



Ю.Ф.Голубев, В.В.Корянов

Экстремальные  
локомоционные  
возможности  
инсектоморфных роботов

*Рекомендуемая форма библиографической ссылки*

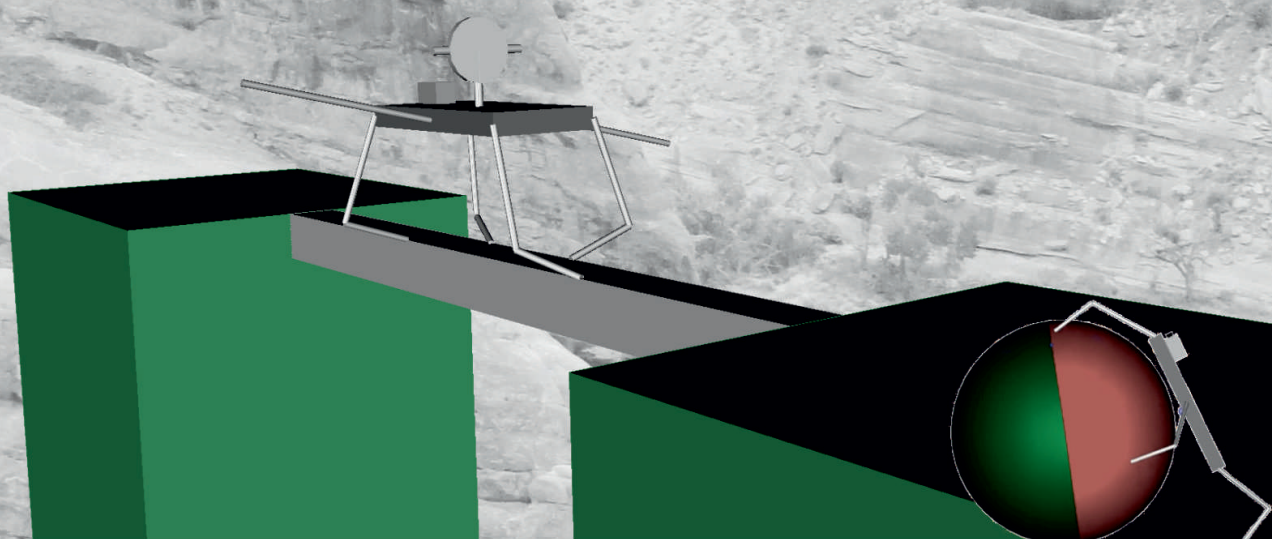
Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2018. 212 с.

doi:[10.20948/mono-2018-golubev](https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev)

URL: <http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/index.pdf>

Ю.Ф.Голубев, В.В.Корянов

# Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов



ИПМ им.М.В.Келдыша

Ю.Ф. Голубев, В.В. Корянов

**Экстремальные  
локомоционные возможности  
инсектоморфных роботов**

*Рекомендовано к изданию  
редакционно-издательским советом  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*

**ИПМ им. М.В. Келдыша  
Москва – 2018**

УДК 531.38

ББК 32.816

Г62

***Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. – М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. – 212 с.***

Исследуется проблема о построении и реализации движения автономного инсектоморфного робота на препятствиях повышенного уровня сложности. Предполагается, что робот не имеет специальных приспособлений в стопах ног и может для маневров использовать лишь силу кулоновского трения. Преследуется цель выявления экстремальных возможностей таких аппаратов на конкретных примерах изолированных препятствий и препятствий, объединенных в тренировочную полосу. Предлагаются эффективные алгоритмы формирования движения робота, обеспечивающие надежное выполнение соответствующих двигательных задач. Представлены результаты компьютерного моделирования полной динамики робота и окружающей его среды, демонстрирующие работоспособность описываемых алгоритмов, а также видеоматериалы, подробно иллюстрирующие процесс преодоления сложных препятствий. Книга предназначена для специалистов в области разработки робототехнических систем, аспирантов и студентов.

***Ключевые слова:*** инсектоморфный робот, полная динамика, сухое трение, комбинация препятствий

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор А.М. Формальский

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ: 16-19-10-705).

ISBN 978-5-98354-040-8

© Ю.Ф. Голубев, В.В. Корянов  
© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

## Оглавление

Предисловие . . . . .	5
Список обозначений . . . . .	9
Введение . . . . .	11
<b>1. Математическая модель робота</b>	<b>17</b>
1.1. Базовая схема устройства робота . . . . .	17
1.1.1. Модификации конструкции робота . . . . .	20
1.2. Силовое оснащение робота . . . . .	22
1.3. Формирование программного движения . . . . .	23
1.4. Блок-схема моделирования движения . . . . .	28
<b>2. Преодоление стационарных препятствий</b>	<b>32</b>
2.1. Равновесие на вертикальном угле и столбе . . . . .	32
2.2. Равновесие приставной лестницы . . . . .	37
2.3. Переход по столбу на высокий уступ . . . . .	38
2.3.1. Предлагаемый сценарий . . . . .	38
2.3.2. Построение движения . . . . .	40
2.3.3. Компьютерное моделирование . . . . .	53
2.4. Залезание на крышу по углу дома . . . . .	55
2.4.1. Двигательная задача . . . . .	55
2.4.2. Движение вверх по вертикальному углу . . . . .	56
2.4.3. Переход на горизонтальную крышу . . . . .	60
2.4.4. Численное исследование . . . . .	65
2.5. Подъем на уступ по приставной лестнице . . . . .	68
2.5.1. Описание ситуации . . . . .	68
2.5.2. Построение движения . . . . .	69
2.5.3. Залезание на лестницу . . . . .	70
2.5.4. Движение по лестнице . . . . .	73
2.5.5. Поворот в горизонтальное положение . . . . .	74
2.5.6. Компьютерный эксперимент . . . . .	75
2.6. Переход между уступами по брусу . . . . .	76
2.6.1. Решаемая задача . . . . .	76
2.6.2. Построение движения . . . . .	77
2.6.3. Численное моделирование . . . . .	81
<b>3. Инсектоморфный робот на шаре</b>	<b>83</b>
3.1. Динамика системы робот–шар . . . . .	83
3.1.1. Стабилизация равновесия на шаре . . . . .	83

3.1.2.	Робот на прямолинейно катящемся шаре . . . . .	89
3.1.3.	Анализ возможности залезания на шар . . . . .	94
3.1.4.	Динамика слезания робота с шара . . . . .	97
3.1.5.	Максимальный радиус шара . . . . .	99
3.1.6.	Поворот вектора скорости шара . . . . .	103
3.2.	На шаре между уступами . . . . .	108
3.2.1.	Описание проблемы . . . . .	108
3.2.2.	Переход с уступа на шар . . . . .	109
3.2.3.	Переход с шара на уступ . . . . .	110
3.2.4.	Компьютерная реализация движения . . . . .	110
3.3.	Залезание на шар . . . . .	113
3.3.1.	Исходная позиция для залезания на шар . . . . .	113
3.3.2.	Переход на вершину шара . . . . .	118
3.3.3.	Боковое движение . . . . .	121
3.3.4.	Компьютерное моделирование . . . . .	123
3.4.	Перелезание через незакрепленный шар . . . . .	125
3.4.1.	Сценарий решаемой задачи . . . . .	125
3.4.2.	Слезание с шара . . . . .	125
3.4.3.	Численный эксперимент . . . . .	131
3.5.	Робот на шарах . . . . .	133
3.5.1.	Формулировка проблемы . . . . .	133
3.5.2.	Сценарий решения . . . . .	133
3.5.3.	Контрольные проверки . . . . .	139
3.5.4.	Результаты численного моделирования . . . . .	141
<b>4.</b>	<b>Преодоление водной преграды</b>	<b>145</b>
4.1.	Влияние воды на плот . . . . .	145
4.1.1.	Равновесие плота на поверхности воды . . . . .	146
4.1.2.	Модель сопротивления воды . . . . .	155
4.2.	Уравнения движения плота на спокойной воде . . . . .	183
4.2.1.	Постоянная вертикальная сила . . . . .	186
4.2.2.	Компоненты силы постоянны в осях, связанных с плотом . . . . .	188
4.2.3.	Сила постоянна в неподвижных осях . . . . .	191
4.3.	Переправа робота на плоту . . . . .	195
4.4.	Компьютерное моделирование . . . . .	199
	Заключение . . . . .	201
	Список литературы . . . . .	204

## Предисловие

В настоящее время основу сухопутного транспортного оснащения общества составляют колесные и гусеничные средства передвижения. Они удобны в эксплуатации, технологичны, и для их изготовления и совершенствования накоплен огромный опыт и промышленный потенциал. Повсеместное применение таких средств вызвало развитие дорожной индустрии и появление транспортных магистралей, которые, однако, в значительной мере разрушают экологию окружающей среды. Вместе с тем использование колесных транспортных средств в неподготовленной окружающей среде может вызывать значительные трудности, а гусеничные средства, обладая значительной проходимостью, губительно действуют на верхние слои почвы. Перечисленные обстоятельства заставляют исследователей обратиться к поиску новых типов движителей, перенеся центр тяжести проблемы на совершенствование конструкции машин, вместо приспособления окружающей среды к потребностям транспортных средств. Не следует забывать о том, что задача создания новых транспортных средств важна и с точки зрения освоения человеком других планет Солнечной системы. Человек вряд ли встретит на других планетах местность, пригодную для перемещения транспортных средств, распространенных на Земле. Примеры удачного решения задачи движения по неподготовленной местности можно найти в природе, наблюдая за живыми существами, перемещающимися с помощью конечностей (ног). В то время как для перемещения колесного и гусеничного экипажей нужна непрерывная колея, шагающие объекты используют лишь дискретные участки местности, необходимые для постановки ног; благодаря этому они лучше приспособлены к условиям бездорожья.

В научной, технической литературе, в Интернете можно найти много примеров практических разработок шагающих машин различного назначения. Каждая из них обладает теми или иными особенностями по сравнению с другими. Однако представленная в существующей литературе, в Интернете картина современного уровня исследований скорее напоминает лоскутное одеяло, чем результат систематического подхода к созданию транспортных средств будущего, обладающих высокой проходимостью. Эффективный анализ преимуществ того или иного типа транспортных средств можно осуществлять с помощью всестороннего компьютерного моделирования

поведения шагающих машин в среде с препятствиями. Для этого необходимо лишь иметь соответствующее программное обеспечение без дополнительных материальных затрат.

В книге Ю.Ф. Голубева и В.В. Корянова сконцентрирован многолетний опыт авторов по исследованию средствами компьютерных экспериментов предельных возможностей шестиногих шагающих машин при преодолении экстремальных препятствий. В основу исследования ими был положен разработанный Д.Ю. Погореловым программный комплекс “Универсальный механизм”. Этот комплекс позволяет эффективно численно исследовать движение систем многих взаимодействующих твердых тел. С помощью него авторы создали компьютерную модель шестиногого инсектоморфного робота, имеющую 24 степени свободы, и модель окружающей его трехмерной внешней среды со стационарными и подвижными препятствиями. Ими была выбрана простейшая кинематическая схема робота в виде прямоугольного корпуса с прикрепленными к нему по бокам ногами и простейшая модель шарнирных электродвигателей с самоиндукцией. Принятая авторами кинематическая схема свободна от каких-либо конструктивных предпочтений и позволяет в “первом” приближении выявить принципиальные вопросы проходимости шестиногих машин. Взаимодействие с опорой определялось только силами сухого трения без всяких дополнительных приспособлений.

Цель исследований состояла в разработке алгоритмов управления компьютерной моделью робота, передвигающегося в среде с препятствиями экстремальной сложности. Такие препятствия могут представить определенные трудности даже для опытных верхолазов и туристов. Авторы предполагают, что, обучая виртуального робота преодолевать эталонные препятствия, можно накопить достаточный запас навыков, гарантирующий возможность безотказной автономной работы реального мобильного робота в не подготовленной заранее окружающей среде. Непротиворечивая работа полученных алгоритмов должна свидетельствовать о принципиальной реализуемости построенных движений и о потенциальных возможностях аппаратов рассматриваемого типа при движении по неподготовленной труднопроходимой местности. Кроме того, заодно можно получить и ряд уточняющих рекомендаций, касающихся конструкции роботов, способов управления ими. Шагающий аппарат обладает большим числом степеней свободы, поэтому он должен быть оснащен большим числом приводов. Например, лишь одна нога шестиногого аппара-



та может иметь три степени свободы относительно его корпуса, при этом она должна иметь три привода. Синтез алгоритма управления системой с большим числом приводов представляет собой сложную задачу. Авторы монографии успешно справляются с этой задачей, организуя целый ряд движений шестиногого аппарата, преодолевающего те или иные препятствия.

Рассмотренный в книге набор предлагаемых роботу эталонных препятствий включает в себя прислоненный к уступу высокий вертикальный столб, приставную лестницу, вертикальный угол дома, узкий брус, лежащий между двумя уступами, свободно катающиеся шары, неширокую, но протяженную водную преграду. Описание алгоритмов управления предваряется исчерпывающим аналитическим исследованием возможности преодоления того или иного препятствия как в режиме квазистатики, так и с учетом динамики робота и движущихся препятствий. При аналитических исследованиях авторы опираются на теоремы теоретической механики. Все алгоритмы управления отрабатывались с помощью компьютерного моделирования так, чтобы выполнялись требования устойчивости, непересечения ног в процессе движения, непроскальзывания ног относительно точек опоры, учитывались и некоторые другие ограничения. Результаты компьютерных исследований представлены в виде графиков, отражающих динамику выполняемых движений, а также видеороликами, наглядно и подробно показывающими процесс движения в целом и качество его выполнения. Наличие видеоматериала выгодно отличает рецензируемую книгу от других аналогичных изданий.

В заключении авторы формулируют ряд общих рекомендаций, могущих оказаться полезными для разработчиков мобильных роботов различного назначения. Предполагается, что электронный вариант книги вместе с видеороликами будет доступен на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Материал книги разрозненно опубликован в виде значительного количества журнальных статей и статей в материалах конференций, как на русском языке, так и на английском. Собранный воедино, этот материал, несомненно, будет интересен специалистам по механике, по управлению как систематическое изложение новых разработанных авторами методов организации движения перспективных робототехнических систем, а также подходов к конструированию таких систем на основе компьютерного моделирования. Авторы монографии – известные в нашей стране

и за рубежом специалисты в области теоретической механики, теории управления, в области разработки сложных робототехнических систем.

Издание книги Ю.Ф. Голубева и В.В. Корянова “Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов” представляется актуальным и своевременным в связи с огромным интересом специалистов по робототехническим системам к еще не решенной проблеме создания автономных мобильных роботов, способных надежно функционировать в труднодоступных районах Земли и планет Солнечной системы.

Рецензент доктор физико-математических наук, профессор  
А.М. Формальский

## Список обозначений

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  — скалярное произведение вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  — векторное произведение вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$

$[\dots]$  — целая часть числа, заключенного в скобки

$\langle \dots \rangle$  — дробная часть числа, заключенного в скобки

$m_b$  — масса корпуса робота

$a_r, b_r, c_r$  — соответственно ширина, длина, толщина корпуса робота

$a, b, d$  — соответственно половина длины, половина ширины, половина толщины плота

$m_1$  — масса бедра

$m_2$  — масса голени

$l_1$  — длина бедра

$l_2$  — длина голени

$O_r x_r z_r$  — система координат, жестко связанная с корпусом робота

$i$  — номер ноги

$\mathbf{P}_i = (x_{pi}, y_{pi}, z_{pi})$  — координаты точек крепления (подвеса) ног к корпусу

$\alpha_i$  — угол вращения плоскости ноги вокруг строительной вертикали корпуса

$\beta_i$  — угол между строительной вертикалью и бедром

$\gamma_i$  — угол между бедром и голенью

$x_i, y_i, z_i$  — координаты стопы  $i$ -й ноги в осях  $O_r x_r z_r$

$\mathbf{r}_i = (q_{xi}, q_{yi}, q_{zi})$  — вектор стопы относительно начальной точки бедра

$M$  — силовой момент, развиваемый электроприводом

$\mathbf{F}_s$  — реакция опоры

$\mathbf{F}_\tau$  — сила трения

$\mathbf{N}$  — нормальная составляющая реакции опоры

$c_n$  — контактная жесткость

$d_n$  — коэффициент вязкого трения

$\mathbf{r}_T$  — радиус-вектор точки контакта стопы с опорой

$\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор реального положения стопы

$k_f$  — коэффициент сухого трения

$O\xi\eta\zeta$  — неподвижная система координат

$C'_i x'_i y'_i z'_i$  — системы координат шаговых циклов

$A$  — матрица направляющих косинусов осей  $O_r x_r z_r$  в осях  $O\xi\eta\zeta$

$B_i$  — матрицы направляющих косинусов осей  $C'_i x'_i y'_i z'_i$  в осях  $O\xi\eta\zeta$

$T$  — период походки

$\varpi$  — угловая скорость прохождения дуги эллипса шагового цикла

$\mathbf{r}_c = (\xi_c, \eta_c, \zeta_c)$  — радиус-вектор центра масс корпуса в осях  $O\xi\eta\zeta$

$\mathbf{r}_m(t)$  — радиус-вектор центра масс робота в осях  $O\xi\eta\zeta$

$\boldsymbol{\nu}$  — внешняя нормаль к опорной поверхности

$r$  — радиус основания столба

$\psi$  — половина раствора двугранного вертикального опорного угла

$P$  — вес робота

$h$  — высота столба

$h_1$  — высота уступа

$\xi_f, \eta_f, \zeta_f$  — абсолютные координаты передней точки корпуса робота, имеющей координаты  $x_r = a_r/2$ ,  $y_r = 0$ ,  $z_r = 0$  в осях  $O_r x_r y_r z_r$

$\epsilon$  — программное заглубление стоп опорных ног относительно уровня поверхности

$R$  — радиус шара

$\gamma$  — удельный вес воды

$\alpha$  — коэффициент вязкого трения воды

$\alpha_1$  — коэффициент лобового сопротивления воды

$C_p$  — центр масс плота

$C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  — декартов репер, жестко связанный с плотом

Д.Е. Охоцимскому посвящается

*Дорогу осилит идущий...*

Ригведа

*Так и надо идти, не страшась пути,  
Хоть на край земли, хоть за край...*

Редьярд Киплинг

## Введение

Проблема создания транспортных средств, способных надежно работать в условиях экстремального бездорожья, издавна привлекает внимание ученых, разработчиков и изобретателей. Она актуальна в связи с необходимостью освоения новых неизученных территорий как на Земле, так и на других планетах. Целесообразное движение в среде с препятствиями достаточно успешно выполняется живыми существами с помощью конечностей. По аналогии со способом передвижения животных изобретателями создаются разнообразные механические устройства, использующие в качестве движителя искусственные ноги. Преимущество шестиногих шагающих машин состоит в том, что они сравнительно просто могут обеспечить статическую устойчивость на всех стадиях при движении по горизонтальной или почти горизонтальной поверхности [1]. Поэтому начальные этапы практической разработки таких машин были направлены на исследование возможности движения по опорной поверхности небольшого наклона со сравнительно малыми неровностями. Указанный тип поверхностей позволяет при движении сохранять близкую к горизонтальной ориентацию корпуса робота [2–8] за счет либо простого перешагивания препятствий, либо необходимой адаптации расстояния от стопы до корпуса аппарата и небольшого наклона корпуса. Шагающие машины с сочлененным корпусом, так же как

машины, способные совершать прыжки [1, 9–15], допускают отказ от требования, чтобы неровности опоры были малыми. При этом приемлемая высота препятствий оказывается сравнимой с максимальной высотой машины при условии, что хотя бы одна нога опирается о поверхность, на которой стоит препятствие. Преодолеть ограничения на высоту препятствий в принципе удастся при использовании шагающих машин с вакуумными присосками в стопах [16, 17] или с возможностью обеспечения электростатической или других видов адгезии [18–21]. Эти машины способны двигаться по вертикальным стенам, и им необязательно обеспечивать принадлежность проекции центра масс опорному многоугольнику [1]. Вместе с тем они нуждаются в достаточно сложных устройствах для создания необходимой адгезии или достаточного уровня вакуума в присосках.

Очевидно, что шагающие машины имеют принципиальную возможность двигаться по препятствиям достаточно произвольной формы и значительной высоты вдоль вертикальных опорных поверхностей, используя лишь контактные реакции опоры. Трудность выполнения движения в этом случае обусловлена тем, что реакции опоры в точках контакта с такой опорной поверхностью не должны выходить за пределы конусов трения, оси которых могут быть направлены в разные стороны [22]. В связи с этим при разработке алгоритмов управления необходимо анализировать проблемы обеспечения статической устойчивости и рационального распределения реакций [1]. В наиболее трудных ситуациях при таком движении возникает потребность преодоления веса робота посредством только сил трения. Способность робота передвигаться по сложной местности можно выработать, последовательно обучая его преодолевать как типичные изолированные препятствия, так и их разумные комбинации [23]. Такой подход широко применяется для тренировок альпинистов, пожарных, спасателей и в других прикладных видах спорта. Обучающие наборы стандартных препятствий могут содержать различное число образцов в зависимости от структуры местности, по которой робот должен передвигаться. В предлагаемой книге собраны алгоритмы, предназначенные для движения по некоторым наиболее трудно преодолимым препятствиям, содержащим вертикальные опорные поверхности, имеющим высокую степень неустойчивости или являющимися нестационарными. Препятствия могут быть комбинированными, что, естественно, потребует комбинирования алгоритмов их преодоления, разработанных для изолированных

препятствий. В книге будут описаны необходимые для этого мероприятия.

В качестве типичного примера опорной поверхности указанного типа может служить вертикальный цилиндрический столб подходящего диаметра. Чтобы на него забраться, например для того, чтобы поправить уличное освещение, робот должен сжать ногами столб и тем самым создать достаточную силу трения. Наличие шести ног облегчает задачу сжатия столба без потери равновесия, поскольку робот может использовать симметричную следовую последовательность [24]. Ниже будут представлены методы построения движения робота при перемещении с горизонтальной поверхности на вертикальный столб, движении вдоль столба, залезании на его вершину, при спуске и слезании со столба [25].

Другим примером может служить задача залезания на высокий уступ с использованием стоящего рядом с ним вертикального столба [26, 27]. Высота уступа столь велика, что как изолированное препятствие он оказывается для робота непреодолимым. Вместе с тем способность робота карабкаться на столб и далее на его вершину решает проблему преодоления указанной комбинации препятствий. В работе представлены различные варианты алгоритма построения движения шестиногого робота в зависимости от сочетания высот столба и уступа. Обратное движение с уступа на столб и переход на лежащую внизу опорную поверхность может быть получено путем обращения времени в описываемых ниже алгоритмах формирования программного движения. Необходимо учесть также случай, когда робот может воспользоваться для залезания на уступ приставной лестницей [28, 29].

В качестве элементарного препятствия может служить также угол дома. Необходимость залезть на такое препятствие может появиться, например, в случае пожара. Вертикальный угол имеет стандартный растр  $\pi/2$  [30], и залезание на него выполняется с горизонтальной опорной поверхности. Реализацию движений требуется осуществлять с помощью сил сухого трения. Очевидно, что коэффициент трения, меньший или равный 1, не может в данном случае обеспечить возникновение реакций поверхности, необходимых для сохранения статической устойчивости. Проблема построения движения здесь состоит в том, чтобы указать набор приемов, позволяющих существенно уменьшить коэффициент трения, реально обеспечивающий выполнение маневра. Требуется исследование также за-

дача [28, 31] о возможности залезания на крышу вертикального угла по его стенам. Картина движения при переходе с горизонтальной поверхности на угол и движения по вертикали вверх определяется структурой походки галоп. Средствами компьютерного моделирования можно показать, что для реализации построенного движения достаточен коэффициент трения, равный 1,1.

Еще одно часто встречающееся препятствие, преодоление которого исследуется в книге, представляет собой узкий брус, проложенный между двумя уступами одинаковой высоты. Интерес представляет случай [30], когда из-за узости бруса опорный многоугольник не обеспечивает достаточного поперечного запаса статической устойчивости. По существу робот в этом случае представляет собой физический маятник, находящийся в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия. Обеспечение устойчивости движения робота может достигаться здесь динамическими средствами за счет использования средних ног в качестве маховика, изменяющего кинетический момент корпуса относительно опорной линии при диагональной походке [22, 32]. В этом случае целесообразно использовать диагональную походку на передних и задних ногах.

Для повышения проходимости робота полезно исследовать возможность обеспечения динамической устойчивости на опорных объектах, находящихся в состоянии безразличного равновесия, таких как цилиндр или шар (бревно или валун), лежащих на твердой горизонтальной поверхности. Примеры построения алгоритмов стабилизации робота на цилиндре или других неустойчивых объектов с помощью маховика можно найти, например, в [33, 34]. Вызывает интерес использование динамических свойств таких объектов с целью перемещения их вместе с роботом в заданное место. В [35] описан робот (аналог перевернутого маятника), балансирующий на незакрепленном шаре при опоре о шар тремя колесами произвольного качения (omnidirectional). Комбинация из трех подобных роботов может использоваться для создания грузовых платформ.

Простейшей задачей указанного типа для инсектоморфного робота представляется задача о переходе робота с уступа на массивный шар, который может катиться по горизонтальной плоскости, последующем разгоне и торможении шара за счет специальных движений робота на шаре, переходе робота с шара на другой уступ [36]. Ниже предлагается набор приемов, позволяющих роботу выполнять маневры при заданном коэффициенте трения.



Более трудной представляется задача о залезании робота на шар, который может свободно кататься по горизонтальной плоскости. Взобравшись на шар, робот должен удерживаться на нем в стандартной позиции, обеспечивать ускорение или замедление движения шара специфическими движениями корпуса с целью перемещения системы робот–шар в требуемое место на плоскости, где робот должен перейти с шара на уступ. Также может потребоваться набор приемов, позволяющий роботу слезть с шара [37], а также перейти с одного шара на другой свободный шар с последующим слезанием на неподвижную опорную плоскость. Решение этих задач затруднено тем, что все элементы системы находятся в относительном движении [38, 39]. Однако, как показано ниже, имеется принципиальная возможность построения соответствующих методов устойчивого управления.

Исследование свойств алгоритмов управления движущимися объектами средствами компьютерного моделирования предполагает наличие как математической модели самого движущегося объекта, так и среды, в которой будет происходить изучаемое движение и с элементами которой объект будет взаимодействовать [40]. Автономный мобильный робот может активно использовать местные предметы как средство для выполнения поставленных перед ним задач [29, 36, 37, 42–44]. При этом необходимо иметь математические модели силового взаимодействия робота с элементами среды, а также и элементов среды между собой, если эти элементы могут совершать самостоятельное движение. Например, в работах [38, 39] при моделировании движения робота на свободно катающихся шарах использовались модель сухого трения при взаимодействии стоп ног робота с шарами и модель трения качения шаров по плоскости.

Аналогичные проблемы возникают при разработке алгоритмов управления для форсирования водной преграды с использованием местных предметов [45, 46]. При компьютерной отработке способов преодоления препятствий в виде водной преграды потребуются модели, описывающие воздействие воды на перемещающиеся в ней тела. Пусть наземный автономный мобильный робот не имеет плавучести и не приспособлен к функционированию в водной среде. Тогда для него подходящим способом преодоления широкой водной преграды будет применение какого-нибудь плавучего предмета достаточного размера и обладающего устойчивостью на водной поверхности. Одним из таких простейших и естественных предметов может

служить прямоугольный плот, имеющий достаточную горизонтальную поверхность. На плот, плавающий по поверхности воды, помимо силы тяжести и архимедовой силы, действуют силы сопротивления воды движению [47]. Эти силы классифицируются как силы вязкого трения, пропорциональные скорости движения плота относительно потока, сопротивление формы, сопротивление волнообразования, которые пропорциональны квадрату скорости. Все эти силы сопротивления направлены противоположно скорости плота относительно воды. Даже в случае стационарного установившегося движения потока теоретический расчет этих сил весьма затруднен из-за наличия угловых точек поверхности плота и вихреобразования [48]. Одним из действенных способов оценить силы сопротивления воды может служить проведение необходимых экспериментов с применением соответствующих методов подобия [49, 50]. Но и в этом случае неизбежным остается предположение об установившемся стационарном движении воды [51]. Вместе с тем плот при движении по нему робота может совершать сложное как угловое, так и поступательное движение относительно воды, вызывая взаимное неустановившееся движение водных масс. В данной работе применяется представленная ниже струйная модель воздействия воды на прямоугольный плот. Описывается алгоритм преодоления роботом небольшой водной преграды на плоту. Слово “небольшой” означает, что робот не в состоянии просто перешагнуть через преграду, но может, оттолкнувшись от одного берега преграды, переплыть на плоту по инерции до ее другого берега. Трудность задачи состоит в том, что плот не закреплен и представляет собой колеблющуюся нестационарную опору.

Принципиальная реализуемость, работоспособность и эффективность описанных в книге алгоритмов управления движением инсектоморфного робота в среде с препятствиями была продемонстрирована путем компьютерного моделирования полной динамической твердотельной модели управляемого движения робота, имеющего 24 степени свободы, и подвижных препятствий средствами программного комплекса “Универсальный механизм” [40, 41] с учетом сил сухого и вязкого трения. С этой целью было подготовлено и верифицировано соответствующее программное расширение комплекса, включающее набор DLL библиотек. Получаемое движение в целом можно наблюдать на экране монитора. Соответствующий видеоролики доступны для просмотра на сайте ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.

# Глава 1.

## Математическая модель робота

### 1.1. Базовая схема устройства робота

Предполагается [1], что робот состоит из твердого корпуса массы  $m_b$  (параллелепипед со сторонами  $a_r, b_r, c_r$ ) и шести одинаковых ног, каждая нога имеет 3 степени свободы и состоит из двух звеньев (бедро массы  $m_1$  и голень массы  $m_2$ ). В целом робот имеет 24 степени свободы: 18 шарнирных углов и 6 степеней свободы корпуса. Бедро имеет длину  $l_1$ , голень —  $l_2$ . С корпусом жестко связана декартова правая система координат  $O_r x_r y_r z_r$ , начало  $O_r$  которой совпадает с центром корпуса, ось  $O_r z_r$  ориентирована вдоль строительной вертикали корпуса, ось  $O_r x_r$  направлена вдоль корпуса перпендикулярно его переднему краю, ось  $O_r y_r$  образует с ними правую тройку. Координаты точек  $\mathbf{p}_i$  крепления ног к корпусу в системе  $O_r x_r y_r z_r$  имеют вид

$$\mathbf{p}_i = (x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}), \quad x_{pi} = \begin{cases} -a_r/2, & i = 1, 2, \\ 0, & i = 3, 4, \\ a_r/2, & i = 5, 6, \end{cases} \quad y_{pi} = (-1)^i b_r/2, \quad z_{pi} = 0.$$

Индекс  $i$  задает номер ноги, причем 1 и 2 отвечают паре задних ног, 3 и 4 — паре средних ног, а 5 и 6 — паре передних ног, и нумерация ведется справа налево относительно положительного направления оси  $O_r x_r$  (рис. 1.1.1).

Строительная вертикаль в точке крепления ноги, ее бедро и голень принадлежат одной плоскости. Эта плоскость может вращаться вокруг строительной вертикали на угол  $\alpha_i$ . Когда  $i$  четно,  $\alpha_i$  отсчитывается от положительного направления оси  $O_r y_r$ ,  $\beta_i$  есть угол между отрицательным направлением строительной вертикали и бедром,  $\gamma_i$  — угол между бедром и голенью.

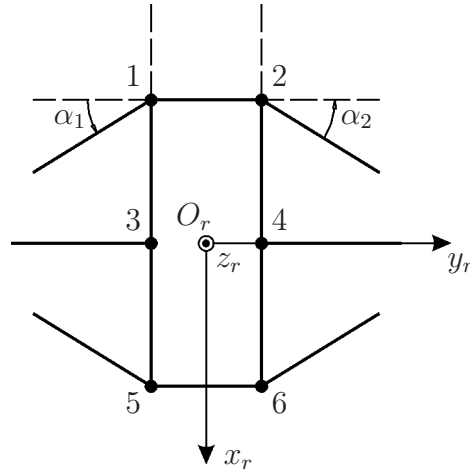


Рис. 1.1.1: Робот: вид сверху

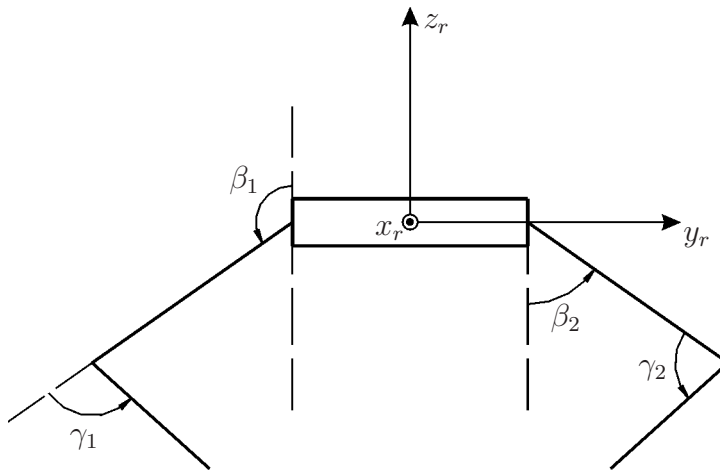


Рис. 1.1.2: Робот: вид спереди

Когда  $i$  нечетно, угол  $\alpha_i$  отсчитывается от отрицательного направления оси  $O_r y_r$ ,  $\beta_i$  – угол между положительным направлением строительной вертикали и бедром,  $\gamma_i$  – угол между голенью и продолжением бедра за колено.

На рис. 1.1.1 показаны оси, от которых отсчитываются углы  $\alpha_i$  для обеих сторон на примере углов  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $\alpha_2$  – от оси, проходящей через точки 2 и 4). Рис. 1.1.2 поясняет задание углов  $\beta_i$  и  $\gamma_i$ .

Таким образом, оси, от которых отсчитываются углы  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , для ног с нечетными номерами противоположно направлены аналогичным осям для ног с четными номерами (рис. 1.1.3). Это сделано для того, чтобы при взгляде с положительного направления оси  $O_r x_r$  все углы отсчитывались в положительном направлении.

Пусть  $(x_i, y_i, z_i)$  – координаты  $i$ -й стопы в осях  $O_r x_r y_r z_r$ . Имеем

$$\begin{aligned} q_{xi} &= x_i - x_{pi} = -[(-1)^i l_1 \sin \beta_i - l_2 \sin(\beta_i + \gamma_i)] \sin \alpha_i, \\ q_{yi} &= y_i - y_{pi} = [(-1)^i l_1 \sin \beta_i - l_2 \sin(\beta_i + \gamma_i)] \cos \alpha_i, \\ q_{zi} &= z_i - z_{pi} = (-1)^{i+1} l_1 \cos \beta_i + l_2 \cos(\beta_i + \gamma_i). \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

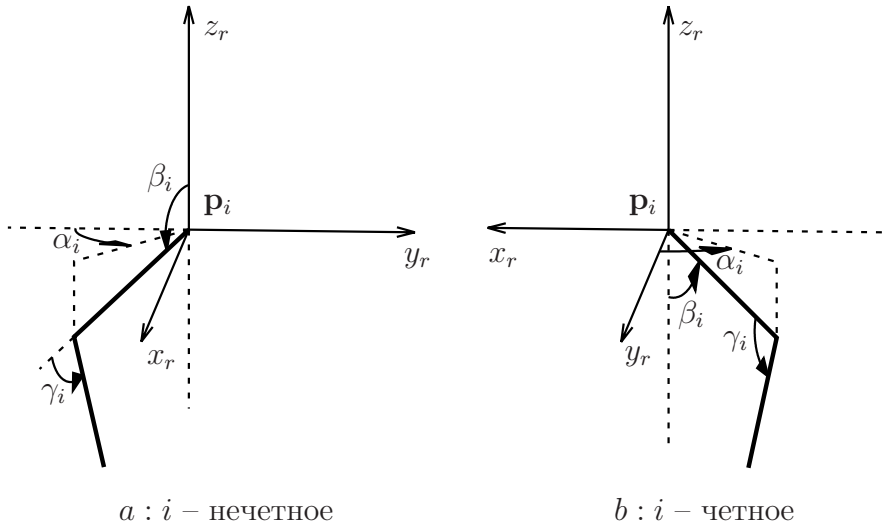


Рис. 1.1.3: Схема устройства ног

По заданным координатам стоп можно вычислить соответствующие углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Из уравнений (1.1.1) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} q_{yi} \operatorname{tg} \alpha_i &= -q_{xi}, \\ q_{xi}^2 + q_{yi}^2 + q_{zi}^2 &= l_1^2 + l_2^2 - (-1)^i 2l_1 l_2 \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Первое соотношение (1.1.2) можно разрешить относительно  $\operatorname{tg} \alpha_i$ , лишь если  $q_{yi} \neq 0$ . Если окажется, что  $q_{yi} = 0$ , но  $q_{xi} \neq 0$ , то для устранения особенности естественно принять значение угла  $\alpha_i = \pm \pi/2$  в зависимости от знака  $q_{xi}$  и номера  $i$ . Если же случилось  $q_{yi} = q_{xi} = 0$ , то разумно будет принять  $\alpha_i = 0$ . Вообще говоря, возникновения отмеченной особенности можно избежать, запретив стопам ног располагаться в плоскости, для которой  $q_{yi} = 0$ .

Из второй формулы (1.1.2) видно, что соотношениями (1.1.2) определяются два решения относительно угла  $\gamma_i$ , зависящих от расположения колена в плоскости ноги относительно прямой, соединяющей точку крепления бедра и стопу. Когда предписана ориентация коленных шарниров относительно корпуса, существует взаимно однозначное соответствие шарнирных углов положению стоп относительно корпуса. Условимся, что коленные шарниры относительно корпу-

са ориентированы внешним образом (как показано на рис. 1.1.3). Тогда на основании сказанного имеем следующее обращение системы (1.1.1).

$$\alpha_i = \begin{cases} -f_1((-1)^{i+1}q_{xi}, (-1)^{i+1}q_{yi}), & (-1)^i q_{yi} < 0, \\ f_1((-1)^{i+1}q_{xi}, (-1)^i q_{yi}), & (-1)^i q_{yi} \geq 0, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 2\pi - \beta'_i, & (-1)^i q_{yi} < 0, \\ \beta'_i, & (-1)^i q_{yi} \geq 0, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

$$\gamma_i = (1 - (-1)^i)\pi/2 + (-1)^i f_2((l_1^2 + l_2^2 - r_i^2)/(2l_1 l_2)),$$

где

$$\beta'_i = f_2((-1)^{i+1}q_{zi}/r_i) + (-1)^i f_2((l_1^2 + r_i^2 - l_2^2)/(2l_1 r_i)),$$

$\mathbf{r}_i = (q_{xi}, q_{yi}, q_{zi})$  – вектор в системе координат  $O_r x_r y_r z_r$ , направленный из точки начала бедра в стопу и лежащий против угла  $\gamma_i$  (конец бедра совпадает с коленом),  $r_i = |\mathbf{r}_i|$ , а функции  $f_1(q)$ ,  $f_2(q_1, q_2)$  определены формулами

$$f_1(q_1, q_2) = \begin{cases} \arctg \frac{q_1}{q_2} + \begin{cases} 0, & q_2 > 0, \\ \pi, & q_2 < 0, q_1 \geq 0, \\ -\pi, & q_2 < 0, q_1 < 0, \end{cases} \\ \pi/2, & q_2 = 0, q_1 > 0, \\ 0, & q_2 = 0, q_1 = 0, \\ -\pi/2, & q_2 = 0, q_1 < 0, \end{cases}$$

$$f_2(q) = \begin{cases} 0, & q > 1, \\ \arccos q, & -1 \leq q \leq 1, \\ \pi, & q < -1. \end{cases}$$

Отношение геометрических параметров робота примем следующим

$$a_r : b_r : c_r : l_1 : l_2 = 1 : 0.5 : 0.1 : 0.5 : 0.33.$$

В численных экспериментах в качестве примера принимались следующие значения параметров:  $a_r = 1.05$  м,  $b_r = 0.5$  м,  $c_r = 0.1$  м, масса корпуса  $m_b = 10$  кг; звенья ног задавались в виде цилиндров с радиусами основания, равными  $0.015$  м,  $l_1 = 0.52$  м,  $l_2 = 0.335$  м,  $m_1 = 0.5$  кг,  $m_2 = 0.5$  кг.

### 1.1.1. Модификации конструкции робота

В предыдущем разделе предполагалось, что в точках крепления ног расположен двухстепенной шарнир. В том случае, когда имеются трудности с реализацией такого шарнира, его можно заменить

двумя одноступенными шарнирами, введя дополнительное звено  $l_0$  (см. рис. 1.1.4). Звено  $l_0$  одним своим концом прикреплено непосредственно к корпусу и может вращаться относительно него лишь по углу  $\alpha_i$  перпендикулярно строительной вертикали. К другому концу звена  $l_0$  прикрепляется звено  $l_1$ , которое вращается по углу  $\beta_i$  в плоскости ноги. При этом формулы (1.1.1) изменяются

$$\begin{aligned} q_{xi} &= x_i - x_{pi} = -[(-1)^i(l_0 + l_1 \sin \beta_i) - l_2 \sin(\beta_i + \gamma_i)] \sin \alpha_i, \\ q_{yi} &= y_i - y_{pi} = [(-1)^i(l_0 + l_1 \sin \beta_i) - l_2 \sin(\beta_i + \gamma_i)] \cos \alpha_i, \\ q_{zi} &= z_i - z_{pi} = [(-1)^{i+1}l_1 \cos \beta_i + l_2 \cos(\beta_i + \gamma_i)]. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Формулы (1.1.3) для вычисления углов остаются справедливыми.

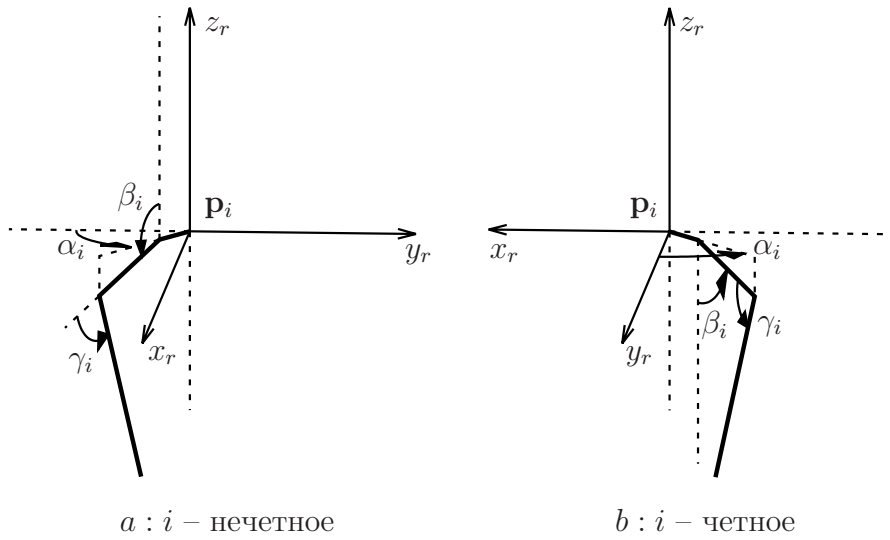


Рис. 1.1.4: Схема устройства трехзвенных ног

Расположение точек прикрепления ног к корпусу также может отличаться от принятого выше расположения по боковым сторонам прямоугольника. В компьютерных экспериментах иногда принималось круговое расположение этих точек в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} x_{pi} &= -b_p \cos(\pi/6 + [(i-1)/2]\pi/3), \\ y_{pi} &= (-1)^i b_p \sin(\pi/6 + [(i-1)/2]\pi/3), \\ z_{pi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

где  $b_p$  — радиус окружности, на которой располагались точки прикрепления, а выражение  $[...]$  означает целую часть числа, взятую по недостатку. Кроме того, иногда принималось следующее соотношение размеров:

$$a_r : b_p : l_0 : l_1 : l_2 = 1 : 0,5 : 0,129927 : 0,272263 : 0,465693, \quad (1.1.6)$$

что было вызвано необходимостью соответствия некоторому образцу макета шагающего робота. В дальнейшем, если не оговорено другое, будет по умолчанию подразумеваться базовый вариант схемы устройства робота.

## 1.2. Силовое оснащение робота

Управление движением робота в компьютерных экспериментах реализуется посредством численного моделирования работы электромеханических приводов шарнирных углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Выполнение требуемого движения робота осуществляется, как и в реальности, лишь путем подачи значения управляющего электрического напряжения на модели электромеханических приводов. Перемещение робота в пространстве возникает вследствие взаимодействия стоп ног с опорной поверхностью.

Принятая в дальнейшем математическая модель шарнирных моментов, развиваемых двигателями (электроприводы с противо-ЭДС), имеет вид [4, 52]

$$\mathcal{M} = U - c_e \dot{\varphi}, \quad U = \begin{cases} \text{sign}(U_0)U_{\max}, & |U_0| > U_{\max}, \\ U_0, & |U_0| \leq U_{\max}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$$U_0 = -\chi_1(\varphi - \varphi_0) + \chi_2 \dot{\varphi},$$

где  $c_e$  — параметр приводов;  $\varphi_0$  — программное значение шарнирного угла,  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  — его измеренные значения [53]. Измерения предполагаются абсолютно точными. В выражении для  $U_0$  отсутствует член с  $\dot{\varphi}_0$ . Это связано с тем, что движения робота при преодолении сложных препятствий предполагаются сравнительно медленными, и для обеспечения качественного отслеживания программного движения достаточно простого демпфирования колебаний. Коэффициенты  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  выбираются так, чтобы действительные части корней характеристического уравнения привода были отрицательными и чтобы рассогласование реального и программных значений уменьшалось экспоненциально быстро и без перерегулирования. В результате заданное движение ног относительно корпуса становится аттрактором в пространстве относительных состояний, и обеспечивается необходимая точность и устойчивость по отношению к возмущениям программного движения.

Управление, в целом обеспечивающее стабилизацию движения робота в окрестности программного движения, построено по прин-



ципу кусочно формируемой с дискретностью шага интегрирования обратной связи. Переходные процессы шарнирных углов не разрушают требуемое программное движение корпуса и ног.

По умолчанию были приняты следующие значения:  $c_e = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\chi_1 = 4.5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-2}$ ,  $\chi_2 = c_e - 2\sqrt{\chi_1} - \delta$ ,  $\delta = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $U_{\max} = 150 \text{ Нм}$ .

Взаимодействие стоп робота с опорной поверхностью описывалось вязко-упругой моделью реакции опоры с учетом особенностей кулоновского трения:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{N}, \quad \mathbf{F}' = c_n(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_C) - d_n \varepsilon \mathbf{v}_C, \quad \mathbf{N} = \nu(\mathbf{F}' \cdot \nu),$$

$$\mathbf{F}_\tau = \begin{cases} \mathbf{F}'_\tau, & \text{если } \frac{F'_\tau}{N} < k_f, \\ \mathbf{F}'_\tau \frac{N k_f}{F'_\tau}, & \text{если } \frac{F'_\tau}{N} \geq k_f, \end{cases} \quad \mathbf{F}'_\tau = \mathbf{F}' - \mathbf{N}, \quad (1.2.2)$$

где  $c_n$  — контактная жесткость,  $d_n$  — коэффициент вязкого трения,  $\mathbf{r}_T$  — радиус-вектор точки контакта,  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор стопы,  $\mathbf{v}_C$  — ее скорость,  $\nu$  — внешняя нормаль к опоре,  $k_f$  — коэффициент трения скольжения. В расчетах (если это специально не оговорено) принимались следующие значения:  $c_n = 10^6 \text{ Нм}^{-1}$ ,  $d_n = 100 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $k_f = 1$  (рис. 1.2.1). Считается, что в опорных точках не возникает силового момента между ногой и опорной поверхностью.

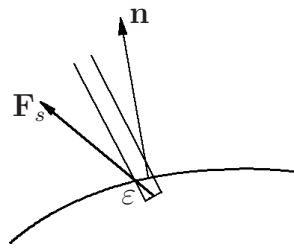


Рис. 1.2.1: Взаимодействие с опорой

### 1.3. Формирование программного движения

Любой маневр, который роботу необходимо совершить, представляет собой последовательность этапов, на каждом из которых часть ног переносится, а часть остается в опоре. Закон движения стопы для каждого из этапов формируется путем модификации одного из двух шаблонов шаговых циклов. Соответствующие этим шаблонам

траектории стопы изображены на рис. 1.3.1. Движение ног по шаблонам шаговых циклов при прямолинейном движении корпуса робота осуществляется следующим образом.

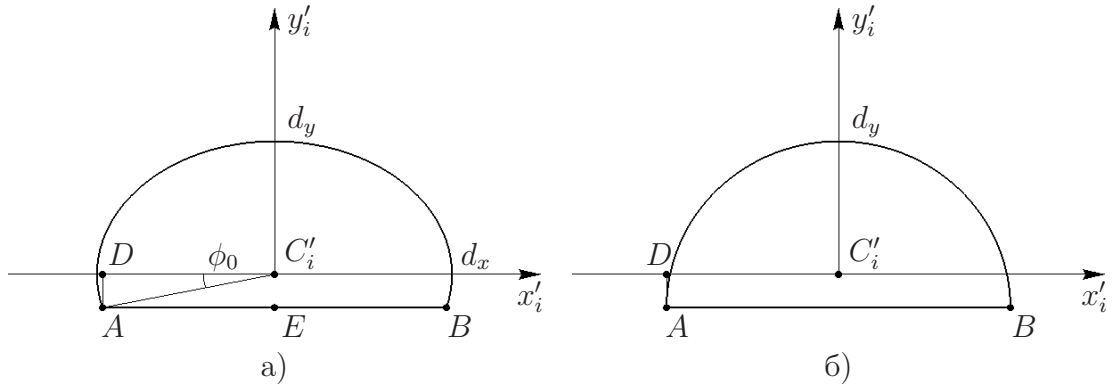


Рис. 1.3.1: Шаговые циклы

Дуга эллипса  $AB$  соответствует фазе переноса, прямолинейный отрезок  $BA$  — фазе опоры. В общем случае находящаяся в опоре стопа, будучи неподвижной в абсолютных осях  $O\xi\eta\zeta$ , может совершать относительно корпуса произвольное движение. Траектория движения опорной стопы в осях  $C'_i x'_i y'_i z'_i$  будет тогда пространственной, и она будет вполне определена заданным движением корпуса в системе координат  $O\xi\eta\zeta$ .

Преимущество цикла 1.3.1 а) заключается в мягкости постановки стопы на опорную поверхность. Цикл 1.3.1 б) применяется тогда, когда в результате движения по начальному участку дуги от точки  $A$  до оси  $C'_i x'_i$  происходит нестандартный контакт стопы с поверхностью, с которой начинается перенос. Для фазы переноса задается траектория стопы, для фазы опоры в случае непрямолинейных режимов движения — траектория точки крепления ноги, при этом движение стопы относительно корпуса по опорному отрезку получается вынужденным. В случае прямолинейного движения корпуса удобней задавать относительное движение стопы по опорному отрезку шагового цикла [1]. Вынужденное движение при этом совершает корпус.

Назначим локальное время периода походки

$$\bar{t} = \left\langle \frac{t + \tau_i}{T} \right\rangle T,$$

где  $\langle \dots \rangle$  — дробная часть числа, заключенного в скобки,  $T$  — период походки,  $\tau_i$  — фазовые сдвиги, отличные от нуля в случае движения

одной из волновых походок [1]. Для волновой походки “трешки” последовательно с равным временным интервалом переносятся тройки ног с номерами 1, 4, 5 и 2, 3, 6, а для волновой походки “галоп” последовательно переносятся передние, средние и задние пары ног. В отличие от волновой походки галоп, термином “галоп” будем называть походку, при которой передняя, средняя и задняя пары ног переносятся так, как этого требуют конкретные обстоятельства.

Пусть  $t^*$  – время переноса ноги. Тогда локальные координаты шагового цикла на рис. 1.3.1 при  $\bar{t} < t^*$  в системе координат  $C'_i x'_i y'_i z'_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= -d_x \cos \phi, \quad y' = d_y \sin \phi, \quad \phi = \varpi \bar{t} + \phi_0, & \text{цикл 1.3.1 а),} \\ x' &= -x^* \cos \phi, \quad y' = (d_y + y_s) \sin \phi - y_s, \quad \phi = \varpi \bar{t}, & \text{цикл 1.3.1 б).} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

При  $\bar{t} \geq t^*$ :

$$x' = -k'(x^*/t^*)(t - t^*) + x^*, \quad y' = -y_s, \quad z' = 0. \quad (1.3.2)$$

Здесь принято  $y_s = |AD|$  и назначено  $y_s = d_y/4$  (поэтому получается  $\phi_0 = -\arcsin(1/4)$ ),  $x^*$  – абсцисса точки  $B$ ,  $x^* = d_x \cos(\varpi t^* + \phi_0)$ , параметр  $\varpi$  определяет скорость движения ноги в фазе переноса:  $t^* = (\pi - 2\phi_0)/\varpi$  – время прохождения дуги эллипса,  $k' \geq 1$  для походки галоп и  $k' \geq 2$  для походки трешки. Если  $k' = 1$ , то длительность фазы опоры равна половине длительности фазы переноса, а если  $k' = 2$ , то длительность фазы опоры в точности равна длительности фазы переноса. Походки, соответствующие формулам (1.3.1) и (1.3.2), будем в дальнейшем называть регулярными.

В простейших случаях движения регулярной походкой по горизонтальной плоскости можно явным образом задать матрицы направляющих косинусов локальных осей  $C' x' y' z'$  в абсолютных осях координат, а для нерегулярных переносов удобней зафиксировать начальную и конечную точки переноса непосредственно в осях  $O\xi\eta\zeta$  и соединить их соответствующим образом преобразованной дугой шагового цикла. Радиус-вектор стопы с номером  $i$  в случае нерегулярных переносов представляется в виде

$$\mathbf{r}_i(t) = (1 - \lambda)\mathbf{r}_i(t_0) + \lambda\mathbf{r}_i(t_1) + \widehat{k}(y' + y_s) \frac{\boldsymbol{\rho}_i \times ((\mathbf{e}_i/|\mathbf{e}_i|) \times \boldsymbol{\rho}_i)}{|\boldsymbol{\rho}_i \times ((\mathbf{e}_i/|\mathbf{e}_i|) \times \boldsymbol{\rho}_i)|}, \quad (1.3.3)$$

где  $\lambda = \lambda_j(t)$ :  $j = 0$  для регулярных переносов,  $j = 1$  для нерегулярных переносов,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\mathbf{r}_i(t_0)$ ,  $\mathbf{r}_i(t_1)$  – абсолютные радиус-векторы  $i$ -й стопы в начальном и конечном моментах переноса,  $\widehat{k}$  –

коэффициент растяжения,  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i(t_1) - \mathbf{r}_i(t_0)$ ,  $\mathbf{e}_i$  — вектор, задающий вместе с вектором  $\boldsymbol{\rho}$  плоскость шагового цикла в пространстве. Зависимости  $\lambda_j(t)$ ,  $j = 0, 1$ , имеют вид

$$\lambda_0(t) = (x' + x^*)/2x^*, \quad (\text{используется по умолчанию})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = \frac{w(t-t_0)^2}{2}, \quad \dot{\lambda}_1 = w(t-t_0), & t_0 \leq t < t_0 + \sigma, \\ \lambda_1 = \frac{w\sigma^2}{2} + w\sigma(t-t_0-\sigma), \quad \dot{\lambda}_1 = w\sigma, & t_0 + \sigma \leq t < \tilde{t}_1 - \sigma, \\ \lambda_1 = \frac{w\sigma^2}{2} + w\sigma(t-t_0-\sigma) - \frac{w(t-\tilde{t}+\sigma)^2}{2}, & \tilde{t}_1 - \sigma \leq t < \tilde{t}_1, \\ \dot{\lambda}_1 = w\sigma - w(t-\tilde{t}+\sigma), & \\ \lambda_1 = 1, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, & \tilde{t}_1 \leq t < t_1, \end{array} \right.$$

где  $\tilde{t}_1 = t_0 + \sigma_2 t^*$ ,  $\sigma = t^*/4$ ,  $\sigma < \sigma_2 \leq 1$ ,  $w = [\sigma(t^* - \sigma)]^{-1}$ . Таким образом,  $\lambda_1$  изменяется от 0 до 1 при  $t_0 \leq t < t_1$  со сглаживанием вблизи границ полуинтервала:  $\dot{\lambda}_1$  линейно выходит на константу в начале переноса ноги и линейно сходится к нулю в конце переноса (рис. 1.3.2).

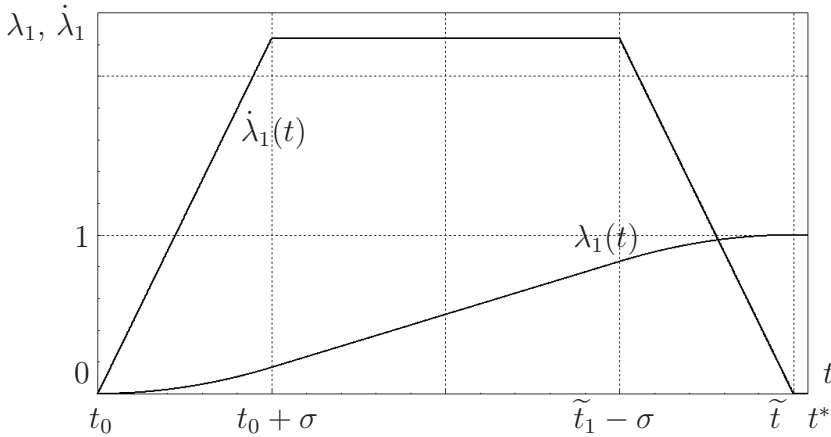


Рис. 1.3.2: Зависимости  $\lambda_1(t)$ ,  $\dot{\lambda}_1(t)$

Процесс переноса ноги осуществляется вплоть до фактического попадания стопы в заглубленную точку. Реальное время достижения стопой конечной точки переноса вычисляется при компьютерном моделировании средствами интерполяции траектории стопы. В тех случаях, когда критичен постоянный контакт с опорной поверхностью и стопа после окончания переноса должна перейти в опорный режим, для расчета последующего программного движения выбираются не реализовавшиеся в реальном движении, а заданные координаты опорной точки. Это компенсирует сравнительно небольшие

погрешности, которые могут возникать, в частности, из-за насыщения управляющего момента  $U$ , и одновременно реализует модель давления на поверхность. В том случае, когда отклонение велико настолько, что применение интерполяционного метода приведет к существенному удару, планируется дополнительный перенос стопы. Если реализовавшееся положение корпуса недопустимо сильно отклоняется от программного, производится корректировка его положения за счет дополнительного управления шарнирными двигателями, выравнивающего положения точек крепления.

В качестве примера рассмотрим простейший случай перемещения робота по горизонтальной опорной плоскости. Пусть  $\mathcal{A}$  — матрица направляющих косинусов осей  $O_r x_r y_r z_r$  и  $\mathcal{B}_i$  — матрицы направляющих косинусов осей  $C'_i x'_i y'_i z'_i$  в осях  $O\xi\eta\zeta$ .

