффициент рассеяния заимствован из работы [8]. Для определения спектральной структуры аэрозольного рассеяния были статистически обработаны измерения прозрачности для приземного слоя [9] и приводного слоя [10] атмосферы. Это позволило экстраполировать вертикальные профили коэффициента рассеяния, полученные в [6-8] для видимой области, в ИК область.

Индикатриса рассеяния. В связи с отсутствием данных об индикатрисе рассеяния в ИК области спектра для слоя атмосферы $h \leq 25$ км индикатриса для $\lambda = 0,94$ мкм взята из работы [11]. Выше 25 км индикатриса рассеяния выбиралась на основе оценок среднего радиуса частиц r на этих высотах [12]. Для данного параметра $\rho = 2\pi r / \lambda$ из таблиц [13] брались коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра

$$\gamma(\cos \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \omega_n P_n(\cos \chi).$$

Обе индикатрисы аэрозольного рассеяния приведены в табл. 2.

Поглощение. Для учета селективности поглощения радиации атмосферными газами использовались аппроксимационные формулы эмпирических функций пропускания

$$P_{\Delta\lambda}[\tau_\alpha] = \exp[-\alpha_{\Delta\lambda} \tau_\alpha^{\beta_{\Delta\lambda}}], \quad (2)$$

введенных в [14-16], где

$$\tau_\alpha = \int_{h_1}^{h_2} Q \tilde{\sigma}_\alpha(h) dh, \quad Q = 0,1 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1},$$

$$\tilde{\sigma}_\alpha(h) = \rho(h) \frac{p(h)}{p(h=0)}, \quad \text{г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

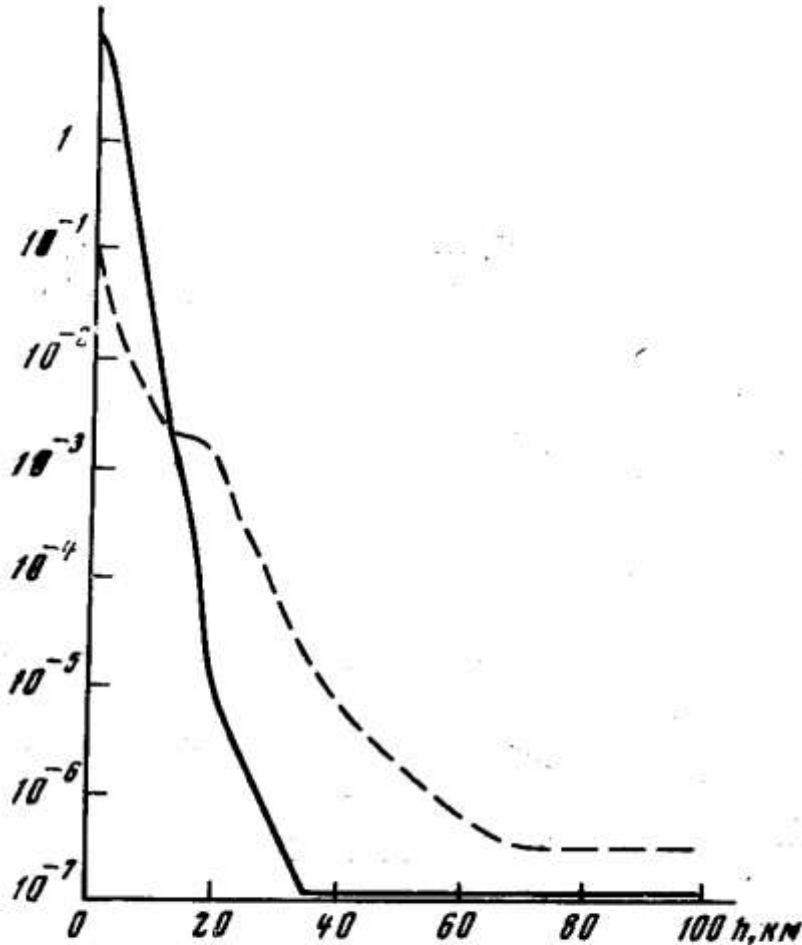


Рис.1. Высотный ход коэффициента рассеяния $\sigma_s(h)$, км^{-1} (пунктирная линия) и коэффициента $10^6 \cdot \sigma_a(h)$, г см^{-3} (сплошная линия)

Высотный ход величин $\sigma_s(h)$ и $\tilde{\sigma}(h)$ приведен на рис. 1. Эмпирические константы $\alpha_{\Delta\lambda}$ и $\beta_{\Delta\lambda}$ зависят от интервала усреднения по спектру $\Delta\lambda$.

Отражение подстилающей поверхности учитывалось по Ламберту посредством введения альбедо, принимавшего два крайних значения $A=0$ и $0,8$. Это позволило оценить роль отражения при различных условиях освещения Земли и распространения излучения в атмосфере.

Математическая модель

В связи с чрезвычайно сложным механизмом переноса радиации в реальной атмосфере и большими вариациями яркости в области горизонта Земли, особенно при низком положении Солнца (район терминатора), крайне важно получить достаточно точное и полное описание решения уравнения переноса, не ограничиваясь приближенными описаниями рассеяния радиации в атмосфере [17, 18] или расчетами в нескольких выделенных точках методом Монте-Карло [19]. Нами предпринята попытка численного решения уравнения переноса для двумерной модели сферической атмосферы

с осевой симметрией относительно линии центр Земли-Солнце (ось Z) методом интегрирования уравнения по характеристикам с интерполяцией [20]. Радиус-вектор r любой точки атмосферы $C(r)$ определяется расстоянием r от центра Земли (точка 0 на рис. 2) и полярным углом ψ отсчитываемым от положительного направления оси и совпадающим с зенитным расстоянием Солнца.

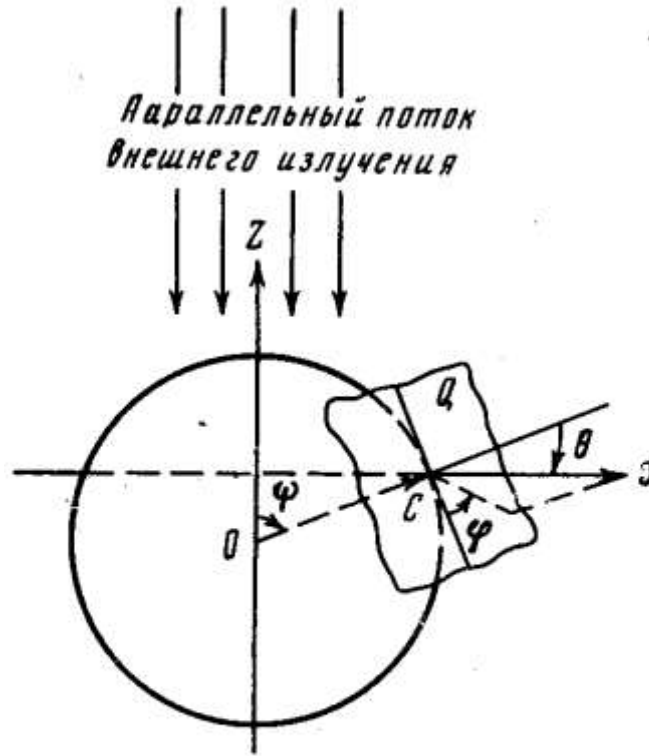


Рис.2. Система координат. Плоскость Q касается сферы радиуса r в точке $C(r, \psi)$

Направление луча s в точке $C(r)$ описывается двумя углами: θ - угол между лучом s и радиусом-вектором r , φ - азимут ($\varphi = 0^\circ$ - азимут Солнца). В этих координатах уравнение переноса для фиксированной λ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \left[\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \psi \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] + \\ & + (\sigma_s + \sigma_\alpha) \Phi(r, \psi, \varphi, \theta) = \frac{\sigma_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \Phi(r, \psi, \varphi', \theta') \times \\ & \times \gamma(r, \psi, \chi) \sin \theta' d\theta' + F(r, \psi, \varphi, \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned} \Phi(R_H, \psi, \varphi, \theta) = & \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^\pi R(\psi, \varphi, \theta, \varphi', \theta') \Phi(R_H, \psi, \varphi', \theta') \times \\ & \times \sin \theta' d\theta' + f(R_H, \psi, \varphi, \theta) \quad \text{для } \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi(R_B, \psi, \varphi, \theta) = \pi \delta(\varphi - 0) \delta(\theta - (\pi - \psi)) \quad \text{для } \theta \geq \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Здесь $\Phi(r, \psi, \varphi, \theta)$ - интенсивность (в относительных единицах) излучения атмосферы в точке (r, ψ) и в направлении (φ, θ) . Для получения абсолютных величин I яркости необходимо умножить Φ на мощность падающего солнечного излучения S_λ для данной длины волны; R_H и R_B - нижний и верхний радиусы атмосферы. Введение переменных коэффициентов рассеяния $\sigma_s(r, \psi)$ и поглощения $\sigma_a(r, \psi) = Q \tilde{\sigma}_s(r, \psi)$, анизотропной индикатрисы рассеяния $\gamma(r, \psi, \chi)$, коэффициента отражения подстилающей поверхности $R(\psi, \varphi, \theta, \varphi', \theta')$, а также источников собственного излучения атмосферы $F(r, \psi, \varphi, \theta)$ и подстилающей поверхности $f(R_H, \psi, \varphi, \theta)$ позволяет достаточно полно учесть пространственную структуру атмосферы и подстилающей поверхности при решении уравнения переноса.

Интегрирование уравнения (3) по характеристикам дает возможность учесть селективное поглощение радиации через функцию пропускания (2). Введение итераций по столкновениям позволяет последовательно рассчитывать интенсивность рассеянного излучения различной кратности. Первая итерация без интегрального члена в правой части (3) дает результаты в приближении однократного рассеяния. Используемый метод решения задачи основан на предварительном исследовании непрерывности и дифференцируемости решения. В частности, посредством качественного анализа решения удастся установить особенности поведения яркости в направлениях, касательных к Земле или к облакам (это - направления, касательные к линиям разрыва коэффициентов уравнения (3)).

Общая характеристика результатов расчетов

Для описанной выше модели атмосферы рассчитаны угловые распределения яркости Земли на разных высотах $h = r - R_H$ ($h = 5; 10; 20; 30; 100; 300; 500$ км) для различных зенитных расстояний ψ ($\psi = 0, 30, 60, 80, 90, 100^\circ$).

По азимуту φ бралось пять значений ($0, 45, 90, 135, 180^\circ$), по углу θ - до 20 и более значений. Углы $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ($0 < \mu = \cos \theta \leq 1$) соответствуют излучению в верхнюю полусферу (уходящая от Земли радиация), углы $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ($-1 \leq \mu \leq 0$) - излучению в нижнюю полусферу (падающая на Землю радиация). Углы, отвечающие направлению, касательному к земной поверхности, обозначены θ^* . Расчеты яркости Земли Φ (в относительных единицах) проводились для трех характерных участков полосы поглощения H_2O 2,7 мкм соответствующих слабому (интервал 1), среднему (интервал 2) и сильному (интервал 3) поглощению радиации при двух значениях альбедо A подстилающей поверхности ($A = 0$ и $0,8$; в этом случае

$R(\varphi, \theta, \varphi', \theta') = (A / \pi) \cos \theta'$. Значения $\alpha_{\Delta\lambda}$ и $\beta_{\Delta\lambda}$ для участков спектра взяты из работы [16] и приведены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры для расчетов интенсивности излучения в полосе поглощения H_2O 2,7 мкм

Номер интервала	λ , мкм	Характеристика поглощения	Альбедо A	$\alpha_{\Delta\lambda}$	$\beta_{\Delta\lambda}$
1	2,76	Слабое	0 0,8	0	-
2	2,64	Среднее	0 0,8	0,546	0,63
3	2,68	Сильное	0 0,8	8,6	0,62

Некоторые наиболее характерные результаты, позволяющие установить закономерности поведения яркости, приведены на рис. 3-9.

Анализ углового распределения яркости Земли

Результаты расчетов показывают, что яркость Земли определяется в основном оптически плотной тропосферой (0-10 км) и соотношением между рассеянием и поглощением на больших высотах, а также отражением от подстилающей поверхности.

Угловой ход яркости Земли, наблюдаемой с высоты 30 км при положении Солнца в зените, при характерных параметрах поглощения и отражения радиации приведен на Рис. 3.

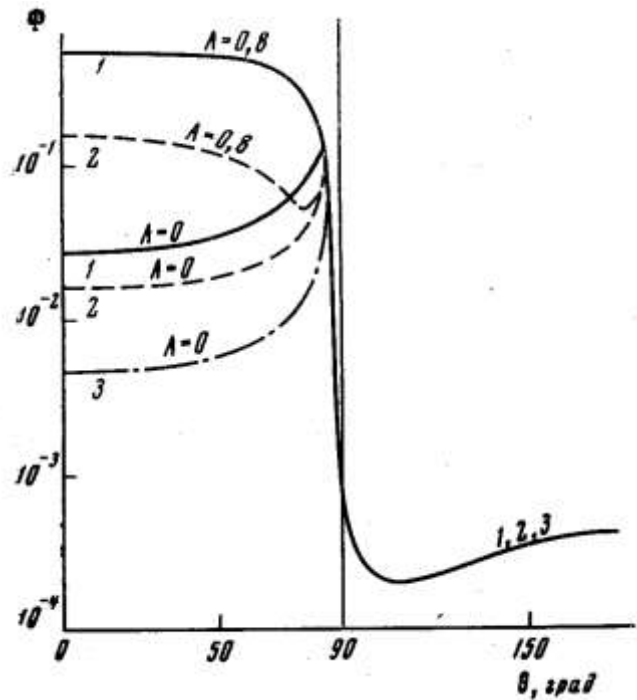


Рис. 3. Зависимость интенсивности рассеянной радиации Φ от угла θ в подсолнечной точке ($\varphi=0^\circ$) на высоте $h=30$ км; 1, 2, 3 – номера спектральных интервалов.

Для сильного поглощения (интервал 3) значения Φ приводятся только для $A=0$, так как в этом случае яркость практически не зависит от отражательных свойств земной поверхности. Яркость Земли вне полосы поглощения может в 200 раз превышать яркость в области сильного поглощения.

В зависимости от альbedo вариации яркости (вблизи надира) находятся в пределах одного порядка в прозрачной области и половина порядка в полупрозрачной области. Однако у горизонта (при $\theta \rightarrow \theta^*$) яркости выравниваются. При этом в случае $A=0$ во всех трех интервалах спектра яркость возрастает. При $A=0,8$ в интервале 1 она убывает, а в интервале 2 имеет минимум при $\theta \sim 75^\circ < \theta^*$. Такой ход определяется сложным сочетанием нескольких компонент яркости, описывающих вклад: а) отражения солнечной радиации от земной поверхности, б) рассеяния в атмосфере (дымка), в) поглощения радиации на пути лучей.

Монотонное убывание Φ в интервале 1 при $A=0,8$ может быть объяснено тем, что при больших θ уменьшение вклада отраженной радиации не компенсируется возрастающей с θ вкладом рассеянной радиации. Можно ожидать, что этот эффект сгладится при учете многократного рассеяния. Причиной немонотонного хода Φ в интервале 2 при $A=0,8$ служит, вероятно, то обстоятельство, что с увеличением θ более весомым и определяющим становится вклад рассеяния радиации в высоких слоях атмосферы, где уже мало поглощение. Это объяснение подтверждается совпадением Φ в интервале 2 при $\theta \sim \theta^*$ для обоих значений A . Возрастание яркости с увеличением угла θ и образование максимумов яркости у

горизонта (ореол Земли) во всех трех интервалах (за исключением интервала 1 при $A=0,8$) есть результат сильного рассеяния радиации в оптически плотных слоях атмосферы. Резкое убывание яркости при переходе через горизонт Земли и практически полное совпадение Φ во всех рассматриваемых случаях связано с тем, что верхние слои используемой в расчетах модели атмосферы слабо рассеивают и почти не поглощают солнечную радиацию. Небольшое возрастание Φ при $\theta \rightarrow 180^\circ$ (яркость неба в зените) объясняется вытянутостью индикатрисы в области малых углов рассеяния. Аналогичный ход яркости получается и для других высот наблюдения. Однако угловые размеры ореола естественно уменьшаются с увеличением высоты. Поскольку верхняя граница атмосферы принята равной 100 км, то для $h=100$ км и выше Φ резко убывает при $\theta \rightarrow \theta^*$ (но $\theta > \theta^*$).

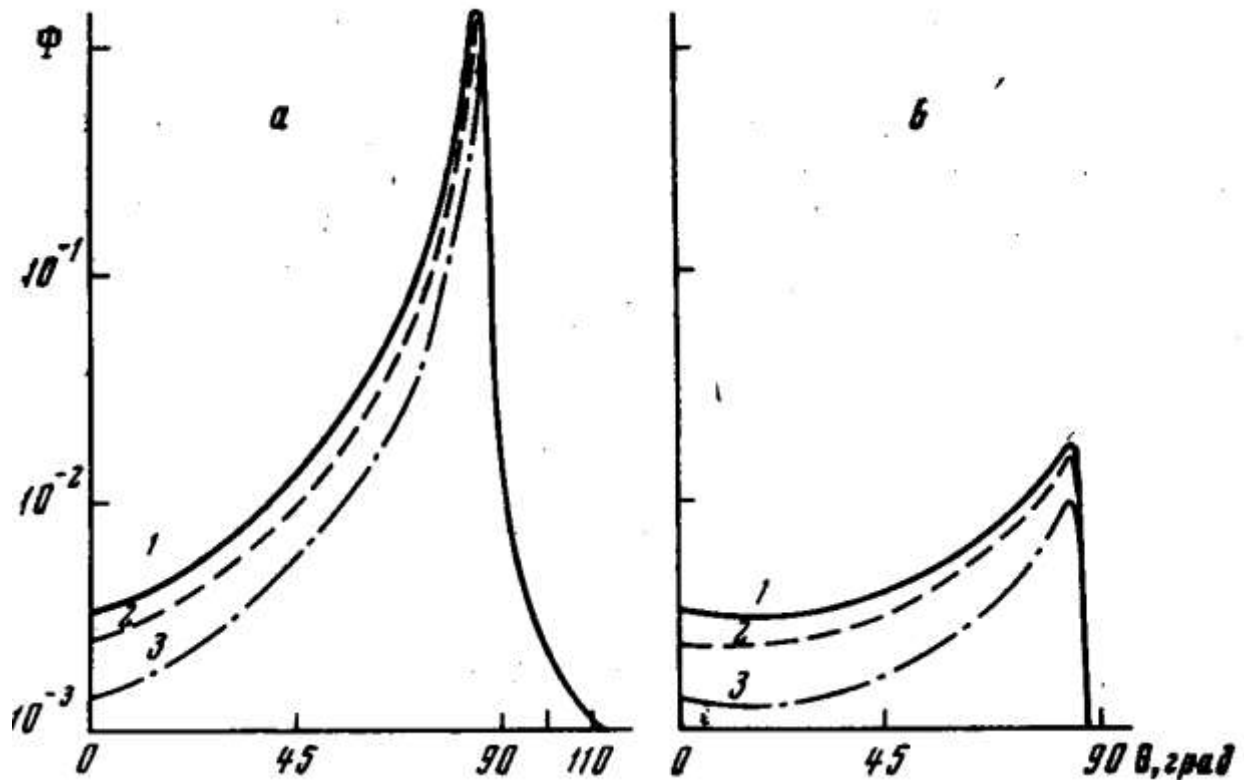


Рис. 4. Зависимость интенсивности рассеянной радиации Φ от угла θ в плоскости солнечного вертикала (а- $\varphi=0^\circ$, б- $\varphi=180^\circ$) в районе терминатора ($\psi=90^\circ$) на высоте $h=30$ км ; $A=0$; 1, 2, 3 – номера спектральных интервалов

Угловой ход яркости Земли для другого крайнего положения Солнца ($\psi=90^\circ$), т.е. при наблюдении в районе терминатора, приведен на рис.4. При перемещении направления визирования в плоскости вертикала Солнца от надира к горизонту яркость возрастает на 2,5 порядка в области ореола, затем уменьшается на 4,5 порядка в зените и снова возрастает (но в меньшей степени) в противосолнечном горизонте. Резкое падение яркости от этого

горизонта к земной поверхности (отсутствие сумерек) связано с учетом только однократного рассеяния.

Зависимость яркости Земли в направлении надира ($\theta = 0^\circ$) и горизонта ($\theta = \theta^*$) от положения Солнца при наблюдении на высоте $h = 10$ км представлена на рис. 5. Максимальная яркость ореола достигается в стороне Солнца ($\varphi = 0^\circ$) при $\psi \sim 87^\circ$ (здесь угол рассеяния мал).

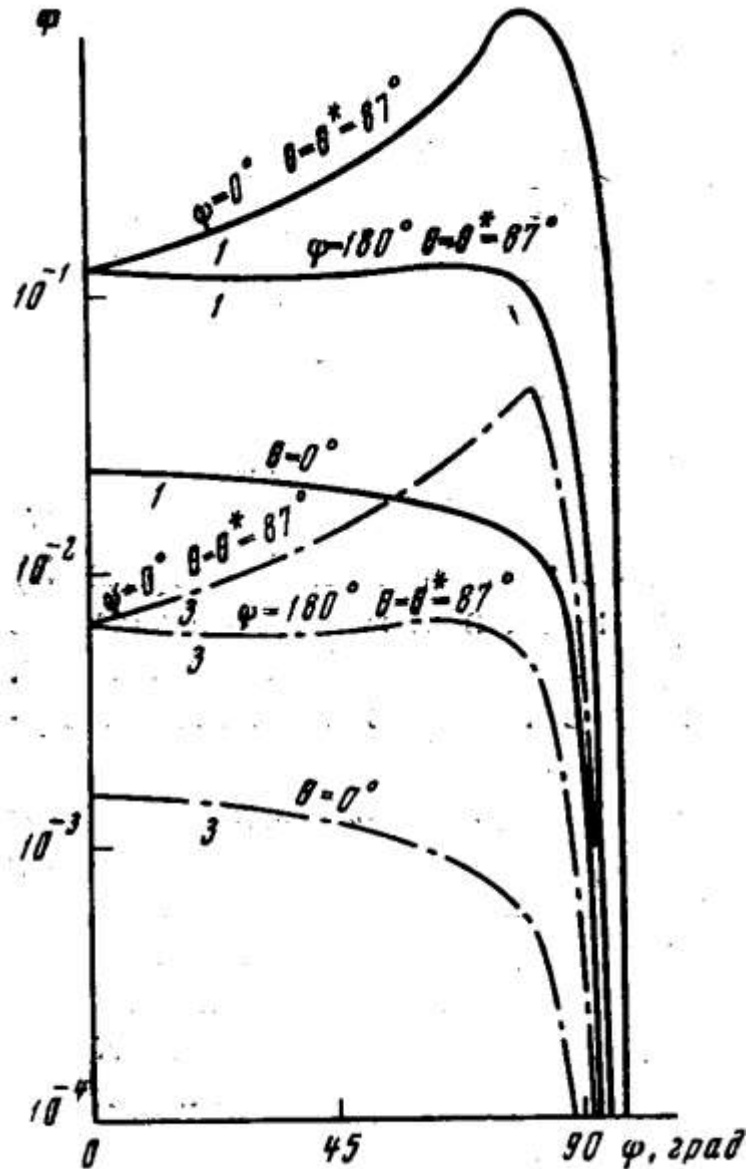


Рис.5. Зависимость интенсивности Φ от зенитного расстояния ψ на высоте $h = 10$ км для окна прозрачности (1) и в области сильного поглощения (3)

Для других направлений наблюдения яркость убывает (или почти не изменяется) с увеличением ψ . В частности, в противосолнечной стороне ($\varphi = 180^\circ$) яркость горизонта Земли ($\theta = \theta^*$) практически не зависит от ψ и лишь при ψ , близких к 90° , резко убывает. При этом для интервала 3 убывание наступает при меньших ψ , что связано с сильным поглощением прямой солнечной радиации при низком положении Солнца.

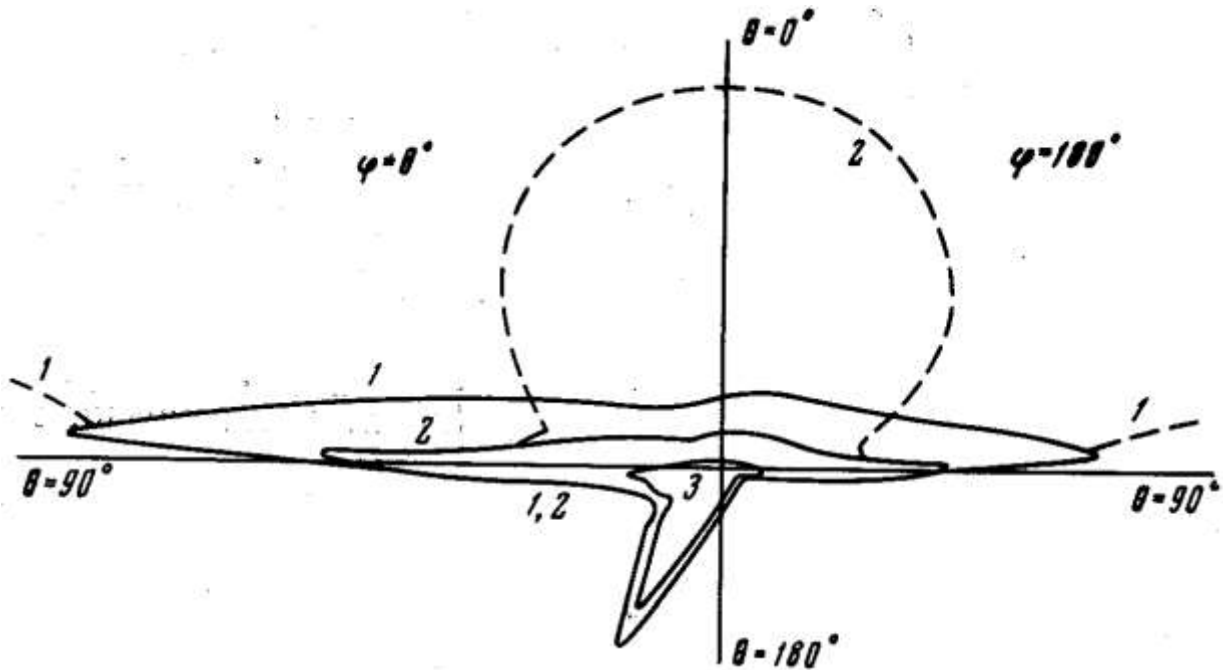


Рис.6. Тело яркости в плоскости солнечного вертикала для зенитного расстояния $\psi = 30^\circ$ на высоте $h = 10$ км. Сплошные кривые соответствуют расчетам с $A = 0$, пунктирные – с $A = 0,8$; 1, 2, 3 – номера спектральных интервалов

В основе многих описанных эффектов лежит асимметрия индикатрисы аэрозольного рассеяния. Это отчетливо видно на рис. 6, изображающем тело яркости (т.е. полный угловой разрез поля яркости) в плоскости вертикала Солнца на высоте $h = 10$ км для трех интервалов спектра при $\psi = 30^\circ$. Максимумы функции $\Phi(\theta)$ в направлении прямого солнечного излучения (ореол Солнца) соответствуют пику индикатрисы в угле рассеяния $\chi = 0$. Особенно большим оказывается ореол Солнца при $\psi = 90^\circ$, когда индикатрисный максимум совпадает с максимумом яркости Земли, и у горизонта Земли. Максимумы яркости у горизонтов сохраняются и при больших альbedo подстилающей поверхности, хотя в остальных направлениях поле восходящей радиации становится более изотропным.

Таковы основные закономерности углового распределения яркости сферической атмосферы в приближении однократного рассеяния. Учет многократного рассеяния не должен вносить существенных изменений в эти закономерности, хотя может приводить к сглаживанию углового хода при переходе от Земли к космическому пространству. Нами проведено сравнение поля яркости атмосферы, рассчитанного для сферической атмосферы в приближении однократного рассеяния и для плоской атмосферы с учетом многократного рассеяния в интервале 1 (окно прозрачности), где вклад многократного рассеяния должен быть максимальным. Оно показывает, что отклонение от точного решения, достигающее наибольшей величины при $\theta \approx \theta^*$ (в 1.5-2 раза), составляет десятки процентов для других направлений,

в то время как вариации геометрических и физических параметров (см., например, рис. 4) приводят к изменению на порядки. С ростом поглощения, естественно, роль многократного рассеяния еще более уменьшается.

Таблица 4.

Значения интенсивности Φ для различных длин волн λ в разных направлениях визирования

λ	$\alpha_{\Delta\lambda}$	$\beta_{\Delta\lambda}$	θ					
			80°	85°	85°28'	90°	95°	100°
1,8	1,17	0,53	$0,6664 \cdot 10^{-1}$	0,1330	0,1476	$0,8313 \cdot 10^{-1}$	$0,1900 \cdot 10^{-2}$	$0,1691 \cdot 10^{-2}$
1,87	5,81	0,53	$0,3454 \cdot 10^{-1}$	$0,6803 \cdot 10^{-1}$	$0,7527 \cdot 10^{-1}$	$0,8050 \cdot 10^{-1}$	$0,1886 \cdot 10^{-2}$	$0,1619 \cdot 10^{-2}$
1,89	2,39	0,53	$0,4964 \cdot 10^{-1}$	$0,9969 \cdot 10^{-1}$	0,1107	$0,8243 \cdot 10^{-1}$	$0,1896 \cdot 10^{-2}$	$0,1628 \cdot 10^{-2}$
1,90	4,04	0,53	$0,4015 \cdot 10^{-1}$	$0,7977 \cdot 10^{-1}$	$0,8843 \cdot 10^{-1}$	$0,8149 \cdot 10^{-1}$	$0,1892 \cdot 10^{-2}$	$0,1623 \cdot 10^{-2}$
1,95	1,02	0,53	$0,7069 \cdot 10^{-1}$	0,1402	0,1555	$0,8321 \cdot 10^{-1}$	$0,1900 \cdot 10^{-2}$	$0,1631 \cdot 10^{-2}$
2,00	0,11	0,53	0,1522	0,2620	0,2807	$0,8374 \cdot 10^{-1}$	$0,1903 \cdot 10^{-2}$	$0,1633 \cdot 10^{-2}$
2,39	0,105	0,53	0,1534	0,2638	0,2825	$0,8374 \cdot 10^{-1}$	$0,1903 \cdot 10^{-2}$	$0,1633 \cdot 10^{-2}$
2,50	1,323	0,53	$0,6326 \cdot 10^{-1}$	0,1267	0,1407	$0,8304 \cdot 10^{-1}$	$0,1899 \cdot 10^{-2}$	$0,1630 \cdot 10^{-2}$
2,56	14,40	0,53	$0,2292 \cdot 10^{-1}$	$0,4446 \cdot 10^{-1}$	$0,4881 \cdot 10^{-1}$	$0,7588 \cdot 10^{-1}$	$0,1861 \cdot 10^{-2}$	$0,1598 \cdot 10^{-2}$
2,61	22,80	0,53	$0,1817 \cdot 10^{-1}$	$0,3496 \cdot 10^{-1}$	$0,3819 \cdot 10^{-1}$	$0,7164 \cdot 10^{-1}$	$0,1837 \cdot 10^{-2}$	$0,1577 \cdot 10^{-2}$
2,67	32,00	0,53	$0,1509 \cdot 10^{-1}$	$0,2883 \cdot 10^{-1}$	$0,3137 \cdot 10^{-1}$	$0,6730 \cdot 10^{-1}$	$0,1811 \cdot 10^{-2}$	$0,1555 \cdot 10^{-2}$
2,88	2,2	0,53	$0,5133 \cdot 10^{-1}$	0,1032	0,1146	$0,8254 \cdot 10^{-1}$	$0,1897 \cdot 10^{-2}$	$0,1628 \cdot 10^{-2}$
	0	0	0,1832	0,3106	0,3283	$0,8380 \cdot 10^{-1}$	$0,1904 \cdot 10^{-2}$	$0,1634 \cdot 10^{-2}$

Вертикальный ход яркости

Результаты расчетов позволяют исследовать вертикальное распределение яркости атмосферы в рассматриваемых участках спектра при различных положениях Солнца и направлениях визирования. Наибольшее разнообразие вертикальных профилей яркости получается для района терминатора (рис. 7).

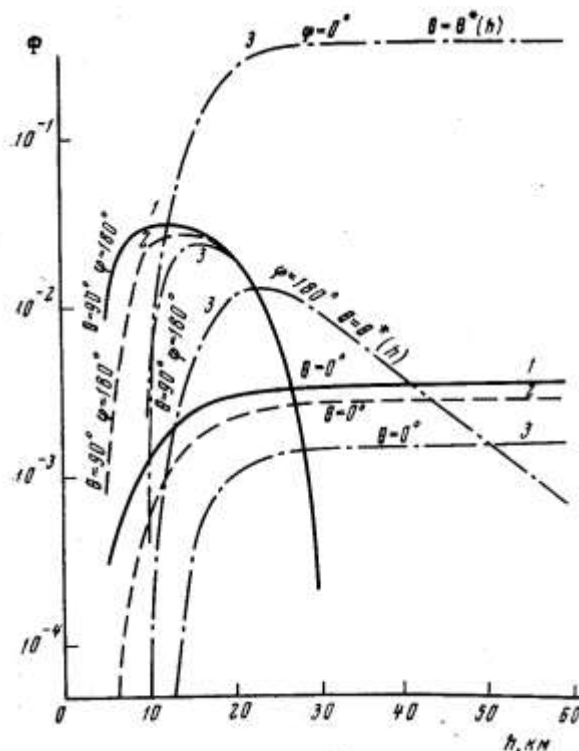


Рис.7. Высотный ход яркости Φ в районе терминатора ($\psi = 90^\circ$) в интервалах 1, 2, 3; $A=0$

При $A=0$ яркость в надире ($\theta=0^\circ$) во всех трех участках спектра возрастает до высоты $h \sim 30$ км и затем выходит на асимптотику. Физическое объяснение такого хода по высоте чрезвычайно просто: рост яркости обусловлен увеличением оптической толщины атмосферы, которая выше 30 км практически не изменяется.

Иной профиль яркости получается для наблюдения в направлении геометрического горизонта ($\theta=90^\circ$) в сторону тени Земли ($\varphi=180^\circ$). Во всех трех интервалах яркость растет до некоторой высоты ($h \sim 10$ км) и затем быстро убывает, совпадая на высотах 20-25 км. Рост яркости и наличие максимумов объясняется тем, что с увеличением высоты в поле зрения наблюдателя в противосолнечной стороне появляются все более яркие слои атмосферы (в области сильного поглощения эти слои имеют заметную яркость только на высотах более 10 км). Однако на больших высотах оптическая плотность слоев атмосферы начинает уменьшаться и вместе с ней убывает рассеянная этими слоями солнечная радиация. Совпадение яркости во всех трех участках спектра объясняется уменьшением поглощения радиации в высоких слоях атмосферы.

Аналогичный ход яркости с высотой получается и при наблюдении в направлении истинного горизонта Земли ($\theta=\theta^*$), причем в направлении на Солнце ($\varphi=0^\circ$) яркость, достигнув некоторого максимума, принимает постоянное значение. Это означает, что горизонт в дневной части Земли, наблюдаемый с достаточно больших высот, в районе терминатора оказывается одинаково ярким для разных высот. В противосолнечной стороне ($\varphi=180^\circ$) яркость горизонта после максимального значения на уровне 20 км начинает экспоненциально убывать с высотой. Причины этого убывания те же, что и в случае геометрического горизонта, однако показатель экспоненты для $\theta=\theta^*$ намного меньше, чем для $\theta=90^\circ$.

Аналогичные вертикальные профили яркости можно построить и для других условий освещения и наблюдения.

Сравнение экспериментальных и расчетных спектров

Существующие в настоящее время аэростатные и самолетные измерения абсолютных ИК спектров излучения Земли и атмосферы позволяют провести сравнение измеренных спектральных распределений с расчетными, полученными на основе описанной выше модели атмосферы. Поскольку эта модель и атмосферные условия, при которых проводились измерения, не могут быть точно сопоставлены, то указанное сравнение следует рассматривать лишь как оценочное.

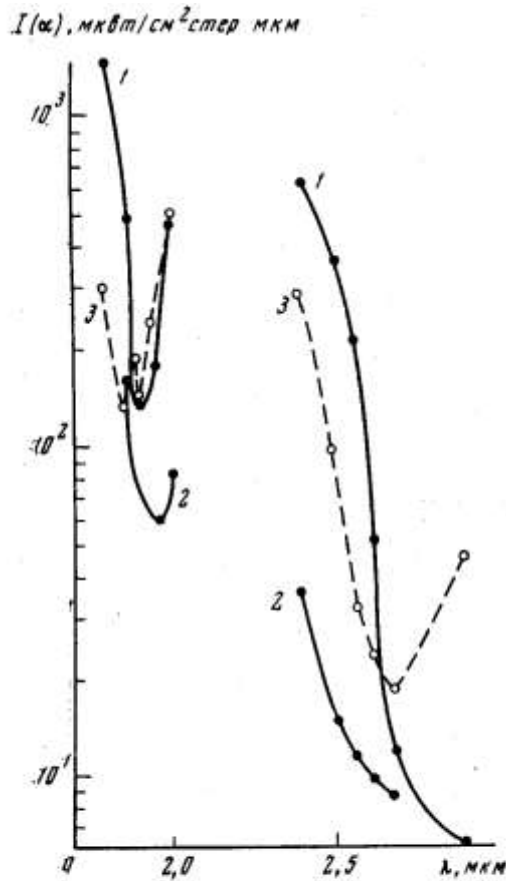


Рис.8. Сравнение спектрального хода яркости излучения I в близкой ИК области спектра по данным эксперимента (1- $h=23,5$ км, 2- $h=29,3$ км) и по расчетным данным (кривая 3, $h=20$ км) для угла наблюдения $\theta = 80^\circ$, азимута $\varphi = 20^\circ$, зенитного расстояния $\psi = 53^\circ$

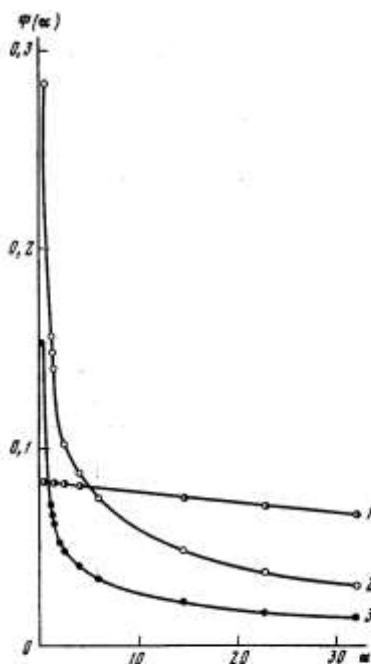


Рис. 9. Зависимость интенсивности Φ от параметра α в направлении касательной к Земле (1- $\theta = \theta^* = 85^\circ 28'$) и вблизи касательной (2- $\theta = 80^\circ$, 3- $\theta = 90^\circ$) для $h=20$ км, $\varphi = 20^\circ$, $\psi = 53^\circ$

Сравнение экспериментальных и расчетных данных проводилось для длин волн λ в пределах от 1.80 до 2.88 мкм. Соответствующие параметры $\alpha_{\Delta\lambda}$ и $\beta_{\Delta\lambda}$ (селективное поглощение учитывалось с помощью функции пропускания (2)) были взяты из работы [21]. Расчеты проводились для $h = 20$ км, зенитного расстояния Солнца $\psi = 53^\circ$, азимута $\varphi = 20^\circ$ и углов $\theta = 80, 85, 90, 95, 100^\circ$ и $\theta' = 85^\circ 28'$, альбедо $A = 0,2$, т.е. для условий, близких к условиям эксперимента [22]. В табл. 4 и на рис. 8, 9 приведены результаты расчетов.

Как следует из рис. 8, для угла $\theta = 80^\circ$, т.е. для того направления, в котором яркость Земли определяется в основном рассеянием и поглощением солнечной радиации в нижних слоях атмосферы ($h \leq 10$ км), экспериментальные и расчетные величины находятся в пределах вариаций яркости в реальной атмосфере. Вариации же экспериментальных величин яркости, зависящие от мутности атмосферы, концентрации влаги и, быть может, облачности, не фиксирувавшейся визуально, достигают порядка самой величины яркости. Поэтому можно считать, что принятая модель атмосферы и метод расчета поля яркости обеспечивают удовлетворительное описание спектрального хода яркости в области двух полос поглощения водяного пара (1.9 и 2.7 мкм), хотя в центральной части полос расчетное поглощение оказывается меньше измеренного.

Графики зависимости $\Phi(\alpha)$, изображенные на рис. 9 для различных углов θ позволяют установить простые закономерности параметрической зависимости яркости по параметру α , которые могут быть использованы для определения спектральной яркости при различных условиях освещения и наблюдения. Тем самым для получения спектрального хода яркости вместо решения уравнения переноса для каждого спектрального интервала можно ограничиться расчетами в небольшом числе реперных длин волн.

Авторы выражают глубокую благодарность М.С.Малкевичу за постоянное внимание к работе и большую помощь в постановке задачи и физической интерпретации результатов. Мы также весьма признательны М.В.Масленникову, с которым неоднократно обсуждалась настоящая работа. Авторы благодарят Э.В.Коток, Е.Г.Натрусову, Е.И.Панфилову, Г.С.Простакову, Г.Э.Ришину, принимавших участие в проведении расчетов и оформлении расчетных материалов.

Академия наук СССР
Институт прикладной математики
Институт физики атмосферы

Поступила в редакцию
14 ноября 1968 г.

Литература

1. Попов С.М. Некоторые статистические характеристики вертикальной структуры полей температуры и влажности. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 1, 1965.

2. *Копрова Л.И., Малкевич М.С.* Об эмпирических ортогональных функциях для оптимальной параметризации профилей температуры и влажности атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 1, 1965.
3. *Болдырев В.Г., Копрова Л.И., Малкевич М.С.* Об учете вариаций вертикальных профилей температуры и влажности при определении температуры подстилающей поверхности по уходящему излучению. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 7, 1965.
4. *Малкевич М.С. Половина И.П.* О статистических характеристиках вертикальной структуры слоистой облачности и метеорологических элементов. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 4, 1967.
5. *Копрова Л.И.* О статистических характеристиках вертикальной структуры коэффициента аэрозольного ослабления. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 8, 1968
6. *Рабинович Ю.И.* Спектральное ослабление и контраст в свободной атмосфере. Диссертация. ГГО, 1961.
7. *Elterman L.* An atlas of aerosol attenuation and extinction profiles for the troposphere and stratosphere. AFCRL-66-828, 1966.
8. *Розенберг Г.В., Сандомирский А.Б.* Определение высотного хода коэффициента рассеяния по фотографиям дневного горизонта Земли, полученным с космического корабля «Восход». Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 2, 1967.
9. *Георгиевский Ю.С.* Исследование спектральной прозрачности приземного слоя воздуха. Диссертация. ИФА, 1966.
10. *Knestrik G.L., Cosden T.H., Curcio I.A.* Atmospheric scattering coefficients in the visible and infrared regions. J. Opt. Soc. America, 52, № 9, 1962.
11. *Лифшиц Г.Ш.* Рассеяние света в атмосфере, ч. 1. «Наука2, Алма-Ата, 1965.
12. *Розенберг Г.В., Николаева-Терешикова В.В.* Стратосферный аэрозоль по измерениям с космического корабля. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 4, 1965
13. *Chu C.M., Clark G.C., Churchill S.W.* Angular distribution coefficients for light scattering by spheres. Eng. Res. Inst. University of Michigan, 1957.
14. *Копрова Л.И., Малкевич М.С.* О тепловом излучении сферической атмосферы. Космические исследования, 2, вып. 6, 1964.
15. *Киселева М.С., Непорент Б.С., Федорова Е.О.* Поглощение инфракрасной радиации при неразрешенной структуре спектра для наклонных путей в атмосфере (действие H_2O и CO_2). Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 6, 1967.
16. *Голубицкий Б.М., Москаленко Н.И.* Функции спектрального пропускания в полосах паров H_2O и CO_2 . Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 3, 1968
17. *Соболев В.В., Минин И.Н.* Рассеяние света в сферической атмосфере. III. Космические исследования, 2, вып. 4, 1964.

18. *Смоктый О.И.* Об определении яркости неоднородной сферически симметричной планетной атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 4, 1967.

19. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А.* О решении задач атмосферной оптики методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 3, 1967.

20. *Гермогенова Т.А., Басс Л.П.* Применение метода характеристик к решению уравнения переноса. Сб. «Вопросы физики защиты реакторов», вып. 3. Атомиздат, 1969.

21. *Scherhag R.* Ergebnisse der Aufstiege der Radiosondenstation des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Freien Universität Berlin in Jahre 1965 September. Meteorol. Abhandl. Inst. Meteorol. und Geophys. Freien Univ. Berlin, 52, №9, 1965.

22. *Шолохова Е.Д., Федорова Е.О., Лобанова Г.И., Борткевич В.С.* Стратостатные измерения яркости дневного безоблачного неба в области 1-6 мкм. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 4, 1967.

STUDY OF THE ANGLE, SPACE AND SPECTRAL STRUCTURE OF THE EARTH BRIGHTNESS FIELD FOR A REPRESENTATIVE MODEL OF THE SPHERICAL ATMOSPHERE

T.A.Germogenova, L.I.Koprova, T.A.Sushkevich

To determine the angle and space structure of the Earth radiation field the numerical solution of the transfer equation has been obtained for the two-dimensional model of the scattering and emitting spherical atmosphere with the axial symmetry in relation to the Earth –Sun direction. The problem has been solved by the iterations method. For the each iteration the finite difference method was used by characteristics with a successive interpolation. The numerical results obtained by the single scattering approximation have been analyzed for the representative atmospheric and underlying surface models in absorbing region of H_2O 2.7 μ . Some regularities of the angle and space distribution of the brightness are pointed out and a simple parametric dependence is established by the study of the brightness spectral behavior.

Спектр характеристического уравнения с учетом поляризации

Гермогенова Т.А., Коновалов Н.В.

Препринт № 62, ИПМ АН СССР, Москва, 1978 г. 53 стр., библи. 18 назв.

Аннотация

Развита теория характеристического уравнения теории переноса поляризованного излучения. В достаточно общих предположениях относительно параметров, описывающих рассеивающие и поглощающие свойства среды, определена структура спектра характеристического уравнения и установлены основные свойства старшего собственного числа и соответствующей ему собственной функции.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	
§ 1. Оператор рассеяния \hat{P}	
§ 2. Характеристическое уравнение	
§ 3. Численный алгоритм определения значения k_0 и вектора $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$	
§ 4. ПРИЛОЖЕНИЕ. Обобщенные сферические функции. Пространство $L_2^{(4)}(\Omega)$	
Литература	

ВВЕДЕНИЕ

Решение конечно-разностными методами [1] и методами Монте-Карло [2] задач о прохождении поляризованного излучения через среды большой оптической толщины требует весьма значительного объема вычислений. Естественно в этих задачах воспользоваться асимптотическими методами традиционной (скалярной) теории переноса [3,4].

В основе асимптотического исследования лежит анализ характеристического уравнения. При учете поляризации оно имеет вид:

$$[1 + k(s \cdot n)]\vec{\Phi}(k, s) = \hat{P}\vec{\Phi}(k, s), \quad s \in \Omega, \quad (*)$$

где Ω единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве, n - фиксированный вектор из Ω , k - собственный параметр, а $\vec{\Phi}(k, s)$ - четырехмерный собственный вектор, компонентами которого являются поляризационные параметры излучения:

$$\vec{\Phi}(k, s) = \{\Phi_1(k, s), \Phi_2(k, s), \Phi_3(k, s), \Phi_4(k, s)\},$$

\hat{P} - интегральный оператор, определяемый законом однократного рассеяния поляризованного излучения.

В существующих исследованиях асимптотических характеристик поляризованного излучения [5,6] предполагается, что так же как и в скалярной теории уравнение (*) имеет простое положительное собственное число k_0 , меньшее модулей действительных частей всех остальных собственных чисел, и ему соответствует собственный вектор $\vec{\Phi}(k_0, s)$, описывающий состояние поляризации, которое естественно ожидать после большого числа столкновений. Однако строгого доказательства указанных свойств уравнения (*) к настоящему времени нет.

Трудности математического анализа уравнения (*) связаны прежде всего с несамосопряженностью оператора \hat{P} .

В настоящей работе излагается теория характеристического уравнения в случае макроскопически изотропной среды при условии, что матрица рассеяния $\hat{\Gamma}$, определяющая закон однократного рассеяния света на элементарном объеме среды, клеточно-диагональна [5]. При этом мы накладываем минимальные ограничения на элементы матрицы, считая их суммируемыми по модулю функциями на интервале $(-1, 1)$. Эти ограничения диктуются вероятностной природой физических процессов, описываемых матрицей $\hat{\Gamma}$.

Ключевым моментом предлагаемой теории является введение конуса - множества вектор-функций, определяемого неравенствами на их компоненты. Эти неравенства вытекают из физического анализа параметров Стокса, характеризующих поляризованный свет. Относительно введенного конуса определяется класс неотрицательных матриц рассеяния $\hat{\Gamma}$ [5]. Для

таких матриц и сформулированы окончательные результаты настоящей работы.

В § 1 описываются SP и CP - представления поляризованного света [5,7]. Доказана полная непрерывность оператора рассеяния \hat{P} в пространствах суммируемых с p -ой степенью модуля вектор-функций и установлены его сглаживающие свойства. Найдена система собственных значений оператора \hat{P} и показано, что собственные и присоединенные векторы являются комбинациями обобщенных сферических функций. Вычислена норма и доказаны сильная и U_0 - положительности оператора \hat{P} .

В пространствах суммируемых с квадратом модуля вектор-функций для оператора \hat{P} найдено представление типа Гильберта-Шмидта. Получены неравенства, которым должны удовлетворять коэффициенты разложения элементов неотрицательных матриц рассеяния $\hat{\Gamma}$ по обобщенным сферическим функциям.

В § 2 изучается характеристическое уравнение. Установлены сильная и U_0 - положительности оператора $\hat{U}(k) = [1 + k(s \cdot n)]^{-1} \hat{P}$ и доказана непрерывность его собственных векторов. Изучены аналитические свойства старшего собственного значения $M(k)$ и соответствующего ему собственного вектора $\vec{\Phi}(k, s)$ оператора $\hat{U}(k)$ в комплексной k - плоскости с разрезами вдоль действительной оси $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$. Как и в скалярной теории, спектр оператора $\hat{U}(k)$ дискретный, однако, в общем случае, он не лежит на вещественной оси.

С точки зрения изучения асимптотических свойств уравнения переноса наиболее важным свойством спектра характеристического уравнения является наличие старшего собственного числа k_0 . Установлено, что ему отвечает единственное решение характеристического уравнения, отвечающее физическим требованиям к параметрам поляризации. Это решение имеет вид

$$\vec{\Phi}(k_0, s) \equiv \vec{\Phi}(k_0, \mu) = \{\Phi_1(k_0, \mu), \Phi_2(k_0, \mu), 0, 0\},$$

$$\Phi_i(k_0, \mu) = \Phi_i(-k_0, -\mu), \quad i = 1, 2, \quad \mu = \cos \theta,$$

θ - зенитный угол, т.е. оно не зависит от азимута и описывает линейно поляризованный свет; при этом

$$\Phi_1(k_0, \mu) > 0, \quad |\Phi_2(k_0, \mu)| < \Phi_1(k_0, \mu), \quad \mu \in [-1, 1].$$

В задачах с поглощением уравнение (*) приводится к эквивалентной форме задачи на собственные значения для оператора $\hat{H} = (\hat{E} - \hat{P})^{-1} \hat{M}$:

$$\hat{H} \vec{\Phi}(v, s) = v \vec{\Phi}(v, s), \quad -v = k^{-1},$$

где \hat{M} - оператор умножения на переменную μ . Изучен спектр оператора \hat{H} , который состоит из сегмента $[-1,1]$ и дискретной части, заключенной в два круга радиуса $(2k_0)^{-1}$ с центрами в точках $\pm(2k_0)^{-1}$.

Доказана непрерывная зависимость k_0 и $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$ от матрицы $\hat{\Gamma}$.

В § 3 предлагается итерационный алгоритм вычисления числа k_0 и вектора $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$. При этом задача сводится к решению более простого уравнения с двумерной матрицей. С помощью теории возмущений показано, что хорошим нулевым приближением для итерационного процесса является решение соответствующей скалярной задачи. Оказывается, что введение поляризации дает вклад 2-го порядка малости в величины k_0 и $\Phi_1(k_0, \mu)$.

В частности, утверждения данной работы обобщают результаты соответствующей скалярной теории, развитой М.В.Масленниковым [8], на класс суммируемых по модулю индикатрис рассеяния.

Авторы пользуются случаем выразить свою благодарность М.Г.Кузьминой, получившей независимо близкие результаты в предположении о квадратичной суммируемости элементов матрицы [9,10]. Совместные обсуждения некоторых аспектов работы способствовали ее завершению.

§1. Оператор рассеяния \hat{P} .

I. Пусть $\mathcal{L}_p(\Omega)$ и $C(\Omega)$, как обычно, пространства функций измеримых и интегрируемых с p -ой степенью модуля и, соответственно, непрерывных на единичной сфере Ω трехмерного евклидова пространства.

Обозначим через $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ линейное пространство комплекснозначных вектор-функций

$$\vec{\Phi}(s) = \{\Phi_1(s), \Phi_2(s), \Phi_3(s), \Phi_4(s)\},$$

компоненты которых $\Phi_i(s) \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $s \in \Omega$.

Определив норму в $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ равенством:

$$\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^4 \|\Phi_i\|_{\mathcal{L}_p}^p \right]^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{L}_\infty^{(4)}} = \max_i \sup_{s \in \Omega} |\Phi_i(s)|,$$

где $\|\Phi_i\|_{\mathcal{L}_p}^p = \int_{\Omega} |\Phi_i(s)|^p ds$, $p \in [1, \infty)$, обратим $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в полное нормированное пространство.

Пространство, состоящее из непрерывных на Ω вектор-функций с нормой

$$\|\vec{\Phi}\|_{C^{(4)}} = \max_i \max_{s \in \Omega} |\Phi_i(s)|,$$

обозначим через $C^{(4)}(\Omega)$.

Для функций $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ и $\vec{\Psi}(s) \in \mathcal{L}_q^{(4)}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, введем скалярное произведение

$$(\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) = \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega} \Phi_i(s) \bar{\Psi}_i(s) ds \quad (1)$$

и относительно него для оператора \hat{P} , заданного на $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, определим на $\mathcal{L}_q^{(4)}(\Omega)$ сопряженный оператор \hat{P}^* :

$$(\hat{P}\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) = (\vec{\Phi}, \hat{P}^*\vec{\Psi}). \quad (2)$$

При $p = \infty$ под \hat{P}^* будем понимать сужение оператора \hat{P}^* на подпространство $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_{\infty}^{(4)*}$.

Аналогичным образом введем пространства функций $\Phi(\mu)$, не зависящих от азимутального угла φ , $\mathcal{L}_p(-1,1)$ и $C[-1,1]$:

$$\|f\|_{L_p}^p = \int_{-1}^1 |f|^p d\mu, \quad \|f\|_{L_{\infty}} = \sup_{\mu \in (-1,1)} |f|, \quad \|f\|_C = \max_{\mu \in [-1,1]} |f|,$$

и соответствующие пространства $\mathcal{L}_p^{(4)}(-1,1)$ и $C^{(4)}[-1,1]$ вектор-функций $\vec{\Phi}(\mu) = \{\Phi_1(\mu), \Phi_2(\mu), \Phi_3(\mu), \Phi_4(\mu)\}$. Вещественные ядра введенных пространств обозначим через $N(\mathcal{L}_p^{(4)})$ и $N(C^{(4)})$.

Для вектора $\vec{\Phi}(s)$ будут использованы два представления: SP - Пуанкаре-Стокса и CP - представление [5,7]. В первом $\Phi_1(s)$ есть интенсивность излучения I в направлении $s \in \Omega$: $\Phi_1^{SP}(s) = I$, а

$$\Phi_2^{SP} = Q = I \cos 2\beta \cos 2\chi, \quad \Phi_3^{SP} = U = I \cos 2\beta \sin 2\chi, \quad \Phi_4^{SP} = V = I \sin 2\beta.$$

Углы β и χ характеризуют положение и степень вытянутости эллипса поляризации.

CP - представление связано с SP преобразованием \hat{T} :

$$\vec{\Phi}^{CP} = \hat{T} \vec{\Phi}^{SP}, \quad \hat{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2\hat{T}^\dagger = 2\hat{T}^* \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем черта означает комплексное сопряжение, а индекс « \dagger » - транспонирование.

Оператор рассеяния \hat{P} есть интегральный оператор

$$\hat{P} \vec{\Phi}(s) = \int_{\Omega} \hat{P}(s', s) \vec{\Phi}(s') ds',$$

ядро которого, четырехмерная матрица $\hat{P}(s', s)$, определяется произведением:

$$\hat{P}(s', s) = \hat{L}(-\chi_1(s', s)) \hat{G}(s's) \hat{L}(-\chi_2(s', s)) \quad (4)$$

Матрица $\hat{G}(s's)$, зависящая лишь от величины угла рассеяния $\mathcal{G} = \arccos s's$, описывает преобразование в акте рассеяния параметров поляризации, отнесенных к плоскости рассеяния, а $\hat{L}(\alpha)$ отвечает измерению этих параметров при повороте координатной системы на угол α вокруг оси, определяемой вектором $s \in \Omega$ [7]:

$$\cos \chi_1(s', s) = -\cos \chi_2(s, s') = \frac{\cos \theta - \cos \mathcal{G} \cos \theta'}{\sin \mathcal{G} \sin \theta'},$$

$$\sin \chi_1(s', s) = \sin \chi_2(s, s') = \frac{\sin \theta \sin(\varphi' - \varphi)}{\sin \mathcal{G}},$$

$$\cos \mathcal{G} = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi' - \varphi), \quad \text{sign} \sin \mathcal{G} = \text{sign} \sin(\varphi' - \varphi),$$

$$\mu = \cos \theta, \quad \mu' = \cos \theta',$$

(5)

(θ, φ) и (θ', φ') - сферические координаты векторов $s, s' \in \Omega$ относительно некоторого фиксированного базиса.

В тех точках $s, s' \in \Omega$, где $\sin \mathcal{G}$, $\sin \theta$ и $\sin \theta'$ обращаются в нуль, доопределим функции (5) их предельными значениями и получим, таким образом, функции $\cos \chi_{1,2}$ и $\sin \chi_{1,2}$ непрерывные в области $-1 \leq \mu, \mu' \leq 1, 0 \leq \varphi, \varphi' \leq 2\pi$.

В SP - представлении

$$\hat{L}^{SP}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а в CP - представлении $\hat{L}^{CP}(\alpha) = \hat{T}\hat{L}^{SP}(\alpha)\hat{T}^{-1}$ - диагональная матрица:

$$\hat{L}^{CP}(\alpha) = \begin{bmatrix} \exp(-2i\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(2i\alpha) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Воспользовавшись выражениями (5), легко получить следующие равенства:

$$\sin 2\chi_1(s', s) = -\sin 2\chi_2(s', s), \quad \cos 2\chi_1(s, s') = \cos 2\chi_2(s', s),$$

из которых следует соотношение, верное в обоих представлениях:

$$\hat{L}^\dagger(-\chi_1(s, s')) = \hat{L}(-\chi_2(s', s)) \quad (8)$$

Оператор рассеяния $\hat{\mathcal{P}}^{CP}$ в CP - представлении есть интегральный оператор с ядром (4), в котором

$$\hat{I}^{CP}(s's) = \hat{T}\hat{I}^{SP}(s's) \equiv \{\hat{I}_{mn}(s's)\}_{m,n=2,0,-0,-2}. \quad (9)$$

Из равенств (7) и (9), в частности, следует, что в CP - представлении

$$|\mathcal{P}_{ij}^{CP}(s', s)| = |\Gamma_{ij}^{CP}(s', s)|. \quad (10)$$

II. При доказательстве нижеследующих двух теорем мы воспользуемся CP - представлением, так как равенство (10) позволит в значительной степени упростить выкладки. При этом, в силу невырожденности преобразования \hat{T} , нормы элемента $\vec{\Phi}(s)$, взятого в SP и CP - представлениях, эквивалентны.

Вследствие этого справедливость указанных теорем сохраняется и в SP - представлении.

Компоненты вектора $\vec{\Phi}(s)$ в CP - представлении будем нумеровать индексом $m \in \{2, 0, -0, -2\}$.

Теорема 1.

1. Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1, 1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$. Тогда оператор $\hat{\mathcal{P}}$ вполне непрерывен в $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ при любом $p \in [1, \infty]$ и

$$\left\| \hat{\mathcal{P}} \right\|_{\mathcal{L}_p^{(4)}} \leq 8\pi \max_{m,n} \left\| \Gamma_{mn} \right\|_{\mathcal{L}_1}. \quad (11)$$

2. При $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1, 1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$, $q \in [1, \infty)$, $\hat{\mathcal{P}}$ вполне

непрерывен из $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ и

$$\left\| \hat{\mathcal{P}} \right\|_{\mathcal{L}_p^{(4)} \rightarrow C^{(4)}} \leq (8\pi)^{1/q} \max_{m,n} \left\| \Gamma_{mn} \right\|_{\mathcal{L}_q}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \quad (12)$$

3. Если $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_\infty(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$, то оператор $\hat{\mathcal{P}}$ ограничен из $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$:

$$\left\| \hat{\mathcal{P}} \right\|_{\mathcal{L}_1^{(4)} \rightarrow C^{(4)}} \leq \max_{m,n} \left\| \Gamma_{mn} \right\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad (13)$$

оператор $\hat{\mathcal{P}}^2$ вполне непрерывен из $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$.

4. Сопряженный оператор $\hat{\mathcal{P}}^*$ есть интегральный оператор с ядром $\hat{L}(-\chi_1(s', s)) \hat{G}_{(s', s)}^\dagger \hat{L}(-\chi_2(s', s))$; он также обладает свойствами (1)-(3).

Доказательство

1. Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$.

При $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, используя неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} \sum_m \int_\Omega \left| \hat{\mathcal{P}} \vec{\Phi}(s) \right|_m^p ds &\leq \sum_m \int_\Omega ds \left\{ \sum_n \int_\Omega \left| \Gamma_{mn}(ss') \right|^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} |\Phi_n(s')| ds' \right\}^p \leq \\ &\leq \sum_m \int_\Omega ds \left\{ \sum_n \int_\Omega \left| \Gamma_{mn}(ss') \right| ds' \right\}^{p/q} \left\{ \sum_n \int_\Omega \left| \Gamma_{mn}(ss') \right| |\Phi_n(s')|^p ds' \right\} \leq \\ &\leq \left\{ 8\pi \max_{m,n} \int_{-1}^1 \left| \Gamma_{mn}(\mu) \right| d\mu \right\}^p \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_p^{(4)}}^p, \end{aligned}$$

откуда следует (11). Просто доказывается неравенство (11) и в случаях $p = 1, \infty$.

Для доказательства полной непрерывности $\hat{\mathcal{P}}$, следуя работе [11], предположим сначала, что $\Gamma_{mn}(\mu) \in C[-1,1]$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$. В этом случае легко доказывается полная непрерывность оператора $\hat{\mathcal{P}}$ из $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, в $C^{(4)}(\Omega)$ с использованием равномерной непрерывности функции $\Gamma_{mn}(\mu)$ на сегменте $[1,1]$ и теоремы Арцела. Далее, аппроксимируя функции $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1,1)$ последовательностями непрерывных функций в метрике $\mathcal{L}_1(-1,1)$ получим последовательность

вполне непрерывных операторов $\hat{\mathcal{P}}^{(\ell)}$, которая в силу (11) равномерно сходится к оператору $\hat{\mathcal{P}}$:

$$\left\| \hat{\mathcal{P}} - \hat{\mathcal{P}}^{(\ell)} \right\|_{\mathcal{L}_p^{(4)}} \leq 8\pi \max_{m,n} \left\| \Gamma_{mn}(\mu) - \Gamma_{mn}^{(\ell)}(\mu) \right\|_{\mathcal{L}_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\hat{\mathcal{P}}$ вполне непрерывен в $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ при любом p .

2. Пусть теперь $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$, $q \in (1, \infty)$ и $p^{-1} = 1 - q^{-1}$. Тогда, используя неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} \left| \hat{\mathcal{P}} \vec{\Phi}(s) \right|_m &\leq \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(ss') \right| \left| \Phi_n(s') \right| ds' \leq \left\{ \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(ss') \right|^q ds' \right\}^{1/q} \\ &\cdot \left\{ \sum_n \int_{\Omega} \left| \Phi_n(s') \right|^p ds' \right\}^{1/p} \leq 8\pi \max_{m,n} \int_{-1}^1 \left| \Gamma_{mn}(\mu) \right|^q d\mu \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_p^{(4)}}. \end{aligned}$$

откуда следует (12). Аналогично, при $q = 1$ ($p = \infty$):

$$\left| \Phi_m(s) \right| \leq \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(ss') \right| \left| \Phi_n(s') \right| ds' \leq 8\pi \max_{m,n} \int_{-1}^1 \left| \Gamma_{mn}(\mu) \right| d\mu \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_{\infty}^{(4)}}.$$

Доказательство полной непрерывности $\hat{\mathcal{P}}$ из $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ проводится аналогично приводимому в [8], где оно выполнено для скалярного случая при $p = q = 2$. Функции $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ аппроксимируются в метрике $\mathcal{L}_q(-1,1)$ последовательностью непрерывных функций $\Gamma_{mn}^{(\ell)}(\mu)$, а затем используется равномерная непрерывность $\Gamma_{mn}^{(\ell)}(\mu)$ на сегменте $[-1,1]$ и теорема Арцела.

3. Положим $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_{\infty}(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ и $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$. Тогда, в силу (10), для любого $s \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \left| \hat{\mathcal{P}} \vec{\Phi}(s) \right|_m &= \left| \sum_n \int_{\Omega} \mathcal{P}_{mn}(s', s) \Phi_n(s') ds' \right| \leq \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(s's) \right| \left| \Phi_n(s') \right| ds' \leq \\ &\leq \max_{m,n} \sup_{\mu \in (-1,1)} \left\| \Gamma_{mn}(\mu) \right\| \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_1^{(4)}}. \end{aligned}$$

(14)

Предположим сначала, что функции $\Gamma_{mn}(\mu)$ измеримы и ограничены по модулю на сегменте $[-1,1]$: $\max_{m,n} |\Gamma_{mn}(\mu)| \leq K$.

Пусть $s_1, s_2 \in \Omega$.

Образуем разность:

$$\left| \hat{P}\vec{\Phi}(s_1) - \hat{P}\vec{\Phi}(s_2) \right|_m \leq \sum_n \int_{\Omega} |\Gamma_{mn}(s_1 s) - \Gamma_{mn}(s_2 s)| |\Phi_n(s)| ds. \quad (15)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\sum_n \int_e |\Phi_n(s)| ds < \frac{\varepsilon}{12K} \quad (16)$$

для любого измеримого подмножества $e \subset \Omega$ с мерой $mes e < \delta$.

Приближим функции $\Gamma_{mn}(\mu)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ по мере непрерывными функциями $\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)$, $|\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)| \leq K$, т.е. выберем $\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)$ так, чтобы мера множества

$$E_0 = \left\{ \mu \mid \mu \in (-1, 1), \max_{m,n} |\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu) - \Gamma_{mn}(\mu)| \geq \frac{\varepsilon}{6 \|\vec{\Phi}\|_{L_1^{(4)}}} \right\}$$

была меньше $\delta / 2\pi$: $mes E_0 < \delta / 2\pi$.

Далее положим $\eta > 0$ настолько малым, чтобы для всех $\mu_1, \mu_2 \in [-1, 1]$ выполнялось неравенство

$$\max_{m,n} |\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu_1) - \tilde{\Gamma}_{mn}(\mu_2)| < \frac{\varepsilon}{3 \|\vec{\Phi}\|_{L_1^{(4)}}}, \quad (17)$$

как только $|\mu_1 - \mu_2| < \eta$. Тогда при $|s_1 - s_2| < \eta$ имеем $|s_1 s - s_2 s| = |(s_1 - s_2)s| \leq |s_1 - s_2| < \eta$ и из (15) и (17) следует:

$$\begin{aligned}
& \left| \hat{\Phi} \vec{\Phi}(s_1) - \hat{\Phi} \vec{\Phi}(s_2) \right|_m \leq \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(s_1 s) - \Gamma_{mn}(s_2 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds \leq \\
& \leq \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(s_1 s) - \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds + \\
& + \sum_n \int_{\Omega} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) - \tilde{\Gamma}_{mn}(s_2 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds + \\
& + \sum_n \int_{\Omega} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_2 s) - \Gamma_{mn}(s_2 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds < \\
& < \sum_n \int_{\Omega} \left| \Gamma_{mn}(s_1 s) - \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds + \\
& + \frac{\varepsilon}{3 \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_1^{(4)}}} \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_1^{(4)}} + \sum_n \int_{\Omega} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_2 s) - \Gamma_{mn}(s_2 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds = I_1 + \frac{\varepsilon}{3} + I_2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Оценим слагаемое

$$I_1 = \sum_n \int_{\Omega} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) - \Gamma_{mn}(s_1 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds.$$

Пусть $E_1 = \{s \mid s \in \Omega, s_1 s \in E_0\}$.

Это множество E_1 есть образ множества $E_0 \times (0, 2\pi)$ при вращении сферы Ω , совмещающим ось $0Z$ с вектором s_1 . Следовательно, E_1 измеримо и $mes E_1 = 2\pi mes E_0 < \delta$. Тогда:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_n \int_{\Omega \setminus E_1} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) - \Gamma_{mn}(s_1 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds + \\
& + \sum_n \int_{E_1} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) - \Gamma_{mn}(s_1 s) \right| \left| \Phi_n(s) \right| ds < \frac{\varepsilon}{6} + K \frac{\varepsilon}{12K} + K \frac{\varepsilon}{12K} = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы неравенства: (16),

$\max_{m,n} \left| \Gamma_{mn}(\mu) \right| \leq K$, $\max_{m,n} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(\mu) \right| \leq K$, а также тот факт, что на множестве

$$\Omega \setminus E_1 \quad \max_{m,n} \left| \tilde{\Gamma}_{mn}(s_1 s) - \Gamma_{mn}(s_1 s) \right| < \frac{\varepsilon}{6 \left\| \vec{\Phi} \right\|_{\mathcal{L}_1^{(4)}}}.$$

Подставляя оценку для I_1 и аналогичную оценку для I_2 в (18), получим $|\hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(s_1) - \hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(s_2)| < \varepsilon$ как только $|s_1 - s_2| < \eta$, т.е. $\hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(s) \in C^{(4)}(\Omega)$.

Если теперь $\Gamma_{mn}(\mu)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ произвольные функции из $\mathcal{L}_\infty(-1, 1)$, то изменив их на множестве нулевой меры, где они обращаются в бесконечность, превратим их в ограниченные на $[-1, 1]$ функции. Отсюда следует включение $\hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(s) \in C^{(4)}(\Omega)$ и в случае $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_\infty(-1, 1)$. Неравенство (11) следует из (14).

Доказать полную непрерывность оператора $\hat{\mathcal{P}}$ из $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ при $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_\infty(-1, 1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ опираясь на теорему Арцела не удастся, так как интеграл

$$\int_e |\Phi(s)| ds, \quad e \subset \Omega,$$

не обладает абсолютной непрерывностью, равномерной относительно функций из произвольного ограниченного множества $M \subset \mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$.

Однако, в этом случае вполне непрерывен оператор $\hat{\mathcal{P}}^2$. Действительно, ограниченное множество M из $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$, согласно только что доказанному, переводится оператором $\hat{\mathcal{P}}$ в ограниченное множество $\hat{\mathcal{P}}(M) \subset C^{(4)}(\Omega)$. Но тогда, в силу 1 и 2 пунктов теоремы, множество $\hat{\mathcal{P}}^2(M) = \hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathcal{P}}(M))$ компактно в $C^{(4)}(\Omega)$.

4. 4-ый пункт теоремы следует из равенства (8). Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}^*(s', s) &= \hat{\mathcal{P}}^\dagger(s, s') = [\hat{L}(-\chi_1(s, s'))\hat{\Gamma}(s's)\hat{L}(-\chi_2(s, s'))]^\dagger = \\ &= \bar{\hat{L}}^\dagger(-\chi_2(s, s'))\bar{\hat{\Gamma}}^\dagger(s's)\bar{\hat{L}}^\dagger(-\chi_1(s, s')) = \hat{L}(-\chi_1(s', s))\hat{\Gamma}^\dagger(s's)\hat{L}(-\chi_2(s', s)), \end{aligned}$$

т.е. $\hat{\mathcal{P}}^*(s', s)$ представляется произведением вида (4) с матрицей рассеяния $\bar{\hat{\Gamma}}^\dagger(\mu) = \hat{\Gamma}^*(\mu)$.

На основании доказанной теоремы при $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1, 1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ мы вправе рассматривать операторы $\hat{\mathcal{P}}$ и $\hat{\mathcal{P}}^*$ как вполне непрерывные операторы, действующие в пространствах $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, или $C^{(4)}(\Omega)$. Если же мы рассматриваем $\hat{\mathcal{P}}$ как ограниченный оператор $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ при $p \in [1, \infty]$, то функции $\Gamma_{mn}(\mu)$ должны удовлетворять более жесткому условию:

$\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$, $q^{-1} = 1 - p^{-1}$. При этом $\hat{\mathcal{P}}$ и $\hat{\mathcal{P}}^*$ вполне непрерывны из $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ если $p \in (1, \infty]$. Если же $p = 1$, то вполне непрерывны из $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ операторы $\hat{\mathcal{P}}^2$, $\hat{\mathcal{P}}^{*2}$ и $\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}}$.

II. Лемма 1.

Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ и $\ell_0 = \max\{|m|, |n|\}$.

Тогда для любого $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$

$$[\hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(s)]_m = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^{\ell} \sum_{q=-\ell}^{\ell} (-1)^q p_{mq}^{\ell}(\mu) e^{-iq\varphi}. \quad (19)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\mu' d\varphi' \Phi_n(\mu', \varphi') p_{mq}^{\ell}(\mu') e^{iq\varphi'},$$

где

$$p_{mn}^{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 \Gamma_{mn}(\mu) p_{mq}^{\ell}(\mu) d\mu,$$

а функции $p_{mn}^{\ell}(\mu)$ - обобщенные присоединенные функции Лежандра (см. приложение). Ряд (19) сходится в метрике $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$.

Доказательство.

1. Предположим сначала, что $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1,1)$ и положим $\ell_0 = \max\{|m|, |n|\}$. Покажем, что для любого $\Phi(s) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}_{mn}(s, s') \Phi(s') ds' = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} p_{mn}^{\ell} \int_{\Omega} T_{mn}^{\ell}(\tilde{\chi}_1, \cos \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\chi}_2) \Phi(s') ds', \quad (20)$$

$$m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$$

где $\tilde{\chi}_1, \cos \tilde{\mathcal{G}}$ и $\tilde{\chi}_2$ определены соотношениями (5), в которых изменены местами штрихованные и не штрихованные переменные, а T_{mn}^{ℓ} - обобщенные сферические функции (см. приложение). Для этого воспользуемся разложением (П.6) для функций $\mathcal{P}_{mn}(s, s')$:

$$\mathcal{P}_{mn}(s, s') = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} p_{mn}^{\ell} T_{mn}^{\ell}(\tilde{\chi}_1, \cos \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\chi}_2) = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} p_{mn}^{\ell} e^{-im\tilde{\chi}_1} P_{mn}^{\ell}(\cos \tilde{\mathcal{G}}) e^{-in\tilde{\chi}_2}. \quad (21)$$

При $N > 2$, с учетом (21), имеем:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} \mathcal{P}_{mn}(s, s') \Phi(s') ds' - \sum_{\ell=\ell_0}^N p_{mn}^{\ell} \int_{\Omega} \Gamma_{mn}^{\ell}(\tilde{\chi}_1, \cos \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\chi}_2) \Phi(s') ds' \right| = \\
& = \left| \int_{\Omega} \sum_{\ell=N}^{\infty} p_{mn}^{\ell} \int_{\Omega} p_{mn}^{\ell} e^{-im\tilde{\chi}_1} P_{mn}^{\ell}(\cos \tilde{\mathcal{G}}) e^{-in\tilde{\chi}_2} \Phi(s') ds' \right| \leq \\
& \leq \int_{\Omega} \left| \sum_{\ell=N}^{\infty} p_{mn}^{\ell} P_{mn}^{\ell}(s's) \right| |\Phi(s')| ds' \leq \sqrt{2\pi \int_{\Omega} |\Gamma_{mn}^N(\mu)|^2 d\mu} \sqrt{\int_{\Omega} |\Phi(s')|^2 ds'} = \\
& = \sqrt{2\pi \int_{\Omega} |\Gamma_{mn}^N(\mu)|^2 d\mu} \|\Phi\|_{\mathcal{L}_2},
\end{aligned}$$

где обозначено $\Gamma_{mn}^N(\mu) = \sum_{\ell=N}^{\infty} p_{mn}^{\ell} P_{mn}^{\ell}(\mu)$.

Из леммы III, в силу равенства Парсеваля-Стеклова, следует, что

$$\int_{\Omega} |\Gamma_{mn}^N(\mu)|^2 d\mu = \sum_{\ell=N}^{\infty} |p_{mn}^{\ell}|^2 \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, справедливо равенство (20), причем сходимость ряда равномерная относительно $s \in \Omega$.

Если теперь в качестве $\Phi(s)$ взять функцию $P_{mq}^{\ell}(\mu)e^{iq\varphi}$ и подставить ее в (20), то после несложных преобразований с использованием теоремы сложения для обобщенных сферических функций и ортогональности функций $P_{mq}^{\ell}(\mu)$ и $e^{iq\varphi}$ (см. приложение), получим

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{mn}(s, s') P_{mq}^{\ell}(\mu') e^{iq\varphi'} d\mu' d\varphi' = \frac{4\pi}{2\ell+1} p_{mq}^{\ell} P_{nq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi}. \quad (22)$$

2. Пусть теперь $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$. Покажем, что и в этом случае равенство (22) имеет место. Действительно, пусть $\Gamma_{mn}^{(k)}(\mu)$ последовательность функций из $C[-1,1]$ такая, что $\|\Gamma_{mn}^{(k)}(\mu) - \Gamma_{mn}(\mu)\|_{\mathcal{L}_1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$. Положим

$$p_{mn}^{\ell(k)} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 \Gamma_{mn}^{(k)}(\mu) P_{mn}^{\ell}(\mu) d\mu. \text{ Очевидно, для любого конечного } \ell$$

$$p_{mn}^{\ell(k)} \rightarrow p_{mn}^{\ell} \quad (23)$$

при $k \rightarrow \infty$, так как

$$\begin{aligned} |P_{mn}^{\ell(k)} - P_{mn}^{\ell}| &\leq \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 |\Gamma_{mn}^{(k)}(\mu) - \Gamma_{mn}(\mu)| |P_{mn}^{\ell}(\mu)| d\mu \leq \\ &\leq \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 |\Gamma_{mn}^{(k)}(\mu) - \Gamma_{mn}(\mu)| d\mu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь использована оценка $|P_{mn}^{\ell}(\mu)| \leq 1$ (лемма приложения).

Соотношение (22) выполнено для всякого оператора $\hat{P}^{(k)}$ при любом $k = 1, 2, \dots$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} \mathcal{P}_{mn}(s, s') P_{mq}^{\ell}(\mu') e^{iq\varphi'} d\mu' d\varphi' - \frac{4\pi}{2\ell+1} P_{mn}^{\ell} P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega} [\mathcal{P}_{mn}(s, s') - P_{mn}^{(k)}(s, s')] P_{mq}^{\ell}(\mu') e^{iq\varphi'} d\mu' d\varphi' \right| + \\ &+ \frac{4\pi}{2\ell+1} |P_{mn}^{\ell(k)} - P_{mn}^{\ell}| |P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi}| \leq \\ &\leq 2\pi \int_s |\Gamma_{mn}(\mu) - \Gamma_{mn}^{(k)}(\mu)| d\mu + \frac{4\pi}{2\ell+1} |P_{mn}^{\ell(k)} - P_{mn}^{\ell}|. \end{aligned}$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от K , то (22) оказывается справедливым в рассматриваемом случае.

Возьмем произвольный элемент $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$. В силу теоремы 1 $\hat{P}\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ и мы можем разложить $\hat{P}\vec{\Phi}(s)$ в сходящийся в норме $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ ряд (П.3):

$$\left[\hat{P}\vec{\Phi}(s) \right]_m = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{q=-\ell}^{\ell} Q_{mq}^{\ell} P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{-iq\varphi}, \quad (24)$$

где

$$Q_{mq}^{\ell} = \frac{(2\ell+1)(-1)^q}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[\hat{P}\vec{\Phi}(s) \right]_m P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi} d\mu d\varphi. \quad (24')$$

Для доказательства леммы достаточно вычислить коэффициенты Q_{mq}^{ℓ} .

Имеем:

$$\begin{aligned}
Q_{mq}^\ell &= \frac{(2\ell+1)}{4\pi} (-1)^q \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\mu d\varphi \left[\sum_{n=2}^{-2} \int_{\Omega} \mathcal{P}_{mn}(s',s) \Phi_n(s') ds' \right] P_{mq}^\ell(\mu) e^{iq\varphi} = \\
&= \frac{(2\ell+1)}{4\pi} (-1)^q \sum_{n=2}^{-2} \int_{\Omega} ds' \left[\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_{mn}(s',s) P_{mq}^\ell(\mu) e^{iq\varphi} d\mu d\varphi \right] \Phi_n(s') = \\
&= \frac{(2\ell+1)}{4\pi} (-1)^q \sum_{n=2}^{-2} \int_{\Omega} ds' \left[\frac{4\pi}{2\ell+1} P_{mn}^\ell P_{nq}^\ell(\mu') e^{iq\varphi'} \Phi_n(s') \right] = \\
&= (-1)^q \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^\ell \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\mu' d\varphi' \Phi_n(\mu',\varphi') P_{nq}^\ell(\mu') e^{iq\varphi'}.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством (22). Подставляя теперь полученное выражение для Q_{mq}^ℓ в (24), мы приходим к равенству (19).

Лемма доказана.

Замечание. Если в условиях леммы потребовать, чтобы $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1,1)$, то, как легко показать, сходимость ряда (19) будет равномерной относительно $s \in \Omega$.

Теорема 2.

Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1,1)$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$.. Тогда оператор $\hat{\mathcal{P}}$, как оператор в $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$, обладает следующими свойствами:

1. Спектр $\sigma(\hat{\mathcal{P}})$ оператора $\hat{\mathcal{P}}$ состоит из нуля и собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность. Предельной точкой спектра может быть только нуль.

2. Положим $\ell_0 = \max\{|m|, |n|\}$, $m, n \in \{2, 0, -0, -2\}$ и пусть

$\hat{p}^\ell = \left\{ \frac{P_{mn}^\ell}{2\ell+1} \right\}_2^{-2}$, $\ell = \ell_0, \ell_0 + 1, \dots$, матрицы порядка 4×4 из коэффициентов

$$P_{mn}^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 \Gamma_{mn}(\mu) P_{mn}^\ell(\mu) d\mu.$$

Всякое отличное от нуля собственное значение оператора $\hat{\mathcal{P}}$ есть общее собственное значение одной или конечного числа матриц \hat{p}^ℓ , $\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_I$, $I \geq 1$.

Если $\nu(\lambda)$ кратность λ , как собственного значения оператора $\hat{\mathcal{P}}$, то

$$\nu(\lambda) = \sum_{i=1}^I (2\ell_i + 1) \nu_i(\lambda),$$

$\nu_i(\lambda)$ кратность λ , как собственного значения матрицы \hat{p}^{ℓ_i} .