Для движения по горизонтальной плоскости имеем

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^i \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, шаговые циклы всех ног принадлежат вертикальным плоскостям, параллельным оси  $O\eta$ . Координаты точек  $C'_i$  зададим в осях  $O_r x_r y_r z_r$  следующим образом

$$C'_i = (p_{xi}, (-1)^i y_f, -d), \quad (1.3.4)$$

где  $y_f$  — половина ширины следовой колеи. При этом корпус отстоит от опорной поверхности на расстояние, равное  $d - c/2$ . В формулах (1.3.1) принимается, что  $d_x = 0.1a_r$ ,  $d_y = 0.03a_r$ ,  $d = 0.5a_r$ . Зависимость  $\varphi(t)$  задается в виде

$$\varphi = \varpi \bar{t} + \varphi_0, \quad \bar{t} = \langle (t + \tau_i)/T \rangle T.$$

Отрезок  $BA$  прямолинеен и параллелен направлению движения корпуса. Величина отрезка  $AD$  была принята равной  $y_s = d_y/4$ . Точка  $B$  в осях  $C'_i x'_i y'_i z'_i$  имеет координаты  $(x^*, -y_s, 0)$ , а точка  $A$  — соответственно  $(-x^*, -y_s, 0)$ . Считается, что движение стопы по шаговому циклу начинается от точки  $A$  и выполняется по ходу движения часовой стрелки. Параметры  $\tau_i$  задают фазовые сдвиги шаговых циклов,  $\varphi_0 = -\arcsin(1/4)$  — угол между отрезками  $C'A$  и  $C'D$ .

При походке “трешки” ноги с номерами 1, 4, 5 и 2, 3, 6 переносятся попеременно, а фазовые сдвиги равны  $\tau_{1,4,5} = 0$ ,  $\tau_{2,3,6} = t^*$ .

При походке “галоп” симметричные относительно продольной оси корпуса ноги переносятся одновременно и каждая пара по очереди, а фазовые сдвиги имеют вид  $\tau_{1,2} = 2t^*$ ,  $\tau_{3,4} = t^*$ ,  $\tau_{5,6} = 0$ . Передние ноги стартуют из точки  $A$ , средние — из точки  $E$ , задние — из точки  $B$  шагового цикла (рис. 1.3.1,а). Скорость равномерного движения корпуса походкой “галоп” оказывается вдвое меньше, чем скорость движения походкой “трешки”.

В дальнейшем предполагается, что по горизонтальной поверхности робот идет походкой “трешки”. Фазе переноса соответствует половина дуги эллипса на рис. 1.3.1. Поэтому величина  $t^*$  может быть найдена из уравнения

$$\varpi t^* + \varphi_0 = \pi - \varphi_0.$$

Откуда следует

$$t^* = (\pi - 2\varphi_0)/\varpi, \quad x^* = -d_x \cos(\varpi t^* + \varphi_0).$$

Для равномерного движения вдоль прямолинейного отрезка  $BA$  при  $t \geq t^*$  применяется формула (1.3.2), в которой  $k' = 2$ . Скорость  $v_o$  равномерного движения корпуса выражается формулой  $v_o = k'x^*/t^*$ .

## 1.4. Блок-схема моделирования движения

Инсектоморфный робот имеет 24 степени свободы. К ним добавляются степени свободы, возникающие из-за взаимодействия робота с незакрепленными объектами внешней среды. На рис. 1.4.1 представлен граф рассматриваемой механической системы, иллюстрирующий взаимодействие элементов робота между собой, а также взаимодействие робота с окружающей средой. Видно, что робот может касаться элементов среды исключительно стопами ног. Отдельные предметы среды могут быть незакрепленными на опорной плоскости. Они могут использоваться роботом как в качестве опоры, так и для выполнения других более сложных двигательных задач.

Суммарно большое число степеней свободы затрудняет получение обозримой полной совокупности дифференциальных уравнений динамики системы, необходимых для численных экспериментов. Кроме того, многовариантное исследование поведения системы при любом, даже незначительном изменении объектов внешней среды и конструкции робота также будет затруднительно, если каждый раз

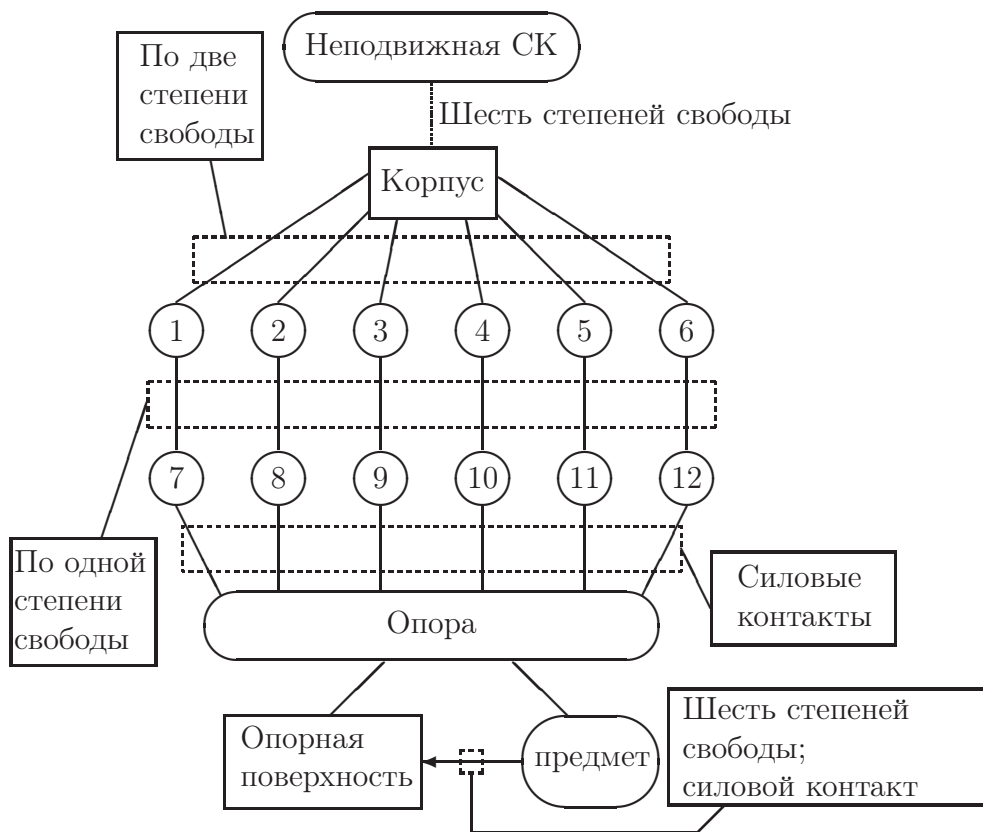


Рис. 1.4.1: Полный граф системы

применять аналитический вывод уравнений. В данной книге представлены результаты исследований, полученные с использованием программного комплекса "Универсальный механизм" (УМ) [40]. Этот программный комплекс позволяет не только автоматически получить полную экономную с вычислительной точки зрения систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения для больших систем твердых тел, но также выполнить за короткое время их компьютерное исследование. Кроме того, он позволяет организовать управляемое движение этих систем с разветвленной логикой управления, а также представить результаты в удобной графической или мультимедийной форме.

Управляющий модуль объекта в УМ составляется в виде DLL-библиотеки, подключаемой к модулю численного моделирования. Часть исходных кодов библиотеки, связанных с уравнениями движения, а также структурами внешних идентификаторов и нужной последовательностью вызовов, генерируется комплексом автоматически. В пользовательской части должны присутствовать функции с фиксированными именами, которые комплекс будет вызывать на

каждом шаге численного интегрирования. В общем случае при поступающих от комплекса запросах необходимо либо возвращать требуемую логическую информацию, либо производить необходимые внутренние вычисления и действия в зависимости от типа запроса. При этом из библиотеки можно вызывать интерфейсные функции с информацией о текущем состоянии объекта, такой как, например, значение заданной координаты или значение скорости заданной точки заданного тела. Путем программирования соответствующих функций в библиотеке можно задавать нестандартные силы и силовые моменты (в том числе действующие в шарнирах), не входящие в стандартный набор комплекса, а также программировать те зависимости, которые были определены как функции времени при описании объекта. Вместе программный комплекс “Универсальный механизм” и DLL-библиотека образуют виртуальную среду обитания робота.

Реализация алгоритмов управления роботом осуществляется посредством задания управляющих моментов в шарнирах ног. Расчет управляющих моментов и сил взаимодействия с опорной поверхностью осуществляется по формулам раздела 1.2.

На каждом шаге интегрирования поочередно находятся: кинематическое состояние объекта; действующие силы и моменты; матрица масс (автоматический этап, добавлять здесь какие-либо дополнительные расчеты не потребовалось).

На рис. 1.4.2 представлена блок-схема компьютерного моделирования управления роботом. Стрелки соответствуют непосредственной передаче исполнения от блока к блоку, линии с пунктиром отмечают информационные потоки. В связи с тем что в процессе экспериментирования робот должен выполнять принципиально разные задачи перемещения по горизонтальной опорной плоскости либо по движущимся объектам, в блок-схему включены блоки планирования этапа и расчет следового расписания, включающего как моменты постановки и начала переноса ног, так и требуемые положения точек опоры робота. Местность в ней представлена горизонтальной плоскостью с расположенными на ней стационарными препятствиями. Отдельные незакрепленные на плоскости объекты, такие как местные предметы и робот, взаимодействуют с опорной поверхностью и друг с другом согласно модели (1.2.2) кулоновского трения, основанной на вязкоупругом взаимодействии тел в точках контакта, либо согласно другим моделям реакции связей, описываемым в



соответствующих разделах.

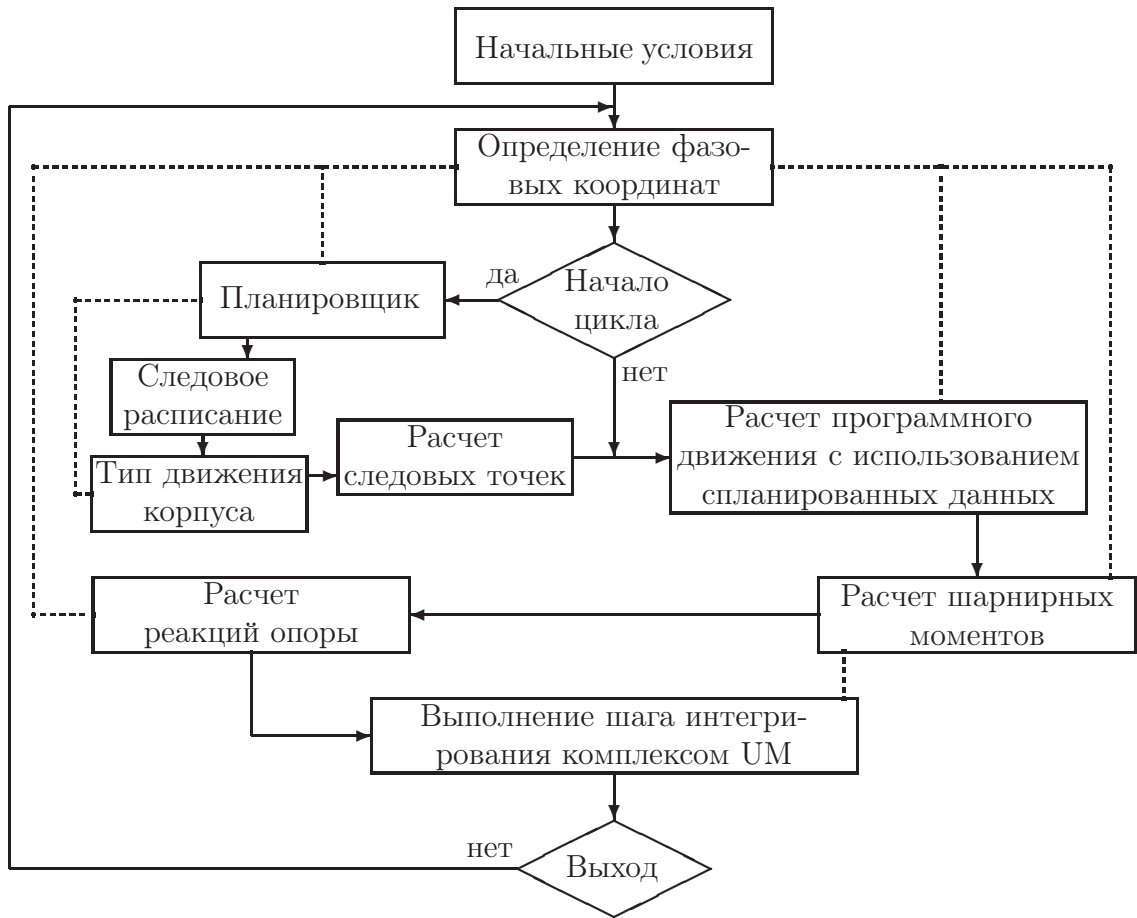


Рис. 1.4.2: Блок-схема моделирования. Сплошные стрелки означают передачу управления и данных, пунктирные линии — только данных

При расчетах принимались следующие стандартные значения параметров: габариты корпуса:  $a = 1.05$  м,  $b = 0.5$  м,  $c = 0.1$  м, масса корпуса 10 кг, звенья ног:  $l_1 = 0.52$  м,  $l_2 = 0.335$  м,  $m_1 = m_2 = 0.5$  кг, половина длины шагового цикла  $d_x = 0.1$  м,  $x^* = 0.09682$  м,

Предполагается, что роботу известны: геометрия препятствий, собственное положение относительно препятствий, шарнирные углы, скорость перемещения. Программные значения шарнирных углов генерируются алгоритмом управления. Этот алгоритм адаптивен: в нем существенно используется информация о реализовавшейся конфигурации робота при его движении.

## Глава 2.

# Преодоление стационарных препятствий

При решении задач данного раздела предполагается, что робот движется с небольшой скоростью, позволяющей для исследования вопросов организации силового взаимодействия робота с опорной поверхностью воспользоваться приближением квазистатики. Анализ развиваемых усилий необходим для того, чтобы найти эффективные способы предотвращения аварийных ситуаций и по возможности избежать проскальзывания ног относительно опорной поверхности, когда требуется использовать имеющиеся предельные кинематические возможности робота при движении по трудно преодолимым препятствиям.

### 2.1. Равновесие на вертикальном угле и столбе

Предположим, что вертикальный двугранный угол установлен на горизонтальной плоскости так, что его биссектральная плоскость совпадает с плоскостью  $O\eta\zeta$  (рис. 2.1.1).

Будем считать, что робот идет походкой “галоп”, две его ноги находятся в стадии переноса, четыре другие находятся в состоянии опоры, их точки опоры расположены на симметричных относительно плоскости  $O\eta\zeta$  вертикальных прямых и имеют абсолютные координаты

$$\mathbf{r}_1 = (-\xi_1, 0, \zeta_1), \quad \mathbf{r}_2 = (\xi_1, 0, \zeta_1), \quad \mathbf{r}_3 = (-\xi_1, 0, \zeta_2), \quad \mathbf{r}_4 = (\xi_1, 0, \zeta_2),$$

где  $\xi_1 > 0$  и  $\zeta_2 > \zeta_1$ . Опорные плоскости образованы сторонами двугранного угла и в точках опоры имеют внешние нормали соответственно

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\nu}_3 = (-\cos \psi, \sin \psi, 0), \quad \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\nu}_4 = (\cos \psi, \sin \psi, 0),$$

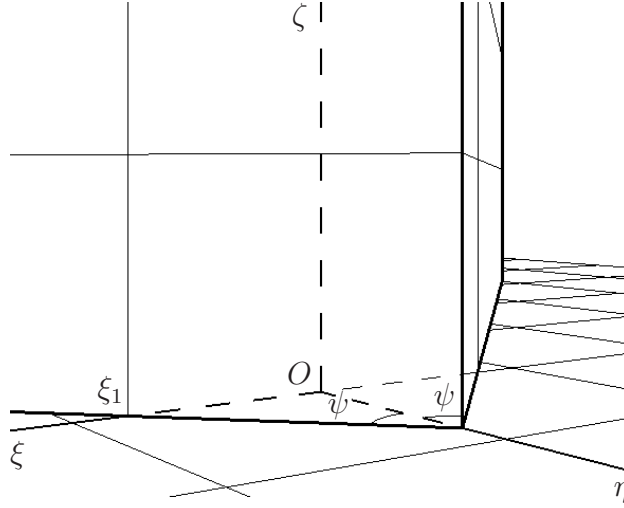


Рис. 2.1.1: Препятствие «вертикальный угол»

где  $2\psi$  – острый угол раствора опорного двугранного угла. Радиус-вектор центра масс робота зададим координатами  $\mathbf{r}_c = (0, \eta_c, \zeta_c)$ . Робот вместе с ногами имеет вес  $\mathbf{P} = (0, 0, -P)$ . Реакции в точках опоры представим в координатном виде

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= N_1(-\cos \psi + k_\tau^1 \sin \psi, \sin \psi + k_\tau^1 \cos \psi, k_\zeta^1), \\ \mathbf{R}_2 &= N_2(\cos \psi - k_\tau^2 \sin \psi, \sin \psi + k_\tau^2 \cos \psi, k_\zeta^2), \\ \mathbf{R}_3 &= N_3(-\cos \psi + k_\tau^3 \sin \psi, \sin \psi + k_\tau^3 \cos \psi, k_\zeta^3), \\ \mathbf{R}_4 &= N_4(\cos \psi - k_\tau^4 \sin \psi, \sin \psi + k_\tau^4 \cos \psi, k_\zeta^4),\end{aligned}$$

где  $N_i > 0$  – нормальные составляющие,  $k_\tau^i$  – коэффициенты горизонтальных составляющих,  $k_\zeta^i$  – коэффициенты вертикальных составляющих реакций,  $i = \overline{1, 4}$ .

Уравнения, выражающие равенство нулю суммарной силы, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 (-1)^i N_i \cos \psi + \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} N_i k_\tau^i \sin \psi &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 N_i \sin \psi + \sum_{i=1}^4 N_i k_\tau^i \cos \psi &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 N_i k_\zeta^i &= P.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Проекцию суммарного момента сил на ось  $O\xi$  запишем следующим

образом

$$\begin{aligned} & [(N_1 + N_2) \sin \psi + (N_1 k_\tau^1 + N_2 k_\tau^2) \cos \psi] \zeta_1 + \\ & + [(N_3 + N_4) \sin \psi + (N_3 k_\tau^3 + N_4 k_\tau^4) \cos \psi] \zeta_2 = -P\eta_c. \end{aligned}$$

Проекция суммарного момента на ось  $O\eta$  выражается равенством

$$\begin{aligned} & [(N_2 - N_1) \cos \psi + (N_1 k_\tau^1 - N_2 k_\tau^2) \sin \psi] \zeta_1 + [(N_4 - N_3) \cos \psi + \\ & + (N_3 k_\tau^3 - N_4 k_\tau^4) \sin \psi] \zeta_2 + (N_1 k_\zeta^1 - N_2 k_\zeta^2 + N_3 k_\zeta^3 - N_4 k_\zeta^4) \xi_1 = 0. \end{aligned}$$

Наконец, проекция суммарного момента на ось  $O\zeta$  принимает вид

$$[(N_2 - N_1 + N_4 - N_3) \sin \psi - (N_1 k_\tau^1 - N_2 k_\tau^2 + N_3 k_\tau^3 - N_4 k_\tau^4) \cos \psi] \xi_1 = 0.$$

Имеем, следовательно, статически неопределимую систему, в которой число неизвестных (12) больше числа уравнений (6). Воспользовавшись этим произволом, будем искать симметричное решение:

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = N_d, \quad N_3 = N_4 = N_u, \quad k_\tau^1 = k_\tau^2 = k_\tau^d, \\ k_\tau^3 = k_\tau^4 = k_\tau^u, \quad k_\zeta^1 = k_\zeta^2 = k_\zeta^d, \quad k_\zeta^3 = k_\zeta^4 = k_\zeta^u. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

В итоге первое уравнение (2.1.1), а также уравнения моментов на оси  $O\eta$  и  $O\zeta$  обратятся в тождества, а оставшиеся уравнения образуют систему

$$\begin{aligned} N_d(\sin \psi + k_\tau^d \cos \psi) &= -N_u(\sin \psi + k_\tau^u \cos \psi), \\ 2(N_d k_\zeta^d + N_u k_\zeta^u) &= P, \\ 2[N_d(\sin \psi + k_\tau^d \cos \psi) \zeta_1 + N_u(\sin \psi + k_\tau^u \cos \psi) \zeta_2] &= -P\eta_c, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

в которой число неизвестных (6) по-прежнему больше числа уравнений (3). Воспользуемся этим обстоятельством с целью сделать нагрузку на ноги более равномерной. Примем  $k_\zeta^d = k_\zeta^u = k_\zeta > 0$ . Тогда из системы (2.1.3) следует

$$\begin{aligned} N_d = N_\zeta - N_u, \quad N_\zeta = \frac{P}{2k_\zeta}, \quad \varkappa = \frac{\eta_c}{\zeta_2 - \zeta_1}, \\ k_\tau^u \cos \psi = -\frac{\varkappa P}{2N_u} - \sin \psi, \quad k_\tau^d \cos \psi = -\frac{\varkappa P}{2(N_u - N_\zeta)} - \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

В интервале  $0 < N_u < N_\zeta$  функции  $k_\tau^u(N_u)$  и  $k_\tau^d(N_u)$  монотонно возрастают, и требование равномерности нагрузки приводит к уравнению  $k_\tau^u = -k_\tau^d$  относительно  $N_u$ , или

$$2\chi N_u^2 - 2(\chi N_\zeta - 1)N_u - N_\zeta = 0, \quad \chi = \frac{2 \sin \psi}{\varkappa P}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N_d &= \frac{\chi N_\zeta + 1 - \sqrt{\chi^2 N_\zeta^2 + 1}}{2\chi} > 0, \\ N_u &= \frac{\chi N_\zeta - 1 + \sqrt{\chi^2 N_\zeta^2 + 1}}{2\chi} > 0, \quad N_u > N_d. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

С учетом этих соотношений получим

$$k_\tau^d = -k_\tau^u = k_\tau = \frac{k_\zeta \varepsilon + \sqrt{\sin^2 \psi + k_\zeta^2 \varepsilon^2}}{\cos \psi}. \quad (2.1.6)$$

Коэффициент трения, необходимый для решения задачи, выражается формулой

$$k = \sqrt{k_\tau^2 + k_\zeta^2}.$$

В этом равенстве подкоренное выражение есть монотонно возрастающая функция от  $k_\zeta > 0$ . Поэтому

$$\tilde{k} = \inf_{k_\zeta} k = \operatorname{tg} \psi.$$

Для  $\psi = \pi/4$ , когда раствор опорного вертикального угла составляет  $\pi/2$ , имеем  $\tilde{k} = 1$ , величину, которая не может быть реализована при коэффициенте  $k_\zeta > 0$ . Поэтому, как и следовало ожидать, залезание на угол, имеющий раствор, равный или превышающий  $\pi/2$ , при коэффициенте трения, не превосходящем единицы, невозможно.

Вместе с тем реально достижимое минимальное значение  $\tilde{k}_\zeta$  коэффициента  $k_\zeta$  определено предельно допустимой максимальной величиной  $\hat{N}$  нормальных составляющих (2.1.5):

$$N_\zeta \leq \hat{N}_\zeta = \frac{2\hat{N}(\chi\hat{N} + 1)}{2\chi\hat{N} + 1} \implies k_\zeta \geq \bar{k}_\zeta = \frac{P}{2\hat{N}_\zeta}. \quad (2.1.7)$$

Что дает возможность из (2.1.6) найти минимальный коэффициент трения  $\bar{k}_\tau$ , решающий задачу залезания на угол:

$$\bar{k}_\tau = \frac{\bar{k}_\zeta \varepsilon + \sqrt{\sin^2 \psi + \bar{k}_\zeta^2 \varepsilon^2}}{\cos \psi},$$

а вместе с ним и минимально допустимый коэффициент трения  $\bar{k}$ :

$$\bar{k} = \sqrt{\bar{k}_\tau^2 + \bar{k}_\zeta^2}. \quad (2.1.8)$$

Из полученных формул также следует, что добиться уменьшения величины  $\bar{k}$  можно, уменьшая величину  $\varepsilon$  в (2.1.4), в частности, за счет увеличения расстояния  $\zeta_2 - \zeta_1$  между точками опоры или за счет уменьшения величины  $\eta_c$  (приближая центр масс корпуса к опорным следовым колеям).

Пусть, например,  $\psi = \pi/4$ ,  $\varepsilon = 0.4$ . Тогда из (2.1.8) следует, что коэффициенту трения  $\bar{k} = 1.1$  соответствуют значения  $\bar{k}_\zeta \approx 0.1517$ ,  $\bar{k}_\tau = 1.08949$ . Из (2.1.7) находим  $\hat{N}/P \approx 3.1$ , т.е. робот должен иметь возможность сжимать угол с силой, приблизительно втрое превосходящей его вес.

Выше был рассмотрен случай, когда распределение реакций было оптимальным в смысле уменьшения величины требуемых коэффициентов трения  $k_\tau^u$  и  $k_\tau^d$ . Для реализации такого распределения необходимо специально дозировать нормальные составляющие  $N_u$  и  $N_d$  в (2.1.2). Рассмотрим вариант, когда указанное дозирование нормальных составляющих не производится, а управление выбирается из условия  $N_u = N_d = N_\zeta/2 = P/(4k_\zeta)$ . При  $\psi = \pi/4$ ,  $\varepsilon = 0.4$  получим

$$k_\tau^u = -0.8\sqrt{2}k_\zeta - 1, \quad k_\tau^d = 0.8\sqrt{2}k_\zeta - 1, \quad |k_\tau^u| > |k_\tau^d|.$$

Потребуем, чтобы

$$\bar{k} = \sqrt{(k_\tau^u)^2 + k_\zeta^2} = 1.1.$$

Отсюда найдем  $k_\zeta \approx 0.085$ ,  $k_\tau^u = -1.096167$ ,  $k_\tau^d = -0.903833$ . Такому значению  $k_\zeta$  отвечает отношение  $\hat{N}/P = 1/(4k_\zeta) \approx 2.9$ . В этом варианте сжатие угла несколько меньше за счет увеличения модуля требуемого коэффициента  $k_\tau^u$ .

В любом варианте величина допустимого отношения  $\hat{N}/P$  существенно зависит от величины  $\varepsilon$ , и чем эта величина больше, тем больше будет указанное отношение.

Заметим, что в задаче о равновесии робота на вертикальном столбе следует принять  $\psi = 0$ . Тогда получим

$$\bar{k}_\zeta = \frac{P}{4\hat{N}}, \quad \bar{k}_\tau = \frac{P\varepsilon}{2\hat{N}}, \quad \bar{k} = \frac{P\sqrt{4\varepsilon^2 + 1}}{4\hat{N}}.$$

В частности, в наиболее неблагоприятном случае опоры на передние и средние ноги имеем  $\varepsilon = 1.1$ , и для того, чтобы обеспечить движение с коэффициентом трения, равным 1, требуется иметь предельное значение нормальной составляющей не менее  $\hat{N} \approx 0.61P$ .

## 2.2. Равновесие приставной лестницы

Пусть лестница длины  $l$  опирается о вертикальную стену, стоит на горизонтальном полу и составляет с ним угол  $\varphi$ . Положение центра масс робота вместе с лестницей зададим расстоянием  $x$  от нижнего края лестницы и для простоты будем считать, что этот центр масс расположен на лестнице. Обозначим через  $N_1$ ,  $F_1$  соответственно вертикальную и горизонтальную составляющие реакции нижней горизонтальной площадки, а  $N_2$ ,  $F_2$  — горизонтальную и вертикальную составляющие реакций вертикальной стены (рис. 2.2.1).

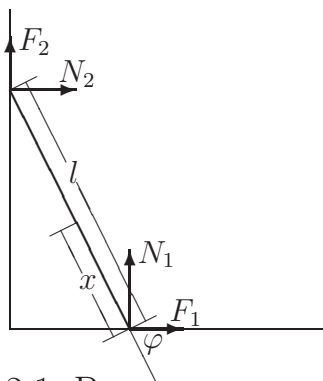


Рис. 2.2.1: Равновесие лестницы

Условия равновесия принимают вид

$$N_1 + F_2 = P, \quad N_2 + F_1 = 0, \quad F_2 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi = P\chi \cos \varphi, \quad (2.2.1)$$

где  $P$  — вес робота вместе с лестницей,  $\chi = x/l$ . С учетом односторонности связей дополнительные ограничения имеют форму неравенств

$$N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0, \quad |F_2|/N_2 \leq f_2 \neq 0, \quad |F_1|/N_1 \leq f_1 \neq 0. \quad (2.2.2)$$

Обычно эта задача решается при фиксированных положениях лестницы и центра масс груза на ней. В данном разделе найдем все углы  $\varphi$ , для которых задача о равновесии лестницы будет иметь решение при любых значениях коэффициента  $0 \leq \chi \leq 1$ .

Система уравнений (2.2.1) статически неопределима. Выразим ее решение через параметр  $y = P/N_1$ . Введем  $k_1 = F_1/(f_1 N_1)$ ,  $k_2 = F_2/(f_2 N_2)$ . Тогда

$$N_2 = [y(\chi - 1) + 1] \frac{P \operatorname{ctg} \varphi}{y}, \quad (2.2.3)$$

$$k_1 = -[y(\chi - 1) + 1] \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{f_1}, \quad k_2 = \frac{(y - 1) \operatorname{tg} \varphi}{[y(\chi - 1) + 1] f_2}.$$

С учетом ограничений (2.2.2) должно быть

$$0 \leq y \leq \frac{1}{1 - \chi}, \quad |k_1| \leq 1, \quad |k_2| \leq 1. \quad (2.2.4)$$

Исследуем сначала случай  $\operatorname{tg} \varphi < 1/f_1$ . Из (2.2.3) при  $\chi = 1$  получим  $|k_1| = \operatorname{ctg} \varphi / f_1 > 1$ . Согласно (2.2.4), при таких углах наклона лестницы решение будет отсутствовать. Далее пусть  $\operatorname{tg} \varphi \geq 1/f_1$  и  $\chi \neq 0$ . Тогда значение  $y = 1$  входит в область определения функции  $k_2(y)$  и, более того,  $k_2(1) = 0$ . Имеем  $0 \leq |k_1(y)| \leq 1$  во всем допустимом интервале изменения  $y$ . Следовательно, искомое решение существует, хотя оно и неоднозначно. Исследуем оставшийся случай  $\operatorname{tg} \varphi \geq 1/f_1$  и  $\chi = 0$ . При таких значениях параметров  $k_2 \equiv \operatorname{tg} \varphi / f_2 \geq 1/(f_1 f_2)$ . Вместе с тем, как следует из (2.2.1), здесь можно взять  $y = 1$ , для которого  $N_2 = F_2 = 0$ . Следовательно, *равновесие лестницы вместе с грузом при любом допустимом значении  $\chi$  достигается лишь при  $\operatorname{tg} \varphi \geq 1/f_1$ .*

## 2.3. Переход по столбу на высокий уступ

### 2.3.1. Предлагаемый сценарий

Столб стоит вертикально на горизонтальной опорной плоскости, касаясь вертикальной стены уступа. Вершина столба представляет собой горизонтальный круг радиуса  $r$ , а его поверхность – прямой круговой цилиндр. Робот знает высоту столба и уступа и в начальный момент времени стоит на горизонтальной плоскости у их подножия (рис. 2.3.1). Опишем требуемую последовательность событий при движении робота. Сначала робот приближается к столбу регулярной походкой “трешки” (раздел 1.3) в направлении, перпендикулярном вертикальной стене уступа. Когда он подходит вплотную к столбу, его движение формируется таким образом, чтобы в результате стопы всех ног опирались о столб, а корпус принял вертикальное положение. Затем робот идет вверх по внешней поверхности столба регулярной походкой “галоп” (раздел 1.3). Точки опоры ног располагаются на симметричных образующих поверхности столба. Робот может касаться столба только в точках опоры и не имеет присосок на стопах. Если высота столба превышает высоту уступа более чем на высоту корпуса, то имеется два очевидных варианта поведения робота. В первом из них он достигает вершины столба, проходит



через нее, спускается вниз и переходит на горизонтальную (верхнюю) поверхность уступа. Когда робот достигает вершины столба, его корпус принимает горизонтальное положение, а стопы всех ног располагаются на вершине. Во втором варианте робот идет вверх до тех пор, пока задний край корпуса не станет выше края уступа с некоторым запасом. Затем продолжается движение по поверхности столба поперек ее образующих, а когда корпус окажется над поверхностью уступа, выполняется спуск на нее задним ходом. Передний край корпуса робота оказывается перед столбом. Поэтому для дальнейшего его перемещения по уступу робот должен развернуться на  $180^\circ$ .

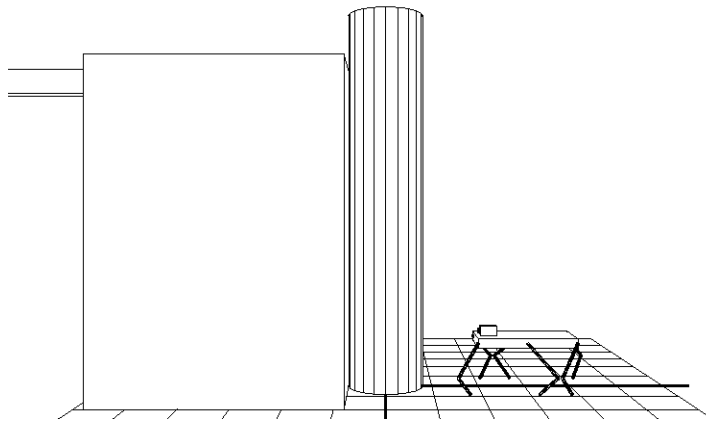


Рис. 2.3.1: Исходная позиция робота

Более сложные варианты поведения робота при переходе со столба на верхнюю часть уступа возникают, когда разница между высотой столба и уступа сравнительно невелика. Все эти варианты, так же как выход робота на столб с горизонтальной опорной плоскости или переход на вершину столба, оказываются нерегулярными. Тем не менее, принимается требование комфортабельности движения робота. Это означает, что в каждый момент времени для робота выполняется условие статической устойчивости, нет столкновений с опорной поверхностью и отсутствует взаимное пересечение ног. Если разница высот столба и уступа невелика, робот может перейти со столба на уступ, сохраняя корпус в горизонтальном положении. При значительной разнице высот ему приходится наклонять корпус. Построение движения робота во всех указанных случаях затрудняется неудобной исходной позицией на вершине столба из-за малости круговой опорной площадки. В дальнейшем рассматривается лишь во-

прос о существовании движений, решающих поставленную задачу с учетом полной динамики робота. Задача оптимального управления при преодолении препятствий здесь не рассматривается. Размеры робота и столба соотносятся как  $a_r : r = 1 : 0.4$ .

### 2.3.2. Построение движения

Начало неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  поместим в центр нижнего основания столба. Ось  $O\zeta$  направим вертикально вверх. Робот приближается к столбу в направлении, обратном оси  $O\eta$ .

2.3.1. Походка “галоп” используется при движении по столбу. Шаговые циклы лежат в вертикальной плоскости, параллельной плоскости  $O_r x_r y_r$  и содержащей ось столба. Матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}_i$  при движении вверх по столбу имеют вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ось  $O_r x_r$  направлена вертикально вверх, ось  $O_r y_r$  — в сторону, противоположную оси  $O\xi$ , ось  $O_r z_r$  — вдоль оси  $O\eta$ . В формулах (1.3.4) для координат точек  $C'_i$  принимается  $d = d_c = 0.47a_r$ . Остальные постоянные в (1.3.1), а также величины  $d_x$  и  $d_y$  остаются такими же, как и для походки “трешки”.

2.3.2. Залезание на столб начинается, когда передний край корпуса робота приближается к столбу на расстояние  $(d_c - c/2 - r) > 0$ . В начальный момент времени положение передних ног соответствует точке  $A$  шагового цикла, средних — точке  $B$ , задних — точке  $C$ . Ноги расположены симметрично относительно плоскости  $O_r x_r z_r$ . Точка переднего края корпуса, имеющая координаты  $(a/2, 0, 0)$  в осях  $O_r x_r y_r z_r$ , начинает двигаться вертикально вверх с постоянной скоростью  $v_f = a_r/(4t^*)$ . При движении переднего края с такой скоростью робот придет в вертикальное положение за время, соответствующее четырем переносам ног. Точка заднего края, имеющая в осях  $O_r x_r y_r z_r$  координаты  $(-a_r/2, 0, 0)$ , движется по горизонтальной прямой на расстоянии  $d$  от оси  $O\eta$ . Такое движение корпуса продолжается в интервале времени  $t_1 \leq t < t_1 + 4t^* = t_5$ .

Одновременно с началом движения корпуса начинают переноситься передние ноги на столб. В момент  $t_1$  начала переноса передних ног абсолютные радиус-векторы стоп  $\mathbf{r}_i(t_1) = (\xi_i(t_1), \eta_i(t_1), \zeta_i(t_1))$

имеют вид

$$\mathbf{r}_i(t_1) = \begin{cases} ((-1)^i x_f, d_c + x^*, 0), & i = 5, 6, \\ ((-1)^i x_f, d_c + a_r/2 - x^*, 0), & i = 3, 4, \\ ((-1)^i x_f, d_c + a_r, 0), & i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Задаются планируемые к моменту  $t_2 = t_1 + t^*$  векторы  $\mathbf{r}_i(t_2)$  точек постановки передних ног:  $\mathbf{r}_i(t_2) = ((-1)^i x_f, 0, d + a_r - 5x^*)$ ,  $i = 5, 6$ . Оси координат  $C'_i x'_i y'_i$  выбираются следующим образом:

$$C'_i y'_i \parallel \boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\rho}_i), \quad C'_i x'_i \parallel \boldsymbol{\rho}_i, \quad \mathbf{r}_{ci} = (\mathbf{r}_i(t_1) + \mathbf{r}_i(t_2))/2, \quad (2.3.2)$$

где  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i(t_2) - \mathbf{r}_i(t_1)$ ,  $\mathbf{e}_n = (-1)^i \mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{r}_{ci}$  — радиус-вектор точки  $C'_i$ . Траектории переноса ног в осях  $C'_i x'_i y'_i$  задаются формулами

$$x'_i = -d_x \cos \varphi, \quad y'_i = (d_y + y_s) \sin \varphi - y_s,$$

где  $d_x = \rho_i/2$ , а  $d_y = 0.03a_r$  соответствует стандартному шаговому циклу,  $\varphi = \pi(t - t_1)/t^*$ . Таким образом, радиус-векторы  $\mathbf{r}_i(t)$  стоп передних ног при их переносе можно вычислить по формулам

$$\mathbf{r}_i(t) = x'_i \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\rho_i} + y'_i \frac{\boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\rho}_i)}{|\boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\rho}_i)|} + \mathbf{r}_{ci}. \quad (2.3.3)$$

Стопы остальных ног остаются в опоре:  $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(t_1)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Абсолютные радиус-векторы  $\mathbf{p}_i(t)$  точек крепления ног при залезании на столб задаются выражениями

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{cases} \left( \frac{b_r}{2} (-1)^i, d_c, d + v_f(t - t_1) \right), & i = 5, 6, \\ \left( \frac{b_r}{2} (-1)^i, d_c + \frac{\sqrt{a_r^2 - (v_f(t - t_1))^2}}{2}, d + \frac{v_f(t - t_1)}{2} \right), & i = 3, 4, \\ \left( \frac{b_r}{2} (-1)^i, d_c + \sqrt{a_r^2 - (v_f(t - t_1))^2}, d \right), & i = 1, 2. \end{cases}$$

Матрица перехода от осей  $O\xi\eta\zeta$  к  $O_r x_r y_r z_r$  в данном случае имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

где  $\theta$  — угол между корпусом и отрицательным направлением оси  $O\eta$ , так что  $\sin \theta = v_f(t - t_1)/a_r$ . Поэтому  $\mathbf{q}_i = (q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i)$ , где  $\mathbf{G}$  — линейный оператор, отвечающий матрице  $G$ . Законы изменения шарнирных углов определены формулами (1.1.3).

В момент  $t = t_2$  передние ноги оказываются в своих точках опоры на столбе и начинается перенос задних ног, который должен закончиться к моменту  $t_3 = t_2 + t^*$ . При  $t_2 \leq t < t_3$  стопы задних ног из начальных позиций  $\mathbf{r}_i(t_1)$ ,  $i = 1, 2$  (формула (2.3.1)) переносятся по стандартному шаговому циклу, описанному в разд. 2.3.1, остальные остаются в опоре. Таким образом,

$$\mathbf{r}_i(t_3) = \begin{cases} (\xi_i(t_2) - 2x^*, \eta_i(t_2), \zeta_i(t_2)), & i = 1, 2, \\ \mathbf{r}_i(t_2), & i = 3, \dots, 6. \end{cases}$$

На следующих двух этапах в соответствии с (2.3.1), (2.3.2) на столб последовательно переносятся стопы средних и задних ног, при каждом из переносов остальные четыре ноги остаются в опоре

$$\mathbf{r}_i(t_4) = \begin{cases} ((-1)^i x_f, 0, d + a_r/2 - 4x^*), & i = 3, 4, \\ \mathbf{r}_i(t_3), & i = 1, 2, 5, 6. \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_i(t_5) = \begin{cases} ((-1)^i x_f, 0, d - 3x^*), & i = 1, 2, \\ \mathbf{r}_i(t_4), & i = 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

В результате маневра стопы робота находятся на столбе в исходной позиции для походки “галоп”, сдвинутой вниз по вертикали на  $4x^*$ . Этот сдвиг введен в связи с тем, что в условиях задачи длины ног не хватает для непосредственного достижения позиции, при которой реализуется стандартная походка “галоп”. Далее следуют три переноса пар ног вертикально вверх по стандартным шаговым циклам при  $d_x = 2x^*$ , чтобы робот пришел в указанную стандартную позицию.

2.3.3. Для упрощения обозначений примем, что переход на вершину начинается в момент времени  $t_1$  (который, естественно, не совпадает с  $t_1$  в разд. 2.3.2). Указанный маневр осуществляется роботом из следующей начальной позиции: передний край корпуса отстоит от вершины столба на  $x^*$ , так что  $\zeta_O(t_1) = h - x^* - a_r/2$ , где  $h$  — высота столба, а  $\zeta_O$  — аппликата центра  $O_r$  корпуса. Исходные координаты стоп  $\mathbf{r}_i(t_1) = (\xi_i(t_1), \eta_i(t_1), \zeta_i(t_1))$  имеют вид

$$\mathbf{r}_i(t_1) = \begin{cases} ((-1)^i x_f, 0, \zeta_O + a_r/2 - x^*), & i = 5, 6, \\ ((-1)^i x_f, 0, \zeta_O), & i = 3, 4, \\ ((-1)^i x_f, 0, \zeta_O - a_r/2 + x^*), & i = 1, 2. \end{cases}$$

Далее происходят последовательные переносы пар ног (формулы (2.3.1), (2.3.2)) в точки постановки  $\mathbf{r}_m(t_n) = (\xi_m(t_n), \eta_m(t_n), \zeta_m(t_n))$ ,

$\overline{m = 1, 6}$ , вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \eta_i(t_2) &= 0, & \xi_i(t_2) &= (-1)^i x_f, & \zeta_i(t_2) &= h, \\ \eta_j(t_3) &= -0.4r, & \xi_j(t_3) &= (-1)^j \sqrt{x_f^2 - \eta_j^2(t_3)}, & \zeta_j(t_3) &= \zeta_j(t_1) + 4.2a_r x^*, \\ \eta_k(t_4) &= 0.6r, & \xi_k(t_4) &= (-1)^k \sqrt{x_f^2 - \eta_k^2(t_4)}, & \zeta_k(t_4) &= \zeta_k(t_1) + 5.7a_r x^*. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Здесь  $i = 5, 6$ ;  $j = 3, 4$ ;  $k = 1, 2$ ;  $t_n = t_1 + (n-1)t^*$ ,  $n = \overline{2, 8}$ . В полуинтервале  $t \in [t_1, t_2)$  переносятся передние ноги, при  $t \in [t_2, t_3)$  — средние, при  $t \in [t_3, t_4)$  — задние. Коэффициенты в (2.3.4) выбраны таким образом, чтобы увеличить плечо и тем самым уменьшить шарнирные моменты во время предстоящего поворота корпуса при условии, что ноги касаются цилиндра только стопами. Корпус перемещается вверх так, что по окончании трех переносов будет выполнено  $\zeta_O(t_4) = h$ , т.е. его середина достигает верхней кромки столба.

В полуинтервале  $t \in [t_4, t_8)$  осуществляется поворот корпуса в горизонтальное положение и перенос ног на вершину столба. Точки постановки на вершине столба вычисляются по выражениям

$$\begin{aligned} \xi_i(t_5) &= (-1)^i 0.625r, & \eta_i(t_5) &= -\sqrt{r'^2 - \xi_i^2(t_5)}, & \zeta_i(t_5) &= h, & i &= 5, 6, \\ \xi_j(t_6) &= (-1)^j r', & \eta_j(t_6) &= 0.175r, & \zeta_j(t_6) &= h, & j &= 3, 4, \\ \xi_k(t_7) &= (-1)^k 0.625r, & \eta_k(t_7) &= \sqrt{r'^2 - \xi_k^2(t_7)}, & \zeta_k(t_7) &= h, & k &= 1, 2, \\ \xi_n(t_8) &= \xi_n(t_7), & \eta_n(t_8) &= 0, & \zeta_n(t_8) &= h, & n &= 3, 4. \end{aligned}$$

Здесь  $r' = 0.875r$  предохраняет стопы от попадания на край верхней площадки, значение  $\eta_j(t_6)$  позволяет сохранить достаточный запас устойчивости при переносе задних ног на вершину столба и вместе с тем защищает от пересечения их со средними ногами во время переноса. В полуинтервале  $t \in [t_4, t_5)$  переносятся передние ноги, при  $t \in [t_5, t_6)$  — средние, при  $t \in [t_6, t_7)$  — задние и при  $t \in [t_7, t_8)$  — снова средние. Последний перенос средних ног обеспечивает заданную финальную позицию робота на вершине столба. Ноги, перенос которых не производится на каждом из этапов, поддерживаются в опорном положении.

Закон движения точки  $O_r$  корпуса задается равенствами

$$\xi_O = 0, \quad \eta_O = d \cos \tau, \quad \zeta_O = h + 0.67d_c \sin \tau, \quad \tau = \frac{\pi}{2(t^*)^3} (t - t_1)^3.$$

Степень 3 в выражении для  $\tau$  обусловлена тем, что при начале маневра скорость и ускорение корпуса отсутствуют. Корпус направлен по касательной к траектории точки  $O_r$ , так что абсолютные ко-

ординаты точек крепления ног к корпусу выражаются формулами

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}, \eta_{pi}, \zeta_{pi}) = ((-1)^i b_r / 2, \eta_O - x_{pi} \sin \tau, \zeta_O + x_{pi} \cos \tau),$$

где  $\mathbf{p}_i = (x_{pi}, y_{pi}, z_{pi})$  — радиус-векторы точек крепления ног в системе координат  $O_r x_r y_r z_r$  (разд. 1.1).

Матрица  $G$  перехода к системе координат  $O_r x_r y_r z_r$  на данном этапе имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \tau & \cos \tau \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tau & \sin \tau \end{pmatrix}.$$

Весь маневр проиллюстрирован на рис. 2.3.2, где  $2_n, 4_n, 6_n$  — точки постановки стоп с четными номерами на всех этапах переносов, а  $C_n$  — положения центра корпуса. Перенос в точку с индексом  $n$  осуществляется при  $t \in [t_n, t_{n+1})$ , причем  $n = 0$  соответствует начальной позиции робота. На невидимой стороне столба ноги с номерами 5, 3, 1 переносятся симметрично соответственно походке “галоп”.

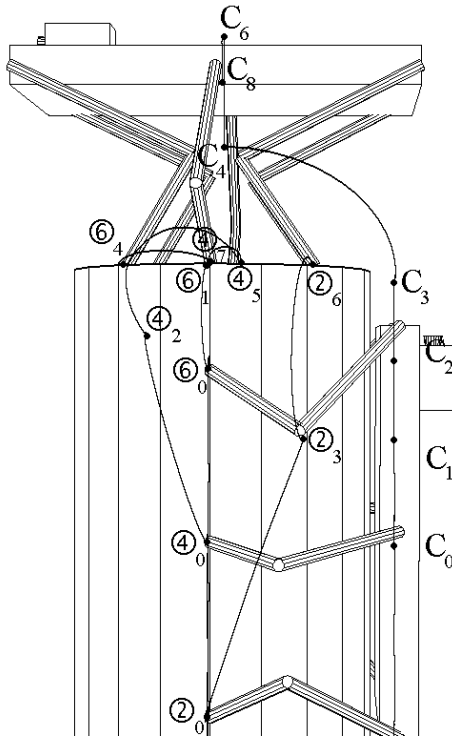


Рис. 2.3.2: Маневр залезания на вершину

После того как робот переместился на вершину столба, перед ним ставится задача выдвинуться на верхнюю горизонтальную площадку уступа высоты  $h_1$  от основания столба. Если  $h - h_1 > a + x^*$ , то

робот может слезть на уступ, используя алгоритм залезания, разворачивающийся в обратном времени с изменением знака  $\eta$ -х компонент траекторий программного движения и соответствующей перенумерацией ног. Рассмотрим некоторые случаи, когда высота уступа близка к высоте столба.

2.3.4.  $h_1 = h - 0.6a_r$ . Маневр проиллюстрирован на рис. 2.3.3, смысл обозначений такой же, как для рис. 2.3.2. Начинается маневр из финальной позиции разд. 2.3.4 в момент времени  $t_1$ , корпус находится в горизонтальном положении на уровне  $\zeta_O(t_1) = h + d$ . Для этапа с номером  $n$  примем обозначения:  $t \in [t_n, t_{n+1})$ ,  $t_{n+1} = t_n + t^*$ ,  $\tilde{t} = (t - t_n)/t^*$ ,  $\tilde{t} \in [0, 1)$ . Если в описании этапа ничего не говорится о переносе какой-либо из пар ног, то эта пара остается в опоре, если не говорится о перемещении корпуса, то он остается неподвижным. Траектории переносов стоп строятся в виде (1.3.3), где  $t_0 = t_n$ ,

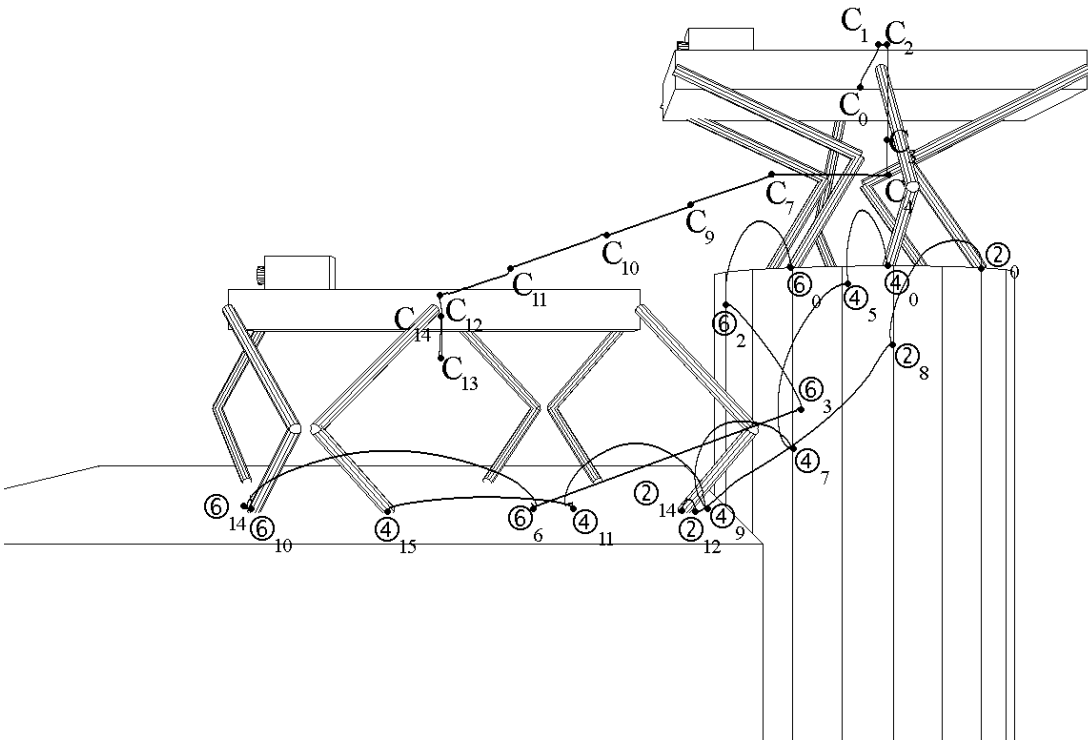


Рис. 2.3.3: Маневр перелезания на уступ для случая  $h_1 = h - 0.6a_r$

$t_1 = t_{n+1}$ ,  $w = [\sigma(t^* - \sigma)]^{-1}$ . Таким образом,  $\lambda$  в (1.3.3) изменяется от 0 до 1 при  $t \in [t_n, t_{n+1})$ , при этом

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_n = ((-1)^i 0.5, 0, 1), \quad \hat{k} = \tilde{k}_n = \begin{cases} 1, & n = 4, \\ 0, & n = 6, 12, \\ 5 & \text{для остальных } n. \end{cases}$$

Для последующих этапов, номер которых имеет вид 2.3.4. $k$ , принимается  $n = k$ . Дадим описание этих этапов.

2.3.4.1. Корпус отводится назад и одновременно поднимается до уровня  $h + 0.62a_r$ . Это делается для того, чтобы обеспечить запас статической устойчивости при последующем переносе передних стоп и избежать взаимного пересечения ног. Законы движения точек крепления ног и стоп выражаются формулами

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_1), [0.05a_r - x_{pi} - \eta_{pi}(t_1)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_1), [h + 0.62a_r - \zeta_{pi}(t_1)]\tilde{t} + \zeta_{pi}(t_1)),$$

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(t_1).$$

2.3.4.2. Передние ноги выносятся за пределы верхней площадки, но их стопы не достигают опоры. Из-за опасности пересечения передних и средних ног половину времени данного этапа корпус остается неподвижным, затем отодвигается назад по отношению к текущей позиции на расстояние  $0.075a_r$ . Это смещение корпуса объясняется необходимостью создания достаточного запаса статической устойчивости при выносе передних ног вперед

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_i(t_2), & t \in [t_2, t_2 + t^*/2), \\ \xi_{pi}(t_2), \eta_i(t), \zeta_{pi}(t_2), & t \in [t_2 + t^*/2, t_3), \end{cases}$$

где

$$\eta_i(t) = [0.075a_r - x_{pi} - \eta_{pi}(t_2)] \frac{t - t_2 - t^*/2}{t^*/2} + \eta_{pi}(t_1).$$

Причем

$$\mathbf{r}_j(t_3) = (\xi_{j-2}(t_2), -r, h - 0.1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.4.3. Корпус опускается до уровня  $h + 0.42a_r$ . Стопы передних ног переносятся в точки постановки на боковой поверхности столба.

Для этого этапа принимается

$$\mathbf{e}_n = ((-1)^i, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_3), \eta_{pi}(t_3), (-0.2a_r)\tilde{t} + \zeta_{pi}(t_3)),$$

$$\xi_j(t_4) = \frac{\xi_j(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_j^2(t_2) + \eta_j^2(t_2)}}, \quad \eta_j(t_4) = \frac{\eta_j(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_j^2(t_2) + \eta_j^2(t_2)}},$$

$$\zeta_j(t_4) = h - 0.35a_r, \quad j = 5, 6.$$

Как и прежде, параметр  $\epsilon$  характеризует величину программного “заглубления” (сжатия столба ногами в радиальном направлении).



2.3.4.4. Переносов ног не производится. Средняя точка корпуса опускается вертикально вниз

$$\eta_m = \eta_{p3}(t_4), \quad \zeta_m = (-0.15a_r)\tilde{t} + \zeta_{p3}(t_4), \quad m = 3, 4,$$

где  $\eta_m, \zeta_m$  – соответствующие абсолютные координаты точек крепления средних ног. Точки крепления других ног движутся в соответствии со следующим правилом: предполагается, что сохраняется расстояние  $l$  между точками крепления и опоры задних ног, достигнутое к началу этапа. Пусть  $\eta_b, \zeta_b$  – абсолютные координаты задних точек подвеса, а  $\eta_{b0} = \eta_1(t_4), \zeta_{b0} = \zeta_1(t_4)$  – значения координат задних точек опоры в момент начала этапа  $t_4$ . Тогда должны быть выполнены условия

$$(\eta_m - \eta_b)^2 + (\zeta_m - \zeta_b)^2 = (a_r/2)^2, \quad (\eta_b - \eta_{b0})^2 + (\zeta_b - \zeta_{b0})^2 = l^2,$$

где первое равенство означает, что расстояние между точками подвеса фиксировано. Отсюда

$$\begin{aligned} \eta_b &= k_1 - k_2\zeta_b, \\ \zeta_b &= \frac{\sqrt{(k_2^2 + 1)(a_r/2)^2 - (\eta_m - k_1 + k_2\zeta_m)^2} - [(\eta_m - k_1)k_2 - \zeta_m]}{(k_2^2 + 1)}, \\ k_1 &= \frac{(a_r/2)^2 - l^2 - \eta_m^2 + \eta_{b0}^2 - \zeta_m^2 + \zeta_{b0}^2}{2(\eta_{b0} - \eta_m)}, \quad k_2 = \frac{\zeta_{b0} - \zeta_m}{\eta_{b0} - \eta_m}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{cases} (\xi_{pi}(t_4), \eta_b, \zeta_b), & i = 1, 2, \\ (\xi_{pi}(t_4), \eta_{pi}(t_4), \zeta_m), & i = 3, 4, \\ (\xi_{pi}(t_4), \eta_m + (\eta_m - \eta_b), \zeta_m + (\zeta_m - \zeta_b)), & i = 5, 6. \end{cases}$$

$$\cos \tau = \frac{\eta_m - \eta_b}{a_r/2}, \quad \sin \tau = \frac{\zeta_m - \zeta_b}{a_r/2}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \cos \tau & \sin \tau \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \tau & -\cos \tau \end{pmatrix}.$$

2.3.4.5. Стопы средних ног переносятся на боковую поверхность столба, корпус неподвижен:

$$\begin{aligned} \xi_j(t_6) &= \frac{\xi_j(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_j^2(t_2) + \eta_j^2(t_2)}}, \quad \eta_j(t_6) = \frac{\eta_j(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_j^2(t_2) + \eta_j^2(t_2)}} - 0.1a_r, \\ \zeta_j(t_6) &= h - 0.05a_r, \quad j = 3, 4. \end{aligned}$$

2.3.4.6. Стопы передних ног переносятся на уступ на максимальное возможное удаление от столба:

$$\mathbf{r}_j(t_7) = (\xi_j(t_6), -(r + 0.475a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.4.7. Стопы средних ног меняют свое положение на боковой поверхности столба, корпус продвигается горизонтально вперед:

$$\xi_j(t_8) = \frac{\xi_{j+2}(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_{j+2}^2(t_2) + \eta_{j+2}^2(t_2)}}, \quad \eta_j(t_8) = \frac{\eta_{j+2}(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_{j+2}^2(t_2) + \eta_{j+2}^2(t_2)}},$$

$$\zeta_j(t_8) = h - 0.45a_r, \quad j = 3, 4,$$

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_1), [-(r - 0.15a_r - x_{pi} \cos \tau) - \eta_{pi}(t_7)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_7), \zeta_{pi}(t_7)).$$

2.3.4.8. Стопы задних ног переносятся на боковую поверхность столба:

$$\xi_j(t_9) = \frac{\xi_{j+2}(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_{j+2}^2(t_2) + \eta_{j+2}^2(t_2)}}, \quad \eta_j(t_9) = \frac{\eta_{j+2}(t_2)(r - \epsilon)}{\sqrt{\xi_{j+2}^2(t_2) + \eta_{j+2}^2(t_2)}},$$

$$\zeta_j(t_9) = h - 0.2a_r, \quad j = 1, 2.$$

2.3.4.9. Стопы средних ног переносятся на уступ. На протяжении этапов 9-12 корпус движется вниз, причем направление движения его центра и наклонная ориентация корпуса параллельны:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{(0, \eta_{p5}(t_n) - \eta_{p3}(t_n), \zeta_{p5}(t_n) - \zeta_{p3}(t_n))}{\sqrt{(\eta_{p5}(t_n) - \eta_{p3}(t_n))^2 + (\zeta_{p5}(t_n) - \zeta_{p3}(t_n))^2}},$$

$$\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{p}_3(t_n) + (a_r \tilde{t}/4 + x_{pi})\boldsymbol{\nu}, \quad n = 9, \dots, 12,$$

$$\mathbf{r}_j(t_{10}) = (\xi_j(t_9), -(r + 0.05a_r), h_1), \quad j = 3, 4.$$

2.3.4.10. Стопы передних ног переносятся вперед в точки опоры, расположенные на уступе:

$$\mathbf{r}_j(t_{11}) = (\xi_j(t_{10}), -(r + 1.2a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.4.11. Аналогично вперед переносятся стопы средних ног:

$$\mathbf{r}_j(t_{12}) = (\xi_j(t_{11}), -(r + 0.4a_r), h_1), \quad j = 3, 4.$$

2.3.4.12. Стопы задних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{r}_j(t_{13}) = (\xi_j(t_{11}), -(r + 0.1a_r), h_1), \quad j = 1, 2.$$

После того как робот полностью перешел на уступ, его конфигурация перестраивается для возможности дальнейшего движения по горизонтальной поверхности уступа. На рис. 2.3.3 на последних двух этапах перестроения ноги переносятся “трешками”.

2.3.5. Рассмотрим случай, когда высота уступа больше высоты столба:  $h_1 = h + 0.35a_r$ . Такая высота является предельной для стандартной принятой конфигурации робота на столбе и его конструкции. Передний край робота нависает над уступом, и при значениях  $h_1 > h + 0.35a_r$  возникает опасность для коленных шарниров оказаться ниже соответствующих точек опоры на уступе при выбранных значениях  $l_1, l_2$ .

Для этого случая (см. рис. 2.3.4) справедливы обозначения разд. 2.3.4.

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} (0, 0, 1), & n = 1, 2, \\ ((-1)^i, 0, 1), & n > 2, \end{cases} \quad \tilde{k}_n = \begin{cases} 1, & n = 7, \\ 5, & n \neq 7. \end{cases}$$

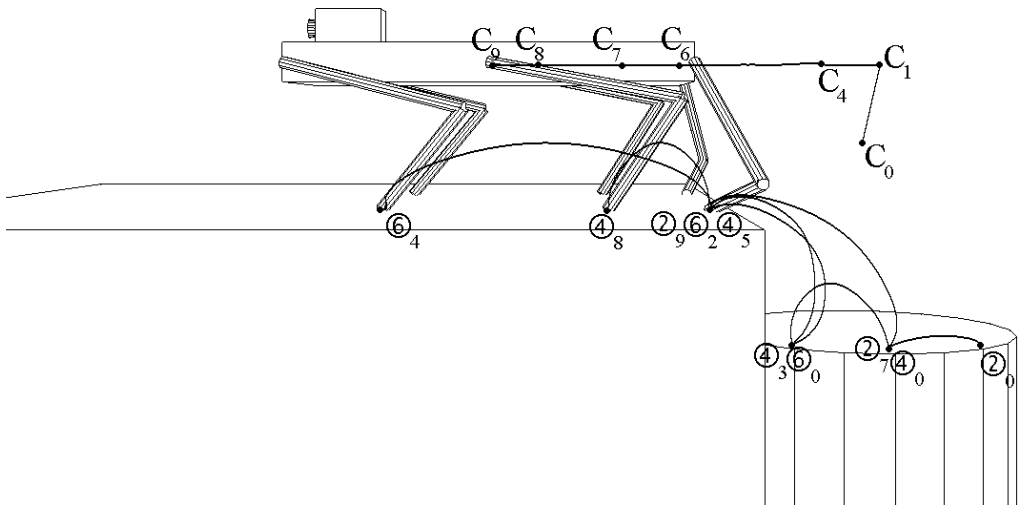


Рис. 2.3.4: Маневр перелезания на уступ для случая  $h_1 = h + 0.35a_r$

Для всех этапов

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этапов с номерами 2.3.5. $k$  принимается  $n = k$ . Дадим следующее описание этапов.

2.3.5.1. Аналогичен п. 2.3.4.1, причем

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_1), [0.05a_r - x_{pi} - \eta_{pi}(t_1)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_1), [h + 0.72a_r - \zeta_{pi}(t_1)]\tilde{t} + \zeta_{pi}(t_1)).$$

2.3.5.2. Стопы передних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{r}_j(t_3) = (\xi_{j-2}(t_2), -(r + 0.05a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.5.3. Стопы средних ног переносятся в позиции передних на вершине столба на момент начала маневра:

$$\mathbf{r}_j(t_4) = \mathbf{r}_{j+2}(t_2), \quad j = 3, 4.$$

2.3.5.4. Корпус начинает движение вперед, передние ноги переносятся вперед на уступе:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), [0.3a_r - r - x_{pi} - \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_n), \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_5) = (\xi_j(t_4), -(r + 0.85a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

По окончании этапа корпус останавливается.

2.3.5.5. Стопы средних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{r}_j(t_6) = (\xi_j(t_2), -(r + 0.05a_r), h_1), \quad j = 3, 4.$$

2.3.5.6. Перенос ног не производится, корпус движется вперед на протяжении этапов 2.3.5.6–2.3.5.9:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.1a_r + x_{pi}) + \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t}, \zeta_{pi}(t_n)).$$

2.3.5.7. Стопы задних ног переносятся в позиции средних на вершине столба на момент начала маневра:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.2a_r + x_{pi}) + \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t}, \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_8) = (\xi_{j+2}(t_2), \eta_{j+2}(t_2), h), \quad j = 1, 2.$$

2.3.5.8. Стопы средних ног переносятся вперед на уступе:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.2a_r + x_{pi}) + \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t}, \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_9) = (\xi_j(t_8), -(r + 0.3a_r), h_1), \quad j = 3, 4.$$

2.3.5.9. Стопы задних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), [-(r + 0.6a_r + x_{pi}) - \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_n), \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_{10}) = (\xi_j(t_9), -(r + 0.05a_r), h_1), \quad j = 1, 2.$$

Этим заканчивается переход на уступ и тем самым — маневр 2.3.5.

При  $h - h_1 > a_r + x^*$  возможен инверсный метод (задом наперед) перелезания на уступ. Для этого робот должен оказаться в таком положении, чтобы его задний край нависал над уступом, а продольная ось  $O_r x_r$  была сонаправлена с  $O\zeta$ . С этой целью осуществляется

переход поперек поверхности столба в диаметрально противоположное положение.

2.3.6. Пусть  $t_0$  — момент начала поперечного движения. Номер этапа  $n$ , соответствующего текущему моменту времени  $t$ , вычисляется по формулам

$$n' = \frac{t}{t^*} + 1, \quad g' = \frac{(n' - (n' - 1) \bmod 2) - 1}{2},$$

$$n = \left\lfloor \frac{n' - 1}{2} \right\rfloor + 1, \quad t := t - 2g't^* - t_0,$$

где функция “mod” вычисляет остаток от деления. Таким образом,  $n$  принимает значения 1, 2.

Пусть  $\sigma = \pi/6$  — полярный угол продвижения центра робота поперек поверхности столба за время, равное  $2t^*$ . Вершина полярного угла лежит на оси столба,  $\hat{b}_r = (\eta_{p3}(t_0) + \eta_{p4}(t_0))/2$  — расстояние центра робота от оси столба.

На каждом из этапов

$$\tau = 0.5\sigma(t - (n - 1)t^*)/t^* + 0.5(2g' + (n - 1))\sigma,$$

$$\mathbf{p}_i(t) = (-\hat{b}_r \sin \tau + y_{pi} \cos \tau, \hat{b}_r \cos \tau + y_{pi} \sin \tau, z_{pi}),$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Переносы стоп осуществляются походкой “трешки”

$$\mathbf{r}_i(t_2) = (\xi_i(t_1) \cos \sigma - \eta_i(t_1) \sin \sigma, \xi_i(t_1) \sin \sigma + \eta_i(t_1) \cos \sigma, \zeta_i(t_1)),$$

$$i = \begin{cases} 1, 4, 5, & n = 1, \\ 2, 3, 6, & n = 2, \end{cases}$$

вторая “трешка” остается в опоре:

$$\mathbf{r}_i(t) = (k_d \xi_i(t_1), k_d \eta_i(t_1), \zeta_i(t_1)), \quad i = \begin{cases} 1, 4, 5, & n = 2, \\ 2, 3, 6, & n = 1, \end{cases}$$

$$k_d = \frac{r - \epsilon}{\sqrt{\xi_i(t_1)^2 + \eta_i(t_1)^2}}.$$

Нормали  $\mathbf{e}_n$  находятся в зависимости от  $\tau$ :  $\Gamma = \langle \tau / (2\pi) \rangle 2\pi$ . Тогда

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} ((-1)^i, 0, 0), & \Gamma < \pi/2 - \sigma/2, \\ (0, (-1)^i, 0), & \Gamma < \pi - \sigma/2, \\ (0, (-1)^{i+1}, 0), & \Gamma < 2\pi - \sigma/2, \\ ((-1)^i, 0, 0), & \Gamma \geq 2\pi - \sigma/2. \end{cases}$$

После того как робот перебрался на противоположную сторону столба, слезть на уступ можно, используя в обратном порядке алгоритм разд. 2.3.3.

2.3.7.  $h_1 = h - 0.2a_r$ . Случай, когда высота уступа отличается от высоты столба настолько мало, что нет необходимости поднимать или опускать корпус, чтобы достать до уступа

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} (0, 0, 1), & n = 1, 2, \\ ((-1)^i, 0, 1), & n > 2, \end{cases} \quad \tilde{k}_n = \begin{cases} 1, & n = 3, 4, 7, 10, \\ 5 & \text{для остальных } n. \end{cases}$$

Для всех этапов

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этапов с номерами 2.3.7. $k$  принимается  $n = k$ . Дадим следующее описание этапов.

2.3.7.1. Корпус отодвигается назад:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_1), [(0.075a_r - x_{pi}) - \eta_{pi}(t_1)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_1), \zeta_{pi}(t_1)).$$

2.3.7.2. Стопы передних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{r}_j(t_3) = (\xi_{j-2}(t_2), -(r + 0.05a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.7.3. Аналогичен п. 2.3.6.3.

$$\mathbf{r}_j(t_4) = \mathbf{r}_{j+2}(t_2), \quad j = 3, 4.$$

2.3.7.4. Стопы передних ног переносятся вперед на уступе, корпус движется вперед до окончания этапа 2.3.7.6:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), [(0.3a_r - r - x_{pi}) - \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_n), \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_5) = (\xi_j(t_4), -(r + 0.675a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.7.5. Стопы средних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.15a_r + x_{pi})]\tilde{t} + \eta_{pi}(t_n), \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_6) = (\xi_j(t_2), -(r + 0.05a_r), h_1), \quad j = 3, 4.$$

2.3.7.6. Перенос ног не производится:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.2a_r + x_{pi}) + \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t}, \zeta_{pi}(t_n)).$$

2.3.7.7. Стопы задних ног переносятся в позиции средних на вершине столба на момент начала маневра, корпус неподвижен:

$$\mathbf{r}_j(t_8) = \mathbf{r}_{j+2}(t_2), \quad j = 1, 2.$$

2.3.7.8. Стопы средних ног переносятся вперед на уступе, корпус движется вперед:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.3a_r + x_{pi}) + \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t}, \zeta_{pi}(t_n)),$$

$$\mathbf{r}_j(t_9) = (\xi_j(t_8), -(r + 0.4a_r), h_1), \quad j = 3, 4.$$

2.3.7.9. Стопы передних ног переносятся вперед на уступе, корпус неподвижен:

$$\mathbf{r}_j(t_{10}) = (\xi_j(t_9), -(r + 1.2a_r), h_1), \quad j = 5, 6.$$

2.3.7.10. Перенос ног не производится, корпус движется вперед:

$$\mathbf{p}_i(t) = (\xi_{pi}(t_n), \eta_{pi}(t_n) - [(r + 0.75a_r + x_{pi}) + \eta_{pi}(t_n)]\tilde{t}, \zeta_{pi}(t_n)),$$

2.3.7.11. Корпус неподвижен, стопы задних ног переносятся на уступ:

$$\mathbf{r}_j(t_{12}) = (\xi_j(t_{11}), -(r + 0.1a_r), h_1), \quad j = 1, 2.$$

### 2.3.3. Компьютерное моделирование

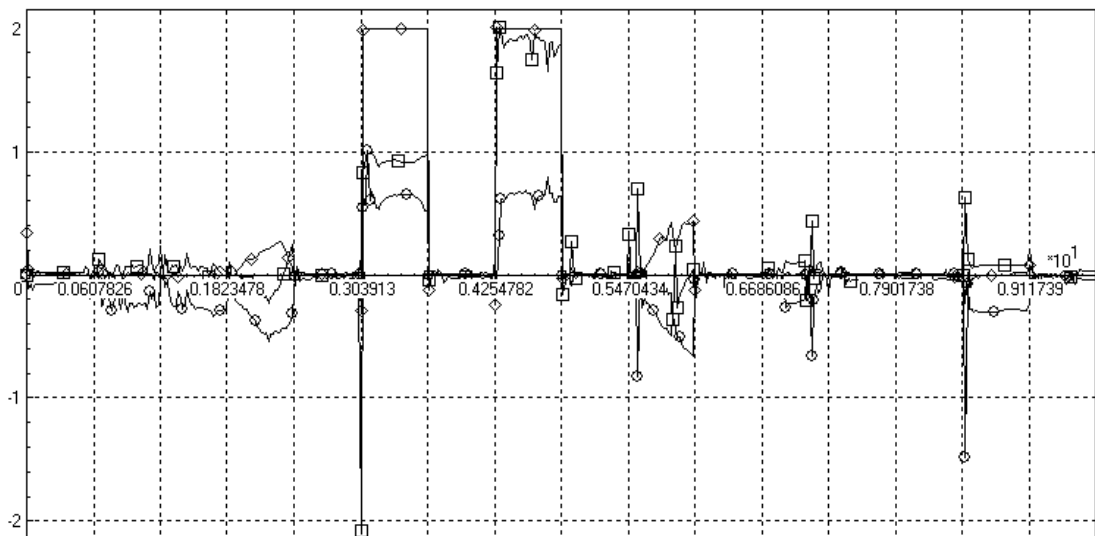


Рис. 2.3.5: Зависимости шарнирных моментов средних ног от времени для маневра на рис. 2.3.3

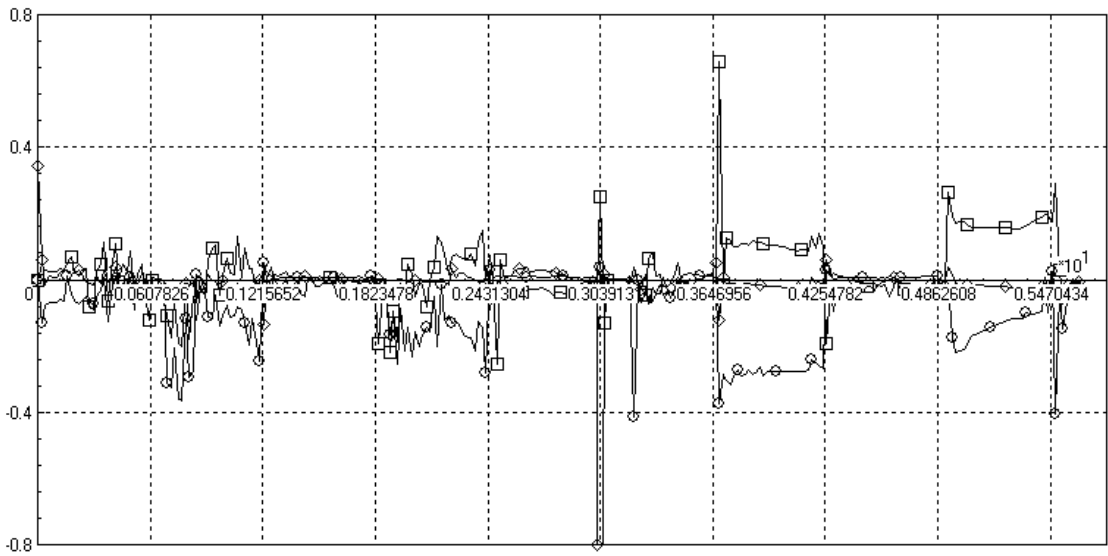


Рис. 2.3.6: Зависимости шарнирных моментов средних ног от времени для маневра 2.3.4

На рис. 2.3.5, 2.3.6 представлены зависимости шарнирных моментов средних ног:  $M_3^\alpha(t)/\bar{M}$  (символ  $\diamond$ ),  $M_3^\beta(t)/\bar{M}$  (символ  $\square$ ),  $M_3^\gamma(t)/\bar{M}$  (символ  $\circ$ ), причем  $\bar{M} = 75.2$  Нм — характерный масштаб, приблизительно соответствующий моменту силы тяжести корпуса относительно оси  $O\xi$ , когда робот идет по столбу. Графики, изображенные на рис. 2.3.5, соответствуют маневру на рис. 2.3.3. Графики на рис. 2.3.6 отвечают маневру на рис. 2.3.4.

Пунктирные вертикальные линии отмечают начало и конец отдельных этапов движения. Видно, что наибольшие шарнирные моменты возникают для степени свободы, соответствующей углу  $\alpha$ , и это происходит на этапе перехода робота на вершину столба. Следовательно, для роботов с небольшими силовыми возможностями будет предпочтительно использовать вариант 2.3.6 перехода на уступ без залезания на вершину столба.

На рис. 2.3.7 приведен фрагмент компьютерной 3D анимации представленных выше решений в реальном времени. Можно в деталях проанализировать процесс залезания на столб, переход на его вершину, движение поперек столба, переход на уступ и другие подробности движения. Видно, что движение робота в целом является достаточно комфортабельным, и коэффициента трения, равного единице вполне достаточно для реализации всех представленных маневров. Вместе с тем сложность маневров, выполняемых для решения задачи, и сама возможность ее решения существенно зависят как от



геометрических характеристик робота, так и отношения размеров препятствий и робота.

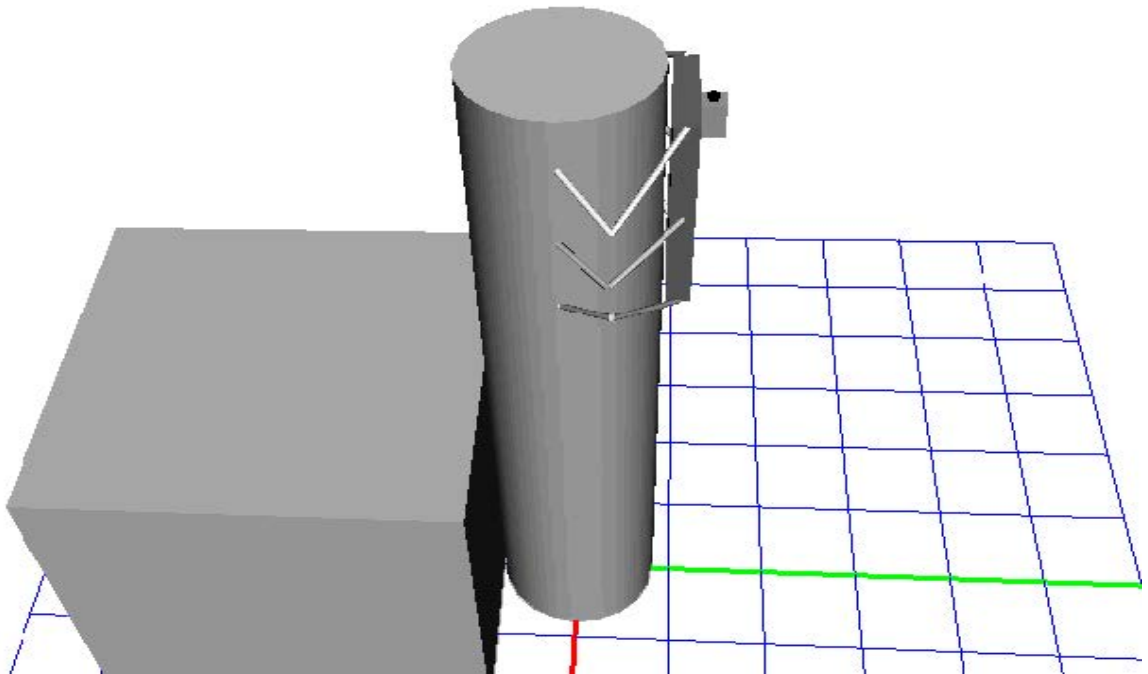


Рис. 2.3.7: Ролик доступен отдельно по адресу <http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa.mp4>

## 2.4. Залезание на крышу по углу дома

### 2.4.1. Двигательная задача

Угол прямоугольного дома с плоской крышей моделируется опорной поверхностью в виде вертикального двугранного угла раствора  $\pi/2$  с горизонтальным верхним основанием. Робот должен, находясь в начальный момент времени на горизонтальной плоскости, переместиться на двугранный угол, охватив его симметрично относительно биссектральной плоскости с двух сторон ногами, а затем продолжить движение вверх. После достижения верхнего основания двугранного угла робот должен перелезть на него и продолжить движение. Задача трудна тем, что, как следует из результатов раздела 2.1, она не может быть решена при коэффициенте трения, меньшем или равном 1. Вместе с тем результаты компьютерного моделирования показывают, что при законах движения, описываемых ниже, коэффициента трения 1.1 оказывается достаточно для вы-

полнения поставленной двигательной задачи. Кроме того, проблема залезания на крышу затруднена узостью опорной горизонтальной площадки в окрестности ее пересечения с двугранным углом, из-за чего возникает опасность взаимного пересечения ног и нарушения устойчивости движения. Решение сформулированной выше задачи может быть интересно с точки зрения организации спасательных работ при пожаре.

### 2.4.2. Движение вверх по вертикальному углу

Предполагается, что в начальный момент движения робот стоит перед углом так, что биссектральная плоскость угла является продольной плоскостью симметрии робота. Плоскость  $O\xi\eta$  неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  совпадает с горизонтальной опорной плоскостью, а ось  $O\eta$  принадлежит биссектральной плоскости двугранного угла. Точка  $O$  лежит посередине между заданными симметричными относительно биссектральной плоскости вертикальными следовыми колеями на плоскостях двугранного угла. Общая структура всего маневра определена походкой галоп.

Алгоритм залезания робота на угол выполняется в несколько этапов. Для этапа с номером 2.4. $n$  обозначим:  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  – моменты начала и конца этапа соответственно,  $t_{n+1} = t_n + t^*$ . Обозначим также  $\mathbf{r}_i(t_k) = (r_{\xi i}(t_k), r_{\eta i}(t_k), r_{\zeta i}(t_k))$ ,  $\mathbf{p}_i(t_k) = (p_{\xi i}(t_k), p_{\eta i}(t_k), p_{\zeta i}(t_k))$  абсолютные радиус-векторы стопы и точки крепления ноги с номером  $i$  в момент времени  $t_k$  соответственно.

В начальный момент времени  $t_0$  корпус ориентирован вдоль оси  $O\eta$ :

$$\mathbf{p}_i(t_0) = \left( (-1)^i b_r / 2, \eta_f + a_r \frac{\lfloor (6-i)/2 \rfloor}{2}, \zeta_f \right),$$

где  $\lfloor \dots \rfloor$  – целая часть числа, заключенного в скобки,  $\xi_f = 0$ ,  $\eta_f$ ,  $\zeta_f$  – абсолютные координаты передней точки корпуса робота. Ноги находятся в исходной позиции походки галоп:

$$\mathbf{r}_i(t_0) = \left( (-1)^i x_f, p_{\eta i}(t_0) + x^* \begin{cases} 1, & i = 5, 6, \\ -1, & i = 3, 4, \\ 0, & i = 1, 2, \end{cases} 0 \right),$$

где  $x_f$  – половина ширины следовой колеи,  $x^*$  – длина опорного участка шагового цикла.

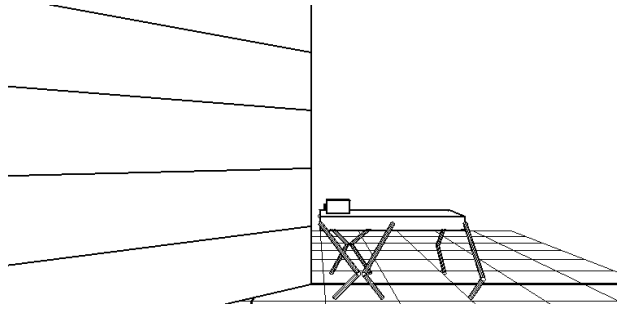


Рис. 2.4.1: Начальная позиция

Движение корпуса строится так, что точка переднего края корпуса движется вертикально вверх, а точка заднего края совершает вынужденное горизонтальное движение. Пусть  $\tau = t - t_0$ . Тогда закон движения передней точки корпуса для первого, второго и третьего этапов выражается формулой  $\zeta_f = \zeta_f(t_0) + \zeta_s$ , где:

$$\zeta_s = \begin{cases} \zeta'_s, & \zeta'_s < a_r, \\ a_r, & \zeta'_s \geq a_r, \end{cases} \quad \zeta'_s = v_s \frac{x^*}{t^*} \begin{cases} \tau, & 0 < \tau \leq 1.5t^*, \\ 1.5t^*, & 1.5t^* < \tau < 2t^*, \\ \tau - 0.5t^*, & \tau \geq 2t^*. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Безразмерный коэффициент  $v_s$  задает скорость движения корпуса. В расчетах было принято значение  $v_s = 4.4$ . Закон движения точек крепления ног на этапах 2.4.1-2.4.3 имеет вид

$$\mathbf{p}_i(t) = \left( p_{\xi_i}(t_{n-1}), p_{\eta_6}(t_{n-1}) + \eta_s \frac{\lfloor (6-i)/2 \rfloor}{2}, p_{\zeta_1} + \zeta_s \frac{\lfloor (i-1)/2 \rfloor}{2} \right).$$

где  $\eta_s = \sqrt{a_r^2 - \zeta_s^2}$ .

2.4.1: ( $0 \leq \tau < t^*$ ). Передние ноги переносятся на опорный двугранный угол, радиус-векторы их точек постановки имеют вид:

$$\mathbf{r}_i(t_1) = ((-1)^i x_f, 0, \zeta_2), \quad i = 5, 6,$$

где  $\zeta_2 = \zeta_f(t_0) + a_r - 5x^*$ .

2.4.2: ( $t^* \leq \tau < 2t^*$ ). Передний край корпуса продолжает движение вверх, как было описано выше, до момента времени  $t_0 + 1.5t^*$ . В интервале ( $1.5t^* \leq \tau < 2t^*$ ) корпус остается неподвижным.

Чтобы обеспечить принадлежность точек постановки задних ног множеству достижимых положений стопы в процессе одного переноса, задние ноги переносятся вперед на горизонтальную плоскость:

$$\mathbf{r}_i(t_2) = (r_{\xi_i}(t_1), r_{\eta_i}(t_1) - 4.75x^*, r_{\zeta_i}(t_1)), \quad i = 1, 2.$$

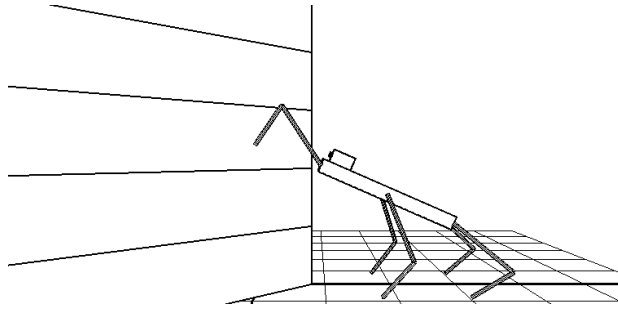


Рис. 2.4.2: Этап 2.4.1

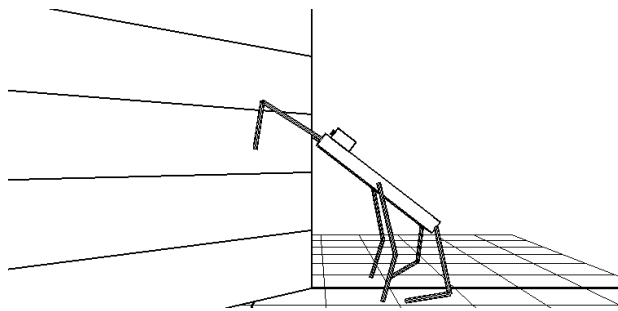


Рис. 2.4.3: Этап 2.4.2

2.4.3. Движение корпуса продолжается в соответствии с формулой (2.4.1). Средние ноги переносятся на угол в точки опоры.

$$\mathbf{r}_i(t_3) = ((-1)^i x_f, 0, \zeta_1), \quad i = 3, 4,$$

где  $\zeta_1 = \zeta_2 - 0.7a_r + x^*$ . Исходные параметры движения выбираются так, чтобы было  $\zeta_1 > 0$  и чтобы соответствующие точки опоры располагались как можно ниже на угле, но находились в пределах досягаемости средних ног.

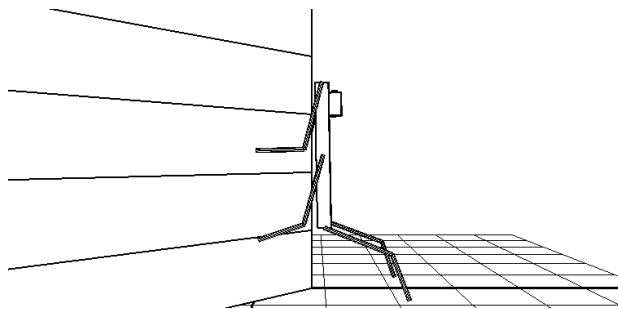


Рис. 2.4.4: Этап 2.4.3

2.4.4. К моменту начала этого этапа корпус уже пришел в вертикальное положение. Передние ноги переносятся вверх в точки опоры

$$\mathbf{r}_i(t_4) = (r_{\xi i}(t_3), r_{\eta i}(t_3) + 9x^*, r_{\zeta i}(t_3)), \quad i = 5, 6.$$

Этим достигается увеличение плеча между средними и передними точками опоры для возможности переноса задних ног (см. раздел 2.1).

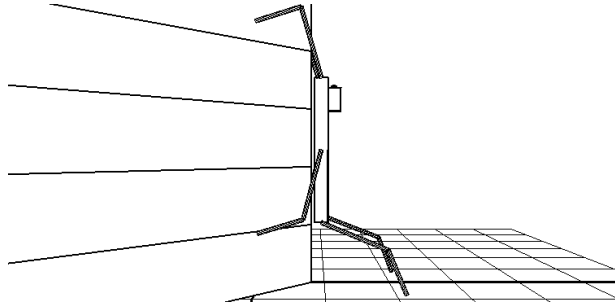


Рис. 2.4.5: Этап 2.4.4

2.4.5. Данный этап оказывается наиболее трудным с точки зрения сохранения равновесия. Для его подготовки скорость движения корпуса выбирается таким образом, чтобы к моменту начала пятого этапа корпус оказался в вертикальном положении, задние ноги стояли на горизонтальной плоскости достаточно близко к опорному углу, передние и средние стопы были установлены на гранях угла в точки, существенно удаленные друг от друга по высоте. Тем самым создается достаточно большое плечо для компенсации момента силы тяжести реакциями опоры.

Задние ноги переносятся на угол в точки опоры

$$\mathbf{r}_i(t_5) = ((-1)^i x_f, 0, \zeta_0), \quad i = 1, 2,$$

где  $\zeta_0 = \zeta_f(t_0) - 3x^*$ .

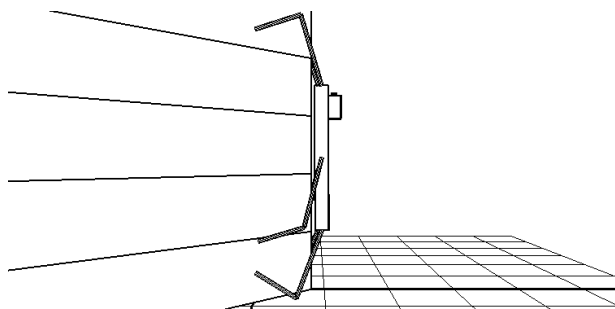


Рис. 2.4.6: Этап 2.4.5

На этапах 2.4.1-2.4.4 и 2.4.6-2.4.8 оси ординат шаговых циклов параллельны оси  $O\xi$ . На этапе 2.4.5 эти оси ординат задаются единичными направляющими векторами

$$\mathbf{e}_i = ((-1)^i, 0, 0.9).$$

На этапах 2.4.6-2.4.8 робот переводится в начальную позицию для движения по углу вверх (рис. 2.4.7).

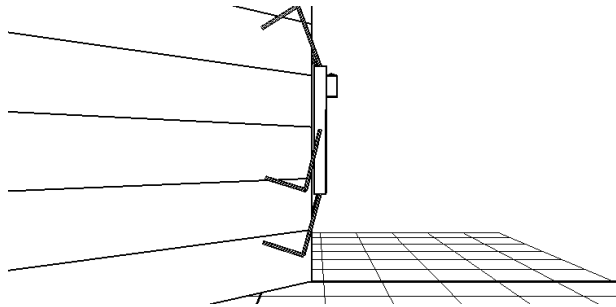


Рис. 2.4.7: Начальная позиция для движения по углу

На каждом из этапов осуществляется выравнивание положения корпуса относительно угла по формуле

$$p_{\eta i}(t) = [\eta_f - p_{\eta i}(t_{k-1})](t - t_{k-1})/t^* + p_{\eta i}(t_{k-1})$$

одновременно с движением корпуса вверх:

$$p_{\zeta i}(t) = x^*(t - t_{k-1})/t^* + p_{\zeta i}(t_{k-1}).$$

2.4.6. Осуществляется перенос средних ног в точки опоры с аппликатами  $r_{\zeta i}(t_6) = r_{\zeta 5}(t_5) - a_r/2 - 5x^*$ ,  $i = 3, 4$ .

2.4.7, 2.4.8. На этапе 2.4.7 переносятся передние ноги, на этапе 2.4.8 – задние:

$$r_{\zeta i}(t_n) = r_{\zeta i}(t_{n-1}) + 2x^*, \quad i = \begin{cases} 5, 6, & n = 7, \\ 1, 2, & n = 8. \end{cases}$$

По окончании восьмого этапа движение осуществляется вверх модифицированной походкой галоп. Расписание переносов передних и задних ног остается таким же, как и в стандартной походке галоп [1]. Средние ноги переносятся в два раза чаще так, чтобы их точки опоры оказались вблизи точек опоры очередной переносимой пары ног (рис. 2.4.8). За счет этого уменьшается коэффициент  $\alpha$  в (2.1.6) и тем самым уменьшается нагрузка на ноги, находящиеся в опоре.

### 2.4.3. Переход на горизонтальную крышу

Для всего маневра залезания на вершину коэффициент трения при контакте стоп робота с боковыми поверхностями угла предполагается равным 1.1. Будем считать, что маневр перехода на крышу

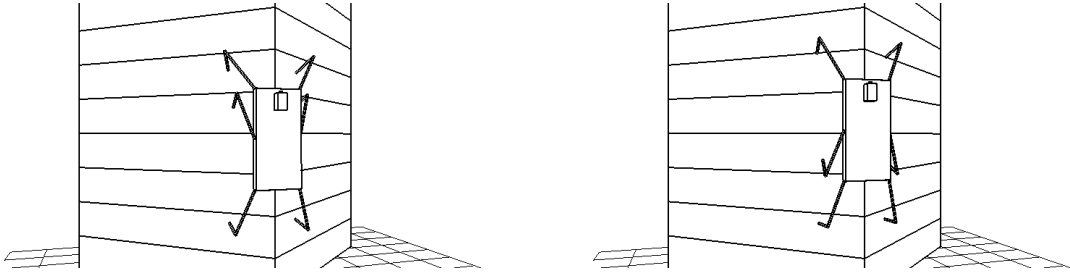


Рис. 2.4.8: Дополнительные переносы средних ног

угла начинается в момент  $t_0$ , когда аппликата планируемых точек постановки передних ног для очередного их переноса оказывается больше  $h - \varepsilon$ , где  $h$  — высота угла, а запас  $\varepsilon$  введен, чтобы стопа не попадала точно на край. До момента  $t_0$  робот приближался к вертикальному углу по горизонтальной плоскости, залезал на вертикальные стены угла, двигался вверх до его вершины. На рис. 2.4.9 показаны графики зависимости от времени вертикальных  $\zeta_i$  и горизонтальных  $\xi_i$ ,  $i = 1, 3, 5$ , координат стоп правой стороны робота и вертикальной координаты передней точки корпуса  $\zeta_f$ . Дальнейшее изложение представляет собой последовательное описание событий, представленных на рис. 2.4.9.

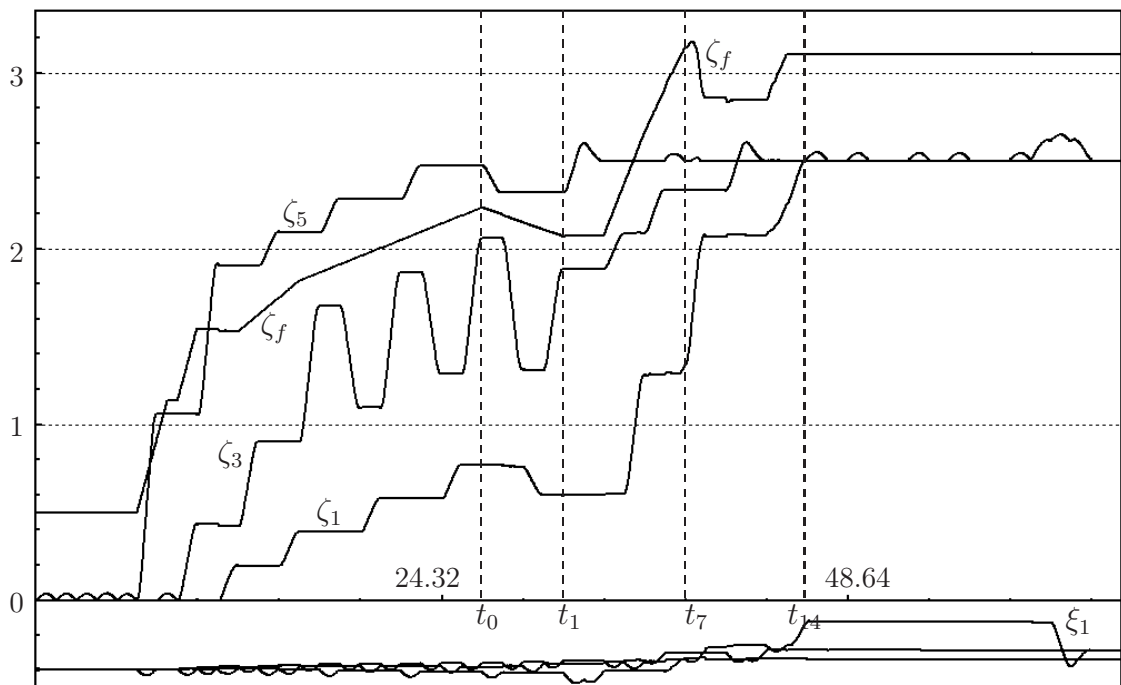


Рис. 2.4.9: Залезание на вершину угла, графики

Маневр залезания на вершину начинается с того, что робот приводится в стандартную позицию. Этим достигается его адаптация к

высоте  $h$  препятствия. В момент  $t_0$  постановки пятой ноги определяется разность  $\delta = h - \vartheta x^* - \zeta_5(t_0)$ , где  $x^*$  — половина длины шагового цикла (1.3.1), параметр  $\vartheta < 2$  фиксирует положение передней пары ног перед началом маневра залезания на крышу так, чтобы на следующем переносе передняя пара ног могла быть поставлена на крышу стандартным образом. Приведение в стандартную позицию заканчивается в момент  $t_1$ , когда точки постановки всех ног имеют координаты  $\zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_0) + \delta$ , а корпус оказывается сдвинутым вниз на  $\delta$ .

Для задания расписания переносов ног перенумеруем пары ног следующим образом:

$$(5, 6) \Leftrightarrow 0, \quad (1, 2) \Leftrightarrow 1, \quad (3, 4) \Leftrightarrow 2, \quad 0 \Leftrightarrow 3.$$

Номер 3 при этом будет означать, что перенос ног не производится. В дальнейшем событием назовем изменение либо точек опоры, либо параметров движения корпуса. События перенумеруем начиная от момента  $t_1$  последовательными числами  $j = 2, 3, \dots$ . Введем  $t_j = t_1 + (j - 1)t^*$  — время окончания события,  $t^*$  — время фазы переноса стопы в шаговом цикле (1.3.1),  $q_j$  — номер переносимой пары ног,  $\hat{\mathbf{r}}_j$  — радиус-вектор точки постановки ноги с нечетным номером в паре  $j$ . Для четных ног точки постановки берутся симметрично относительно плоскости  $O\eta\zeta$ . В табл. 2.1 перечислены события, соответствующие залезанию робота на вершину двугранного угла. Параметр  $\mu_1 > 0$  задает перемещение корпуса вверх на  $\mu_1 x^*$ ,

Таблица 2.1: Последовательность событий при залезании на вершину угла

$j$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q_j$	0	0	2	1	2	0	1	3	2
$\hat{\mathbf{r}}_j$	$\hat{\mathbf{r}}_0(t_2)$	$\hat{\mathbf{r}}_0(t_3)$	$\hat{\mathbf{r}}_2(t_4)$	$\hat{\mathbf{r}}_1(t_5)$	$\hat{\mathbf{r}}_2(t_6)$	$\hat{\mathbf{r}}_0(t_7)$	$\hat{\mathbf{r}}_1(t_8)$	—	$\hat{\mathbf{r}}_2(t_{10})$
$\mu_1$	0	0	3	3	2.5	2.5	*	0	0

$j$	11	12	13	14
$q_j$	2	1	1	1
$\hat{\mathbf{r}}_j$	$\hat{\mathbf{r}}_2(t_{11})$	$\hat{\mathbf{r}}_1(t_{12})$	$\hat{\mathbf{r}}_1(t_{13})$	$\hat{\mathbf{r}}_1(t_{14})$
$\mu_1$	0	**	0	0

$\mu_1 = 0$  означает, что корпус неподвижен. Когда в ячейке табл. 2.1 стоит \*, происходит поворот корпуса, когда стоит \*\* — выполняет-



ся подъем корпуса для того, чтобы ноги не пересекались. Соответствующие формулы будут приведены ниже. Указанные в таблице радиус-векторы стоп рассчитываются следующим образом

$$\hat{\mathbf{r}}_0(t_2) = \mathbf{r}_5(t_2) = (\xi_5(t_1) + 0.05a_r\nu_{\xi_5}, \eta_5(t_1) + 0.05a_r\nu_{\eta_5}, h + 0.1a_r),$$

где  $\boldsymbol{\nu}_i = (\nu_{\xi_i}, \nu_{\eta_i}, 0)$  – внешняя нормаль к соответствующей боковой грани. Другими словами, к моменту  $t_2$  передние стопы выносятся в пространство над крышей угла. К моменту  $t_3$  передние стопы устанавливаются на крышу

$$\hat{\mathbf{r}}_0(t_3) = \mathbf{r}_5(t_3) = (\hat{\xi}_5(t_2) - 0.01a_r\nu_{\xi_5}, \hat{\eta}_5(t_2) - 0.01a_r\nu_{\eta_5}, h).$$

Здесь  $\hat{\xi}_5(t_2)$  и  $\hat{\eta}_5(t_2)$  – компоненты проекции радиус-вектора  $\mathbf{r}_5(t_2)$  на боковую грань угла. Таким образом, стопы передних ног гарантированно обойдут кромку угла. Радиус-векторы  $\hat{\mathbf{r}}_2(t_4)$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_1(t_5)$  соответствуют переносам вверх средних ног на  $2x^*$  (рис. 2.4.10, а) и задних на  $7x^*$  (рис. 2.4.10, б).

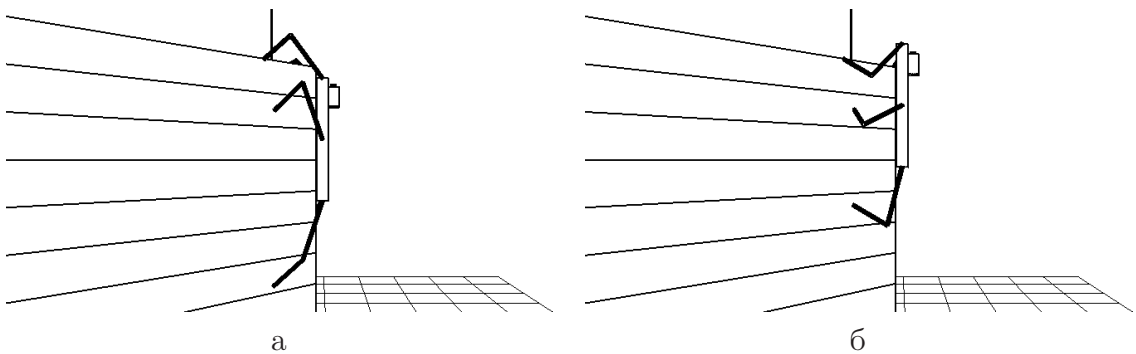


Рис. 2.4.10: Подготовка к повороту корпуса, события 4, 5

Для момента  $t_6$  точки постановки располагаются ближе к корпусу так, чтобы впоследствии возник опорный многоугольник:

$$\hat{\mathbf{r}}_2(t_6) = \mathbf{r}_3(t_6) = \mathbf{r}_3(t_5) + (0.05a_r\nu_{\xi_4}, 0.05a_r\nu_{\eta_4}, 2.5x^*).$$

При следующем переносе ног шаговые циклы расположены в вертикальных плоскостях (рис. 2.4.11, а):

$$\hat{\mathbf{r}}_0(t_7) = \mathbf{r}_5(t_7) = (\xi_5(t_6) - 0.1a_r\nu_{\xi_5}, \eta_5(t_6) - 0.1a_r\nu_{\eta_5}, h).$$

Событие 8 соответствует окончанию поворота корпуса из вертикального положения в горизонтальное (рис. 2.4.11, б). Траектория

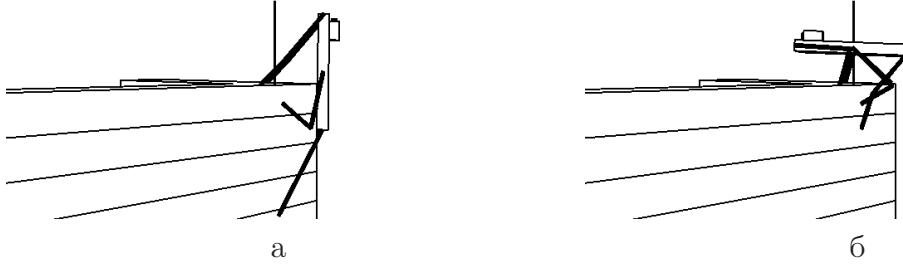


Рис. 2.4.11: Завершение поворота корпуса, события 7, 8

движения его центра  $O_r$  выбирается в виде дуги эллипса, а сам корпус ориентируется по касательной к ней. Формулы, определяющие траекторию точки  $O_r$  в абсолютной системе координат, имеют вид

$$\xi_{or} = 0, \quad \eta_{or} = p_{\eta 3}(t_7) \cos \tau, \quad \zeta_{or} = p_{\zeta 3}(t_7) + (h + \zeta_f / 1.5 - p_{\zeta 3}(t_7)) \sin \tau,$$

где  $\zeta_f$  — аппликата передней точки корпуса робота в конце поворота,  $\tau = \lambda\pi/2$ , причем для функции  $\lambda(t)$  в (1.3.3) принимается  $\lambda(t_7) = 0$ ,  $\lambda(t_8) = 1$ . Абсолютные координаты точек крепления имеют вид

$$\mathbf{p}_i(t) = (p_{\xi i}(t_7), \eta_C - p_{xi} \sin \tau, \zeta_C + p_{xi} \cos \tau),$$

где  $p_{xi} = (\lfloor [i-1]/2 \rfloor - 1)a_r/2$  — абсциссы точек крепления на корпусе. Поворот корпуса сопровождается переносом вверх задних стоп

$$\hat{\mathbf{r}}_1(t_8) = \mathbf{r}_1(t_8) = \mathbf{r}_1(t_7) + (0.05a_r\nu_{\xi 2}, 0.05a_r\nu_{\eta 2}, 8x^*).$$

События 10, 11 состоят в том, что средние ноги переносятся на верхнюю площадку аналогично тому, как это было сделано для передних ног при событиях 2, 3:

$$\hat{\mathbf{r}}_2(t_{10}) = \mathbf{r}_3(t_{10}) = (\xi_3(t_9) + 0.05a_r\nu_{\xi 3}, \eta_3(t_9) + 0.05a_r\nu_{\eta 3}, h + 0.1a_r).$$

$$\hat{\mathbf{r}}_2(t_{11}) = \mathbf{r}_3(t_{11}) = (\hat{\xi}_3(t_{10}) - 0.01a_r + \nu_{\xi 3}, \hat{\eta}_3(t_{10}) - 0.01a_r\nu_{\eta 3}, h).$$

Событие 12 означает, что корпус заканчивает подъем до уровня  $h + \zeta_f + 0.1a_r$  (рис. 2.4.12).

При этом исключается взаимное пересечение ног

$$\hat{\mathbf{r}}_1(t_{12}) = \mathbf{r}_1(t_{12}) = (p_{\xi 1}(t_{11}) - 0.01a_r, p_{\eta 1}(t_{11}), \zeta_1(t_{11})).$$

В результате задние ноги выпрямляются и располагаются вертикально. Плоскости шаговых циклов для этого переноса задаются вектором  $\mathbf{e}_i = (0, 1, 0)$ .

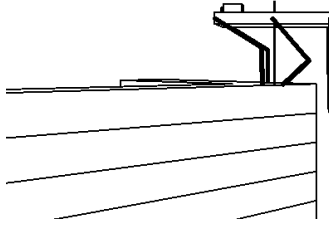


Рис. 2.4.12: Событие 12

К моменту  $t_{13}$  задние стопы в безопрной фазе передвигаются для попадания на узкую следовую колею

$$\hat{\mathbf{r}}_1(t_{13}) = \mathbf{r}_1(t_{13}) = (-b/4, p_{\eta_1}(t_{12}), h).$$

К моменту  $t_{14}$  задние стопы устанавливаются на вершину (рис. 2.4.13)

$$\hat{\mathbf{r}}_1(t_{14}) = \mathbf{r}_1(t_{14}) = (\xi_1(t_{13}), \eta_1(t_{13}) - 0.3a_r, h).$$

Ориентация колен на данном переносе — обратная по отношению к принятой (1.1.3), т.е. при движении стопы вперед колено движется назад.

После того, как все шесть стоп установлены на крыше, можно сделать несколько шагов передними и средними ногами, соответствующих походке галоп, затем вывести задние ноги обратно на широкую следовую колею. В результате можно выйти из неудобной позиции на краю угла для совершения дальнейших маневров.

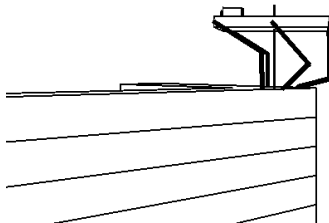


Рис. 2.4.13: Робот на крыше, событие 14

#### 2.4.4. Численное исследование

Для задачи о залезании на угол надежный контакт стоп с опорной поверхностью достигался тем, что точки планируемых контак-

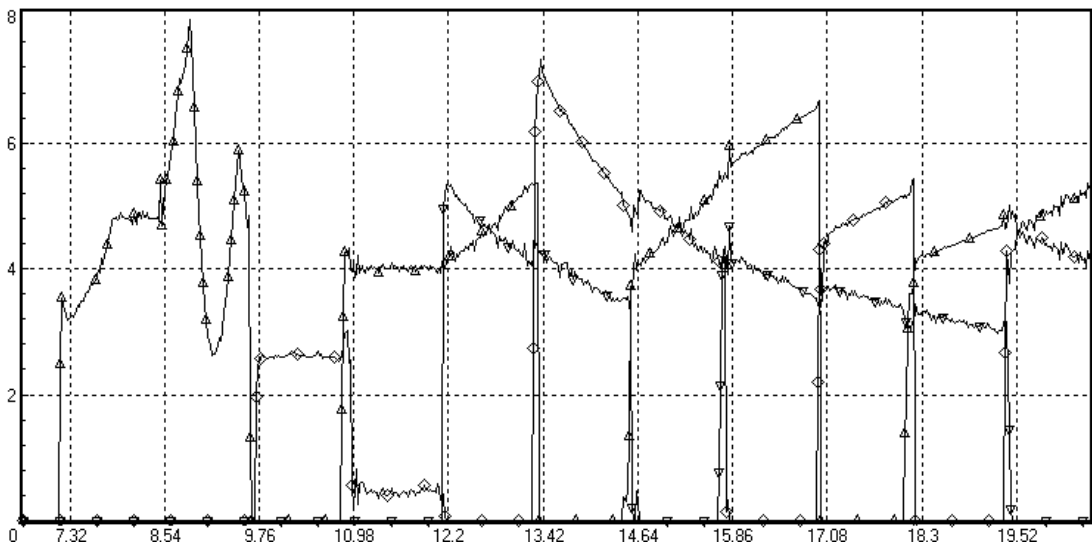
тов стоп выбирались глубже уровня поверхности в направлении единичных векторов

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{1.17}} \left( (-1)^{i+1}, 0.4 \begin{cases} -1, & i = 5, 6, \\ 1, & i < 5, \end{cases} - 0.1 \right)$$

на величину  $\epsilon = 0.0074$  м. Был взят коэффициент трения  $k_f = 1.1$ . Напомним, что заглобленная точка не соответствует реальному положению стопы при движении, с ее помощью только реализуется необходимое давление стопы на поверхность. При залезании угловая скорость прохождения шагового цикла принималась равной  $\varpi = 3 \text{ с}^{-1}$ , управляющие шарнирные моменты были ограничены по модулю величиной: 380 Нм.

На рис. 2.4.14 представлены отношения к весу робота нормальных компонент реакций:  $N_i/P$  при контакте с углом стоп нечетных ног в процессе залезания на препятствие. Символом  $\Delta$  помечен график для пятой ноги,  $\diamond$  — для третьей,  $\nabla$  — для первой. Интервал времени в пределах приблизительно от  $t = 7.32$  с до  $t = 9.76$  с соответствует маневрам, при которых корпус приводится из горизонтального положения в вертикальное, и на угол переносятся передние и средние ноги. Далее до  $t = 10.98$  с передние ноги переносятся на стороны угла вверх.  $N_3$  на этом этапе для средних ног оказывается небольшим в связи с тем, что задние ноги в это время остаются в опоре на плоскости. Затем до  $t = 12.2$  с происходит перенос задних ног на угол, значение  $N_5$  для передних ног оказывается близким к найденному в разд. 2.1 благодаря специально созданному большому плечу между точками опоры передних и средних ног. От  $t = 12.2$  с до  $t = 15.86$  с происходит переход в исходную позицию для движения вверх модифицированным галопом, от  $t = 15.86$  с до конца отображенного интервала — один цикл походки. Видно, что  $N_i$  на нем снижаются за счет логики переносов средних ног.

В разд. 2.1 были найдены рациональные значения реакций стен вертикального угла в зависимости от относительного расположения точек опоры, корпуса и препятствия при условии симметричного и равномерного распределения нагрузок для неподвижного робота. Показано существование равновесия при коэффициенте трения 1.1. При движении по углу величина необходимых нормальных компонент превышает найденное в разд. 2.1 статическое значение в связи с тем, что робот выполняет заданное движение, а не находится в покое. При численном интегрировании построенного движения не вы-

Рис. 2.4.14: Зависимости  $N_i(t)/P$ ,  $i = 1, 3, 5$ 

полняются условия симметричности и равномерности нагрузок, что приближает моделирование к реальной ситуации и требует дополнительного поджимающего усилия для компенсации погрешностей исполнения.

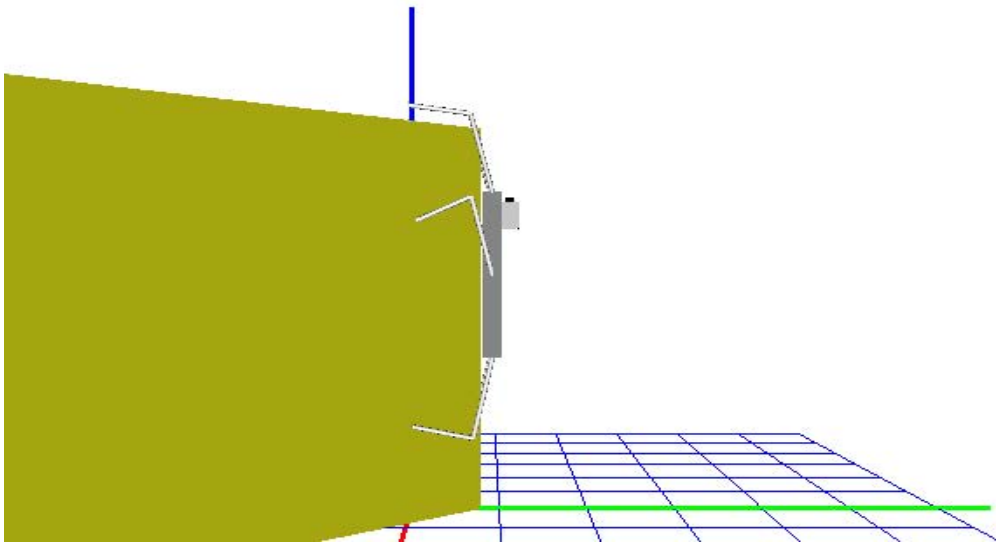


Рис. 2.4.15: Ролик доступен отдельно по адресу [http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa\\_crn\\_top.mp4](http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa_crn_top.mp4)

Для маневра залезания на вершину вертикального угла эксперименты показали, что робот успешно выполняет задачу, несмотря на то, что в окрестности вершины двугранного угла возможности для постановки ног стеснены малым размером допустимой зоны. На рис. 2.4.15 представлен видеоматериал, показывающий процесс

залезания на вертикальный угол. Движение в целом оказывается достаточно уверенным и комфортабельным. Проскальзывание ног относительно опоры отсутствует.