3. Множества собственных $\{\vec{\alpha}\}$ и присоединенных $\{\vec{\beta}\}$ (если они есть) векторов совокупности матриц \hat{p}^ℓ , $\ell = \ell_1, \dots, \ell_I$, отвечающих λ , порождают $\nu(\lambda)$ собственных и присоединенных линейно независимых векторов оператора \hat{P} вида:

$$\Phi_m(s) = \alpha_m P_{mq}^\ell(\mu) e^{-iq\varphi}, \quad (25)$$

$$\Psi_m(s) = \beta_m P_{mq}^\ell(\mu) e^{-iq\varphi},$$

$$m \in \{2, 0, -0, -2\}, \ell = \ell_1, \dots, \ell_I \quad (26)$$

$$q = -\ell, \dots, \ell,$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ пробегает множества $\{\vec{\alpha}\}$ и $\{\vec{\beta}\}$, соответственно. Других собственных векторов нет и ни в каком $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$.

4. Перечисленными свойствами обладает и число $\lambda = 0$, если оно является собственным значением оператора \hat{P} , с той лишь разницей, что его кратность может быть бесконечной.

Доказательство.

Утверждение первого пункта теоремы есть следствие полной непрерывности оператора \hat{P} в $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$ (теорема 1).

1. Рассмотрим сначала оператор \hat{P} в пространстве $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$. \hat{P} вполне непрерывен в $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ (теорема 1).

Зафиксируем некоторое $\ell \in \{\ell_0, \ell_0 + 1, \dots\}$ и рассмотрим матрицу \hat{p}^ℓ . Пусть λ (в том числе и $\lambda = 0$) ее собственное значение, а $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}^j$, $j = 1, 2, \dots, J$, $J \leq 3$ ее собственный и порожденные им J присоединенных (если они есть) векторов, отвечающие λ :

$$\frac{1}{2\ell + 1} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^\ell \alpha_n = \lambda \alpha_m \quad (27)$$

$$\frac{1}{2\ell + 1} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^\ell \beta_n^j = \lambda \beta_n^j + \beta_n^{j-1}, \beta_m^0 = \alpha_m, m \in \{2, 0, -0, -2\}, j = 1, 2, \dots, J. \quad (28)$$

Тогда λ является собственным значением оператора \hat{P} , а

$$\Phi_m(s) = \alpha_m P_{mq}^\ell(\mu) e^{-iq\varphi}, \quad (29)$$

$$\Psi_m^j = \beta_m^j P_{mq}^\ell(\mu) e^{-iq\varphi}, m \in \{2, 0, -0, -2\}, q = -\ell, \dots, \ell, j = 1, 2, \dots, J \quad (30)$$

отвечающие λ $(2\ell + 1)$ линейно независимых собственных и $J(2\ell + 1)$ присоединенных векторов:

$$\hat{P}\vec{\Phi}(s) = \lambda\vec{\Phi}(s), \quad (31)$$

$$\hat{P}\vec{\Psi}^j(s) = \lambda\vec{\Psi}^j(s) + \vec{\Psi}^{j-1}, \quad \vec{\Psi}^0(s) \equiv \vec{\Psi}(s). \quad (32)$$

Линейная независимость векторов (29) и (30) следует из ортогональности функций $P_{mq}^\ell(\mu)$ (лемма приложения) и $e^{-iq\varphi}$.

Чтобы убедиться в этом, нужно (29) и (30) подставить в уравнения (31) и (32), соответственно. Воспользовавшись затем соотношением (19) леммы 1, а также ортогональностью функций $P_{mq}^\ell(\mu)$ и $e^{-iq\varphi}$, приходим к уравнениям (27) и (28).

Наоборот, предположим теперь, что λ отличное от нуля собственное значение оператора \hat{P} , а $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ соответствующий ему собственный вектор. Представим его рядом (ПЗ):

$$\Phi_m(s) = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{q=-\ell}^{\ell} \Phi_{mq}^\ell P_{mq}^\ell(\mu) e^{-iq\varphi}, \quad (33)$$

где

$$\Phi_{mq}^\ell = \frac{(2\ell + 1)}{4\pi} (-1)^q \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \Phi_m(s) P_{mq}^\ell(\mu) e^{iq\varphi} d\mu d\varphi.$$

Подставляя (33) в (31) и воспользовавшись равенством (19), приходим к равенству

$$\sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{q=-\ell}^{\ell} \left[\frac{1}{2\ell + 1} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^\ell \Phi_{nq}^\ell - \lambda \Phi_{mq}^\ell \right] \times P_{mq}^\ell(\mu) e^{-iq\varphi} = 0, \quad \text{откуда,}$$

вследствие ортогональности функций $P_{mq}^\ell(\mu)$ и $e^{-iq\varphi}$, имеем:

$$\frac{1}{2\ell + 1} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^\ell \Phi_{nq}^\ell = \lambda \Phi_{mq}^\ell, \quad (34)$$

$$m \in \{2, 0, -0, -2\}, \quad \ell = \ell_0, \ell_0 + 1, \dots, \quad q = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell.$$

Из (34), в частности, видно, что λ должно быть собственным значением хотя бы одной из матриц \hat{p}^ℓ , ибо в противном случае все $\Phi_{mq}^\ell = 0$ и $\vec{\Phi}(s) \equiv 0$.

Далее, поскольку кратность λ , как собственного значения оператора \hat{P} , конечна, то λ может быть собственным значением матриц \hat{p}^ℓ лишь для некоторого конечного набора чисел $\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_I$.

Таким образом, в соответствии с (34), Φ_{mq}^ℓ отличны от нуля лишь для $\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_I$ и, следовательно, собственный вектор (33) должен иметь вид

$$\Phi_m(s) = \sum_{i=1}^I \sum_{q=-\ell_i}^{\ell_i} \Phi_{mq}^{\ell_i} P_{mq}^{\ell_i}(\mu) e^{-iq\varphi},$$

где в качестве коэффициентов $\{\Phi_{mq}^{\ell_i}\}$, $m \in \{2, 0, -0, -2\}$, взята какая-либо последовательность собственных векторов матриц \hat{p}^ℓ , $\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_I$, отвечающих λ . Но каждое слагаемое этой суммы есть собственный вектор оператора \hat{P} , соответствующий λ .

Поэтому мы доказали, что собственный вектор оператора \hat{P} , соответствующий собственному значению λ , является линейной комбинацией системы линейно независимых собственных векторов вида (29), где $\vec{\alpha} = \{\alpha_m\}$ - собственные векторы некоторого конечного набора матриц \hat{p}^ℓ , $\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_I$, отвечающие числу λ . Эту систему векторов мы и выбираем в качестве базиса в собственном подпространстве оператора \hat{P} , порожденном собственным значением λ .

Рассмотрим тот случай, когда оператор \hat{P} имеет присоединенные элементы, порожденные некоторым собственным вектором $\vec{\Phi}(s)$ оператора \hat{P} , отвечающим собственному значению λ . Этот вектор $\vec{\Phi}(s)$, как мы выяснили, имеет вид $\Phi_m(s) = \alpha_m P_{mq_0}^{\ell_0} e^{-iq_0\varphi}$, $m \in \{2, 0, -0, -2\}$, $q_0 \in \{-\ell_0, \dots, \ell_0\}$, где $\vec{\alpha} = \{\alpha_m\}$ собственный вектор некоторой матрицы \hat{p}^{ℓ_0} , $\ell_0 \in \ell_1, \dots, \ell_I$, отвечающий ее собственному значению λ .

Пусть $\vec{\Psi}^j(s)$, $j = 1, 2, \dots, J$, система таких присоединенных векторов. Разложим каждый из них в ряд (П.3) и подставим это разложение в (32). Используя далее равенство (19) леммы 1, приходим к выводу, что

$$\Psi_m^j(s) = \beta_m^j P_{mq_0}^{\ell_0}(\mu) e^{-iq_0\varphi} + \vec{\Phi}_m(s), \quad (35)$$

где $\vec{\Phi}_m(s)$ некоторый собственный вектор оператора \hat{P} , отвечающий собственному значению λ , линейно зависимый с первым слагаемым в (35). Здесь $\vec{\beta}^j$ система присоединенных векторов матрицы \hat{p}^{ℓ_0} , соответствующих ее собственному вектору $\vec{\alpha}$.

Отбрасывая в (35) собственный вектор $\vec{\Phi}(s)$, приходим к желаемому результату.

Подсчитаем теперь кратность $\nu(\lambda)$ каждого не нулевого собственного значения λ оператора \hat{P} . Пусть $\{\ell_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I(\lambda)$, система таких чисел, что λ является собственным значением матриц \hat{p}^ℓ , $\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_I(\lambda)$. Тогда

$$\nu(\lambda) = \sum_{i=1}^{I(\lambda)} (2\ell_i + 1)\nu_i(\lambda),$$

где $\nu_i(\lambda)$ кратность λ как собственного значения матрицы \hat{p}^{ℓ_i} .

Все сказанное справедливо и для $\lambda = 0$, если оно является собственным значением \hat{P} , с той лишь разницей, что его кратность может быть бесконечной.

2. Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть оператор \hat{P} в пространстве $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$.

Сначала заметим, что в силу последнего пункта теоремы 1 все сказанное справедливо и для оператора \hat{P}^* .

\hat{P} , как оператор $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$, есть продолжение по непрерывности \hat{P} , заданного в $C^{(4)}(\Omega)$. При продолжении спектр оператора может измениться: либо увеличится кратность уже имеющихся собственных значений, либо к спектру добавятся новые точки. Но как мы сейчас покажем, это невозможно.

Действительно, пусть $\lambda \neq 0$ собственное значение оператора \hat{P} , действующего в $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$, а $\nu(\lambda)$ его кратность. Тогда $\bar{\lambda}$ и $\nu(\lambda)$, соответственно, собственное значение и его кратность оператора \hat{P}^* , действующего в сопряженном пространстве $\mathcal{L}_\infty^{(4)}(\Omega) = \mathcal{L}_1^{(4)*}(\Omega) \subset \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$.

Продолжая \hat{P}^* по непрерывности с $C^{(4)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_\infty^{(4)}(\Omega)$ на $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$, приходим к уже рассмотренному случаю. Таким образом, $\bar{\lambda}$ есть собственное значение набора матриц \hat{p}^{ℓ^*} , $\ell = \ell_1, \dots, \ell_I(\lambda)$. Но тогда λ есть собственное значение матриц \hat{p}^ℓ с теми же ℓ и соответствующими кратностями.

Аналогичные рассуждения справедливы и для точки $\lambda = 0$, если она является собственным значением оператора \hat{P} , с той лишь разницей, что ее кратность может быть бесконечной.

Теорема доказана.

Следствие.

Спектр оператора \hat{P} (или \hat{P}^*) не зависит от того пространства, в котором мы его рассматриваем: будь то
--

$C^{(4)}(\Omega)$ или $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. В любом из этих пространств $\|\hat{\mathcal{P}}\| = \|\hat{\mathcal{P}}^*\| \geq \sup |\lambda|$, где \sup берется по всем собственным значениям всех матриц \hat{p}^ℓ .

Утверждения теоремы 2 остаются справедливыми и для оператора $\hat{\mathcal{P}}^*$. Действительно, рассматривая этот оператор сначала в $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$, в силу (19), имеем:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}} \vec{\Phi}(s) \right]_m &= \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} \sum_{n=2}^{-2} \left(\sum_{k=2}^{-2} \frac{P_{mk}^{*\ell} P_{kn}^\ell}{2\ell+1} \right) \sum_{q=-\ell}^{\ell} (-1)^q P_{mq}^\ell(\mu) e^{iq\varphi} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\mu' d\varphi' \Phi_n(\mu', \varphi') P_{nq}^\ell(\mu') e^{iq\varphi'}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что теорема 2 выполняется в этом случае с той лишь разницей, что в качестве матриц \hat{p}^ℓ следует взять матрицы с компонентами

$$\sum_{k=2}^{-2} \frac{P_{mk}^{*\ell} P_{kn}^\ell}{(2\ell+1)^2}, \quad m, n \in \{2, 0, -0, -2\}. \quad \text{Поэтому из самосопряженности}$$

оператора $\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}}$ вытекает равенство

$$\|\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}}\| = \sup_i |\Lambda_i|,$$

где Λ_i – собственные значения оператора $\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}}$, так что независимо от пространства

$$\|\hat{\mathcal{P}}\| = \|\hat{\mathcal{P}}^*\| = \sqrt{\|\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}}\|} = \sup_i \sqrt{|\Lambda_i|}.$$

При доказательстве теорем 1 и 2 мы использовали CP – представление для оператора рассеяния. Везде в дальнейшем нам удобно вернуться к SP – представлению оператора $\hat{\mathcal{P}}$. При этом спектр оператора $\hat{\mathcal{P}}$ остается неизменным, а его собственные и присоединенные векторы преобразуются по правилу

$$\vec{\Phi}^{(CP)}(s) \rightarrow \hat{\Gamma}^{-1} \vec{\Phi}^{(CP)}(s) = \vec{\Phi}^{(SP)}(s)$$

Далее мы будем рассматривать лишь вещественные матрицы клеточно-диагонального вида:

$$\hat{\Gamma}(\mu) = \left\{ \Gamma_{ij}(\mu) \right\}_1^4 = \begin{bmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & C \\ 0 & 0 & -C & a_4 \end{bmatrix} (\mu). \quad (36)$$

Для таких матриц

$$\hat{\Gamma}^*(\mu) = \begin{bmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -C \\ 0 & 0 & C & a_4 \end{bmatrix}(\mu) = \hat{Q}\hat{\Gamma}(\mu)\hat{Q}, \quad (37)$$

где

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}^2 = \hat{E}, \quad (38)$$

т.е. сопряженный оператор \hat{P}^* определяется матрицей (37). Заметим также, что из (6) и (38) следует коммутруемость матриц $\hat{L}(\alpha)$ и \hat{Q} :

$$\hat{L}(\alpha)\hat{Q} = \hat{Q}\hat{L}(\alpha) \quad (39)$$

Поэтому $\hat{P}^* = \hat{Q}\hat{P}\hat{Q}$, что приводит к равенству

$$\hat{P} = \hat{Q}\hat{P}_s = \hat{Q}\sqrt{\hat{P}^*\hat{P}}, \quad (40)$$

которое осуществляет полярное представление оператора \hat{P} [12].

Симметричный оператор $\hat{P}_s = \left(\hat{P}^*\hat{P}\right)^{1/2}$, входящий в равенство (40), определяется матрицей

$$\hat{\Gamma}_s(\mu) = \hat{Q}\hat{\Gamma}(\mu) = \begin{bmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & C \\ 0 & 0 & C & a_4 \end{bmatrix}(\mu). \quad (41)$$

Воспользовавшись результатами теоремы 2 и инвариантностью определителя $\det(\hat{p}^\ell - \lambda\hat{E})$ относительно преобразования $\hat{p}^\ell \rightarrow \hat{\Gamma}^{-1}\hat{p}^\ell\hat{\Gamma}$, найдем собственные значения операторов \hat{P} и \hat{P}_s . Для операторов \hat{P} и \hat{P}^* они совпадают и равны:

при

$$\ell = 0, 1$$

$$\lambda_1^\ell = a_1^\ell, \lambda_2^\ell = a_4^\ell, \lambda_{3,4}^\ell = 0;$$

при $\ell = 2, 3, \dots$

$$\lambda_{1,2}^\ell = \frac{a_1^\ell + a_2^\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_1^\ell - a_2^\ell)^2}{4} + b^{\ell^2}}, \quad (42)$$

$$\lambda_{3,4}^\ell = \frac{a_3^\ell + a_4^\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_3^\ell - a_4^\ell)^2}{4} - C^{\ell^2}}.$$

Собственные значения оператора $\hat{\mathcal{P}}_s$ действительны и определяются из выражений:

при $\ell = 0, 1$

$$\lambda_1^\ell = a_1^\ell, \quad \lambda_2^\ell = a_4^\ell, \quad \lambda_{3,4}^\ell = 0;$$

при $\ell = 2, 3, \dots$

$$\lambda_{1,2}^\ell = \frac{a_1^\ell + a_2^\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_1^\ell - a_2^\ell)^2}{4} + b^{\ell^2}}, \quad (43)$$

$$\lambda_{3,4}^\ell = \frac{a_3^\ell - a_4^\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_3^\ell + a_4^\ell)^2}{4} + C^{\ell^2}}.$$

В соотношениях (42)-(43):

$$a_1^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\mu) P_\ell(\mu) d\mu, \quad a_4^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 a_4(\mu) P_\ell(\mu) d\mu, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$b^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 b(\mu) P_\ell^{(2)}(\mu) d\mu, \quad C^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 C(\mu) P_\ell^{(2)}(\mu) d\mu,$$

$$a_2^\ell = \frac{1}{2} [(a_2^{+\ell} + a_2^{-\ell}) + (a_3^{+\ell} - a_3^{-\ell})], \quad (44)$$

$$a_3^\ell = \frac{1}{2} [(a_2^{+\ell} - a_2^{-\ell}) + (a_3^{+\ell} + a_3^{-\ell})],$$

$$a_k^{\pm\ell} = \int_{-1}^1 a_k(\mu) P_{2,\pm 2}^\ell(\mu) d\mu, \quad k = 3, 4, \quad \ell = 2, 3, \dots,$$

где $P_\ell(\mu) = P_{00}^\ell(\mu)$ - полиномы Лежандра, а $P_\ell^{(2)}(\mu) = P_{20}^\ell(\mu)$ - присоединенные функции Лежандра.

Собственные значения оператора $\hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}}$ равны квадратам собственных значений оператора $\hat{\mathcal{P}}_s$.

Выпишем собственные векторы оператора $\hat{\mathcal{P}}$: при $\ell = 0, 1$

$$\vec{\Phi}_{1q}^\ell(s) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P_\ell^{(q)}(\mu) e^{-iq\varphi}, \quad \vec{\Phi}_{2q}^\ell(s) = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_\ell^{(q)}(\mu) e^{-iq\varphi},$$

$$\vec{\Phi}_{3q}^\ell(s) = C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P_\ell^{(q)}(\mu) e^{iq\varphi}, \quad \vec{\Phi}_{4q}^\ell(s) = C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} P_\ell^{(q)}(\mu) e^{-iq\varphi};$$

при $\ell = 2, 3, \dots$

$$\vec{\Phi}_{kq}^\ell(s) = \begin{pmatrix} (\alpha_0^\ell + \alpha_{-0}^\ell) P_\ell^{(q)}(\mu) \\ \alpha_2^\ell P_{2q}^\ell(\mu) + \alpha_{-0}^\ell P_{-2q}^\ell(\mu) \\ i[\alpha_2^\ell P_{2q}^\ell(\mu) - \alpha_{-2}^\ell P_{-2q}^\ell(\mu)] \\ -(\alpha_0^\ell + \alpha_{-0}^\ell) P_\ell^{(q)}(\mu) \end{pmatrix} e^{-iq\varphi}, \quad \begin{matrix} q = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell \\ k = 1, 2, \dots, K \leq 4. \end{matrix} \quad (45)$$

Здесь C_k , $k = 1, 2, 3, 4$ - произвольные постоянные, а α_m^ℓ , $m \in \{2, 0, -0, -2\}$, - собственные векторы матриц \hat{p}^ℓ , отвечающие собственным значениям λ_j^ℓ (43).

Заметим, что в классе матриц (36) всякому собственному значению может соответствовать не более чем один присоединенный вектор. Таким образом, оператор \hat{P} при каждом ℓ либо не имеет присоединенных векторов, либо имеет их в количестве $(2\ell + 1)$ штук.

Аналогичные выражения можно выписать и для собственных векторов операторов \hat{P}_s и $\hat{P}^* \hat{P}$, причем для оператора $\hat{P}^* \hat{P}$ в качестве матриц \hat{p}^ℓ

должны быть взяты матрицы $\left\{ \sum_{k=2}^{-2} \frac{P_{mk}^{*\ell} P_{kn}^\ell}{(2\ell + 1)^2} \right\}$. Собственные векторы,

соответствующие $\ell = 0, 1$, у операторов \hat{P} , \hat{P}^* , \hat{P}_s и $\hat{P}^* \hat{P}$ одинаковые.

III. Функции $\vec{\Phi}(s)$, описывающие допустимые состояния поляризации, как это следует из физического анализа, должны удовлетворять определенным условиям. В SP - представлении эти условия имеют вид [7]:

- $\Phi_i(s)$ - вещественные функции s ($i = 1, 2, 3, 4$);
- $\Phi_1(s) \geq 0$, $\Phi_1^2(s) \geq \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)$.

Лемма 2.

Множество $K_p(\Omega)$ функций из $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$,

удовлетворяющих условиям (46) почти всюду на Ω , обладает свойствами:

- 1) $K_p(\Omega)$ замкнуто в $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$;
- 2) если $\vec{\Phi}(s), \vec{\Psi}(s) \in K_p(\Omega)$, то $\alpha \vec{\Phi}(s) + \beta \vec{\Psi}(s) \in K_p(\Omega)$ при всех $\alpha, \beta \geq 0$;
- 3) если $\vec{\Phi}(s) \in K_p(\Omega)$, то $-\vec{\Phi}(s) \notin K_p(\Omega)$;
- 4) каждый элемент $\vec{\Phi}(s) \in N(\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega))$ может быть представлен в виде разности

$$\vec{\Phi}(s) = \vec{\Psi}_1(s) - \vec{\Psi}_2(s) \text{ где } \vec{\Psi}_1(s), \vec{\Psi}_2(s) \in K_p(\Omega)$$

и, следовательно, $K_p(\Omega)$ является воспроизводящим конусом [13] в вещественном ядре $N(\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega))$.

Первые два утверждения леммы очевидны. Третье вытекает из неравенств

$$\begin{aligned} |\Phi_2(s)\Psi_2(s) + \Phi_3(s)\Psi_3(s) + \Phi_4(s)\Psi_4(s)| &\leq \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)} * \\ * \sqrt{\Psi_2^2(s) + \Psi_3^2(s) + \Psi_4^2(s)} &\leq \Phi_1(s)\Psi_1(s), \quad \vec{\Phi}(s), \vec{\Psi}(s) \in K_p(\Omega), \end{aligned} \quad (47)$$

а для доказательства последнего достаточно положить

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_1(s) &= \begin{cases} \vec{\Phi}(s), & \text{если } \Phi_1^2(s) \geq \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s), \\ \{\sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}, \Phi_2(s), \Phi_3(s), \Phi_4(s)\}, & \\ \text{если } \Phi_1^2(s) < \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s), & \end{cases} \\ \vec{\Psi}_2(s) &= \begin{cases} \{0, 0, 0, 0\} & \text{если } \Phi_1^2(s) \geq \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s), \\ \{\sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)} - \Phi_1(s), 0, 0, 0\}, & \\ \text{если } \Phi_1^2(s) < \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s). & \end{cases} \end{aligned}$$

Следствие 1.

Множество функций $K_+(\Omega) = K_p(\Omega) \cap C^{(4)}(\Omega)$ образует телесный конус [13] в вещественном ядре $N(C^{(4)}(\Omega))$ пространства непрерывных на Ω функций $C^{(4)}(\Omega)$. Внутренние элементы его удовлетворяют неравенству

$$\Phi_1(s) > \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}, \quad s \in \Omega,$$

а граничные – равенству $\Phi_1(s) = \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}$ хотя бы в одной точке $s \in \Omega$.

Следствие 2.

Сопряженный конус $K_p^*(\Omega) = K_q(\Omega)$ образует в пространстве $\mathcal{L}_q^{(4)}(\Omega)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, линейные функционалы

$\Psi(\vec{\Phi}) = \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega} \Psi_i(s) \Phi_i(s) ds$, где $\vec{\Psi}(s) \in N(\mathcal{L}_q^{(4)}(\Omega))$, и почти всюду на Ω

$$\Psi_1(s) \geq \sqrt{\Psi_2^2(s) + \Psi_3^2(s) + \Psi_4^2(s)}.$$

Действительно, для таких и только таких функций $\vec{\Psi}(s)$, в силу неравенств (47),

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{\Phi}) &\geq \int_{\Omega} [\Phi_1(s)\Psi_1(s) - |\Phi_2(s)\Psi_2(s) + \Phi_3(s)\Psi_3(s) + \Phi_4(s)\Psi_4(s)|] ds \geq \\ &\leq \int_{\Omega} [\Phi_1(s)\Psi_1(s) - \sqrt{(\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s))(\Psi_2^2(s) + \Psi_3^2(s) + \Psi_4^2(s))}] ds \geq 0 \end{aligned}$$

для любого $\vec{\Phi}(s) \in K_p(\Omega)$.

При $p = \infty$ мы будем рассматривать в качестве сопряженного конуса $K_{\infty}^*(\Omega) \cap \mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$.

Относительно конусов $K_p(\Omega)$ и $K_+(\Omega)$, как обычно определим классы положительных, U_0 - положительных и сильно положительных операторов [13].

4-х мерную вещественную матрицу \hat{A} назовем положительной, если оператор умножения на эту матрицу положителен, т.е. если всякий числовой вектор с компонентами, удовлетворяющими условиям (46), умножением на \hat{A} переводится в вектор, компоненты которого удовлетворяют этим же условиям.

Теорема 3.

Пусть вещественная клеточно-диагональная матрица $\hat{\Gamma}(\mu)$ положительна почти при всех $\mu \in (-1, 1)$ и $\hat{\Gamma}_{ij}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1, 1)$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Тогда:

1) операторы \hat{P}, \hat{P}^* и \hat{P}_s положительны относительно конуса $K_p(\Omega)$ и сильно положительны относительно $K_+(\Omega)$;

2) вектор $\vec{\Phi}^0(s) = \frac{1}{4\pi} \{1, 0, 0, 0\}$ - общий собственный вектор

указанных операторов – лежит внутри $K_+(\Omega)$, $\vec{\Phi}^0(s) \in \text{int } K_+(\Omega)$; других собственных векторов в $K_+(\Omega)$ эти операторы не имеют;

3) вектору $\vec{\Phi}^0(s)$ отвечает простое собственное значение $\lambda_1 = a > 0$, где

$$a = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\mu) d\mu = \|\hat{\hat{P}}\| = \|\hat{\hat{P}}^*\| = \|\hat{\hat{P}}_s\|,$$

модули всех остальных значений строго меньше a ;

4) если $\Gamma_{ij}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1,1)$, $i, j \in \{1,2,3,4\}$, то операторы $\hat{\hat{P}}, \hat{\hat{P}}^*$ и $\hat{\hat{P}}_s \vec{\Phi}^0$ - положительны в $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$ относительно конуса $K_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q \in [1, \infty]$.

Доказательство.

Пусть в условиях теоремы $\vec{\Phi}(s) \in K_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Тогда из теоремы 1 и вещественности матрицы $\hat{\hat{P}}(s', s)$ (напомним, что, как указывалось выше, мы рассматриваем матрицу рассеяния в SP - представлении) следует, что $\hat{\hat{P}}\vec{\Phi}(s) \in N(\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega))$.

Так как матрица $\hat{L}^{SP}(\alpha)$ (6) положительна при любом α , то матрица $\hat{\hat{P}}(s', s) = \hat{L}(-\chi_1)\Gamma(s', s)\hat{L}(-\chi_2)$ положительна почти при всех $s', s \in \Omega$. Поэтому почти при всех $s', s \in \Omega$:

$$[\hat{\hat{P}}(s', s)\vec{\Phi}(s')]_1 \geq 0,$$

и почти при всех $s, s', s'' \in \Omega$:

$$\begin{aligned} & [\hat{\hat{P}}(s', s)\vec{\Phi}(s')]_1 [\hat{\hat{P}}(s'', s)\vec{\Phi}(s'')]_1 - \\ & - \sum_{j=2}^4 [\hat{\hat{P}}(s', s)\vec{\Phi}(s')]_j [\hat{\hat{P}}(s'', s)\vec{\Phi}(s'')]_j \geq 0 \end{aligned}$$

Следовательно, почти при всех $s \in \Omega$:

$$[\hat{\hat{P}}\vec{\Phi}(s)]_1 = \int_{\Omega} [\hat{\hat{P}}(s', s)\vec{\Phi}(s')]_1 ds' \geq 0,$$

$$\begin{aligned} & [\hat{\hat{P}}\vec{\Phi}(s)]_1^2 - \sum_{j=2}^4 [\hat{\hat{P}}\vec{\Phi}(s)]_j^2 = \int_{\Omega \times \Omega} ds' ds'' \{ [\hat{\hat{P}}(s', s)\vec{\Phi}(s')]_1 [\hat{\hat{P}}(s'', s)\vec{\Phi}(s'')]_1 - \\ & - \sum_{j=2}^4 [\hat{\hat{P}}(s', s)\vec{\Phi}(s')]_j [\hat{\hat{P}}(s'', s)\vec{\Phi}(s'')]_j \} \geq 0, \end{aligned}$$

что и доказывает положительность оператора $\hat{\hat{P}}$ относительно конуса $K_p(\Omega)$.

Если $\vec{\Phi}(s) \in K_+(\Omega)$, то $\hat{P}\vec{\Phi}(s) \in N(C^{(4)}(\Omega))$ (теорема 1) и положительность \hat{P} относительно $K_+(\Omega)$ устанавливается аналогичным образом. Положительными будут и операторы $\hat{P}^* = \hat{Q}\hat{P}\hat{Q}$, $\hat{P}_s = \hat{Q}\hat{P}$ и $\hat{P}^*\hat{P}$, где \hat{Q} - положительная матрица (38).

Положительность указанных операторов относительно конуса $K_+(\Omega)$ позволяет утверждать [14], что среди максимальных по модулю собственных значений каждого из них существует положительное, которому соответствует собственный вектор из $K_+(\Omega)$. Таким вектором является лишь вектор (см. (45))

$$\vec{\Phi}^0(s) \equiv \vec{\Phi}_{10}^0(s) = \frac{1}{4\pi} \{1, 0, 0, 0\},$$

соответствующий собственному значению $a = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\mu) d\mu$.

Действительно, как это следует из выражений (45), первые компоненты остальных векторов, кроме $\vec{\Phi}_{20}^0(s)$, $\vec{\Phi}_{30}^0(s)$ и $\vec{\Phi}_{40}^0(s)$, содержат множителем функции $P_\ell^{(q)}(\mu)e^{-iq\varphi}$ - комплексные или знакопеременные, а компоненты векторов $\vec{\Phi}_{20}^0(s)$, $\vec{\Phi}_{30}^0(s)$ и $\vec{\Phi}_{40}^0(s)$ не удовлетворяют неравенствам (46б), определяющим конус.

Покажем, что модули всех остальных собственных значений операторов \hat{P} , \hat{P}^* и \hat{P}_s строго меньше a . Для этого рассмотрим операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$. Перенумеруем собственные значения $\lambda_j(\hat{P})$, и $\lambda_j(\hat{P}_s)$, $j=1, 2, \dots$, операторов \hat{P} и \hat{P}_s в порядке убывания их модулей, а при одинаковых модулях в порядке убывания действительной части, считая каждое собственное значение столько раз какова его кратность. Так как $\lambda_1(\hat{P}) = \lambda_1(\hat{P}^*) = \lambda_1(\hat{P}_s) = a$ и $\lambda_j(\hat{P}_s)$ являются s числами оператора \hat{P} , то [12]

$$\left| \lambda_2(\hat{P})a \right| \leq \left| \lambda_2(\hat{P}_s)a \right|,$$

откуда

$$\left| \lambda_j(\hat{P}) \right| \leq \left| \lambda_2(\hat{P}_s) \right|, \quad j = 2, 3, \dots$$

Но $\left| \lambda_2(\hat{P}_s) \right| < a$. Действительно $\lambda_2(\hat{P}_s)$ вещественное число и из предположения $\lambda_2^2 = a^2$ следует, что собственному значению a^2 оператора $\hat{P}^* \hat{P}$ наряду с вектором $\vec{\Phi}^0(s) \equiv \vec{\Phi}_{10}^0(s)$ отвечает некоторый вектор $\vec{\Psi}(s)$, линейно независимый с $\vec{\Phi}^0(s)$ и определяемый одним из выражений (45). Этот собственный вектор можно считать действительным в силу вещественности λ_2^2 . Так как $\vec{\Phi}^0(s) \in \text{int } K_+(\Omega)$, то может быть построен вектор $\vec{\Phi}^0(s) + C\vec{\Psi}(s)$, являющийся собственным вектором оператора $\hat{P}^* \hat{P}$ и лежащий в конусе $K_+(\Omega)$. Но это противоречит тому, что $\vec{\Phi}^0(s)$ - единственный собственный вектор $\hat{P}^* \hat{P}$, лежащий в $K_+(\Omega)$.

Рассмотрим теперь $\hat{P}(\hat{P}^*, \hat{P}_s)$ как оператор в пространстве $C^{(4)}(\Omega)$. Для того, чтобы убедиться в сильной положительности $\hat{P}(\hat{P}^*, \hat{P}_s)$ относительно $K_+(\Omega)$, построим как и в [14] оператор

$$\hat{P}_1 \vec{\Phi}(s) = \hat{P} \vec{\Phi}(s) - a \Phi_0(\vec{\Phi}) \vec{\Phi}^0(s),$$

где функционал $\Phi_0(\vec{\Phi})$ определяется соотношением

$$\Phi_0(\vec{\Phi}) = \int_{\Omega} [\vec{\Phi}(s)]_1 ds.$$

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с последней частью доказательства теоремы (6.3) работы [14] и здесь опускаются.

Так как \hat{P}_s самосопряженный оператор, то $\left\| \hat{P}_s \right\| = a$.

Отсюда, с одной стороны,

$$\left\| \hat{P} \right\| = \left\| \hat{Q} \hat{P}_s \right\| \leq \left\| \hat{Q} \right\| \left\| \hat{P}_s \right\| = \left\| \hat{P}_s \right\| = a.$$

Но a - собственное значение оператора \hat{P} , т.е. $\left\| \hat{P} \right\| \geq a$. Следовательно, $\left\| \hat{P} \right\| = a$.

Пусть теперь $\Gamma_{ij}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1,1)$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $q \in [1, \infty]$ и $\vec{\Phi}(s) \in K_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда, на основании теоремы 1 и положительности оператора \hat{P} , $\hat{P} \vec{\Phi}(s) \in K_+(\Omega)$. В силу сильной положительности \hat{P} можно указать такое n , что

$$\hat{P}^{n+1} \vec{\Phi}(s) = \hat{P}^n [\hat{P} \vec{\Phi}(s)] \in \text{int } K_+(\Omega)$$

и поэтому найдется такое число $\alpha > 0$, что

$$\hat{\mathcal{P}}^{n+1}\vec{\Phi}(s) - \alpha\vec{\Phi}^0(s) \in K_+(\Omega) \subset K_p(\Omega)$$

или иначе

$$\hat{\mathcal{P}}^{n+1}\vec{\Phi}(s) \geq \alpha\vec{\Phi}^0(s) \quad (48)$$

относительно конуса $K_p(\Omega)$.

С другой стороны, $\vec{\Phi}^0(s) \in \text{int } K_+(\Omega)$ и, следовательно, при некотором $\beta > 0$

$$\vec{\Phi}^0(s) - \frac{1}{\beta}\hat{\mathcal{P}}^{n+1}\vec{\Phi}(s) \in K_+(\Omega) \subset K_p(\Omega)$$

или

$$\hat{\mathcal{P}}^{n+1}\vec{\Phi}(s) \leq \beta\vec{\Phi}^0(s) \quad (49)$$

относительно конуса $K_p(\Omega)$.

Неравенства (48) и (49) означают $\vec{\Phi}^0$ - положительность оператора $\hat{\mathcal{P}}$ относительно конуса $K_p(\Omega)$. Теорема доказана.

IV. Рассмотрим свойства оператора $\hat{\mathcal{P}}$, действующего в пространствах $\mathcal{L}_p^{(4)}(-1,1)$ и $C^{(4)}[-1,1]$ функций, не зависящих от азимутальной переменной φ . В этих пространствах оператор $\hat{\mathcal{P}}$ упрощается:

$$\hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(\mu) \equiv \hat{\mathcal{P}}_0\vec{\Phi}(\mu) = \int_{-1}^1 \hat{\mathcal{P}}_0(\mu', \mu)\vec{\Phi}(\mu')d\mu', \quad (50)$$

где

$$\hat{\mathcal{P}}_0(\mu', \mu) = \int_0^{2\pi} \hat{\mathcal{P}}(s', s)d\varphi'. \quad (51)$$

Чтобы доказать это, достаточно сослаться на теорему 1 и проверить, что функция $\hat{\mathcal{P}}\vec{\Phi}(s)$ действительно не зависит от азимута φ .

Из равенства (19) следует справедливость этого утверждения для пространств $C^{(4)}[-1,1]$ и $\mathcal{L}_p^{(4)}(-1,1)$ с $p \geq 2$. Продолжив затем оператор $\hat{\mathcal{P}}_0$ по непрерывности с $C^{(4)}[-1,1]$ на любое $\mathcal{L}_p^{(4)}(-1,1)$, $p \in [1,2)$ (это продолжение единственно), получим требуемый результат.

Важным свойством оператора $\hat{\mathcal{P}}_0$ является клеточно-диагональная структура матрицы $\hat{\mathcal{P}}_0(\mu', \mu)$ в SP - представлении [5]:

$$\hat{P}_0(\mu', \mu) = \begin{bmatrix} a_1(\mu', \mu) & b(\mu', \mu) & 0 & 0 \\ b(\mu, \mu') & a_2(\mu', \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\mu', \mu) & C(\mu', \mu) \\ 0 & 0 & -C(\mu, \mu') & a_4(\mu', \mu) \end{bmatrix} \quad (52)$$

Действительно, полагая в (19) $\vec{\Phi}(s) \equiv \vec{\Phi}(\mu)$, выполнив интегрирование и переходя к SP - представлению с помощью матрицы \hat{T} (3), приходим к равенству (52), где

$$\begin{aligned} a_1(\mu', \mu) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_1^\ell P_\ell(\mu') P_\ell(\mu), \\ b(\mu', \mu) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} b^\ell P_\ell(\mu') P_\ell^{(2)}(\mu), \quad C(\mu', \mu) = \sum_{\ell=2}^{\infty} C^\ell P_\ell^{(2)}(\mu') P_\ell(\mu), \\ a_2(\mu', \mu) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} a_2^\ell P_\ell^{(2)}(\mu') P_\ell^{(2)}(\mu), \\ a_3(\mu', \mu) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} a_3^\ell P_\ell^{(2)}(\mu') P_\ell^{(2)}(\mu), \\ a_4(\mu', \mu) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_4^\ell P_\ell(\mu') P_\ell(\mu), \end{aligned} \quad (53)$$

а коэффициенты a_k^ℓ , b^ℓ и C^ℓ определены в (44).

Обозначим через $\mathcal{L}_p^I(-1,1)$ и $\mathcal{L}_p^{II}(-1,1)$ подпространства функций определяемые условиями:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^I(-1,1) &= \{\vec{\Phi}(\mu) \in \mathcal{L}_p^{(4)}(-1,1), \Phi_3(\mu) = \Phi_4(\mu) = 0\}, \\ \mathcal{L}_p^{II}(-1,1) &= \{\vec{\Phi}(\mu) \in \mathcal{L}_p^{(4)}(-1,1), \Phi_1(\mu) = \Phi_2(\mu) = 0\} \end{aligned}$$

и соответствующим образом определим пространства $C^I[-1,1]$ и $C^{II}[-1,1]$. Очевидно, множества функций $K_p^I = K_p(\Omega) \cap \mathcal{L}_p^I(-1,1)$ и $K_+^I = K_+(\Omega) \cap C^I[-1,1]$ образуют конуса в пространствах $\mathcal{L}_p^I(-1,1)$ и $C^I[-1,1]$, а $\mathcal{L}_p^{II}(-1,1) \cap K_p(\Omega) = \emptyset$, $C^{II}[-1,1] \cap K_+(\Omega) = \emptyset$. Конус $K_+^I[-1,1]$ телесен в $N(C^I[-1,1])$.

Вследствие (52), пространства $\mathcal{L}_p^I(-1,1)$, $\mathcal{L}_p^{II}(-1,1)$, $C^I[-1,1]$ и $C^{II}[-1,1]$ инвариантны относительно оператора \hat{P} . Обозначим через \hat{P}^I сужение оператора \hat{P} на подпространство $\mathcal{L}_p^I(-1,1)$ или $C^I[-1,1]$. \hat{P}^I - самосопряженный оператор и поэтому его спектр вещественен.

Аналогичным образом могут быть введены сужения операторов $\hat{P}^* = \hat{Q}\hat{P}\hat{Q}$ и $\hat{P}_s = \hat{Q}\hat{P}$ на $\mathcal{L}_p^I(-1,1)$, $\mathcal{L}_p^{II}(-1,1)$, $C^I[-1,1]$ и $C^{II}[-1,1]$. Если $\vec{\Phi}(\mu) \in C^I[-1,1]$, то $\hat{Q}\vec{\Phi}(\mu) = \vec{\Phi}(\mu)$. Потому $\hat{P}^{*I} = \hat{P}_s^I = \hat{P}^I$.

В пространстве $C^I[-1,1]$ теорема 3 может быть усилена.

Теорема 4.

Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда операторы \hat{P} , \hat{P}^* и \hat{P}_s сильно положительны в $C^I[-1,1]$ относительно конуса $K_+^I[-1,1]$.

Действительно, согласно теореме 3 указанные операторы инвариантны и сильно положительны в $C^I[-1,1]$ относительно конуса $K_+(\Omega)$. Отсюда следует сильная положительность их и относительно конуса $K_+^I = K_+(\Omega) \cap C^I[-1,1]$.

V. Полученные в теореме 2 выражения (45) для собственных значений оператора \hat{P}_s дают возможность получить неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты a_k^ℓ , b^ℓ и C^ℓ для положительных матриц $\hat{\Gamma}(\mu)$. Так как a больше модулей остальных собственных значений оператора \hat{P}_s , то должны выполняться неравенства:

$$|a_1^1| < a, \quad |a_4^\ell| < a, \quad \ell = 0, 1,$$

и

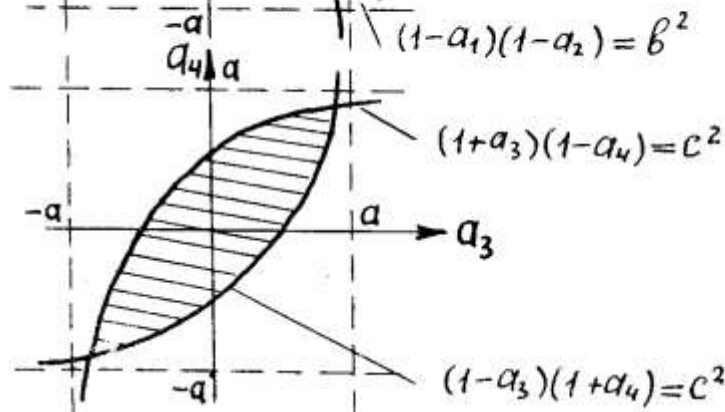
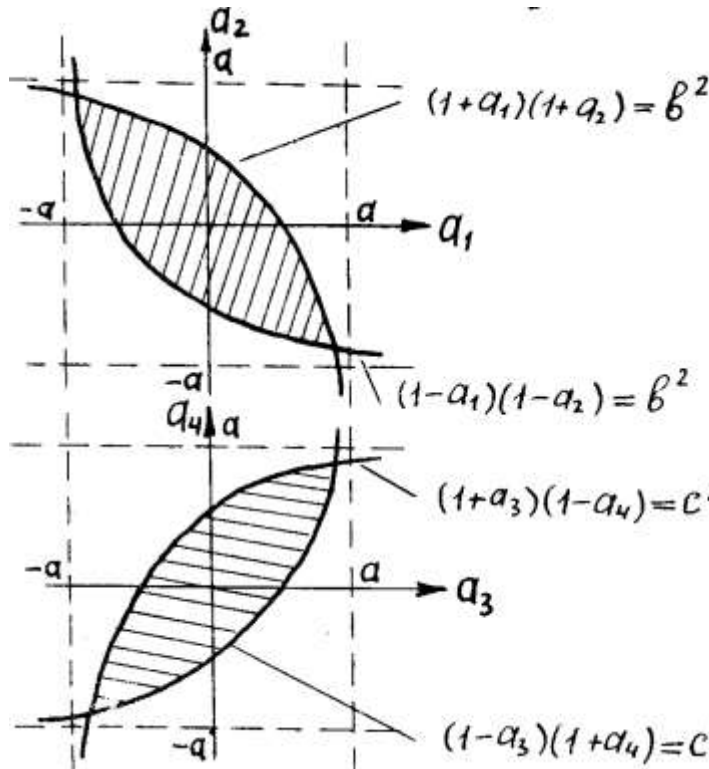
$$\left| \frac{a_1 + a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_1 - a_2)^2}{4} + b^2} \right| < a, \quad (54)$$

$$\left| \frac{a_3 - a_4}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_3 + a_4)^2}{4} + C^2} \right| < a$$

для всех остальных ℓ (индекс ℓ для краткости опущен).

Этим неравенствам можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

Именно, неравенства (54) выполняются тогда и только тогда, когда коэффициенты a_k ($\ell = 2, 3, \dots$) лежат строго внутри заштрихованных областей, ограниченных гиперболами (рис. 1 и 2).



Указанные области не пусты лишь при условии $|b| < a$ и $|c| < a$ при всех ℓ .

VI. Рассмотрим оператор \hat{P} с клеточно диагональной матрицей $\hat{\Gamma}$ в гильбертовом пространстве $L_2^{(4)}(\Omega)$. Пусть $\{\lambda_i(\hat{P}_s)\}$, $i=1, \dots$, упорядоченная система собственных значений, а $\{\vec{\Phi}_i(s)\}$ - соответствующая полная система ортонормированных собственных векторов оператора \hat{P}_s . Тогда, в силу самосопряженности \hat{P}_s , для него справедливо представление Гильберта-Шмидта [12]:

$$\hat{P}_s = \sum_{i=1}^{r(\hat{P}_s)} \lambda_i(\hat{P}_s) (\cdot, \vec{\Phi}_i(s)) \vec{\Phi}_i(s), \quad r(\hat{P}_s) \leq \infty.$$

Умножая это равенство на матрицу \hat{Q} , получим соответствующее представление для оператора \hat{P} :

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{r(\hat{P}_s)} \lambda_i(\hat{P}_s) (\cdot, \vec{\Phi}_i(s)) \hat{Q} \vec{\Phi}_i(s).$$

§2. Характеристическое уравнение.

В этом параграфе мы изучим вопрос о разрешимости характеристического уравнения

$$\hat{U}(k)\vec{\Phi}(k,s) = \vec{\Phi}(k,s), \quad \hat{U}(k) = \frac{1}{1+k\mu} \hat{\mathcal{P}}. \quad (55)$$

I. Обозначим через Z_0 комплексную плоскость с разрезами вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞ .

В дальнейшем будем считать, если это не оговорено особо, что $\Gamma_{ij}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1,1)$, $i, j \in \{1,2,3,4\}$ и $\hat{\Gamma}(\mu)$ клеточно-диагональная матрица вида (36). В этом случае, как это следует из теоремы 1, $\hat{U}(k)$ при $k \in Z_0$ вполне непрерывный оператор в $\mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ и в $C^{(4)}(\Omega)$. Если $k \in (1-, 1)$, то оператор $\hat{U}(k)$, согласно теоремам 3 и 4, положителен относительно конусов $K_p(\Omega)$ и $K_+^I[-1,1]$.

Наряду с оператором $\hat{U}(k)$ будем рассматривать операторы

$$\begin{aligned} \hat{U}_s(k) &= \hat{Q}\hat{U}(k) = \frac{1}{1+k\mu} \hat{\mathcal{P}}_s, \\ \hat{V}(k) &= \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \hat{\mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}, \\ \hat{V}_s(k) &= \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \hat{\mathcal{P}}_s \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} = \hat{Q}\hat{V}(k). \end{aligned}$$

Операторы $\hat{U}_s(k)$, $\hat{V}(k)$ и $\hat{V}_s(k)$ обладают теми же свойствами полной непрерывности и положительности что и $\hat{U}(k)$. Кроме того $\hat{V}_s(k)$ - самосопряженный оператор при $k \in (1-, 1)$.

Уравнение (55) эквивалентно при $k \in Z_0$ уравнению

$$\hat{V}(k)\vec{\Phi}(k,s) = \vec{\Phi}(k,s), \quad (55')$$

т.е. из разрешимости одного из них следует разрешимость другого.

Лемма 3.

При $k \in (Z_0)$ все собственные, а также присоединенные векторы, отвечающие не нулевому собственному значению, оператора $\hat{U}(k)$ лежат в пространстве $C^{(4)}(\Omega)$.

Для доказательства рассмотрим оператор $\hat{U}(k)$ в пространстве $\mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$. Пусть собственному значению $\lambda(k)$ оператора $\hat{U}(k)$ отвечает r собственных векторов $\vec{\Phi}_j(k,s) \in \mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots, r$, и каждому из них

соответствует t_j присоединенных векторов $\vec{\Phi}_j^i(k, s) \in \mathcal{L}_1^{(4)}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, t_j$:

$$\lambda(k)\vec{\Phi}_j^i(k, s) + \vec{\Phi}_j^{i-1}(k, s) = \hat{U}(k)\vec{\Phi}_j^i(k, s), \quad \vec{\Phi}_j^0(k, s) = \vec{\Phi}_j(k, s),$$

$$j = 1, 2, \dots, r, \quad i = 1, 2, \dots, t_j$$

Тогда $\bar{\lambda}(k)$ - собственное значение оператора

$$\hat{U}^*(k) = \hat{P}^* \frac{1}{1 + \bar{k}\mu} = \hat{Q}\hat{P}\hat{Q} \frac{1}{1 + \bar{k}\mu}$$

и ему соответствует система собственных и присоединенных $\vec{\Psi}_j^i(k, s)$, $j = 1, \dots, r$, $i = 0, 1, \dots, t_j$, векторов, лежащих в $\mathcal{L}_\infty^{(4)}(\Omega)$. Но как легко проверить, векторы $\vec{\Phi}_j^i(k, s)$ и $\vec{\Psi}_j^i(k, s)$ связаны соотношением

$$\vec{\Psi}_j^i(k, s) = (1 + \bar{k}\mu)\hat{Q}\vec{\Phi}_j^i(k, s)$$

и, следовательно $\vec{\Phi}_j^i(k, s) \in \mathcal{L}_\infty^{(4)}(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots, r$, $i = 0, 1, \dots, t_j$. Тогда при $\lambda(k) \neq 0$, в силу теоремы 1:

$$\vec{\Phi}_j^i(k, s) = \frac{1}{\lambda(k)(1 + k\mu)} \hat{P}\vec{\Phi}_j^i(k, s) - \frac{1}{\lambda(k)} \vec{\Phi}_j^{i-1}(k, s) \in C^{(4)}(\Omega),$$

$$j = 1, 2, \dots, r, \quad i = 1, 2, \dots, t_j$$

В случае $\lambda(k) = 0$ собственные векторы оператора $\hat{U}(k)$ совпадают с таковыми для оператора \hat{P} .

Аналогичными свойствами обладают собственные и присоединенные векторы операторов $\hat{U}_s(k)$, $\hat{V}(k)$ и $\hat{V}_s(k)$.

Лемма 4.

В условиях теоремы 3 операторы $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$ сильно положительны относительно конуса $K_+^I[-1, 1]$ при $k \in (-1, 1)$.

Если $\Gamma_{ij}(\mu) \in \mathcal{L}_q(-1, 1)$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $q \in [1, \infty]$, то $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$ Φ^0 - положительны относительно $K_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, где

$$\vec{\Phi}^0(s) = \frac{1}{4\pi} \{1, 0, 0, 0\}.$$

Для доказательства достаточно представить операторы $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$ суммой сильно положительного (Φ^0 - положительного) и положительного

$$\hat{U}(k) = \frac{1}{1+|k|} \hat{P} + \frac{|k|-k\mu}{(1+|k|)(1+k\mu)} \hat{P}, \quad k \in (-1,1).$$

Прибавление положительного оператора сохраняет сильную положительность (Φ^0 - положительность). Так, если $\vec{\Phi}(s) \in K_p(\Omega)$, то

$$\hat{U}^n(k) \vec{\Phi}(s) \geq \frac{1}{(1+|k|)^n} \hat{P}^n \vec{\Phi}(s) \geq \frac{\alpha}{(1+|k|)^n} \vec{\Phi}^0(s)$$

относительно конуса $K_p(\Omega)$, .

Таким образом, утверждения леммы следуют из теорем 3 и 4.

Лемма 5.

1. При каждом $k \in (-1,1)$ существует положительное простое собственное значение $M(k)$, общее для операторов $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$ и большее модулей всех остальных собственных значений. Ему соответствует единственный в $K_+^I[-1,1]$ собственный вектор

$$\vec{\Phi}(k, \mu) = \{\Phi_1(k, \mu), \Phi_2(k, \mu), 0, 0\}, \quad \vec{\Phi}(k, \mu) \in \text{int } K_+^I[-1,1],$$

операторов $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$. Других собственных векторов в конусе $K_1(\Omega)$ у этих операторов нет. Нет собственных векторов в $K_1(\Omega)$ и при k - комплексном.

2. Функция $M(k)$, заданная на интервале $(-1,1)$ обладает следующими свойствами:

а) $M(k) = M(-k)$, $M(0) = a$;

б) $M(k) = \left\| \hat{V}(k) \right\| = \left\| \hat{V}_s(k) \right\|$; $M(k)$ аналитична в некоторой

открытой области $G_0 \in Z_0$, содержащей интервал $(-1,1)$;

в) $M'(0) = 0$, $M'(k) > 0$ при $k \in (0,1)$ и $\lim_{k \rightarrow 1-0} M(k) = \infty$;

г) $\vec{\Phi}(k, \mu) = \vec{\Phi}(-k, -\mu)$; $\vec{\Phi}(k, \mu)$ аналитична в G_0 .

Доказательство

1. Мы показали, что собственные векторы операторов $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$, отвечающие ненулевым собственным значениям, лежат в $C^{(4)}(\Omega)$. Это означает, что спектры этих операторов не зависят от пространства, в котором мы их рассматриваем. Поэтому, при доказательстве первого пункта теоремы, ограничимся пространством $N(C^{(4)}(\Omega))$.

Согласно лемме 4 операторы $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$, $k \in (-1,1)$, сильно положительны относительно конуса $K_+^I[-1,1]$.

Следовательно, по теореме 6.3 работы [14] каждый из них имеет единственный в $K_+^I[-1,1]$ собственный вектор, и каждому из этих векторов отвечает простое положительное собственное значение, большее модулей всех остальных. Но сужения операторов $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$ на пространство $N(C^I[-1,1]) \supset K_+^I[-1,1]$ совпадают, так как этим свойством обладают операторы \hat{P} и \hat{P}_s (пункт IV, §1). Отсюда следует, что собственные векторы $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$, лежащие в $K_+^I[-1,1]$, и отвечающие им собственные значения также совпадают. Обозначим их через $\vec{\Phi}(k, \mu)$ и $M(k)$, соответственно:

$$M(k)\vec{\Phi}(k, \mu) = \hat{U}(k)\vec{\Phi}(k, \mu) = \hat{U}_s(k)\vec{\Phi}(k, \mu).$$

Так как все собственные векторы $\hat{U}(k)$ и $\hat{U}_s(k)$ непрерывны (лемма 3) и $K_+^I[-1,1] \subset K_1(\Omega)$, то других собственных векторов в конусе $K_1(\Omega)$ нет т.е. $\vec{\Phi}(k, \mu)$ оказывается единственным вектором также и в $K_1(\Omega)$.

Если k - комплексно, то легко показать, что соответствующие ему собственные векторы также комплексны, а следовательно, не могут лежать в $K_1(\Omega)$.

Заметим, что $M(k)$ является старшим собственным значением и операторов $\hat{V}(k)$ и $\hat{V}_s(k)$.

2. Далее будем рассматривать оператор $\hat{U}(k)$ в пространстве $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$.

Для доказательства четности функции $M(k)$ воспользуемся следующим соотношением [15]:

$$\hat{P}(-\mu, -\mu'; \varphi - \varphi') = \hat{Q}_1 \hat{P}(\mu, \mu'; \varphi - \varphi') \hat{Q}_1, \quad (56)$$

где

$$\hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_1^2 = \hat{E}.$$

Положим $k = -|k| < 0$. Тогда, в силу определения $M(k)$ и $\vec{\Phi}(k, \mu)$:

$$M(-|k|)\vec{\Phi}(-|k|, \mu) = \frac{1}{(1-|k|\mu)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d\varphi' d\mu' \hat{P}(\mu, \mu'; \varphi - \varphi') \vec{\Phi}(-|k|, \mu').$$

Заменяя в этом уравнении μ на $-\mu$ и используя (56), получим:

$$\begin{aligned} M(-|k|)\hat{Q}_1 \vec{\Phi}(-|k|, -\mu) &= \\ &= \frac{1}{(1+|k|\mu)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d\varphi' d\mu' \hat{P}(\mu, \mu'; \varphi - \varphi') \hat{Q}_1 \vec{\Phi}(-|k|, -\mu'). \end{aligned}$$

Таким образом, $M(-|k|)$ оказывается и максимальным по модулю собственным значением оператора $\hat{U}(|k|)$. В силу простоты его заключаем, что $M(|k|) = M(-|k|)$ и $\vec{\Phi}(|k|, \mu) = \hat{Q}_1 \vec{\Phi}(-|k|, -\mu) = \vec{\Phi}(-|k|, -\mu)$ так как $\vec{\Phi}(k, \mu) = \{\Phi_1(k, \mu), \Phi_2(k, \mu), 0, 0\} \in N(C^1[-1, 1])$.

Далее $\hat{U}(0) = \hat{P}$, откуда $M(0) = a$.

Рассмотрим оператор $\hat{V}_s(k) = \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \hat{P}_s \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}$. При $k \in (-1, 1)$

$\hat{V}_s(k)$ - самосопряженный оператор. Очевидно, что $\hat{V}_s^*(k) = \hat{V}_s(\bar{k})$, т.е. операторы $\hat{V}_s(k)$ образуют самосопряженное голоморфное в Z_0 семейство [16]. В этом случае собственные значения и собственные векторы $\hat{V}_s(k)$ голоморфны в окрестности каждой точки интервала $(-1, 1)$, а следовательно, и в некоторой открытой области $G_0 \subset Z_0$, содержащей этот интервал. Но $M(k)$, как легко проверить, является собственным (простым и старшим по модулю) значением оператора $\hat{V}_s(k)$ и ему соответствует собственный вектор $\vec{\Phi}(k, \mu)\sqrt{1+k\mu}$. Отсюда следует аналитичность $M(k)$ и $\vec{\Phi}(k, \mu)$ в G_0 .

В силу самосопряженности оператора $\hat{V}_s(k)$ при $k \in (-1, 1)$

$$M(k) = \left\| \hat{V}_s(k) \right\|.$$

Далее,

$$\left\| \hat{V}_s(k) \right\| = \left\| \hat{Q} \hat{V}_s(k) \right\| \leq \left\| \hat{Q} \right\| \left\| \hat{V}_s(k) \right\| = M(k).$$

Но так как $M(k)$ является собственным значением также и оператора $\hat{V}(k)$, то $\left\| \hat{V}(k) \right\| = M(k)$.

Неравенство $M'(k) > 0$ доказывается аналогично скалярному случаю [8], теорема 9, с использованием равенства

$$\frac{dM(k)}{dk} = -M(k) \frac{(\mu, \Phi_1^2)}{\|\Phi_1\|_{L_2}^2 + k(\mu, \Phi_1^2)},$$

где $\Phi_1(k, \mu)$ - первая компонента вектора $\vec{\Phi}(k, \mu)$.

И, наконец, предельное равенство $\lim_{k \rightarrow 1-0} M(k) = \infty$ следует из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} M^2(k) &= \left\| \hat{V}(k) \right\|^2 = \sup_{\substack{\vec{\Phi} \in L_2^{(4)}, \\ \|\vec{\Phi}\|=1}} (\hat{V}(k)\vec{\Phi}, \hat{V}(k)\vec{\Phi}) \geq (\hat{V}(k)\vec{\Phi}^0, \hat{V}(k)\vec{\Phi}^0) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \hat{P}\vec{\Phi}^0 \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}, \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \hat{P}\vec{\Phi}^0 \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+k\mu} \hat{P}\vec{\Phi}^0, \hat{P}\vec{\Phi}^0 \right) = \\ &= \left(\frac{a^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1+k\mu} \right) \|\vec{\Phi}^0\|^2 = \left(\frac{a^2}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) \|\vec{\Phi}^0\|^2, \quad k \in (0,1), \end{aligned}$$

где $\vec{\Phi}^0(s) = \frac{1}{4\pi} \{1, 0, 0, 0\}$, $\hat{P}\vec{\Phi}^0(s) = a\vec{\Phi}^0(s)$, $\|\vec{\Phi}^0\| = 1$.

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что при $a \leq 1$ существует единственное число $k_0 \in [0,1)$ такое, что $M(\pm k_0) = 1$. Ему соответствуют два решения $\vec{\Phi}(\pm k_0, \mu) = \{\vec{\Phi}_1(\pm k_0, \mu), \vec{\Phi}_2(\pm k_0, \mu), 0, 0\}$, $\vec{\Phi}(-k_0, \mu) = \vec{\Phi}(k_0, -\mu)$ уравнения (55), лежащие строго внутри конуса $K_+^I[-1,1]: \Phi_1(\pm k_0, \mu) > 0$, $|\Phi_2(\pm k_0, \mu)| < \Phi_1(\pm k_0, \mu)$. Других решений в конусе $K_1(\Omega)$ уравнение (55) не имеет.

Если $a < 1$, то $k_0 > 0$ и на интервале $(-k_0, k_0)$ уравнение (55) неразрешимо. При $a = 1$ $k_0 = 0$ и $\vec{\Phi}(\pm k_0, \mu)|_{k_0=0} = \frac{1}{4\pi} \{1, 0, 0, 0\} = \vec{\Phi}^0(s)$.

Покажем, что при $a = 1$ уравнение (55) неразрешимо, если k лежит на мнимой оси и $k \neq 0$. Для этого достаточно показать, что $\|\hat{U}(k)\| < 1$ при $k = ix$ где $x \neq 0$ вещественное число. Воспользуемся следующим выражением для нормы оператора $\hat{U}(k)$:

$$\left\| \hat{U}(ix) \right\|^2 = \left\| \hat{U}(ix) \hat{U}^*(ix) \right\| = \left\| \frac{1}{1+ix\mu} \hat{P} \hat{P}^* \frac{1}{1-ix\mu} \right\|.$$

Рассмотрим самосопряженный вполне непрерывный оператор

$$\hat{W}(x) = \frac{1}{1+ix\mu} \hat{P} \hat{P}^* \frac{1}{1-ix\mu}.$$

Норма $\hat{W}(x)$ равна максимальному из модулей его собственных значений. Его спектр совпадает со спектром оператора

$$\hat{D}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2\mu^2}} \hat{P} \hat{P}^* \frac{1}{\sqrt{1+x^2\mu^2}}, \quad -1 < x < \infty,$$

который является положительным оператором относительно конуса $K_+^I[-1,1]$. Поэтому среди максимальных по модулю собственных значений $\hat{D}(x^2)$ есть положительное, которое мы обозначим через $\lambda_0(x^2)$; ему соответствует, по крайней мере, один собственный вектор $\vec{\Phi}_0(x^2, \mu) \in K_+^I[-1,1]$ ($\hat{Q}_1 \vec{\Phi}_0(x^2, \mu) = \vec{\Phi}_0(x^2, \mu)$).

$D(x^2)$ образуют самосопряженное голоморфное в комплексной x^2 -плоскости с разрезом вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 семейство операторов. Следовательно, $\lambda_0(x^2)$ и $\vec{\Phi}_0(x^2, \mu)$ голоморфны в некоторой открытой области, лежащей в комплексной плоскости с разрезом вдоль $(-\infty, -1)$ и содержащей интервал $(-1, \infty)$.

Покажем, что функция $\lambda_0(x^2)$ строго убывает с ростом x^2 . Для этого воспользуемся уравнением

$$\lambda_0(x^2) \vec{\Psi}_0(x^2, \mu) (1+x^2\mu^2) = \hat{P} \hat{P}^* \vec{\Psi}_0(x^2, \mu), \quad (57)$$

которому удовлетворяют $\lambda_0(x^2)$ и $\vec{\Psi}_0(x^2, \mu) = \vec{\Phi}_0(x^2, \mu) \sqrt{1+x^2\mu^2} \in K_+^I[-1,1]$. Продифференцировав (57) по x^2 , получим уравнение для определения $\vec{\Psi}'_0(x^2, \mu)$:

$$\begin{aligned} \lambda_0(x^2) \vec{\Psi}'_0(x^2, \mu) &= \frac{\hat{P} \hat{P}^*}{1+x^2\mu^2} \vec{\Psi}'_0(x^2, \mu) - \\ &- \lambda'_0(x^2) \vec{\Psi}_0(x^2, \mu) - \mu^2 \lambda_0(x^2) \frac{\vec{\Psi}_0(x^2, \mu)}{(1+x^2\mu^2)^2} \end{aligned}$$

Используя ортогональность правой части к решениям сопряженного однородного уравнения, одно из которых есть

$$(1+x^2\mu^2) \hat{Q}_1 \vec{\Psi}_0(x^2, \mu) = (1+x^2\mu^2) \vec{\Psi}_0(x^2, \mu),$$

найдем

$$\lambda'_0(x^2) = -\lambda_0(x^2) \frac{(\mu^2 \vec{\Psi}_0, \vec{\Psi}_0)}{\|\vec{\Psi}_0\|^2 + x^2(\mu^2 \vec{\Psi}_0, \vec{\Psi}_0)} < 0 \quad x^2 \in (-1, \infty).$$

Следовательно, функция $\lambda_0(x^2)$ строго убывает с ростом x^2 , а вместе с ней и убывает $\|\hat{U}(k)\| = \sqrt{\lambda_0(x^2)}$. Но так как $\|\hat{U}(0)\| = a = 1$, то $\|\hat{U}(k)\| < 1$ при $x^2 > 0$.

Рассмотрим теперь случай $a < 1$. Покажем, что уравнение (55) неразрешимо в полосе $0 \leq \operatorname{Re} k \in k_0$ с исключенными точками $k = \pm k_0$. Пусть $k = k_1 + ik_2$ и предположим сначала, что $k_1 < k_0$. Тогда в силу свойств функции $M(k)$:

$$\begin{aligned} \|\hat{V}(k)\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \hat{P} \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}} \right\| = \left\| \sqrt{\frac{1+k_1\mu}{1+k\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k_1\mu}} \hat{P} \frac{1}{\sqrt{1+k_1\mu}} \right) \sqrt{\frac{1+k_1\mu}{1+k\mu}} \right\| \leq \\ &\leq \max_{\mu \in [-1,1]} \frac{(1+k_1\mu)}{|1+k\mu|} \|\hat{V}(k_1)\| = \max_{\mu \in [-1,1]} \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2^2 \mu^2}{(1+k_1\mu)^2} \right]} M(k_1) < 1, \end{aligned}$$

так как $k_1 < k_0$. Это неравенство означает, что неразрешимо уравнение (55)', а вместе с ним и эквивалентное ему уравнение (55)

Пусть теперь $k = k_0 + ik_2$, $k_2 \neq 0$. Возьмем положительное достаточно малое число ε . Снова имеем, в силу аналитичности $M(k)$:

$$\begin{aligned} \|\hat{V}(k)\| &= \left\| \sqrt{\frac{1+(k_0-\varepsilon)\mu}{1+k\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(k_0-\varepsilon)\mu}} \hat{P} \frac{1}{\sqrt{1+(k_0-\varepsilon)\mu}} \right) \sqrt{\frac{1+(k_0-\varepsilon)\mu}{1+k\mu}} \right\| \leq \\ &\leq \max_{\mu \in [-1,1]} \frac{[1+(k_0-\varepsilon)\mu]}{|1+k\mu|} M(k_0-\varepsilon) = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{k_2^2} \right) M(k_0-\varepsilon) = \\ &= 1 - M'(k_0)\varepsilon + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k_2^2} + M''(k_0) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

где $M'(k_0) > 0$ (лемма 5,2в). Отсюда следует, что $\|\hat{V}(k)\| < 1$ при любом $k = k_0 + ik_2$, $k_2 \neq 0$, и поэтому уравнение (55) неразрешимо и в этом случае.

Обозначим через \mathcal{N} множество всех тех $k \in Z_0$, при которых уравнение (55) разрешимо. Пусть $k \in \mathcal{N}$ и $\tilde{\Psi}(k,s)$ одно из решений уравнения (55), соответствующих этому k . Тогда, используя соотношение

(56), легко показать, что $-k \in \mathcal{N}$ и ему отвечает решение $\hat{Q}_1 \vec{\Psi}(-k, -s)$, $-s = (-\mu, \varphi + \frac{\pi}{2})$. Далее, в силу вещественности матрицы $\hat{P}(s', s)$, $\bar{k} \in \mathcal{N}$ и ему соответствует решение $\vec{\Psi}(k, s)$. Таким образом множество \mathcal{N} симметрично относительно вещественной и мнимой осей комплексной k - плоскости.

Пусть

$$G(k_0) = \{k \mid |\operatorname{Re} k| \leq k_0, M(k_0) = 1\} \setminus (\{k_0\} \cup \{-k_0\}) \subset Z_0$$

- полоса в комплексной k - плоскости с выколотыми точками $\pm k_0$ (рис.3).

При $a = 1$ $k_0 = 0$ и $G(k_0)$ вырождается в две полуоси $(-i\infty, i0)$, $(i0, i\infty)$.

Из сказанного выше следует, что

$$G(k_0) \cap \mathcal{N} = \emptyset \quad (58)$$

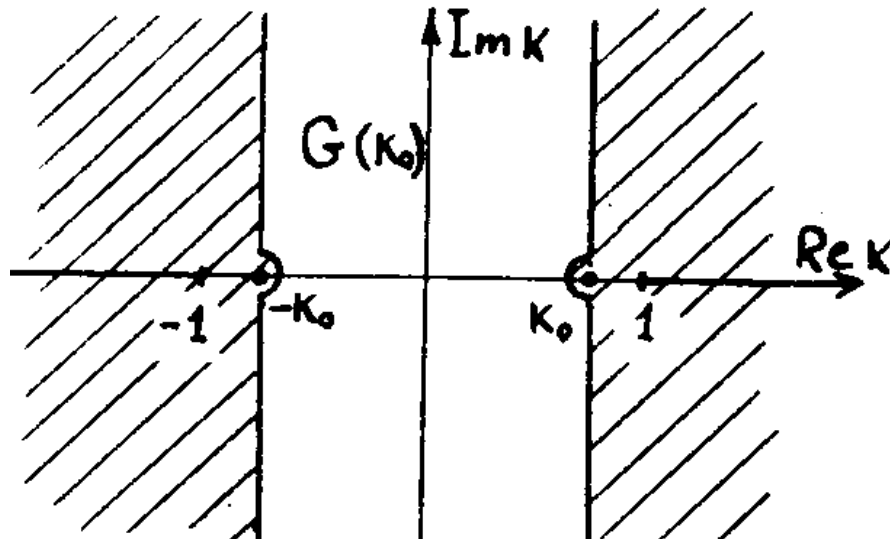


Рис.3.

$\hat{U}(k)$ образует голоморфное в G_0 семейство компактных операторов. Поэтому на основании теоремы 1.9 гл. VII монографии [16] и соотношения (58) заключаем, что множество \mathcal{N} не более чем счетно и его предельные точки могут лежать лишь на разрезах $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ и на бесконечности.

Мы приходим, таким образом, к следующему результату.

Теорема 5.

Пусть матрица рассеяния $\hat{\Gamma}(\mu)$ имеет клеточно диагональную структуру (36), $a \leq 1$ и $\Gamma_{ij}(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1, 1)$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда справедливы утверждения.

I. При $a < 1$ существуют только два решения уравнения (55)

$$\vec{\Phi}(\pm k_0, \mu) = \{\Phi_1(\pm k_0, \mu), \Phi_2(\pm k_0, \mu), 0, 0\}, \quad \vec{\Phi}(-k_0, \mu) = \vec{\Phi}(k_0, -\mu),$$

лежащие внутри конуса $K_+^I[-1, 1]$:

$$\Phi_1(\pm k_0, \mu) > 0, \quad |\Phi_2(\pm k_0, \mu)| < \Phi_1(\pm k_0, \mu).$$

Число k_0 является простым и единственным корнем уравнения $M(k) = 1$ на интервале $(0, 1)$.

Других решений в конусе $k_1(\Omega)$ это уравнение не имеет.

Если $a = 1$, то $k_0 = 0$ и единственным в $k_1(\Omega)$ решением является вектор

$$\vec{\Phi}^0(s) = \frac{1}{4\pi} \{1, 0, 0, 0\}$$

2. Уравнение (55) не имеет решений для значений параметра k в полосе $G(k_0) = \{k \mid |\operatorname{Re} k| \leq k_0, M(k_0) = 1\} \setminus (\{k_0\} \cup \{-k_0\})$.

3. Множество \mathcal{N} значений параметра k , при которых уравнение (55) разрешимо, не более чем счетно и его предельные точки могут лежать лишь на полуинтервалах вещественной оси $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ и на бесконечности. Оно симметрично относительно вещественной и мнимой осей комплексной k -плоскости: если $k \in \mathcal{N}$, то $-k, \pm \bar{k} \in \mathcal{N}$. При этом, если $\vec{\Phi}(k, s)$ решение уравнения (55), то $\vec{\Phi}(k, s)$ и $\hat{Q}_1 \vec{\Phi}(-k, -s)$, $-s = (-\mu, \varphi + \frac{\pi}{2})$, также его решения.

Замечание.

Если матрица $\hat{\Gamma}(\mu)$ симметрична (такова, например, матрица отвечающая закону рассеяния Рэлея [7]), то оператор $\hat{\mathcal{P}}$ будет самосопряженным. При этом, как легко показать, так же как и в скалярном случае, $\mathcal{N} \subset (-1, 1)$.

Если все элементы матрицы $\hat{\Gamma}(\mu)$, кроме $a_1(\mu)$, нулевые, то теорема 5 обобщает соответствующие результаты для скалярного случая [8] на класс индикатрис рассеяния $a_1(\mu) \in \mathcal{L}_1(-1, 1)$.

II. Рассмотрим отдельно случай $a < 1$. Так как $\|\hat{\mathcal{P}}\| = a < 1$, то оператор $\hat{E} - \hat{\mathcal{P}}$ обратим и характеристическое уравнение (55) приводится к эквивалентной форме задачи на собственные значения:

$$\nu \vec{\Phi}(\nu, s) = \hat{H} \vec{\Phi}(\nu, s), \quad -\nu = \frac{1}{k}, \quad (59)$$

$$\hat{H} = (\hat{E} - \hat{\mathcal{P}})^{-1} \hat{M}, \quad \hat{M} - \text{оператор умножения на } \mu.$$

Обозначим через $X_p^{(4)}(\Omega)$ множество всех вектор-функций $\vec{\Phi}(s)$ таких, что $\mu \vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_p^{(4)}(\Omega)$. Если норму в $X_p^{(4)}(\Omega)$ ввести равенством

$\|\vec{\Phi}\|_{X_p^{(4)}} = \|\mu\vec{\Phi}\|_{L_p^{(4)}}$, то $X_p^{(4)}(\Omega)$ обращается в полное линейное нормированное пространство.

Представим оператор \hat{H} суммой:

$$\hat{H} = \hat{M} + \hat{S}, \quad \hat{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}^k \hat{M}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}^k$ сходится в операторной топологии и является вполне

непрерывным оператором. Следовательно, \hat{S} вполне непрерывное (из $X_p^{(4)}(\Omega)$ в $L_p^{(4)}(\Omega)$) возмущение оператора умножения. Поэтому справедливы утверждения [16].

Лемма 6.

Пусть выполнены условия теоремы 5 и $a < 1$. Тогда:

1. Оператор $\hat{H} = (\hat{E} - \hat{P})^{-1} \hat{M}$ ограничен из $X_p^{(4)}(\Omega)$ в $L_p^{(4)}(\Omega)$;
2. его непрерывный спектр C_σ заполняет сегмент $[-1, 1]$;
3. дискретный спектр D_σ оператора \hat{H} располагается в ограниченной области, он не более чем счетен, все его точки имеют конечную алгебраическую кратность: предельные точки D_σ могут лежать лишь на сегменте $[-1, 1]$: собственные функции, соответствующие точкам D_σ , лежащим вне сегмента $[-1, 1]$, непрерывны:

$$\vec{\Phi}(v_j, s) \in C^{(4)}(\Omega), \quad v_j \in D_\sigma, \quad v_j \notin [-1, 1];$$
4. остаточного спектра оператор \hat{H} не имеет;
5. если $v_j \in D_\sigma$, то

$$-v_j, \pm \bar{v}_j \in D_\sigma; \quad \vec{\Phi}(v_j, s) = \vec{\bar{\Phi}}(v_j, s), \quad \vec{\Phi}(-v_j, s) = \hat{Q}_1 \vec{\Phi}(v_j, -s);$$
6. точки спектра D_σ , не лежащие на сегменте $[-1, 1]$, непрерывно зависят от возмущения оператора \hat{P} .

В силу эквивалентности уравнений (55) и (59) для части D_σ^* спектра D_σ , не пересекающейся с сегментом $[-1, 1]$, имеем представление

$$D_\sigma^* = \{v_j \mid -v_j^{-1} \in \mathcal{N}\}.$$

Легко показать, что точка $v = 0$ не является собственным значением оператора \hat{H} .

Основываясь на утверждениях теоремы 5 заключаем, что D_σ целиком лежит внутри двух окружностей комплексной V - плоскости с центрами в точках $\pm(2k_0)^{-1}$ и радиуса $(2k_0)^{-1}$ за исключением двух точек $\pm\nu_0 = \pm(k_0)^{-1}$, которые лежат на этих окружностях. (рис. 4).

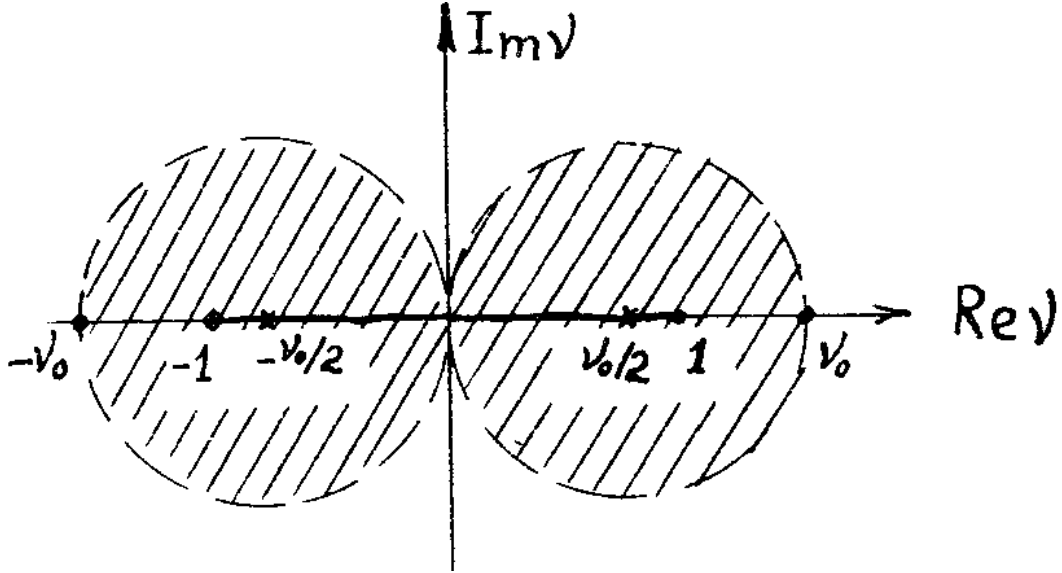


Рис.4

Область, в которой лежит спектр оператора \hat{H} , представлена на рис. 4.

Следует заметить, что в силу пункта 6 леммы 6 корни k_j характеристического уравнения (55) непрерывно зависят от матрицы рассеяния $\hat{\Gamma}(\mu)$.

§3. Численный алгоритм определения значения k_0 и вектора $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$

1. Развитая теория позволяет отыскать старший корень k_0 и соответствующее решение $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$ уравнения (55) методом последовательных приближений. При этом нет необходимости решать уравнение (55) с полной матрицей $\hat{\Gamma}(\mu)$. Число k_0 и $\vec{\Phi}(k_0, \mu) = \{\Phi_1(k_0, \mu), \Phi_2(k_0, \mu), 0, 0\}$ являются решениями уравнения:

$$(1 + k\mu)\vec{\Phi}(k, \mu) = \hat{\mathcal{P}}_0^I \vec{\Phi}(k, \mu), \quad (60)$$

где интегральный оператор

$$\hat{\mathcal{P}}_0^I \vec{\Phi}(\mu) = \int_{-1}^1 \hat{\mathcal{P}}_0^I \vec{\Phi}(\mu', \mu) \vec{\Phi}(\mu') d\mu'$$

есть сужение оператора $\hat{\mathcal{P}}$ на подпространство $C^1[-1, 1] \subset L_2^{(4)}(\Omega)$, а матрица $\hat{\mathcal{P}}_0^I(\mu', \mu)$ определяется соотношением (52), где следует положить

$a_3(\mu', \mu) = C(\mu', \mu) = a_4(\mu', \mu) = 0$. Уравнение (60) естественно решать в пространстве двумерных вектор-функций $\vec{\Phi}(\mu) = \{\Phi_1(\mu), \Phi_2(\mu)\}$.

Наиболее приемлемым методом решения, рассчитанным на широкий круг задач, является метод последовательных приближений.

Если мы каким-либо способом определим старший корень $k_0 \in (0,1)$ уравнения (60), то вычисление соответствующего решения $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$ легко провести итерациями уравнения (60), начиная, например, с функции

$$\vec{\Phi}(k_0, \mu) = \left\{ \frac{1}{1+k_0\mu}, 0 \right\}.$$

Если же значение k_0 не известно заранее, то его можно вычислить (например, методом хорд), построив функцию $M(k)$. Это легко осуществить итерациями уравнения (60).

Вычисление k_0 и $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$ удобно объединить в единый итерационный процесс.

Немаловажным может оказаться вопрос о выборе начального приближения k_0 и $\vec{\Phi}(k_0, \mu)$. В качестве такого приближения разумно взять решение соответствующей скалярной задачи.

Действительно, положим

$$\hat{P}(\chi; \mu', \mu) = \hat{P}_1(\mu', \mu) + \chi \hat{P}_2(\mu', \mu), \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (61)$$

где

$$\hat{P}_1(\mu', \mu) = \begin{bmatrix} a_1(\mu', \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_2(\mu', \mu) = \begin{bmatrix} 0 & b(\mu', \mu) \\ b(\mu, \mu') & a_2(\mu', \mu) \end{bmatrix}.$$

Равенство (61) означает возмущение оператора \hat{P}_1 соответствующей скалярной задачи путем введения поляризации с помощью параметра χ . При этом $\hat{P}(1; \mu', \mu) = \hat{P}_1^I(\mu', \mu)$.

Обозначим через k_0^* и $\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) = \{i(k_0^*, \mu), 0\}$ соответствующее решение скалярной задачи:

$$(1+k_0^*\mu)\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) = \hat{P}_1 \vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu), \quad \|\vec{\Phi}_0\| = 1. \quad (62)$$

Можно показать, что $k_0(\chi)$ и $\vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu)$ - решения уравнения

$$(1+k_0, \mu)\vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu) = \hat{P}(\chi)\vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu), \quad \|\vec{\Phi}_\chi\| = 1, \quad (63)$$

будут аналитическими функциями χ в окрестности сегмента $[0,1]$.