## 2.5. Подъем на уступ по приставной лестнице

### 2.5.1. Описание ситуации

Робот, находясь в начальный момент времени внизу на горизонтальной опорной плоскости, должен переместиться на верхнюю горизонтальную площадку уступа высоты  $h_1$  с использованием приставной лестницы длины  $l$  (рис. 2.5.1, а). Для определенности примем, что  $l \approx h_1$ . Шаг между верхними краями ступенек равен  $0.4a_r$ .

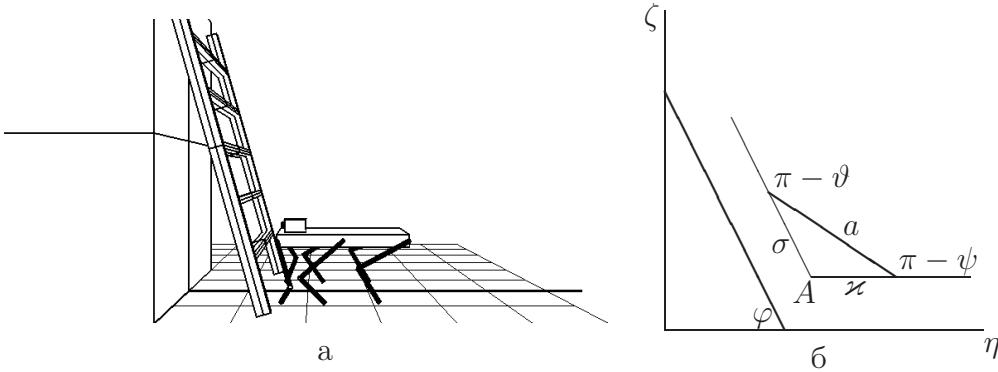


Рис. 2.5.1: Начальная позиция для залезания на лестницу. Схема движения корпуса

Каждая ступенька представляет собой прямоугольный брус, одна из граней которого параллельна плоскости лестницы. Боковые направляющие лестницы также имеют форму брусьев, которые касаются опорных поверхностей соответствующими ребрами. Ступеньки нумеруются начиная с 1 по мере увеличения их высоты от горизонтальной плоскости. Угол  $\varphi$  наклона лестницы к горизонтальной плоскости задается близким к  $75^\circ$ , что в соответствии с разделом 2.2 гарантирует с запасом статическую устойчивость лестницы для коэффициента трения, равного 1, и достаточную высоту верхней ступеньки для возможности залезания на заданный уступ. Шаг лестницы по горизонтали в прислоненном к уступу положении обозначим  $l_s$ .

Абсолютную правую систему координат  $O\xi\eta\zeta$  свяжем с уступом. Начало  $O$  поместим в его основание. Ось  $O\zeta$  направлена вертикально вверх и лежит в плоскости боковой стенки уступа, к которой

прислонена лестница, ось  $O\eta$  ориентирована по внешней нормали к указанной стенке. Плоскость  $O\eta\zeta$  является плоскостью симметрии для системы уступ–лестница (рис. 2.5.1, а). Плоскость лестницы параллельна оси  $O\xi$ .

## 2.5.2. Построение движения

Залезание на лестницу начинается в момент  $t_0$ , когда по окончании очередного переноса передних ног следующий их шаг приведет к тому, что передние стопы окажутся в достаточной близости от лестницы:  $\eta_i(t_0) - s_\eta < 4x^*$ , где  $i = 5, 6$ ,  $s_\eta$  –  $\eta$ -я координата опорной линии лестницы. Залезание на лестницу проводится в три маневра.

2.5.1. Переход из позиции, возникшей в результате подхода по плоскости, в фиксированную относительно лестницы начальную позицию для залезания. Поворот корпуса из горизонтальной позиции в наклонную.

2.5.2. Регулярное движение вдоль лестницы вверх.

2.5.3. Обратный поворот корпуса в горизонтальную позицию и переход в стандартную позицию для походки “трешки”.

С учетом того, что ступени расположены регулярно и плоскость движения переносимых стоп может быть вертикальной, траектории переносов ног в соответствии с (1.3.3) синтезировались следующим образом:

$$\mathbf{r}_i(t) = (1 - \lambda)\mathbf{r}_i(t_n) + \lambda\mathbf{r}_i(t_{n+1}) + k_n(y'_i + y_s) \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|},$$

$$\mathbf{n}_i = \boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{e}_l \times \boldsymbol{\rho}_i), \quad \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i(t_{n+1}) - \mathbf{r}_i(t_n),$$

где  $\mathbf{r}_i(t_n)$  и  $\mathbf{r}_i(t_{n+1})$  – исходное к моменту  $t_n$  и планируемое на момент  $t_{n+1}$  положения стоп,  $0 \leq \lambda(t) \leq 1$  – функция, как и в (1.3.3), с квадратичным сглаживанием вблизи границ полуинтервала  $[t_n, t_{n+1})$ , величина  $(y'_i + y_s)k_n$  задает базовый шаговый цикл (1.3.1) с коэффициентом растяжения  $k_n$ ,  $\mathbf{e}_l = (0, -\cos \varphi, \sin \varphi)$  – вектор, определяющий плоскость шагового цикла. Таким образом, при движении по лестнице применяется наиболее удобный вариант (рис. 2.5.1, б)

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_n = (0, \cos \varphi, \sin \varphi), \quad k_n = 5 \dots 9,$$

при котором стопы лучше огибают углы ступенек при переносах. При движении по плоскости сохраняется прежнее определение шагового цикла.

Регулярная последовательность смены номеров переносимых пар для походки “галоп” в зависимости от номера шага  $j$  выражается формулой  $(j - 3) \bmod 3$ , где  $j = 3, 4$ . Нерегулярные переносы определяются списком, в котором явно указан номер переносимой пары ног. Для пары ног, предназначенной для очередного переноса,  $\eta$ -координаты их следующих точек постановки определяются вычитанием из их текущих ординат величины  $l_s$ . Вертикальная координата точек постановки рассчитывается в соответствии с этим сдвигом на опорной поверхности ступеньки. Если горизонтальная проекция опорной точки принадлежит нескольким ступенькам, то из них выбирается ступенька с наибольшей высотой.

Следовательно, если стопа один раз попала на одну из ступенек, то при последовательных переносах она автоматически будет попадать на следующие по порядку. Для нерегулярных переносов формируется список, устанавливающий соответствие номеров пары ног и ступеньки.

### 2.5.3. Залезание на лестницу

В начальный момент времени  $t_0$  задаются вершина  $A$  угла между направляющими для организации поворота корпуса (рис. 2.5.1, б):  $\mathbf{r}_A = (0, s_\eta + l_s, p_{\zeta 5}(t_0))$ , и направляющий единичный вектор  $\mathbf{e}_l$ , параллельный лестнице. За два шага к моменту  $t_2 = 2t^*$  стопы ног робота переходят в следующие положения:

$$\mathbf{r}_i(t_2) = (\xi_i(t_2), \eta_i(t_2), \zeta_i(t_2)), \quad i = 1, \dots, 6, \quad \text{где}$$

$$\xi_i(t_2) = (-1)^i d,$$

$$\eta_i(t_2) = s_\eta + l_s + \frac{a_r}{2} - \begin{bmatrix} -a_r/2, & i = 1, 2, \\ 0, & i = 3, 4, \\ a_r/2, & i = 5, 6 \end{bmatrix} + x^* \begin{bmatrix} -2.1, & i = 1, 2, \\ -1, & i = 3, 4, \\ 1, & i = 5, 6 \end{bmatrix},$$

$$\zeta_i(t_2) = 0.$$

В соответствии с приведенной формулой в начале маневра задние ноги совершают наибольший шаг с тем, чтобы при повороте корпуса они не могли полностью распрямиться.

Движение корпуса во время перехода робота с горизонтальной плоскости на лестницу строится следующим образом. Поворот корпуса организуется аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.4.2. Отрезок, равный длине корпуса, вписывается в угол между двумя направляющими  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ , пересекающимися в точке  $A$



(рис. 2.5.1, б). Направляющая  $\mathcal{L}$  параллельна вектору  $\mathbf{e}_l$  и предназначена для движения вдоль нее передней кромки корпуса. Направляющая  $\mathcal{M}$  параллельна оси  $O\eta$  и служит для движения задней кромки корпуса. Угол между  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$  равен  $\pi - \varphi$ . Расстояние  $\sigma$  между передней кромкой корпуса и точкой  $A$  задается функцией времени

$$\sigma = a_r(\mu_1 t - \mu_2 t^*) / (6t^*), \quad (2.5.1)$$

где  $\mu_1 = 1$ , когда корпус перемещается, и  $\mu_1 = 0$ , когда он в покое. Параметр  $\mu_2 = 2$  для первого этапа движения, а затем  $\mu_2$  корректируется в зависимости от количества сделанных остановок корпуса для того, чтобы обеспечить непрерывность движения. Отметим, что поворот корпуса начинается в момент времени  $t_2$ , и  $\sigma(t_2) = 0$ . С учетом сказанного приведенная зависимость  $\sigma(t)$  полностью определяет движение корпуса при переходе на лестницу.

Переход на лестницу представим как последовательность событий. События перенумеруем начиная от момента  $t_0$  последовательными числами натурального ряда. Для события с номером  $j$  обозначим  $q_j$  — номер переносимой пары,  $s_j$  — номер ступеньки, на которую она переносится (при  $s_j = 0$  пара ног ставится на горизонтальную плоскость),  $\mu_1(j)$ ,  $\mu_2(j)$  — значения параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  для события  $j$ .

Последовательность событий для маневра поворота корпуса начиная с  $t_2$  задается табл. 2.2. На рис. 2.5.2 этим событиям соответ-

Таблица 2.2: Первый поворот корпуса

$j$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q_j$	0	3	2	0	1	2	0	2	1	2
$s_j$	1	—	0	3	0	2	4	1	0	3
$\mu_1$	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
$\mu_2$	2	2	2	2	−4	−4	4	4	−6	−6

ствует интервал времени  $[t_2, t_{12})$ . Прочерк для  $s_j$  означает, что стопы не переносятся (т.е.  $q_j = 3$ ). Поясним, например, второй столбец табл. 2.2 ( $j = 3$ ). Он говорит о том, что передние ноги переносятся на первую ступеньку, начинается движение корпуса (рис. 2.5.3, а). Остальные столбцы интерпретируются аналогично.

Начиная с события 13 корпус движется вдоль  $\mathbf{e}_l$ , не меняя угла

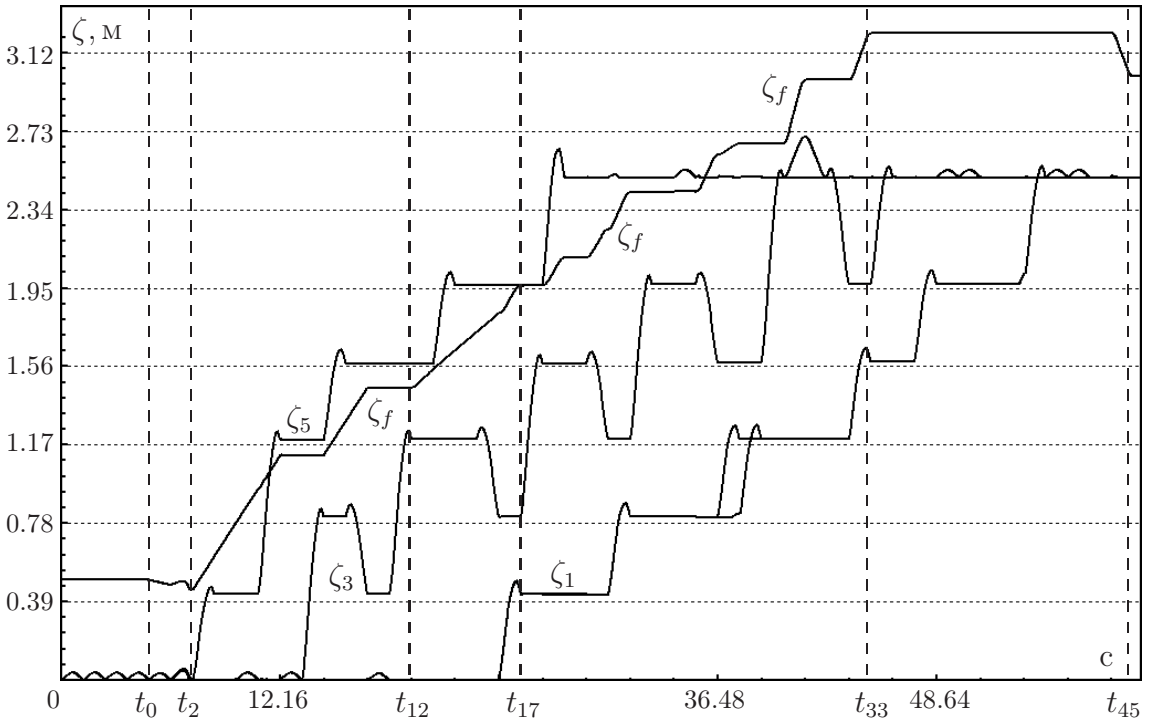


Рис. 2.5.2: Залезание на лестницу (графики)

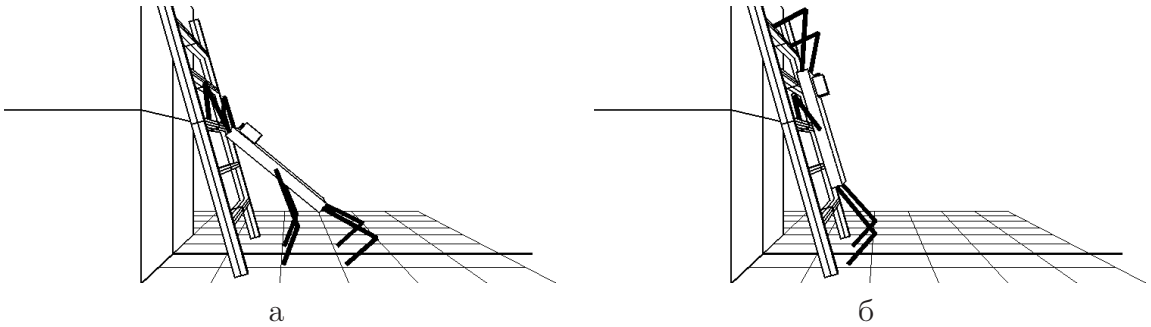


Рис. 2.5.3: События 6, 14

наклона (рис. 2.5.3, б). Движение точек крепления задается в виде

$$\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{r}_A + [x^*(\mu_3(j) + \mu_4(j)\lambda) + \lfloor (i-1)/2 \rfloor a_r/2] \mathbf{e}_l.$$

Последовательность соответствующих событий отражена в табл. 2.3. На момент окончания события 17 все ноги робота установлены на

Таблица 2.3: Переход на лестницу

$j$	13	14	15	16	17
$q_j$	3	0	3	2	1
$s_j$	—	5	—	2	1
$\mu_3$	0	1	2	3	4
$\mu_4$	1	1	1	1	1.5

лестнице, центр масс проектируется внутрь опорного многоугольника.

### 2.5.4. Движение по лестнице

В табл. 2.4 представлена последовательность событий для движения вдоль лестницы. Основная идея движения по лестнице повто-

Таблица 2.4: Движение вдоль лестницы

$j$	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$q_j$	2	0	3	2	1	2	3	0	2	1*	1*
$s_j$	4	$h_1$	—	3	2	5	—	$h_1$	4	3	3
$\mu_3$	5.5	5.5	7	7	8.5	10.5	10.5	10.5	10.5	12.5	13.1
$\mu_4$	0	1.5	0	1.5	2	0	0	0	2	0.6	0

\* Для этих событий переносится одна нога из пары.

$j$	29	30	31	32	33
$q_j$	2	0	0	2	1
$s_j$	$h_1$	$\tilde{h}$	$h_1$	5	4
$\mu_3$	13.1	13.1	16.5	16.5	16.5
$\mu_4$	0	3.4	0	0	2.5

ряет модификацию походки “галоп” раздела 2.4.2 при залезании на угол: средние ноги переносятся в 2 раза чаще так, что они оказываются близко к паре ног, которая будет переноситься следующей. Корпус может перемещаться вперед либо во время переноса передних и средних ног, либо когда все 6 ног находятся в опоре. Когда задние ноги распрямляются почти полностью, корпус останавливается, и они переносятся по одной, чтобы сократить нагрузку на остальные 5 ног.

Для событий, у которых  $s_j = h_1$ , ступенька совпадает с верхней площадкой уступа. Точки постановки стоп для событий 19, 29 задаются по формулам

$$\mathbf{r}_i(t_{19}) = (\xi_i(t_{j-1}), -0.02a_r - 3x^*, h_1), \quad i = 5, 6,$$

$$\mathbf{r}_i(t_{29}) = (\xi_i(t_{j-1}), -0.02a_r, h_1), \quad i = 3, 4. \quad (2.5.2)$$

Для  $j = 25$  стопы передних ног переносятся вперед вдоль горизонтальной площадки уступа на  $3x^*$  (рис. 2.5.4, а). Для  $j = 30$  стопы передних ног вертикально поднимаются над верхней площадкой уступа и одновременно корпус продвигается параллельно лестнице вверх так, чтобы его центр оказался несколько выше уровня уступа:  $\mathbf{r}_i(t_j) = (\xi_i(t_{j-1}), \eta_i(t_{j-1}), h_1 + 0.2a_r)$ ,  $i = 5, 6$ . Поднятие стоп передних ног над поверхностью уступа делается для того, чтобы при

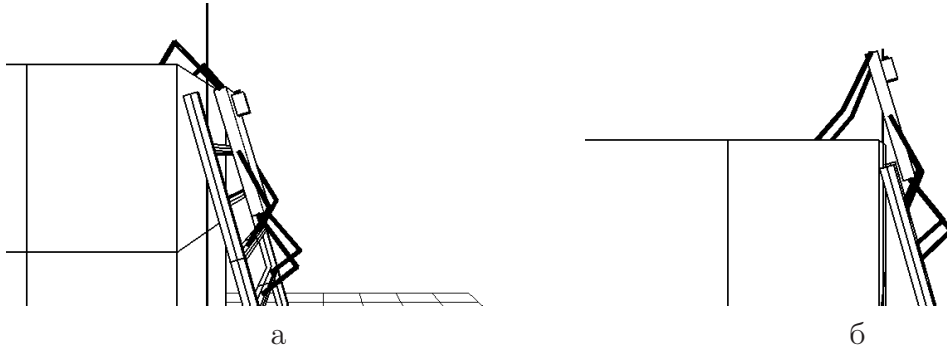


Рис. 2.5.4: События 22, 33

выходе центра корпуса на уровень уступа колени передних ног не попали внутрь поверхности уступа. Для  $j = 31$  стопы передних ног возвращаются на уступ.

### 2.5.5. Поворот в горизонтальное положение

Для поворота корпуса в горизонтальное положение используются перевернутые направляющие для движения передней и задней кромок корпуса. Направляющая, параллельная лестнице, отвечает за движение задней кромки, а горизонтальная — за движение передней. Таким образом, треугольник на рис. 2.5.1 переворачивается: сторона для движения передней кромки корпуса, вдоль которой отсчитывается параметр  $\sigma$ , теперь направлена в отрицательном направлении  $O\eta$ , а сторона, по которой движется задняя кромка корпуса, направлена вдоль  $\mathbf{e}_l$ . Задаются новые значения  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{e}_l$ :  $\mathbf{r}_A = (0, p_{\eta 5}(t_j), p_{\zeta 5}(t_j))$  ( $j = 33$ , рис. 2.5.4, б). Направленный вниз вдоль корпуса робота единичный вектор имеет вид  $\mathbf{e}_l = \hat{\mathbf{e}}_l / |\hat{\mathbf{e}}_l|$ , где  $\hat{\mathbf{e}}_l = (0, p_{\eta 1}(t_j) - p_{\eta 5}(t_j), p_{\zeta 1}(t_j) - p_{\zeta 5}(t_j))$ . Расстояние  $\sigma$  вдоль горизонтальной направляющей между передней кромкой корпуса и точкой  $A$  по-прежнему вычисляется по формуле (2.5.1) с соответствующей модификацией параметров. Окончанию первого события поворота соответствует  $j = 34$ .

Перечень событий при повороте корпуса с указанием значений соответствующих параметров, сопровождающих этот поворот, представлен в табл. 2.5.

Условие  $s_j = h^+$  означает, что пара ног переносится на уступе вперед на  $2x^*$ . Для  $j = 34$  стопы средних ног переносятся на следовую колею шириной  $d + x^*$ :  $\mathbf{r}_i(t_j) = ((-1)^i(d + x^*), -0.02a_r, h_1)$ ,  $i = 3, 4$ .

Таблица 2.5: Поворот в горизонтальное положение

$j$	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$q_j$	2	3	1	2	0	3	3	1	2	0	3	3
$s_j$	$h_1$	—	5	$h^+$	$h^+$	—	—	$h_1$	$h^+$	$h^+$	—	—
$\mu_1$	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	—
$\mu_2$	33	33	33	—3	—3	35	35	—5	—5	—5	38	—

Расширение следовой колеи необходимо для того, чтобы средние ноги можно было поставить близко к передним без опасности их взаимного пересечения (рис. 2.5.5, а). Для  $j = 41$  используется формула (2.5.2), где  $i = 1, 2$ . Поворот завершается событием  $j = 45$  (рис. 2.5.5, б), когда корпус опускается по вертикали до стандартной высоты над опорой:  $p_{\zeta i}(t) = (h_1 + p_{\zeta 5}(t_0) - p_{\zeta i}(t_{j-1}))\lambda + p_{\zeta i}(t_{j-1})$ .

Маневр поворота корпуса в горизонтальное положение осуществляется в интервале времени  $[t_{33}, t_{45}]$  на рис. 2.5.2.

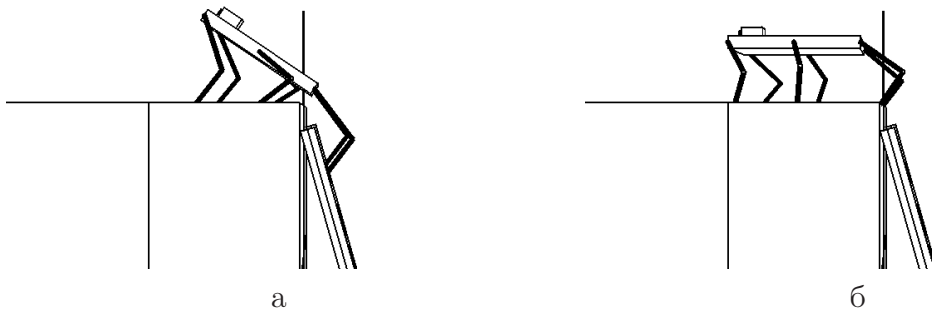


Рис. 2.5.5: События 39, 45

### 2.5.6. Компьютерный эксперимент

Для возможности залезания на уступ лестница задавалась как твердое тело с шестью степенями свободы. Опорная поверхность (горизонтальная плоскость и уступ) представляла собой освобождающую геометрическую связь. Лестница в начальный момент наклонена под углом  $75^\circ$  к горизонтальной плоскости и падает на опору из состояния покоя под действием силы тяжести так, чтобы прийти в соприкосновение с вертикальной стенкой уступа и горизонтальной плоскостью. Тем самым вносится некоторая априорная неопределенность в начальное положение лестницы относительно препятствий.

Движение лестницы успокаивается естественным образом к моменту начала залезания. Численные эксперименты показали, что в процессе движения робота лестница остается в покое, и робот в состоянии выполнить описанную выше задачу с коэффициентом трения, не превосходящим 1.

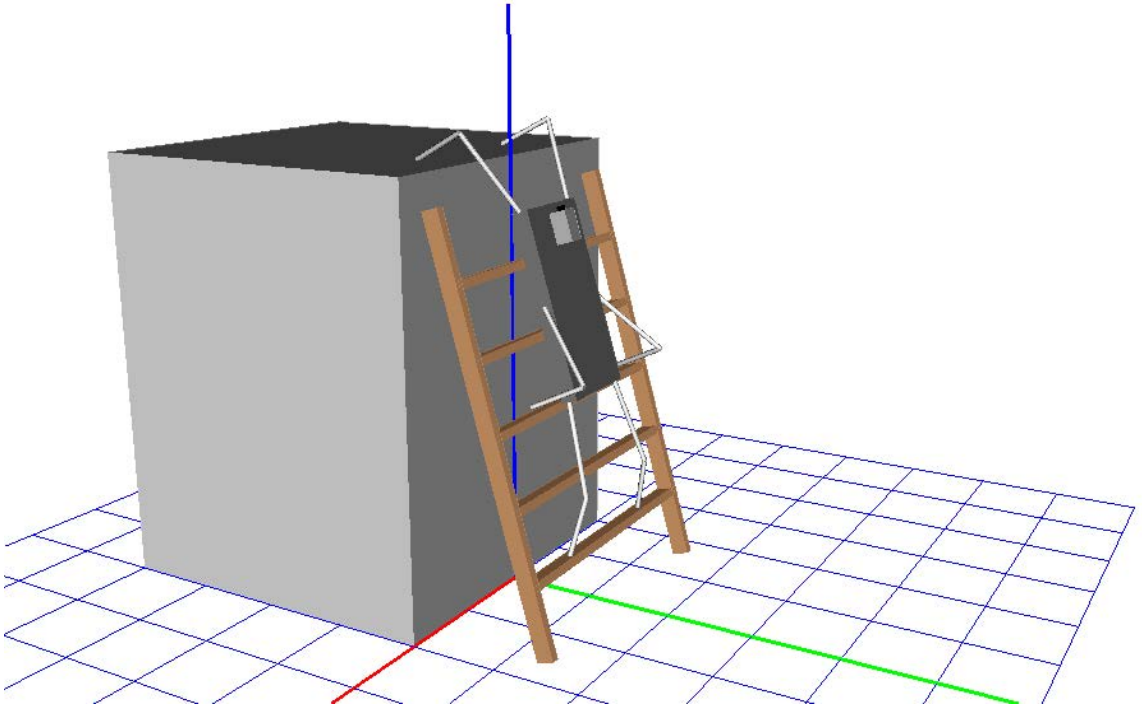


Рис. 2.5.6: Ролик доступен отдельно по адресу [http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa\\_stairs2.mp4](http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa_stairs2.mp4)

Результаты компьютерного моделирования частично представлены на рис. 2.5.2, на котором можно проследить полную историю процесса перелезания с численными значениями координат корпуса и точек опоры робота. Наглядное представление в целом о процессе перехода на лестницу, движения по лестнице и перехода на уступ можно получить, просмотрев видеоролик на рис. 2.5.6.

## 2.6. Переход между уступами по брусу

### 2.6.1. Решаемая задача

Рассматривается препятствие в виде двух параллельных уступов одной высоты с горизонтальными верхними площадками. Указанные площадки соединены в одном уровне узким бруском перпендикулярно вертикальным стенкам уступов. Предполагается, что в на-

чальный момент времени робот стоит в симметричной позе на одном из уступов перед его краем так, что плоскости ног перпендикулярны продольной оси корпуса (рис. 2.6.1). Центр  $O$  правой абсолютной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  поместим на проекцию срединной линии бруса на опорную горизонтальную плоскость. Ось  $O\eta$  направим параллельно срединной линии. Ось  $O\zeta$  — вертикально вверх. Высота корпуса над поверхностью уступа выбирается так, чтобы исключить опасность взаимного пересечения ног при движении, и в рассматриваемом случае равна  $\zeta_f - 0.05a_r$ . Робот должен перейти с уступа на уступ по брус. Предположение о том, что брус узкий, означа-

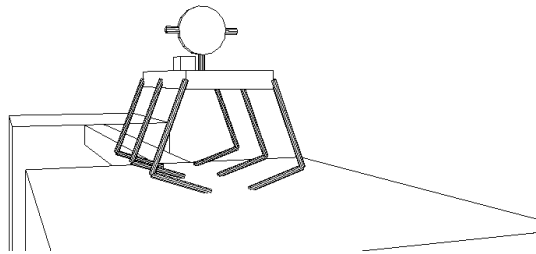


Рис. 2.6.1: Начальная позиция перед брусом

ет, что поперечный размер опорного многоугольника при движении по бруску приближается к допустимому запасу статической устойчивости, необходимому для поддержания равновесия робота за счет только реакций опоры. Поэтому для обеспечения равновесия робота на бруску будут привлечены дополнительные средства управления конфигурацией робота. Передние и задние ноги будут по-прежнему применяться для обеспечения опоры робота о поверхность, средние ноги будут выполнять роль маховика для обеспечения равновесия робота при нарушении условия статической устойчивости.

## 2.6.2. Построение движения

Сначала рассмотрим программное движение передней и задней пар ног. В связи с тем, что ширина бруса предполагается существенно меньше ширины корпуса, следовые колеи вынужденно окажутся под корпусом аппарата при его перемещении. При этом расчет необходимых шарнирных углов будет отличаться от стандартно принятого в (1.1.3) случая, когда следовая колея шире корпуса. В фор-

мулах (1.1.3) расчет угла  $\alpha$  выполнялся так, чтобы движение стопы вперед сопровождалось движением вперед колена ноги. Для узкой следовой колеи из-за опасности взаимного пересечения симметричных ног целесообразно направление движения колен принять обратным направлением движения стопы. Меняются также формулы для расчета других шарнирных углов:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \pi, & x < -1, \end{cases} \quad f_2(y, x) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ -\pi, & x < 0, y < 0, \end{cases} \\ \pi/2, & x = 0, y > 0, \\ 0, & x = 0, y = 0, \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0, \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} -f_2((-1)^{i+1}r_{xi}, (-1)^{i+1}r_{yi}), & (-1)^i r_{yi} < 0, \\ f_2((-1)^{i+1}r_{xi}, (-1)^i r_{yi}), & (-1)^i r_{yi} \geq 0, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 2\pi - \beta'_i, & (-1)^i r_{yi} < 0, \\ \beta'_i, & (-1)^i r_{yi} \geq 0, \end{cases}$$

$$\gamma_i = (1 - (-1)^i)\pi/2 + (-1)^i f_1((l_1^2 + l_2^2 - r_i^2)/(2l_1 l_2)),$$

$$\beta'_i = f_1((-1)^{i+1}r_{zi}/r_i) + (-1)^i f_1((l_1^2 + r_i^2 - l_2^2)/(2l_1 r_i)).$$

Движение осуществляется в соответствии со следующими этапами.

2.6.1. Перестроение конфигурации робота для движения по узкой следовой колее. Такая колея определяется шириной бруса. Ноги последовательно тройками переносятся на узкую следовую колею с использованием шаговых циклов, плоскость которых перпендикулярна продольной оси корпуса. При этом исключается возможность вырождения при изменении расчетных формул для шарнирных углов. После этого средние ноги распрямляются и приводятся в горизонтальное положение, обеспечивая возможность дальнейшего балансирования ими. Распрямление ног строится стандартно с помощью шаговых циклов в вертикальных плоскостях, параллельных оси  $O\xi$ , для которых конечные точки в осях  $O\xi\eta\zeta$  рассчитываются по формулам

$$\mathbf{r}_i(t_n) = \mathbf{p}_i(t_{n-1}) + ((-1)^i(\epsilon_l + l_1 + l_2), 0, 0).$$

Небольшое слагаемое  $\epsilon_l > 0$  введено для надежного распрямления ног. После этого вплоть до окончания движения по брусу полагается  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .



2.6.2. Переход робота по брусу четырехногой диагональной походкой на другой уступ. При движении по брусу корпус перемещается вперед только на интервалах совместного стояния всех передних и задних ног. Ноги переносятся диагональной походкой парами (1, 6) и (2, 5). В начальный момент времени движения по брусу проекция центра масс на поверхность бруса находится в точке пересечения отрезков, соединяющих пары стоп (1, 6) и (2, 5). Когда пара (1, 6) переносится вперед, в опоре остаются только две ноги и статическая устойчивость отсутствует. После переноса этой пары ног корпус передвигается так, чтобы его центр достиг точки пересечения отрезка, соединяющего точки постановки пары (1, 6) и продольной оси бруса. Далее переносится вперед пара (2, 5) в точки опоры, симметричные точкам постановки пары (1, 6). Затем весь процесс повторяется, начиная с пары (2, 5).

Формулы для расчета координат точек постановки для пары (1, 6) имеют вид

$$\mathbf{r}_i(t_n) = ((-1)^i \xi_b, p_{\eta i}(t_{n-1}) - 4x^*, h_1), \quad i = 1, 6,$$

где  $\xi_b$  — ширина узкой следовой колеи,  $h_1$  — высота уступа.

После переноса пары (1, 6) центр корпуса перемещается в точку

$$\mathbf{r}_c(t_{n+2}) = \left( 0, r_{\eta 6}(t_n) - \frac{r_{\xi 6}(t_n)(r_{\eta 1}(t_n) - r_{\eta 6}(t_n))}{r_{\xi 1}(t_n) - r_{\xi 6}(t_n)}, r_{\zeta 0}(t_n) \right),$$

здесь  $t_n, t_{n+2}$  соответствуют моментам начала и окончания перемещения корпуса. Далее то же самое повторяется для пары (2, 5).

*Стабилизация движения.* При опоре на диагональную пару ног корпус представляет собой физический маятник, закрепленный на оси, проходящей через точки опоры и находящийся в верхнем неустойчивом положении равновесия. Для стабилизации этого положения можно применить теорему об изменении кинетического момента [22, 32], а в качестве маховика использовать средние ноги, выполняющие согласованное вращение в плоскости, перпендикулярной оси корпуса (рис. 2.6.2). В качестве параметра, выражающего отклонение корпуса от вертикали, можно принять проекцию  $\xi_c$  центра масс робота на ось  $O\xi$ . Тогда синтез управляющего момента  $M_3^\beta$  по углу  $\beta_3$  можно осуществить по формуле.

$$M_3^\beta = -(c_1 \xi_c + c_2 \dot{\xi}_c)/2 - M_g, \quad M_g = (m_1 + m_2)gl_c \sin \beta_3,$$

где  $M_g$  — момент силы тяжести третьей ноги относительно ее точки крепления к корпусу,  $l_c$  — расстояние от точки крепления до центра

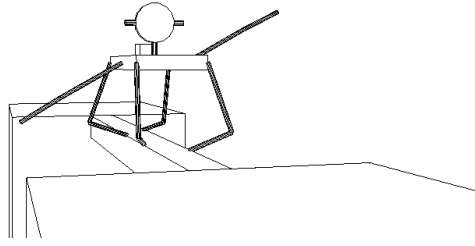


Рис. 2.6.2: Сохранение баланса на брус

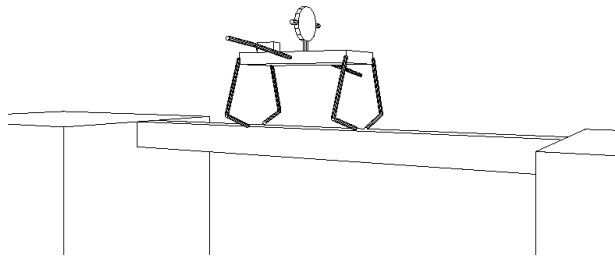


Рис. 2.6.3: Горизонтирование средних ног

масс выпрямленной ноги,  $c_1, c_2$  — коэффициенты усиления обратной связи.

Движение четвертой ноги относительно корпуса кососимметрично движению третьей. Соответствующий управляющий момент задается по формуле

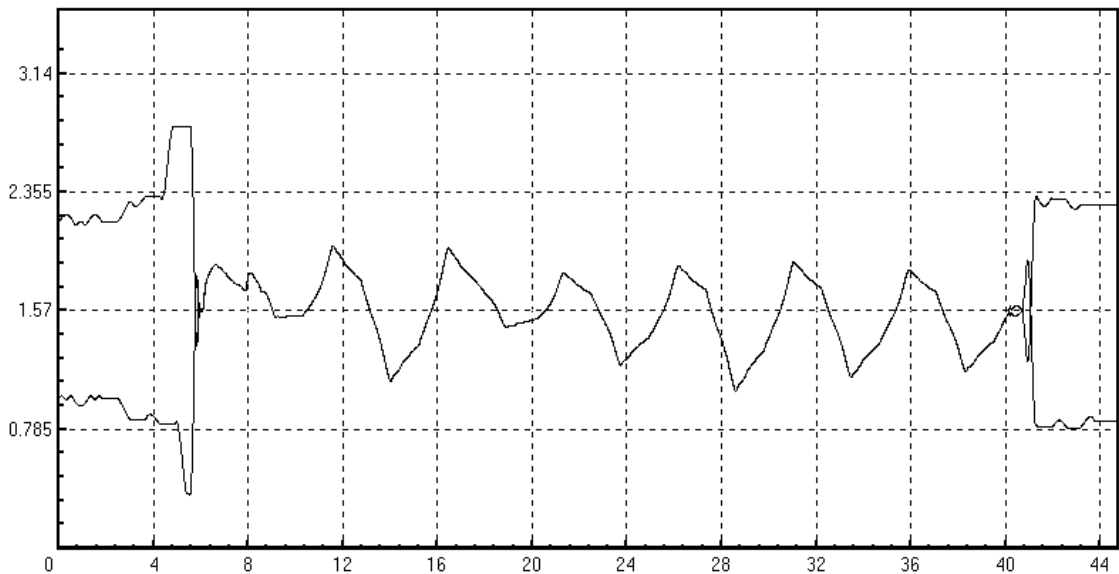
$$M_4^\beta = c_3(\beta_4 - \beta_3) - c_4\dot{\beta}_4$$

с коэффициентами усиления  $c_3, c_4$ . Программные значения углов  $\gamma_3 = 0, \gamma_4 = \pi$  соответствуют распрямленным ногам.

Накопленная при потере статической устойчивости угловая скорость средних ног ликвидируется во время совместного стояния передних и задних ног (рис. 2.6.3). При этом управление средними ногами осуществляется так, чтобы вернуть их в горизонтальное положение с нулевыми угловыми скоростями. Соответствующая формула для третьей ноги имеет вид

$$M_3^\beta = c_5(\beta_3 - \pi/2) - c_6\dot{\beta}_3 - M_g$$

с коэффициентами усиления  $c_5, c_6$ . Четвертая нога по-прежнему кососимметрично отслеживает движение третьей.

Рис. 2.6.4: Зависимости  $\beta_3(t)$  и  $\beta_4(t)$ 

2.6.3. После того как робот полностью перешел на другой уступ, выполняется обратное перестроение конфигурации робота для дальнейшего движения по широкой следовой колее.

### 2.6.3. Численное моделирование

При движении по горизонтальному брусу были приняты следующие значения параметров:  $\epsilon = 0.005$  м,  $k_f = 1$ , циклическая частота шагового цикла  $\varpi = 6$  с<sup>-1</sup>. Кроме того,  $x_f = 0.3926$  м,  $\eta_f(t_0) = 0.47$  м,  $\zeta_f(t_0) = 0.5$  м. Ширина бруса 0.25 м, ширина узкой следовой колее  $\xi_b = 0.225$  м. Коэффициенты усиления обратной связи:  $c_1 = 5000$  кг/с<sup>2</sup>,  $c_2 = 400$  кг/с,  $c_3 = -5 \cdot 10^4$  Нм,  $c_4 = -547.215$  Нм·с,  $c_5 = -6.25$  Нм,  $c_6 = -10.067$  Нм·с. Управляющие шарнирные моменты были ограничены по модулю величиной: 155 Нм.

На рис. 2.6.4 показано изменение углов  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  в процессе движения по брусу, включая подход робота к краю первого уступа и движение от края второго уступа. При подходе к краю уступа углы  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  различаются из-за того, что для нечетных номеров ног углы отсчитываются от положительного направления строительной вертикали, а для четных номеров — от отрицательного. При балансировании с целью сохранения равновесия средние ноги движутся кососимметрично, что соответствует совпадению углов  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  на этом участке движения.

Построенное управление маховыми движениями средних ног поз-

воляет стабилизировать положение робота на этапах потери статической устойчивости без нарушения кинематических и конструктивных ограничений. Подробности процесса перехода по брусу с одного уступа на другой можно посмотреть на видеоролике рис. 2.6.5.

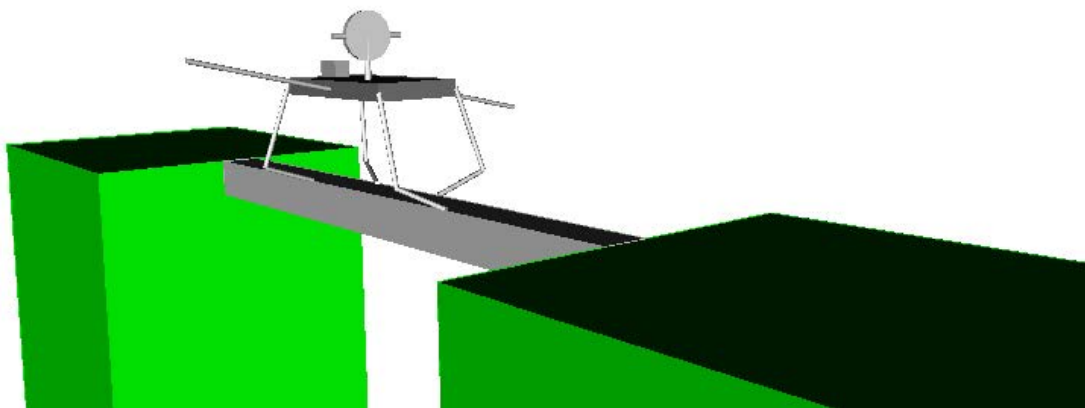


Рис. 2.6.5: Ролик доступен отдельно по адресу [http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa\\_balk.mp4](http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa_balk.mp4)

## Глава 3.

# Инсектоморфный робот на шаре

### 3.1. Динамика системы робот—шар

В некоторых экстремальных ситуациях способность шагающей машины к преодолению препятствий может существенно зависеть от того, насколько эффективно робот обеспечивает динамическую устойчивость, когда статическая устойчивость отсутствует. Так может получиться, если робот опирается на незакрепленные на грунте предметы. Интересно также иметь возможность использовать динамические свойства подобного рода опорных объектов для их транспортировки в нужное место вместе с роботом. Шагающая машина, попав на такой объект, повышает центр масс системы робот—опора в целом и превращает ее в менее устойчивую.

#### 3.1.1. Стабилизация равновесия на шаре

Предположим, что робот стоит на незакрепленном массивном шаре, расположенном на горизонтальной плоскости, и в этой позиции должен обеспечить устойчивость своего положения (рис. 3.1.1). Первоначально вертикальная проекция центра масс робота не совпадает с точкой  $S$  касания шара и горизонтальной опорной плоскости, а шар может иметь некоторую начальную скорость. Робот должен так перемещать свой центр масс, чтобы указанная проекция совпала с точкой опоры шара, а шар успокоился.

Сначала рассмотрим случай, когда точки опоры робота остаются постоянными на поверхности шара и в начальный момент робот и шар покоятся. Обозначим  $\mathbf{K}_s$  кинетический момент системы “робот—шар” относительно точки  $S$ . Пусть  $t_0$  и  $t_f$  — начальный и конечный моменты времени шага стабилизации соответственно. Тогда

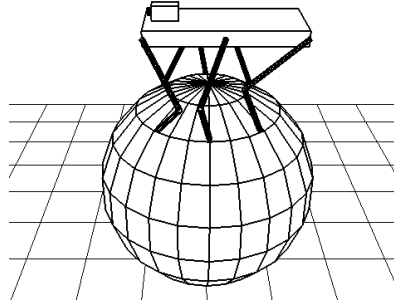


Рис. 3.1.1: Робот на шаре

получим

$$\mathbf{K}_s(t_f) - \mathbf{K}_s(t_0) = - \int_{t_0}^{t_f} M \mathbf{g} \times [\mathbf{r}_m(t) - \mathbf{r}_b(t)] dt,$$

где  $M$  — полная масса робота,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести,  $\mathbf{r}_m(t)$  — радиус-вектор центра масс робота,  $\mathbf{r}_b(t)$  — радиус-вектор центра шара в системе координат  $O\xi\eta\zeta$ . Имеем  $\mathbf{K}_s(t_0) = 0$  (в начальный момент времени робот и шар покоятся). Смещение центра корпуса, задаваемого радиус-вектором  $\mathbf{r}_c$ , относительно центра шара влечет смещение центра масс робота в соответствии с дифференциальным соотношением

$$d(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b(t)) = D d(\mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_b(t)),$$

где  $D$  — матрица Якоби:

$$D = \frac{\partial(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b(t))}{\partial(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b(t))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\xi_m - \xi_b)}{\partial(\xi_c - \xi_b)} & \frac{\partial(\xi_m - \xi_b)}{\partial(\eta_c - \eta_b)} & \frac{\partial(\xi_m - \xi_b)}{\partial(\zeta_c - \zeta_b)} \\ \frac{\partial(\eta_m - \eta_b)}{\partial(\xi_c - \xi_b)} & \frac{\partial(\eta_m - \eta_b)}{\partial(\eta_c - \eta_b)} & \frac{\partial(\eta_m - \eta_b)}{\partial(\zeta_c - \zeta_b)} \\ \frac{\partial(\zeta_m - \zeta_b)}{\partial(\xi_c - \xi_b)} & \frac{\partial(\zeta_m - \zeta_b)}{\partial(\eta_c - \eta_b)} & \frac{\partial(\zeta_m - \zeta_b)}{\partial(\zeta_c - \zeta_b)} \end{pmatrix},$$

взятая в положении, при котором центр масс робота расположен над центром шара. К концу шага стабилизации должно быть

$$\mathbf{K}_s(t_f) = 0, \quad [\mathbf{r}_m(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f)] \parallel \mathbf{g}.$$

Поэтому требуемое горизонтальное смещение центра масс робота относительно центра шара выражается формулой

$$\Delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b) = \frac{\mathbf{g} \times [\mathbf{g} \times [\mathbf{r}_m(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)]]}{g^2},$$

а необходимое конечное положение корпуса должно удовлетворять равенству

$$\mathbf{r}_c(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f) = D^{-1}\Delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b) + \mathbf{r}_c(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0). \quad (3.1.1)$$

Для моментов времени  $t \in [t_0, t_f]$  движение определим по формуле

$$\mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_b(t) = [\mathbf{r}_c(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f)]\delta(\tau) + (1 - \delta(\tau))[\mathbf{r}_c(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)], \quad (3.1.2)$$

где  $\tau = t - t_0$ , а  $\delta(\tau)$  – искомая скалярная функция. Поскольку при  $t = t_f$  требуется, чтобы было  $\mathbf{K}_s(t_f) = 0$ , перемещение корпуса робота должно быть выполнено так, чтобы интеграл от момента силы тяжести был равен нулю. Из равенства (3.1.2) найдем

$$\mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_b(t) - (\mathbf{r}_c(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)) = [\mathbf{r}_c(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f) - (\mathbf{r}_c(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0))]\delta(\tau).$$

С помощью (3.1.1) получим

$$\mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_b(t) - (\mathbf{r}_c(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)) = D^{-1}\Delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b)\delta(\tau)$$

или

$$\mathbf{r}_m(t) - \mathbf{r}_b(t) - (\mathbf{r}_m(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)) = \Delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b)\delta(\tau).$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_m(t) - \mathbf{r}_b(t) = [\mathbf{r}_m(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f)]\delta(\tau) + [1 - \delta(\tau)][\mathbf{r}_m(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)].$$

Требование, чтобы интеграл от момента силы тяжести был равен нулю, влечет

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \times \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{r}_m(t) - \mathbf{r}_b(t)] dt &= \mathbf{g} \times \int_0^T [\mathbf{r}_m(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f)]\delta(\tau) d\tau + \\ &+ \mathbf{g} \times \int_0^T [1 - \delta(\tau)][\mathbf{r}_m(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)] d\tau = 0, \end{aligned}$$

где  $T = t_f - t_0$ . Вектор  $\Delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_b)$  был найден из условия, что  $[\mathbf{r}_m(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f)] \parallel \mathbf{g}$ . Поэтому функция  $\delta(\tau)$  должна удовлетворять уравнению

$$\int_0^T \delta(\tau) d\tau = T. \quad (3.1.3)$$

Для определенности скалярную функцию  $\delta(\tau)$  зададим выражением

$$\frac{\delta(\tau)}{\bar{u}} = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2}, & 0 \leq \tau < \tau_1, \\ -\frac{(\tau - \tau_1)^2}{2} + \tau_1(\tau - \tau_1) + \frac{\tau_1^2}{2}, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \\ \frac{(\tau - \tau_2)^2}{2} + (2\tau_1 - \tau_2)(\tau - \tau_2) + \frac{\delta(\tau_2)}{\bar{u}}, & \tau_2 \leq \tau < T - \Delta, \\ \frac{1}{\bar{u}}, & T - \Delta \leq \tau \leq T, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

где  $\bar{u}$  — искомое максимальное значение для  $|\ddot{\delta}(\tau)|$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\Delta$  — некоторые постоянные параметры. Траектория перехода корпуса из начального в конечное положение должна быть непрерывной как по координатам, так и по скоростям. Поэтому при  $\tau = T - \Delta$  потребуем  $\delta(T - \Delta) = 1$ ,  $\dot{\delta}(T - \Delta) = 0$ . Тогда

$$\tau_1 = \frac{1}{\bar{u}(T - \Delta)} + \frac{T - \Delta}{4}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\bar{u}(T - \Delta)} + \frac{3(T - \Delta)}{4}.$$

Параметры в формуле (3.1.4) связаны очевидными соотношениями  $0 < \tau_1 < \tau_2 < T - \Delta$ . Отсюда

$$(T - \Delta)^2 > \frac{4}{\bar{u}}, \quad \text{или} \quad (T - \Delta)^2 > -\frac{4}{\bar{u}}. \quad (3.1.5)$$

Если  $\bar{u} > 0$ , то работает первое неравенство, а если  $\bar{u} < 0$ , то — второе.

Величину  $\bar{u}$  определим из уравнения (3.1.3). С учетом найденных значений  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  вычислим

$$\frac{I}{\bar{u}} = \int_0^{T-\Delta} \frac{\delta(\tau)}{\bar{u}} d\tau.$$

Обозначим

$$I_1 = \int_0^{\tau_1} \frac{\delta(\tau)}{\bar{u}} d\tau = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{\bar{u}(T - \Delta)} + \frac{T - \Delta}{4} \right]^3,$$

$$I_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\delta(\tau)}{\bar{u}} d\tau = \frac{T - \Delta}{4} \left[ \frac{1}{\bar{u}^2(T - \Delta)^2} + \frac{1}{\bar{u}} + \frac{(T - \Delta)^2}{16} + \frac{(T - \Delta)^2}{24} \right],$$

$$I_3 = \int_{\tau_2}^{T-\Delta} \frac{\delta(\tau)}{\bar{u}} d\tau = \frac{T - \Delta - \tau_2}{6} \left[ (T - \Delta - \tau_2)^2 + \frac{6}{\bar{u}} \right].$$



Тогда

$$\frac{I}{\bar{u}} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{(T - \Delta)^3}{32} - \frac{1}{2(T - \Delta)\bar{u}^2} + \frac{T - \Delta}{2\bar{u}}.$$

Условие (3.1.3) эквивалентно требованию  $I = T - \Delta$ , что приводит к квадратному по  $1/\bar{u}$  уравнению

$$\frac{1}{(T - \Delta)\bar{u}^2} + \frac{T - \Delta}{\bar{u}} - \frac{(T - \Delta)^3}{16} = 0.$$

Отсюда в предположении, что  $\bar{u} > 0$ , найдем

$$\frac{1}{\bar{u}} = \frac{(T - \Delta)^2}{2} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right). \quad (3.1.6)$$

Если принять, что  $\bar{u} < 0$ , то тогда будет

$$\frac{1}{\bar{u}} = -\frac{(T - \Delta)^2}{2} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \right).$$

Нетрудно проверить, что найденное положительное значение  $\bar{u}$  удовлетворяет условиям совместности (3.1.5), а отрицательное значение  $\bar{u}$  не удовлетворяет этим условиям, и его следует игнорировать.

На рис. 3.1.2 показана зависимость  $\delta(\tau)$  при  $\bar{u}$ , определенном формулой (3.1.6). Видно, что корпус сначала проходит требуемое положение без остановки, а затем к нему возвращается с нулевой скоростью. Такое движение корпуса обеспечивает нулевой интеграл момента силы тяжести относительно точки опоры шара.

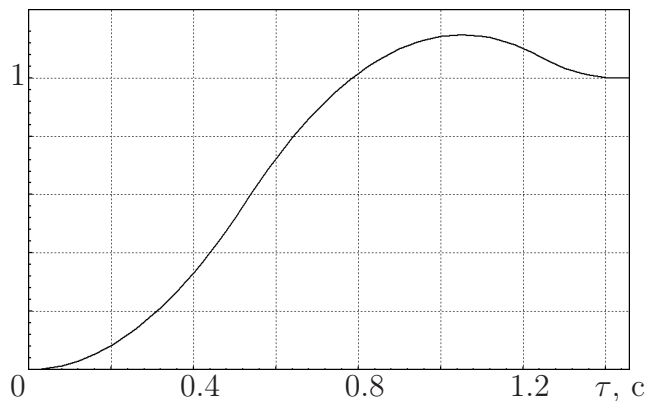


Рис. 3.1.2: Функция  $\delta(\tau)$

Для того чтобы скомпенсировать начальный кинетический момент  $\mathbf{K}_s(t_0) \perp \mathbf{g}$ , достаточно задать дополнительное смещение  $\Delta \mathbf{r}_c$  корпуса следующим образом:

$$\Delta \mathbf{r}_c(\tau) = D^{-1} \frac{\mathbf{K}_s(t_0) \times \mathbf{g}}{Mg^2T} \delta'(\tau), \quad \int_0^T \delta'(\tau) d\tau = T.$$

Формула для функции  $\delta'(\tau)/\bar{u}'$  на отрезке  $[0, T]$  практически совпадает с формулой (3.1.4) для функции  $\delta/\bar{u}$ . Отличие лишь в том, что должно быть  $\delta'(T - \Delta) = 0$ . Следовательно, для этой функции будем иметь

$$\tau'_1 = \frac{T - \Delta}{4}, \quad \tau'_2 = \frac{3(T - \Delta)}{4}, \quad \bar{u}' = \frac{32}{(T - \Delta)^2}. \quad (3.1.7)$$

Рисунок 3.1.3 дает представление о функции  $\delta'(\tau)$ . Ее максимум равен двум и приходится ровно на середину отрезка  $T - \Delta$ . Движение

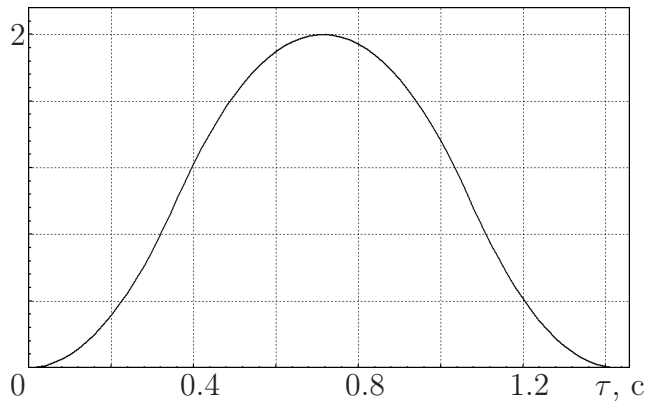


Рис. 3.1.3: Функция  $\delta'(\tau)$

корпуса, соответствующее этой функции, создает дозированное приращение интеграла от момента силы тяжести относительно точки опоры шара. На рис. 3.1.4 показан процесс гашения скорости шара с использованием функции  $\delta'(\tau)$ . В начальный момент скорость шара отрицательна, а центр масс робота проектируется в точку опоры шара. Видно, что к концу маневра скорость шара обнуляется, но при этом шар и корпус одинаково смещаются вдоль направления начальной скорости. Очевидно, что имеющийся совместный сдвиг шара и корпуса можно маневром, обратным указанному, преобразовать в скорость шара. Окончательно закон движения корпуса для

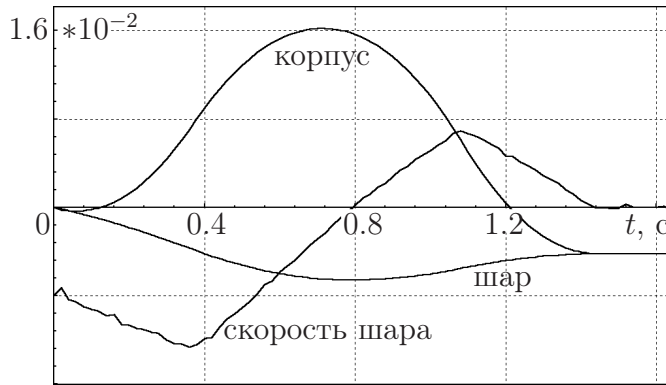


Рис. 3.1.4: Гашение скорости

стабилизации положения робота на шаре принимает вид

$$\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b = [\mathbf{r}_c(t_f) - \mathbf{r}_b(t_f)]\delta(\tau) + (1 - \delta(\tau))[\mathbf{r}_c(t_0) - \mathbf{r}_b(t_0)] + \Delta\mathbf{r}_c(\tau).$$

### 3.1.2. Робот на прямолинейно катящемся шаре

Пусть в начале движения робот и шар находятся в состоянии покоя, и робот стоит на шаре так, что его центр масс проектируется в точку опоры шара. Корпус робота ориентирован вдоль единичного вектора  $\mathbf{e} \perp \mathbf{g}$ , задающего направление предстоящего движения центра  $B$  шара. Робот должен, находясь всеми точками опоры на шаре, разогнать его до требуемой скорости и затем двигаться вместе с шаром в направлении вектора  $\mathbf{e}$ . Единичный этап разгона шара на отрезке  $[t_0, t_f]$  осуществляется в соответствии с формулой

$$\delta\mathbf{r}_c^{(1)} = k_v[v_d - v_e(t_0)]\delta'(\tau)\mathbf{e}, \quad (3.1.8)$$

где  $k_v$  — коэффициент,  $v_d$  — величина требуемой скорости,  $v_e = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}$  — проекция скорости шара на направление  $\mathbf{e}$ , а функция  $\delta'(\tau)$  определена условиями (3.1.7). Этапы разгона могут выполняться как на каждом периоде походки, так и через несколько периодов. При достаточно большом числе этапов разгона скорость шара асимптотически приближается к значению  $v_d$ . В качестве иллюстрации процесс разгона шара представлен на рис. 3.1.5 для случая  $v_d = 0.13$  м/с. Показана зависимость скорости центра шара от времени. Этапы разгона (толчки) выполняются на каждом шаге походки. Нерегулярности изменения скорости вызваны столкновениями стоп ног с поверхностью шара. Видно приближение “в среднем” скорости к требуемому значению. На рис. 3.1.6 дана зависимость скорости центра шара от

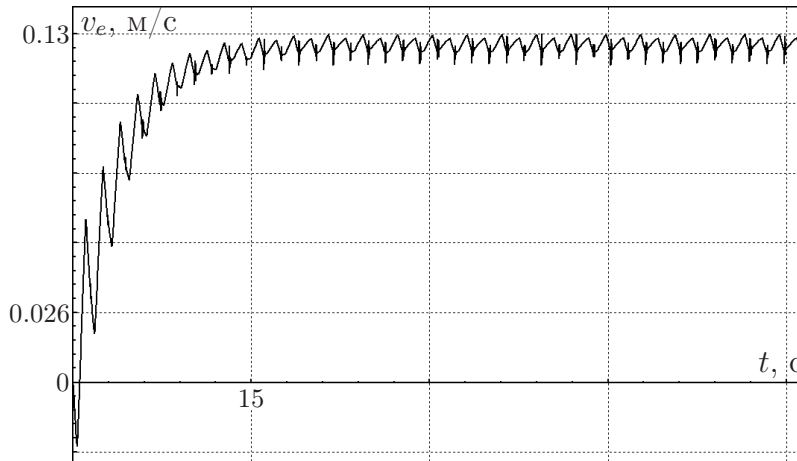


Рис. 3.1.5: Разгон шара (толчки на каждом шаге)

времени для того же значения  $v_d = 0.13$  м/с при условии, что разгонные толчки выполняются не на каждом шаге, а раз в четыре шага. Видно, что скорость приближается “в среднем” к значению, меньшему, чем требуемое. Это вполне объясняется тем, что за время выполнения роботом четырех шагов скорость шара убывает из-за естественной диссипации.