Поэтому

$$\begin{aligned} k_0(\chi) &= k_0^* + \alpha\chi + 0(\chi^2), \\ \vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu) &= \vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) + \chi\vec{\Phi}_1(\mu) + 0(\chi^2). \end{aligned} \quad (64)$$

Подставляя (64) в (63) и учитывая (61) и (62), приходим к уравнению для определения α и $\vec{\Phi}_1(\mu)$:

$$\vec{\Phi}_1(\mu) = \frac{1}{1+k_0^*\mu} \hat{P}_1 \vec{\Phi}_1(\mu) + \frac{\hat{P}_2 \vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) - \alpha\mu\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu)}{1+k_0^*\mu}.$$

Из условия ортогональности правой части этого уравнения решению сопряженного однородного, которое равно $(1+k_0^*\mu)\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu)$, следует, что $\alpha = 0$. Таким образом, $\vec{\Phi}_1(\mu)$ удовлетворяет уравнению:

$$(1+k_0^*\mu)\vec{\Phi}_1(\mu) = \hat{P}_1 \vec{\Phi}_1(\mu) + \hat{P}_2 \vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu).$$

Его решение имеет вид

$$\vec{\Phi}_1(\mu) = \beta\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) + \begin{bmatrix} 0 \\ i_1(\mu) \end{bmatrix},$$

где β - произвольная постоянная. Поэтому

$$\vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu) = (1+\beta\chi)\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) + \chi \begin{bmatrix} 0 \\ i_1(\mu) \end{bmatrix} + 0(\chi^2).$$

Из условия нормировки векторов $\vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu)$ и $\vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu)$ следует, что $\beta = 0$. Поэтому окончательно имеем

$$\begin{cases} k_0(\chi) = k_0^* + 0(\chi^2), \\ \vec{\Phi}_\chi(k_0, \mu) = \vec{\Phi}_0(k_0^*, \mu) + \chi \begin{bmatrix} 0 \\ i_1(\mu) \end{bmatrix} + 0(\chi^2). \end{cases}$$

Эти выражения подтверждают общепринятое мнение о том, что введение поляризации не сильно изменяет значения k_0^* и интенсивности излучения.

Приложение

Обобщенные сферические функции. Пространство $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$

Обозначим через $\Gamma_{mn}^\ell(\varphi, \theta, \psi)$ систему обобщенных сферических функций:

$$\Gamma_{mn}^\ell(\varphi, \mu, \psi) = e^{-im\varphi} P_{mn}^\ell(\mu) e^{-in\psi}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П.1})$$

$$m, n = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell, \quad 0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi, \quad -1 \leq \mu = \cos\theta \leq 1$$

и положим

$$Y_\ell^{(m,n)}(\mu, \varphi) = P_{mn}^\ell(\mu) e^{-in\varphi}$$

Функции $Y_\ell^{(mn)}(\mu, \varphi)$ при $m=0$ совпадают со сферическими функциями $Y_\ell^{(n)}(\mu, \varphi)$.

Сформулируем некоторые свойства обобщенных сферических функций, доказательство которых можно найти в монографиях [17,18].

Лемма П.1.

1. Система функций

$Y_\ell^{(m,n)}(\mu, \varphi)$, $\ell = |m|, |m|+1, \dots$, $n = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ при всяком фиксированном $m = 0, \pm 1, \dots$ образует в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ базис, т.е. каждая функция $f(s) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(s) \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{n=-\ell}^{\ell} f_n^\ell e^{-in\varphi} P_{mn}^\ell(\mu),$$

$$f_n^\ell = \frac{(-1)^{n-m} (2\ell+1)}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\mu d\varphi f(\mu, \varphi) e^{in\varphi} P_{mn}^\ell(\mu).$$

2. Система функций

$P_{mn}^\ell(\mu)$, $\ell = \max\{|m|, |n|\}, \max\{|m|, |n|\}+1, \dots$, при фиксированных m и n образует базис в пространстве $\mathcal{L}_2(-1,1)$. Каждая функция $f(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1,1)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$f(\mu) = \sum_{\ell=\max\{|m|, |n|\}}^{\infty} f_\ell P_{mn}^\ell(\mu),$$

$$f_\ell = \frac{(-1)^{n-m} (2\ell+1)}{2} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_{mn}^\ell(\mu).$$

Имеет место равенство Парсеваля-Стеклова:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_2(-1,1)}^2 = \sum_{\ell=\max\{|m|, |n|\}}^{\infty} |f_\ell|^2, \quad f(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1,1)$$

3. Для функций $P_{mn}^\ell(\mu)$ справедлива теорема сложения

$$e^{-im\chi_1} P_{mn}^\ell(\cos \mathcal{G}) e^{-in\chi_2} = \sum_{s=-\ell}^{\ell} (-1)^s e^{is(\varphi'-\varphi)} P_{ms}^\ell(\mu) P_{sn}^\ell(\mu'),$$

где углы χ_1, χ_2 и \mathcal{G} определяются соотношениями (5) (§1).

4. $P_{ms}^\ell(\mu) = P_{nm}^\ell(\mu)$,

$$\int_{-1}^1 P_{mn}^\ell(\mu) P_{mq}^\ell(\mu) d\mu = \frac{2(-1)^{m-n}}{2\ell+1} \delta_{\ell q},$$

$$\sum_{n=-\ell}^{\ell} |P_{mn}^\ell(\mu)|^2 \equiv 1.$$

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$. Будем нумеровать компоненты векторов $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ индексом $m = 2, 0, -0, -2$. Определим в $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ скалярное произведение, положив для любых $\vec{\Phi}(s), \vec{\Psi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$:

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{n=2}^{-2} \int_{\Omega} \Phi_m(s) \bar{\Psi}_m(s) ds. \quad (\text{П.2})$$

Базис в $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ выберем следующим образом: каждую компоненту $\Phi_m(s) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, $m = 2, 0, -0, -2$, вектора $\vec{\Phi}(s) \in \mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ в соответствии с пунктом 1 леммы П1 будем разлагать в ряд:

$$\Phi_m(\mu, \varphi) = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{n=-\ell}^{\ell} \Phi_{mn}^\ell e^{-in\varphi} P_{mn}^\ell(\mu), \quad m = 2, 0, -0, -2, \quad (\text{П.3})$$

где

$$\Phi_{mn}^\ell = (-1)^n \frac{(2\ell+1)}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\mu d\varphi \Phi_m(\mu, \varphi) P_{mn}^\ell(\mu) e^{in\varphi}.$$

Таким образом $\mathcal{L}_2^{(4)}(\Omega)$ превращается в гильбертово пространство.

Возьмем матрицу $\hat{\Gamma}(\mu)$ в СР – представлении и пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$ для каждой пары индексов $m, n = 2, 0, -0, -2$.

Тогда в силу пункта 2 леммы П1

$$\Gamma_{mn}(\mu) = \sum_{\ell=\max\{|m|, |n|\}} P_{mn}^\ell P_{mn}^\ell(\mu), \quad (\text{П.4})$$

где

$$P_{mn}^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 \Gamma_{mn}(\mu) P_{mn}^\ell(\mu) d\mu.$$

Ряд (П.4) сходится в среднем. В частности выполнено равенство Парсеваля-Стеклова

$$\|\Gamma_{mn}\|_{\mathcal{L}_2(-1,1)} = \sum_{\ell=\max\{|m|, |n|\}} |P_{mn}^\ell|^2. \quad (\text{П.5})$$

Воспользовавшись равенствами (6), (7) (П.1) из (П.4), получим разложения ядра оператора $\hat{\mathcal{P}}$ в СР – представлении:

$$P_{mn}^{CP}(s', s) = e^{-im\chi_1} \Gamma_{mn}(\cos \mathcal{G}) e^{-in\chi_2} = \sum_{\ell=\max\{|m|, |n|\}} p_{mn}^{\ell} T_{mn}^{\ell}(\chi_1, \cos \mathcal{G}, \chi_2) \quad (\text{П.6})$$

Сходимость этого ряда обеспечена в метрике $\mathcal{L}_2(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмина М.Г., Сушкевич Т.А., «Численный метод решения задач теории переноса поляризованного света в неоднородных плоских слоях вещества», Препринт ИПМ АН СССР, №119, М., 1974.
2. Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., «Расчеты поляризации света в сферической атмосфере методом Монте-Карло», Изв. АН СССР, ФАО, т. VII, №4, 385, 1971.
3. Соболев В.В., «Рассеяние света в атмосферах планет», Наука, 1972.
4. Кейз К., Цвайфель П. «Линейная теория переноса», Мир, 1972.
5. Kuscer I., Ribaric M., Optica Acta, v., 6, №2, 205, 1974.
6. Домке Х., Астрофизика, т. 10, № 2, 205, 1974.
7. Чандрасекар С., «Перенос лучистой энергии», М., 1953.
8. Масленников М.В., «Проблема Милна с анизотропным рассеянием», Труды МИАН им. В.А.Стеклова, т. 97, Наука, 1968.
9. Кузьмина М.Г., ДАН СССР, т.238, №2, 314, 1978.
10. Кузьмина М.Г., ДАН СССР, 1978 (в печати).
11. Владимиров В.С., «Математические задачи односкоростной теории переноса частиц», Труды МИАН им. В.А.Стеклова, т. 61, М., 1961.
12. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., «Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов», Наука, М., 1965.
13. Красносельский М.А., «Положительные решения операторных уравнений», М., 1962.
14. Крейн М.Г., Рутман М.А., «Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха», Усп. Мат. Наука, т. III, вып. 1, стр. 3, 1948.
15. Novenier J.W., J. of Atmosph. Sciences, v. 26, No 3, 488, 1969.
16. Като Т., «Теория возмущений линейных операторов», Мир, М., 1972.
17. Виленкин Н.Я., «Специальные функции и теория представлений групп», Наука, 1965.
18. Гельфанд И.М. и др., «Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения», Физматгиз, 1958.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ (СТРОГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ)

Т.А.Гермогенова, Н.В.Коновалов, М.Г.Кузьмина

Отдельный оттиск из сборника: «Принцип инвариантности и его приложения», Труды симпозиума, Бюракан , 26-30 октября 1981 г., Изд-во АН АрмССР Ереван, 1989, 521 с

В докладе помимо краткого обзора отражены результаты оригинальных исследований авторов в следующих направлениях:

- уравнение переноса поляризованного излучения: вывод для сред, состоящих из дискретных произвольно рассеивающих рассеивателей; связь макроскопических параметров среды, фигурирующих в уравнении переноса (сечений взаимодействия поляризованного излучения со средой, коэффициентов преломления среды, закона рассеяния элемента объема) с микроскопическими характеристиками рассеивателей и законом их распределения; определение совокупности условий на параметры уравнения переноса, выделяющих классы математических объектов;

- качественное исследование основных свойств векторного уравнения переноса для случая однородной, оптически изотропной среды, состоящей из сферических рассеивателей;

- анализ векторного характеристического уравнения, определяющего основные свойства глубинного режима для поляризованного излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к поляризационным задачам теории переноса излучения возник фактически с самого начала исследований по теории переноса. Общие основы теории переноса поляризованного излучения заложены в монографиях и статьях В.А. Амбарцумяна, С. Чандрасекара, В.В. Соболева, Г. Ван де Хулста, З. Секеры, Г.В. Розенберга, И. Куцера и М. Рибарича и др. [1-9]. Тем не менее теория переноса поляризованного излучения является сравнительно молодой и причины понятны. Это, во-первых, большая трудность поляриметрических наблюдений по сравнению с измерениями одной только интенсивности в эксперименте. Во-вторых – значительно большая громоздкость вычислительных задач даже в случаях простейших геометрий. Последнее обстоятельство в сочетании с предъявлением более высоких требований к точности расчетов (по сравнению с аналогичными задачами скалярного приближения теории переноса) переводит задачи с поляризацией в разряд задач, находящихся на пределах возможностей вычислительных машин класса БЭСМ-6. Наконец, проведение строгого качественного исследования поставленных математических задач также, как правило, сопряжено со значительными трудностями. В итоге большая часть полученных к настоящему времени строгих результатов относится пока в основном к асимптотической теории переноса со специальными классами законов рассеяния в акте (именно, законами рассеяния, определенными

матрицами в виде (9) и (10), см. ниже). Основные результаты получены в работах [7, 20-28] (см. также [10, 11]). Следует отметить, что эти классы законов рассеяния охватывают подавляющую часть приложений в случае оптически изотропных сред. Так клеточнодиагональными матрицами определяются законы рассеяния полидисперсными средами, состоящими из сферических рассеивателей, молекулярное рассеяние (рэлеевское), а также законы рассеяния некоторыми средами, состоящими из хаотических распределений несферических рассеивателей.

Наконец, несколько слов о состоянии исследований по теории переноса поляризованного излучения в анизотропных средах. Развитие этого направления вызвано прежде всего потребностями астрофизических приложений и достигнуто в работах [17, 18, 10, 11]. Здесь имеются значительные продвижения в построении хорошо «работающих» приближенных подходов. Помимо этого даны разные способы вывода уравнения переноса (в матричной форме), а в области качественных исследований использован принцип инвариантности Амбарцумяна и получены уравнения для матричного обобщения Н - функции Амбарцумяна-Чандрасекара [10, 11], проведено исследование методом В.В.Соболева получающихся интегральных уравнений.

1. К описанию поляризационных характеристик излучения в рамках теории переноса.

В оптике для определения состояния поляризации потока излучения, как известно, используются матрица когерентности и параметры Стокса. Мы будем пользоваться следующим выражением для матрицы когерентности. Пусть \vec{s} - направление распространения плоской электромагнитной волны, \vec{r} - пространственная точка наблюдения, $\vec{E}(\vec{r}, \vec{s}, t)$ - двумерный вектор-столбец компонент вектора напряженности электрического поля в некотором базисе, расположенном в плоскости, ортогональной \vec{s} , $\vec{E}^+(\vec{r}, \vec{s}, t)$ - вектор-строка комплексно-сопряженных компонент. Тогда строгое определение матрицы когерентности таково

$$\hat{J}(\vec{r}, \vec{s}, \tau) \stackrel{df}{=} \overline{\vec{E}(\vec{r}, \vec{s}, t) \otimes \vec{E}^+(\vec{r}, \vec{s}, t + \tau)}$$

Символом \otimes обозначено кронекеровское произведение матриц, чертой сверху – операция усреднения по большому промежутку времени. Матрица \hat{J} позволяет единым образом описывать когерентные и поляризационные свойства поля. Для квазимонохроматического излучения, состояние поляризации которого можно считать постоянным на отрезках времени $\Delta t \ll \Delta \nu^{-1}$, где $\Delta \nu$ - спектральная ширина излучения, полная информация о состоянии поляризации содержится в эрмитовой матрице $\hat{J}(\vec{r}, \vec{s}) \stackrel{df}{=} \hat{J}(\vec{r}, \vec{s}, 0)$. (Именно матрица \hat{J} обычно и называется матрицей когерентности). Четыре действительных функций, определяющих J , позволяют найти интенсивность излучения, степень поляризации (доля полностью поляризованной компоненты в полной интенсивности) и параметры эллипса поляризации

полностью поляризованной компоненты (степень вытянутости эллипса и его положение в заданном базисе). Та же информация содержится в параметрах Стокса. Мы не будем здесь выписывать формулы связи параметров поляризации с компонентами матрицы \hat{J} (или параметрами Стокса), которые хорошо известны и всюду приводятся (см., например, [3-6]). Отметим лишь некоторые факты, установленные в статической оптике и статистической радиофизике, которые в данном случае важны с точки зрения строгого математического подхода к задачам переноса поляризованного излучения [14-16].

1) Любое реальное электромагнитное поле, в том числе и оптическое, создается ансамблем некоррелированных элементарных источников и поэтому, как принято говорить [15], представляет собой статистическую динамическую систему. Вложить точный математический смысл в понятия полная и частичная поляризация, когерентность и некогерентность, оптическая неразличимость потоков и т.д., а также выяснить строгие условия аддитивности матрицы когерентности (и параметров Стокса) удастся на основе математического аппарата теории случайных процессов. Оказывается, что для стационарных и эргодических векторных случайных процессов (в данном случае двумерных) матрица когерентности \hat{J} совпадает с корреляционной матрицей процесса. При этом стационарность, эргодичность и квазимонохроматичность в сочетании с условием, что время запаздывания τ удовлетворяет условию $\tau \ll \Delta\nu^{-1}$, являются той совокупностью точных условий, при которых матрицы $\hat{J}(\vec{r}, \vec{s})$ достаточно для описания всех процессов, связанных с поляризацией.

2) Установлены параллель и соответствие между классическим и квантовомеханическим описаниями поляризованного излучения и аналогия между матрицей когерентности \hat{J} и квантовомеханической матрицей плотности $\hat{\rho}$. Выяснено, что аналогия между J и ρ весьма близкая, но не является полной. Ссылки на литературу по этим вопросам можно найти, например, в [15].

2. Уравнение переноса поляризованного излучения

При феноменологическом описании рассеивающей среды и процесса многократного рассеяния, как известно, обычное скалярное уравнение переноса излучения можно получить из соображений баланса энергии [3, 5, 9]. Аналогичным образом уравнение переноса поляризованного излучения в анизотропной среде можно получить на основе рассмотрения распространения нормальных волн в среде [10]. Существует и другой подход – спуститься на более детальный микроскопический уровень описания, задавая среду как ансамбль изолированных рассеивателей и используя точное описание процесса многократного рассеяния излучения на основе уравнений Максвелла. Такие методы вывода уравнений переноса начали разрабатываться уже давно сначала для скалярного приближения (L.Foldy, 1945; M. Lax, 1951), а затем были продолжены и для поляризованного излучения. Уравнение переноса (матричный вариант) для разреженной

изотропной среды с рэлеевским законом рассеяния в акте на изолированных рассеивателях получено в работах К.Ватсона (K.Watson, 1969; 1970), для анизотропных сред из некоррелированных рассеивателей, размеры которых малы по сравнению с длиной волны излучения в среде – Ю.И.Гнединым, А.З.Долгиновым и Н.А.Силантьевым (1969-1979 гг.) [17, 18, 10]. Векторное уравнение переноса для разреженных анизотропных сред, состоящих из коррелированных дискретных рассеивателей, для которых закон рассеяния в акте считается заданным (и произвольным) получено одним из авторов доклада [19].

Преимущество микроскопического подхода состоит в том, что помимо самого уравнения переноса удастся определить основные макроскопические параметры среды: коэффициент преломления среды, полное сечение взаимодействия излучения с веществом (сечения экстинкции), матрицу рассеяния элемента объема среды (в случае, если среда оказывается анизотропной определяются коэффициенты преломления и сечения экстинкции для нормальных волн, а также поляризационные характеристики последних). Указанные макроскопические параметры оказываются связанными с рассеивающими свойствами индивидуальных рассеивателей (оператором амплитуды) и законом их распределения. Это позволяет предсказать макроскопические свойства среды, если имеется какая-либо информация о свойствах рассеивателей и их распределения. Возникающие здесь соотношения таковы*. Пусть $\hat{A}(\vec{s}, \alpha)$ - двумерный оператор амплитуды, определяющий в волновой зоне амплитуду расходящейся сферической волны, рассеянной изолированным рассеивателем (α - совокупность параметров, описывающих рассеивающие свойства рассеивателя), $\vec{J}(\vec{s})$ - четырехкомпонентный вектор-столбец, составленный из компонент $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$, матрицы $\hat{J}(\vec{s}), \vec{\Phi}(\vec{s})$ - четырехкомпонентный вектор, связанный с $\vec{J}(\vec{s})$ соотношением $\vec{\Phi}(\vec{s}) = \hat{T}\vec{J}(\vec{s})$ **, для которого требуется написать уравнение

переноса излучения. Пусть далее $\hat{A}(\vec{s}) \stackrel{df}{=} \langle \hat{A}(\vec{s}, \vec{s}, \alpha) \rangle$ есть среднее по ансамблю значение оператора амплитуды для направления рассеяния точно вперед, $A^{(i)}(\vec{s})$ - ее собственные числа ($i = 1, 2$).

Тогда общей является следующая ситуация: излучением, распространяющимся без рассеяния, ансамбль рассеивателей эффективно «воспринимается» как сплошная оптически-анизотропная среда (как правило реализуется тогда, когда рассеиватели анизотропно рассеивающие, а их распределение не обладает какой-либо симметрией). В этом случае коэффициенты преломления и сечения экстинкции нормальных волн определяются собственными числами

* Для простоты среда считается однородной и зависимость всех параметров от \vec{r} опущена.

** \hat{T} - матрица, элементами которой являются постоянные.

$$A^{(i)}(\vec{s}): n^{(i)}(\vec{s}) = 1 + 2\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^{-2} \text{Re}A^{(i)}(\vec{s});$$

$$\sigma^{(i)} = 2\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^{-2} \text{Im}A^{(i)}(\vec{s});$$

а состояния поляризации нормальных волн - собственными векторами $A^{(i)}(\vec{s})$ [10, 19]. Если $\hat{A}(\vec{s})$ имеет единственное собственное число $A(\vec{s})$ (кратности 2), среда, очевидно, оказывается оптически изотропной. В любом случае многократное рассеяние излучения описывается матрицей рассеяния элемента объема

$$\hat{T}(\vec{s}, \vec{s}') = \langle \hat{T}(\hat{A}(\vec{s}, \vec{s}'; \alpha) \otimes A^+(\vec{s}, \vec{s}'; \alpha) T^{-1} \rangle$$

При наличии корреляций в ансамбле рассеивателей в формуле для $\hat{T}(\vec{s}, \vec{s}')$ содержится слагаемое, ответственное за корреляцию [19].

Уравнение переноса поляризованного излучения в анизотропной среде имеет вид:

$$(\vec{s}, \nabla) \vec{\Phi} + \hat{\sigma} \vec{\Phi} = \mathcal{P} \vec{\Phi} + \vec{F}, \quad (1)$$

$$(\mathcal{P} \vec{\Phi})(\vec{s}) = \int_{\Omega} \hat{\mathcal{P}}(\vec{s}, \vec{s}') \vec{\Phi}(\vec{s}') d\vec{s}', \quad (2)$$

$$\hat{\mathcal{P}}(\vec{s}, \vec{s}) = \hat{L}(\vec{s}, \vec{s}') \hat{T}(\vec{s}, \vec{s}') \hat{L}^+(\vec{s}', \vec{s}). \quad (3)$$

Здесь $\hat{L}(\vec{s}, \vec{s})$ есть матрица преобразования вектора $\vec{\Phi}(\vec{s})$ при переходе от одного базиса к другому (полностью определяется после того, как задана \hat{T} и найдены собственные векторы $\hat{A}(\vec{s})$). Матрица $\hat{\sigma}$ зависит от $\sigma^{(i)}$ и $n^{(i)}$, $i=1,2$. Для изотропной среды $\hat{\sigma} = \sigma_t \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$, а $\hat{T}(\vec{s}, \vec{s}') = \hat{T}(\vec{s} \cdot \vec{s}') = \hat{T}(\gamma)$.

Все приведенные соотношения и само уравнение переноса справедливы при $\lambda \ll \ell$, $d \ll \ell$, $d, \gg \lambda$ где λ - длина волны излучения, ℓ - среднее расстояние между рассеивателями, d - диаметр рассеивателей.

3. Матрица рассеяния элемента объема

Как уже говорилось, строгий анализ дальше проводится для уравнения переноса в изотропной среде. Однако свойства матрицы $\hat{\Gamma}$ как математического объекта, о которых пойдет речь в настоящем разделе, справедливы также и для случая анизотропных сред.

Условия неотрицательной определенности матрицы когерентности ($\text{Tr}J \geq 0$, $\det J > 0$) на языке параметров Стокса принимает вид

$$I \geq 0; \rho^2(\vec{\Phi}) \stackrel{df}{=} I^2 - Q^2 - U^2 - V^2 \geq 0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что любая матрица рассеяния должна удовлетворять условиям.

$$(\hat{\Gamma} \vec{\Phi})_1 \geq 0; \rho^2(\hat{\Gamma} \vec{\Phi}) \geq 0 \quad (5)$$

для любого $\vec{\Phi}$, удовлетворяющего (4).

Еще одним очевидным условием, которому должна удовлетворять $\hat{\Gamma}$, является неравенство

$$\int_{\Omega} (\hat{P}\vec{\Phi})_1 d\vec{s} \leq \int_{\Omega} \Phi_1 d\vec{s} \quad (6)$$

для любого $\vec{\Phi}$, удовлетворяющего (4). Условие (6) выражает закон сохранения энергии в акте рассеяния в неразмножающей среде. В качестве следствия первого из неравенств (4) и неравенства (6) получаются обычные ограничения на индикатрису рассеяния в акте (при выборе в качестве $\vec{\Phi}$ вектора Стокса индикатриса совпадает с элементом $\Gamma_{11}(\gamma)$). Это условие

$$\Gamma_{11}(\gamma) \geq 0$$

и

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Gamma_{11}(\gamma) d\gamma = a, \quad a \in (0, 1]. \quad (7)$$

Наконец, представляется естественным постулировать условие обязательного возникновения поляризации в акте рассеяния при неполяризованном падающем излучении (как следствие поперечности электромагнитных волн). Тогда, очевидно, $\Gamma_{12} \neq 0$, и нетрудно получить, что минимальное число независимых функций, которые могут определять матрицу физически реализуемого закона рассеяния в акте, равно трем. Сама матрица $\hat{\Gamma}(\gamma)$ при этом имеет вид

$$\Gamma^{(\min)}(\gamma) = \begin{bmatrix} a_1(\gamma) & b(\gamma) & 0 & 0 \\ b(\gamma) & a_1(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Именно такой вид имеет матрица рэлеевского рассеяния.

Теперь несколько замечаний о возможных свойствах симметрии $\hat{\Gamma}(\gamma)$ и числе независимых параметров. Если не делается вообще никаких предположений ни о законе рассеяния изолированными рассеивателями среды, ни о каких-либо свойствах симметрии закона их распределения, матрица $\hat{\Gamma}(\gamma)$ определяется в общем 16 функциями. Если же имеются хотя бы некоторые свойства симметрии закона распределения рассеивателей ансамбля, число независимых функций, определяющих $\hat{\Gamma}(\gamma)$, может заметно сократиться. Так, скажем, при вполне хаотическом распределении рассеивателей сокращение числа независимых функций имеет место даже при любом законе рассеяния изолированными рассеивателями, поскольку при рассеянии на любых рассеивателях справедлив принцип взаимности для рассеяния поляризованного излучения в акте. Множество примеров, на которых можно продемонстрировать сокращение числа независимых параметров $\hat{\Gamma}(\gamma)$ разобрано в [6]. Как уже упоминалось, результаты строгого анализа пока получены для уравнения переноса в случае изотропной среды и матрицы рассеяния вида

$$\hat{\Gamma}(\gamma) = \begin{bmatrix} a_1(\gamma) & b(\gamma) & 0 & 0 \\ b(\gamma) & a_2(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\gamma) & c(\gamma) \\ 0 & 0 & -c(\gamma) & a_4(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Такой закон рассеяния принято называть законом рассеяния при наличии Р - инвариантности в акте. Несколько слов также будет сказано по поводу уравнения переноса с законом рассеяния.

$$\hat{\Gamma}(\gamma) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_2 & b_2 \\ b_1 & a_2 & c_3 & b_3 \\ -c_2 & -c_3 & a_3 & c_1 \\ b_2 & b_3 & -c_1 & a_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

4. Векторное уравнение переноса излучения в изотропной среде. Оператор рассеяния

Теперь будут кратко перечислены результаты исследования общих функциональных свойств интегрального оператора \mathcal{P} уравнения переноса (1) для случая изотропной среды и законов рассеяния в акте, определенных матрицами рассеяния вида (9), удовлетворяющими условиям (5) и (6). Так же, как в случае анализа интегрального оператора в скалярном приближении, считается, что элементы матрицы рассеяния $\hat{\Gamma}(\gamma)$ принадлежат функциональным подпространствам $X[-1,1]$ (конкретно рассматриваются возможности $X[-1,1]=L_2[-1,1]$ и $X[-1,1]=L_p[-1,1]$, $p \geq 1$), а элементы вектора $\vec{\Phi}(\vec{s})$ функциональным подпространствам $X(\Omega)$ где Ω - единичная сфера трехмерного пространства (здесь рассмотрены возможности:

$$X(\Omega)=L_2(\Omega), \quad X(\Omega)=L_p(\Omega) \text{ и } X(\Omega)=C(\Omega)).$$

Тогда «рабочими» функциональными пространствами для задач с поляризацией являются пространства $X^{(4)}(\Omega) = X(\Omega) \times X(\Omega) \times X(\Omega) \times X(\Omega)$ четырехкомпонентных функций, определенных на Ω (прямые произведения четырех копий $X(\Omega)$), а интегральный оператор рассеяния \mathcal{P} есть операторная матрица, действующая из $X^{(4)}(\Omega)$ в $Y^{(4)}(\Omega)$. Сведения о функциональных и спектральных свойствах \mathcal{P} нужны при анализе асимптотических свойств многократно рассеянного излучения (глубинных режимов), а также при развитии численных методов. Установлены следующие свойства \mathcal{P} .

1) Полная непрерывность и сглаживающие свойства [20, 21, 27, 28];

2) Свойства симметрии \mathcal{P} относительно группы вращений и адекватный этому свойству Фурье-анализ функций $\mathcal{P} \vec{\Phi}$ [7, 22, 20, 21, 27].

(Несколько конкретнее: показано, что вполне определенное подмножество системы $\{T_{mn}^\ell(\chi, \mu, \varphi)\}$ обобщенных сферических функций, именно система

$\{Y_{mn}^\ell(\mu, \varphi) | Y_{mn}^\ell(\mu, \varphi) = P_{mn}^\ell(\mu) e^{-in\varphi} \equiv T_{mn}^\ell(0, \mu, \varphi), m=2, 0, -2; \ell=0, 1, \dots, n=|m|, |m|+1, \dots\}$ грубо говоря, играет ту же роль в задаче с поляризацией, какую играет система обычных сферических функций в соответствующей задаче скалярного приближения);

3) Найдены дискретный спектр, система собственных векторов \mathcal{P} ; система сингулярных чисел \mathcal{P} [20, 21, 27, 28] (Для клеточно-диагональных $\hat{\Gamma}(\gamma)$ собственные и сингулярные числа \mathcal{P} явным образом выражаются через коэффициенты разложения элементов $\hat{\Gamma}(\gamma)$ по определенному подмножеству

полиномов $P_{mn}^{\ell}(\mu)$. Среди собственных чисел оператора \mathcal{P} имеется действительное собственное число

$$a = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Gamma_{11}(\gamma) d\gamma \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\gamma) d\gamma, \quad a \in (0,1),$$

которому отвечает собственный вектор $\vec{\Phi}_0(\vec{s}) = \text{Const}\{1,0,0,0\}$;

4) Показано, что оператор \mathcal{P} является несамосопряженным даже для узкого класса матриц рассеяния из рассматриваемого класса (при $C(\gamma) \equiv 0$) и в общем несимметризуем [27];

5) Доказано, что оператор \mathcal{P} обладает весьма важным свойством – сильной положительностью в надлежащем конусе. Следствием этого свойства является наличие у \mathcal{P} ведущего собственного числа (положительного, простого, максимального по модулю) и отвечающего ему собственного вектора, содержащегося во внутренности конуса [20, 27, 28].

Здесь стоит сказать подробнее. Множество векторов $\vec{\Phi}(\vec{s})$, $\vec{\Phi} \in \mathcal{X}(\Omega)$, отвечающих физически реализуемым состояниям поляризации, образует конус \mathcal{K}_x в пространстве $\mathcal{X}^{(4)}(\Omega)$. Точнее

$$\mathcal{K}_x = \left\{ \vec{\Phi} \mid \vec{\Phi} \in \mathcal{N}[\mathcal{X}^{(4)}(\Omega)], \Phi_1 \geq 0; \rho^2(\vec{\Phi}) \geq 0 \right\},$$

где $\mathcal{N}[\mathcal{X}^{(4)}(\Omega)]$ – действительное ядро пространства $\mathcal{X}^{(4)}(\Omega)$. Оператор $\mathcal{P}: \mathcal{X}^{(4)} \rightarrow \mathcal{X}^{(4)}$ является, по определению, сильно положительным в \mathcal{K}_x , если для любого $\vec{\Phi} \neq 0$, принадлежащего границе конуса \mathcal{K}_x (т.е. такого, что $\rho^2(\vec{\Phi}) = 0$) существует такое натуральное $n_0 = n_0(\vec{\Phi})$, что при $n \geq n_0$ выполняется $\rho^2(\mathcal{P}^n \vec{\Phi}) > 0$ (т.е. элемент $\mathcal{P}^n \vec{\Phi}$ содержится внутри \mathcal{K}_x). Для законов рассеяния в акте, определенных клеточно-диагональными матрицами рассматриваемого класса, получены следующие результаты:

А. Указаны простые достаточные условия сильной положительности $\mathcal{P}: \mathcal{C}^{(4)}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^{(4)}(\Omega)$ в конусе \mathcal{K}_c (на языке ограничений на элементы матрицы $\hat{\Gamma}(\gamma)$ [27].

В. Сформулированы необходимые и достаточные условия сильной положительности \mathcal{P} в \mathcal{K}_c (на языке условий на коэффициенты разложений элементов $\hat{\Gamma}(\gamma)$ по системе полиномов $\{P_{mn}^{\ell}(\gamma)\}$) [28].

Приведем оба результата

Теорема 1. Пусть матрица рассеяния $\hat{\Gamma}(\gamma)$ имеет вид (9) и обладает свойствами

1) $\hat{\Gamma}(\mathcal{K}_c) \subset \mathcal{K}_c$ ($\hat{\Gamma}$ оставляет инвариантным конус \mathcal{K}_c)

2) Элементы $\hat{\Gamma}(\gamma)$ удовлетворяют дополнительным ограничениям:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |a_4(\gamma)| d\gamma &< \int_{-1}^1 a_1(\gamma) d\gamma, \\ \int_{-1}^1 |b(\gamma)| d\gamma &< \frac{2}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 (1-\gamma^2) a_1(\gamma) d\gamma, \\ \int_{-1}^1 |c(\gamma)| d\gamma &< \frac{2}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 (1-\gamma^2) a_1(\gamma) d\gamma, \end{aligned}$$

Тогда оператор $\mathcal{P}: C^{(4)}(\Omega) \rightarrow C^{(4)}(\Omega)$ является сильно положительным в \mathcal{K}_c .

Теорема 2. Пусть матрица $\hat{\Gamma}(\gamma)$ оставляет инвариантным конус \mathcal{K}_c почти всюду на $[-1,1]$ и $\Gamma_{mn} \in L_1[-1,1]$. Тогда для того, чтобы оператор \mathcal{P} был сильно положительным необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\begin{aligned} &|a_4^0| < a; \\ &-a + \frac{(b^2)^2}{a + a_1^\ell} < a_2^\ell < a - \frac{(b^\ell)^2}{a - a_1^\ell}, \quad \ell = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1^\ell &\stackrel{df}{=} (a_1)_{0,0}^\ell; \quad a_2^\ell \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \{ (a_2 + a_3)_{2,2}^\ell + (a_2 - a_3)_{2,-2}^\ell \}; \\ a_4^\ell &\stackrel{df}{=} (a_4)_{0,0}^\ell; \quad b^\ell \stackrel{df}{=} (b)_{2,0}^\ell, \\ (\bullet)_{m,n}^\ell &\stackrel{df}{=} \frac{1}{2} (\bullet, P_{mn}^\ell)_{L_2[-1,1]}. \end{aligned}$$

Помимо анализа функциональных свойств оператора \mathcal{P} , установлены условия существования и единственности решения краевой задачи переноса поляризованного излучения в ограниченной области, а также сформулированы условия сходимости метода итераций по кратности рассеяния [28].

5. Глубинный режим для поляризованного излучения

Векторное характеристическое уравнение

$$(1 + k\mu)\vec{\Psi}(k, \vec{s}) = (\mathcal{P}\vec{\Psi}) \cdot (k, \vec{s}), \quad \begin{aligned} \mu &= \vec{s} \cdot \vec{n}, \\ k &\in \varphi_0^1, \end{aligned} \quad (11)$$

являющееся векторным обобщением характеристического уравнения В.А.Амбарцумяна, определяет асимптотические характеристики поляризованного излучения в глубине оптически толстого слоя изотропной среды. Как и в случае скалярного приближения теории переноса, здесь предметом анализа является множество \mathcal{N} значений комплексного параметра k , при которых существуют ограниченные нетривиальные решения $\vec{\Psi}(k_j, \vec{s})$ этого уравнения и множество самих $\vec{\Psi}(k_j, \vec{s})$. Множество \mathcal{N} связано с дискретным спектром интегрального оператора $\mathcal{U}(k) = (1 + k\mu)^{-1} \mathcal{P}$ точно тем же соотношением, что и в случае скалярного приближения:

$$\mathcal{N} = \{k_j \mid k_j \in \beta^1, \sigma_p(\mathcal{U}(k)) \ni 1\}, \quad * \quad (12)$$

и поэтому анализ уравнения (11) сводится к изучению дискретного спектра и собственных векторов $\mathcal{U}(k)$. Программу этого исследования удастся провести, повторяя шаг за шагом соответствующую программу для характеристического уравнения скалярного приближения. В отличие от соответствующего оператора скалярного приближения оператор $\mathcal{U}(k)$ при $k \in (-1,1)$ в общем не симметризуем, и поэтому уравнение (11) имеет, как правило, комплексный спектр. Тем не менее оказывается, что целый ряд

* β^1 комплексная k - плоскость с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

свойств оператора $\mathcal{U}(k)$ скалярного приближения переносится (с должным обобщением) на оператор $\mathcal{U}(k)$ векторной задачи. Это следующие свойства [21, 26]:

1) Сильная положительность. Оператор $\mathcal{U}(k): C^{(4)}(\Omega) \rightarrow C^{(4)}(\Omega)$ при $k \in (-1, 1)$ сильно положителен в \mathcal{K}_c .

2) Фурье-анализ по азимуту. Спектр $\mathcal{U}(k)$ полностью исчерпывается объединением спектров операторов $\mathcal{U}_s(k)$ - азимутальных гармоник $\mathcal{U}(k)$. Собственными векторами $\mathcal{U}(k)$ являются функции с разделенными переменными μ, φ и нет никаких других.

3) Поведение ведущего собственного значения $\Lambda(k)$ оператора $\mathcal{U}(k)$ как функции k вполне аналогично поведению ведущего собственного значения $M(k)$ оператора $\mathcal{U}(k)$ скалярного приближения. Собственный вектор $\tilde{\Psi}_0(k, \vec{s})$, отвечающий $\Lambda(k)$ **азимутально однороден** (т.е. $\tilde{\Psi}_0(k, \vec{s}) = \tilde{\Psi}_0(k, \mu)$ и $\tilde{\Psi}_0(k, \mu) \in \mathcal{K}_c[-1, 1] \subset \mathcal{K}_c$). Имеются также и специальные свойства ведущего собственного вектора $\Psi_0(k, \mu)$, обусловленные спецификой законов рассеяния из рассматриваемого класса (клеточная диагональность). Именно, ведущий собственный вектор имеет вид

$$\tilde{\Psi}_0(k, \mu) = \{\Psi_{10}(k, \mu), \Psi_{20}(k, \mu), 0, 0\}. \quad (13)$$

Следствием специального вида (13) ведущего собственного вектора оператора $\mathcal{U}(k)$ являются две особенности глубинного режима поляризованного излучения для рассматриваемого класса законов рассеяния:

а) излучение в глубинном режиме **линейно поляризовано**. Линейность поляризации в данном случае означает, что помимо частичной релаксации угловой анизотропии излучения происходит частичная релаксация поляризации;

б) при законах рассеяния из рассматриваемого класса в глубинном режиме происходит частичное «забывание» закона рассеяния в акте (поскольку оказывается, что функция (13) вовсе не зависит от элементов $c(\gamma)$ и $a_4(\gamma)$ матрицы рассеяния).

Замечание. Анализ характеристического уравнения для случая изотропной среды с более общим законом рассеяния в акте, определенным матрицей рассеяния (10), еще не завершен. Однако некоторые результаты уже имеются. Так поле излучения в глубинном режиме оказывается частично эллиптически поляризованным с постоянным аксиально-симметричным наклоном плоскости поляризации (относительно – симметричным наклоном плоскости поляризации (относительно меридианальной плоскости)).

Остается привести результаты анализа общих свойств дискретного спектра \mathcal{K} характеристического уравнения и указать область его локализации на комплексной k - плоскости. Для законов рассеяния, определенных клеточно-диагональными матрицами (9) множество \mathcal{K} обладает следующими свойствами [21, 23, 27, 28].

Существует пара точек $\pm k_0 \in \mathcal{K}$, такая, что

а) при $a < 1$, $k_0 \in (0, 1)$ и является единственным корнем уравнения $\Lambda(k) = 1$, $k \in [0, 1)$. Отвечающие значениям $\pm k_0$ собственные векторы имеют вид (13), обладают свойством $\tilde{\Psi}_0(-k_0, \mu) = \tilde{\Psi}_0(k_0, -\mu)$;

б) при $a = 1$ точки $\pm k_0$ сливаются в одну точку $k_0 = 0$ и $\tilde{\Psi}_0(0, \mu) = \text{Const} \cdot \{1, 0, 0, 0\}$.

2) Все остальные точки $k_j \in \mathcal{N}$, если такие имеются, содержатся в ограниченной области G , принадлежащей комплексной плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$, определенной условиями

$$G = \{k / |k| < 1 + a; |\text{Re} k| > k_0, |\text{Im} k| \leq A |\text{Re} k|\},$$

где

$$A = \begin{cases} [c] / \sqrt{10}(1-a), & a < 1, \\ [c] / \sqrt{10}(1-b), & a = 1, \end{cases}$$

$$[c] \stackrel{\text{df}}{=} \|\Gamma_{34}\|_{L_2[-1,1]}; \quad b = \sup_{\lambda \in \sigma_p(\mathcal{P})} \{\sigma_p(\mathcal{P}) \setminus \{a\}\}.$$

3) Множество \mathcal{N} содержит не более счетного множества точек и симметрично относительно действительной и мнимой осей.

FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL THEORY OF POLARIZED RADIATION TRANSFER (RIGOROUS RESULTS)

Т.А.Гермогенова, .N.V.Коновалов, М.Г.Кусмина

The polarized radiation transfer equation for media consisting of discrete arbitrarily scattering centers has been derived and studied in details in the case of homogeneous optically isotropic distribution of spherical scatterers.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян В.А.** АЖ, **19**, 30, 1942; ДАН АрмССР, 8, 101, 1948.
2. **Chandrasekhar S.** Radiative Transfer, Oxford Univ. Press, 1950; (русский перевод: **Чандрасекар С.** Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953).
3. **Розенберг Г.В.** УФН, **56**, №1, 1955.
4. **Соболев В.В.** Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
5. **Соболев В.В.** Рассеяние света в атмосферах планет, М., Наука, 1972.
6. **van de Hulst Н.С.** Light scattering by small particles, N. Y., Wiley, 1957; (русский перевод: **Ван де Хюлст Г.**, Рассеяние света малыми частицами, М., ИЛ, 1961).
7. **Kuščer I., Ribarič M.** Optica Acta, 6, № 1, 959.
8. **Sekera Z., J.** of Opt. Soc. of Amer., 56, № 12, 1966.
9. **Железняков В.В.** Электромагнитные волны в космической плазме, М., Наука, 1977.

10. Долгинов А.З., Гнедин Ю.И., Силантьев Н.А. Распространение и поляризация излучения в космической плазме, М., Наука, 1979.
11. Силантьев Н.А. Перенос излучения в однородной магнитоактивной плазме. Препринт ФТИ им А.Ф.Иоффе, Л., 1980.
12. Горелик С.Г. Колебания и волны, М., Наука, 1959.
13. Борн М., Вольф Э. Основы оптики, М., Наука, 1973.
14. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику, М., Мир, 1966.
15. Перина Я. Когерентность света, М., Мир, 1974.
16. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, Случайные процессы М., Наука, 1976.
17. Гнедин Ю.И., Долгинов А.З., Силантьев И.А. ЖЭТФ, **58**, 706, 1970; ЖЭТФ, **59**, 865, 1970.
18. Dolginov A.Z., Gnedin Yn N., Silantiev N.A. IQSRT, **10**, 707, 1970.
19. Кузьмина М.Г. Препринт ИПМ АН СССР, № 68, 1976.
20. Кузьмина М.Г. ДАН. **238**, № 2, 1978.
21. Гермогенова Т.А., Коновалов Н.В. Препринт ИПМ АН СССР, № 62, 1978.
22. Домке Х. Астрофизика, **10**, № 1, 1974.
23. Domke H. IQSRT, **15**, 669, 1975, IQSRT, **15**, 681, 1975,
24. Domke H. Astron. Nach. Bd. **298**, H 1, 1977.
25. Домке Х., Иванов В.В. АЖ, **52**, 1034, 1975.
26. Кузьмина М.Г. ДАН. **244**, № 1, 1979.
27. Кузьмина М.Г. Некоторые задачи теории переноса поляризованного излучения. Диссертация, М., 1980.
28. Коновалов Н.В. Асимптотические свойства решений уравнения переноса в неоднородных плоских слоях, Диссертация, М., 1982.

Discrete Transport Model Eigenfunctions

T. A. Germogenova

*Russian Academy of Sciences, Keldysh Institute of Applied Mathematics
Russia 125047, Moscow, Miusskaya sq. 4*

Received October 5, 1995

Accepted May 20, 1996

NUCLEAR SCIENCE AND ENGINEERING: 124, 63-71 (1996)

Abstract – *The analytical representation of eigenfunctions for finite moments method approximations of radiative transport equations is constructed in slab geometry problems. The truncated balance algorithm is used. An angle dependence of discrete eigenfunctions is determined by discrete characteristic equation solutions. It is established that space-dependent factors of discrete eigenfunctions are Pade approximations of the exponential functions and correspond to the original transport problem eigenfunctions. This technique proves to be useful for analyzing solvability and accuracy of finite moment approximations and also for developing computational algorithms. Slowly changing eigenfunctions are included in the regular component of the optically thick slab problem solution. Coarse-mesh algorithms or diffusion approximations at specific boundary conditions can be used to determine these components. Other eigenfunctions determine the singular component of the mesh solution. This component represents the transition regime on coarse meshes with typical oscillations or with a slow decrease in boundary layers. It is strongly different from the singular component of the exact solution.*

I. INTRODUCTION

Usually boundary problems for a transport equation are reduced to differential equation boundary problems of high stiffness by velocity variable discretization. Nodal space approximations are used here to solve optically thick media problems typical for electron transport and thermal radiation transfer. The nodal schemes are oriented to coarse meshes with a size of computing cells Δ highly exceeding radiation mean free paths ($1/\Sigma_t$)

Traditional analyses have been used to obtain the accuracy estimations in the form of $E = O\left[(\Sigma_t \Delta)^n\right]$, where $n \geq 1$, for some nodal schemes of low orders with sufficiently fine meshes. Asymptotic analysis has been used to research coarse-mesh nodal scheme properties and is based on the known statement of a proximity of the inner solution of the transport equation boundary problem to the solution of the corresponding diffusion equation boundary problem inside optically thick scattering-dominated media.

The central point of the asymptotic analysis is to clarify the conditions of the diffusion limit existence at $\Sigma_t \Delta \gg 1$. In other words, the conditions of the

coincidence of the nodal scheme main part of expansion with respect to parameter $1/\Sigma_t$ and a correct mesh approximation to the corresponding diffusion equation boundary problem must be found.

It was established that the known nodal schemes of low orders usually have the diffusion limit in problems for a homogeneous slab with small absorption and isotropic scattering if the boundary conditions are formulated correctly for both the nodal scheme inner solution and the diffusion equation solution.¹⁻³ Moreover, if the order of the obtained diffusion problem approximation is established, then we can estimate the order of the nodal inner solution accuracy and clarify its dependence on a source term smoothness.⁴

However, some difficulties arise in formulating these boundary conditions. If traditional boundary conditions are used, then transition regimes appear in the inner solutions on coarse meshes ($E_t\Delta > 1$) (Ref. 3). Specific oscillations or a slow change in boundary regions do not correspond to the behavior of the exact solution near the boundary surfaces. In addition, the question arises of whether the set of nodal equations is uniquely solvable and whether the iterational processes usually used are converged. Practically, it is also important to estimate the accuracy of nodal solutions (both inner component and boundary-layer ones) and their dependence on scheme parameters.

The approach to the analysis of the nodal schemes proposed in this paper is based on determining the set of discrete eigenfunctions (eigenvectors) of the transport equation mesh approximation. Constructing further the nodal solution analytical representations, we obtain a base of considered scheme theoretical analysis both on fine and coarse meshes. We can also use these representation to correctly formulate corresponding computational algorithms.

At first, we would like to clarify the main ideas and possibilities of this approach. Therefore, we are restricted to comparatively simple steady-state mono-energetic boundary problems for the homogeneous slab with anisotropic scattering in the discrete ordinates angle approximation and use the conservative finite moments method space approximation.

These schemes are based on the generalized moments balance relations in each computational cell for a finite set of first $N+1$ space moments of the solution. The truncated balance equation canceling the moments of the solution of the order $N+1$ is used to close this set of equations.³

This class of finite moments method responds to «continuous moment methods» considered in Ref. 5. It includes such well-known methods as the diamond-difference (DD) scheme and the quadratic continuous (QC) scheme, named in Russian research the linear moments scheme.^{6,7} In this class, the discrete eigenfunction representation is simpler and closer to the exact problem eigenfunction representation.

In Sec. II, the discrete ordinates form of the considered boundary problems is formulated, and the generalized moments balance equation for these problems are presented together with the closing truncated balance equations.

In Sec. III, we obtain analytical formulas for the eigenvectors of this set of equations. The angle dependence is determined by the solutions of the discrete characteristic equation. For the space-dependent factor, we obtain Pade approximations of the exponential functions that correspond to the original transport problem eigenfunctions. This technique is similar to the well-known Case's method of exact transport theory. However, essentially, it is simpler because discrete transport models have the discrete spectrum only.

Some properties of discrete eigenvectors are established, and their accuracy is estimated in Sec. IV. Section V gives numerical examples. Some conclusions are discussed in Sec. VI.

II. EQUATIONS OF THE FINITE MOMENTS TRANSPORT METHOD

We consider the discrete ordinates version of the boundary value problem for a homogeneous slab as an original one:

$$\mu_m \frac{d\Psi_m}{dz} + \Sigma_t \Psi_m(z) = \frac{1}{2} \Sigma_s \sum_{m'} w_{m'} P_{mm'} \Psi_{m'}(z) + Q_m(z), \quad (1)$$

$$0 < z < Z, -1 < \mu_m < 1, m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M,$$

$$\Psi_m(0) = q_m \text{ if } \mu_m > 0, \quad \Psi_m(z) = q_m \text{ if } \mu_m < 0. \quad (2)$$

This problem is written in standard neutronic notation. ¹⁻³We use any symmetric quadrature set $\{\mu_m, w_m; m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M\}$ of even-order $2M$, satisfying

$$1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_M > 0, \quad \mu_{-m} = -\mu_m > 0, \quad w_{-m} = w_m > 0, \\ \sum_{m>0} w_m \mu_m^k = 1/(k+1), \quad k=0, 1, 2, \quad (3)$$

and suppose that this approximation conserves the main properties of an original physical problem:

$$\Sigma_t \geq \Sigma_s > 0, \quad P_{mm'} = P_{m'm} = P_{-m-m'} \geq 0, \quad \sum_{m'} w_{m'} P_{mm'} = 2. \quad (4)$$

A spatial mesh with cells $(z_{j-1/2}, z_{j+1/2})$ for $j=1, 2, \dots, J$ is supposed uniform with cell width $= \Delta = z_{j+1/2} - z_{j-1/2}$, $z_{1/2} = 0$, $z_{j+1/2} = Z$ and $z_j = (z_{j-1/2} + z_{j+1/2})/2 = \text{cell center}$. Also, integer $\pm 1/2$ subscripts refer to cell-edge quantities, and integer subscripts refer to cell-average quantities.

Let $p_{jn}(z)$ be the Legendre polynomial of order n relating to the j 'th cell, and let the values

$$\Psi_{mj}^{(n)} = \frac{2n+1}{\Delta} \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} \Psi_m(z) p_{jn}(z) dz \quad (5)$$

be the function $\Psi_m(z)$ interior moments of order n in this cell, $n=0, 1, \dots, N$. Following Ref. 3, we multiply Eq. (1) by $p_{jn}(z)$ and integrate over the j 'th cell. So, we obtain the generalized moments balance equations

$$\begin{aligned} & \frac{2n+1}{\Sigma_t \Delta} \mu_m \left(\Psi_{mj+1/2} + (-1)^{n-1} \Psi_{mj-1/2} \right. \\ & \left. - 2 \left\{ \Psi_{mj}^{(n-1)} + \Psi_{mj}^{(n-3)} + \dots + \Psi_{mj}^{[\nu(n-1)]} \right\} \right) + \\ & \quad + \Psi_{mj}^{(n)} = S_{mj}^{(n)}, \quad n=0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

where the values $S_{mj}^{(n)}$ are defined by

$$\begin{aligned} S_{mj}^{(n)} &= \frac{\lambda}{2} \sum_{m'} w_{m'} P_{mm'} \Psi_{mj}^{(n)}(z) + Q_{mj}^{(n)} / \Sigma_t, \\ \Psi_{mj}^{(-n)} &= 0, \lambda = \Sigma_s / \Sigma_t, \end{aligned} \quad (7)$$

the values $Q_{mj}^{(n)}$ are defined according to Eq. (5), and $\nu(n) = 0$ if n is even and $\nu(n) = 1$ if n is odd.

We close the set of Eqs. (6) and (7) by the truncated balance conditions: $\Psi_{mj}^{(N+1)} \equiv S_{mj}^{(N+1)} \equiv 0$. The closure equations are

$$\Psi_{mj+1/2} + (-1)^N \Psi_{mj-1/2} = 2 \left\{ \Psi_{mj}^{(N)} + \Psi_{mj}^{(N-2)} + \dots + \Psi_{mj}^{[\nu(N)]} \right\}. \quad (8)$$

Further, we will show that the set of Eqs. (6), (7), and (8) allows one to find all the unknown values

$\Psi_{mj+1/2}$ if $\mu_m > 0$ $_{1/2}$ if $\mu_m > 0$ (or $\Psi_{mj-1/2}$ if $\mu_m < 0$), $m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$, under the boundary conditions.

$$\Psi_{m1/2} = q_m \text{ if } m = 1, 2, \dots, M$$

and

$$\Psi_{mJ+1/2} = q_m \text{ if } m = -1, -2, \dots, -M. \quad (9)$$

Note that the Eq. (8) gives the linear diamond relations for the scalar fluxes if $N=0$ and gives the linear approximation for the first space moments $\Psi_{mj}^{(1)}$ if $N=1$. So, we obtain from Eqs. (6), (7), and (8) the equations of the DD and the QC schemes, correspondingly.

III. EIGENFUNCTIONS OF FINITE MOMENTS METHOD EQUATIONS

To find the discrete eigenfunction (eigenvector) Φ of the set of Eqs. (6), (7), and (8), i.e., values $\Phi_{mj+1/2}$ and $\Phi_{mj}^{(n)}$ ($m = +1, +2, \dots, \pm M$, $j = 0, 1, \dots, J$, $n = 0, 1, \dots, N$), satisfying the homogeneous Eqs. (6), (7), and (8) with $Q_{mj}^{(n)} \equiv 0$, we assume $\Phi_{mj-1/2} = f_{j-1/2\varphi m}$ in the j 'th cell and search for the solution of this cell in the following factorized form:

$$\Phi_{mj+1/2} = \rho f_{j-1/2\varphi m}, \quad \Phi_{mj}^{(n)} = \rho_n f_{j-1/2\varphi m}, \quad n=0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

where the quantities $\rho, \rho_0, \dots, \rho_N$ and φ_m are the new unknowns in the j 'th cell. Using Eqs. (6), (7), and (8), we obtain the following relations:

$$\left(\frac{2n+1}{\Sigma_t \Delta} \mu_m \left\{ \rho + (-1)^{n-1} - 2 \left[\rho_{n-1} + \rho_{n-3} + \dots + \rho_{v(n-1)} \right] \right\} / \rho_n + 1 \right) \varphi_m = \frac{\lambda}{2} \sum_{m'} w_{m'} P_{mm' \varphi m'}, \quad n=0,1,\dots,N, \quad \rho_{-n} = 0 \quad (11)$$

and

$$\rho + (-1)^N = 2 \left[\rho_N + \rho_{N-2} + \dots + \rho_{v(N)} \right] \quad (12)$$

By setting

$$k = -(2n+1) \left\{ \rho + (-1)^{n-1} - 2 \left[\rho_{n-1} + \rho_{n-3} + \dots + \rho_{v(n-1)} \right] \right\} / (\rho_n \Sigma_t \Delta), \quad (13)$$

we reduce Eq. (11) to the form

$$(1 - k \mu_m) \varphi_m = \frac{\lambda}{2} \sum_{m'} w_{m'} P_{mm' \varphi m'} \quad (14)$$

for each $n=0,1,\dots,N$. It follows from here that the value of the unknown number k does not depend on n and j being an eigenvalue of the homogeneous set of linear equations and that the vector Φ with components $\varphi_m, m=1,2,\dots,M,-M,\dots,-1$ is its eigenvector. These equation represent the discrete ordinates approximation to the well-known characteristic equation.⁸⁻⁹ We call the set of Eq. (14) a discrete characteristic equation.

Note some properties of the Eq. (14) eigenvalues and eigenvectors:

1. All the eigenvalues, $k^{[i]}, i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$, are real, they are disposed on the interval $(-1/\mu_M, 1/\mu_M)$, and the following estimations are correct:

$$1 - \lambda \leq k^{[1]} < k^{[2]} \leq k^{[3]} \leq \dots \leq k^{[M]} < 1/\mu_M;$$

$$k^{[-i]} = -k^{[i]} \quad \text{if } i = 1, 2, \dots, M;$$

$$k^{[1]} = k^{[-1]} = 0 \quad \text{if } \lambda = 1;$$

the eigenvalue $k^{[i]}$ are simple if $0 < |k^{[i]}| < 1$.

2. Let $\Phi^{[i]}$ be the eigenvector with components $\varphi_m^{[i]}$, responding to the eigenvalue $k^{[i]}$. Then components $\varphi_m^{[-i]}$ of an eigenvector $\Phi^{[-i]}$ are equal to $\varphi_{-m}^{[i]}$; eigenvectors $\Phi^{[i]}$ and $\Phi^{[j]}$ for $k^{[i]} \neq k^{[j]}$ are orthogonal with the weight $w_m \mu_m$:

$$\sum_m w_m \mu_m \varphi_m^{[i]} \varphi_m^{[j]} = 0 \quad \text{if } k^{[i]} \neq k^{[j]};$$

and

$$k^{[i]} \sum_m w_m \mu_m (\varphi_m^{[i]})^2 > 0 \quad \text{if } k^{[i]} \neq 0.$$

3. The set of eigenvectors $\Phi^{[i]}$ is full in the vector space R_{2M} if $\lambda < 1$. In the case $\lambda = 1$ vector, $\Phi^{[1]}$ with components $\varphi_m^{[1]} \equiv \text{const}$ responds to the double-zero eigenvalue $k^{[\pm 1]}$, and the set of eigenvectors has to be added by the vector $\Phi^{[-1]}$ with components $\varphi_m^{[-1]} = \mu_m$. Then the set of vectors $\Phi^{[\pm i]}, i = 1, 2, \dots, M$ will be full in R_{2M} .

4. If the scattering function is isotropic, then $\varphi_m^{[i]} = \text{const} / (1 - k^{[i]} \mu_m)$ and the values $k^{[i]}$ are the roots of the algebraic characteristic equation

$$\lambda \sum_{m>0} w_m / \left[1 - \left(k^{[i]} \mu_m \right)^2 \right] = 1. \quad (15)$$

All these roots are simple, excluding the double root $k^{[\pm 1]} = 0$ in the case $\lambda = 1$. The following estimations are correct:

$$1 - \lambda \leq k^{[1]} < 1 / \mu_1, \quad 1 / \mu_{m-1} < k^{[m]} < 1 / \mu_m, \quad m=2,3,\dots,M.$$

The aforementioned results are proved in a way similar to the one used in the exact characteristic equation theory.⁸⁻¹⁰

It is well known that the values $\varphi_m^{[i]}$ and $k^{[i]}$ determine the eigenfunctions of the original Eq. (1). If the eigenvalue $k^{[i]}$ is simple, then for $i>0$,

$$\Phi_m^{[i]}(z) = e^{-k^{[i]}\tau} \varphi_m^{[i]}, \quad \Phi_m^{[-i]}(z) = e^{-k^{[i]}(\tau^* - \tau)} \varphi_m^{[-i]}, \quad \tau = \sum_t z. \quad (16)$$

In the case $\lambda = 1$ eigenfunctions,

$$\Phi_m^{[1]}(z) \equiv 1 \text{ and } \Phi_m^{[-1]}(z) = \tau - \mu_m / (1 - \omega_1) \quad (17)$$

correspond to the double root $k^{[\pm 1]} = 0$, if for all m the following condition is realized:

$$\frac{1}{2} \sum_{m'} w_{m'} \mu_{m'} P_{mm'} = \omega_1 \mu_m, \quad |\omega_1| < 1.$$

To simplify the presentation, we consider further only those problems with anisotropic scattering where all the nonzero roots are simple.

Going over to the values ρ and ρ_n determination, we use the following equation implied from Eqs. (11) and (13) for each $k = k^{[i]}$:

$$\rho + (-1)^N = 2 \left[\rho_N + \rho_{N-2} + \dots + \rho_{v(N)} \right]$$

and

$$\rho + (-1)^{n-1} = 2 \left[\rho_{n-1} + \rho_{n-3} + \dots + \rho_{v(n-1)} \right] - \frac{2\eta}{2n+1} \rho_n, \quad (18)$$

where $\eta = k \sum_t \Delta / 2$, $n = 0, 1, \dots, N$. At first, excluding ρ and taking into account the relation (13), we reduce Eqs. (18) to the three-point equation:

$$\rho_{n-1} = \eta \left[\rho_n / (2n+1) - \rho_{n-2} / (2n-3) \right], \quad n = 2, 3, \dots, N. \quad (19)$$

Setting $n=0$ and $n=1$ in Eqs. (18), we obtain one more equation containing ρ_0 and ρ_1 :

$$-\eta\rho_1 / 3 + (1 + \eta)\rho_0 = 1. \tag{20}$$

Taking into account the equality $\rho_{N+1} = 0$, we find

$$\rho_N = -\rho_{N-1}\eta / (2N - 1),$$

and setting $\rho_n = X_n\rho_{n-1}$, we obtain the recursion relations

$$X_{n-1} = \frac{-\eta}{(2n - 3)\left[1 - X_n\eta / (2n + 1)\right]}$$

and

$$X_N = \frac{\eta}{2N - 1}. \tag{21}$$

They allow one to find all the values X_n and ρ_n , $n=N, N-1, \dots, 1$. Using Eq. (20), we obtain

$$\rho_0 = \frac{1}{(1 + \eta) - X_1\eta / 3},$$

$$\rho_1 = \frac{X_1}{(1 + \eta) - X_1\eta / 3},$$

and

$$\rho = 1 - 2\eta\rho_0, \tag{22}$$

and we further find the continued fraction expression for ρ :

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \frac{2\eta}{1 + \eta - \frac{\eta}{3}X_1} = 1 - \frac{2\eta}{1 + \eta + \frac{\eta^2}{3\left(1 - \frac{\eta}{5}X_2\right)}} \\ &= 1 - \frac{2\eta}{1 + \eta + \frac{\eta^2}{3 + \frac{\eta^2}{5 + \dots}}} \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{2N - 3 + \frac{\eta^2}{2N - 1 + \frac{\eta^2}{2N + 1}}}, \end{aligned}$$

or with the conventional notations, ^{11,12}

$$\rho = 1 - \frac{2\eta}{1+\eta} + \frac{\eta^2}{3} + \dots + \frac{\eta^2}{2N+1}. \quad (23)$$

This formula corresponds to the Pade approximation $\rho = P_{N+1}(\eta)/Q_{N+1}(\eta)$ of the exponential function $e^{-2\eta}$, which describes a decrease on the step Δ of the i 'th eigenfunction [Eq. (16)] of the original problem in Eqs. (1) and (2). Here, P_{N+1} (Refs. 11, 12, and 13).

In accordance with Eq. (22), we obtain the following relations:

$$\rho_0 = \frac{1-\rho}{2\eta} = \frac{1}{1+\eta} + \frac{\eta^2}{3} + \dots + \frac{\eta^2}{2N+1}, \quad \rho_n = X_n X_{n-1} \dots X_1 \rho_0. \quad (24)$$

Thus, the solution of Eqs. (11) and (12) is constructed for each $k = k^{[i]}$. Its uniqueness follows from the fact that the corresponding homogeneous set of equations with Eq. (20) being changed by the equation

$$\eta \rho_1 = 3(1 + \eta^{-1}) \rho_0$$

has only the zero solution. Actually, otherwise, the relation

$$X_1 = 3(1 + \eta^{-1}) > 0$$

must be valid if $\eta > 0$. However, using Eq. (21), we see that all values X_n are negative if $\eta > 0$.

So, we have for each $k = k^{[i]}$ in the DD scheme the following:

$$\rho_1 = X_1 = 0, \quad \rho_0 = 1/(1 + \eta),$$

and

$$\rho = 1 - 2\eta / (1 + \eta) = (1 - k\Sigma_t \Delta / 2) / (1 + k\Sigma_t \Delta / 2), \quad (25)$$

and we have in the QC scheme the following:

$$X_1 = -\eta, \quad \rho_1 = -\eta / D, \quad \rho_0 = 1 / D,$$

and

$$\rho = (1 - \eta + \eta^2 / 3) / D, \quad D = 1 + \eta + \eta^2 / 3. \quad (26)$$

If we know the values $k^{[i]}$, $\varphi_m^{[i]}$, $\rho^{[i]}$, and $\rho_n^{[i]}$ for each $i = \pm 1, \dots, \pm M$, we can find all the components of the discrete eigenfunctions (eigenvectors) $\Phi^{[i]}$ of Eqs. (6), (7), and (8) in the case $\lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{mj+1/2}^{[i]} &= \left(\rho^{[i]}\right)^j \varphi_m^{[i]}, \\ \Phi_{mj}^{[i(n)]} &= \rho_n^{[i]} \left(\rho^{[i]}\right)^{j-1} \varphi_m^{[i]}, \\ \Phi_{mj+1/2}^{[-i]} &= \left(\rho^{[-i]}\right)^{-J+j} \varphi_m^{[-i]}, \end{aligned}$$

and

$$\Phi_{mj}^{[-i(n)]} = \rho_n^{[-i]} \left(\rho^{[-i]}\right)^{-J+j-1} \varphi_m^{[-i]}, \quad (27)$$

where $i=1,2,\dots,M$. The normalization of these variables provides the following relations to be fulfilled:

$$\Phi_{m1/2}^{[i]} = \varphi_m^{[i]}, \quad \Phi_{mj+1/2}^{[-i]} = \varphi_m^{[-i]}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (28)$$

If $\lambda = 1$, then the set of eigenvectors with the Eqs. (27) components corresponding to $k^{[i]} \neq 0$ must be added by two eigenvectors responding to the Eqs. (17) eigenfunctions.

As in the exact theory (see Ref. 8), the completeness of the set of vectors $\Phi^{[i]}$, $i > 0$ on the semi-interval (0,1) is established, and the set of biorthogonal vectors $u^{[i]}$ may be constructed. Consequently, both source terms $Q_{mj}^{(n)}$ and boundary sources q_m are presented by sums of the eigenvector $\Phi^{[i]}$. Therefore, the inhomogeneous problem of Eqs. (6) through (9) is reduced to the set of eigenspace problems. The substitution of Eqs. (10) for the unknown values $\Psi_{mj+1/2}$ and $\Psi_{mj}^{(n)}$ gives in this case the inhomogeneous Eq. (11). Taking into account relations (12), (13), and (14), we get the set of inhomogeneous three-point equations similar to Eqs. (18). Using further the substitution $\rho_n = X_n \rho_{n-1} + Y_n$, we obtain the same recursion relations (21) for X_n and the similar inhomogeneous recursion relations for Y_n .

As the final result, the solution of the inhomogeneous discrete problem in Eqs. (6) through (9) is expressed uniquely by the sum of eigenvectors $\Phi^{[i]}$ with coefficients depending on sources $Q_{mj}^{(n)}$ and q_m .

IV. DISCRETE EIGENFUNCTIONS ACCURACY

As is obvious from the earlier discussion, the finite moments approximation accuracy is determined by the proximity of the Eq. (23) Pade approximation to the exponential function $e^{-2\eta}$ for different values $2\eta = k^{[i]} \Sigma_i \Delta$.

At first, note that for all $\eta > 0$, the followings estimations are correct:

$$0 < -X_n < \eta / (2n - 1) \quad \text{if } n=N, N-1, \dots, 1. \quad (29)$$

Using Eq. (22), we get

$$0 < \rho < 1, \quad -1 < \rho = \frac{1 - \eta - \eta / 3X_1}{1 + \eta - \eta / 3X_1} < 1, \quad (30)$$

$$\rho_n = (-1)^n |\rho_n|, \quad |\rho_n| \leq c_n \eta^n \rho_0 < 1, \quad (31)$$

where $n=1,2,\dots,N$ and c_n are positive numerical factors.

Therefore, the relations

$$\left[k^{[i]} \right] = O\left(1 / \min |\mu_m|\right) \text{ and } \rho_n = O\left(\eta^n\right) \text{ if } \eta \rightarrow 0 \quad (32)$$

follow from Eqs. (21) and (22). These general estimations are consistent with the similar ones for the exact exponential $e^{-2\eta}$.

Using the Eq. (23) expression and using the continuous fraction theory^{11,12} as a basis, we can establish the estimation

$$e^{-2\eta} - \rho = O(\eta^{2N+3}) \quad \text{if } \eta \rightarrow 0. \quad (33)$$

However, the accuracy of the moments ρ_n , $n \geq 0$, is not so high: It is determined by the values of the order $O(\eta^{2N+2-n})$. Correspondingly, the Eqs. (27) eigenvector component accuracy is estimated by values of the order

$$O(J \cdot \eta^{2N+3}) \text{ for } \Phi_{mj+1/2} \quad (34)$$

and

$$O(J \cdot \eta^{2N+3} + \eta^{2N+2-n}) \text{ for } \Phi_{mj}^{(n)}, \quad N=0,1,\dots,N \quad (35)$$

if $\eta \rightarrow 0$. We can further obtain the estimation accuracy of the discrete problem Eqs. (6) through (9) solution using its presentation in terms of eigenfunctions. These estimations are consistent with the known ones established for $N=0$, $N=1$, and $N=2$ for an optically thin slab under conditions $\eta = O(\Delta)$ and $J = O(1/\Delta)$ (Refs. 7 and 14, 15, and 16).

We come now to the opposite case $\eta \geq 1$, typical for an optically, thick slab. In addition to the general estimations (29), (30), and (31), the following estimation is correct:

$$X_{n-1} = (1 + 1/\eta)O(1/X_n) \quad \text{if } \eta \rightarrow \infty. \quad (36)$$

So, for even N ($N=2L$), we have $X_{2I+1} = O(1/\eta)$ and $X_{2I} = O(-\eta)$, and consequently, the moments ρ_n are small:

$$\rho_{2I} = O(1/\eta), \quad \rho_{2I+1} = O(1/\eta^2) \quad \text{if } I=0,1,\dots,L. \quad (37)$$

Nevertheless, the coefficient ρ proves to be negative:

$$\rho = 1 - 2\eta / (1 + \eta - X_1\eta/3) = -1 + O(1/\eta). \quad (38)$$

Then the cell-edge components $\Phi_{mj+1/2}^i$ [and after them, cell-averaged components $\Phi_{mj}^{(n)}$] are the oscillating functions of the space variable.

For odd N ($N = 2L + 1$), the estimations

$$X_{2I+1} = O(\eta), \quad X_{2I} = O(1/\eta) \quad \text{if } \eta \rightarrow \infty$$

are obtained from relations (21). Thus, we have

$$\rho_{2I} = O(1/\eta^2), \quad \rho_{2I+1} = O(1/\eta), \quad \rho = 1 - O(1/\eta), \quad (39)$$

if $I = 0, 1, \dots, L$

and space oscillations do not appear. Nevertheless, the change of the components $\Phi_{mj+1/2}^{[\pm i]}$ can be very slow in the boundary layers. Their relative changes

$$\left(\Phi_{mj+1/2}^{[i]} - \Phi_{mj-1/2}^{[i]} \right) / \Phi_{mj-1/2}^{[i]} = \rho^{[i]} - 1$$

and

$$\left(\Phi_{mj+1}^{[i](n)} - \Phi_{mj}^{[i](n)} \right) / \Phi_{mj}^{[i](n)} = \rho^{[i]} - 1 \quad (40)$$

do not correspond to the exponential behavior of the exact eigenfunctions [Eqs. (16)]. These components specify the boundary-layer peculiarities of a given mesh approximation.

Let us consider the Eqs. (1) and (2) problem for optically thick media ($\tau^* = \Sigma_t Z \gg 1$) and let $\varepsilon = 1 / \tau^*$ be a small parameter. The first eigenvalue $k^{[1]}$ of the characteristic equation is small in problems with small absorption if $1 - \lambda \leq O(\varepsilon^2)$ (Ref. 8):

$$k^{[1]} \cong [3(1 - \lambda)]^{1/2} \leq O(\varepsilon). \quad (41)$$

Other positive eigenvalues $k^{[i]}$ are larger than unity if the scattering function is near to the isotropic one. In this case, the relative changes of the vector $\Phi^{[\pm 1]}$ components at small step Δ are determined by the ρ and ρ_n values at small $|\eta| = O(\Delta / Z)$. They are small and close to the relative changes of the original Eq. (1) eigenfunctions [Eqs. (16)]. In the case $\varepsilon \ll \Delta$, relative changes of the remaining eigenvector $\Phi^{[\pm i]}$ components are determined by the ρ values at large $|\eta| \geq O(\Delta_\tau)$, where $\Delta_\tau = \Sigma_t \Delta = \Delta / (\varepsilon Z)$.

Thus, we have reason to name eigenvectors $\Phi^{[\pm 1]}$ the regular eigenvectors, as in the exact transport theory. We consider all the remaining ones as singular eigenvectors in optically thick scattering-dominated media. Number $k^{[1]}$ rises rapidly and approaches unity if absorption increases. Therefore, the $\Phi^{[\pm 1]}$ vectors become singular in high-absorption media.

The general solution of the Eqs. (1) and (2) problem can be represented as follows:

$$\Psi_m = \psi_m [Q] + \sum_i C_i \Phi_m^{[i]}, \quad (42)$$

where

$\Phi_m^{[i]}$ = Eqs. (16) eigenfunctions

C_i = constant determined by the boundary conditions

$\psi_m [Q]$ = particular solution to the inhomogeneous Eq. (1) that is smooth at the smooth source Q .

Then the regular component for scattering-dominated media is presented by the sum

$$\Psi^{reg} = \psi_m [Q] + C_1 \Phi_m^1 + C_{-1} \Phi_m^{-1}. \quad (43)$$

The function $\psi_m [Q]$ can be found in a coarse-mesh low approximation of the finite moments method or in asymptotic approximations^{17,18} at simple boundary conditions that provide its smoothness. The coefficients C_1 and C_{-1}

determination needs the knowledge of the first biorthogonal function $u_m^{[1]}$ to exclude the appearance of the singular components in Ψ^{reg} . In the isotropic case, $u_m^{[1]}$ is the well-known H_m function introduced by Chandrasekhar.⁹

The computation of the singular components of the solution

$$\Psi_m^{sing+} = \sum_{i>1} C_i \Phi_m^{[i]}$$

and

$$\Psi_m^{sing-} = \sum_{i>1} C_{-i} \Phi_m^{[-i]}, \quad (44)$$

which are essential in the boundary layers only, needs to use more accurate approximations for the correct description of the rapidly decreasing Eqs. (16) exponential functions at $|i| > 1$. As is known,^{11,12} the increase of N allows the significant improvement of the approximation of the exponential function by the Eq. (23) continued fraction for large values of the exponent and the correct description of the functions $\Phi^{[\pm 1]}$ in the boundary layers.

V. NUMERICAL EXAMPLES

We consider the slab geometry transport problem proposed by Badruzzaman in Ref. 3 to illustrate the theory developed earlier. This problem is defined by Eq. (1) for a 10-cm-wide slab with isotropic scattering, $\Sigma_t = 100 \text{ cm}^{-1}$, $\lambda = \Sigma_s / \Sigma_t = 0.95$, $q_m \equiv 0$, and a uniform source distribution $Q_m \equiv 1$. The slab is optically thick, $\tau^* = 1000$, and $\epsilon = 1 / \tau^* = 10^{-3}$. This slab is evidently scattering dominated. However, it is not a diffusive one in the usual meaning because the condition $1 - \lambda = O(\epsilon^2)$ is not realized: $1 - \lambda = 5 \times 10^{-2} \gg \epsilon^2 = 10^{-6}$.

Using a simple algorithm developed for problems with an «essential absorption»,¹⁸ we easily find in this case the following expression for the problems (1) and (2) solution regular component:

$$\Psi^{reg}(z) = Q / [(1 - \lambda)\Sigma_t] = 0.2. \quad (45)$$

The singular component $\Psi_m^{sing}(z)$ must satisfy the homogeneous Eq. (1) under the boundary conditions

$$\Psi_m^{sing}(0) = \Psi_{-m}^{sing}(z) = q = -0.2, \quad m > 0. \quad (46)$$

We are restricted here to the S_4 approximation with Gaussian sums and $\mu_{\pm 1} = \pm 0.33998$, $\mu_{\pm 2} = \pm 0.86114$, $w_{\pm 1} = 0.65215$, and $w_{\pm 2} = 0.34785$. Eigenvalues $k^{[i]}$ are the roots of Eq. (15) transformable to the biquadratic equation, and $k^{[1]} = 0.37950$ and $k^{[2]} = 2.01256$ if $\lambda = 0.95$. The exact eigenfunctions of this Problem 1 are determined by the Eq. (16) formulas and

$$\Psi_m^{\text{sing}\pm}(z) = C_{\pm 1} \Phi_m^{[\pm 1]}(z) + C_{\pm 2} \Phi_m^{[\pm 2]}(z), \quad (47)$$

where the coefficients $C_{\pm 1}$ and $C_{\pm 2}$ are determined by the Eq. (46) conditions: $C_1 = C_{-1} = -0.14452$ and $C_2 = C_{-2} = -0.010759$.

Setting $\Delta = 0.1$ as in Ref. 3, we consider the low approximations, corresponding to $N=0$ and $N=1$.

In our case, the regular component of the discretized Eqs. (6) through (9) problem is equal to the exact one, Eq. (45), and the accuracy of these approximations is determined by the accuracy of singular eigenvectors with the Eqs. (27) components. We have $\eta_i = 5k^{[i]}$ and $i=1,2$, and the cell-edge components are

$$\Phi_{mj+1/2}^{[i]} = (-1)^j \left(\frac{1 - 0.2/k^{[i]}}{1 + 0.2/k^{[i]}} \right)^j \varphi_m^{[i]} \quad (48)$$

in the DD scheme and

$$\Phi_{mj+1/2}^{[i]} = \left[1 - \frac{1.2/k^{[i]}}{1 + 0.6/k^{[i]} + 0.12/(k^{[i]})^2} \right]^j \varphi_m^{[i]} \quad (49)$$

in the QC scheme, where $\varphi^{[i]} = 1 / (1 - k^{[i]}\eta_m)$.

Corresponding cell-edge scalar flux singular components of the exact solution and the DD and QC solutions with respect to the value Ψ^{reg} are shown in Fig. 1.

These results explain the peculiarities of the coarse-mesh solutions inside the regions close to the boundary surfaces: the typical oscillations in the DD scheme and the slow decrease in the QC scheme. We see that these regions are essentially larger than the boundary layers of the exact problem. Cell-averaged values $\Phi_{mj}^{[i](0)}$

contain smoothing factors $\rho_0^{[i]} = 1 / (1 + 5k^{[i]})$ in the DD scheme and

$\rho_0^{[i]} = 1 / \left[1 + 5k^{[i]} + (5k^{[i]})^2 / 3 \right]$ in the QC scheme, and these effects appear not

so strongly.

As the second example, consider the same problem in the conservative case ($\lambda = 1$). Taking into account the Eqs. (4) conditions, we can easily verify that the polynomial

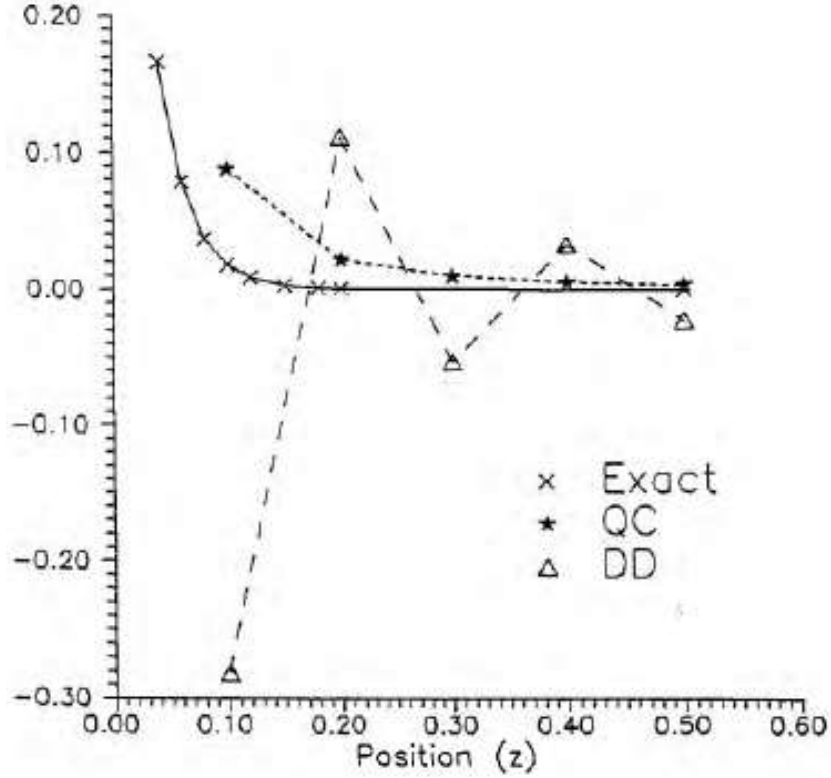


Fig. 1. Problem 1: exact, DD, and QC cell-edge singular component scalar fluxes with respect to the regular component.

$$\Psi_m(z) = \frac{3}{2}Q \left[z(Z-z)\Sigma_t - \mu_m(Z-2z) - \frac{4}{3}P_2(\mu_m)/\Sigma_t \right] \quad (50)$$

is the particular (smooth) solution of Eq. (1) if $\Sigma_s = \Sigma_t$ and $Q = \text{const}$. Therefore, the difference $F_m(z) = \Psi_m(z) - \psi_m(z)$ must satisfy to the homogeneous Eq. (1) under the Eq. (2) boundary conditions with

$$q_m = \frac{3}{2}Q \left[\mu_m Z + \frac{4}{3}P_2(\mu_m)/\Sigma_t \right] = q_{-m} \quad \text{for all } m > 0. \quad (51)$$

We have in this problem $k^{[\pm 1]} = 0$, and the first exact eigenfunctions $\Phi^{[\pm 1]}(z)$ are regular. They may be written in the Eqs. (17) form. From Eq. (15), we obtain $k^{[\pm 2]} = 1.97203$ and the eigenfunctions $\Phi^{[\pm 2]}(z)$ have the Eqs. (16) form. Further using the Eq. (51) boundary values, we find

$$\Psi_m^{reg}(z) = \psi_m(z) + C_1 \tau^* \quad (52)$$

and

$$\Psi_m^{reg}(z) = C_2 \left[\Phi_m^{[2]}(z) + \Phi^{[-2]}(z) \right], \quad (53)$$

where $C_1 = 0.010417$ and $C_2 = -1.75437$.

Cell-edge and -averaged values of the Eq. (52) regular component are approximated with the error $O(\Delta^2)$ in the DD scheme and are presented exactly

in the QC scheme. However, the Eqs. (27), (48), and (49) singular component approximations generate peculiarities in the boundary regions.

Certainly, the S_4 angle approximation is rough. Using the better ones, S_8 or S_{16} , we improve the angle approximation, but at the same time, the possibilities increase of the appearance of strongly oscillating or slowly decreasing eigenfunctions in numerical solutions because $\max [k^{[i]}] = O(1/\min|\mu_m|)$. To avoid this danger, one must diminish the space step or increase the order N of the space approximation. Numerical estimations of the Eq. (23) Pade approximation accuracy show that increasing the order N is essentially more effective.¹¹

VI. CONCLUSIONS

In this paper, the discrete eigenfunction approach was developed to investigate finite moments transport approximations.