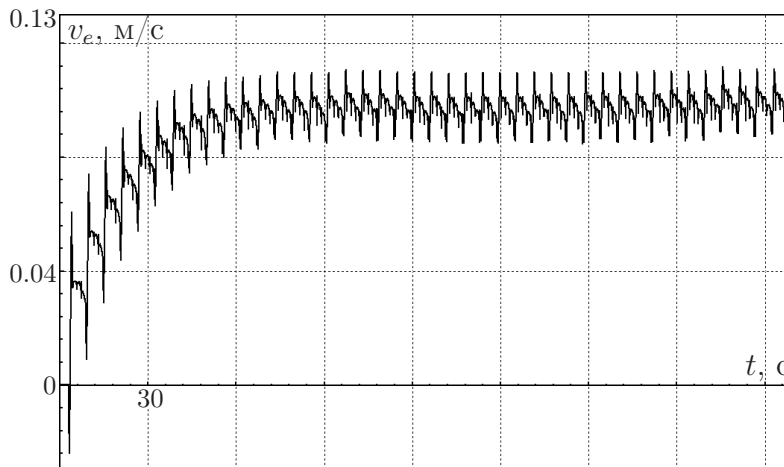


Рис. 3.1.6: Разгон шара (толчки раз в 4 шага)

Чтобы сохранить прямолинейное движение корпуса, робот идет по движущемуся шару походкой “трешки”. Во избежание бокового ухода шара центр масс робота должен проектироваться на прямую, проходящую через точку опоры шара в продольном направлении  $e$ .

В осях  $O_r x_r y_r z_r$  координаты центров масс ног имеют вид

$$\begin{aligned} x_{ci} &= x_{pi} + \frac{[(-1)^{i-1}(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \sin \beta_i + m_2 l_{c2} \sin(\beta_i + \gamma_i)] \sin \alpha_i}{m_1 + m_2}, \\ y_{ci} &= y_{pi} - \frac{[(-1)^{i-1}(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \sin \beta_i + m_2 l_{c2} \sin(\beta_i + \gamma_i)] \cos \alpha_i}{m_1 + m_2}, \\ z_{ci} &= z_{pi} + \frac{[(-1)^{i-1}(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \cos \beta_i + m_2 l_{c2} \cos(\beta_i + \gamma_i)]}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

где  $l_{c1}$  – расстояние от точки крепления ноги к корпусу до центра масс бедра,  $l_{c2}$  – расстояние от колена до центра масс голени.

В соответствии с формулами (1.1.1) при фиксированных положениях стоп шарнирные углы  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  зависят от положения корпуса, а при поступательном движении корпуса они меняются только при изменении координат его центра масс. Допустим, что центр масс корпуса совпадает с точкой  $O_r$ , имеющей радиус-вектор  $\mathbf{r}_c$ . Обозначим  $\mathbf{r}_{ci}(\mathbf{r}_c)$  радиус-вектор с началом в точке  $O_r$  и концом, совпадающим с центром масс ноги. Этот вектор в осях  $O_r x_r y_r z_r$  имеет координаты (3.1.9). Положение центра масс робота задается вектором

$$\mathbf{r}_m = \frac{m_b \mathbf{r}_c + m_l \mathbf{r}_l}{m_b + m_l},$$

где

$$m_l = 6(m_1 + m_2), \quad \mathbf{r}_l(\mathbf{r}_c) = \mathbf{r}_c + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \mathbf{r}_{ci}(\mathbf{r}_c)$$

соответственно суммарная масса всех ног и радиус-вектор их центра масс. В процессе переноса ног центр их масс может смещаться в боковом направлении относительно плоскости  $\mathcal{P}$ , образованной векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{e}$  и проходящей через центр шара. Для того чтобы центр масс робота оставался в указанной плоскости, корпус должен смещаться в противоположном направлении. Поправка  $\delta \mathbf{r}_c^{(2)}$ , учитывающая необходимое отклонение корпуса от плоскости  $\mathcal{P}$ , вычисляется с использованием следующего уравнения:

$$\chi = [\mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_b(t)] \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g} = -\frac{m_l}{m_b} [\mathbf{r}_l(\mathbf{r}_c) - \mathbf{r}_b(t)] \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g}, \quad (3.1.10)$$

где  $\chi$  – величина необходимого бокового смещения корпуса. Уравнение (3.1.10) – трансцендентное относительно  $\chi$ . Оно решается численно методом простой итерации. Применительно к уравнению

(3.1.10) метод простой итерации состоит в следующем. Пусть задано некоторое исходное значение вектора  $\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}_c^s$ . Итерационная процедура при фиксированном  $t$  имеет вид

$$\chi_{j+1} = [\mathbf{r}_{c(j+1)} - \mathbf{r}_b(t)] \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g} = -\frac{m_l}{m_b} [\mathbf{r}_l(\mathbf{r}_{c_j}) - \mathbf{r}_b(t)] \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где

$$\mathbf{r}_{c_j} = \mathbf{r}_c^s + \chi_j \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g}, \quad \chi_0 = 0.$$

Итерации заканчиваются, когда  $|\chi_{i+1} - \chi_i| < \mu$ . Требуемая точность  $\mu$  обычно достигается за несколько итераций. Далее полагается

$$\delta \mathbf{r}_c^{(2)} = \chi \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g}.$$

Из-за ошибок исполнения и других погрешностей движение точки опоры шара может все же отклоняться от прямолинейного. Поэтому необходимо стабилизирующее управление с обратной связью как по координате, так и по скорости центра шара, возвращающее точку опоры шара на предписанную прямую. Такая обратная связь обеспечивается слагаемым

$$\delta \mathbf{r}_k^{(3)} = - \left( [k_1 \mathbf{r}_b(t_{n0}) - k_2 \mathbf{r}_b(t_{(n-1)0})] \cdot \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g} \right) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g},$$

где  $k_1 > k_2$  — коэффициенты обратной связи,  $\mathbf{r}_b(t_{n0})$ ,  $\mathbf{r}_b(t_{(n-1)0})$  — положения центра шара в начале текущего и в начале предыдущего периодов походки. Фильтр в квадратных скобках учитывает боковые отклонения как по координате, так и по скорости от нулевых значений. Окончательно программный закон движения корпуса при разгоне шара выражается формулой

$$\delta \mathbf{r}_c = \delta \mathbf{r}_c^{(1)} + \delta \mathbf{r}_c^{(2)} + \delta \mathbf{r}_c^{(3)},$$

где поправка  $\delta \mathbf{r}_c^{(1)}$  определена формулой (3.1.8).

Сформированное движение корпуса реализуется управляющими шарнирными моментами ног, находящихся в опоре (см. раздел 1.3). Точки опоры выбираются в системе координат  $B\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ , где  $B$  — центр шара, повернутой относительно направления движения на угол  $\alpha = T v_b / (2R)$ , где  $T$  — период походки. Он же есть интервал управления движением корпуса. Дело в том, что точки опоры, будучи неподвижными на шаре, перемещаются по мере вращения

шара. При увеличении скорости шара условие дотягивания опорных ног до поверхности шара при постоянной высоте корпуса может нарушаться. Угол  $\alpha$ , выбранный указанным образом, обеспечивает симметрию относительно вертикали, проходящей через центр шара, положения точек опоры в момент постановки ног и положения соответствующих точек опоры в момент подъема тех же ног. Направляющие векторы повернутой системы координат имеют вид (рис. 3.1.7)

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{e}}{g}, \quad \mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}) \sin \alpha + \mathbf{e} \cos \alpha, \quad \mathbf{e}'_3 = (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}) \cos \alpha - \mathbf{e} \sin \alpha.$$

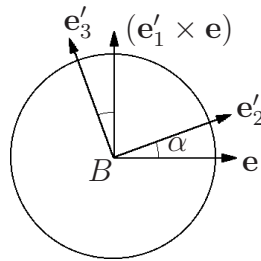


Рис. 3.1.7: Повернутая система координат

Радиус-векторы точек опоры относительно центра шара задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= -\sqrt{d_1^2 - d_2^2} \mathbf{e}'_1 + d_2 \mathbf{e}'_2 + \sqrt{R^2 - d_1^2} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{r}'_2 &= \sqrt{d_1^2 - d_2^2} \mathbf{e}'_1 + d_2 \mathbf{e}'_2 + \sqrt{R^2 - d_1^2} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{r}'_3 &= -d_1 \mathbf{e}'_1 + 0 \mathbf{e}'_2 + \sqrt{R^2 - d_1^2} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{r}'_4 &= d_1 \mathbf{e}'_1 + 0 \mathbf{e}'_2 + \sqrt{R^2 - d_1^2} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{r}'_5 &= -\sqrt{d_1^2 - d_2^2} \mathbf{e}'_1 - d_2 \mathbf{e}'_2 + \sqrt{R^2 - d_1^2} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{r}'_6 &= \sqrt{d_1^2 - d_2^2} \mathbf{e}'_1 - d_2 \mathbf{e}'_2 + \sqrt{R^2 - d_1^2} \mathbf{e}'_3, \end{aligned}$$

где  $d_1$  — радиус окружности, на которой располагаются точки опоры,  $d_2$  — расстояние от центра окружности до хорды, соединяющей точки опоры либо пары передних, либо пары задних ног. Таким образом, точки опоры правой и левой стороны робота оказываются симметричными относительно вертикальной продольной плоскости движения.

### 3.1.3. Анализ возможности залезания на шар

Допускается, что шар радиуса  $R$  и массы  $M$  может катиться по горизонтальной плоскости без проскальзывания и без отскоков. В начальный момент времени корпус робота ориентирован вдоль поверхности шара, и робот стоит таким образом, что часть его ног опирается о покоящийся шар, а другая часть ног — о горизонтальную плоскость. Используя опорные точки на плоскости, робот может придать шару некоторую скорость и тем самым облегчить себе задачу залезания на шар.

Обозначим  $B\xi\eta\zeta$  систему координат с началом  $B$ , совпадающим в любой момент времени с центром шара, и с осями, параллельными осям абсолютной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ . Ось  $B\eta$  направлена в сторону, противоположную предполагаемой начальной скорости центра шара и не меняет своей ориентации в процессе движения. Ось  $B\zeta$  направлена вертикально вверх. Ось  $B\xi$  образует с двумя указанными осями правую тройку, так что с положительного направления оси  $B\xi$  вращение шара, индуцированное предполагаемой скоростью центра шара, будет видно происходящим против хода часовой стрелки. Пусть  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{e}_\zeta$  — единичные направляющие векторы указанных координатных осей.

Движение корпуса робота предполагается параллельным плоскости  $O\eta\zeta$  таким образом, что продольная ось корпуса в любой момент времени движения направлена по касательной к сфере, а плоскость  $B\eta\zeta$  служит плоскостью симметрии корпуса. Точки опоры ног на сфере также будем располагать симметрично относительно  $B\eta\zeta$ . Положение фигуры, полученной сечением робота плоскостью  $B\eta\zeta$ , будем характеризовать постоянным радиусом  $\rho$  между точкой  $B$  и центром масс  $C$  робота и переменным углом  $\varphi$  между осью  $B\eta$  и направлением из центра шара в точку  $C$  (рис. 3.1.8,а).

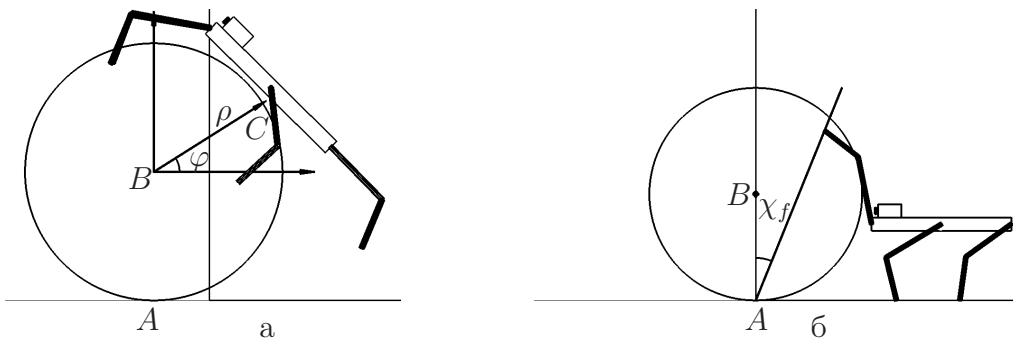


Рис. 3.1.8: Возможность залезания на шар



Обозначим  $A$  точку касания шара и опорной плоскости. Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента  $\mathbf{K}_A$  шара вместе с роботом, взятого относительно подвижной в общем случае точки  $A$  [22].

$$\frac{d\mathbf{K}_A}{dt} + \mathbf{v}_A \times \mathbf{Q} = \boldsymbol{\rho} \times m\mathbf{g}, \quad (3.1.11)$$

где  $t$  — время,  $\mathbf{v}_A$  — скорость точки  $A$ ,  $\mathbf{Q}$  — количество движения системы,  $m$  — масса робота,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести,  $\boldsymbol{\rho}$  — радиус-вектор центра масс робота, имеющий начало в точке  $B$ . Предполагается, что  $\rho > R$ . Выражение в правой части для момента силы тяжести робота относительно точки  $A$  справедливо из-за того, что радиус  $\mathbf{BA}$  в любой момент времени параллелен силе тяжести.

Будем считать, что шар однороден и не имеет вертикальной составляющей угловой скорости, а его движение параллельно плоскости  $O\eta\zeta$ . Тогда кинетический момент  $\mathbf{K}_b$  шара относительно точки  $A$  выражается формулой

$$\mathbf{K}_b = J_b \omega \mathbf{e}_\xi, \quad J_b = \frac{7}{5} MR^2, \quad \omega = \frac{v_A}{R},$$

так как центр шара всегда проектируется в точку  $A$ . При условии, что угол между отрезком  $BC$  и продольной осью корпуса остается постоянным, кинетический момент  $\mathbf{K}_r$  робота относительно точки  $A$  имеет вид [22]

$$\mathbf{K}_r = m\mathbf{AC} \times \mathbf{v}_c + \mathbf{K}_r^*,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= \rho \cos \varphi \mathbf{e}_\eta + (\rho \sin \varphi + R) \mathbf{e}_\zeta, \\ \mathbf{v}_c &= -(\dot{\varphi} \rho \sin \varphi + v_A) \mathbf{e}_\eta + \dot{\varphi} \rho \cos \varphi \mathbf{e}_\zeta, \end{aligned}$$

$\mathbf{K}_r^*$  — кинетический момент робота относительно его центра масс. Пренебрегая для простоты кинетическим моментом движения ног относительно корпуса и обозначая  $J_r$  момент инерции всего робота относительно его центра масс, получим выражение

$$\mathbf{K}_A = [J_r \dot{\varphi} + J_b \omega + m \dot{\varphi} (\rho^2 + R \rho \sin \varphi) + m \omega R (R + \rho \sin \varphi)] \mathbf{e}_\xi.$$

С учетом сказанного уравнение (3.1.11) в проекции на ось  $B\xi$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \dot{\varphi} [J_r + m(\rho^2 + R \rho \sin \varphi)] \} + \dot{\omega} [J_b + (m + M)R^2 + mR \rho \sin \varphi] = \\ = -mg\rho \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Пусть робот залезает на шар с постоянной угловой скоростью  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Тогда угловая скорость шара подчиняется уравнению

$$\dot{\omega} = -\frac{(g + \dot{\varphi}^2 R)m\rho \cos \varphi}{J_b + (m + M)R^2 + mR\rho \sin \varphi},$$

которое можно проинтегрировать:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{g + \dot{\varphi}^2 R}{\dot{\varphi} R} \ln \frac{J_b + (m + M)R^2 + mR\rho \sin \varphi}{J_b + (m + M)R^2 + mR\rho \sin \varphi_0}, \quad (3.1.13)$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость шара,  $\varphi_0$  — начальное угловое положение робота. По смыслу задачи при достижении роботом вершины шара ( $\varphi = \pi/2$ ) шар должен остановиться ( $\omega = 0$ ). Отсюда получаем уравнение, связывающее начальную угловую скорость  $\omega_0$  шара и постоянную угловую скорость  $\dot{\varphi}$  перемещения робота по шару

$$\dot{\varphi}^2 \mathcal{P} R - \dot{\varphi} \omega_0 R + \mathcal{P} g = 0, \quad (3.1.14)$$

где

$$\mathcal{P} = \ln \frac{1 + p}{1 + p \sin \varphi_0}, \quad p = \frac{mR\rho}{J_b + (M + m)R^2}.$$

При условии

$$\omega_0^2 \geq \frac{4\mathcal{P}^2 g}{R} \longrightarrow v_0 \geq 2\mathcal{P} \sqrt{gR}, \quad (3.1.15)$$

где  $v_0$  — начальная скорость центра шара, уравнение (3.1.14), рассматриваемое относительно  $\dot{\varphi}$ , имеет два положительных корня, из которых по конструктивным соображениям следует выбрать наименьший

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0 R - \sqrt{\omega_0^2 R^2 - 4\mathcal{P}^2 Rg}}{2\mathcal{P} R}. \quad (3.1.16)$$

Безразмерный параметр  $\mathcal{P}$ , определяющий в (3.1.15) начальную скорость шара, зависит от массовых и геометрических параметров системы. В частности, видно, что чем меньше масса робота по сравнению с массой шара, тем меньше параметр  $\mathcal{P}$ , и ограничение на скорость  $v_0$  ослабляется. При этом уменьшается и требуемое значение величины  $\dot{\varphi}$ . Параметр  $\mathcal{P}$  убывает также при приближении значения начального угла  $\varphi_0$  к  $\pi/2$ . Другими словами, чем выше расположен робот на шаре, тем легче ему взобраться на вершину шара. При прочих равных условиях параметр  $\mathcal{P}$  увеличивается, если растет расстояние  $\rho$  от центра шара до центра масс робота. Это означает, что чем больше  $\rho$ , тем труднее роботу взобраться на шар.

### 3.1.4. Динамика слезания робота с шара

Как и прежде, предполагается, что шар радиуса  $R$  и массы  $M$  может катиться по горизонтальной плоскости без проскальзывания и без отскоков. В начальный момент времени робот покоится на вершине неподвижного шара, его корпус ориентирован горизонтально, а все шесть ног опираются о шар, образуя симметричный горизонтальный опорный многоугольник. Робот может начать спуск непосредственно из состояния покоя либо предварительно разогнав шар так, чтобы он в начальный момент времени имел угловую скорость  $\omega_0$  (см. раздел 3.1.2). Пусть робот при слезании с шара выполняет плоскопараллельное движение вдоль вертикальной плоскости. Если сила тяжести отсутствует, то кинетический момент системы в целом относительно точки опоры шара сохраняется. Поэтому движение робота вдоль поверхности шара будет вызывать приращение кинетического момента шара относительно точки опоры. Это приращение будет противоположно по направлению кинетическому моменту робота относительно той же точки. Вместе с тем в реальности кинетический момент системы меняется под действием силы тяжести робота. В этом случае момент силы тяжести будет сонаправлен кинетическому моменту робота и, следовательно, будет разгонять шар в направлении движения робота. Можно оценить, какая должна быть скорость робота, чтобы скорость шара в момент окончания маневра оказалась минимальной.

Поступим аналогично тому, как это было сделано в разделе 3.3.2. Возьмем систему координат  $B\xi\eta\zeta$  с началом  $B$ , совпадающим в любой момент времени с центром шара, и с осями, параллельными осям абсолютной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ . Ось  $B\eta$  направлена в сторону, противоположную предполагаемой начальной скорости робота, и не меняет своей ориентации в процессе движения. Ось  $B\zeta$  направлена вертикально вверх. Ось  $B\xi$  образует с двумя указанными осями правую тройку, так что с положительного направления оси  $B\xi$  вращение шара, индуцированное качением шара в сторону движения робота, будет видно происходящим против хода часовой стрелки. Пусть  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{e}_\zeta$  — единичные направляющие векторы указанных координатных осей.

Движение корпуса робота предполагается происходящим параллельно плоскости  $O\eta\zeta$ , причем продольная ось корпуса в любой момент времени движения направлена по касательной к сфере, а плос-

кость  $B\eta\zeta$  служит плоскостью симметрии корпуса. Точки опоры ног на сфере также будем располагать симметрично относительно  $B\eta\zeta$ . Положение фигуры, полученной сечением робота плоскостью  $B\eta\zeta$ , будем характеризовать постоянным радиусом  $r$  между точкой  $B$  и центром масс  $C$  робота и переменным углом  $\varphi$  между осью  $B\eta$  и направлением из центра шара в точку  $C$  (рис. 3.1.9).

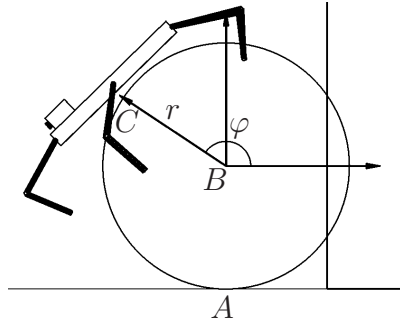


Рис. 3.1.9: Система робот–шар

Воспользуемся уравнением (3.1.12). Пусть робот слезает с шара с постоянной угловой скоростью  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Тогда для угловой скорости шара имеем выражение (3.1.13), где  $\omega_0$  — проекция начальной угловой скорости шара на ось  $B\xi$ ,  $\varphi_0$  — начальное угловое положение робота. По смыслу задачи при достижении роботом финального положения на шаре, из которого будет осуществлен переход на опорную плоскость, шар должен иметь минимальную угловую скорость. При этом начальному положению робота соответствует угол  $\varphi_0 = \pi/2$ . Отсюда получаем, что минимальное значение абсолютной величины приращения угловой скорости  $\omega_m$  шара достигается при значении  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{op} = \pm\sqrt{g/R}$ , где знак “+” соответствует движению робота в отрицательном направлении оси  $B\eta$ , и это приращение будет равно

$$\omega_m - \omega_0 = \mp 2\sqrt{\frac{g}{R}} \ln[1 - \varepsilon(1 - \sin \varphi)],$$

где

$$\varepsilon = \frac{mR\rho}{J_b + (m + M)R^2 + mR\rho}, \quad m = \frac{\varepsilon(J_b + MR^2)}{[r - \varepsilon(\rho + R)]R}. \quad (3.1.17)$$

Если потребовать, чтобы в конечный момент времени движения робота по шару было выполнено  $\omega_m = 0$ , то тогда перед началом спуска шар придется разогнать до угловой скорости

$$\omega_0 = \pm 2\sqrt{\frac{g}{R}} \ln[1 - \varepsilon(1 - \sin \varphi)].$$

Получается, что  $\omega_0$  имеет знак, обратный знаку угловой скорости  $\dot{\varphi}$ , так как должно быть  $\sin \varphi < 1$ . Найденное значение  $\omega_0$  будет минимальным по модулю значением начальной угловой скорости шара, обеспечивающим нулевую скорость шара непосредственно перед переходом робота на опорную плоскость при условии, что  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{op}$ . Если, наоборот, потребовать, чтобы в начале спуска шар покоился ( $\omega_0 = 0$ ), то в конце спуска шар разгонится до угловой скорости, такой, что

$$|\omega_m| \geq -\sqrt{\frac{g}{R}} \ln[1 - \varepsilon(1 - \sin \varphi)].$$

Более точное значение угловой скорости шара в конце спуска дается формулой (3.1.13). Конечно, возможны и промежуточные варианты, когда шар сначала разгоняется до некоторой угловой скорости, не совпадающей с найденным оптимальным значением, чтобы несколько уменьшить угловую скорость шара в конце спуска.

При достаточно малом  $\varepsilon$  приращение угловой скорости шара не будет слишком большим. Соотношения (3.1.17) можно использовать для выбора конструктивных параметров системы.

Приведенные формулы дают грубую оценку динамики робота при слезании с шара из-за того, что они не учитывают движение ног при движении робота. Вместе с тем они дают качественно верную картину явления и могут быть использованы для предварительного анализа рациональности применяемых алгоритмов построения движения.

### 3.1.5. Максимальный радиус шара

Найдем максимально допустимый радиус шара, при котором робот в идеальной постановке еще мог бы взобраться на шар. Потребуем, чтобы на этапе подготовки толчка робот осуществлял свои маневры, оставляя шар в состоянии покоя. Тогда точки опоры передних ног на шаре определяются условием непроскальзывания шара на опорной плоскости. Поскольку в точках опоры робота о шар и в точке  $A$  контакта шара с опорной плоскостью отсутствует силовой момент, равновесие шара возможно, лишь если основание равнодействующей сил, приложенных к шару со стороны стоп, проходит через точку  $A$ . По соображениям симметрии указанная равнодействующая должна лежать в плоскости  $B\eta\zeta$ . Реакция опорной плоскости в точке  $A$ , уравновешивая воздействие робота на шар, принадлежит

конусу сухого трения. Следовательно, точки опоры передних ног на шаре должны располагаться с положительной стороны оси  $B\zeta$  в области  $D$ , ограниченной двумя окружностями, проходящими через точку  $A$ . Плоскости окружностей параллельны оси  $B\xi$  и расположены под положительным и отрицательным углами трения  $\chi_f$  к оси  $B\zeta$  (рис. 3.1.8,б). Отмеченное обстоятельство накладывает очевидное ограничение на радиус шара: робот должен иметь возможность дотянуться стопами передних ног до области  $D$ .

Зададим  $0 \leq \xi = \xi_6 = -\xi_5 \leq R$  абсциссы точек опоры передних ног на шаре. Напишем условие принадлежности этих точек области  $D$

$$-\hat{\eta} \leq \eta \leq \hat{\eta}, \quad \hat{\eta}(R, \xi) = \frac{k_f [R + \sqrt{R^2 - (1 + k_f^2)\xi^2}]}{1 + k_f^2}, \quad \zeta = \sqrt{R^2 - \xi^2 - \eta^2},$$

где  $k_f$  — коэффициент сухого трения ( $k_f = \operatorname{tg} \chi_f$ ),  $\eta, \zeta$  — ордината и аппликата точек опоры передних ног. Возьмем точки опоры передних ног на границе области  $D$  со стороны приближающегося робота. Их координаты принимают значения  $\hat{\xi}, \eta = \hat{\eta}, \zeta = \hat{\zeta}$

$$\hat{\xi} = \pm \xi, \quad \hat{\zeta} = \frac{\hat{\eta}}{k_f} - R.$$

Неравенство

$$(\xi - \xi_{p6})^2 + (\hat{\eta} - \eta_{p6})^2 + (\hat{\zeta} - \zeta_{p6})^2 < (l_1 + l_2)^2, \quad (3.1.18)$$

где  $\xi_{p6}, \eta_{p6}, \zeta_{p6}$  — координаты точки подвеса левой передней ноги к корпусу, представляет собой необходимое условие возможности постановки точек опоры передних ног в область  $D$ . Знак строгого неравенства в (3.1.18) означает, что требуется еще учесть условие непересечения внутренних частей звеньев ног с поверхностью шара. Другими словами, при опоре о шар ноги должны быть согнуты из-за кривизны поверхности шара. Кроме того, чем ближе точки опоры передних ног к плоскости  $B\xi\zeta$ , тем увереннее в смысле отсутствия проскальзывания будет опора робота на передние ноги.

Неравенство (3.1.18) можно применить для выяснения, достаточно ли робот уже приблизился к шару, чтобы начать залезание на него. Для оценки максимально допустимого радиуса шара, на который робот еще может залезть, требуется более точное соотношение. Из соображений простоты предположим, что область достижимости стопы есть полушар с центром в точке подвеса и с плоскостью

основания, параллельной боковому ребру робота. Тогда касание полусфера достижимости стопы, соответствующего, например, левой передней ноге, и границы области  $D$  может произойти лишь при  $\xi = \xi_{p6} = y_{p6} = b/2$ . Кроме того, точки подвеса передних ног не могут приблизиться к центру шара ближе, чем на  $R$ . При условии, что на горизонтальной опорной плоскости находятся стопы средних и задних ног, высота передних точек подвеса не может превышать  $2(l_1 + l_2)$ . Поэтому  $\zeta_{p6} \leq \hat{h} - R$ , где  $\hat{h}$  есть максимально возможная высота подъема передних точек подвеса над опорной плоскостью. В предельном положении голени передних ног при дотягивании до точки опоры могут лишь касаться шара в стопе. Поэтому максимально допустимое значение радиуса шара не превосходит величины  $\tilde{R}$ , удовлетворяющей уравнению

$$\left( \hat{\eta}(\tilde{R}) + \frac{\hat{\zeta}l_2}{\sqrt{\hat{R}^2 - y_{p6}^2}} - \tilde{R} \right)^2 + \left( \hat{\zeta} - \frac{\hat{\eta}l_2}{\sqrt{\hat{R}^2 - y_{p6}^2}} + \tilde{R} - \hat{h} \right)^2 = l_1^2. \quad (3.1.19)$$

Учтем, что

$$\hat{\eta} = \frac{\tilde{R}k_f(2 + \mu_1)}{1 + k_f^2}, \quad \hat{\zeta} + \tilde{R} = \frac{\hat{\eta}}{k_f} = \frac{\tilde{R}(2 + \mu_1)}{1 + k_f^2},$$

$$\mu_1 = \sqrt{1 - (1 + k_f^2)\frac{b^2}{4\tilde{R}^2}} - 1, \quad \mu_2 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\tilde{R}^2}} - 1.$$

Тогда уравнение (3.1.19) примет вид

$$\tilde{R}^2 - 2\tilde{R}d_1 + d_2 = 0,$$

где

$$d_1 = \frac{[(1 - k_f\hat{\mu}_1 + k_f^2)(1 - k_f^2 + \mu_1) + \hat{\mu}_1^2 k_f]l_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2(1 + k_f^2)\hat{h}}{[(1 - k_f\hat{\mu}_1 + k_f^2)^2 + \hat{\mu}_1^2]\hat{\mu}_2}, \quad (3.1.20)$$

$$d_2 = \frac{(1 + k_f^2)[(\hat{h}^2 + l_2^2 - l_1^2)(1 + k_f^2)\hat{\mu}_2 + 2k_f\hat{\mu}_1 l_2 \hat{h}]}{[(1 - k_f\hat{\mu}_1 + k_f^2)^2 + \hat{\mu}_1^2]\hat{\mu}_2},$$

причем  $\hat{\mu}_1 = 2 + \mu_1$ ,  $\hat{\mu}_2 = 1 + \mu_2$ .

Максимальный корень уравнения (3.1.19) можно представить следующим образом:

$$\tilde{R} = d_1 + \sqrt{d_1^2 - d_2}. \quad (3.1.21)$$

Если  $\tilde{R} > \sqrt{1 + k_f^2} b/2$ , то приближенное значение  $\tilde{R}$  можно получить из (3.1.21) с помощью итерационной процедуры. Сначала, задав  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , найдем нулевое приближение

$$\begin{aligned} d_1^{(0)} &= \frac{[(1 - k_f)^2(1 - k_f^2) + 4k_f]l_2 + 2(1 + k_f^2)\hat{h}}{(1 - k_f)^2 + 4}, \\ d_2^{(0)} &= \frac{(1 + k_f^2)[(\hat{h}^2 + l_2^2 - l_1^2)(1 + k_f^2) + 4k_f l_2 \hat{h}]}{(1 - k_f)^2 + 4} \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

и по формуле (3.1.21) для  $d_1 = d_1^{(0)}$ ,  $d_2 = d_2^{(0)}$  определим  $\tilde{R}_0$ . Далее из (3.1.21) последовательно получаются значения  $\tilde{R}_i$  для  $d_1^{(i)}$  и  $d_2^{(i)}$ , вычисляемых по формулам (3.1.20) при

$$\mu_1^{(i)} = \sqrt{1 - (1 + k_f^2) \frac{b^2}{4\tilde{R}_{i-1}^2}} - 1, \quad \mu_2^{(i)} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\tilde{R}_{i-1}^2}} - 1, \quad i = 1, \dots$$

до достижения требуемой точности.

Нулевое приближение  $\tilde{R}_0$  дает значение  $\tilde{R}$  с точностью до членов второго порядка относительно величины  $b/(2\tilde{R})$ . Поэтому  $\tilde{R}_0$  можно применять для грубой оценки радиуса максимального шара. Найдем, например,  $\tilde{R}_0$  при  $k_f = 0$  и  $k_f = 1$ .

Пусть  $k_f = 0$ . Тогда

$$d_1^{(0)} = \frac{l_2 + 2\hat{h}}{5}, \quad d_2^{(0)} = \frac{\hat{h}^2 + l_2^2 - l_1^2}{5}, \quad \tilde{R}_0 = \frac{l_2 + 2\hat{h} + \sqrt{5l_1^2 - (2l_2 - \hat{h})^2}}{5}.$$

Такое значение радиуса  $\tilde{R}_0$  получается, когда звено  $l_2$  лежит горизонтально, а стопа опирается о верхнюю точку шара (рис. 3.1.10, а). Это естественно, так как только на нее и можно опереться при отсутствии трения, чтобы шар не проскальзывал. Нетрудно убедиться в том, что при  $\hat{h} = 2(l_1 + l_2)$  достигается максимум  $\tilde{R}_0$  и

$$\max_{\hat{h}}(\tilde{R}_0) = l_2 + l_1.$$

Пусть  $k_f = 1$ . Тогда

$$d_1^{(0)} = \hat{h} + l_2, \quad d_2^{(0)} = (\hat{h} + l_2) - l_1^2, \quad \tilde{R}_0 = \hat{h} + l_1 + l_2.$$

Такое значение радиуса  $\tilde{R}_0$  отвечает случаю, когда робот вытянутыми вертикально вверх ногами дотягивается до точки шара, принадлежащей оси  $B\eta$  (рис. 3.1.10, б). В данном случае эта точка принадлежит конусу трения с вершиной в  $A$  и углом раствора  $\pi/4$ . Если



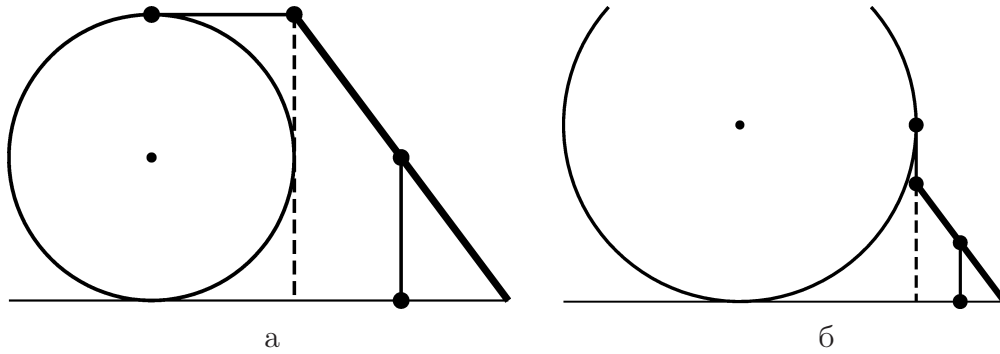


Рис. 3.1.10: Предельные размеры шара

взять предельно допустимое значение  $\hat{h} = 2(l_1 + l_2)$ , то получим

$$\max_{\hat{h}}(\tilde{R}_0) = 3(l_2 + l_1).$$

Видно, что наличие трения существенно влияет на максимально допустимую величину радиуса шара и облегчает роботу задачу залезания на шар.

### 3.1.6. Поворот вектора скорости шара

Предполагается, что шар радиуса  $R$  и массы  $M$  может катиться по горизонтальной плоскости без проскальзывания и без отскоков. Пусть центр масс робота отстоит от поверхности шара на расстояние  $h > 0$ . Рассмотрим движение, при котором корпус робота смещен от вертикали, проходящей через точку опоры шара так, что радиус-вектор  $\mathbf{r}_m$  центра масс робота, проведенный из центра шара  $B$ , перпендикулярен в любой момент времени вектору скорости  $\mathbf{v} \neq 0$  центра шара и образует с упомянутой вертикалью угол  $\phi$ . Тогда

$$\mathbf{r}_m = (h + R) \left( \mathbf{e}_\zeta \cos \phi + \frac{\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{v}}{v} \sin \phi \right), \quad (3.1.23)$$

где  $\mathbf{e}_\zeta$  — единичный вектор вертикали,  $v \neq 0$  — модуль скорости центра шара. Пренебрежем вариацией суммарного кинетического момента ног относительно центра масс робота и будем считать, что в среднем в осях  $B\xi\eta\zeta$  робот движется параллельно плоскости, перпендикулярной вектору скорости и проходящей через центр шара. Тогда абсолютная угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_r$  робота и абсолютная ско-

рость  $\mathbf{v}_r$  его центра масс выразятся формулами:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_r &= -\frac{\dot{\phi}}{v}\mathbf{v} + \frac{R\omega_p}{\rho}\mathbf{e}_\zeta, \\ \mathbf{v}_r &= \dot{\phi}(h+R)\left(\frac{\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{v}}{v}\cos\phi - \mathbf{e}_\zeta\sin\phi\right) + \mathbf{v},\end{aligned}\tag{3.1.24}$$

где  $\omega_p$  – величина горизонтальной составляющей угловой скорости качения шара,  $\rho$  – радиус кривизны траектории центра шара. Обозначим  $A$  точку касания шара и опорной плоскости. Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента  $\mathbf{K}_A$  шара вместе с роботом, взятого относительно подвижной в общем случае точки  $A$  [22].

$$\frac{d\mathbf{K}_A}{dt} + \mathbf{v}_A \times \mathbf{Q} = \mathbf{r}_m \times m\mathbf{g},\tag{3.1.25}$$

где  $t$  – время,  $\mathbf{v}_A$  – скорость точки  $A$ ,  $\mathbf{Q}$  – количество движения системы,  $m$  – масса робота,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_\zeta$  – вектор ускорения силы тяжести. Выражение в правой части для момента силы тяжести робота относительно точки  $A$  справедливо из-за того, что радиус  $\mathbf{BA}$  в любой момент времени параллелен силе тяжести.

Будем считать, что распределение массы в шаре обладает центральной симметрией относительно точки  $B$ . Тогда кинетический момент  $\mathbf{K}_b$  шара относительно точки  $A$  выражается формулой

$$\mathbf{K}_b = J_b \boldsymbol{\omega},$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость качения шара,  $J_b$  – момент инерции шара относительно оси, проходящей через точку  $A$ . Для однородного шара  $J_b = 7MR^2/5$ . Будем считать, что в среднем положении ног относительно корпуса направление скорости центра шара соответствует главной оси инерции робота. При этом предположении кинетический момент  $\mathbf{K}_r$  робота относительно той же точки имеет вид [22]

$$\mathbf{K}_r = -\frac{J_r\dot{\phi}}{v}\mathbf{v} + \frac{J_\zeta R\omega_p}{\rho}\mathbf{e}_\zeta + m(R\mathbf{e}_\zeta + \mathbf{r}_m) \times \mathbf{v}_r,$$

где  $J_r$  – центральный момент инерции робота относительно оси, параллельной вектору скорости  $\mathbf{v}$ ,  $J_\zeta$  – центральный момент инерции робота относительно вертикали. Приняв во внимание выражения (3.1.23), (3.1.24), найдем

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_r &= mR^2 \left\{ [1 + (\bar{h} + 1)\cos\phi]\mathbf{e}_\zeta \times \frac{\mathbf{v}}{R} - \dot{\phi} [\bar{J}_r + (\bar{h} + 1)\cos\phi + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{h} + 1)^2] \frac{\mathbf{v}}{v} - \left[ \frac{v}{R}(\bar{h} + 1)\sin\phi - \frac{\bar{J}_\zeta R\omega_p}{\rho} \right] \mathbf{e}_\zeta \right\}.\end{aligned}$$

где

$$\bar{h} = \frac{h}{R}, \quad \bar{J}_r = \frac{J_r}{mR^2}, \quad \bar{J}_\zeta = \frac{J_\zeta}{mR^2}.$$

Пусть шар катится по плоскости без проскальзывания. Тогда скорость центра шара можно выразить формулой

$$\mathbf{v} = -R\mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega} = -R\mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p,$$

где  $\boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{e}_\zeta \omega_\zeta$ ,  $\omega_\zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Следовательно, кинетический момент всей системы относительно точки  $A$  принимает вид

$$\mathbf{K}_A = mR^2 \left\{ [\bar{J}_b + 1 + (\bar{h} + 1) \cos \phi] \boldsymbol{\omega}_p + \dot{\phi} [\bar{J}_r + (\bar{h} + 1) \cos \phi + (\bar{h} + 1)^2] \frac{\mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p}{\omega_p} + \left[ \bar{J}_b \omega_\zeta - \omega_p (\bar{h} + 1) \sin \phi + \frac{\bar{J}_\zeta R \omega_p}{\rho} \right] \mathbf{e}_\zeta \right\}.$$

Скорость центра масс робота равна  $\mathbf{v}_r$ , а центр масс шара проектируется в точку опоры:  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}$ . Поэтому имеем  $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_r + M\mathbf{v}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \times \mathbf{v}_A &= m\dot{\phi}(h + R) \left( \frac{\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{v}}{v} \cos \phi - \mathbf{e}_\zeta \sin \phi \right) \times \mathbf{v} = \\ &= -mR^2 \dot{\phi} (\bar{h} + 1) (\mathbf{e}_\zeta \omega_p \cos \phi + \boldsymbol{\omega}_p \sin \phi), \end{aligned}$$

уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $A$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( C_1 \boldsymbol{\omega}_p + C_2 \frac{\mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p}{\omega_p} + C_3 \mathbf{e}_\zeta \right) - \dot{\phi} (\bar{h} + 1) (\mathbf{e}_\zeta \omega_p \cos \phi + \\ + \boldsymbol{\omega}_p \sin \phi) = \frac{(\bar{h} + 1) g \sin \phi}{v} \mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \bar{J}_b + 1 + (\bar{h} + 1) \cos \phi, \\ C_2 &= \dot{\phi} [\bar{J}_r + (\bar{h} + 1) \cos \phi + (\bar{h} + 1)^2] = \dot{\phi} c_2, \\ C_3 &= \bar{J}_b \omega_\zeta - \omega_p (\bar{h} + 1) \sin \phi + \frac{\bar{J}_\zeta R \omega_p}{\rho}. \end{aligned}$$

Проекция уравнения (3.1.26) на ось  $\mathbf{e}_\zeta$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[ \bar{J}_b \omega_\zeta - \omega_p (\bar{h} + 1) \sin \phi + \frac{\bar{J}_\zeta R \omega_p}{\rho} \right] - \dot{\phi} (\bar{h} + 1) \omega_p \cos \phi = 0. \quad (3.1.27)$$

Предположив, что угловая скорость  $\dot{\phi}$  постоянна, проекцию уравнения (3.1.26) на горизонтальную плоскость представим в форме

$$C_1 \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} + \frac{C_2}{\omega_p} \mathbf{e}_\zeta \times \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = C_4 \boldsymbol{\omega}_p + C_5 \mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p, \quad (3.1.28)$$

где

$$\begin{aligned} C_4 &= 2\dot{\phi}(\bar{h}+1) \sin \phi, \\ C_5 &= \frac{(\bar{h}+1)(g + \dot{\phi}^2 R) \sin \phi}{v} + \frac{C_2 d\omega_p}{\omega_p^2 dt}. \end{aligned}$$

Умножив уравнение (3.1.28) векторно слева на  $\mathbf{e}_\zeta$ , получим систему

$$\begin{cases} C_1 \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} + \frac{C_2}{\omega_p} \mathbf{e}_\zeta \times \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = C_4 \boldsymbol{\omega}_p + C_5 \mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p, \\ C_1 \mathbf{e}_\zeta \times \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} - \frac{C_2}{\omega_p} \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = C_4 \mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p - C_5 \boldsymbol{\omega}_p. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \left( C_1^2 + \frac{C_2^2}{\omega_p^2} \right) \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} &= \left( C_1 C_4 - \frac{C_2 C_5}{\omega_p} \right) \boldsymbol{\omega}_p + \\ &+ \left( C_1 C_5 - \frac{C_2 C_4}{\omega_p} \right) \mathbf{e}_\zeta \times \boldsymbol{\omega}_p. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Умножив уравнение (3.1.29) скалярно на  $\boldsymbol{\omega}_p$ , найдем

$$\left( C_1^2 + \frac{C_2^2}{\omega_p^2} \right) \frac{d\omega_p}{dt} = \left( C_1 C_4 - \frac{C_2 C_5}{\omega_p} \right) \omega_p.$$

Полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$\left( C_1^2 + 2 \frac{C_2^2}{\omega_p^2} \right) \frac{d\omega_p}{dt} = (\bar{h} + 1) \dot{\phi} \sin \phi \left[ 2C_1 - \frac{c_2(g + \dot{\phi}^2 R)}{v\omega_p} \right] \omega_p.$$

Видно, что если  $\dot{\phi} = 0$ , то величина  $\omega_p$  остается постоянной, а если угловая скорость  $\dot{\phi}$  достаточно велика, то изменение  $\omega_p$  приближенно описывается уравнением

$$\frac{d\omega_p}{d\phi} = -\frac{(\bar{h} + 1) \sin \phi}{2c_2} \omega_p,$$

причем  $c_2 \neq 0$  при  $\forall \phi$ . Из этого уравнения следует, что при достаточно большой угловой скорости  $\dot{\phi}$  бокового смещения робота горизонтальная составляющая угловой скорости вращения шара несколько убывает:

$$\omega_p \approx \sqrt{\frac{\bar{J}_r + (\bar{h} + 1) \cos \phi + (\bar{h} + 1)^2}{\bar{J}_r + (\bar{h} + 1) + (\bar{h} + 1)^2}} \omega_p|_{\phi=0}. \quad (3.1.30)$$

Вместе с тем с точностью до членов второго порядка малости по  $\phi$  при небольших отклонениях робота от верхней точки шара скорость  $\omega_p$  и в этом случае можно считать практически сохраняющейся.

Умножим теперь обе части уравнения (3.1.29) скалярно на  $\mathbf{e}_\zeta \times \omega_p$ . После преобразований получим

$$\left(C_1^2 + \frac{C_2^2}{\omega_p^2}\right) \mathbf{e}_\zeta \cdot \left(\omega_p \times \frac{d\omega_p}{dt}\right) = \left(C_1 C_5 - \frac{C_2 C_4}{\omega_p}\right) \omega_p^2. \quad (3.1.31)$$

Пусть сначала  $\dot{\phi} = 0$ . Тогда  $\phi$  и  $\omega_p$  постоянны, а уравнение (3.1.31) принимает вид

$$\mathbf{e}_\zeta \cdot \left(\omega_p \times \frac{d\omega_p}{dt}\right) = \frac{C_5}{C_1} \omega_p^2 = \frac{(\bar{h}+1)g\omega_p \sin \phi}{R[\bar{J}_b + 1 + (\bar{h} + 1) \cos \phi]}. \quad (3.1.32)$$

Обозначим  $\chi$  угол между вектором скорости центра шара и какой-нибудь фиксированной горизонтальной осью. Уравнение (3.1.32) можно представить следующим образом:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{(\bar{h}+1)g \sin \phi}{R\omega_p[\bar{J}_b + 1 + (\bar{h} + 1) \cos \phi]}.$$

Радиус кривизны  $\rho$  траектории, описываемой центром шара, выражается тогда формулой

$$\rho = \frac{R^2 \omega_p^2 [\bar{J}_b + 1 + (\bar{h} + 1) \cos \phi]}{(\bar{h}+1)g \sin \phi}. \quad (3.1.33)$$

Минимальное значение величины радиуса  $\rho$  достигается при  $\phi = \pi/2$  и оказывается равным

$$\rho_m = \frac{R^2 \omega_p^2 (\bar{J}_b + 1)}{(\bar{h}+1)g}.$$

Знак  $\rho$  совпадает со знаком угла  $\phi$  и определяет направление вращения вектора скорости центра шара.

Уравнение (3.1.31) при условии, что в нем члены, содержащие  $\dot{\phi} \neq 0$ , существенно превосходят остальные члены, преобразуется к виду

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\omega_p (\bar{h} + 1) \sin \phi}{2c_2} (C_1 + 4c_2).$$

Радиус кривизны  $\rho_\phi$  траектории, описываемой центром шара в этом случае, дается формулой

$$\rho_\phi = \frac{2Rc_2}{(\bar{h} + 1)(C_1 + 4c_2) \sin \phi}.$$

В момент времени, когда  $\dot{\phi}$  скачком обнуляется, радиус кривизны также скачком переходит к значению  $R_p$ , выражаемому формулой (3.1.33).

Исследуем закрутку шара вокруг вертикальной оси при ненулевом значении  $\dot{\phi}$ . Уравнение (3.1.27) можно представить в виде

$$\frac{d}{d\phi} \left[ \bar{J}_b \omega_\zeta - 2\omega_p(\bar{h} + 1) \sin \phi + \frac{\bar{J}_\zeta R \omega_p}{\rho_\phi} \right] = \frac{(\bar{h} + 1)^2 \sin^2 \phi}{2c_2} \omega_p.$$

Поэтому для небольших значений угла  $\phi$  величину  $\omega_\zeta$  можно оценить по следующей приближенной формуле

$$\omega_\zeta \approx \frac{2(\bar{h} + 1)}{\bar{J}_b} \omega_p \sin \phi - \frac{\bar{J}_\zeta R \omega_p}{\rho_\phi \bar{J}_b}.$$

При необходимости соответствующая поправка к этой формуле может быть найдена с учетом выражения (3.1.30).

## 3.2. На шаре между уступами

### 3.2.1. Описание проблемы

Пусть в исходной позиции шестиногий робот находится на верхней площадке уступа с вертикальным краем, а шар радиуса  $2d$  расположен на горизонтальной нижней площадке и прислонен к вертикальной стенке уступа. Высота уступа немного меньше диаметра шара и составляет  $\approx 3.6d$ . Робот должен перебраться на шар в позицию, с которой он может начать разгон шара в направлении, перпендикулярном к краю уступа. Основная трудность задачи состоит в том, что под воздействием робота шар может откатиться от уступа (освобождающая связь) или он может начать качение вдоль уступа при недостаточной силе трения между шаром и вертикальной стенкой уступа. Если робот активно прижимает шар к уступу, то сила трения, возникающая в точке контакта шара с вертикальной стенкой уступа и ограниченная конусом трения, будет препятствовать качению шара вдоль вертикальной стенки уступа. Это обстоятельство робот может использовать для безопасного перелезания на вершину шара. Прижатие шара к уступу регулируется тем, что проекция центра масс робота на горизонтальную плоскость во время перехода с уступа на шар смещается нужным образом в сторону уступа от точки  $S$  касания шара с нижней площадкой. Для того

чтобы при переходе робота с уступа на шар давление ног на шар было, по возможности, симметричным относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и содержащей направление будущего движения шара, используется походка “галоп”. Ось  $O\eta$  направлена перпендикулярно вертикальной плоскости уступа. Начало  $O$  неподвижной системы координат расположено в основании уступа.

### 3.2.2. Переход с уступа на шар

На рис. 3.2.1 представлены графики зависимостей  $\eta$ -координат стоп ног и центра масс робота по времени при переходе робота с уступа на шар, прислоненный к уступу. В этом положении шара начало неподвижной системы координат совпадает с точкой касания шара и нижней опорной плоскости. Радиус шара равен  $2d = 0.8$  м. Следовательно, когда  $\eta$ -координаты стоп оказываются больше, чем  $-0.8$  м, стопы попадают на поверхность шара. Поскольку маневр осуществляется походкой “галоп”, показаны зависимости только для ног с нечетными номерами. Можно усмотреть, что в процессе перехода центр масс робота всегда проектируется внутрь опорного многоугольника и расположен между краем уступа и центром шара. В результате этого робот при переходе на шар прижимает шар к уступу и создает тем самым комфортные условия для выполнения маневра.

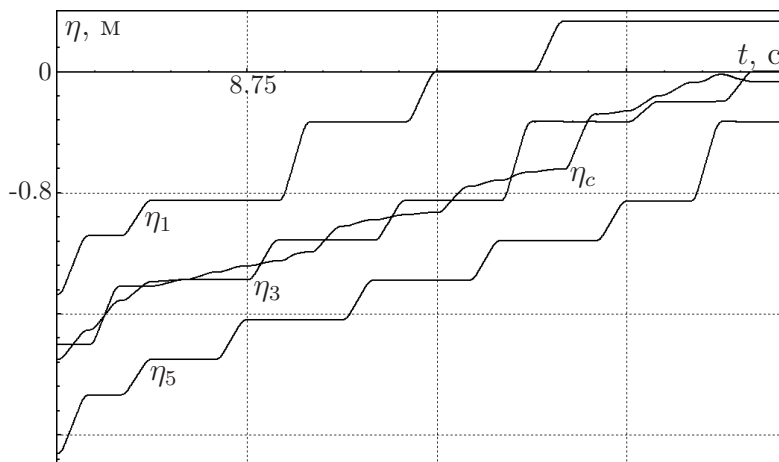


Рис. 3.2.1: Переход на шар

### 3.2.3. Переход с шара на уступ

На рис. 3.2.2 приведены графики, аналогичные представленным на рис. 3.2.1, для случая, когда робот переходит с шара на уступ. Дополнительно изображена зависимость  $\zeta_c$  — координаты центра

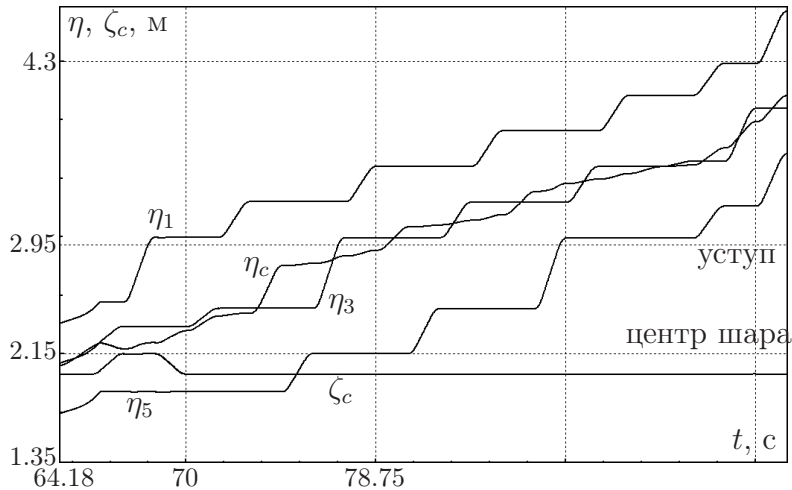


Рис. 3.2.2: Переход с шара на уступ

корпуса, показывающая, что в некоторый момент времени корпус приподнимается, чтобы избежать взаимного пересечения ног. Маневр перехода с шара на уступ может быть успешно выполнен как в случае небольшого недокатывания шара до уступа, так и в случае, когда шар еще имеет небольшую скорость при приближении к уступу. При значительном столкновении шара с уступом шар приобретает обратную скорость, а робот идет по шару в обратном направлении и может выполнить новую попытку приближения шара к уступу.

### 3.2.4. Компьютерная реализация движения

Взаимодействие шара с опорной поверхностью определено комплексом UM [40] и учитывает вязкоупругую составляющую модели кулоновского трения вместе с трением качения. Для нормальной реакции  $N_s$  в точке  $S$  касания шара с плоскостью используется линейная вязкоупругая модель

$$N'_s = \begin{cases} -c_n \zeta_s - d_n \dot{\zeta}_s, & \zeta_s < 0, \\ 0, & \zeta_s \geq 0, \end{cases} \quad N_s = \begin{cases} N'_s, & N'_s > 0, \\ 0, & N'_s \leq 0, \end{cases}$$

где  $\zeta_s$  — координата точки шара, соприкасающейся с плоскостью.



В модели касательной силы реализован только режим скольжения

$$\mathbf{F}_f = \begin{cases} -fN_s\mathbf{v}_s/|\mathbf{v}_s|, & |\mathbf{v}_s| > v_s^*, \\ -fN_s\mathbf{v}_s/v_s^*, & |\mathbf{v}_s| \leq v_s^*, \end{cases}$$

где  $\mathbf{v}_s$  — вектор скорости скольжения,  $v_s^*$  — ограничение на скорость скольжения.

Момент трения качения вычисляется по формулам

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -f_s m_b g \boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}|, & |\boldsymbol{\omega}| > 0, \\ 0, & |\boldsymbol{\omega}| = 0, \end{cases}$$

где  $f_s = 0.0004$  м — коэффициент трения качения,  $m_b$  — масса шара,  $\boldsymbol{\omega}$  — абсолютная угловая скорость шара.