We found simple expressions for eigenfunctions of generalized truncated balance schemes. This technique proved to be useful in both analyzing solvability and accuracy of finite moments approximations and developing computational algorithms.

Singular eigenfunctions appeared in coarse-mesh approximations for optically thick media. They generated large boundary regions and essentially distorted exact solution behavior. It seems that developing specialized numerical algorithms for the inner solution and the boundary-layer parts might be useful.

The eigenfunction construction in other versions of the finite moments method proves to be more complicated. Some results for low- N approximations were established in Ref. 19. The development of similar techniques in more complicated problems for heterogeneous slabs in problems with high-scattering anisotropy and further application of these techniques to many-dimensional problems seems to be within reach.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the Russian Fundamental Research Foundation under grant 95-01-01194a.

REFERENCES

1. E. W. LARSEN, J. E. MOREL, and W. F. MILLER, «Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes», *J. Comput. Phys.*, 69, 283 (1987).
2. E. W. LARSEN and J. E. MOREL, «Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes II», *J. Comput. Phys.*, 83, 212 (1989).
3. A. BADRUZZAMAN, «Asymptotic Analysis of the Finite Moments Transport Method in Optically Thick Media», *Nucl. Sci. Eng.*, 112, 321 (1992).

4. T. A. GERMOGENOVA and O. V. NICOLAEVA, «Asymptotic Limits of Some Coarse Mesh Nodal Approximations to Radiation Transport Equations», *J. Numer. Math. Math. Phys.* (to be published) (in Russian).
5. J. P. HENNART and E. DEL VALLE, «A Generalized Nodal Finite Element Formalism for Discrete Ordinates Equations in Slab Geometry. Part 1: Theory in the Continuous Moments Case», *Transp. Theory Stat. Phys.*, 24, 449 (1995).
6. L. P. BASS, T. A. GERMOGENOVA, and A. M. VOLOSCHENKO, *Methods of Discrete Ordinates in Radiation Transport Problems*, Keldysh Institute of Applied Mathematics, USSR Academy of Sciences, Moscow (1986) (in Russian).
7. T. A. GERMOGENOVA, A. V. SHWETSOV, and A. M. VOLOSCHENKO, «Adaptive Positive Nodal Method for Transport Equations», *Transp. Theory Stat. Phys.*, 23, 923 (1994).
8. K. CASE and P. ZWEIFEL, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1967).
9. S. CHANDRASEKHAR, *Radiative Transfer*, Clarendon Press, Oxford (1950).
10. T. A. GERMOGENOVA, «Discrete Spectrum of the Transport Theory Characteristic Equation», *J. Numer. Math. Math. Phys.*, 14, 1526 (1974) (in Russian).
11. A. N. KHOVANSKII, *Applications of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory*, GITTL, Moscow (1956) (in Russian).
12. W. B. JONES and W. I. THORN, «Continued Fractions: Analytic Theory and Applications», *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, G. C. ROTA, Ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1980).
13. G. A. BAKER and P. GRAVES-MORRIS, «Pade Approximations», *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, Vol. 13, G. C. ROTA, Ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1981).
14. E. W. LARSEN and P. NELSON, «Finite-Difference Approximation and Superconvergence for the Discrete Ordinates Equations in Slab Geometry», *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, 334 (1982).
15. H. D. VICTORY and K. GANGULY, «On Finite-Difference Methods for Solving Discrete-Ordinates Transport Equations», *SIAM J. Numer. Anal.*, 23, 78 (1986).
16. T. A. GERMOGENOVA, *Local Properties of the Transport Equation Solutions*, Nauka, Moscow (1986) (in Russian).
17. E. W. LARSEN, J. E. MOREL, and J. M. MCGHEE, «Asymptotic Derivation of the Simplified P_N -Equations», *Proc. Int. Conf. Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications*, Karlsruhe, Germany, April 19-23, 1993, p. 718.

18. T. A. GERMOGENOVA, «Asymptotic Expansions of the Transport Equations Solutions in Optically Thick Media», Proc. 8th Int. Conf. Radiation Shielding, Arlington, Texas, April 24-28, 1994, Vol. 1, p. 564, American Nuclear Society (1994).
19. S. JIN and D. LEVERMORE, «The Discrete Ordinates Method in Diffusive Regimes», Transp. Theory Stat. Phys., 20, 413 (1991).

ALGORITHMS TO CALCULATION OF RADIATIVE FIELDS FROM
LOCALIZED SOURCES VIA THE CODE RADUGA-5.1(P)

*O.V.Nikolaeva*¹, *L.P.Bass*¹, *T.A.Germogenova*¹, *V.S.Kuznetsov*²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences
Miusskaya Sq. 4, 125047 Moscow, Russia

²Russian Research Center "Kurchatov Institute", Kurchatov Sq. 1,
123182 Moscow, Russia

Abstract

Grid algorithms developed for parallel code RADUGA-5.1(P) to calculate by discrete ordinate method radiation fields from sources, localized in 3D spatial regions, are outlined. Computation results confirming high calculation accuracy guaranteed by the algorithms are presented.

Key words: transport equation, numerical methods, localized sources.

Introduction

In problems of mathematical physics radiation fields formed by sources occupying a very small part of considered spatial region or/and sources irradiating only inside a small interval of directions are often have to be simulated. In particular, solar radiation in atmospheric optic problems is usually modelled by *monodirectional beam* of particles. A laser beam of small aperture in biomedical problems can be also represented by a *point source* irradiating either in a single direction or in some narrow interval of directions. In radiation shielding problems a reactor core can be often simulated by *uniformly radiating source* of cylindrical shape. All mentioned sources are known as localized.

Localized sources are usually approximated by Dirac's delta-function. However, there are no classic solutions for transport problems with delta-sources and so generalized solutions (distributions) should be sought by means of special techniques. For transport problems with non re-entrant boundary conditions the generalized solutions have been found by means of Fourier transformations (Rybicki G.B., 1971), (Siewert C.E., 1985), (Ganapol B.D. et. al., 1994) and by means of Green's functions (Sanchez R., 2000). Solutions of problems with delta-sources have been considered as limit of sequence of solutions to problems with sources of small phase volumes under diminishing these volumes (Morel J.E, 2004). We seek the generalized solutions for transport problems with sufficiently universal delta-sources under arbitrary boundary conditions with the help of generalized functions techniques (Gelfand I.M., 1968), (Vladimirov V.S., 1979), (Germogenova T.A., 1969).

In some situations spatial distribution of radiation source cannot be neglected. If this source is neither mono-directional nor quasi-mono-directional, it can be presented by piece-wise smooth function nontrivial only inside some phase subspace of non-zero measure. In this case usual classic solutions of transport problems can be found.

The required solutions (both generalized and classic) are usually decomposed into a sum, where k^{th} term corresponds to particles that have undergone exactly k collision events. It should be stressed that both un-collided and first-collided radiation are defined by rapidly varying functions, especially in the vicinity of sources localization. Therefore one needs to develop numerical algorithms, taking into account the features of these functions. Rapidly varying components are difficult to be approximated by the discrete ordinate method¹⁾, and there exist two basic methods to overcome these difficulties. The first one consists in refinement of spatial and angular grids. Successive grid refining allows to calculate the desired radiation components with sufficiently high accuracy (see, for example, Aussourd Ch., 2003). However this approach has two disadvantages: it is very expensive and may lead to instabilities.

The second approach consists in calculation of rapidly varying components of solution analytically or semi-analytically. The regular components of solution can be calculated using proper grid schemes.

A good computational codes, including special algorithms for analytical or semi-analytical calculation of singular components of radiation fields generated by all localized sources being considered, have been developed. Similar algorithms were incorporated into the widely-known codes SHDOM (Evans K.F., 1998), TORT (Rhoades W.A., 1995 and Oak Ridge, 1998), PARTISN (Alcouffe R.E., 2000), CNCSN (Voloschenko A.M., 2005) and others. Point sources of great aperture and mono-directional beam are under consideration in the code CNCSN. The code SHDOM developed for atmospheric optic problems deals with mono-directional beam. Radiation fields from a point source localized in the axis or from a ring source localized off the axis in an axially-symmetrical cylinder can be calculated by the code TORT. The code PARTISN permits to simulate radiation transfer from arbitrary source distribution (volume and external boundary).

Each of similar algorithms is defined by

- ✓ integer parameter K that is the highest order of solution component being found analytically,
- ✓ method to present dependence of functions (both solution and collision integral) on directions,
- ✓ method to project functions onto a spatial grid.

As a rule value K is assumed to be equal to zero, i.e. only un-collided radiation component is being sought analytically (codes CNCSN, SHDOM, PARTISN, TORT). First-collided radiation component is being found by an analytical algorithm (Sanchez R., 2004) seldom, because these algorithms are very difficult to be realized.

So each direction is always defined by a pair of angles, angular distribution is presented by spherical harmonics expansion or removed via angular discretization

1) We do not deal with stochastic Monte-Carlo methods to the transport radiation calculation: although they permit easily to take into account complicated structure of sources, they are very expensive to define radiative fields in optically thick media in many detectors corresponding to small volumes of phase space. Besides there exist statistical fluctuations in Monte-Carlo results.

in the transport problem calculations. The former method, used in the most codes, is more suitable to presentation of slowly varying functions. The latter, applied seldom, is more convenient to calculation of rapidly varying solutions (Sanchez R., 2004).

In the discrete ordinate method the projection of a continuous function onto a spatial grid is called integrated averaged values of this function over each spatial mesh. When transport equation coefficients depend only on one spatial variable (Sanchez R., 2004) or region is homogeneous (Barichello L.B., Siewert C.E., 2000) or other constraints to coefficients are used, such spatial integrals may be found exactly. In general case such integral can be replaced by some approximation. For example, approximations in each mesh can be found with the help of balance equation in this mesh (Alcouffe R.E., 1990) or the value of integrand in mesh centre can be used. Approximation error is naturally decreased under spatial grid refinement.

In this paper we present algorithms to simulate radiative fields from some stationary localized sources. All algorithms are incorporated into the code RADUGA-5.1(P) (Bass L.P. et al, 2005), which is intended to solve transport equation by the discrete ordinate method on parallel computers under weak constraints to coefficients and sources. These algorithms have been developed for 2D and 3D problems with Cartesian and cylindrical geometries under the following assumptions.

1. Both non-collided and first-collided radiation components from mono-directional and quasi-mono-directional sources are being found analytically or semi-analytically. For the other localized sources only un-collided radiation component are being calculated analytically.

2. Angular distributions of all collision integrals are presented by expansions over spherical harmonics that are eigen-functions of the transport equation. This expansion can be carried out for solution components. Thus angular distribution of each function is defined by its expansion coefficients (that are called angular moments).

3. All transport equation coefficients are assumed to be piece-wise constant functions of spatial variables with sufficiently general distribution of discontinuity points. Namely, all discontinuities are supposed to be localized at boundary surfaces of simple bodies (parallelepipeds, cones, cylinders, spheres, prisms, rectangles, triangles, ellipses etc.) that are arbitrarily located in a calculation region. On other hand all body boundaries (both plane and curvilinear) are taken into account independently on body localizations when the value of integrand in mesh centre, that is being considered as approximate value of corresponding spatial integral, is being calculated. (It compensates the approximation error).

In section 1 we introduce the notion of generalized function and generalized solutions of transport equation with delta-sources. Further we consider some localized sources and outline corresponding analytical or semi-analytical algorithms. Sections 2-4 concern delta-sources, whereas in section 5 the isotropic source of cylindrical shape is under consideration. Possibilities of each algorithm are illustrated by numerical results, obtained with the help of parallel

supercomputer MVS-15000BM (<http://www.jscs.ru/cgi-bin/show.cgi?path=/hard/mvs15000bm.html&type=3>). In Appendix the main features of the code RADUGA-5.1(P) are outlined.

1. Transport equation and generalized solutions

So we consider the stationary radiation transport equation written in the form

$$\hat{L}\psi = \hat{S}\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (1.1)$$

where a differential transport operator \hat{L} and an integral collision operator \hat{S} are defined by formulas

$$\hat{L}\psi = \frac{\partial}{\partial \vec{\Omega}} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad \hat{S}\psi = \sigma(\vec{r})\lambda(\vec{r}) \int_{\Omega} \rho(\vec{r}, \vec{\Omega}\vec{\Omega}')\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}'). \quad (1.2)$$

Radius-vector $\vec{r} \in G$ is assumed to have Cartesian coordinates (x, y, z) , G is a parallelepiped²⁾. Radiation transfer direction is defined by unit vector $\vec{\Omega} \in \Omega$, where Ω is the unit sphere. Spherical coordinates (polar angle $\theta \in [0, \pi]$ and azimuth $\varphi \in [0, 2\pi]$) or Cartesian coordinates ($\xi = \sin \theta \cos \varphi, \eta = \sin \theta \sin \varphi, \gamma = \cos \theta$) are used to definition of $\vec{\Omega}$ (see Fig. 1).

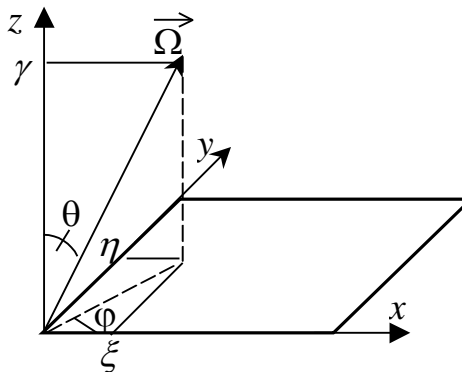


Fig. 1. Spherical (θ, φ) and Cartesian coordinates (ξ, η, γ) of vector $\vec{\Omega}$

Usual notations is being applied

- ✓ $\sigma(\vec{r})$ is total cross section,
- ✓ $\lambda(\vec{r})$ is single-scattering albedo (i.e. the mean number of secondary particles per collision),
- ✓ $\rho(\vec{r}, \vec{\Omega}\vec{\Omega}')$ is phase function,
- ✓ $Q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is radiation source.

 2)For simplicity we consider only (x, y, z) geometry, although similar results have been obtained for (x, y) and (r, z) geometries.

The usual conditions should be satisfied

$$\sigma(\vec{r}) \geq 0, \quad 0 \leq \lambda(\vec{r}) \leq 1, \quad \int_{\Omega} \rho(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = 1. \quad (1.3)$$

Value $\vec{\Omega} \vec{\Omega}'$ is inner product of two unit vectors. Boundary conditions on piece wise smooth surface ∂G of parallelepiped G is also defined:

$$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \hat{R}\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\vec{\Omega}' \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega}' \psi(\vec{r}^*(\vec{r}), \vec{\Omega}') R(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}'), \quad (1.4)$$

at $\vec{r} \in \partial G, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r}) < 0$.

Here $\vec{n}(\vec{r})$ is the outward normal at the point \vec{r} of boundary surface ∂G , $R(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ is reflection function. When $\vec{r}^*(\vec{r}) = \vec{r}$ and $R(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \neq 0$, equation (1.4) corresponds to the reflection condition. Non-re-entrant boundary condition is kept under assumptions $\vec{r}^*(\vec{r}) = \vec{r}, R(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = 0$. Supposition $\vec{r}^*(\vec{r}) \neq \vec{r}, R(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}')$ produces a periodical condition.

We consider set D of infinitely differentiable functions with finite supports in the phase-space $(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Generalized function f is defined by values of *linear continuous functional* (f, ϕ)

$$(f, \phi) = \int d\vec{r} d\vec{\Omega} f(\vec{r}, \vec{\Omega}) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (1.5)$$

for all function ϕ from D (Gelfand I.M, 1968).

One can introduce several operations in set D' of generalized functions.

1. Multiplication by any function $a(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in D$

$$(af, \phi) = (f, a\phi).$$

2. Derivation with respect to spatial variables

$$(\mathcal{D}^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \mathcal{D}^\alpha \phi),$$

where $\mathcal{D}^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x^{\alpha_3}} \phi, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

3. Directional derivation

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{\Omega}} f, \phi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial \vec{\Omega}} \phi\right),$$

where $\frac{\partial}{\partial \vec{\Omega}} \phi = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u} \phi(\vec{r} + u\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$.

4. Integration with kernel $\mathbb{K}(\vec{r}', \vec{\Omega}', \vec{r}, \vec{\Omega}) \in D$

$$\begin{aligned} & \left(\int d\vec{r}' d\vec{\Omega}' \mathbb{K}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') f(\vec{r}', \vec{\Omega}'), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})\right) = \\ & = (f(\vec{r}, \vec{\Omega}), \int d\vec{r}' d\vec{\Omega}' \mathbb{K}(\vec{r}', \vec{\Omega}', \vec{r}, \vec{\Omega}) \phi(\vec{r}', \vec{\Omega}')) \end{aligned}$$

5. Linear transformation of argument

$$(f(a+b\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = \frac{1}{b} (f(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r} \frac{1}{b} - \frac{a}{b}, \vec{\Omega})), \quad (1.6)$$

where a, b are constant and $b \neq 0$. Here and further sum $a+b\vec{r}$ is done component-wise

$$a+b\vec{r} = (a+bx, a+by, a+bz) \text{ as } \vec{r} = (x, y, z).$$

The second and third operations are based upon rule of differentiation by parts. The fifth rule is done by changing variables.

The most known generalized function is delta-function, defined by relations (Gelfand I.M., 1968)

$$\int_{G_0} d\vec{r} \int_{\Omega_0} d\vec{\Omega} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \begin{cases} \phi(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0) & \text{as } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in G_0 \times \Omega_0, \\ 0 & \text{as } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \notin G_0 \times \Omega_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Let the following conditions are kept.

1. Coefficients $\sigma(\vec{r})$, $\lambda(\vec{r})$ and $\rho(\vec{r}, \chi)$ belong to set D . (1.8)
2. Supports of these three functions embrace with the piece-wise smooth boundary ∂G .
3. Source Q is generalized function from D' .

Generalized function $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is considered as generalized solution of the transport problem (1.1)-(1.4) if for all functions ϕ from D the equalities are kept (Germogenova T.A., 1969)

$$\begin{aligned} ((\hat{L} - \hat{S})\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - Q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= 0, \\ (\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \hat{R}\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= 0, \quad \text{at } \vec{r} \in \partial G, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r}) < 0. \end{aligned}$$

Such generalized solutions can be decomposed into several terms

$$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_{k=0}^K \psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega}) + H(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad \text{as } K \geq 0. \quad (1.9)$$

Generalized functions $\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega})$ are assumed to be solutions of the following equations

$$(\hat{L}\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega}) - F_k(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = 0 \quad (1.10)$$

under zero (non-re-entrant) boundary conditions

$$(\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = 0, \quad \text{at } \vec{r} \in \partial G, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r}) < 0. \quad (1.11)$$

Right-sides $F_k(\vec{r}, \vec{\Omega})$ of equation (1.10) are defined via expressions

$$F_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad F_k(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \hat{S}\psi_{k-1}(\vec{r}, \vec{\Omega}) \text{ as } k \geq 1. \quad (1.12)$$

Here term $\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega})$ corresponds to particles collided exactly k times.

Function $H(\vec{r}, \vec{\Omega})$ corresponds to particles that have undergone more than K collision events

$$((\hat{L} - \hat{S})H(\vec{r}, \vec{\Omega}) - F_{K+1}(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = 0, \quad (1.13)$$

$$(H(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \hat{R}H(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \sum_{k=0}^K \hat{R}\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = 0, \quad (1.14)$$

at $\vec{r} \in \partial G, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r}) < 0$

In the next sections one considers three typical generalized sources Q and finds corresponding solutions $\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega})$ and $H(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Technique being used is based on solution of the problem(1.10), (1.11)(Germogenova T.A., 1971):

$$(\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = \left(\int_0^{\infty} du F_k(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \exp(-\tau(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r})), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) \quad (1.15)$$

Here $\tau(\vec{r}_0, \vec{r}) = \int_0^{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \sigma(\vec{r}_0 + \xi \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}) d\xi$ is distance between points \vec{r} and \vec{r}_0 in mean free paths (so-called optical path). Because all coefficients of transport equation are assumed to be equal to zero out of region G , integration in (1.15) is being carried out only over segment of line $\vec{r} - u\vec{\Omega}$ lying inside G .

Finally we should note that restriction (1.8) is being imposed for correctness of operations of multiplication $(\sigma(\vec{r})\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}))$ and integration $(\hat{S}\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}))$ (Vladimirov V.S., 1979). In real problems restriction (1.8) is not kept. In particular, in radiation shielding problems all coefficients of transport equation are usually piece-wise constant functions.

To overcome this difficulty in problems with piece-wise continuous coefficients we introduce so-called *averaged functions*

$$\sigma_q(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \sigma(\vec{r}') \omega_q(|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad \sigma_{s,q}(\vec{r}, \chi) = \int d\vec{r}' \sigma_s(\vec{r}', \chi) \omega_q(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

where $\sigma_s(\vec{r}, \chi) = \sigma(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) \rho(\vec{r}, \chi)$ is collision cross section, kernels $\omega_q(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ are positive infinitely differentiable functions, that are equal to zero out of circle $|\vec{r} - \vec{r}'| = q$ and satisfy the following normalized conditions

$$\int d\vec{r}' \omega_q(|\vec{r} - \vec{r}'|) = 1.$$

Under these conditions averaged functions $\sigma_q(\vec{r}), \sigma_{s,q}(\vec{r}, \chi)$ are infinitely differentiable and converge in mean to function $\sigma(\vec{r}), \sigma_s(\vec{r}, \chi)$ in whole region G (Smirnov V.I., 1964)

$$\int \left| \sigma_q(\vec{r}) - \sigma(\vec{r}) \right|^2 d\vec{r} \rightarrow 0, \quad \int \left| \sigma_{s,q}(\vec{r}, \chi) - \sigma_s(\vec{r}, \chi) \right|^2 d\vec{r} \rightarrow 0 \text{ as } q \rightarrow 0,$$

and uniformly in any open subregion \tilde{G} where functions $\sigma(\vec{r}), \sigma_s(\vec{r}, \chi)$ are continuous

$$\sup_{\vec{r} \in \tilde{G}} \left| \sigma_q(\vec{r}) - \sigma(\vec{r}) \right| \rightarrow 0, \quad \sup_{\vec{r} \in \tilde{G}} \left| \sigma_{s,q}(\vec{r}, \chi) - \sigma_s(\vec{r}, \chi) \right| \rightarrow 0 \text{ as } q \rightarrow 0.$$

In addition the condition corresponding to (1.3) is carried out

$$0 \leq \int_{\Omega} \sigma_{s,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = \int \sigma(\vec{r}') \lambda(\vec{r}') \omega_q(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \leq \sigma_q(\vec{r}).$$

Hence one can introduce functions $\psi_q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ as generalized solutions of the problem (1.1)-(1.4) with coefficients $\sigma_q(\vec{r})$, $\sigma_{s,q}(\vec{r}, \chi)$. Corresponding components $\psi_{k,q}(\vec{r}, \vec{\Omega})$, $H_q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ are defined by equations (1.12)-(1.15).

Besides we define functions $\psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega})$, $H(\vec{r}, \vec{\Omega})$ by equations (1.12)-(1.15) under original coefficients $\sigma(\vec{r})$, $\sigma_s(\vec{r}, \chi)$. One has as $q \rightarrow 0$ for all points \vec{r} from G

1.

$$\begin{aligned} |\tau(\vec{r}_0, \vec{r}) - \tau_q(\vec{r}_0, \vec{r})|^2 &= \left| \int_0^{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} (\sigma(\vec{r}_0 + \xi \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}) - \sigma_q(\vec{r}_0 + \xi \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|})) d\xi \right|^2 \leq \\ &\int_0^{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} d\xi \cdot \int_0^{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \left(\sigma(\vec{r}_0 + \xi \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}) - \sigma_q(\vec{r}_0 + \xi \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}) \right)^2 d\xi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$2. \left| \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r})) - \exp(-\tau_q(\vec{r}_0, \vec{r})) \right| \rightarrow 0.$$

$$3. (\psi_{0,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) =$$

$$= \left(\int_0^{\infty} du F_0(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \cdot \right.$$

(1.16)

$$\left. \cdot [\exp(-\tau_q(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r})) - \exp(-\tau(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r}))], \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) \rightarrow 0$$

Further successively for $k=1, \dots, K$ one obtains for all points \vec{r} in any open subregion \tilde{G} , where functions $\sigma(\vec{r})$, $\sigma_s(\vec{r}, \chi)$ are continuous

4.

$$(F_{k,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}) - F_k(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = (\hat{S}_q \psi_{k-1,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \hat{S} \psi_{k-1}(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) =$$

$$(\hat{S}_q - \hat{S}) \psi_{k-1,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - (\hat{S}(\psi_{k-1}(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \psi_{k-1,q}(\vec{r}, \vec{\Omega})), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) \rightarrow 0$$

as $k=1, \dots, K+1$,

where $\hat{S}_q \psi = \int_{\Omega} \sigma_{s,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}')$. In particular for $k=K+1$ one has

$$(H(\vec{r}, \vec{\Omega}) - H_q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

$$(\psi_{k,q}(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \psi_k(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) =$$

$$5. \left(\int_0^{\infty} du [(F_{k,q}(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - F_k(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{\Omega})) e^{(-\tau_q(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r}))} - \right.$$

$$\left. - F_k(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) (e^{(-\tau(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r}))} - e^{(-\tau_q(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r}))})], \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) \rightarrow 0, \text{ as } k=1, \dots, K. (1.18)$$

By the virtue of estimations (1.16)-(1.18) function $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ being defined by equations(1.9), (1.12)-(1.15) can be considered as generalized solution of original problem (1.1)-(1.4) under piece-wise continuous coefficients.

2.Parallel beam

One considers radiation beam of radius R entering a calculation region G . It is assumed that all entering particles stream in direction $\vec{\Omega}_0$ and intersect external boundary ∂G via the circle C with centre in the point \vec{r}_0 , see Fig. 2.

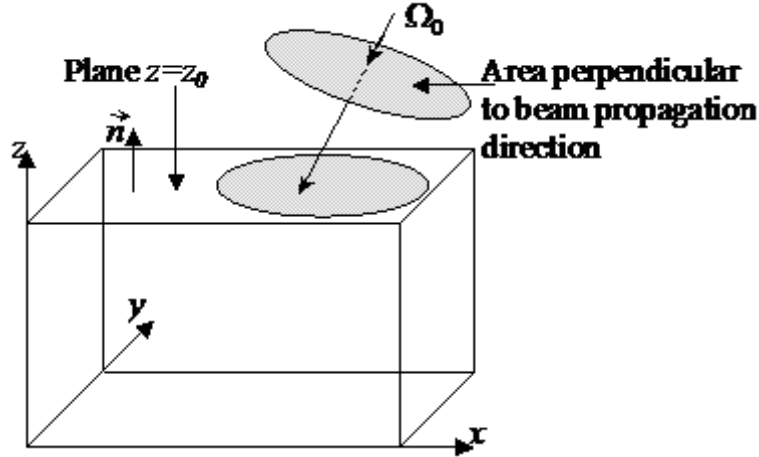


Fig. 2. Parallel beam

Such source is being modelled by the formula

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S_0 f(x, y) \delta(z - z_0) \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}|, \quad \vec{r}(x, y, z), \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0) \in \partial G, \quad (2.1)$$

$$f(x, y) = H(R - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

where \vec{n} is outward normal on top boundary $z = z_0$, H is the Heaviside's step function

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{as } t \geq 0, \\ 0, & \text{as } t < 0. \end{cases}$$

Vectors $\vec{\Omega}_0$, $\vec{\Omega}$ are defined by Cartesian coordinates $(\xi_0, \eta_0, \gamma_0)$ and (ξ, η, γ) correspondingly, see Fig. 1 (for case being considered cosine $\gamma_0 < 0$).

In definition (2.1) source power S_0 is number of particles incident on unit area that is perpendicular to beam propagation direction. Therefore number of particles incident on unit area of top border $z = z_0$, see Fig. 2, is equal to value

$$S_0 |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_0| = S_0 |\gamma_0|.$$

For this problem value $K = 0$ is chosen, i.e. only un-collided radiation transport is being simulated analytically. Substituting equalities (1.12) and (2.1) into the expression (1.15) and taking into account properties(1.6), (1.7) and definition (1.5) one finds (here and further one implies $d\vec{r} = dx dy dz$)

$$(\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) =$$

$$\begin{aligned}
&= S_0 |\gamma_0| \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int_0^\infty du f(x-u\xi, y-u\eta) \delta(z-z_0-u\gamma) \delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_0) \cdot \\
&\quad \bullet \exp(-\tau(\vec{r}-u\vec{\Omega}, \vec{r})) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \\
&= S_0 |\gamma_0| \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \frac{-1}{\gamma} f\left(x-\frac{z-z_0}{\gamma}\xi, y-\frac{z-z_0}{\gamma}\eta\right) \delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_0) \cdot \\
&\quad \bullet \exp\left(-\tau\left(\vec{r}-\frac{z-z_0}{\gamma}\vec{\Omega}, \vec{r}\right)\right) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \\
&= \int d\vec{r} S_0 f\left(x-\frac{z-z_0}{\gamma_0}\xi_0, y-\frac{z-z_0}{\gamma_0}\eta_0\right) \exp\left(-\tau\left(\vec{r}-\frac{z-z_0}{\gamma_0}\vec{\Omega}_0, \vec{r}\right)\right) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_0)
\end{aligned}$$

Finally, one has

$$(\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = (S_0 \delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_0) f(x^*, y^*) \cdot \exp(-\tau(\vec{r}^*, \vec{r})), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})), \quad (2.2)$$

where point

$$\vec{r}^* = \vec{r} - \frac{z-z_0}{\gamma_0} \vec{\Omega}_0 = (x^*, y^*, z^*) = \left(x - \frac{z-z_0}{\gamma_0} \xi_0, y - \frac{z-z_0}{\gamma_0} \eta_0, z_0\right)$$

lies on boundary of parallelepiped, see Fig. 3.

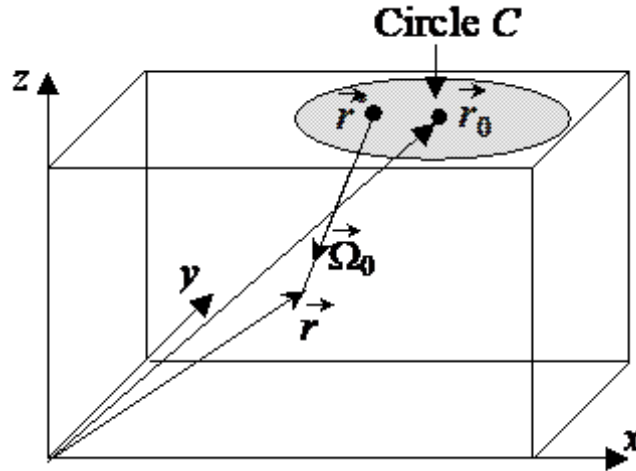


Fig. 3. Integration scheme to calculate un-collided component of radiation from parallel beam

Thus, function $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ simulates un-collided particles that stream in direction $\vec{\Omega}_0$ and fill the cylinder based on circle C with generatrix that is parallel to $\vec{\Omega}_0$.

According to (2.2) we easily find angular moments of function $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$

$$\begin{aligned}
&\left(\int d\vec{\Omega}' \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}') Y(\vec{\Omega}'), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})\right) = \\
&= (S_0 f(x^*, y^*) \cdot \exp(-\tau(\vec{r}^*, \vec{r})) Y(\vec{\Omega}_0), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})),
\end{aligned}$$

here symbol $Y(\vec{\Omega})$ denotes a spherical harmonic. By similar way one can obtain first-collision source $F_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$, see (1.12)

$$\begin{aligned} (F_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= (\sigma(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) \int_{\Omega} d\vec{\Omega}' \rho(\vec{r}, \vec{\Omega} \vec{\Omega}') \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}'), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = \\ &= (S_0 \sigma(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) f(x^*, y^*) \cdot \exp(-\tau(\vec{r}^*, \vec{r})) \rho(\vec{r}, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})). \end{aligned}$$

Therefore un-collided component $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ and first-collision source $F_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ are entirely defined at each spatial point \vec{r} by functions $\vec{r}^*(\vec{r})$, $\tau(\vec{r}^*, \vec{r})$, $\rho(\vec{r}, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0)$ and values $Y(\vec{\Omega}_0)$. In numerical algorithm being presented all these values are being calculated in centres of all spatial meshes, see Introduction.

We consider calculation results of the 3D test, exposed by the group ‘‘The International Intercomparison of 3D Radiation Codes (I3RC)’’ (<http://i3rc.gsfc.nasa.gov>). The irregular cloud is illuminated by sun at angle $\Theta_0 = 60^\circ$ (see Fig. 4). Here the radius $R \gg 3.84 \text{ km}$, albedo $\lambda(\vec{r}) = 0.99$, collision is modelled by Heney-Greenstein’s phase function with asymmetry parameter $g = 0.85$. Photons reaching the Earth do not return to the calculation region (non-re-entrant condition on the bottom boundary is used, see Fig. 4).

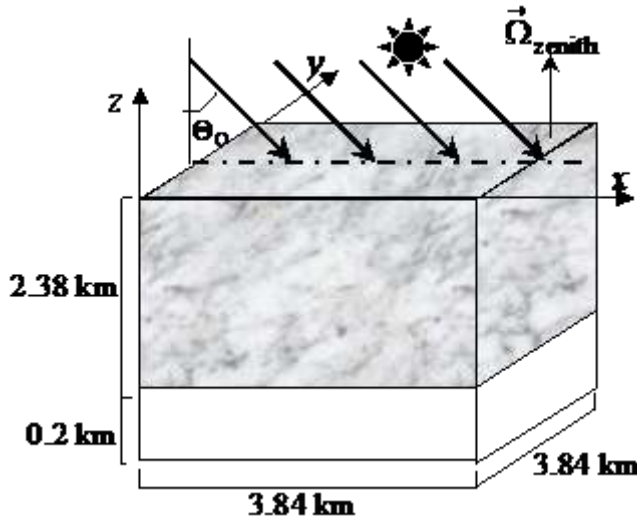


Fig. 4. Calculation region of I3RC test

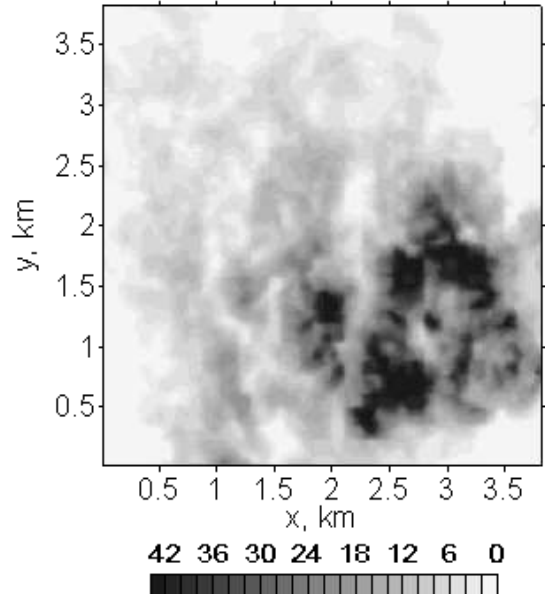


Fig. 5. Optical depths in I3RC test

Periodical conditions are defined on vertical boundaries $y=0$, $x=3.84$, $y=0$, $y=3.84$. The table, exposed in <http://i3rc.gsfc.nasa.gov>, defines distribution of total cross section $\sigma(\vec{r})$ over the calculation region. Optical depths for each point of the plane (x, y) are plotted in the Fig. 5. Uniform spatial grids consist of 128, 128 and 88 meshes for variable x , y and z accordingly. Carlson’s angular quadrature $S_N^{(3)}$ is used as $N=40$. So-called reflectivity

$$Iu(\vec{r}) = \pi \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}_{\text{zenith}}) / |\cos \Theta_0|,$$

obtained by the two different codes, is plotted in Fig. 6 and Fig. 7.

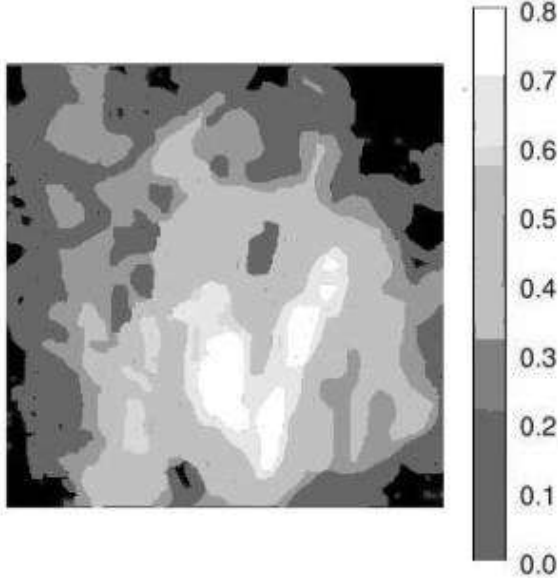


Fig. 6. I3RC test. Reflectivity. Pacific Northwest National Laboratory, Monte-Carlo method.

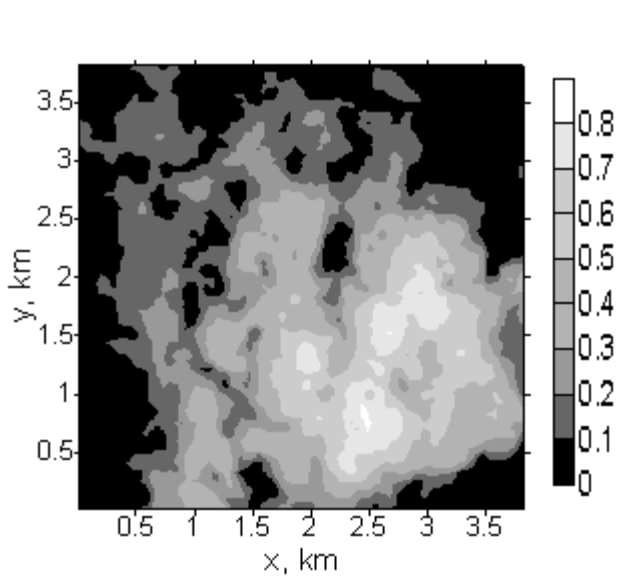


Fig. 7. I3RC test. Reflectivity. RADUGA-5.1(P)

These results are close and reflectivity distribution conforms to distribution of optical depths, see Fig. 5. Other computational results carried out with the help of the presented algorithm compared with Monte-Carlo results are put in (Bass L.P. et al, 2005).

3.Narrow ray

Let monodirectional ray impinges on region G at the spatial point $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ in direction $\vec{\Omega}_0(\xi_0, \eta_0, \gamma_0)^{4)}$. Such source is described by the expression

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0),$$

where S_0 is power source:

$$\int \int Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{r} d\vec{\Omega} = S_0.$$

Here value $K = 1$ should be chosen. Further we consider only normally incident rays

$$\xi_0 = \eta_0 = 0, \gamma_0 = -1,$$

see Fig. 8.

 3) Carlson's angular quadrature S_N consists of $(N+2)N$ nodes, uniformly distributed over the unit sphere Ω

4) This is so-called searchlight problem

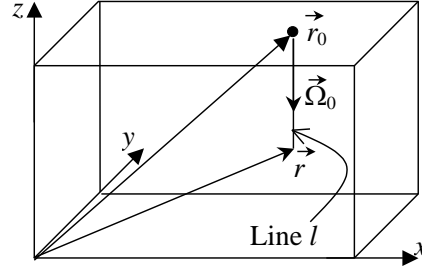


Fig. 8. Integration scheme to calculate un-collided component of radiation from narrow ray

Un-collided component $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ can be find with the help of (1.15),(1.5), under condition(1.6),(1.7). Long chain of equalities is being used:

$$\begin{aligned}
 & (\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = \\
 & = (S_0 \int_0^\infty du \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) e^{-\tau(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r})} \delta(x - x_0 - u\xi) \cdot \\
 & \quad \cdot \delta(y - y_0 - u\eta) \delta(z - z_0 - u\gamma), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = \\
 & = S_0 \iint d\vec{r} d\vec{\Omega} \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) e^{-\tau(\vec{r} - \frac{z-z_0}{\gamma}\vec{\Omega}, \vec{r})} \frac{-1}{\gamma} \delta(y - y_0 - \frac{z-z_0}{\gamma}\eta) \cdot \\
 & \quad \cdot \delta(x - x_0 - \frac{z-z_0}{\gamma}\xi) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \\
 & = S_0 \int d\vec{r} e^{-\tau(\vec{r} - \frac{z-z_0}{\gamma_0}\vec{\Omega}_0, \vec{r})} \frac{-1}{\gamma_0} \delta(y - y_0 - \frac{z-z_0}{\gamma_0}\eta_0) \delta(x - x_0 - \frac{z-z_0}{\gamma_0}\xi_0) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_0) = \\
 & = S_0 \int dz e^{-\tau(\vec{r}_0, \vec{r})} \phi(x_0, y_0, z, \vec{\Omega}_0) = \\
 & = S_0 (e^{-\tau(\vec{r}_0, \vec{r})} \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) \delta(y - y_0) \delta(x - x_0), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})).
 \end{aligned}$$

Thus component $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ corresponds to un-collided particles that stream along line l (see Fig. 8) being pass via point \vec{r}_0 in direction $\vec{\Omega}_0$ and being defined by simple equations

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

First-collision source $F_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is done via expression

$$\begin{aligned}
 & (F_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = (\hat{S}\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = \\
 & = (S_0 \sigma(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) \rho(\vec{r}, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r})) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})).
 \end{aligned}$$

According to (1.15),(1.5), (1.6), (1.7)one has

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= S_0 \int d\vec{r} \int d\gamma \int d\varphi \int_0^\infty du \sigma(\vec{r} - u\vec{\Omega}) \lambda(\vec{r} - u\vec{\Omega}) \cdot \\
&\cdot \rho(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r} - u\vec{\Omega})) \cdot \\
&\cdot \delta(x - x_0 - u\xi) \delta(y - y_0 - u\eta) \exp(-\tau(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r})) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}).
\end{aligned}$$

Introducing new variables

$$t = x - x_0 - u\xi \text{ instead of } u, \quad v = y - y_0 - (x - x_0)\eta/\xi \text{ instead of } \varphi,$$

using equalities

$$\xi = \sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi, \quad \eta/\xi = \operatorname{tg} \varphi,$$

and taking into account delta-function's property (1.7) one obtains

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= S_0 \int d\vec{r} \int d\gamma \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \sigma(\vec{r}^*) \lambda(\vec{r}^*) \rho(\vec{r}^*, \vec{\Omega}(\gamma, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}_0) \cdot \\
&\cdot \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}^*)) \exp(-\tau(\vec{r}^*, \vec{r})) \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}(\gamma, \bar{\varphi})) \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}},
\end{aligned}$$

where point $\vec{r}^* = (x_0, y_0, z - \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \frac{y - y_0}{\sin \bar{\varphi}})$ lies on line l , azimuth angle $\bar{\varphi}$

is being uniquely done by two equalities

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = (y - y_0)/(x - x_0), \quad \cos \bar{\varphi} (x - x_0) > 0. \quad (3.1)$$

Finally one can write

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= (S_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \sigma(\vec{r}^*) \lambda(\vec{r}^*) \rho(\vec{r}^*, \vec{\Omega}(\gamma, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}_0) \cdot \\
&\cdot \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}^*)) \exp(-\tau(\vec{r}^*, \vec{r})) \frac{\delta(\varphi - \bar{\varphi})}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})). \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Integration scheme corresponding to formula (3.2) is plotted in Fig. 9.

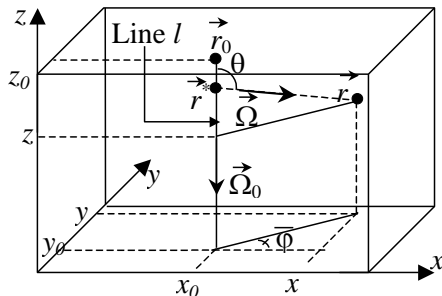


Fig. 9. Integration scheme to calculate to first-collided component of solution in problems with narrow ray

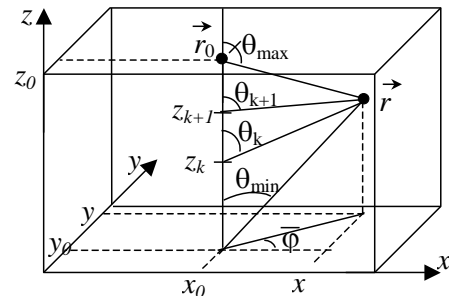


Fig. 20. Choice of integration limits calculate twice-collision source in problems with narrow ray

Each pair of vectors $(\vec{r}, \vec{\Omega})$ defines point \vec{r}^* lying on the line l and first-collided flux for a pair $(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is being defined by value of un-collided flux for a

pair $(\vec{r}^*, \vec{\Omega}_0)$. In other words function $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ corresponds to particles, that change motion direction from $\vec{\Omega}_0$ to $\vec{\Omega}$ at point \vec{r}^* after a collision event.

Besides, according with formula (3.2) first-collided particles fill whole region G and at each point \vec{r} they can stream only in directions $\vec{\Omega}(\gamma, \bar{\varphi})$, where angle $\bar{\varphi}$ is defined uniquely for the point \vec{r} (see eq.(3.1)), whereas cosine γ of polar angle θ belongs to some interval $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$, see Fig. 9 and Fig.10.

Values $\gamma_{\min} = \cos \theta_{\max}$, $\gamma_{\max} = \cos \theta_{\min}$ are found by means of inequalities

$$0 \leq z - \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{y-y_0}{\sin \varphi} \leq z_0$$

(under these conditions point \vec{r}^* belongs to region G).

Using equation (3.2) and delta-function property (1.6) one obtains angular moments of first-collided component $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$

$$\begin{aligned} \left(\int d\vec{\Omega} \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) Y(\vec{\Omega}), \phi \right) = & (S_0 \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} d\gamma \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sigma(\vec{r}^*) \lambda(\vec{r}^*) \cdot \\ & \cdot \rho(\vec{r}^*, \vec{\Omega}(\gamma, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}_0) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}^*)) \cdot \exp(-\tau(\vec{r}^*, \vec{r})) \frac{Y(\gamma, \bar{\varphi})}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \phi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

One introduces grid over z on the line l that produces grid over γ (see Fig. 10) and decomposes integral (3.3) into sum of integrals. Using quadratic approximation to product of exponents and replacing the phase function ρ by expansion over spherical harmonics, one obtains integrals being found exactly. In similar manner twice-collision source $F_2(\vec{r}, \vec{\Omega})$ can be found.

It should be stressed that in presented algorithm all functions being considered are defined in centres of spatial grid meshes when all optical paths τ are being calculated exactly for heterogeneous regions of complicated structure. This question is under detailed consideration in Introduction.

To show advantage of the presented algorithm we consider simple problem, when narrow ray impinges normally on top border of homogeneous parallelepiped (see Fig. 11).

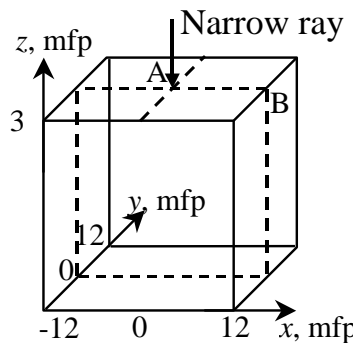


Fig. 11. Calculation region in problem on narrow ray

Collision is assumed to be isotropic⁵⁾, and single-scattering albedo λ is equal to 0.5. All boundary conditions are non-re-entrant. Uniform spatial grid over z contains 16 meshes. Spatial grid over x contains 120 meshes in the interval $(-0.3, 0.3)$ and 48 meshes in the rest region. The same grid is defined for variable y . Different Carlson's quadratures are used.

One can replace narrow ray by thin parallel beam of radius 0.03 mfp. Solving problem with narrow ray we obtain first-collided radiation intensity semi-analytically whereas this function is being calculated via grid scheme in problem with thin parallel beam.

Scalar fluxes (intensities averaged over all directions)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\gamma \int_0^{2\pi} d\phi \psi(\vec{r}, \gamma, \phi)$$

along the line AB (see Fig. 11) are plotted in Fig. 12.

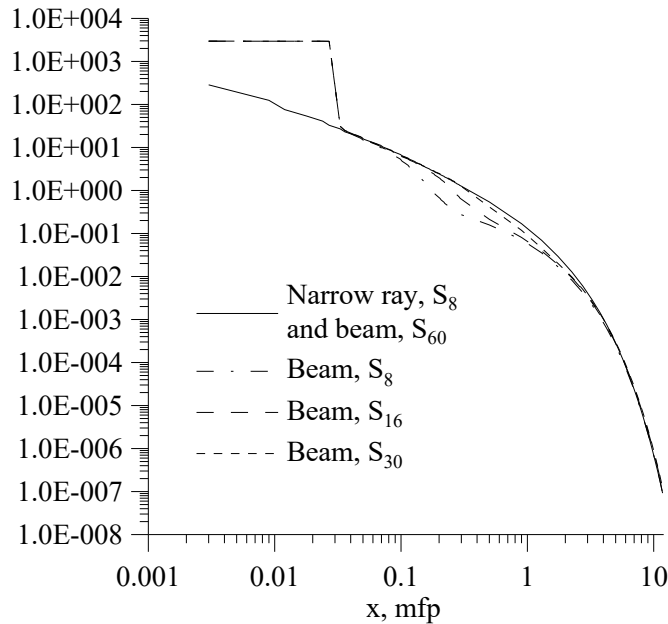


Fig. 12. Scalar fluxes in problem on narrow ray in the line AB

Logarithmical scales are used for both axes. Note that scalar fluxes from the parallel beam are almost constant in the spatial subregion illuminated by uncollided particles of this beam (see Fig. 12).

When angular grids are being refined scalar fluxes from thin parallel beam tend to scalar flux from narrow ray out of the vicinity of the source. It may be concluded that semi-analytical calculation of first-collided component allows to use sparse angular grids in such problems. It permits to reduce calculation expenses. For example, using the semi-analytical algorithm for first-collided

5) We consider isotropic media to reduce computations. The algorithms can be used under anisotropic collision too.

component and simultaneously rarefying angular grids we reduce running time in the problem being considered 180 times.

It should be noted that the described algorithm can be easily generalized to problems with rays that are incident at an oblique angle.

4. Point sources

We consider a point source located at the point \vec{r}_0 and radiating only in some interval of directions. Corresponding function $Q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ can be written in the following form

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{S_0}{2\pi(1 - \cos \alpha)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) H(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_{ax} - \cos \alpha), \quad (4.1)$$

where $H(t)$ is Heaviside's function, angle α defines source aperture, vector $\vec{\Omega}_{ax}$ is called axis of source, see Fig. 13.

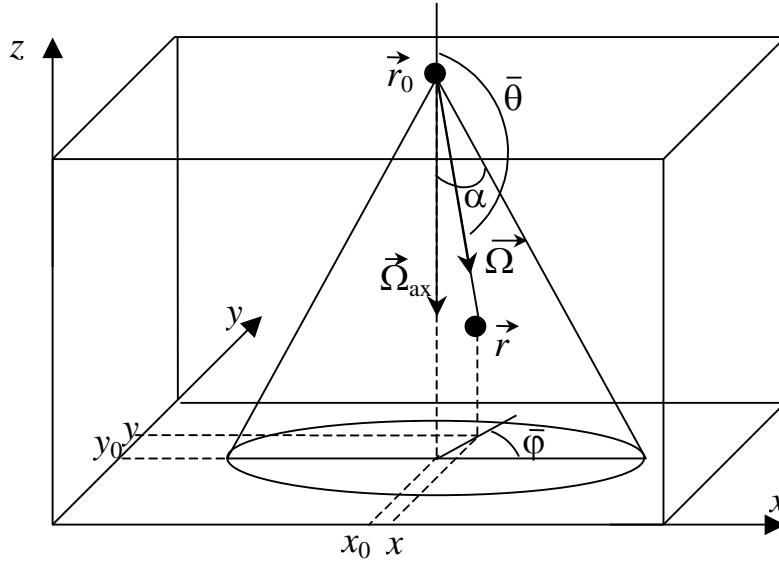


Fig. 13. Radiation cone from point source

Source power S_0 is number of particles that enter region G :

$$\int \int Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{r} d\vec{\Omega} = S_0.$$

Using technique described in the preceding sections, one has

$$\begin{aligned} (\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= \left(\frac{-\tilde{S}_0}{\gamma} \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r})) \delta\left(x - x_0 - \frac{z - z_0}{\gamma} \xi\right) \cdot \right. \\ &\left. \cdot \delta\left(y - y_0 - \frac{z - z_0}{\gamma} \eta\right) H(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_{ax} - \cos \alpha), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) \text{ as } \frac{z - z_0}{\gamma} > 0. \end{aligned}$$

Here $\tilde{S}_0 = \frac{S_0}{2\pi(1 - \cos \alpha)}$. Introducing new variables

$$t = \xi/\gamma \text{ and } w = \eta/\gamma,$$

using equalities

$$\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+t^2+w^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{t}{\sqrt{t^2+w^2}},$$

and calculating Jacobian of this transformation

$$J = \frac{1}{(1+t^2+w^2)^{3/2}}$$

one has

$$\begin{aligned} (\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= (\tilde{S}_0 \delta(\gamma - \bar{\gamma}) \delta(\varphi - \bar{\varphi}) \cdot \\ &\cdot \frac{H(\vec{\Omega}(\gamma, \varphi) \vec{\Omega}_{ax} - \cos \alpha) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}))}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})), \end{aligned} \quad (4.2)$$

where

$$\bar{\gamma} = \frac{z-z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad \cos \bar{\varphi} = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}. \quad (4.3)$$

Thus function $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ simulates flux of un-collided particles that fill the cone with vertex in point \vec{r}_0 and aperture α , see Fig. 13. At each point \vec{r} of this cone particles stream only in one direction $\vec{\Omega}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi})$ being defined entirely by coordinates (x, y, z) of point \vec{r} , see (4.3).

Both angular moments of un-collided component $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$ and first-collision source $F_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ are easily calculated by means of relation (4.2).

$$\begin{aligned} \left(\int d\vec{\Omega} \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) Y(\vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) &= (\tilde{S}_0 Y(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) \cdot \\ &\cdot \frac{H(\vec{\Omega}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}_{ax} - \cos \alpha) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}))}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})), \\ (F_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) &= (\tilde{S}_0 \sigma(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) \rho(\vec{r}, \vec{\Omega}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}) \cdot \\ &\cdot \frac{H(\vec{\Omega}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}_{ax} - \cos \alpha) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}))}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) \end{aligned}$$

First-collided component $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ obeys relation

$$(\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) = (\tilde{S}_0 \int_{u_1}^{u_2} du \frac{\sigma(\vec{r}-u\vec{\Omega}) \lambda(\vec{r}-u\vec{\Omega}) \rho(\vec{r}-u\vec{\Omega}, \vec{\Omega}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) \vec{\Omega})}{|\vec{r}-u\vec{\Omega}-\vec{r}_0|^2} \cdot$$

$$H(\vec{\Omega}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) \vec{\Omega}_{ax} - \cos \alpha) \exp(-\tau(\vec{r}_0, \vec{r}-u\vec{\Omega})) \exp(-\tau(\vec{r}-u\vec{\Omega}, \vec{r})), \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}))$$

for

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\vec{r}-u\vec{\Omega}), \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\vec{r}-u\vec{\Omega}).$$

According to this expression integration is being carried out along line being pass via point \vec{r} in direction $\vec{\Omega}$. Integration limits u_1 and u_2 are defined via values of parameter u for which line $\vec{r} - u\vec{\Omega}$ intersects surface of the radiation cone, see Fig. 14. These values can be easy calculated by analytical geometry technique.

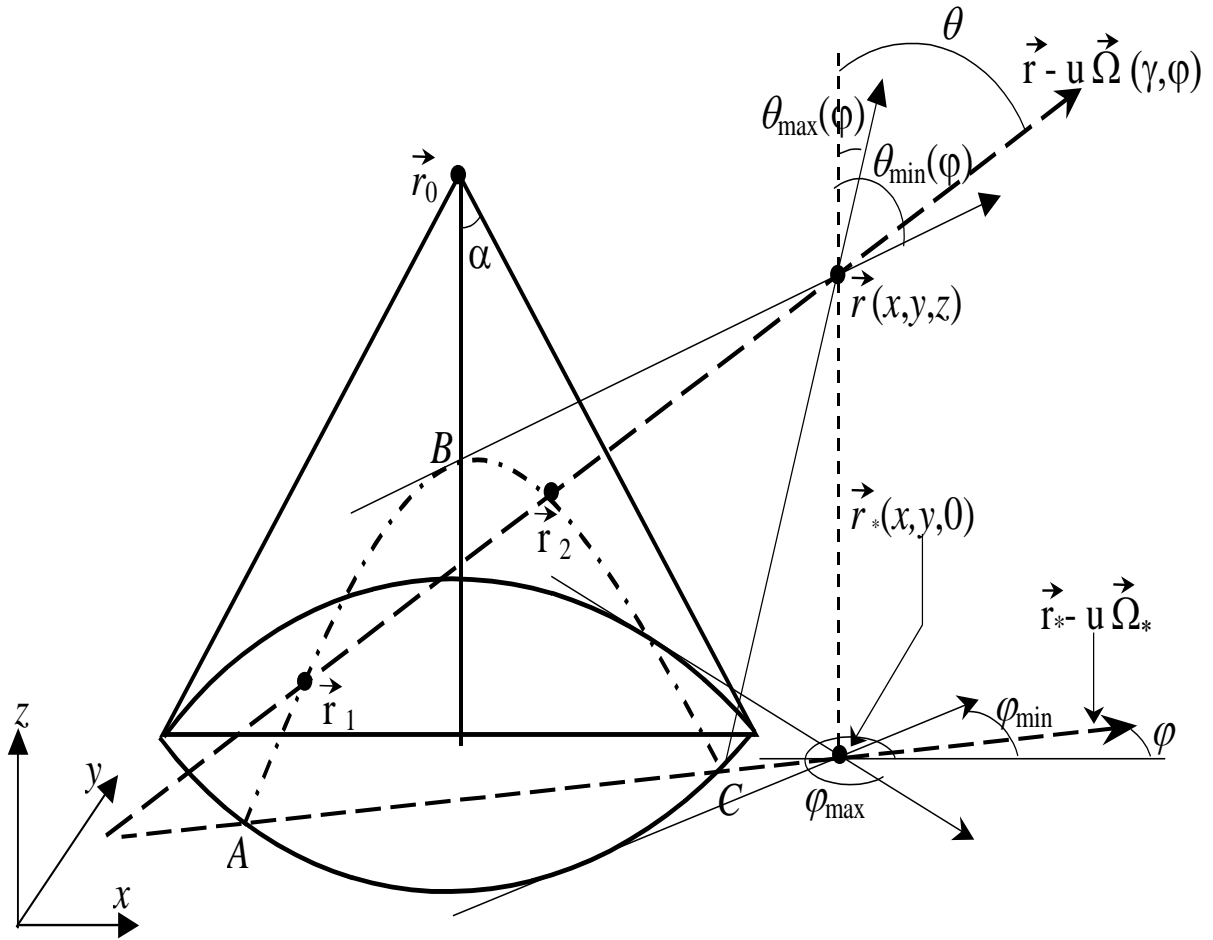


Fig. 14. Here:

$\mathbf{W} = \{[0, \varphi_{\min}] \cup [\varphi_{\max}, 2\pi]\} \times [\theta_{\min}(\varphi), \theta_{\max}(\varphi)]$ - solid angle, at that radiation cone is being viewed from point \vec{r} ,

\vec{r} and $\vec{\Omega} \in \mathbf{W}$ are current point and direction correspondingly,

\vec{r}_* and $\vec{r}_* - u\vec{\Omega}_*$ are projections of point \vec{r} and line $\vec{r} - u\vec{\Omega}$ onto plane (x, y) ,

$\vec{r}_i = \vec{r} - u_i \vec{\Omega}$, $i=1,2$, are points of intersection between radiation cone and line $\vec{r} - u \vec{\Omega}$,
 parabola ABC is geometric locus of intersection between radiation cone and lines $\vec{r} - u \vec{\Omega}(\gamma, \varphi)$ for fixed value $\varphi \in [0, \varphi_{\min}] \cup [\varphi_{\max}, 2\pi]$ and all θ from interval $[\theta_{\min}(\varphi), \theta_{\max}(\varphi)]$

Fig. 14. Integration limits to calculate first-collided component from point source

One needs to stress that function $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is trivial if the line $\vec{r} - u \vec{\Omega}$ does not intersect the radiation cone inside region G . As result, at each point \vec{r} the function $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is nontrivial only in some angular interval W , see Fig. 14. Thus, component $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ simulates transport of first-collided particles that fill whole region G and at each spatial point \vec{r} fly in directions from the interval W .

According to algorithm being presented this function should be found in nodes $\vec{\Omega}_i$ of some angular grid introduced in this interval. Using values $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}_i)$, one can calculate angular moments of first-collided component and twice-collision source $F_2(\vec{r}, \vec{\Omega})$. For example, for angular moments the following approximate formula can be used

$$\int d\vec{\Omega} \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) Y(\vec{\Omega}) \approx \sum_i \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}_i) Y(\vec{\Omega}_i) \omega_i.$$

Here ω_i is weighted multipliers, that are equal to squares of subdomains of the unit sphere Ω , corresponding to nodes $\vec{\Omega}_i$.

This algorithm is described in details in the paper (Bass L.P. et al, 2006), where problem on biotissue phantoms illuminated by the laser beam of small aperture (angle $\alpha=7.5^\circ$) is being considered and obtained results are being compared with experimental data and Monte-Carlo results. Here we consider two 3D model problems on cube that contains cylinder, see Fig. 15.

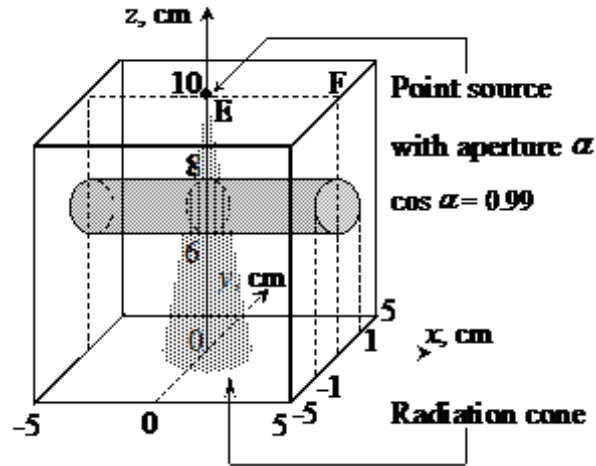


Fig. 15. Calculation region for problem on point source

Point source with aperture of $\alpha \approx 8^\circ$ ($\cos \alpha = 0.99$) is located in centre of the top border of the cube. Here point source models laser beam, cube and cylinder simulate hypodermic layer and blood vessel correspondingly⁶⁾. Collision in both media is considered as isotropic and the following values of coefficients are applied in the cube $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$, $\lambda = 0.7$, in the cylinder $\sigma = 0.8 \text{ cm}^{-1}$, $\lambda = 0.625$.

On top boundary $z = z_0 = 10 \text{ cm}$ of the cube non-re-entrant condition or total interior reflection one is defined. The latter condition modelling thin layer of skin is done by the formula

$$\psi(x, y, z_0, \gamma, \varphi) = \begin{cases} \psi(x, y, z_0, -\gamma, \varphi) & \text{as } \gamma < \cos \theta_0, \\ A\psi(x, y, z_0, -\gamma, \varphi) & \text{as } \gamma \geq \cos \theta_0. \end{cases}$$

Here θ_0 is angle of total interior reflection, A is albedo. We use values: $\cos \theta_0 = 0.66$, $A = 0.06$.

Carlson's angular quadratures S_N ($N=16$ and $N=30$) and spatial grids of two types are in consideration. Spatial grid C is uniform and contains $50 \times 50 \times 40$ meshes over variables x , y , z correspondingly. Spatial grid C_1 contains $50 \times 50 \times 40$ meshes too, but only grid over z is uniform, whereas grids over x and y are refined in subregion $(-1.42, 1.42) \times (-1.42, 1.42)$, that encloses the radiation cone. Spatial grids C_2 and C_4 consist of $100 \times 100 \times 80$ and $200 \times 200 \times 160$ meshes correspondingly. They are uniformly refined with respect to grid C_1 .

Numerical results (scalar fluxes in line EF, see Fig. 15) are plotted in Fig. 16 and Fig. 17.

Method 1 is based on semi-analytical algorithm to calculation of first-collided component whereas this function is defined by grid scheme in Method 2.

6) Such models are under consideration in (Bykov A.V. et. al)

Note reflection condition increases solution (compare Fig. 16 and Fig. 17).

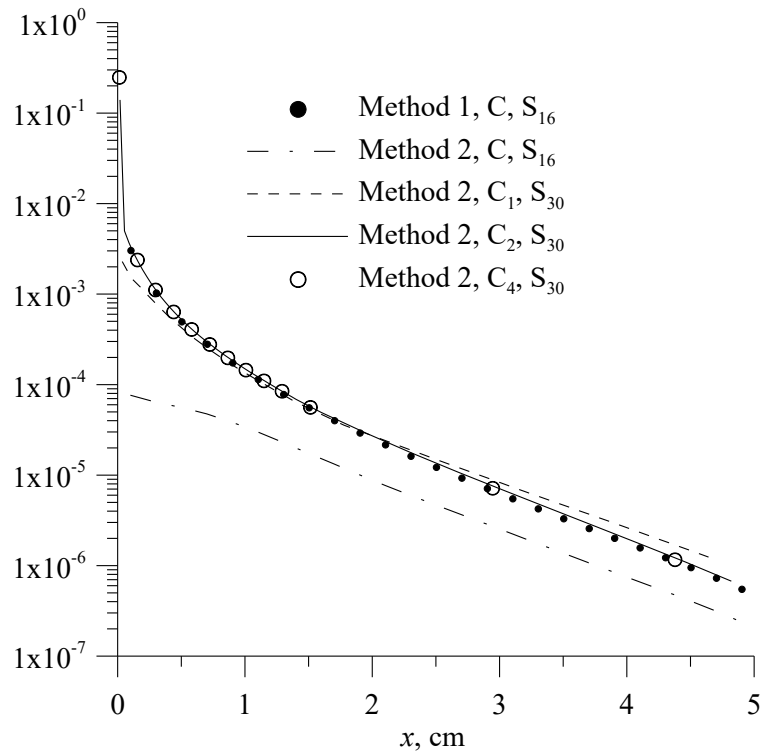


Fig. 16. Scalar fluxes in line EF in problem with point source under non-reflectant boundary condition

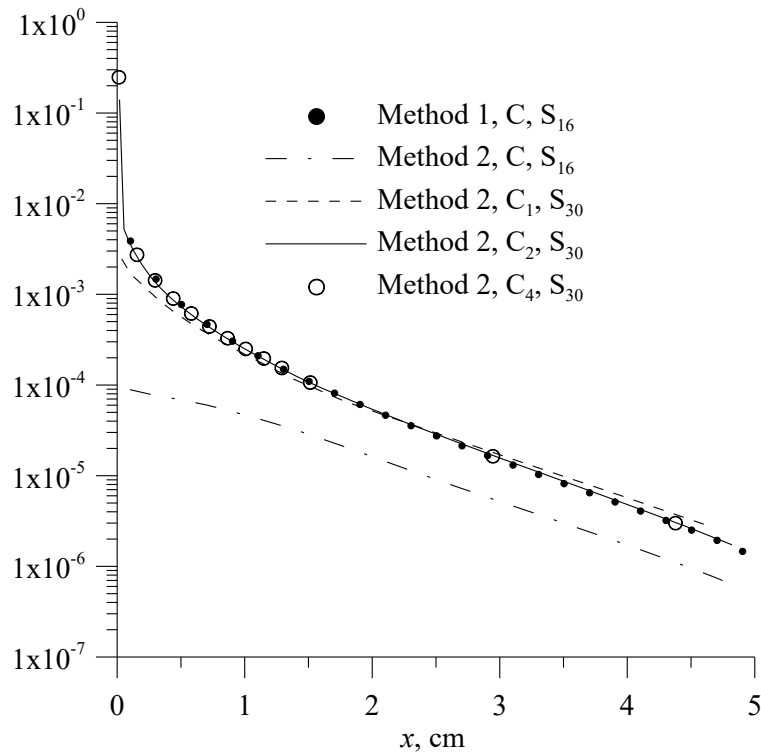


Fig. 17. Scalar fluxes in line EF in problem with point source under total interior reflection boundary condition

It is clear that under refining grids fluxes obtained by Method 2 tend to fluxes of Method 1. Besides semi-analytical algorithm is applicable without resorting to special spatial grid refined inside radiation cone. As result this

algorithm permits to reduce running time. For example, results presented by black spots have been obtained twice faster than results presented by solid line. It is clear the less aperture of source the high efficiency of semi-analytical algorithm.

5. Cylindrical source

Here we consider sources being defined by the following formula

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q_0(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{as } \vec{r} \in V_0, \\ 0, & \text{as } \vec{r} \notin V_0, \end{cases}$$

where V_0 is some cylinder of arbitrary radius and height. Such function simulates, for example, reactor cores in radiation shielding problems, see Fig. 18.

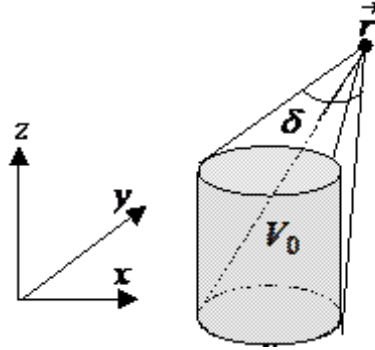


Fig. 18. Viewing angle $\delta(\vec{r})$ of cylindrical source from point \vec{r}

Un-collided component is difficult to be calculated with sufficient accuracy as source occupies very small part of region G .

According to equation (1.15) one has

$$\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{u_1(\vec{r}, \vec{\Omega})}^{u_2(\vec{r}, \vec{\Omega})} du Q_0(\vec{r} - u\vec{\Omega}) \exp(-\tau(\vec{r} - u\vec{\Omega}, \vec{r})). \quad (5.1)$$

Integration in relation (5.1) is carried out along segment $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ of straight line $\vec{r} - u\vec{\Omega}$ lying inside V_0 , see Fig. 19.

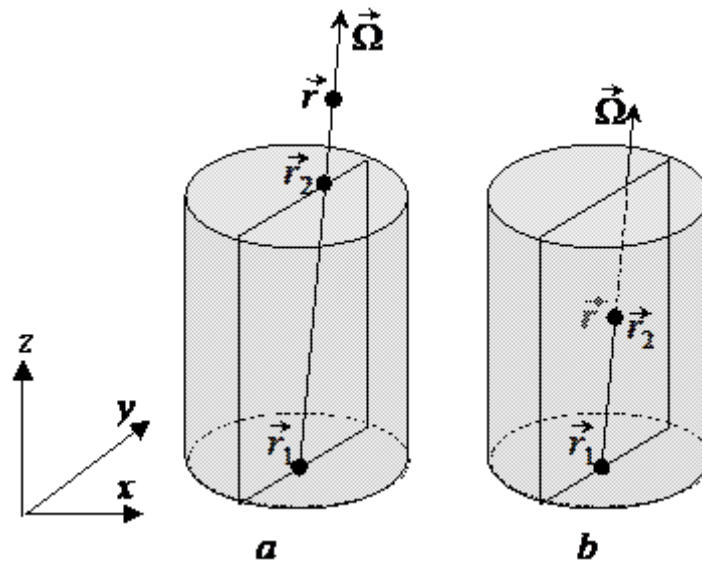


Fig. 19. Integration scheme in problems with cylindrical source

If current point \vec{r} is out of cylinder, integration is difficult to be done, if only strong constraints to total cross section $\sigma(\vec{r})$ are not imposed (for example, one can assume that cross section is dependent only on one spatial variable).

In general case one needs to use a simplified algorithm. We decompose the cylinder-source into a sum of source, each of them is considered to be point. The less angle δ , at that cylinder V_0 is being viewed from current point \vec{r} , the less number of points of division, see Fig. 18.

Further we consider the model problem (see Fig. 20) where homogeneous parallelepiped comprises homogeneous cylinder-source.

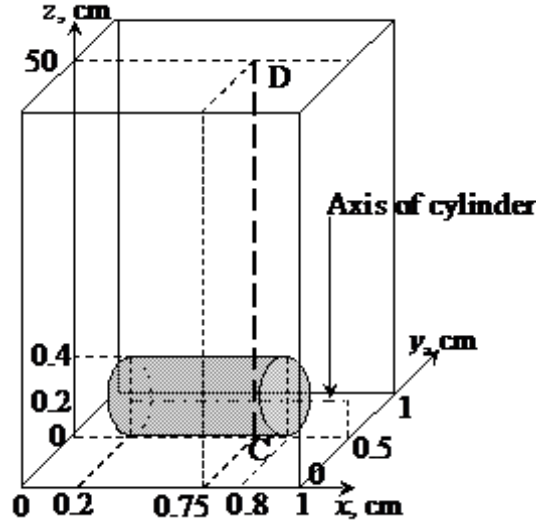


Fig. 20. Calculation region of model problem with cylindrical source.

Collision is isotropic and the following values of coefficients are used:

in the parallelepiped $\sigma=0.1\text{cm}^{-1}$, $\lambda=0.1$,

in the cylinder $\sigma=1.5\text{cm}^{-1}$, $\lambda=0.8$.

Non-re-entrant boundary conditions are defined on whole external boundary ∂G .

We use basic spatial grid C_1 composed by $10 \times 10 \times 216$ meshes and uniformly refined spatial grids C_2 , that consists of $20 \times 20 \times 432$ meshes.

To approximate angular dependence of solutions, Carlson's quadrature S_N and composite quadratures S_{N,M,θ_0} are applied. Grid S_N and M additional nodes concentrated in the vicinity of the pole of the unit sphere form quadrature S_{N,M,θ_0} . These additional nodes are located in interval $(0, \theta_0)$ for polar angle θ and in interval $(0, \pi)$ for azimuth φ (see Fig. 1). Angle θ_0 is measured by degrees.

Obtained scalar fluxes in the line CD (see Fig. 20) are plotted in Fig. 21.

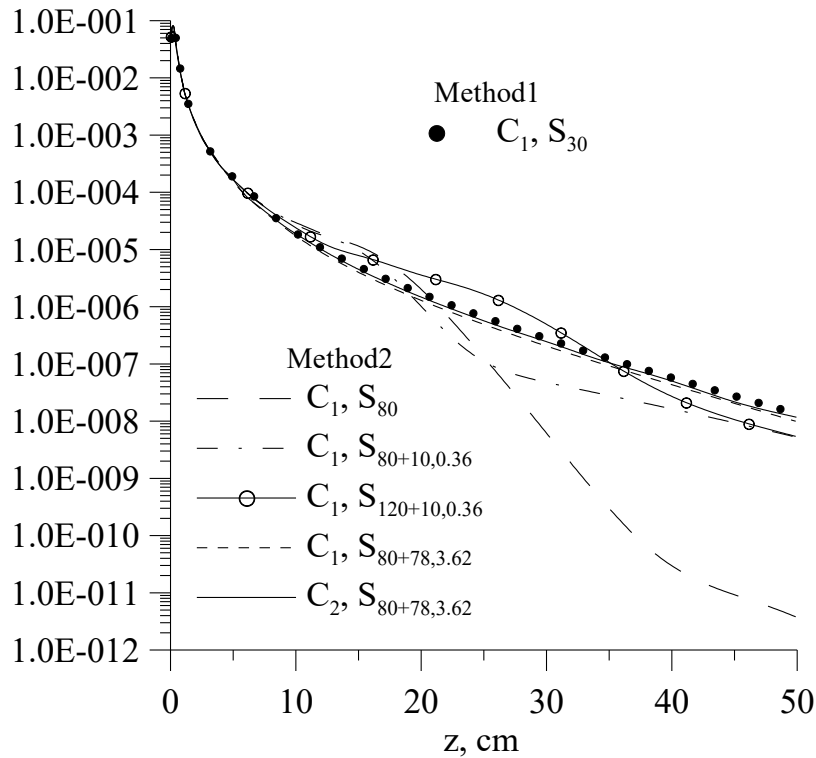


Fig. 21. Scalar fluxes in the line CD in model problem on the cylindrical source.

Method 1 is based on semi-analytical algorithm to calculate un-collided radiation intensity. This function is defined by a grid scheme in method 2. It can be concluded that the presented semi-analytical algorithm permits to neglect unduly refined grids and thus allows to reduce running time. In particular, results presented by the black spots (see Fig 21) are obtained 88 times faster than results plotted by the solid curve.

Computation results of two model problems of radiation shielding obtained by the presented semi-analytical method and compared with Monte-Carlo results are put in (Nikolaeva O.V. et al, 2005).

Conclusion

We present special numerical algorithms for discrete ordinate method to calculate radiation fields from localized sources. Such sources are typical to many practical problems of mathematical physics: atmospheric optic, radiation shielding, biomedicine, ray therapy and others.

As far as such sources are usually described by delta-functions, preliminary theoretical analysis based on generalized functions technique should be performed. By means of this approach solution components corresponding to un-collided and first-collided radiation fields and first-collided and twice-collision sources have been found and expanded over spherical harmonics in transport problems with Cartesian 3D geometry at fairly arbitrary boundary conditions. Besides, the grid versions of these algorithms have been developed. Presented numerical results show high accuracy and efficiency of developed algorithms: they provide capability to carry out calculations without specially refined grids and guarantee result stability with respect to grid variations. Thus they permit to find reliable solutions to complicated radiation transport problems for tolerable time.

Acknowledgments

This work was supported by Presidium of RAS via research program N 14 ("Fundamental Problems of Computer Science and Informational Technologies")

Appendix. The code RADUGA-5.1(P)

In this section we outline the features of code RADUGA-5.1(P), that has been developed to solve transport equation in 1D, 2D and 3D geometries under weak restrictions on radiation sources and transport equation coefficients.

- ❖ Regions with Cartesian slab (z) , (x, y, z) , (x, y) and cylindrical (r, ϑ, z) , (r, ϑ) , (r, z) coordinates are under consideration.
- ❖ Radiation fields produced by isotropic internal source, uniformly radiating cylinder, point source, parallel beam and narrow ray can be simulated.
- ❖ Phase functions can be either expanded over the Legendre's polynomial or presented by their values at some grid nodes.
- ❖ Inner boundaries can be defined by surfaces of some simple bodies (parallelepipeds, cylinders, spheres, cones, prisms, regular hexahedrons in 3D regions and rectangles, irregular quadrangles and triangles, sectors, circles, regular hexagons, ellipses in 2D regions can be used). Coefficients of transport equation (total cross section and single scattering albedo) are assumed either to be constant inside of each body or to be defined via their values in a spatial grid meshes.
- ❖ Periodic condition or reflection ones can be defined in exterior boundary of a calculation region. Specular, Lambertian, total interior reflection laws are under consideration.
- ❖ Angular quadratures of several widely known types (in particular, Carlson's and Gauss's quadratures) and orthogonal spatial grids are included.
- ❖ Un-collided radiation components from some sources (parallel beam, narrow ray, point source) have been calculated analytically. Un-collided radiation component from cylinder-source can be calculated semi-analytically.
- ❖ First-collided radiation component from narrow beam and from point source of small aperture can be defined semi-analytically as well.
- ❖ Multi-collided radiation component is calculated with the help of grid scheme of well-known WDD family of first or second accuracy order. The DD, St, DD/St, AWDD and SWDD schemes (Bass L.P., Nikolaeva O.V., 1997 and Nikolaeva O.V., 2004) are included.
- ❖ A calculation region can be divided into sub-regions and local spatial and angular grids can be introduced for each of them.
- ❖ An angular grid can be refined in some solid angle.
- ❖ The source iteration method is being applied to resolve a system of grid equations. The minimal residual algorithm is being used to accelerate source iterations.
- ❖ Standard FORTRAN was used as programming language in the code.
- ❖ A spatial decomposition method is used to distribute computations among processors. The widely-known MPI language commands are applied to information exchange among processors.

References

Alcouffe R.E., O'Dell R.D., Brinkley F.W. (1990). A First-Collision Source Method That Satisfies Discrete Sn Transport Balance. *NSE*. 105:198-203

Alcouffe R.E. et al (2000). Partisn. In *Proc of Int. Conf. Physor-2000*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, CD.

Aussourd Ch. (2003). A TN Adaptive Ray Effect Mitigation for Styx 3D. *Proc. of Joint Int. Conf. on Supercomputing in Nuclear Applications*, Paris, France, CD.

Barichello L.B., Siewert C.E. (2000). The Searchlight Problem for Radiative Transport in a Finite Slab. *J. Comp. Phys.* 157:707-726.

Bass L.P., Nikolaeva O.V. (1997). Correct Calculation of Angular Flux Distributions in Strongly Heterogeneous Media and Voids. In *Proc. of Int. Conf. Mathematical Methods and Supercomputing for Nuclear Applications*, Saratoga, New York, USA, 2:995–1004.

Bass L.P. et al (2005). The Influence of Neighbouring Clouds on the Clear Sky Reflectance Studied with the 3–D Transport Code RADUGA. *JQSRT*, 94:405-424

Bass L.P. et al (2006). Optical Radiation Propagation Simulation in a Phantom of Biotissue on Supercomputer MVS1000/M. *Mathematical modelling*, 18: 29-42 (in Russian).

Bykov A.V. et. al. Simulation of spatial-resolved reflectometry signal from a three-layer highly scattering medium in application to the problem of glucose level determination in human skin (in preparation for *Quantum Electronics*).

Evans K.F. (1998). The Spherical Harmonics Discrete Ordinate Method for Three–Dimensional Atmospheric Radiative Transfer. *J. Atmos. Sci.* 55:429–446.

Ganapol B.D. et. al. (1994). The Searchlight Problem for Neutron in a Semiinfinite Medium. *NSE*. 118:38-53.

Gelfand I.M., Shilov G.E. (1968) *Generalized functions*. Academy Press, New York.

Germogenova T.A. (1969). Generalized Solutions of the Radiation Transport Problems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 9:605-625.

Germogenova T.A. (1971). Problems with Localized Sources in Stationary Transport Theory. *Preprint №23, Keldysh Institute of Applied Mathematics*. (in Russian)

Morel J.E., Lathrop. K.D. (2004). Singular Solutions, Integral Transport Theory, and the Sn Method. *NSE*. 147:158-166.

Nikolaeva O.V. (2004). Special Grid Approximation for the Transport Equation in Strongly Heterogeneous Media with the (x, y) Geometry. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 44:835-855.

Nikolaeva O.V. et al. (2005). Development and Verification of the Code RADUGA-5.1(P). Proc. of Workshop on neutron-physical problems of nuclear energetic. <http://www.neutronica.ru/reports.php?page=1> (in Russian)

Oak Ridge (1998). One, Two- and Three Dimensional Discrete Ordinates Neutron/Photon Transport Code System. *CCC-650 DOORS3.2*.

Los Alamos. PARTISN — Introduction and System Overview. *CCS-4*.

Rhoades W.A., Azmy Y.Y. (1995). Three-Dimensional Sn Calculations with the Oak Ridge Tort Code. *In Proc. of Int. Conf. Mathematics and Computations, Reactor Physics, and Environmental Analyses*. 1:480–489.

Rybicki G.B. (1971). The searchlight problem with isotropic scattering. *JQSRT*. 11:827-849.

Sanchez R. (2000). On the Singular Structure of the Uncollided and First-collided Components of the Green's Function. *Ann. Nucl. Energy*. 27:1167-1186

Sanchez R., McCormic N. (2004). Discrete Ordinates Solutions for Highly Forward Peaked Scattering. *NSE*. 147:249-274

Siewert C.E. (1985) On the Singular Component of the Solution to the Searchlight Problem in Radiative Transfer. *JQSRT* 33:551-554

Smirnov V. I. (1964). *A course of higher mathematics*. Oxford: Pergamon Press

Vladimirov V.S. (1979). *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow: Mir

Voloschenko A.M. et al (2005). The CNCSN: One, Two- and Three-Dimensional Coupled Neutral and Charged Particle Discrete Ordinates Code Package. *Proc. of Int. Conf. Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications*, Avignon, France, CD