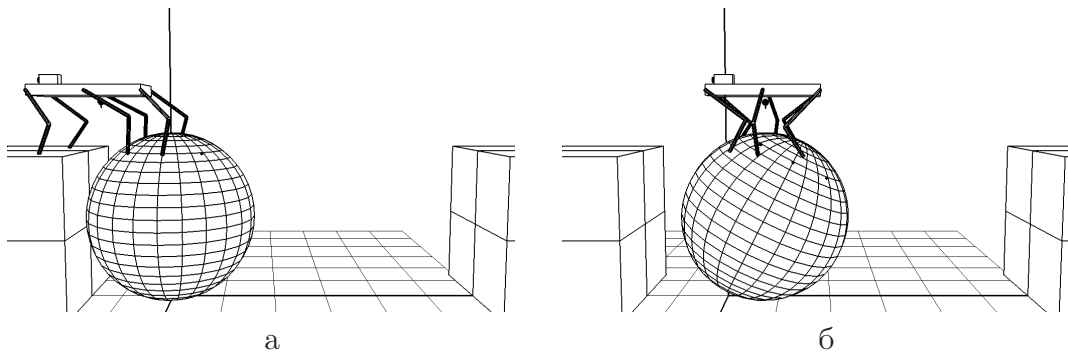


Рис. 3.2.3: Фрагменты движения по шару (начало)

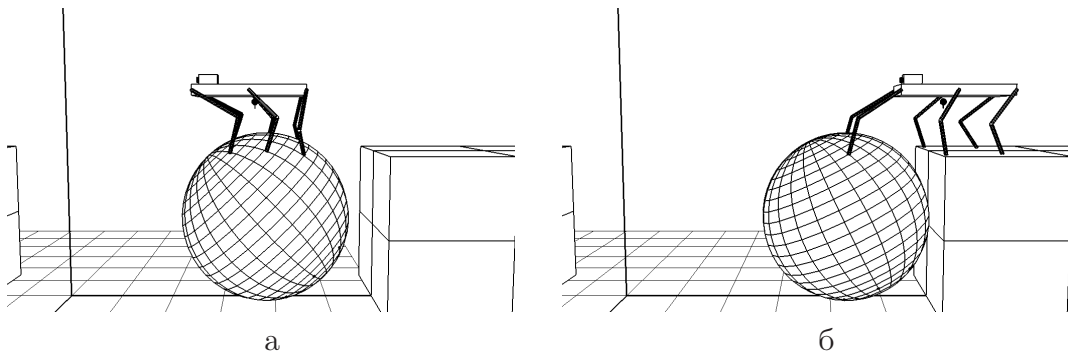


Рис. 3.2.4: Фрагменты движения по шару (окончание)

Представление о движении робота и других элементов виртуальной среды возникает в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной динамики робота вместе с включенными в систему окружающими предметами. Результаты моделирования отображаются на экране монитора в виде движения геометрических образов исследуемых материальных объектов. На рис. 3.2.3, 3.2.4 показаны фрагменты решения задачи перелезания

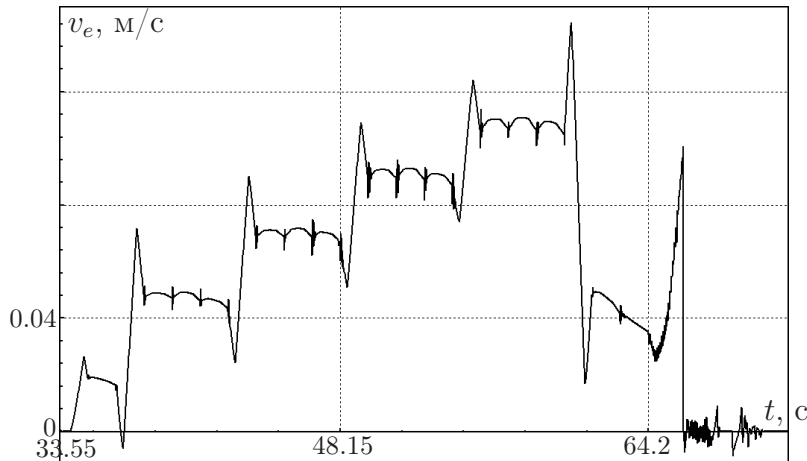


Рис. 3.2.5: Скорость шара при движении между уступами

робота на шар, дальнейшего разгона шара роботом, находящимся на шаре, торможения шара роботом и перелезания робота с шара на уступ. На рис. 3.2.5 изображен график изменения скорости при выполнении описанных выше маневров. Шар при движении испытывает трение качения и набирает скорость асимптотически, а робот на шаре движется устойчиво. Когда скорость становится достаточно большой, робот обратными маневрами корпуса тормозит шар до практической остановки перед встречным уступом. Окончательная остановка шара происходит из-за присущего шару трения качения. Как показали компьютерные эксперименты, любое даже очень малое движение робота на шаре сказывается в пропорциональной мере на положении и на движении шара. Система стабилизации постоянно работает даже в состоянии кажущегося покоя шара. Реально происходит устойчивое движение робота и шара в малой окрестности как положения покоя, так и требуемого движения.

На рис. 3.2.6 представлен видеоролик, иллюстрирующий подробности маневрирования робота на шаре между двумя уступами. Видно, что происходит устойчивое движение при переходе робота с уступа на прислоненный к уступу шар, а также обратного перехода робота с шара на другой уступ после прямолинейного перемещения к нему робота вместе с шаром от исходного уступа. Выполнение этих маневров затруднено опасностью взаимного пересечения ног из-за узости опорной площадки на поверхности шара, возможностью откатывания шара от уступов и движения шара вдоль вертикальных стенок уступов. Предложенные выше методы стабилизации поло-

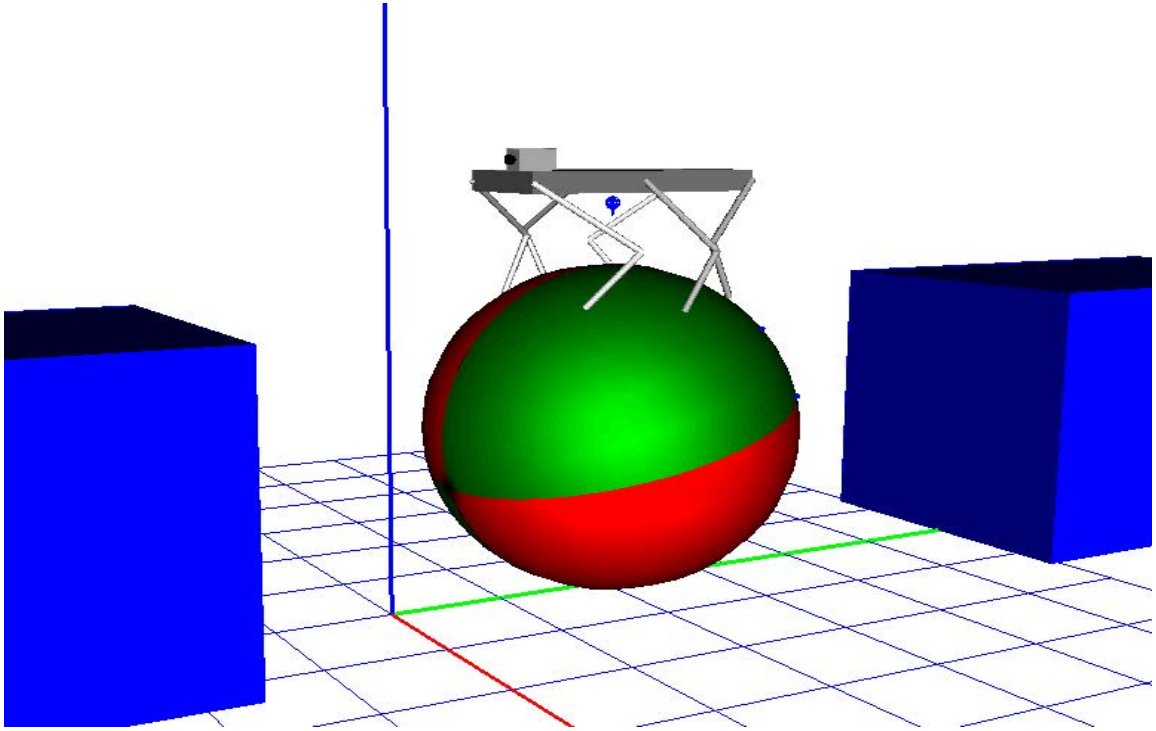


Рис. 3.2.6: Ролик доступен отдельно по адресу [http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa\\_ball13.mp4](http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa_ball13.mp4)

жения и перемещения робота на шаре обеспечивают активную стабилизацию движения системы в целом при коэффициенте трения, не превышающем 1. Это значение коэффициента трения задается в экспериментах как предельное для трения покоя стопы об опорную поверхность и для качения шара по горизонтальной плоскости.

### 3.3. Залезание на шар

#### 3.3.1. Исходная позиция для залезания на шар

Формулы (3.1.15) показывают, что для возможности залезания на шар робот должен толкнуть шар в том же направлении, в котором он приближается к шару, и придать шару достаточно большую начальную скорость. В начале толчка корпус робота должен быть ориентирован по касательной к шару. Будем считать, что передняя часть корпуса должна оказаться выше задней. Тогда из соображений дотягивания ног до опорной плоскости очевидно, что в толчке должны участвовать задние ноги. После отделения всех стоп от опорной плоскости передние и средние ноги должны надежно обхватывать шар, чтобы робот мог перемещать корпус относительно

шара без проскальзывания стоп по поверхности шара. Поскольку на перенос ног требуется конечное время, заключаем, что к началу толчка передние и средние ноги должны уже находиться на шаре и толчок должен осуществляться лишь задними ногами. Во избежание возникновения вращения шара вокруг вертикальной оси будем для залезания использовать походку галоп, располагая точки опоры симметрично относительно плоскости  $B\eta\zeta$ .

Пусть робот приблизился к шару и стоит рядом с ним в симметричной позе, соответствующей походке галоп. Корпус горизонтален, а его передний край находится на расстоянии  $\sigma$  от шара, соответствующем началу маневра залезания на шар. Средние и задние ноги перенесены вперед, так что центр масс робота проектируется в опорный многоугольник, образованный средними и задними стопами. Робот имеет возможность перенести на шар стопы передних ног.

Основная цель подготовительного этапа состоит в том, чтобы расположить корпус по касательной к шару в вертикальной плоскости. При этом для уверенной опоры стопы передних ног должны оказаться вблизи верхней точки шара. Для надежности обхвата шара после начального толчка стопы средних ног необходимо расположить на шаре на достаточном расстоянии от точек опоры передних ног (см. раздел 2.1). Чтобы придать корпусу требуемую скорость вместе с шаром, точки опоры задних ног целесообразно разместить на опорной плоскости на продолжении продольной оси корпуса. Возможность выполнения подготовительного этапа обеспечивается следующим кинематическим свойством системы робот—шар.

Предположим, что робот поставил стопы передних ног в область  $D$  на шаре (см. раздел 3.1.5), а шар способен лишь перекатываться по опорной плоскости без проскальзывания. Покажем, что если робот перемещается, сохраняя точки контакта между передними стопами и шаром, а также расстояние между передними стопами на шаре и неподвижными точками опоры других ног, находящихся на опорной плоскости, то шар должен оставаться в покое. Действительно, при виртуальном перекатывании шара движение опирающихся о него стоп будет перпендикулярным отрезку, соединяющему расположенные на нем стопы с точкой  $A$ . Указанный отрезок и отрезок, проходящий через стопы передних ног и точки опоры на плоскости, не параллельны. Следовательно, проекция перемещения стоп передних ног на отрезок, соединяющий стопы передних ног со стопами, опирающимися на плоскость, будет ненулевой, что противостоит

речит условию сохранения расстояний между опорными стопами. Отмеченное свойство позволяет точки опоры передних ног на шаре использовать с целью переноса других ног.

Примем, что в начале подготовительного этапа корпус робота ориентирован горизонтально. Выполнение поворота корпуса в положение, при котором его продольная ось ориентирована по требуемой касательной к шару, должно происходить с таким расчетом, чтобы средние ноги смогли дотянуться до опорной плоскости. С целью осуществления поворота корпуса потребуем, в отличие от раздела 2.3, чтобы передний край корпуса робота двигался с постоянной скоростью по вертикальной окружности радиуса  $R' = R + \sigma$  с центром в центре шара, а средняя точка корпуса выполняла вынужденное движение по прямой, составляющей с осью  $O\eta$  угол  $-\varepsilon$ . Движение передней точки корпуса зададим параметрически

$$\eta_f(s) = R' \cos s, \quad \zeta_f(s) = R' \sin s + R, \quad s \geq s_0, \quad R' \sin s_0 = h_k - R,$$

где  $h_k$  есть высота корпуса над опорной плоскостью перед началом выполнения маневра поворота корпуса. Найдем зависимости от параметра  $s$  координат  $\eta_m(s)$ ,  $\zeta_m(s)$  средней точки корпуса и координат  $\eta_r(s)$ ,  $\zeta_r(s)$  его задней точки. При  $s = s_0$  имеем

$$\begin{aligned} \eta_m(s_0) &= R' \cos s_0 + a_r/2, \\ \eta_r(s_0) &= R' \cos s_0 + a_r, \\ \zeta_m(s_0) &= \zeta_r(s_0) = R' \sin s_0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta\eta_f &= \eta_f(s) - \eta_f(s_0), \quad \Delta\eta_m = \eta_m(s) - \eta_m(s_0), \quad \Delta\eta_r = \eta_r(s) - \eta_r(s_0), \\ \Delta\zeta_f &= \zeta_f(s) - \zeta_f(s_0), \quad \Delta\zeta_m = \zeta_m(s) - \zeta_m(s_0), \quad \Delta\zeta_r = \zeta_r(s) - \zeta_r(s_0). \end{aligned}$$

Движение средней точки корпуса по прямой определено соотношениями

$$\frac{\Delta\zeta_m}{\Delta\eta_m} = -\operatorname{tg} \varepsilon, \quad \Delta\eta_m = \Delta\eta_f + \sqrt{a^2/4 - (\Delta\zeta_f - \Delta\zeta_m)^2} - a/2. \quad (3.3.1)$$

Из них для  $\Delta\zeta_m$  получаем уравнение

$$-\Delta\eta_f + a/2 - \sqrt{a^2/4 - (\Delta\zeta_f - \Delta\zeta_m)^2} = \Delta\zeta_m \operatorname{ctg} \varepsilon,$$

решение которого

$$\Delta\zeta_m = \frac{\Delta\zeta_m' - \sqrt{(\Delta\zeta_m')^2 - (\Delta\eta_f^2 - a_r\Delta\eta_f + \Delta\zeta_f^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)}}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \operatorname{tg} \varepsilon, \quad (3.3.2)$$

где  $\Delta\zeta'_m = a/2 - \Delta\eta_f + \Delta\zeta_f \operatorname{tg} \varepsilon$  вместе с (3.3.1) дает искомую зависимость. Координаты задней точки корпуса заданы равенствами

$$\Delta\eta_r = 2\Delta\eta_m - \Delta\eta_f, \quad \Delta\zeta_r = 2\Delta\zeta_m - \Delta\zeta_f.$$

Очевидно, что условие дотягивания средних ног до опорной плоскости ограничивает значения параметра  $\varepsilon$ :  $\operatorname{tg} \varepsilon < 2(l_1 + l_2 - h_k)/a_r$ . Задняя точка корпуса не должна опускаться ниже опорной плоскости. Поэтому возникает ограничение

$$2\Delta\zeta_m - \Delta\zeta_f > -h_k. \quad (3.3.3)$$

Подходящая величина  $\varepsilon$  позволяет расширить диапазон значений параметра  $s$ , при которых неравенство (3.3.3) выполняется. Из формулы (3.3.2) следует, что указанное расширение диапазона для  $s$  возникает при  $\varepsilon > 0$ . Таким образом, значение  $\varepsilon$  должно принадлежать интервалу

$$0 < \operatorname{tg} \varepsilon < \frac{2(l_1 + l_2 - h_k)}{a_r}$$

с тем расчетом, чтобы можно было осуществить поворот корпуса, не нарушая неравенство (3.3.3). Вместе с тем интуитивно ясно, что чем выше удалось поднять корпус робота на подготовительном этапе, тем легче ему будет взобраться на вершину шара впоследствии. Поэтому значение  $\varepsilon$  следует выбирать максимально допустимым с учетом сохранения достаточного запаса статической устойчивости при опоре на средние и задние ноги.

Поворот корпуса робота следует продолжать до тех пор, пока расстояние между шаром и корпусом не станет равным заданной величине  $\sigma' \leq \sigma$ . При выполнении этого условия уже можно начать движение корпуса по касательной к шару. Для реализации поворота необходимо задать функцию  $s(t)$ . Тогда радиус-векторы

$$\mathbf{r}_f(s) = (\eta_f(s), \zeta_f(s)), \quad \mathbf{r}_{mb}(s) = (\eta_{mb}(s), \zeta_{mb}(s))$$

соответственно передней точки корпуса и средней его точки будут функциями времени. Условие окончания вращения корпуса можно выразить формулой

$$\frac{|\mathbf{r}_f(s) \times [\mathbf{r}_{mb}(s) - \mathbf{r}_f(s)]|}{|\mathbf{r}_{mb}(s) - \mathbf{r}_f(s)|} = R + \sigma'. \quad (3.3.4)$$

Опишем последовательность этапов подготовки начального толчка с целью придания шару необходимой скорости. На каждом этапе

учитывается условие статической устойчивости в смысле принадлежности опорному многоугольнику проекции центра масс робота на опорную плоскость. Опорный многоугольник в данном случае получается как выпуклая оболочка проекций всех точек опоры на опорную плоскость.

На рис. 3.3.1, а показана исходная позиция робота перед началом подготовительного этапа. Центр масс робота проектируется в

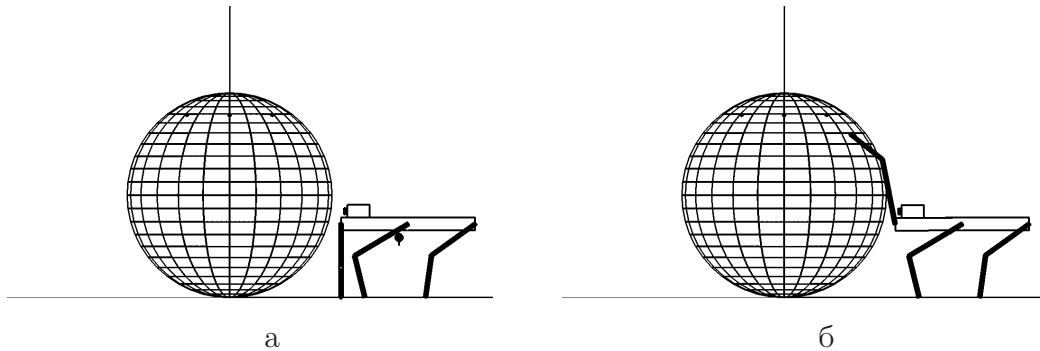


Рис. 3.3.1: Подход к шару

опорный многоугольник средних и задних ног. Робот приготовился к постановке передних ног на шар. На рис. 3.3.1, б изображена позиция робота после постановки передних ног на шар. Корпус робота в этот момент времени еще горизонтален. Передние ноги поставлены вблизи границы области, соответствующей коэффициенту трения  $k_f = 0.5$ . Из этой позиции робот начинает поворот корпуса. В процессе поворота все точки опоры сохраняются. На рис. 3.3.2, а показана позиция робота после поворота корпуса. Центр масс робота

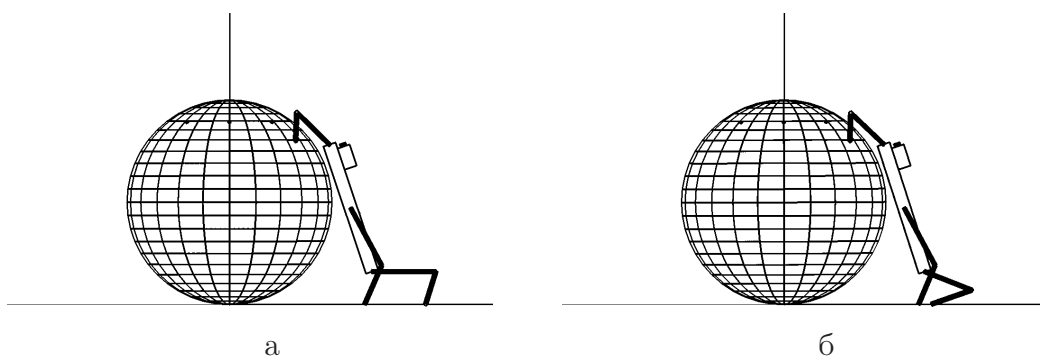


Рис. 3.3.2: Поворот корпуса

проектируется в опорный многоугольник, образованный передними и средними ногами, что дает возможность начать перенос задних ног в позицию, удобную для выполнения толчка шара. На рис. 3.3.2, б перенос задних ног завершен, и теперь можно осуществить последо-

вательность переносов, обеспечивающих достаточный контакт робота с шаром после толчка. Перемещаются средние ноги в позицию,

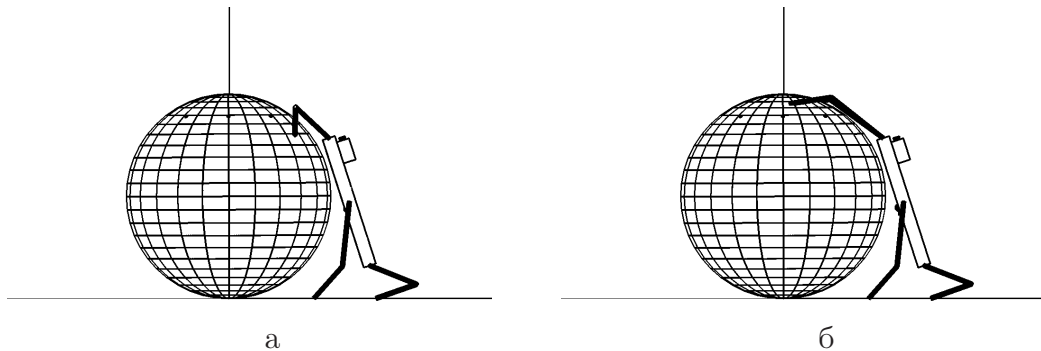


Рис. 3.3.3: Перестановка передних ног

указанную на рис. 3.3.3, а, чтобы обеспечить статическую устойчивость при переносе передних ног. Передние ноги ставятся практически на верхнюю часть шара (рис. 3.3.3, б). Подготовительный этап заканчивается переносом средних ног на шар (рис. 3.3.4, а). Расстояние между точками опоры передних и задних ног на шаре выбирается достаточным, чтобы в них при отталкивании не возникало проскальзывание относительно шара.

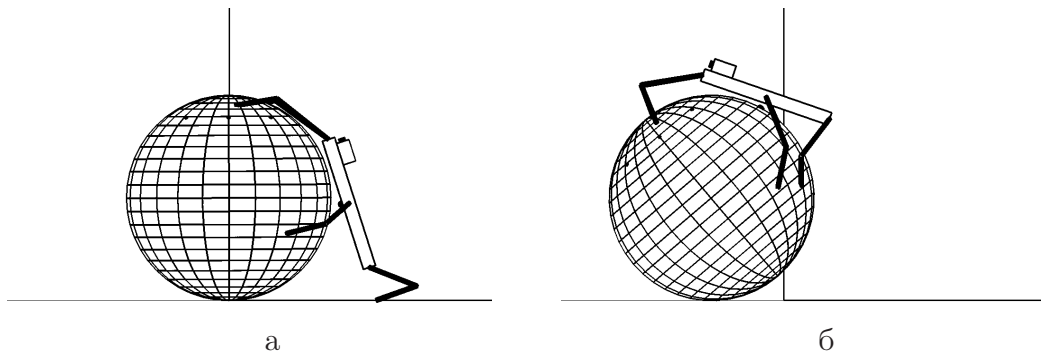


Рис. 3.3.4: Отталкивание

### 3.3.2. Переход на вершину шара

Начальный этап залезания робота на шар состоит в том, чтобы разогнать шар до требуемой скорости  $v_*$  его центра. Разгон шара реализуется при отсутствии проскальзывания в его точке контакта с опорной поверхностью. Скорость  $v_*$  должна быть получена за время  $T^*$  опорной фазы задних ног из положения, приведенного на рис. 3.3.4, а в момент времени  $t_s$ . Программное движение шара формируется в предположении постоянства ускорения его центра масс.



Пусть в момент времени  $t_s$  центр шара имеет скорость  $v_B = 0$ . На рис. 3.3.4, а неподвижная система координат  $O\xi\eta\zeta$  соответствует положению шара в момент  $t_s$ . При положительной угловой скорости шара движение его центра будет происходить в отрицательном направлении оси  $O\eta$ . Программный закон движения шара во время отталкивания задними ногами от горизонтальной опорной плоскости выражается координатами  $\xi_b(t)$ ,  $\eta_b(t)$ ,  $\zeta_b(t)$  и углом поворота  $\psi(t)$  шара вокруг оси  $B\xi$

$$\xi_b(t) = 0, \quad \eta_b(t) = -\frac{v_*(t - t_s)^2}{2T^*}, \quad \zeta_b(t) = 0, \quad \psi(t) = \frac{v_*(t - t_s)^2}{2RT^*}, \quad (3.3.5)$$

так что каждая точка шара, имеющая в момент времени  $t_s$  координаты  $\xi(t_s)$ ,  $\eta(t_s)$ ,  $\zeta(t_s)$ , будет описывать обобщенную циклоиду, параллельную плоскости  $O\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi(t_s), \\ \eta(t) &= \eta_b(t) + \eta(t_s) \cos \psi(t) - \zeta(t_s) \sin \psi(t), \\ \zeta(t) &= \eta(t_s) \sin \psi(t) + \zeta(t_s) \cos \psi(t). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Формулы (3.3.5) и (3.3.6) дают возможность рассчитать программные положения стоп опирающихся о шар передних и средних ног в любой момент времени при разгоне шара.

Для расчета шарнирных углов требуется еще задать программный закон движения корпуса робота. Потребуем, чтобы во время толчка корпус робота двигался параллельно своему положению, достигнутому к моменту  $t_s$  (рис. 3.3.4, а), а расстояние от осевой линии корпуса до шара при этом не менялось. В соответствии с разд. 3.1.3 за время  $T^*$  корпус робота должен продвинуться относительно шара на вектор  $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_c(t_s)$  так, чтобы ближайшая к шару точка осевой линии корпуса совпала с серединой корпуса. Этот замысел реализуется формулой

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \left\{ \frac{\mathbf{r}_f + \mathbf{r}_{mb}}{2} + \frac{(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_{mb})[\mathbf{r}_f \cdot (\mathbf{r}_{mb} - \mathbf{r}_f)]}{(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_{mb})^2} \right\} \lambda(t) + \eta_b(t)\mathbf{e}_\eta,$$

где  $\lambda(t_s) = 0$ ,  $\lambda(t_s + T^*) = 1$ . Полностью поступательное движение корпуса при толчке определено тем, что величина  $\Delta\mathbf{r}(t)$  добавляется к радиус-вектору любой точки корпуса, полученному к моменту  $t_s$ .

После отталкивания шар и робот движутся совместно, а задние ноги выполняют перенос своих стоп на шар. В процессе переноса задних ног корпус перемещается относительно поверхности шара

вверх с опережением (см. разд. 3.1.3), используя передние и средние ноги. Движение шара замедляется. После переноса стоп задних ног на шар робот оказывается в позиции, показанной на рис. 3.3.4, б. Затем осуществляются переносы стоп средних и задних ног таким образом, чтобы стопы средних ног оказались в точках на шаре, соответствующих окончанию залезания. Эта позиция робота и шара представлена на рис. 3.3.5, а. Точки опоры ног на шаре расставля-

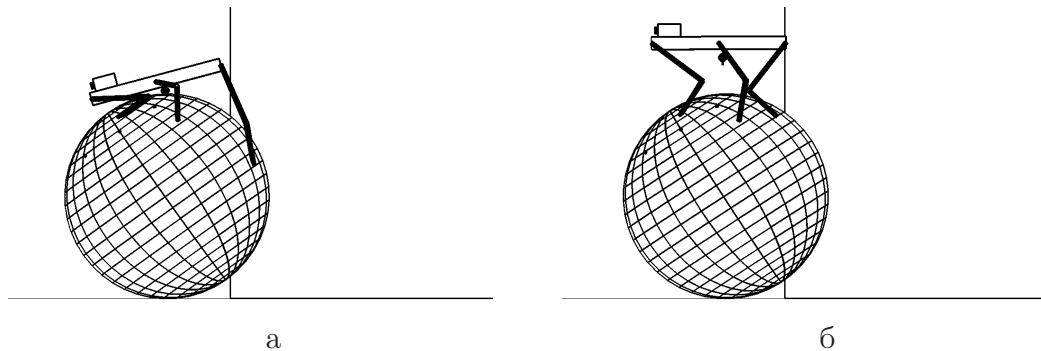


Рис. 3.3.5: Залезание на шар

ются с тем расчетом, чтобы не было взаимных пересечений ног при переносах. Движение корпуса относительно шара вблизи его поверхности продолжается до тех пор, когда центр масс робота окажется внутри опорного многоугольника передних и средних ног с достаточным запасом. К этому моменту скорость шара практически исчезает. Затем передние и средние ноги распрямляются, поднимая корпус над шаром и уменьшая возможность взаимного пересечения ног. Одновременно происходит перенос задних ног в их финальное положение относительно шара (рис. 3.3.5, б). После этого робот представляет средние ноги в симметричную позу (рис. 3.3.6) и применяет походку “трешки”, окончательно останавливая шар с использованием алгоритма стабилизации, изложенного в разделе 3.1.1.

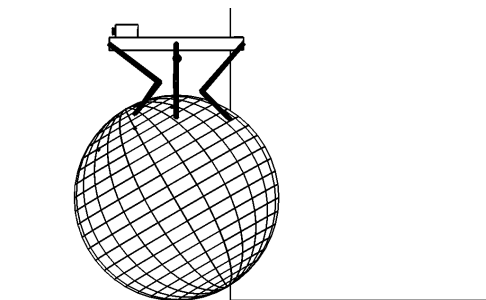


Рис. 3.3.6: Финальная позиция

### 3.3.3. Боковое движение

После того как робот залез на шар, ему может быть поставлена задача достичь, оставаясь на шаре, того или иного места на опорной плоскости. Если туда можно попасть, заставляя центр шара двигаться точно вдоль оси  $O\eta$ , то с этой целью можно применить алгоритм, изложенный в разделе 3.1.2, так как роботу в этом случае достаточно будет совершать разгонные движения корпусом в направлении его продольной оси. Вместе с тем целевая точка может располагаться где угодно на плоскости, а также может быть отделена от места, где находятся шар и робот, каким-либо препятствием. По причинам, изложенным в разделе 3.1.6, при решении такой задачи желательно применять прямолинейное движение шара. Тогда робот может, например, повернуться на шаре в направлении целевой точки или в направлении требуемого обхода препятствия, оставаясь на вершине шара. При этом, однако, по теореме об изменении кинетического момента [22], примененной к рассматриваемой системе, шар приобретет вертикальную компоненту угловой скорости, которая будет мешать движению в требуемом направлении. Возникает проблема прицеливания, решение которой будет затруднено отсутствием надежной информации о свойствах взаимодействия шара и опорной плоскости.

Другой метод, свободный от указанной трудности и способный обеспечить попадание в требуемое место на плоскости, может быть построен на основе реализации движения робота вместе с шаром по координатной сетке без вращения корпуса вокруг вертикальной оси. Для этого привлекается возможность движения робота в боковом направлении относительно продольной оси корпуса. Наиболее эффективной в данном случае оказывается походка “трешки”, когда стопы соответствующих ног перемещаются поперек корпуса.

Разгон и торможение шара в боковом направлении реализуются аналогично описанным в разделе 3.1.2 способам разгона и торможения шара в направлении продольной оси корпуса  $e$ . Разница лишь в том, что при смещении корпуса в боковом направлении стопы ног соответствующей стороны могут оказаться под корпусом, что влечет вырождение формул, описывающих кинематику ног. Из-за этого величину бокового смещения корпуса приходится ограничивать, компенсируя это увеличением времени выполнения маневра.

Единичный этап разгона шара на отрезке  $[t_0, t_f]$  в боковом на-

правлении происходит в соответствии с формулой

$$\delta \mathbf{r}_b^{(1)} = k_l [v_d^l - v_b^l(t_0)] \mu(\tau) \mathbf{e} \times \mathbf{e}_z,$$

где  $k_l$  — размерный коэффициент,  $v_d^l$  — требуемая скорость бокового движения шара,  $v_b^l$  — реализовавшаяся скорость бокового движения шара, функция  $\mu(\tau)$  выражается зависимостью

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \frac{\bar{u}\tau^2}{2}, & 0 \leq \tau < \tau_1, \\ \bar{u} \left[ \frac{\tau_1^2}{2} - \frac{(\tau - \tau_1)^2}{2} + \tau_1(\tau - \tau_1) \right], & \tau_1 \leq \tau < \frac{T}{2} - d, \\ 2, & \frac{T}{2} - d \leq \tau < \frac{T}{2} + d, \\ 2 - \frac{\bar{u}}{2} \left( \tau - \frac{T}{2} - d \right)^2, & \frac{T}{2} + d \leq \tau < \tau_2, \\ 2 - \frac{\bar{u}}{2} \left( \tau - \frac{T}{2} - d \right)^2 + \bar{u}(\tau - \tau_2)^2, & \tau_2 \leq \tau \leq T, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

где

$$\tau_1 = \frac{T}{4} - \frac{d}{2}, \quad \tau_2 = \frac{3T}{4} + \frac{d}{2}, \quad \bar{u} = \frac{32}{(T - 2d)^2}, \quad d = \frac{T}{4}.$$

График функции  $\mu(\tau)$  изображен на рис. 3.3.7. Участок с постоянным значением  $\mu = 2$  предназначен для повышения эффективности бокового разгона или торможения шара.

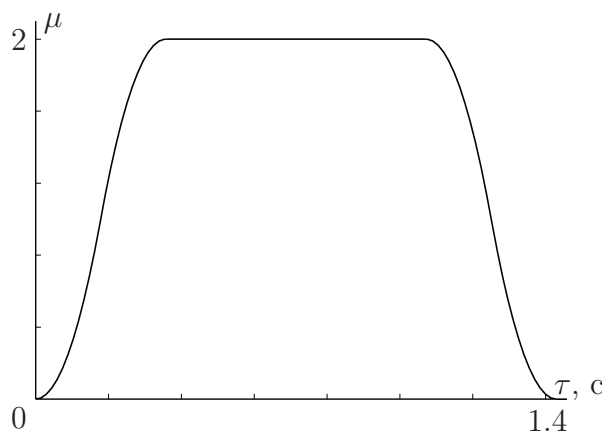


Рис. 3.3.7: Функция  $\mu(\tau)$

### 3.3.4. Компьютерное моделирование

Соотношение размеров корпуса и шара имеет вид

$$a_r : R = 1 : 0.8. \quad (3.3.8)$$

Представление о движении робота и других элементов виртуальной среды возникает в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной динамики робота вместе с включенными в систему окружающими предметами. Соответствующая механическая система имеет 30 степеней свободы. Результаты компьютерного моделирования отображаются на экране монитора в виде движения геометрических образов исследуемых материальных объектов.

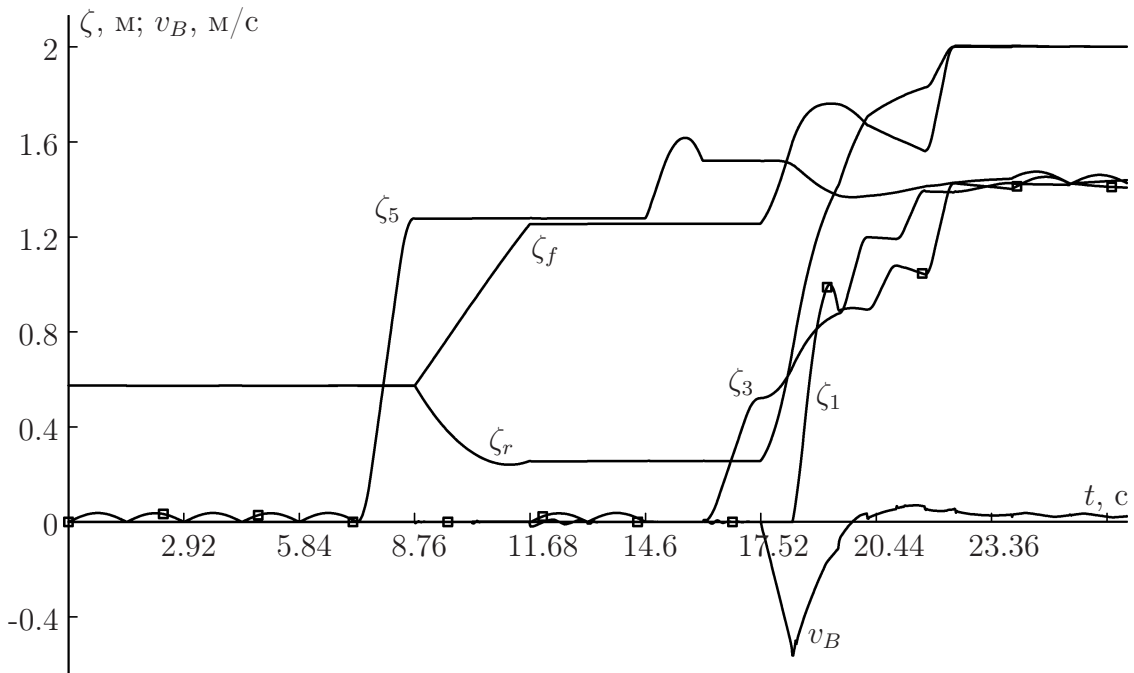


Рис. 3.3.8: Процесс залезания на шар с плоскости:  $\zeta_1$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_5$ ,  $\zeta_f$ ,  $\zeta_r$  — вертикальные координаты стоп, передней и задней точек корпуса соответственно,  $v_B$  — горизонтальная скорость шара

На рис. 3.3.8 представлены графики изменения по времени вертикальных координат 1, 3 и 5-й стоп (метры по вертикальной оси), скорости центра шара при залезании робота на шар (метры в секунду по вертикальной оси) и графики изменения вертикальных координат передней и задней точек корпуса (метры по вертикальной оси). Шар при движении испытывает трение качения. Для походки

галопа стопы 2, 4 и 6-й ног движутся симметрично стопам нечетных ног. Видно, что сначала на шар ставятся передние ноги (5-я и 6-я). После постановки на шар передних ног происходит поворот корпуса: передняя точка корпуса поднимается, а задняя — опускается. Затем переносятся задние и средние ноги для создания устойчивого опорного многоугольника, обеспечивающего возможность переноса передних ног поближе к верхней точке шара. После второго переноса передних ног осуществляется перенос на шар средних ног. Этим заканчивается подготовительный этап залезания на шар. Во время подготовительного этапа скорость шара практически отсутствует. Она начинает резко линейно расти при распрямлении задних (1-й и 2-й) ног и достигает максимума при отделении задних ног от опорной плоскости. Впоследствии скорость шара уменьшается, передняя и задняя точки корпуса выравниваются по высоте. Также практически выравниваются по высоте стопы всех ног, а робот оказывается на вершине шара. Далее включается система стабилизации робота на шаре, описанная в разделе 3.1.1.

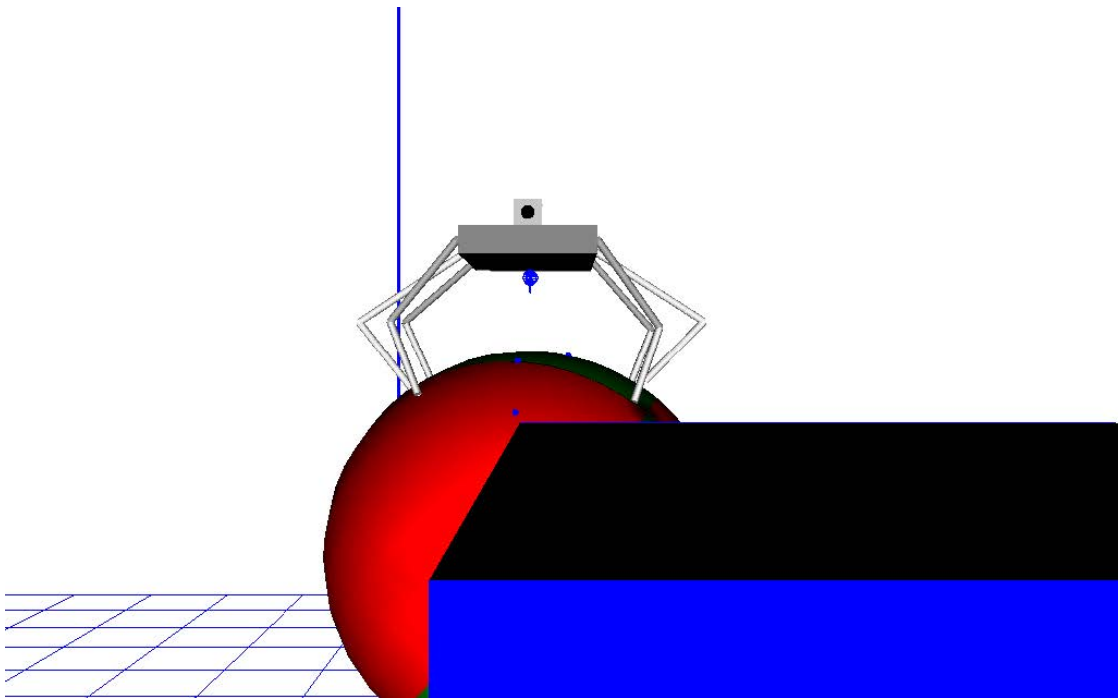


Рис. 3.3.9: Ролик доступен отдельно по адресу <http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa-ball-4.mp4>

Наглядное представление о процессе залезания робота на шар можно получить, просмотрев видеоролик на рис. 3.3.9. Видно, что формируется устойчивое движение робота с целью залезания на шар, перемещения робота вместе с шаром в любую точку опорной

плоскости. Выполнение этих маневров затруднено опасностью взаимного пересечения ног из-за узости опорной площадки на поверхности шара. Эта трудность успешно преодолевается. Предложенное программное движение, обеспечивающее активную стабилизацию движения системы в целом, вполне реализуемо при коэффициенте трения, не превышающем 1.

## 3.4. Перелезание через незакрепленный шар

### 3.4.1. Сценарий решаемой задачи

Задача состоит в следующем. Пусть шар свободно лежит на горизонтальной плоскости, и в точке опоры шара с плоскостью отсутствует проскальзывание. Другими словами, шар может только катиться по плоскости без проскальзывания. Робот должен подойти к шару, взобраться на его вершину, а затем слезть с шара в том же направлении движения, в котором он залезал на шар. Преодоление препятствия в виде шара состоит из трех этапов. На первом этапе робот должен залезть на шар, и процедура залезания может быть произвольной, например, такой, как описано в разделе 3.3.1. В процессе залезания шар приходит в движение, а когда робот оказался на вершине шара, это движение требуется успокоить, чтобы по возможности приблизить задачу слезания с шара к задаче слезания с нулевыми начальными условиями. Это делается для того, чтобы процедура слезания с шара выполнялась более надежно без излишних возмущений, так как система крайне неустойчива из-за наличия всего одной точки опоры шара о плоскость. Следовательно, второй этап состоит в уменьшении роботом, находящимся на вершине шара, угловой скорости шара до приемлемого значения. На третьем этапе робот слезает с шара. Надо отметить, что ненулевые компоненты угловой скорости после залезания на вершину возникают не только в продольной плоскости движения, но и перпендикулярно этой плоскости, что мешает попаданию робота на продолжение прежней следовой колеи на исходной горизонтальной опорной поверхности.

### 3.4.2. Слезание с шара

В этом разделе рассмотрим отдельно логику слезания с шара, когда шар и робот первоначально находятся в состоянии покоя и

робот стоит на шаре в симметричной позиции (рис. 3.4.1, а), а точки опоры ног образуют горизонтальную опорную площадку. Задние ноги смещены несколько вперед из соображений дотягивания при соответствующем движении корпуса. Расстояние верхней горизонтальной опорной площадки от центра шара составляет  $\approx 0.79R$ . Это достаточно комфортное расстояние для заданных линейных размеров системы, позволяющее избежать трудностей, связанных с взаимным пересечением ног либо касанием шара внутренней частью звеньев ног и корпуса при дальнейшем движении. Слезание робота будет происходить в отрицательном направлении оси  $O\eta$ . Процесс слезания с шара состоит из следующих этапов.

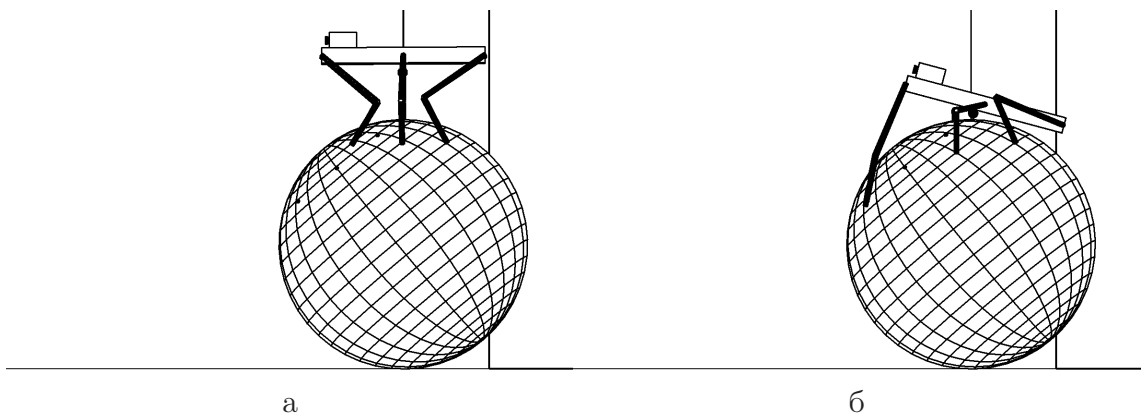


Рис. 3.4.1: Слезание с шара, п. 3.4.1

3.4.1. При спуске с шара предстоит перенос передних ног. Для того чтобы обеспечить статическую устойчивость, средние ноги переносятся немного вперед, а корпус сдвигается немного назад и приближается к шару с поворотом относительно шара таким образом, чтобы продольная ось корпуса в его новом положении была ориентирована по касательной к шару (рис. 3.4.1, б). Одновременно передние ноги переносятся в новые точки постановки, практически полностью распрямляясь. Шар слегка перекачивается в сторону, противоположную направлению слезания, из-за небольшого смещения центра масс робота от вертикали в положительном направлении оси  $O\eta$ . В дальнейшем при движении робота относительно центра шара корпус будет отслеживать местную касательную к шару.

3.4.2. Осуществляются поворот корпуса относительно центра шара при опоре о шар передними и задними ногами и перенос средних ног вперед по направлению движения робота. Из-за соответствующего смещения центра масс робота шар начинает перекачиваться в направлении слезания. Совместное движение корпуса и средних ног



синхронизированы так, чтобы по окончании этапа центр масс робота проектировался внутрь нового опорного многоугольника, образованного средними (в новых точках постановки) и задними ногами, так как предстоит следующий перенос передних ног (рис. 3.4.2, а).

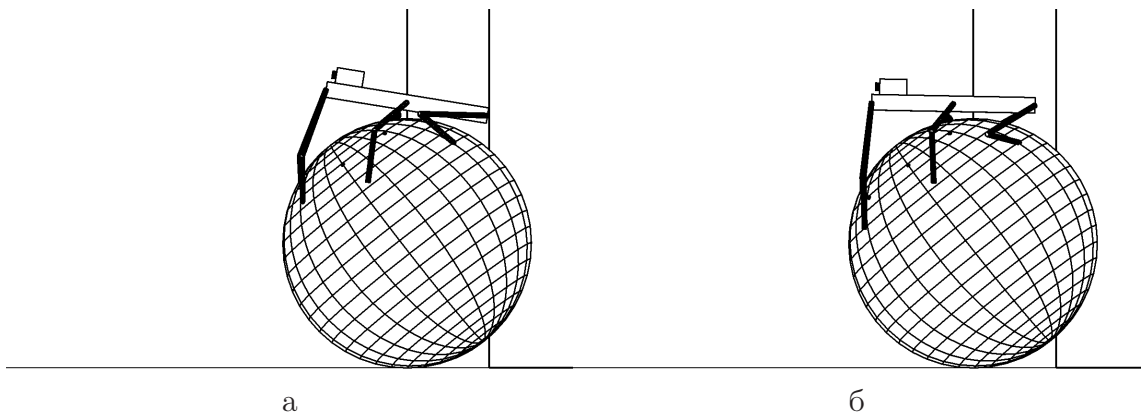


Рис. 3.4.2: Слезание с шара, п.п. 3.4.2, 3.4.3

3.4.3. Корпус продолжает поворачиваться вместе с одновременным переносом передних ног для того, чтобы избежать взаимного пересечения их со средними ногами при дальнейшем движении корпуса. Шар при этом ускоряет свое движение в направлении слезания робота. Робот вращается вместе с шаром (рис. 3.4.2, б).

3.4.4. Из-за предстоящего переноса передних ног на опорную плоскость переносятся средние точки опоры на шар по направлению движения робота. Это делается для того, чтобы обеспечить достаточно большое плечо между средними и задними ногами при близкой к вертикали ориентации оси робота на заключительном этапе слезания и тем самым исключить опасность проскальзывания опорных ног по шару (см. раздел 2.1). Корпус продолжает свое движение относительно центра шара (рис. 3.4.3, а).

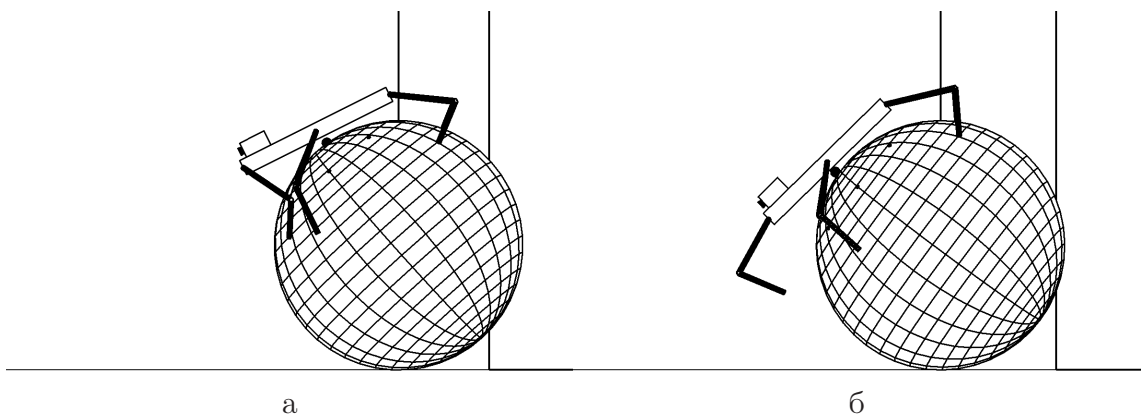


Рис. 3.4.3: Слезание с шара, п.п. 3.4.4, 3.4.5

3.4.5. Стопы передних ног переносятся (рис. 3.4.3, б) на опорную плоскость. Они ставятся на опорную плоскость в согнутом положении для смягчения неизбежного удара об опору. После постановки передних ног корпус продолжает движение вниз по касательной к шару и тем самым окончательно тормозит движение шара, так как часть момента силы тяжести компенсируется моментом реакций опоры в точках постановки передних ног. Корпус останавливается вместе с шаром, достигнув передней точкой корпуса заданной высоты над опорной плоскостью, в положении, показанном на рис. 3.4.4, а.

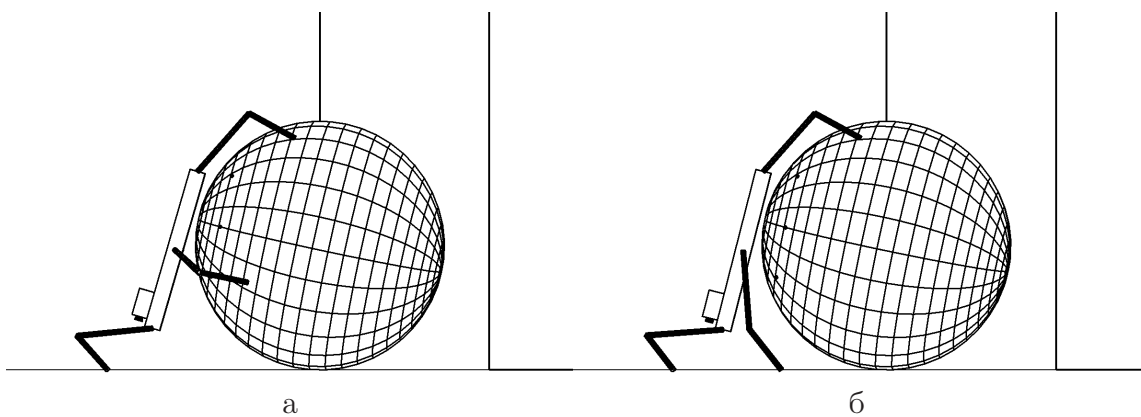


Рис. 3.4.4: Слезание с шара, п.п. 3.4.5, 3.4.6

3.4.6. Стопы средних ног переносятся на опорную плоскость. При этом корпус и шар остаются неподвижными (рис. 3.4.4, б). Начинается подготовка поворота корпуса в горизонтальное положение.

3.4.7. Стопы задних ног переносятся в более удобное положение на шаре (рис. 3.4.5, а) для того, чтобы в дальнейшем движении корпуса не возникла проблема с дотягиванием задних ног до прежних опорных точек.

3.4.8. Стопы средних ног переносятся на опорной плоскости вперед для обеспечения статической устойчивости при предстоящем переносе стоп передних ног. Корпус робота и шар остаются неподвижными (рис. 3.4.5, б).

3.4.9. При корпусе, продолжающем оставаться неподвижным, переносятся стопы передних ног (рис. 3.4.6, а) для того, чтобы корпус можно было отвести от шара, не задев его.

3.4.10. При фиксированных точках опоры выполняется поворот корпуса в горизонтальное положение. Задние ноги остаются на шаре и немного отодвигают шар при повороте корпуса (рис. 3.4.6, б). На этом этапе робот уже слез с шара.

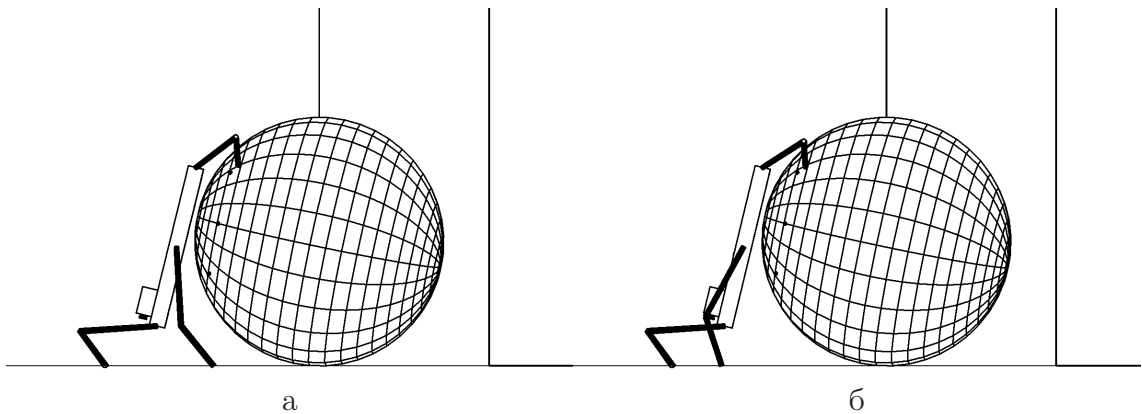


Рис. 3.4.5: Слезание с шара, п.п. 3.4.7, 3.4.8

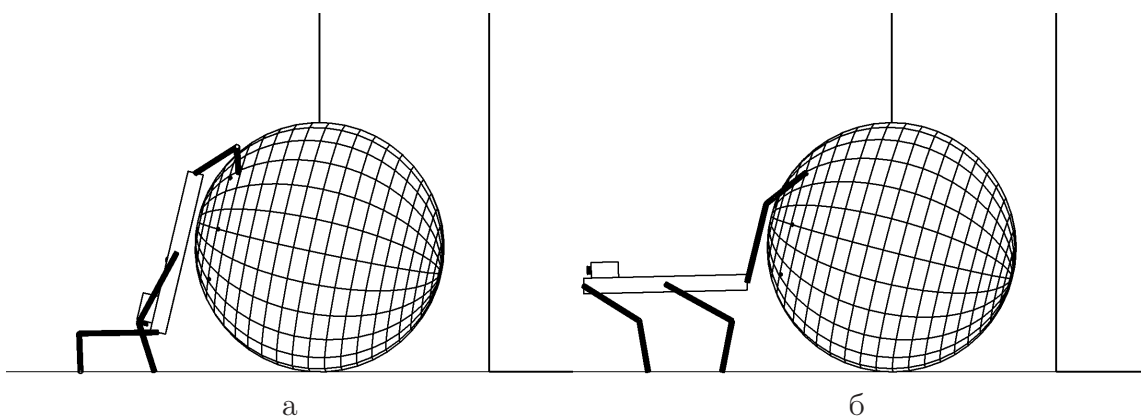


Рис. 3.4.6: Слезание с шара, п.п. 3.4.9, 3.4.10

3.4.11. Стопы задних ног переносятся на горизонтальную плоскость (рис. 3.4.7,а), а далее происходит последовательное перестроение ног для возможности движения по плоскости походкой “трешки” (рис. 3.4.7,б). На этом этапе слезание робота с шара окончательно завершается.

Видно, что порядок переноса ног в представленном алгоритме существенно отличается от стандартного порядка переноса ног в традиционной походке “галоп”. Такое отступление от стандарта вызвано необходимостью учесть ограничения, связанные с обеспечением статической устойчивости робота, исключением взаимного пересечения ног и проскальзывания стоп ног по поверхности шара в критических положениях робота сбоку на шаре, выполнением условий дотягивания ног до необходимых точек опоры при движении корпуса.

Следует отметить, что процесс слезания с шара может быть организован неоднозначно. Описанная выше логика слезания с шара повторяет в обратном времени логику процесса залезания на шар, описанную в разделе 3.3.1, и для определенности можно попытаться воспользоваться тем шаблоном действий робота, который был в

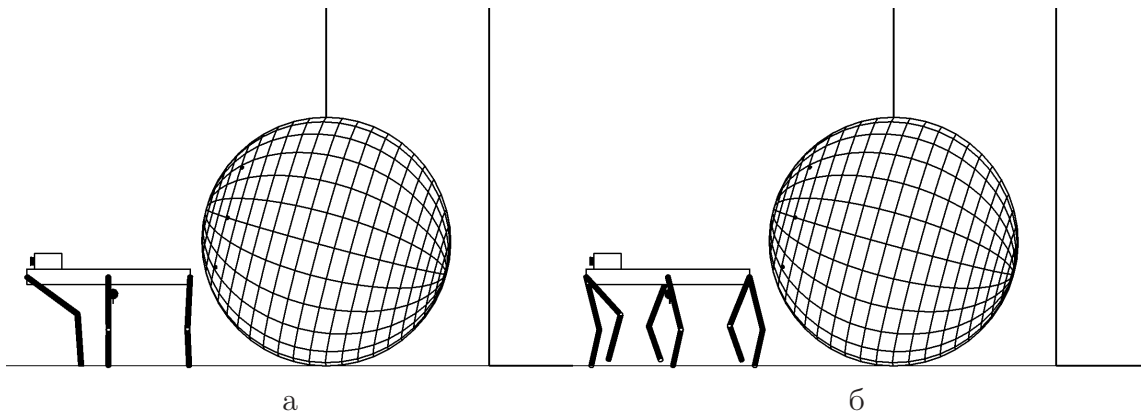


Рис. 3.4.7: Слезание с шара, п. 3.11

нем изложен. Отличия будут состоять в том, что из-за неточного совпадения начальных условий для процесса слезания и конечных условий для процесса залезания на шар, а также ошибок исполнения роботом заданного движения возникнут соответствующие различия в движении самого шара. Процесс конкретного построения движения корпуса и ног робота должен учитывать указанную особенность. Прежде всего отметим, что когда все точки опоры находятся на шаре, движение корпуса робота формируется в системе координат Кенига, связанной с центром шара, и инвариантно к перемещению точки опоры шара о плоскость. Шаговые циклы переносимых ног тоже формируются в системе координат Кенига в те точки опоры на шаре, которые в момент постановки стопы совпадут с точками, взятыми в системе Кенига. Стопы ног, стоящих на шаре, участвуют не только в перемещении центра шара, но и во вращении шара при его качении. Принцип построения движения в системе Кенига выбран для того, чтобы движение корпуса робота в абсолютном пространстве было сходным независимо от вращения самого шара относительно его центра. Вместе с тем, когда часть стоп уже стоит на плоскости, то все движение формируется в абсолютной системе координат, поскольку излишнее движение шара в этих условиях необходимо остановить.

Для формирования конкретной процедуры слезания робота с шара можно воспользоваться следующим методом, примененным в настоящей работе. Планируемая последовательность событий разворачивается в обратном времени по отношению к событиям процедуры залезания робота на шар. Те события, которые были начальными для процедуры залезания, станут тогда конечными для процедуры слезания с шара. Соответствующие этим событиям координаты пла-

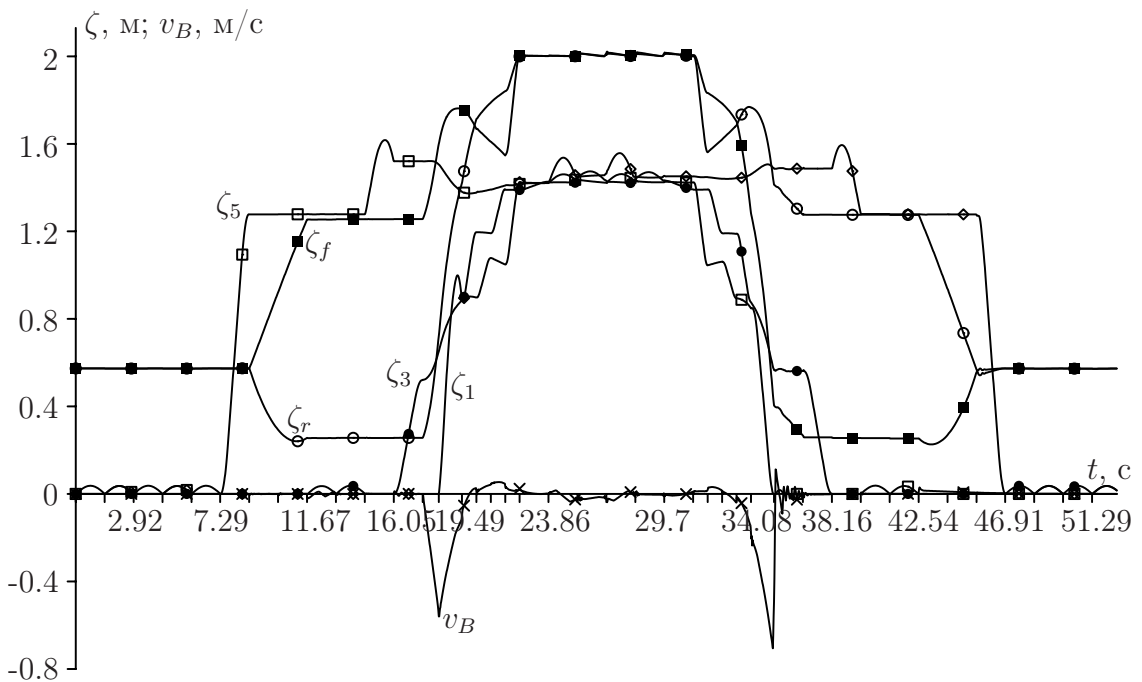


Рис. 3.4.8: Процесс перелезания через шар:  $\zeta_1$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_5$ ,  $\zeta_f$ ,  $\zeta_r$  — вертикальные координаты стоп, передней и задней точек корпуса соответственно,  $v_B$  — горизонтальная скорость шара

нируемых точек опоры и корпуса в осях Кенига берутся симметричными относительно плоскости  $B\xi\zeta$  соответствующим координатам корпуса и точек опоры, какие были применены при залезании робота на шар. Для завершения построения траекторий используются реализовавшиеся значения координат корпуса и ног в начале очередного этапа движения. Точки опоры ног на плоскости при слезании с шара также выбираются симметрично точкам опоры, сформированным перед залезанием на шар, но с учетом сдвига, происходящего из-за смещения центра шара.

### 3.4.3. Численный эксперимент

Соотношение размеров корпуса и шара имеет вид (3.3.8). Рассматриваемая механическая система имеет 30 степеней свободы. Задаваемое программное движение реализуется при коэффициенте трения, не превышающем 1 (резина по бетону). На рис. 3.4.8 представлены графики изменения по времени (секунды) вертикальных координат стоп 1, 3, 5 (метры по вертикальной оси), проекции скорости центра шара на ось  $O\eta$  при перелезании робота через шар

(метры в секунду по вертикальной оси) и графики изменения вертикальных координат передней и задней точек корпуса (метры по вертикальной оси). В численных экспериментах шар при движении испытывает трение качения и может проскальзывать в точке опоры. Используется походка “галоп”. Поэтому стопы ног 2, 4, 6 движутся симметрично стопам нечетных ног. Сначала в соответствии с алгоритмом, изложенным в разделе 3.3.1, происходит залезание на шар. С этой целью сначала (момент времени 7.29 с) на шар ставятся передние ноги (ноги 5 и 6). Далее происходит поворот корпуса. Затем переносятся задние и средние ноги. После второго переноса передних ног осуществляется перенос на шар средних ног. В опоре на плоскости остаются только задние ноги. После этого задние ноги интенсивно распрямляются, а скорость шара начинает резко линейно расти и достигает максимума при отделении задних ног от опорной плоскости. Впоследствии скорость шара уменьшается, передняя и задняя точки корпуса выравниваются по высоте. Далее практически выравниваются по высоте стопы всех ног, а робот оказывается на вершине шара. Процесс залезания на шар происходит во временном полуинтервале [7.29 с, 23.86 с). В полуинтервале [23.86 с, 29.7 с) выполняются маневры по успокоению шара. В полуинтервале [29.7 с, 46.91 с) выполняется слезание робота с шара. Наблюдается ясно выраженная симметрия движения передней точки корпуса при залезании на шар и задней точки корпуса при слезании с шара. Достаточно симметрично ведут себя передние ноги при залезании и задние при слезании. Симметрично выглядит и график скорости центра шара. Некоторые отклонения от симметрии вызваны наличием погрешностей, неизбежно возникающих на этапе пребывания робота на вершине шара.

Препятствие в виде свободно катающегося шара, размеры которого сравнимы с размерами корпуса робота, является одним из наиболее сложных видов препятствий, практически непреодолимых для колесной техники. Вместе с тем шагающий робот, используя изложенную логику поведения, в принципе может преодолеть это препятствие, если это позволяет сделать кинематическая схема устройства ног. Подробности движения при залезании робота на шар и слезании робота с шара можно рассмотреть ниже на видеоролике рис. 3.5.11. Видно, что в модельной постановке требуемое движение выполняется роботом достаточно уверенно.

## 3.5. Робот на шарах

### 3.5.1. Формулировка проблемы

Решаемая задача формулируется следующим образом. На горизонтальной плоскости покоятся два одинаковых массивных шара, способных свободно кататься по плоскости, имея с ней каждый лишь одну точку соприкосновения. Шары расположены на некотором ненулевом расстоянии друг от друга так, что расстояние между центрами шаров превышает диаметр шара. Робот, двигаясь вдоль линии центров, должен подойти к одному из шаров и залезть на него, затем подкатить этот шар к другому, перелезть на другой шар и слезть на горизонтальную плоскость. Отдельные элементы этой задачи были исследованы в предшествующих разделах. В разделе 3.3.2 представлен алгоритм залезания робота на первоначально покоящийся шар. Этот алгоритм остается без изменений для рассматриваемой задачи. В работе [43] был описан метод, с использованием которого робот перелезает с одного первоначально покоящегося шара на другой такой же шар, причем шары находятся в соприкосновении друг с другом. В отличие от этого, в данном разделе предполагается, что шары первоначально не находятся в соприкосновении и в начале перелезания не будут находиться в покое. Раздел 3.4 посвящен проблеме перелезания робота через первоначально покоящийся шар. Там же представлен алгоритм, позволяющий роботу слезть с шара на горизонтальную плоскость. Ниже будет представлена адаптация этого алгоритма с учетом того, что в процессе движения роботу придется осуществлять смену походок и выполнять маневры корпусом для разгона и успокоения шара на предыдущих этапах движения.

### 3.5.2. Сценарий решения

Рассмотрим движение робота по этапам. На рис. 3.5.1 изображена исходная позиция робота перед полосой препятствий в виде одинаковых незакрепленных шаров.

**3.5.1.** Робот по исходной опорной плоскости подходит к первому шару и залезает на него (рис. 3.5.2, а). Решение этой части задачи подробно описано в разделе 3.3.2 и здесь применено без изменений. После того как робот залез на шар (рис. 3.5.2, б), он идет сверху по шару походкой “трешки” и специальными движениями корпуса, как

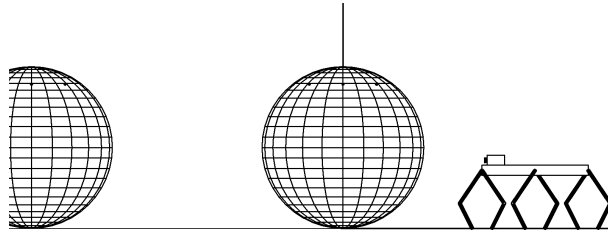


Рис. 3.5.1: Исходная позиция перед полосой препятствий

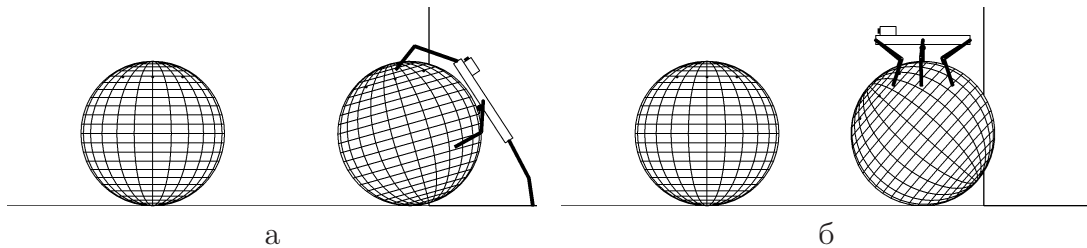


Рис. 3.5.2: а) Фрагмент залезания на первый шар, б) подкатывание первого шара к второму

это описано в разделе 3.1.2, заставляет первый шар приблизиться ко второму шару на некоторое расстояние и после этого практически полностью останавливает первый шар как в направлении второго шара, так и в боковом направлении. Далее робот переводится в стандартную конфигурацию, когда все шесть ног находятся в опоре на шаре с расположенными по горизонтальной окружности точками опоры симметрично относительно продольного и поперечного направлений. Указанная опорная окружность находится на таком расстоянии от опорной плоскости, чтобы исключить возможность взаимного пересечения ног при дальнейшем движении. Расстояние между шарами при остановке первого шара создает гарантию, что не произойдет неконтролируемое столкновение шаров при перемещении первого шара. Следует заметить, что шар вместе с роботом в процессе маневрирования не может реально быть в состоянии абсолютного покоя, и поэтому все перестроения конфигурации и походок должны осуществляться достаточно быстро.

**3.5.2.** Перелезание робота с одного шара на другой осуществляется модифицированной походкой “галоп”. Модификация состоит в изменении порядка переносов ног по сравнению со регулярной походкой “галоп” из-за необходимости обеспечивать статическую устойчивость робота в каждый конкретный момент времени. Маневр выполняется в три стадии. Первая стадия состоит в подготовительном перемещении робота на первом шаре. Вторая стадия выделяет по-



следовательность движений робота, когда некоторые опорные ноги робота находятся на поверхности первого шара, а другие опорные ноги — на поверхности второго шара. Третья стадия охватывает движения робота, при которых все его опорные ноги находятся на поверхности второго шара. Эта стадия заканчивается практически полной остановкой второго шара перед последним этапом спзания робота на горизонтальную плоскость.

На рис. 3.5.3, а показана исходная позиция робота в начале первой стадии. Для начала процесса перелезания необходимо переставить

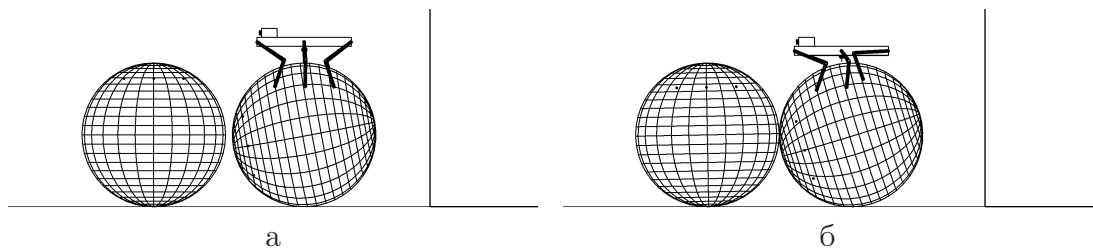


Рис. 3.5.3: а) Начальная позиция стадии 1 этапа 3.2, б) смещение корпуса и приседание

задние ноги ближе ко второму шару и обеспечить возможность дотягивания до точек опоры на втором шару. С этой целью корпус робота смещается в направлении второго шара. Вслед за этим высота корпуса уменьшается: робот приседает, как это видно на рис. 3.5.3, б. Одновременно переносятся задние ноги, а первый шар из-за смещения центра масс системы начинает подкатываться ко второму шару. Скорость подката невелика, поэтому второй шар не отскакивает от первого и катится совместно с ним. Затем следует перенос средних ног, а вертикальная проекция центра масс робота оказывается внутри опорного четырехугольника средних и задних ног (рис. 3.5.4, а). После этого передние ноги переносятся как можно дальше на второй шар (рис. 3.5.4, б). Точки постановки передних ног выбираются

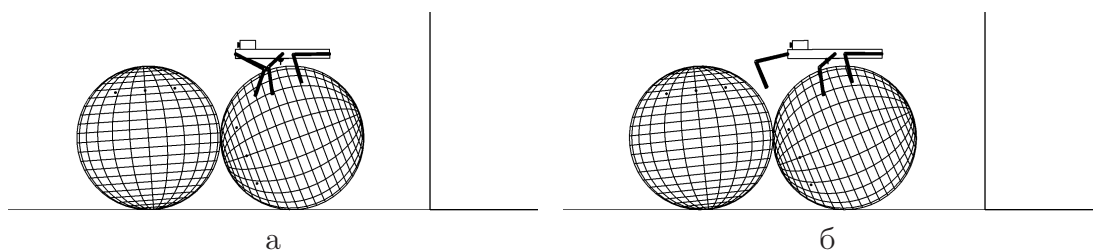


Рис. 3.5.4: а) Перенос средних ног завершен, б) фрагмент переноса передних ног

симметрично относительно вертикальной плоскости, параллельной

оси  $O\eta$  и проходящей через центр второго шара, реализовавшийся к моменту планирования. Такое правило симметричной постановки применяется и для других ног. Шары при этом катятся, и точки опоры средних и задних ног, будучи неподвижными относительно первого шара, меняют свое положение. Тем не менее достаточный запас статической устойчивости сохраняется.

На второй стадии после того, как стопы передних ног оказались на втором шаре (рис. 3.5.5, а), происходит перемещение корпуса в направлении второго шара (рис. 3.5.5, б), а затем на второй шар

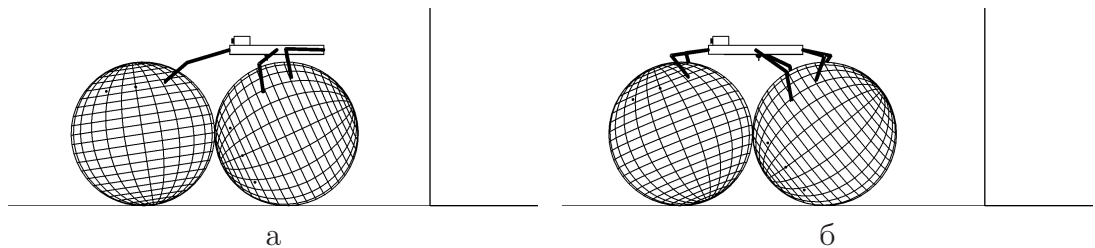


Рис. 3.5.5: а) Перенос передних ног завершен: начало стадии 2 этапа 3.2, б) движение корпуса в сторону второго шара

переносятся стопы средних ног (рис. 3.5.6, а). Иногда в том случае, когда часть стоп опорных ног оказывается на втором шаре, а другая часть — на первом, может наблюдаться откатывание шаров друг от друга из-за неодинакового давления стоп на шары в направлении их общей линии центров. Этот эффект нежелателен, т.к. он затрудняет

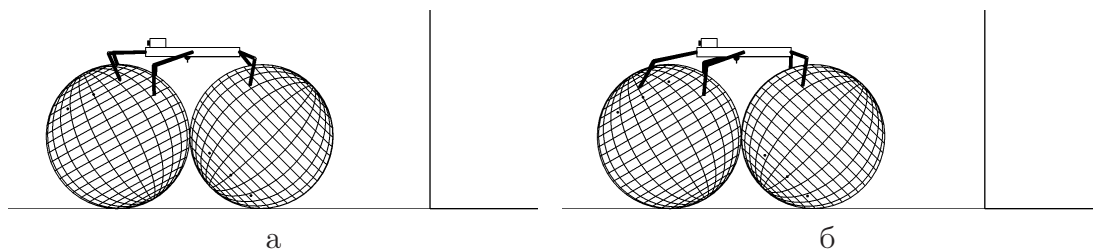


Рис. 3.5.6: а) Перенос средних ног на второй шар завершен, б) перенос передних ног завершен

планирование будущих опорных точек. Для того чтобы его предотвратить, все стопы, находящиеся в опоре на втором шаре, подвергаются дополнительному программному смещению. В связи с тем, что указанные стопы относительно поверхности второго шара будут неподвижны, такое смещение должно обеспечивать сближение шаров, а когда шары находятся в соприкосновении, следящей системой будет создаваться давление стопами на шар, прижимающее шары друг к другу.

Пусть до начала всякого движения неподвижные оси координат  $O\xi\eta\zeta$  выбраны так, что начало координат  $O$  лежит на горизонтальной опорной плоскости на прямой, соединяющей точки касания шаров и плоскости, ось  $O\eta$  направлена параллельно линии центров шаров в направлении от второго шара к первому, ось  $O\zeta$  направлена вертикально вверх, ось  $O\xi$  дополняет указанные оси до правой тройки. Обозначим  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  текущие координаты центров первого и второго шаров соответственно. При условии, что в процессе движения центры шаров мало отклоняются от оси  $O\eta$ , расстояние  $\delta$  между шарами в некоторый момент времени  $t$  движения можно выразить приближенной формулой

$$\delta = \eta_1 - \eta_2 - 2R.$$

Предположим, что стопа опорной ноги с номером  $n$  находится на втором шаре. Ее координаты обозначим  $(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ . Когда второй шар катится, эта стопа относительно его центра приближенно описывает вертикальную окружность радиуса  $R_n$ :

$$R_n = \sqrt{(\eta_n - \eta_2)^2 + (\zeta_n - \zeta_2)^2},$$

а положение этой стопы задается углом  $\varphi_n$ , отсчитываемым от направления оси  $\eta$ :

$$\cos \varphi_n = (\eta_n - \eta_2)/R_n, \quad \sin \varphi_n = (\zeta_n - \zeta_2)/R_n.$$

Указанное выше программное дополнительное смещение стопы делается для того, чтобы сократить до нуля расстояние между шарами. Скорректированные координаты стопы  $(\tilde{\xi}_n, \tilde{\eta}_n, \tilde{\zeta}_n)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_n &= \eta_2 + (\delta + \varepsilon) + R_n \cos(\varphi_n - (\delta + \varepsilon)/R_n), \\ \tilde{\zeta}_n &= \zeta_2 + R_n \sin(\varphi_n - (\delta + \varepsilon)/R_n), \\ \tilde{\xi}_n &= \xi_n. \end{aligned}$$

Следящая система приводов ног будет стремиться реализовать приведенные значения, а если это невозможно из-за того, шары находятся в соприкосновении, она будет их прижимать друг к другу с некоторым усилием, зависящим от  $\varepsilon$ .

На рис. 3.5.6, б следующим показан перенос передних ног на втором шаре, выполненный для того, чтобы обеспечить достаточный простор для дальнейших переносов ног, и кроме того, чтобы дополнительно сместить вперед центр масс робота. Затем выполняется подготовка к переносу задних ног на второй шар. С этой целью корпус продвигается в направлении второго шара так, чтобы

центр масс робота проектировался внутрь опорного многоугольника, образованного передними и средними ногами, с небольшим запасом (рис. 3.5.7, а). Шары при этом катятся вместе в направлении

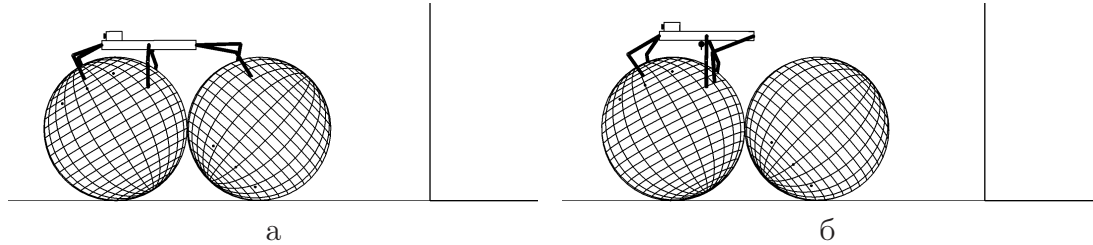


Рис. 3.5.7: а) Движение корпуса, б) задние ноги перенесены на второй шар с подъемом корпуса

второго шара, находясь в соприкосновении друг с другом. Задние ноги значительно распрямляются, оставаясь на первом шаре. Затем следует перенос задних ног на второй шар с поднятием корпуса (рис. 3.5.7, б), и вторая стадия заканчивается. Из-за переноса задних ног вертикальная проекция центра масс робота автоматически сдвигается в направлении второго шара, что способствует сохранению статической устойчивости робота во время указанного переноса.

На третьей стадии робот должен подготовить исходную позицию для спзания со второго шара и одновременно остановить второй шар. Исходная позиция для спзания состоит в том, что корпус робота расположен симметрично относительно вертикальной плоскости, параллельной оси  $O\eta$  и проходящей через вершину шара, а стопы ног тоже симметрично стоят на стандартной горизонтальной опорной окружности, близкой к вершине шара. Таким образом, после того как стопы всех ног робота оказались на втором шаре, осуществляется перенос средних ног с одновременным сдвигом корпуса по направлению к вершине второго шара (рис. 3.5.8, а). Следующим

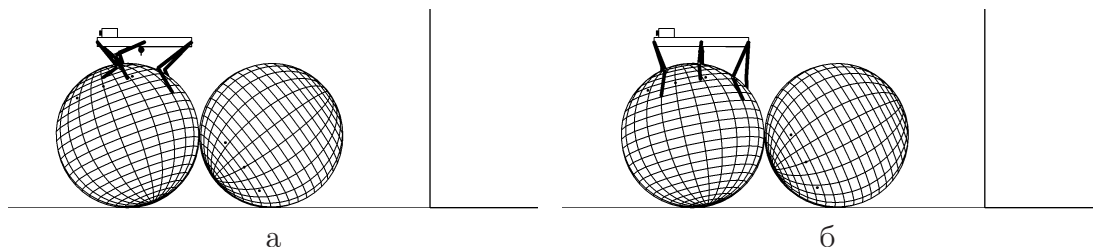


Рис. 3.5.8: Переход к вершине второго шара

выполняется перенос передних ног, а корпус продолжает сдвигаться в направлении вершины второго шара (рис. 3.5.8, б). Далее выполняется перестроение ног для походки “трешки”. Этот тип походок,

как самый быстрый, стандартно используется для маршевого перемещения шара вместе с роботом, находящимся на вершине шара. Далее робот как бы топчется на шаре, выполняя движения корпуса, необходимые для практической остановки второго шара. Первый шар при этом откатывается от второго в сторону, противоположную первоначальному направлению движения. Затем происходит перестроение ног для походки “галоп” и переход к третьему этапу (рис. 3.5.9, а).

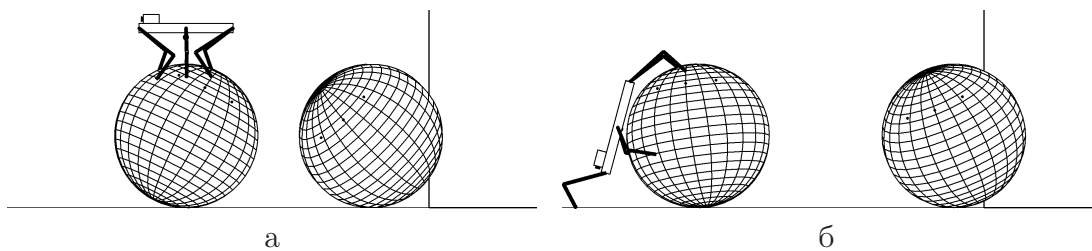


Рис. 3.5.9: а) Подготовка к слезанию со второго шара, б) фрагмент слезания

**3.5.3.** Робот слезает со второго шара походкой “галоп” на горизонтальную плоскость (рис. 3.5.9, б). Структурно процесс построения движения на этом этапе был подробно изложен в разделе 3.4.2. Естественной адаптации по сравнению с разделом 3.4.2 подверглись лишь некоторые опорные точки и закон поворота корпуса относительно шара в вертикальной плоскости при слезании. Эти изменения были вызваны влиянием предыстории движения и тем, что полной остановки системы в рассматриваемой задаче за разумное время добиться невозможно.

### 3.5.3. Контрольные проверки

Сформулируем некоторые общие принципы, использование которых может быть полезно для построения движений в задачах лазания не только по шарам, но и по другим препятствиям.

1. Проверка возможности перехода на препятствие. Например, робот идет по первому шару до тех пор, пока не появится возможность перенести передние ноги на второй шар. В данном случае критерием служит удаленность точек подвеса передних ног от центра второго шара. Возьмем сферу  $S$ , концентрическую со вторым шаром. Ее радиус  $R'$  назовем несколько большим радиуса второго шара. Если точки подвеса передних ног не попали внутрь сферы  $S$ ,

то считается, что возможность перехода робота на второй шар отсутствует. В противоположном случае осуществляется дополнительная проверка возможности постановки ног на второй шар. Вычисляется расстояние от планируемых точек подвеса передних ног до соответствующих окружностей на втором шаре, получаемых пересечением второго шара вертикальными плоскостями, параллельными оси  $O\eta$  и проходящими через текущие точки опоры передних ног. Если такое расстояние, вычисленное для каждой передней ноги, меньше длины ноги с определенным запасом, то возможность постановки ног на второй шар имеется. Проверка того, что такая возможность появилась, осуществляется в конце каждого переноса ног, и заранее неизвестно, в какой момент времени начнется переход на второй шар.

2. Проверка дотягивания стоп переносимых ног. Для каждого переноса ног алгоритм планирования формирует целевые точки стоп и целевые точки крепления ног к корпусу. Проверяется условие дотягивания, т.е. для подлежащих переносу ног расстояние между целевой точкой стопы и целевой точкой крепления должно быть меньше модифицированной длины ноги либо равно ей. Модифицированная длина ноги принимается несколько меньшей, чем сумма длин бедра и голени, что создает дополнительную надежность в реализации движения, но влияет на запас устойчивости. Если условие дотягивания не выполнено, то сначала делается попытка уменьшить расстояние между планируемыми точками опоры и планируемыми точками крепления ног за счет уменьшения высоты расположения корпуса над опорой (приседание). Предельный уровень приседания ограничен препятствием, по которому робот движется. Если возможности приседания исчерпаны, но условие дотягивания все еще не выполнено, тогда положение целевой точки приближается к присевшему корпусу. В случае перехода с шара с шар с этой целью ищется пересечение сферы радиуса, равного модифицированной длине ноги, с центром в целевой точке крепления ноги к корпусу с поверхностью того шара, на котором нога должна оказаться в конце переноса. В пересечении имеем окружность. Далее находится пересечение полученной окружности с вертикальной плоскостью, параллельной оси  $O\eta$  и проходящей через первоначально запланированную целевую точку для этой ноги. Из двух точек пересечения выбирается ближайшая к первоначально запланированной.

3. Обеспечение запаса статической устойчивости. Центр масс ро-

бота должен проектироваться внутрь сменяющихся опорных многоугольников с некоторым запасом на перемещение центра масс из-за переносов ног. Например, при использовании походки “галоп” целевые точки постановки стоп средних ног выбираются с преднамеренным сдвигом относительно целевых точек их крепления. Это делается для того, чтобы, несмотря на движение опорных стоп вместе с шарами, центр масс робота надежно проектировался внутрь опорного многоугольника, образованного средними ногами в сочетании с задними, либо с передними ногами в зависимости от того, какая пара ног подлежит переносу.

4. Опасность предельной распрямленности опорных ног. При использовании походки “галоп”, когда робот опирается на все ноги, достаточно часто по времени проверяется, насколько каждая опорная нога распрямлена. Проверка предельной распрямленности аналогична проверке дотягивания, но теперь проверяются не запланированные целевые точки, а текущие положения стопы и точки крепления. Если возникает опасность незапланированного отделения стопы от своей опорной точки из-за того, что нога предельно распрямлена, то выполнение происходящего движения завершается. При этом принудительно планируется перенос пары ног, в которую входит предельно распрямленная нога.

5. Статическая устойчивость. Перед завершением переноса корпуса проверяется, действительно ли вертикальная проекция центра масс робота попала в запланированный опорный многоугольник с требуемым запасом. Если этого не случилось, то перенос корпуса продолжается.

### 3.5.4. Результаты численного моделирования

Соотношение размеров корпуса и радиусов шаров по-прежнему имеет вид (3.3.8).

На рис. 3.5.10 представлены графики изменения по времени вертикальных координат  $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_5$  1-й, 3-й и 5-й стоп (метры по вертикальной оси) соответственно, проекций  $v_1, v_2$  на ось  $O\eta$  скоростей центров шаров при выполнении маневров (метры в секунду по вертикальной оси) и графики изменения вертикальных координат  $\zeta_f$  – передней и  $\zeta_r$  – задней точек корпуса (метры по вертикальной оси). Шары при движении испытывают трение качения и верчения, а при соприкосновении друг с другом – трение скольжения.

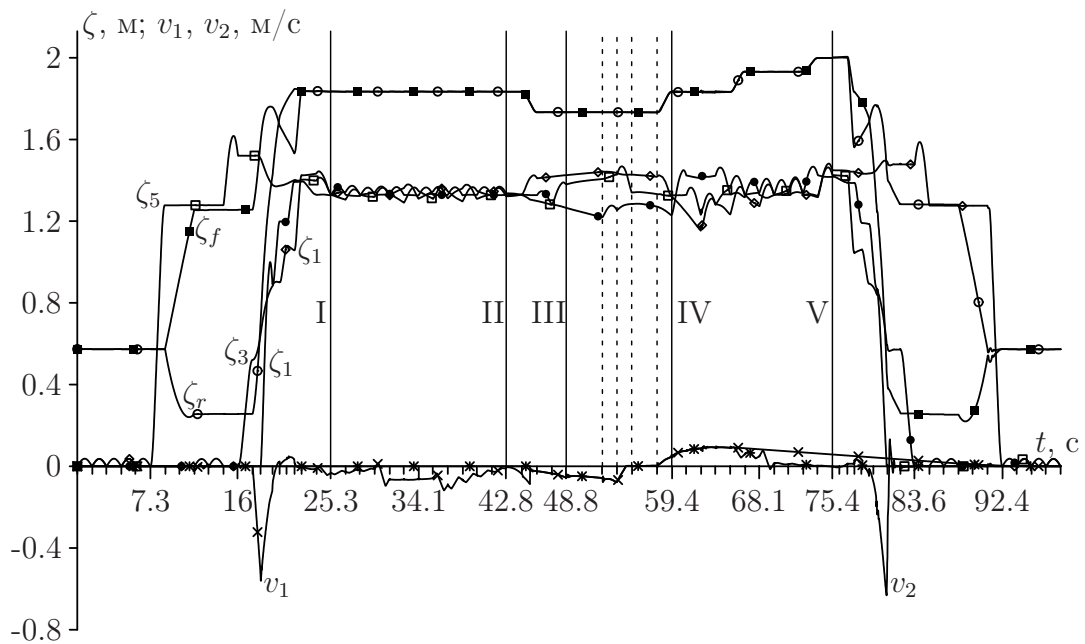


Рис. 3.5.10: Маневрирование на шарах:  $\zeta_1$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_5$ ,  $\zeta_f$ ,  $\zeta_r$  — вертикальные координаты стоп, передней и задней точек корпуса соответственно,  $v_1$ ,  $v_2$  — горизонтальные скорости шаров

Для выбранной походки галоп стопы 2-й, 4-й, и 6-й ног движутся практически симметрично стопам нечетных ног. Прямые, параллельные оси ординат и обозначенные римскими цифрами выделяют этапы и стадии движения робота.

Линия I соответствует окончанию этапа 3.5.1. Видно, что сначала при залезании на шар ставятся передние ноги (5-я и 6-я). После постановки на шар передних ног происходит поворот корпуса: передняя точка корпуса поднимается, а задняя — опускается. Затем переносятся задние и средние ноги для создания устойчивого опорного многоугольника, обеспечивающего возможность переноса передних ног поближе к верхней точке шара. После второго переноса передних ног осуществляется перенос на шар средних ног. При этом скорость первого шара практически отсутствует. Она начинает резко расти при распрямлении задних (1-й и 2-й) ног и достигает максимума при отделении задних ног от опорной плоскости. Впоследствии скорость шара уменьшается, передняя и задняя точки корпуса выравниваются по высоте. Также за счет переносов практически выравниваются по высоте стопы всех ног, а робот оказывается на вершине шара.

В интервале времени между линиями I и II работает система стабилизации робота на шаре, а также выполняется подкатывание пер-



вого шара ко второму за счет специальных движений корпуса робота (раздел 3.1.2). Линия II соответствует началу стадии 1 этапа 3.5.2. В интервале времени между линиями II и III выполняется подготовка позиции робота для перехода на второй шар, а сама линия III соответствует моменту времени, когда стопы передних ног робота впервые оказались на втором шаре. Переносы ног осуществляются в последовательности, описанной выше для стадии 1. Начиная с некоторого момента внутри указанного интервала шары, соприкоснувшись, движутся с одинаковой скоростью.

Интервал времени между линиями III и IV соответствует стадии 2 этапа 3.2, когда часть стоп робота размещена на втором шаре, а другая часть — на первом. Линией IV отмечено окончание стадии 2 этапа 3.5.2, когда стопы задних ног уже оказались на втором шаре. Пунктирные линии отмечают последовательные изменения конфигурации робота для стадии 2, как это описано в соответствующем разделе.

В интервале времени между линиями IV и V реализуется стадия 3 этапа 3.5.2. Здесь робот, как это было описано выше, продвигается к вершине второго шара и успокаивает его. Видно, что первый шар имеет при этом положительную скорость и откатывается от второго шара.

Наконец, на оставшемся интервале времени, начиная от линии V, выполняется этап 3.5.3, на котором робот слезает со второго шара.

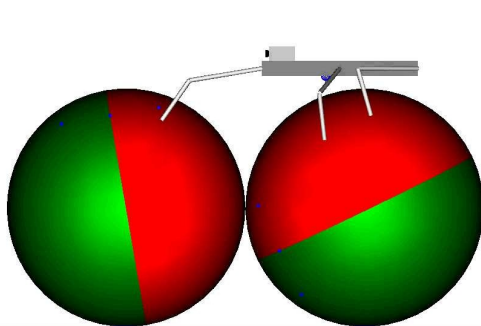


Рис. 3.5.11: Ролик доступен отдельно по адресу <http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/hexa2015-2.mp4>

На рис. 3.5.11 представлен видеоматериал, иллюстрирующий процесс описанного выше маневрирования робота на двух шарах в программной среде, реализующей расчет взаимодействия трехмерной полной динамической модели механической системы, состоящей из робота и двух незакрепленных шаров с учетом сил кулоновского

трения, трения качения, верчения и моделей электромеханических приводов в шарнирах робота. Видно, что в модельной постановке робот достаточно уверенно справляется с поставленной задачей. Движение системы при залезании робота на шар, перемещении робота вместе с шаром к другому шару, перелезании робота на другой шар и слезании с него на опорную плоскость выглядит устойчивым. Выполнение всех этих маневров затруднено опасностью взаимного пересечения ног из-за узости опорной площадки на поверхности шара, опасностью столкновения шаров и раскатывания шаров в процессе перелезания с шара на шар. Показано, что рассчитываемое по ходу маневрирования программное движение, обеспечивающее активную стабилизацию движения системы в целом, реализуемо при коэффициенте трения, не превышающем 1.

## Глава 4.

# Преодоление водной преграды

### 4.1. Влияние воды на плот

При движении по пересеченной местности робот может использовать плавучие предметы для переправы через какую-нибудь водную преграду с одного ее берега на другой. Для эффективной разработки алгоритмов управления роботом в такой ситуации потребуется компьютерная модель воздействия воды на находящиеся в ней объекты. Заметим, что в компьютерных экспериментах по исследованию робастности алгоритмов управления движением нет необходимости стремиться к абсолютно точному согласованию используемых математических моделей с реальным движением. Да это и невозможно. Любая математическая модель обладает той или иной степенью приближения к реальности. Модель сил сопротивления воды движению плота, предназначенная для отработки алгоритмов управления движением наземных автономных мобильных роботов, должна обладать свойством правдоподобности описания нестационарного взаимодействия плота с водной средой, а также разумным быстродействием для возможности проведения достаточно большой серии численных экспериментов за приемлемое время. Кроме того, данная модель должна допускать возможность учета оперативного изменения как самой формы плота и его гидродинамических свойств, так и характеристик движения плота относительно его центра масс вместе с движением центра масс при перемещении по нему дополнительной нагрузки.

Предлагаемая ниже модель сил сопротивления воды движению плота основывается на гипотезе о струйном характере воздействия воды на отдельные элементы плота [45]. Другими словами, поверхность плота разбивается на небольшие элементы и предполагается,

что на каждый такой элемент набегают струя воды с скоростью, обратной скорости этого элемента, и отдает ему часть своего количества движения, а также воздействует на него силой вязкого трения. Эта гипотеза не противоречит повсеместно эксплуатируемой модели сопротивления воды для поступательного движения, но позволяет учесть также произвольное движение плота относительно его центра масс.

#### 4.1.1. Равновесие плота на поверхности воды

Предполагается, что однородный плот в форме прямоугольного параллелепипеда лежит на спокойной поверхности воды под действием вертикальной нагрузки  $\mathbf{F}$ , силового момента  $\mathbf{M}$  относительно центра масс  $C_p$  плота и архимедовой силы. Размеры плота:  $2a$  – длина,  $2b$  – ширина,  $2d$  – толщина. Удельный вес воды обозначим  $\gamma$ . Под действием указанных сил плот находится в равновесии в некотором положении относительно уровня спокойной воды. Для того чтобы найти это положение, выберем неподвижный декартов репер  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  так, что единичный горизонтальный вектор  $\mathbf{e}_1$  направлен по длине ненагруженного плота, единичный горизонтальный вектор  $\mathbf{e}_2$  – по его ширине, а единичный вектор  $\mathbf{e}_3$  – вертикально вверх, когда плот находится на поверхности воды под действием только силы тяжести и архимедовой силы. В качестве начала координат  $O$  назовем вертикальную проекцию на поверхность воды центра масс  $C_p$  ненагруженного плота. Поскольку горизонтальных сил нет, то под действием силы  $\mathbf{F}$  и момента  $\mathbf{M}$  центр масс плота не будет смещаться в горизонтальном направлении. С плотом жестко свяжем подвижный декартов репер  $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  так, чтобы направления единичных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  соответственно совпали в положении ненагруженного плота. Под действием силы  $\mathbf{F}$  и момента  $\mathbf{M}$  плот примет наклонное положение. Для наклонного положения плота направляющие векторы свяжем соотношениями

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\mathbf{e}'_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

где коэффициенты  $(a_{ij})$  образуют ортогональную матрицу. Пусть центр масс плота смещен относительно уровня воды на расстояние  $\zeta$  так, что его радиус-вектор в репере  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  выражается формулой  $\mathbf{r}_c = -\zeta\mathbf{e}_3$ . Другими словами, если  $\zeta > 0$ , то центр масс плота

погружен в воду, а если  $\zeta < 0$ , то центр масс плота находится над водой. Радиус-вектор точки  $O$  в репере  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  можно представить в виде

$$\boldsymbol{\rho}_o = \zeta \sum_{j=1}^3 a_{3j} \mathbf{e}'_j,$$

а проекция этой точки на третью ось репера  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  составит  $\zeta a_{33}$ . Представим радиус-вектор  $\boldsymbol{\rho}$  произвольной точки поверхности воды в репере  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  в виде

$$\boldsymbol{\rho} = x \mathbf{e}'_1 + y \mathbf{e}'_2 + z \mathbf{e}'_3.$$

Тогда в репере  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  уровень воды можно выразить с помощью уравнения

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \zeta',$$

где  $\zeta' = \zeta a_{33}$ . Примем, что  $a_{33} \neq 0$ . Это значит, что поверхность плота и горизонтальная плоскость не перпендикулярны. Тогда в репере  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  уровень воды задается равенством

$$z = \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}}. \quad (4.1.1)$$

Точки, расположенные на дне плота, выражаются радиус-вектором

$$\boldsymbol{\rho}_b = x \mathbf{e}'_1 + y \mathbf{e}'_2 - d \mathbf{e}'_3.$$

Расстояние от точки плота, находящейся на уровне воды, до дна плота можно представить в виде

$$z + d = \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d.$$

С точностью до малых второго порядка архимедова сила, действующая на элемент плота размера  $(dx, dy)$ , отнесенный к точке дна с координатами  $(x, y)$ , задается формулой

$$\mathbf{F}'_a = \gamma \mathbf{e}_3 \left[ \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d \right] dx dy.$$

Из-за однородности столба жидкости, вытесненной элементарным объемом, эта сила приложена к точке, имеющей радиус-вектор

$$\boldsymbol{\rho}_a = x \mathbf{e}'_1 + y \mathbf{e}'_2 + \left( \frac{z - d}{2} \right) \mathbf{e}'_3.$$

Суммарная архимедова сила, действующая на плот, вычисляется с помощью выражения

$$\mathbf{F}_a = \gamma \mathbf{e}_3 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d \right] dx dy,$$

а ее момент относительно центра масс плота дается формулой

$$\mathbf{M}_a = \gamma \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d \right] \rho_a dx dy \times \mathbf{e}_3.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a &= \gamma \mathbf{e}_3 (\zeta + d) 4ab = \gamma (\zeta + d) 4ab (a_{31} \mathbf{e}'_1 + a_{32} \mathbf{e}'_2 + a_{33} \mathbf{e}'_3), \\ \mathbf{M}_a &= \gamma [(I_y a_{33} - I_z a_{32}) \mathbf{e}'_1 + (I_z a_{31} - I_x a_{33}) \mathbf{e}'_2 + (I_x a_{32} - I_y a_{31}) \mathbf{e}'_3], \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

где

$$\begin{aligned} I_x &= -\frac{4a_{31}}{3a_{33}} a^3 b, \\ I_y &= -\frac{4a_{32}}{3a_{33}} ab^3, \\ I_z &= \frac{ab}{2} \left( \zeta^2 - d^2 + \frac{4a_{31}^2 a^2}{3a_{33}^2} + \frac{4a_{32}^2 b^2}{3a_{33}^2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Формулы (4.1.2) получены в предположении, что плот не имеет частей, полностью погруженных в воду, а дно плота целиком находится под водой. Учитывая то, что заданная сила  $\mathbf{F}$  вертикальна, т.е.  $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_3$ , с помощью (4.1.2) получаем четыре условия равновесия плота

$$\begin{aligned} \gamma (\zeta + d) 4ab &= -F, \\ \gamma a_{32} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} &= M_x, \\ \gamma a_{31} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} &= -M_y, \\ \gamma \frac{4a_{31} a_{32} ab}{3a_{33}} (a^2 - b^2) &= M_z. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Из первого уравнения (4.1.4) нетрудно найти положение центра масс плота относительно уровня воды:

$$\zeta = -\frac{F}{4\gamma ab} - d. \quad (4.1.5)$$

Из этой формулы следует, что если  $F > 0$ , расстояние от центра плота до уровня воды будет превосходить высоту плота, что нереально. В дальнейшем будет рассмотрен случай  $F < 0$ , т.е. активная сила направлена вниз.

Умножим второе уравнение системы (4.1.4) на  $a_{31}$ , третье уравнение этой системы на  $a_{32}$  и после этого из третьего уравнения вычтем второе. После преобразований получим

$$\gamma \frac{4a_{31}a_{32}ab}{3}(a^2 - b^2) = -M_x a_{31} - M_y a_{32}.$$

Сравнив этот результат с четвертым уравнением (4.1.4), найдем условие согласования

$$a_{31}M_x + a_{32}M_y + a_{33}M_z = 0, \quad (4.1.6)$$

которое означает, что проекция силового момента на направление вертикали отсутствует. Если это условие не выполнено, то равновесие, очевидно, невозможно, т.к. архимедовы силы не могут компенсировать вертикальную составляющую момента. Если же условие согласования выполнено, то четвертое уравнение есть следствие второго и третьего уравнений, и его можно не рассматривать. Считая величину  $\zeta$  найденной с помощью формулы (4.1.5), имеем следующую систему уравнений для определения величин  $a_{31}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ :

$$\begin{aligned} \gamma a_{32}ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\} &= M_x, \\ \gamma a_{31}ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\} &= -M_y, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.$$

Последним добавлено условие того, что вектор  $\mathbf{e}_3$  является единичным.

Остальные компоненты матрицы  $A$  можно получить следующим образом. Будем рассматривать поворот неподвижной системы координат относительно системы координат, связанной с плотом. В результате наклона плота происходит относительное вращение репера  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  в репере  $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  на угол  $\gamma_r = \arccos(a_{33})$  вокруг оси

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}_3|} = \frac{1}{|\sin \gamma_r|} (-a_{32}\mathbf{e}'_1 + a_{31}\mathbf{e}'_2 + 0\mathbf{e}'_3).$$

Для определения угловых положений векторов репера  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  в репере  $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  воспользуемся известными формулами [22]:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i + \sin \gamma_r (\mathbf{e} \times \mathbf{e}'_i) + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{e}'_i) (1 - \cos \gamma_r). \quad (4.1.8)$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \times \mathbf{e}'_1 &= -\frac{a_{31}}{|\sin \gamma_r|} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e} \times \mathbf{e}'_2 &= -\frac{a_{32}}{|\sin \gamma_r|} \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e} \times \mathbf{e}'_3 &= \frac{1}{|\sin \gamma_r|} (a_{31} \mathbf{e}'_1 + a_{32} \mathbf{e}'_2 + 0 \mathbf{e}'_3), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{e}'_1) &= -\frac{1}{\sin^2 \gamma} (a_{31}^2 \mathbf{e}'_1 + a_{31} a_{32} \mathbf{e}'_2 + 0 \mathbf{e}'_3), \\ \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{e}'_2) &= -\frac{1}{\sin^2 \gamma} (a_{31} a_{32} \mathbf{e}'_1 + a_{32}^2 \mathbf{e}'_2 + 0 \mathbf{e}'_3), \\ \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{e}'_3) &= -\frac{a_{31}^2 + a_{32}^2}{\sin^2 \gamma} \mathbf{e}'_3, \end{aligned}$$

получим, считая  $\sin \gamma_r > 0$ ,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(1 - \frac{a_{31}^2}{1 + a_{33}}\right), & a_{12} &= -\frac{a_{31} a_{32}}{1 + a_{33}}, & a_{13} &= -a_{31}, \\ a_{21} &= -\frac{a_{31} a_{32}}{1 + a_{33}}, & a_{22} &= \left(1 - \frac{a_{32}^2}{1 + a_{33}}\right), & a_{23} &= -a_{32}, \\ a_{31}, & & a_{32}, & & a_{33}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Компоненты (4.1.9) удовлетворяют условиям ортогональности матрицы  $A$  и могут быть приняты в качестве точного решения задачи о равновесии плота под действием внешней вертикальной нагрузки.

Учтем, что в реальности, с точки зрения возможности применения плота в качестве средства переправы, плот должен иметь небольшое угловое отклонение от горизонтальной плоскости. Тогда уместным будет предположение о малости углов отклонений плота под действием нагрузки от исходного горизонтального положения. Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$$

есть вектор малого поворота репера  $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  относительно репера  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ . Тогда между соответствующими базисными векторами справедливы следующие соотношения [22]

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$



Отсюда получаются приближенные выражения для компонент матрицы  $A$  через малые углы поворота, справедливые с точностью до членов второго порядка малости

$$\begin{aligned} a_{11} &\approx 1, & a_{12} &\approx -\alpha_3, & a_{13} &\approx \alpha_2, \\ a_{21} &\approx \alpha_3, & a_{22} &\approx 1, & a_{23} &\approx -\alpha_1, \\ a_{31} &\approx -\alpha_2, & a_{32} &\approx \alpha_1, & a_{33} &\approx 1. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Дополнительно приняв предположение о том, что плот не вращается вокруг третьей оси, положим  $\alpha_3 = 0$ . В итоге матрица направляющих косинусов примет особенно простой вид

$$\begin{aligned} a_{11} &\approx 1, & a_{12} &\approx 0, & a_{13} &\approx \alpha_2, \\ a_{21} &\approx 0, & a_{22} &\approx 1, & a_{23} &\approx -\alpha_1, \\ a_{31} &\approx -\alpha_2, & a_{32} &\approx \alpha_1, & a_{33} &\approx 1. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

С помощью выражений (4.1.11) два первых уравнения (4.1.7) можно с точностью до членов второго порядка малости представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\gamma\alpha_1 ab[8b^2 + 3(\zeta^2 - d^2)] &= M_x, \\ \frac{1}{6}\gamma\alpha_2 ab[8a^2 + 3(\zeta^2 - d^2)] &= M_y. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Таким образом, задача о равновесии плота сводится к решению системы (4.1.7) или системы (4.1.12), правые части которых будут иметь соответствующие выражения в конкретных случаях. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

### Постоянный внешний момент в осях, связанных с плотом

В этом случае компоненты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  не зависят от ориентации плота относительно направления вертикали. Если робот взаимодействует с плотом только силами  $\mathbf{F}_\nu$  в точках опоры ног, определенных радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ , то условие согласования (4.1.6) примет вид

$$\mathbf{e}_3 \cdot \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}_\nu \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_\nu) = 0.$$

Следовательно, для равновесия плота необходимо, чтобы сумма проекций сил, развиваемых роботом в точках опоры, на направления горизонтальных перпендикуляров к радиус-векторам точек опоры, умноженная на горизонтальную составляющую радиус-векторов точек опоры, была равна нулю.

Уравнения (4.1.7) можно представить в виде

$$a_{31} = -\frac{M_y}{k_1}, \quad a_{32} = \frac{M_x}{k_2}, \quad (4.1.13)$$

где

$$\begin{aligned} k_2 &= \gamma ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{32}^2}{1 - a_{31}^2 - a_{32}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{1 - a_{31}^2 - a_{32}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\}, \\ k_1 &= \gamma ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{31}^2}{1 - a_{31}^2 - a_{32}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{1 - a_{31}^2 - a_{32}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

и решать их численно по методу простой итерации, когда в правую часть подставляются значения, вычисленные для предыдущей итерации. Для нулевого приближения следует принять  $a_{31}^{(0)} = a_{32}^{(0)} = 0$ .

Рассмотрим малые отклонения плота от горизонтальной плоскости. Воспользуемся формулами (4.1.11) для компонент матрицы  $A$ :

$$\alpha_1 = \frac{M_x}{\bar{k}_2}, \quad \alpha_2 = \frac{M_y}{\bar{k}_1}, \quad (4.1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \frac{1}{6} \gamma ab [8b^2 + 3(\zeta^2 - d^2)], \\ \bar{k}_2 &= \frac{1}{6} \gamma ab [8a^2 + 3(\zeta^2 - d^2)]. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Видим, что если горизонтальные размеры плота мало отличаются друг от друга, то ось вращения плота практически будет направлена по внешнему моменту.

### Внешний момент, постоянный в абсолютном пространстве

Предположим, что момент  $M$  сохраняет свое значение в абсолютной системе координат, связанной с уровнем воды. Следовательно, имеем  $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2$  из-за того, что внешний момент  $\mathbf{M}$  должен быть перпендикулярен вертикальной оси  $\mathbf{e}_3$ .

$$M_x = M_1 a_{11} + M_2 a_{21}, \quad M_y = M_1 a_{12} + M_2 a_{22}, \quad M_z = M_1 a_{13} + M_2 a_{23}.$$

Система (4.1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma a_{32} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} &= M_1 a_{11} + M_2 a_{21}, \\ \gamma a_{31} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} &= -(M_1 a_{12} + M_2 a_{22}), \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Компоненты  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  выражаются через искомые переменные по формулам (4.1.9). Уравнения (4.1.17) можно численно решать методом простой итерации, представив их в виде

$$a_{31} = -\frac{M_1 a_{12} + M_2 a_{22}}{k_1}, \quad a_{32} = \frac{M_1 a_{11} + M_2 a_{21}}{k_2}, \quad (4.1.18)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  даются формулами (4.1.14).

В рамках гипотезы о малых отклонениях плота от горизонтальной плоскости получим решения

$$\alpha_2 = \frac{M_2}{\bar{k}_1}, \quad \alpha_1 = \frac{M_2}{\bar{k}_2}, \quad (4.1.19)$$

где  $\bar{k}_1$ ,  $\bar{k}_2$  определены формулами (4.1.16).

### Равнодействующая системы $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$ приложена к плоту

Пусть  $\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_3$  и равнодействующая системы сил  $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$  приложена в точке плота  $S$ , имеющей радиус-вектор  $\mathbf{r}_s = x_s \mathbf{e}'_1 + y_s \mathbf{e}'_2 + z_s \mathbf{e}'_3$ , где  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $z_s$  — постоянны. Тогда  $\mathbf{M} = \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}$  и

$$\begin{aligned} M_x &= P(a_{32} z_s - a_{33} y_s), \\ M_y &= P(a_{33} x_s - a_{31} z_s), \\ M_z &= P(a_{31} y_s - a_{32} x_s). \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Система уравнений (4.1.7) представится в виде

$$\begin{aligned} \gamma a_{32} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} &= P(a_{32} z_s - a_{33} y_s), \\ \gamma a_{31} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} &= P(a_{31} z_s - a_{33} x_s), \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Первое и второе уравнения этой системы без учета ее третьего уравнения допускают неоднозначное решение. Их новые решения получаются из какого-нибудь одного посредством умножения (мультипликативность) всех компонент исходного решения на произвольный отличный от нуля коэффициент. С учетом свойства мультипликативности можно немного упростить поиск компонент  $a_{31}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ , положив, например,  $a_{33} = \hat{a}_{33} = 1$  и решив полученную систему второго и третьего уравнений относительно переменных  $\hat{a}_{31}$ ,  $\hat{a}_{32}$  по методу простой итерации в соответствии с формулами

$$(\hat{a}_{31})_\nu = -x_s/(\mu_1)_{\nu-1}, \quad (\hat{a}_{32})_\nu = -y_s/(\mu_2)_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (4.1.22)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\gamma ab}{P} \left\{ \frac{2}{3}[(2 + \hat{a}_{31}^2)a^2 + \hat{a}_{32}^2 b^2] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\} - z_s, \\ \mu_2 &= \frac{\gamma ab}{P} \left\{ \frac{2}{3}[(2 + \hat{a}_{32}^2)b^2 + \hat{a}_{31}^2 a^2] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\} - z_s, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} (\mu_1)_0 &= \hat{\alpha}_2 = \frac{\gamma ab}{P} \left[ \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right] - z_s, \\ (\mu_2)_0 &= \hat{\alpha}_1 = \frac{\gamma ab}{P} \left[ \frac{4}{3}b^2 + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right] - z_s, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

а в качестве  $(\mu_1)_{\nu-1}$ ,  $(\mu_2)_{\nu-1}$  используются коэффициенты  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , вычисленные по значениям  $(\hat{a}_{31})_{\nu-1}$ ,  $(\hat{a}_{32})_{\nu-1}$ . Итерации выполняются до тех пор, когда разность между последовательными приближениями станет меньше заданной точности.

Искомое решение получается из решения системы (4.1.22) после нормировки:

$$a_{31} = k\hat{a}_{31}, \quad a_{32} = k\hat{a}_{32}, \quad a_{33} = k, \quad k = (\hat{a}_{31}^2 + \hat{a}_{32}^2 + 1)^{-1/2}. \quad (4.1.24)$$

Если допустить возможность применения предположения (4.1.10) о существенной малости углового смещения плота, то уравнения (4.1.22) упрощаются и получается решение

$$\alpha_1 = -y_s/\hat{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = x_s/\hat{\alpha}_2, \quad \alpha_3 = 0, \quad (4.1.25)$$

где  $\hat{\alpha}_1$  и  $\hat{\alpha}_2$  определены формулами (4.1.23).

Пусть центр масс робота, имеющего вес  $P_r$ , смещен на вектор  $\boldsymbol{\delta} = \delta_x \mathbf{e}'_1 + \delta_y \mathbf{e}'_2$  относительно точки  $C_p$  в опорной плоскости плота. Тогда получим

$$\mathbf{r}_s = \frac{P_r}{P} \boldsymbol{\delta}. \quad (4.1.26)$$

Из формул (4.1.25) следует, в частности, что если центр масс робота проецируется в первый квадрант горизонтальной плоскости, то плот поворачивается вокруг первой оси по ходу часовой стрелки, вокруг второй оси против хода часовой стрелки, а вокруг третьей оси вращение отсутствует.

Можно убедиться в том, что в первом приближении положение равновесия плота будет устойчивым относительно углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и безразличным по углу  $\alpha_3$ . Обозначим  $\bar{\alpha}_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , отклонения соответствующих углов от положения равновесия. Действительно, с точностью до малых второго порядка уравнения малых колебаний плота в окрестности положения равновесия имеют вид

$$A\ddot{\alpha}_1 = -\hat{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1, \quad B\ddot{\alpha}_2 = -\hat{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2, \quad C\ddot{\alpha}_3 = 0, \quad (4.1.27)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — моменты инерции плота относительно осей его симметрии, что и доказывает высказанное утверждение.

Оценим допустимые размеры отклонения центра масс робота от середины плота. С этой целью потребуем, чтобы было

$$|\alpha_1| = |y_s|/\hat{\alpha}_1 < \varepsilon, \quad |\alpha_2| = |x_s|/\hat{\alpha}_2 < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  есть допустимое с точки зрения малости угловое отклонение плота от горизонтальной плоскости. Тогда получим

$$|\delta_x| < \varepsilon \frac{\hat{\alpha}_2 P}{P_r} \quad |\delta_y| < \varepsilon \frac{\hat{\alpha}_1 P}{P_r}. \quad (4.1.28)$$

Причем, как видно из формул (4.1.23),  $\hat{\alpha}_2 > \hat{\alpha}_1$ , если  $a > b$ . С учетом сказанного предпочтительным для опоры робота будет плот, расположенный наибольшей стороной по ходу движения робота, поскольку именно в этом направлении будут наибольшие отклонения центра масс робота от центра плота.

### 4.1.2. Модель сопротивления воды

Возьмем репер  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$ , жестко связанный с плотом. При движении плота на него, помимо архимедовой силы, внешних сил и

моментов, действуют силы сопротивления воды. Для расчета этих сил предположим, что удельная сила сопротивления воды  $\mathbf{R}_{sp}$ , действующая на каждый элемент погруженной в воду части плота, выражается формулой

$$\mathbf{R}_{sp} = -\varkappa \mathbf{v}_\tau - \varkappa_1 \boldsymbol{\nu} |v_\nu| v_\nu = -\varkappa \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu} (\varkappa_1 |v_\nu| - \varkappa) v_\nu, \quad (4.1.29)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость характерной точки этого элемента,  $\boldsymbol{\nu}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности плота,  $\mathbf{v}_\tau$  — составляющая скорости, касательная к элементу плота,  $v_\nu = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}$  — перпендикулярная к площадке составляющая скорости,  $\varkappa \geq 0$  и  $\varkappa_1 \geq 0$  — соответствующие коэффициенты пропорциональности, причем по имеющимся экспериментальным данным для воды  $\varkappa_1 \gg \varkappa$ .

Формула (4.1.29) дает весьма приближенное, но качественно верное представление о силах сопротивления воды при движении элементарной плоской площадки плота, хотя и весьма приближенно учитывает процесс обтекания плота водой и процесс волнообразования [47, 48]. Вместе с тем при колебаниях плота на воде скорости точек плота относительно воды будут невелики, но характер обтекания не будет установившимся, а поэтому точный расчет сил сопротивления составит значительные вычислительные трудности и невозможен без привлечения экспериментальных данных. Для обеспечения приемлемо простого с вычислительной точки зрения и вместе с тем правдоподобного моделирования возмущений из-за влияния сопротивления воды на плот воспользуемся в дальнейшем приближением формулы (4.1.29). Из этой формулы, в частности, следует, что для значений  $0 < |v_\nu| < \varkappa/\varkappa_1$  множитель при  $\boldsymbol{\nu}$  в ней будет пренебрежимо мал.

Поскольку в норме верхняя часть плота находится над водой, будем считать, что силы сопротивления воды приложены только к днищу плота и к его боковым поверхностям.

Для элементов днища плота получим

$$\mathbf{R}_{sp} = -\varkappa \mathbf{v} + \mathbf{e}'_3 (\varkappa_1 |v_z| - \varkappa) v_z, \quad (4.1.30)$$

т.к. для этих элементов  $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{e}'_3$  и  $v_z = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{v}$ . При этом характерная точка днища плота имеет радиус-вектор  $\boldsymbol{\rho}_d = (x, y, -d)$ .

Допустим, что при воздействии сил сопротивления воды на боковую поверхность плота членом  $\varkappa \mathbf{v}_\tau$  в формуле (4.1.29) можно пренебречь. Для боковых поверхностей плота, идущих вдоль вектора  $\mathbf{e}'_1$ ,

получим

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{cases} \mathbf{e}'_2 & \text{при } v_y \geq 0, \\ -\mathbf{e}'_2 & \text{при } v_y < 0. \end{cases} \quad (4.1.31)$$

Тогда элементарная сила сопротивления воды выражается формулой

$$\mathbf{R}_{sp} = -\alpha_1 \mathbf{e}'_2 |v_y| v_y. \quad (4.1.32)$$

а радиус-векторы  $\boldsymbol{\rho}_a$  соответствующих точек боковой поверхности имеют координаты

$$\boldsymbol{\rho}_a = \begin{cases} (x, b, z) & \text{при } v_y \geq 0, \\ (x, -b, z) & \text{при } v_y < 0. \end{cases} \quad (4.1.33)$$

Аналогично для боковых поверхностей плота, идущих вдоль вектора  $\mathbf{e}'_2$ , получим

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{cases} \mathbf{e}'_1 & \text{при } v_x \geq 0, \\ -\mathbf{e}'_1 & \text{при } v_x < 0, \end{cases} \quad (4.1.34)$$

а элементарная сила сопротивления воды выражается формулой

$$\mathbf{R}_{sp} = -\alpha_1 \mathbf{e}'_1 |v_x| v_x. \quad (4.1.35)$$

Радиус-векторы  $\boldsymbol{\rho}_b$  соответствующих точек боковой поверхности имеют вид

$$\boldsymbol{\rho}_b = \begin{cases} (a, y, z) & \text{при } v_y \geq 0, \\ (-a, y, z) & \text{при } v_y < 0. \end{cases} \quad (4.1.36)$$

Для подсчета боковых сил и моментов пренебрежем перекосами плота относительно его центра и будем считать, что  $-d \leq z \leq \zeta_0$ , причем  $\zeta_0$  соответствует равновесному положению плота, при котором архимедова сила и вертикальная составляющая  $\mathbf{F}_{eq}$  активной силы, отвечающая горизонтальному равновесному положению плота, компенсируются:

$$\zeta_0 = -\frac{(\mathbf{F}_{eq} \cdot \mathbf{e}_3)}{4\gamma ab} - d. \quad (4.1.37)$$

Для силы  $\mathbf{R}$  и момента  $\mathbf{N}$  сопротивления воды относительно центра масс плота  $C_p$  получим выражения

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^a + \mathbf{A}^b, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B}^d + \mathbf{B}^a + \mathbf{B}^b, \quad (4.1.38)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^d &= -\varkappa \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{v} dx dy - \mathbf{e}'_3 \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\varkappa_1 |v_z| - \varkappa) v_z dy dx, \\
 \mathbf{A}^a &= -\varkappa_1 \mathbf{e}'_2 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a |v_y| v_y dx dz, \quad \mathbf{A}^b = -\varkappa_1 \mathbf{e}'_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b |v_x| v_x dy dz, \\
 \mathbf{B}^d &= -\varkappa \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{v} dy dx - \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}'_3 (\varkappa_1 |v_z| - \varkappa) v_z dy dx, \\
 \mathbf{B}^a &= -\varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a \boldsymbol{\rho}_a \times \mathbf{e}'_2 |v_y| v_y dx dz, \quad \mathbf{B}^b = -\varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_b \times \mathbf{e}'_1 |v_x| v_x dy dz,
 \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

причем  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}'_1 + q\mathbf{e}'_2 + r\mathbf{e}'_3$  есть угловая скорость плота в репере  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$ ,  $\mathbf{v}_p$  — скорость центра  $C_p$  плота, составляющие скорости, перпендикулярные к поверхностям плота, даются выражениями

$$\begin{aligned}
 v_x &= V_x + qz - ry, & V_x &= \dot{\xi} a_{11} + \dot{\eta} a_{21} + \dot{\zeta} a_{31}, \\
 v_y &= V_y + rx - pz, & V_y &= \dot{\xi} a_{12} + \dot{\eta} a_{22} + \dot{\zeta} a_{32}, \\
 v_z &= V_z + py - qx, & V_z &= \dot{\xi} a_{13} + \dot{\eta} a_{23} + \dot{\zeta} a_{33},
 \end{aligned}$$

причем  $\mathbf{r}_p = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 - \zeta \mathbf{e}_3$  — радиус-вектор центра масс плота в репере  $O\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ .

Вычислим интегралы, входящие в формулы (4.1.39).

1. Для первой формулы (4.1.39) получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^d &= -\varkappa \mathbf{S} - \mathbf{e}'_3 J^d, \quad \mathbf{S} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{v} dx dy, \\
 J^d &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\varkappa_1 |v_z| - \varkappa) v_z dy dx.
 \end{aligned} \tag{4.1.40}$$

Возьмем  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{e}'_3$  в неподвижном репере  $O\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ :  $\mathbf{S} = S_\xi \mathbf{e}_1 + S_\eta \mathbf{e}_2 + S_\zeta \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}'_3 = a_{13} \mathbf{e}_1 + a_{23} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3$ . Интеграл  $J^d$  представим в виде

$$\begin{aligned}
 J^d &= \varkappa_1 J_1^d - \varkappa J_2^d, \\
 J_1^d &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b |v_z| v_z dy dx, \quad J_2^d = \int_{-a}^a \int_{-b}^b v_z dy dx.
 \end{aligned} \tag{4.1.41}$$



После интегрирования имеем

$$\begin{aligned} S_\xi &= 4ab[(qa_{11} - pa_{12})d + \dot{\xi}], \\ S_\eta &= 4ab[(qa_{21} - pa_{22})d + \dot{\eta}], \\ S_\zeta &= 4ab[(qa_{31} - pa_{32})d - \dot{\zeta}], \\ J_2^d &= 4abV_z. \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

Выражения для компонент составляющей  $\mathbf{A}^d$  силы сопротивления можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_\xi^d &= -4\alpha ab \left[ \dot{\xi} + (qa_{11} - pa_{12})d - a_{13}V_z \right] - \alpha_1 J_1^d a_{13}, \\ A_\eta^d &= -4\alpha ab \left[ \dot{\eta} + (qa_{21} - pa_{22})d - a_{23}V_z \right] - \alpha_1 J_1^d a_{23}, \\ A_\zeta^d &= 4\alpha ab \left[ \dot{\zeta} - (qa_{31} - pa_{32})d + a_{33}V_z \right] - \alpha_1 J_1^d a_{33}. \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

При вычислении интеграла  $J_1^d$  необходимо учесть, что значение  $v_z$  может изменить знак в области интегрирования. Рассмотрим возможные случаи.

1.1.  $p = q = 0$ . Тогда, очевидно,  $v_z \equiv V_z$ , и

$$J_1^d = 4ab|V_z|V_z. \quad (4.1.44)$$

1.2.  $p = 0$ ,  $q \neq 0$ . Тогда  $v_z = V_z - qx$ , и

$$J_1^d = 2b|q|q \int_{-a}^a \left| \frac{V_z}{q} - x \right| \left( \frac{V_z}{q} - x \right) dx.$$

Следовательно,

$$J_1^d = 2b|q|q \begin{cases} -\frac{2a}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{V_z}{q} < -a, \\ \frac{2V_z}{3q} \left[ \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + 3a^2 \right], & \text{если } -a \leq \frac{V_z}{q} < a, \\ \frac{2a}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{V_z}{q} \geq a. \end{cases} \quad (4.1.45)$$

1.3.  $p \neq 0$ ,  $q = 0$ . Тогда  $v_z = V_z + py$ , и

$$J_1^d = 2a|p|p \int_{-b}^b \left| \frac{V_z}{p} + y \right| \left( \frac{V_z}{p} + y \right) dy.$$

Поэтому

$$J_1^d = 2a|p|p \begin{cases} -\frac{2b}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{p} \right)^2 + b^2 \right], & \text{если } \frac{V_z}{p} < -b, \\ \frac{2V_z}{3p} \left[ \left( \frac{V_z}{p} \right)^2 + 3b^2 \right], & \text{если } -b \leq \frac{V_z}{p} < b, \\ \frac{2b}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{p} \right)^2 + b^2 \right], & \text{если } \frac{V_z}{p} \geq b. \end{cases} \quad (4.1.46)$$

1.4.  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$ . Тогда

$$J_1^d = |q|q \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left| \frac{V_z}{q} + \frac{p}{q}y - x \right| \cdot \left( \frac{V_z}{q} + \frac{p}{q}y - x \right) dx dy.$$

Для того чтобы учесть возможность разных знаков  $p$  и  $q$ , заменим  $y$  на другую переменную

$$s = \begin{cases} y, & \text{при } pq > 0, \\ -y, & \text{при } pq < 0. \end{cases} \quad (4.1.47)$$

С учетом свойств определенных интегралов получим

$$J_1^d = |q|q \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left| \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s - x \right| \cdot \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s - x \right) dx ds.$$

Обозначим

$$f(s) = \int_{-a}^a \left| \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s - x \right| \cdot \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s - x \right) dx.$$

Интегрирование дает

$$f(s) = \begin{cases} -\frac{2a}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s \right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s < -a, \\ \frac{2}{3} \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s \right) \left[ \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s \right)^2 + 3a^2 \right], & \text{если } -a \leq \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s < a, \\ \frac{2a}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s \right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s \geq a. \end{cases}$$

После интегрирования по  $s$  получим

1.4.1. Для  $|p/q| < a/b$ :

$$J_1^d = |q|q \begin{cases} -\frac{4ab}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + \left( \frac{pb}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \frac{V_z}{q} < -a - \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ D_1, & -a - \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < -a + \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ 4 \frac{V_z}{q} b \left\{ \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + \left( \frac{pb}{q} \right)^2 \right] + a^2 \right\}, & -a + \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < a - \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ D_2, & a - \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < a + \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ \frac{4ab}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + \left( \frac{pb}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \frac{V_z}{q} \geq a + \left| \frac{p}{q} \right| b, \end{cases} \quad (4.1.48)$$

где

$$D_1 = \left| \frac{q}{p} \right| \left\{ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^4 + a^4 \right] + a^2 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^2 + \frac{2a}{3} \left[ \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^3 + a^2 \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right) \right] \right\},$$

$$D_2 = \left| \frac{q}{p} \right| \left\{ \frac{2a}{3} \left[ \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^3 + a^2 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right) \right] - \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^4 + a^4 \right] - a^2 \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^2 \right\}.$$

1.4.2. Для  $|p/q| \geq a/b$ :

$$J_1^d = |q|q \begin{cases} -\frac{4ab}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + \left( \frac{pb}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } \frac{V_z}{q} < -a - \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ D_1, & \text{при } -a - \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < a - \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ \frac{4a|q|}{3|p|} \frac{V_z}{q} \left[ \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + 3 \left( \frac{pb}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } a - \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < \left| \frac{p}{q} \right| b - a, \\ D_2, & \text{при } \left| \frac{p}{q} \right| b - a \leq \frac{V_z}{q} < a + \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ \frac{4ab}{3} \left[ 3 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 + \left( \frac{pb}{q} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } \frac{V_z}{q} \geq a + \left| \frac{p}{q} \right| b. \end{cases} \quad (4.1.49)$$

2. Для второй формулы (4.1.39) будем иметь

$$\mathbf{A}^a = -\varkappa_1 \mathbf{e}'_2 J^a, \quad J^a = \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a |V_y + rx - pz| (V_y + rx - pz) dx dz. \quad (4.1.50)$$

Рассмотрим отдельные случаи.

2.1.  $p = r = 0$ . Тогда, с учетом равенства (4.1.37),

$$J^a = -\frac{(\mathbf{F}_{eq} \cdot \mathbf{e}_3)}{2\gamma b} |V_y| V_y. \quad (4.1.51)$$

2.2.  $p \neq 0, r = 0$ . Тогда

$$J^a = \frac{2a}{3} |p| p \begin{cases} \left(\frac{V_y}{p} - \zeta_0\right)^3 - \left(\frac{V_y}{p} + d\right)^3, & \text{если } \frac{V_y}{p} < -d, \\ \left(\frac{V_y}{p} - \zeta_0\right)^3 + \left(\frac{V_y}{p} + d\right)^3, & \text{если } -d \leq \frac{V_y}{p} < \zeta_0, \\ \left(\frac{V_y}{p} + d\right)^3 - \left(\frac{V_y}{p} - \zeta_0\right)^3, & \text{если } \zeta_0 \leq \frac{V_y}{p}. \end{cases} \quad (4.1.52)$$

2.3.  $p = 0, r \neq 0$ . Тогда

$$J^a = \frac{2(\zeta_0 + d)}{3} |r| r \begin{cases} -a \left[ 3 \left(\frac{V_y}{r}\right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{V_y}{r} < -a, \\ \frac{V_y}{r} \left[ \left(\frac{V_y}{r}\right)^2 + 3a^2 \right], & \text{если } -a \leq \frac{V_y}{r} < a, \\ a \left[ 3 \left(\frac{V_y}{r}\right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{V_y}{r} > a. \end{cases} \quad (4.1.53)$$

2.4.  $p \neq 0, r \neq 0$ . Тогда

$$J^a = |r| r \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a \left| \frac{V_y}{r} - \frac{p}{r} z + x \right| \cdot \left( \frac{V_y}{r} - \frac{p}{r} z + x \right) dx dz.$$

Для уменьшения числа исследуемых вариантов сделаем симметричными пределы интегрирования по  $z$  с помощью замены переменной

$$\hat{z} = z - \frac{\zeta_0 - d}{2}, \quad \hat{d} = \frac{\zeta_0 + d}{2} > 0. \quad (4.1.54)$$

С новой переменной  $\hat{z}$  выражение для  $J^a$  представляется в виде

$$J^a = |r|r \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-a}^a \left| \frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r} \hat{z} + x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r} \hat{z} + x \right) dx d\hat{z}, \quad (4.1.55)$$

$$\hat{V}_y = V_y - p \frac{\zeta_0 - d}{2}.$$

Вместо  $\hat{z}$  введем другую переменную интегрирования

$$\hat{s} = \begin{cases} -\hat{z}, & \text{при } pr > 0, \\ \hat{z}, & \text{при } pr < 0. \end{cases}$$

С учетом свойств определенных интегралов получим

$$J^a = |r|r \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-a}^a \left| \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} + x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} + x \right) dx d\hat{s}.$$

Обозначим

$$\hat{f}(\hat{s}) = \int_{-a}^a \left| \frac{\hat{V}_z}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} + x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_z}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} + x \right) dx.$$

Интегрирование дает

$$\hat{f}(\hat{s}) = \begin{cases} -\frac{2a}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} \right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} < -a, \\ \frac{2}{3} \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} \right) \left[ \left( \frac{\hat{V}_z}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} \right)^2 + 3a^2 \right], & \text{если } -a \leq \frac{\hat{V}_z}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} < a, \\ \frac{2a}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} \right)^2 + a^2 \right], & \text{если } \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{s} \geq a. \end{cases}$$

После интегрирования по  $\hat{s}$  получим

2.4.1. Для  $|p/r| < a/\hat{d}$ :

$$\frac{J^a}{|r|r} = \begin{cases} -\frac{4a\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 + \left( \frac{p\hat{d}}{r} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_y}{r} < -a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \hat{D}_1, & \text{при } -a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < -a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ 4 \frac{\hat{V}_y}{r} \hat{d} \left\{ \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 + \left( \frac{p\hat{d}}{r} \right)^2 \right] + a^2 \right\}, & \text{при } -a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \hat{D}_2, & \text{при } a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{4a\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 + \left( \frac{p\hat{d}}{r} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_y}{r} \geq a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \end{cases} \quad (4.1.56)$$

где

$$\hat{D}_1 = \left| \frac{r}{p} \right| \left\{ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^4 + a^4 \right] + a^2 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^2 + \frac{2a}{3} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^3 + a^2 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right) \right] \right\},$$

$$\hat{D}_2 = \left| \frac{r}{p} \right| \left\{ \frac{2a}{3} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^3 + a^2 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right) \right] - \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^4 + a^4 \right] - a^2 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^2 \right\}.$$

2.4.2. Для  $|p/r| > a/\hat{d}$ :

$$\frac{J^a}{|r|r} = \begin{cases} -\frac{4a\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 + \left( \frac{p\hat{d}}{r} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_y}{r} < -a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \hat{D}_1, & \text{при } -a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{4a|r|}{3|p|} \frac{\hat{V}_y}{r} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 + 3 \left( \frac{p\hat{d}}{r} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} - a, \\ \hat{D}_2, & \text{при } \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} - a \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{4a\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 + \left( \frac{p\hat{d}}{r} \right)^2 + a^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_y}{r} \geq a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}. \end{cases} \quad (4.1.57)$$

3. Для второй формулы (4.1.39) будем иметь

$$\mathbf{A}^b = -\varkappa_1 \mathbf{e}'_1 J^b, \quad J^b = \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b |V_x + qz - ry| (V_x + qz - ry) dy dz, \quad (4.1.58)$$

Рассмотрим отдельные случаи.

3.1.  $q = r = 0$ . Тогда, с учетом равенства (4.1.37),

$$J^b = -\frac{(\mathbf{F}_{eq} \cdot \mathbf{e}_3)}{2\gamma a} |V_x| V_x. \quad (4.1.59)$$

3.2.  $q \neq 0, r = 0$ . Тогда

$$J^b = \frac{2b}{3} |q| q \begin{cases} \left[ \left( \frac{V_x}{q} - \zeta_0 \right)^3 - \left( \frac{V_x}{q} + d \right)^3 \right], & \text{если } \frac{V_x}{q} < -d, \\ \left[ \left( \frac{V_x}{q} - \zeta_0 \right)^3 + \left( \frac{V_x}{q} + d \right)^3 \right], & \text{если } -d \leq \frac{V_x}{q} < \zeta_0, \\ \left[ \left( \frac{V_x}{q} + d \right)^3 - \left( \frac{V_x}{q} - \zeta_0 \right)^3 \right], & \text{если } \zeta_0 \leq \frac{V_x}{q}. \end{cases} \quad (4.1.60)$$

3.3.  $q = 0, r \neq 0$ . Тогда

$$J^b = \frac{2(\zeta_0 + d)}{3} |r| r \begin{cases} -b \left[ 3 \left( \frac{V_x}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{если } \frac{V_x}{r} < -b, \\ \frac{V_x}{r} \left[ \left( \frac{V_x}{r} \right)^2 + 3b^2 \right], & \text{если } -b \leq \frac{V_x}{r} < b, \\ b \left[ 3 \left( \frac{V_x}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{если } \frac{V_x}{r} > b. \end{cases} \quad (4.1.61)$$

3.4.  $q \neq 0, r \neq 0$ . Тогда

$$J^b = |r| r \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b \left| \frac{V_x}{r} + \frac{q}{r} z - y \right| \cdot \left( \frac{V_x}{r} + \frac{q}{r} z - y \right) dy dz.$$

С помощью замены переменной (4.1.54) представим выражение для  $J^b$  в виде

$$J^b = |r| r \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-b}^b \left| \frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r} \hat{z} - y \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r} \hat{z} - y \right) dy d\hat{z}, \quad (4.1.62)$$

$$\hat{V}_x = V_x + q \frac{\zeta_0 - d}{2}.$$

Вместо  $\hat{z}$  введем другую переменную интегрирования

$$\tilde{s} = \begin{cases} \hat{z}, & \text{при } pr > 0, \\ -\hat{z}, & \text{при } pr < 0. \end{cases}$$

С учетом свойств определенных интегралов получим

$$J^b = |r| r \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-b}^b \left| \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} - y \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} - y \right) dy d\tilde{s}.$$

Обозначим

$$\tilde{f}(\tilde{s}) = \int_{-b}^b \left| \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} - y \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} - y \right) dy.$$



Интегрирование дает

$$\tilde{f}(\tilde{s}) = \begin{cases} -\frac{2b}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} \right)^2 + b^2 \right], & \text{если } \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} < -b, \\ \frac{2}{3} \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} \right) \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} \right)^2 + 3b^2 \right], & \text{если } -b \leq \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} < b, \\ \frac{2b}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} \right)^2 + b^2 \right], & \text{если } \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \tilde{s} > b. \end{cases}$$

После интегрирования по  $\tilde{s}$  получим

3.4.1. Для  $|q/r| < b/\hat{d}$ :

$$\frac{J^b}{|r|r} = \begin{cases} -\frac{4b\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 + \left( \frac{q\hat{d}}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_x}{r} < -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \tilde{D}_1, & \text{при } -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < -b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ 4 \frac{\hat{V}_x}{r} \hat{d} \left\{ \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 + \left( \frac{q\hat{d}}{r} \right)^2 \right] + b^2 \right\}, & \text{при } -b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \tilde{D}_2, & \text{при } b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{4b\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 + \left( \frac{q\hat{d}}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_x}{r} \geq b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \end{cases} \quad (4.1.63)$$

где

$$\tilde{D}_1 = \left| \frac{r}{q} \right| \left\{ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^4 + b^4 \right] + b^2 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^2 + \frac{2b}{3} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^3 + b^2 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right) \right] \right\},$$

$$\tilde{D}_2 = \left| \frac{r}{q} \right| \left\{ \frac{2b}{3} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^3 + b^2 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right) \right] - \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^4 + b^4 \right] - b^2 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^2 \right\}.$$

3.4.2. Для  $|q/r| > b/\hat{d}$ :

$$\frac{J^b}{|r|r} = \begin{cases} -\frac{4b\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 + \left( \frac{q\hat{d}}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_x}{r} < -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \tilde{D}_1, & -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{4b|r|\hat{V}_x}{3|q|r} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 + 3 \left( \frac{q\hat{d}}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{при } b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} - b, \\ \tilde{D}_2, & \text{при } \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} - b \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{4b\hat{d}}{3} \left[ 3 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 + \left( \frac{q\hat{d}}{r} \right)^2 + b^2 \right], & \text{при } \frac{\hat{V}_x}{r} > b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}. \end{cases} \quad (4.1.64)$$

Перейдем к вычислению моментов сил сопротивления, определенных формулами (4.1.38). При этом будем считать, что сила сопротивления приложена к той стороне плота, для которой скорость соответствующего элемента плота направлена в сторону внешней нормали. Четвертую формулу (4.1.39) можно представить в виде

$$\mathbf{B}^d = -\mathbf{B}_1^d - \mathbf{B}_2^d,$$

где

$$\mathbf{B}_1^d = \varkappa \left( \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{v} dy dx - \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3 v_z dy dx \right),$$

$$\mathbf{B}_2^d = \varkappa_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}'_3 |v_z| v_z dy dx.$$

Выражение для момента  $\mathbf{B}_1^d$  можно переписать в виде

$$\mathbf{B}_1^d = \varkappa \left[ \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d dx dy \times \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho_d^2 dx dy - \right. \\ \left. - \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_d) dx dy - \int_{-a}^a \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}'_3 v_z dx dy \right].$$

Выполняя интегрирование, найдем для  $\mathbf{B}_1^d = B_{1x}^d \mathbf{e}'_1 + B_{1y}^d \mathbf{e}'_2 + B_{1z}^d \mathbf{e}'_3$ :

$$\begin{aligned} B_{1x}^d &= 4\alpha ab[d(\dot{\xi}a_{12} + \dot{\eta}a_{22} - \dot{\zeta}a_{32}) + pd^2], \\ B_{1y}^d &= 4\alpha ab[-d(\dot{\xi}a_{11} + \dot{\eta}a_{21} - \dot{\zeta}a_{31}) + qd^2], \\ B_{1z}^d &= \frac{4}{3}\alpha ab r(a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (4.1.65)$$

4. Вычислим вектор  $\mathbf{B}_2^d = B_{2x}^d \mathbf{e}'_1 + B_{2y}^d \mathbf{e}'_2 + B_{2z}^d \mathbf{e}'_3$ . Учтем, что  $\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}'_3 = y\mathbf{e}'_1 - x\mathbf{e}'_2$ . Поэтому  $B_{2z}^d = 0$ . Чтобы получить формулы для других компонент, рассмотрим возможные случаи.

4.1.  $p = q = 0$ . Тогда  $\mathbf{B}_2^d = 0$ .

4.2.  $p = 0, q \neq 0$ . Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} B_{2x}^d &= \alpha_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b y|V_z - qx|(V_z - qx) dy dx = \\ &= \alpha_1 \int_{-a}^a |V_z - qx|(V_z - qx) \int_{-b}^b y dy dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2y}^d &= -\alpha_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b x|V_z - qx|(V_z - qx) dy dx = \\ &= -2\alpha_1 b|q|q \int_{-a}^a x \left| \frac{V_z}{q} - x \right| \left( \frac{V_z}{q} - x \right) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_{2y}^d = -2\alpha_1 b|q|q \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{V_z}{q} a^3, & \text{если } \frac{V_z}{q} < -a, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_z}{q} \right)^4 - 6a^2 \left( \frac{V_z}{q} \right)^2 - 3a^4 \right], & \text{если } -a \leq \frac{V_z}{q} < a, \\ -\frac{4}{3} \frac{V_z}{q} a^3, & \text{если } \frac{V_z}{q} \geq a. \end{cases} \quad (4.1.66)$$

4.3.  $p \neq 0, q = 0$ . Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} B_{2x}^d &= \varkappa_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b y |V_z + py| (V_z + py) dy dx = \\ &= 2\varkappa_1 a |p| p \int_{-b}^b y \left| \frac{V_z}{p} + y \right| \left( \frac{V_z}{p} + y \right) dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2y}^d &= -\varkappa_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b x |V_z + py| (V_z + py) dy dx = \\ &= -\varkappa_1 \int_{-b}^b |V_z + py| (V_z + py) \int_{-a}^a x dx dy = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_{2x}^d = -2\varkappa_1 a |p| p \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{V_z}{p} b^3, & \text{если } \frac{V_z}{p} < -b, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_z}{p} \right)^4 - 6b^2 \left( \frac{V_z}{p} \right)^2 - 3b^4 \right], & \text{если } -b \leq \frac{V_z}{p} < b, \\ -\frac{4}{3} \frac{V_z}{p} b^3, & \text{если } \frac{V_z}{p} \geq b. \end{cases} \quad (4.1.67)$$

4.4.  $q \neq 0, r \neq 0$ . Тогда

$$B_{2x}^d = \varkappa_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b y |V_z + py - qx| (V_z + py - qx) dy dx.$$

$$B_{2y}^d = -\varkappa_1 \int_{-a}^a \int_{-b}^b x |V_z + py - qx| (V_z + py - qx) dy dx.$$

С помощью замен переменных, аналогичных (4.1.47),

$$s_y = \begin{cases} y, & \text{при } pq > 0, \\ -y, & \text{при } pq < 0, \end{cases} \quad s_x = \begin{cases} x, & \text{при } pq > 0, \\ -x, & \text{при } pq < 0, \end{cases}$$

преобразуем выражения для  $B_{2x}^d$  и  $B_{2y}^d$  к виду

$$B_{2x}^d = \varkappa_1 |p| p \int_{-a}^a \int_{-b}^b y \left| \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| s_x + y \right| \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| s_x + y \right) dy ds_x,$$

$$B_{2y}^d = -\varkappa_1 |q|q \int_{-b}^b \int_{-a}^a x \left| \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s_y - x \right| \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| s_y - x \right) dx ds_y.$$

Обозначим

$$V_z^x = V_z - \left| \frac{q}{p} \right| p s_x, \quad V_z^y = V_z + \left| \frac{p}{q} \right| q s_y.$$

Пусть, кроме того,

$$f_x(s_x) = \int_{-b}^b y \left| \frac{V_z^x}{p} + y \right| \cdot \left( \frac{V_z^x}{p} + y \right) dy,$$

$$f_y(s_y) = \int_{-a}^a x \left| \frac{V_z^y}{q} - x \right| \cdot \left( \frac{V_z^y}{q} - x \right) dx,$$

тогда

$$f_x(s_x) = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{V_z^x}{p} b^3, & \frac{V_z^x}{p} < -b, \\ -\frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_z^x}{p} \right)^4 - 6b^2 \left( \frac{V_z^x}{p} \right)^2 - 3b^4 \right], & -b \leq \frac{V_z^x}{p} < b, \\ \frac{4}{3} \frac{V_z^x}{p} b^3, & \frac{V_z^x}{p} \geq b. \end{cases} \quad (4.1.68)$$

$$f_y(s_y) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{V_z^y}{q} a^3, & \frac{V_z^y}{q} < -a, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_z^y}{q} \right)^4 - 6a^2 \left( \frac{V_z^y}{q} \right)^2 - 3a^4 \right], & -a \leq \frac{V_z^y}{q} < a, \\ -\frac{4}{3} \frac{V_z^y}{q} a^3, & \frac{V_z^y}{q} \geq a. \end{cases} \quad (4.1.69)$$

После повторного интегрирования правых частей формулы (4.1.68) по  $s_x$  и формулы (4.1.69) по  $s_y$  будем иметь

4.4.1.  $|p/q| < a/b$ :

$$\frac{B_{2x}^d}{\varkappa_1 |p| p} = \begin{cases} -\frac{8V_z}{3p} ab^3, & \text{при } \frac{V_z}{p} < -b - \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ L_1, & \text{при } -b - \left| \frac{q}{p} \right| a \leq \frac{V_z}{p} < b - \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ \left| \frac{4p}{3q} \right| b^3 \left[ \left( \frac{V_z}{p} \right)^2 + \left( \frac{q}{p} a \right)^2 + \frac{b^2}{5} \right], & \text{при } b - \left| \frac{q}{p} \right| a \leq \frac{V_z}{p} < \left| \frac{q}{p} \right| a - b, \\ L_2, & \text{при } \left| \frac{q}{p} \right| a - b \leq \frac{V_z}{p} < b + \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ \frac{8V_z}{3p} ab^3, & \text{при } \frac{V_z}{p} \geq b + \left| \frac{q}{p} \right| a, \end{cases} \quad (4.1.70)$$

где

$$L_1 = \frac{1}{6} \left| \frac{p}{q} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ 4b^5 - \left( \frac{V_z}{p} + \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^5 \right] + 2b^2 \left( \frac{V_z}{p} + \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^3 + \right. \\ \left. + 3b^4 \left( \frac{V_z}{p} + \left| \frac{q}{p} \right| a \right) + 4b^3 \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^2 \right\}. \\ L_2 = \frac{1}{6} \left| \frac{p}{q} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ 4b^5 + \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^5 \right] - 2b^2 \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^3 - \right. \\ \left. - 3b^4 \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| a \right) + 4b^3 \left( \frac{V_z}{p} + \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^2 \right\}.$$

Далее

$$B_{2y}^d = \varkappa_1 |q| q \begin{cases} \frac{8V_z}{3q} ba^3, & \text{если } \frac{V_z}{q} < -a - \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ \mathcal{L}_1, & \text{если } -a - \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < \left| \frac{p}{q} \right| b - a, \\ \mathcal{L}_2, & \text{если } \left| \frac{p}{q} \right| b - a \leq \frac{V_z}{q} < a - \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ \mathcal{L}_3, & \text{если } a - \left| \frac{p}{q} \right| b \leq \frac{V_z}{q} < a + \left| \frac{p}{q} \right| b, \\ -\frac{8V_z}{3q} ba^3, & \text{если } \frac{V_z}{q} \geq a + \left| \frac{p}{q} \right| b, \end{cases} \quad (4.1.71)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \frac{1}{6} \left| \frac{q}{p} \right| \left\{ 4a^3 \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^2 - \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^5 - 4a^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2a^2 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^3 + 3a^4 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right) \right\}, \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{6} \left| \frac{q}{p} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^5 - \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2a^2 \left[ \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^3 - \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^3 \right] + 6a^4 \left| \frac{p}{q} \right| b \right\}, \\ \mathcal{L}_3 &= \frac{1}{6} \left| \frac{q}{p} \right| \left\{ 4a^3 \left( \frac{V_z}{q} + \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^2 + \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^5 + 4a^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2a^2 \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right)^3 - 3a^4 \left( \frac{V_z}{q} - \left| \frac{p}{q} \right| b \right) \right\}.\end{aligned}$$

4.4.2.  $|p/q| > a/b$ :

$$B_{2x}^d = \varkappa_1 |p| p \begin{cases} -\frac{8V_z}{3p} ab^3, & \text{если } \frac{V_z}{p} < -b - \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ L_1, & \text{если } -b - \left| \frac{q}{p} \right| a \leq \frac{V_z}{p} < -b + \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ L_3, & \text{если } -b + \left| \frac{q}{p} \right| a \leq \frac{V_z}{p} < b - \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ L_2, & \text{если } b - \left| \frac{q}{p} \right| a \leq \frac{V_z}{p} < b + \left| \frac{q}{p} \right| a, \\ \frac{8V_z}{3p} ab^3, & \text{если } \frac{V_z}{p} \geq b + \left| \frac{q}{p} \right| a, \end{cases} \quad (4.1.72)$$

где

$$\begin{aligned}L_3 &= \frac{1}{6} \left| \frac{p}{q} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^5 - \left( \frac{V_z}{p} + \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2b^2 \left[ \left( \frac{V_z}{p} + \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^3 - \left( \frac{V_z}{p} - \left| \frac{q}{p} \right| a \right)^3 \right] + 6b^4 \left| \frac{q}{p} \right| a \right\},\end{aligned}$$

$$\frac{B_{2y}^d}{\varkappa_1|q|q} = \begin{cases} \frac{8V_z}{3q}ba^3, & \text{при } \frac{V_z}{q} < -a - \left|\frac{p}{q}\right|b, \\ \mathcal{L}_1, & \text{при } -a - \left|\frac{p}{q}\right|b \leq \frac{V_z}{q} < a - \left|\frac{p}{q}\right|b, \\ -\left|\frac{4q}{3p}\right|a^3 \left[ \left(\frac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}b\right)^2 + \frac{a^2}{5} \right], & \text{при } a - \left|\frac{p}{q}\right|b \leq \frac{V_z}{q} < \left|\frac{p}{q}\right|b - a, \\ \mathcal{L}_3, & \text{при } \left|\frac{p}{q}\right|b - a \leq \frac{V_z}{q} < a + \left|\frac{p}{q}\right|b, \\ -\frac{8V_z}{3q}ba^3, & \text{при } \frac{V_z}{q} \geq a + \left|\frac{p}{q}\right|b. \end{cases} \quad (4.1.73)$$

Перейдем к вычислению моментов сил сопротивления, действующих на боковые стороны.

5. Пятую формулу (4.1.39) можно представить в виде

$$\mathbf{B}^a = -\varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a \boldsymbol{\rho}_a \times \mathbf{e}'_2 |v_y| v_y dx dz = B_x^a \mathbf{e}'_1 + B_z^a \mathbf{e}'_3,$$

где

$$B_x^a = \varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a z |v_y| v_y dx dz, \quad B_z^a = -\varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-a}^a x |v_y| v_y dx dz,$$

$$v_y = V_y + rx - pz.$$

Воспользуемся заменой переменных (4.1.54). Тогда

$$B_x^a = \varkappa_1 \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-a}^a \hat{z} |\hat{V}_y - p\hat{z} + rx| \cdot (\hat{V}_y - p\hat{z} + rx) dx d\hat{z} + \varkappa_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a,$$

$$B_z^a = -\varkappa_1 \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-a}^a x |\hat{V}_y - p\hat{z} + rx| \cdot (\hat{V}_y - p\hat{z} + rx) dx d\hat{z},$$

где  $J^a$  определено формулой (4.1.50), а  $\hat{V}_y$  — формулой (4.1.55).

Рассмотрим отдельные случаи.

5.1.  $p = r = 0$ . Тогда

$$B_x^a = \varkappa_1 a (\zeta_0^2 - d^2) |V_y| V_y, \quad B_z^a = 0. \quad (4.1.74)$$



5.2.  $p \neq 0, r = 0$ . Тогда

$$B_x^a = 2\alpha_1 a \mathcal{B}_x^a + \alpha_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a, \quad B_z^a = 0, \quad (4.1.75)$$

где

$$\mathcal{B}_x^a = \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} |\hat{V}_y - p\hat{z}| \cdot (\hat{V}_y - p\hat{z}) d\hat{z} = |p|p \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} \right) d\hat{z},$$

а  $J^a$  вычисляется по формулам (4.1.52). После интегрирования получим

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\hat{V}_y}{p} \hat{d}^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_y}{p} < -\hat{d}, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{p} \right)^4 - 6\hat{d}^2 \left( \frac{\hat{V}_y}{p} \right)^2 - 3\hat{d}^4 \right], & \text{если } -\hat{d} \leq \frac{\hat{V}_y}{p} < \hat{d}, \\ -\frac{4}{3} \frac{\hat{V}_y}{p} \hat{d}^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_y}{p} \geq \hat{d}. \end{cases} \quad (4.1.76)$$

5.3.  $p = 0, r \neq 0$ . Тогда

$$B_x^a = \alpha_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a, \quad B_z^a = -2\alpha_1 \hat{d} \mathcal{B}_z^a, \quad (4.1.77)$$

где

$$\mathcal{B}_z^a = \int_{-a}^a x |\hat{V}_y + rx| \cdot (\hat{V}_y + rx) dx = |r|r \int_{-a}^a x \left| \frac{\hat{V}_y}{r} + x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{r} + x \right) dx.$$

Отсюда

$$\mathcal{B}_z^a = -|r|r \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\hat{V}_y}{r} a^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_y}{r} < -a, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^4 - 6a^2 \left( \frac{\hat{V}_y}{r} \right)^2 - 3a^4 \right], & \text{если } -a \leq \frac{\hat{V}_y}{r} < a, \\ -\frac{4}{3} \frac{\hat{V}_y}{r} a^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_y}{r} \geq a. \end{cases} \quad (4.1.78)$$

5.4.  $p \neq 0, r \neq 0$ . Тогда

$$B_x^a = \alpha_1 \mathcal{B}_x^a + \alpha_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a, \quad B_z^a = -\alpha_1 \mathcal{B}_z^a, \quad (4.1.79)$$

где

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \int_{-a}^a \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \frac{r}{p}x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \frac{r}{p}x \right) d\hat{z}dx,$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r \int_{-a}^a \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} x \left| \frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r}\hat{z} + x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r}\hat{z} + x \right) d\hat{z}dx.$$

С помощью замен переменных, аналогичных (4.1.47),

$$s_x = \begin{cases} x, & \text{при } pr > 0, \\ -x, & \text{при } pr < 0, \end{cases} \quad s_z = \begin{cases} \hat{z}, & \text{при } pr > 0, \\ -\hat{z}, & \text{при } pr < 0 \end{cases}$$

преобразуем выражения для  $\mathcal{B}_x^a$  и  $\mathcal{B}_z^a$  к виду

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \int_{-a}^a \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \left| \frac{r}{p} \right| s_x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \left| \frac{r}{p} \right| s_x \right) d\hat{z}ds_x,$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r \int_{-a}^a \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} x \left| \frac{\hat{V}_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| s_z + x \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| s_z + x \right) ds_zdx.$$

Обозначим

$$V_y^x = \hat{V}_y + \left| \frac{r}{p} \right| ps_x, \quad V_y^z = \hat{V}_y - \left| \frac{p}{r} \right| rs_z.$$

Пусть, кроме того,

$$f_x^a(s_x) = \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{V_y^x}{p} - \hat{z} \right| \cdot \left( \frac{V_y^x}{p} - \hat{z} \right) d\hat{z},$$

$$f_z^a(s_z) = \int_{-a}^a x \left| \frac{V_y^z}{r} + x \right| \cdot \left( \frac{V_y^z}{r} + x \right) dx,$$

тогда

$$f_x^a(s_x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{V_y^x}{p} \hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_y^x}{p} < -\hat{d}, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_y^x}{p} \right)^4 - 6\hat{d}^2 \left( \frac{V_y^x}{p} \right)^2 - 3\hat{d}^4 \right], & \text{если } -\hat{d} \leq \frac{V_y^x}{p} < \hat{d}, \\ -\frac{4}{3} \frac{V_y^x}{p} \hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_y^x}{p} \geq \hat{d}. \end{cases} \quad (4.1.80)$$

$$f_z^a(s_z) = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{V_y^z}{r} a^3, & \text{если } \frac{V_y^z}{r} < -a, \\ -\frac{1}{6} \left[ \left( \frac{V_y^z}{r} \right)^4 - 6a^2 \left( \frac{V_y^z}{r} \right)^2 - 3a^4 \right], & \text{если } -a \leq \frac{V_y^z}{r} < a, \\ \frac{4}{3} \frac{V_y^z}{r} a^3, & \text{если } \frac{V_y^z}{r} \geq a. \end{cases} \quad (4.1.81)$$

После повторного интегрирования правых частей формулы (4.1.80) по  $s_x$  и формулы (4.1.81) по  $s_z$  будем иметь

5.4.1.  $|r/p| < \hat{d}/a$ :

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \begin{cases} \frac{8}{3} \frac{V_y}{p} a \hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_y}{p} < -\hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| a, \\ \mathcal{L}_1^a, & \text{если } -\hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| a \leq \frac{V_y}{p} < \left| \frac{r}{p} \right| a - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_2^a, & \text{если } \left| \frac{r}{p} \right| a - \hat{d} \leq \frac{V_y}{p} < \hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| a, \\ \mathcal{L}_3^a, & \text{если } \hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| a \leq \frac{V_y}{p} < \hat{d} + \left| \frac{r}{p} \right| a, \\ -\frac{8}{3} \frac{V_y}{p} a \hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_y}{p} \geq \hat{d} + \left| \frac{r}{p} \right| a, \end{cases} \quad (4.1.82)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^a &= \frac{1}{6} \left| \frac{p}{r} \right| \left\{ 4\hat{d}^3 \left( \frac{V_y}{p} - \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^2 - \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_y}{p} + \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^5 - 4\hat{d}^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{d}^2 \left( \frac{V_y}{p} + \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^3 + 3\hat{d}^4 \left( \frac{V_y}{p} + \left| \frac{r}{p} \right| a \right) \right\}. \\ \mathcal{L}_2^a &= \frac{1}{6} \left| \frac{p}{r} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_y}{p} - \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^5 - \left( \frac{V_y}{p} + \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{d}^2 \left[ \left( \frac{V_y}{p} + \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^3 - \left( \frac{V_y}{p} - \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^3 \right] + 6\hat{d}^4 \left| \frac{r}{p} \right| a \right\}, \\ \mathcal{L}_3^a &= \frac{1}{6} \left| \frac{p}{r} \right| \left\{ 4\hat{d}^3 \left( \frac{V_y}{p} + \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^2 + \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_y}{p} - \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^5 + 4\hat{d}^5 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{d}^2 \left( \frac{V_y}{p} - \left| \frac{r}{p} \right| a \right)^3 - 3\hat{d}^4 \left( \frac{V_y}{p} - \left| \frac{r}{p} \right| a \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{B}_z^a}{|r|r} = \begin{cases} -\frac{8V_y}{3r}\hat{d}a^3, & \text{если } \frac{V_y}{r} < -a - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ L_1^a, & \text{если } -a - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d} \leq \frac{V_y}{r} < a - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \left|\frac{4r}{3p}\right|a^3 \left[ \left(\frac{V_y}{r}\right)^2 + \left(\frac{p}{r}\hat{d}\right)^2 + \frac{a^2}{5} \right], & \text{если } a - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d} \leq \frac{V_y}{r} < \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d} - a, \\ L_2^a, & \text{если } \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d} - a \leq \frac{V_y}{r} < a + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \frac{8V_y}{3r}\hat{d}a^3, & \text{если } \frac{V_y}{r} \geq a + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \quad (4.1.83)$$

где

$$L_1^a = \frac{1}{6} \left|\frac{r}{p}\right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ 4a^5 - \left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^5 \right] + 2a^2 \left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3 + \right. \\ \left. + 3a^4 \left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right) + 4a^3 \left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^2 \right\}. \\ L_2^a = \frac{1}{6} \left|\frac{r}{p}\right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ 4a^5 + \left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^5 \right] - 2a^2 \left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3 - \right. \\ \left. - 3a^4 \left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right) + 4a^3 \left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^2 \right\}.$$

Далее

5.4.2.  $|r/p| > \hat{d}/a$ :

$$\frac{\mathcal{B}_x^a}{|p|p} = \begin{cases} \frac{8V_y}{3p}a\hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_y}{p} < -\hat{d} - \left|\frac{r}{p}\right|a, \\ \mathcal{L}_1^a, & \text{если } -\hat{d} - \left|\frac{r}{p}\right|a \leq \frac{V_y}{p} < \hat{d} - \left|\frac{r}{p}\right|a, \\ -\left|\frac{4p}{3r}\right|\hat{d}^3 \left[ \left(\frac{V_y}{p}\right)^2 + \left(\frac{r}{p}a\right)^2 + \frac{\hat{d}^2}{5} \right], & \text{если } \hat{d} - \left|\frac{r}{p}\right|a \leq \frac{V_y}{p} < \left|\frac{r}{p}\right|a - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_3^a, & \text{если } \left|\frac{r}{p}\right|a - \hat{d} \leq \frac{V_y}{p} < \hat{d} + \left|\frac{r}{p}\right|a, \\ -\frac{8V_y}{3p}a\hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_y}{p} \geq \hat{d} + \left|\frac{r}{p}\right|a, \end{cases} \quad (4.1.84)$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r \begin{cases} -\frac{8V_y}{3r} \hat{d}a^3, & \text{если } \frac{V_y}{r} < -a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ L_1^a, & \text{если } -a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_y}{r} < -a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ L_3^a, & \text{если } -a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_y}{r} < a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ L_2^a, & \text{если } a - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_y}{r} < a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{8V_y}{3r} \hat{d}a^3, & \text{если } \frac{V_y}{r} \geq a + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d}, \end{cases} \quad (4.1.85)$$

где

$$L_3^a = \frac{1}{6} \left| \frac{r}{p} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^5 - \left( \frac{V_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^5 \right] + \right. \\ \left. + 2a^2 \left[ \left( \frac{V_y}{r} + \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^3 - \left( \frac{V_y}{r} - \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right)^3 \right] + 6a^4 \left| \frac{p}{r} \right| \hat{d} \right\}.$$

6. Шестую формулу (4.1.39) можно представить в виде

$$\mathbf{B}^b = -\varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b \boldsymbol{\rho}_b \times \mathbf{e}'_1 |v_x| v_x dy dz = B_y^b \mathbf{e}'_2 + B_z^b \mathbf{e}'_3,$$

где

$$B_y^b = -\varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b z |v_x| v_x dy dz, \quad B_z^a = \varkappa_1 \int_{-d}^{\zeta_0} \int_{-b}^b y |v_x| v_x dy dz, \\ v_x = V_x + qz - ry.$$

Воспользуемся заменой переменных (4.1.54). Тогда

$$B_y^b = -\varkappa_1 \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-b}^b \hat{z} |\hat{V}_x + q\hat{z} - ry| (\hat{V}_x + q\hat{z} - ry) dy d\hat{z} - \varkappa_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \\ B_z^b = \varkappa_1 \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int_{-b}^b y |\hat{V}_x + q\hat{z} - ry| (\hat{V}_y + q\hat{z} - ry) dy d\hat{z},$$

где  $J^b$  определено формулой (4.1.58), а  $\hat{V}_x$  — формулой (4.1.62).

Рассмотрим отдельные случаи.

6.1.  $q = r = 0$ . Тогда

$$B_y^b = -\alpha_1 b (\zeta_0^2 - d^2) |V_x| V_x, \quad B_z^b = 0. \quad (4.1.86)$$

6.2.  $q \neq 0, r = 0$ . Тогда

$$B_y^b = -2\alpha_1 b \mathcal{B}_y^b - \alpha_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \quad B_z^b = 0, \quad (4.1.87)$$

где

$$\mathcal{B}_y^b = \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} |\hat{V}_x + q\hat{z}| \cdot (\hat{V}_x + q\hat{z}) d\hat{z} = |q|q \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} \right| \cdot \left( \frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} \right) d\hat{z},$$

а  $J^b$  вычисляется по формулам (4.1.60). После интегрирования получим

$$B_y^b = |q|q \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{\hat{V}_x}{q} \hat{d}^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_x}{q} < -\hat{d}, \\ -\frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{q} \right)^4 - 6\hat{d}^2 \left( \frac{\hat{V}_x}{q} \right)^2 - 3\hat{d}^4 \right], & \text{если } -\hat{d} \leq \frac{\hat{V}_x}{q} < \hat{d}, \\ \frac{4}{3} \frac{\hat{V}_x}{q} \hat{d}^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_x}{q} \geq \hat{d}. \end{cases} \quad (4.1.88)$$

6.3.  $q = 0, r \neq 0$ . Тогда

$$B_y^b = -\alpha_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \quad B_z^b = 2\alpha_1 \hat{d} \mathcal{B}_z^b, \quad (4.1.89)$$

где  $J^b$  вычисляется по формулам (4.1.61),

$$\mathcal{B}_z^b = \int_{-b}^b y |\hat{V}_x - ry| (\hat{V}_x - ry) dx = |r|r \int_{-b}^b y \left| \frac{\hat{V}_x}{r} - y \right| \left( \frac{\hat{V}_x}{r} - y \right) dy.$$

Отсюда

$$B_z^b = |r|r \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\hat{V}_x}{r} b^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_x}{r} < -b, \\ \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^4 - 6b^2 \left( \frac{\hat{V}_x}{r} \right)^2 - 3b^4 \right], & \text{если } -b \leq \frac{\hat{V}_x}{r} < b, \\ -\frac{4}{3} \frac{\hat{V}_x}{r} b^3, & \text{если } \frac{\hat{V}_x}{r} \geq b. \end{cases} \quad (4.1.90)$$

6.4.  $q \neq 0, r \neq 0$ . Тогда

$$B_y^b = -\varkappa_1 \mathcal{B}_y^b - \varkappa_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \quad B_z^b = \varkappa_1 \mathcal{B}_z^b, \quad (4.1.91)$$

где

$$\mathcal{B}_y^b = |q|q \int_{-b}^b \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} - \frac{r}{q}y \right| \left( \frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} - \frac{r}{q}y \right) d\hat{z}dy,$$

$$\mathcal{B}_z^b = |r|r \int_{-b}^b \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} y \left| \frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r}\hat{z} - y \right| \left( \frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r}\hat{z} - y \right) d\hat{z}dy.$$

С помощью замен переменных, аналогичных (4.1.47),

$$s_y = \begin{cases} -y, & \text{при } qr > 0, \\ y, & \text{при } qr < 0, \end{cases} \quad s_z = \begin{cases} -\hat{z}, & \text{при } qr > 0, \\ \hat{z}, & \text{при } qr < 0 \end{cases}$$

преобразуем выражения для  $\mathcal{B}_y^b$  и  $\mathcal{B}_z^b$  к виду

$$\mathcal{B}_y^b = -|q|q \int_{-b}^b \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} t_z \left| \frac{\hat{V}_x}{q} - t_z + \left| \frac{r}{q} \right| s_y \right| \left( \frac{\hat{V}_x}{q} - t_z + \left| \frac{r}{q} \right| s_y \right) dt_z ds_y,$$

$$\mathcal{B}_z^b = -|r|r \int_{-b}^b \int_{-\hat{d}}^{\hat{d}} t_y \left| \frac{\hat{V}_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| s_z + t_y \right| \left( \frac{\hat{V}_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| s_z + t_y \right) ds_z dt_y,$$

где  $t_z = -\hat{z}$ ,  $t_y = -y$ . Тогда для получения окончательного результата можно воспользоваться результатами раздела 5.4 с заменой

$$V_y \longrightarrow V_x, \quad a \longrightarrow b, \quad p \longrightarrow q.$$

В итоге будем иметь

6.4.1.  $|r/q| < \hat{d}/b$ :

$$\mathcal{B}_y^b = -|q|q \begin{cases} \frac{8}{3} \frac{V_x}{q} b \hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_x}{q} < -\hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| b, \\ \mathcal{L}_1^b, & \text{если } -\hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| b \leq \frac{V_x}{q} < \left| \frac{r}{p} \right| b - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_2^b, & \text{если } \left| \frac{r}{p} \right| b - \hat{d} \leq \frac{V_x}{q} < \hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| b, \\ \mathcal{L}_3^b, & \text{если } \hat{d} - \left| \frac{r}{p} \right| b \leq \frac{V_x}{q} < \hat{d} + \left| \frac{r}{p} \right| b, \\ -\frac{8}{3} \frac{V_x}{q} b \hat{d}^3, & \text{если } \frac{V_x}{q} \geq \hat{d} + \left| \frac{r}{p} \right| b, \end{cases} \quad (4.1.92)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1^b &= \frac{1}{6} \left| \frac{q}{r} \right| \left\{ 4\hat{d}^3 \left( \frac{V_x}{q} - \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^2 - \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_x}{q} + \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^5 - 4\hat{d}^5 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\hat{d}^2 \left( \frac{V_x}{q} + \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^3 + 3\hat{d}^4 \left( \frac{V_x}{q} + \left| \frac{r}{q} \right| b \right) \right\}, \\
\mathcal{L}_2^b &= \frac{1}{6} \left| \frac{q}{r} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_x}{q} - \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^5 - \left( \frac{V_x}{q} + \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^5 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\hat{d}^2 \left[ \left( \frac{V_x}{q} + \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^3 - \left( \frac{V_x}{q} - \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^3 \right] + 6\hat{d}^4 \left| \frac{r}{q} \right| b \right\}, \\
\mathcal{L}_3^b &= \frac{1}{6} \left| \frac{q}{r} \right| \left\{ 4\hat{d}^3 \left( \frac{V_x}{q} + \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^2 + \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_x}{q} - \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^5 + 4\hat{d}^5 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\hat{d}^2 \left( \frac{V_x}{q} - \left| \frac{r}{q} \right| b \right)^3 - 3\hat{d}^4 \left( \frac{V_x}{q} - \left| \frac{r}{q} \right| b \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{B}_z^b}{|r|r} = - \begin{cases} -\frac{8V_x}{3r} \hat{d} b^3, & \text{если } \frac{V_x}{r} < -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ L_1^b, & \text{если } -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_x}{r} < b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \left| \frac{4r}{3p} \right| b^3 \left[ \left( \frac{V_x}{r} \right)^2 + \left( \frac{q}{r} \hat{d} \right)^2 + \frac{b^2}{5} \right], & \text{если } b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_x}{r} < \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} - b, \\ L_2^b, & \text{если } \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} - b \leq \frac{V_x}{r} < b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{8V_x}{3r} \hat{d} b^3, & \text{если } \frac{V_x}{r} \geq b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \end{cases} \quad (4.1.93)$$

где

$$\begin{aligned}
L_1^b &= \frac{1}{6} \left| \frac{r}{q} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ 4b^5 - \left( \frac{V_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^5 \right] + 2b^2 \left( \frac{V_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^3 + \right. \\
&\quad \left. + 3b^4 \left( \frac{V_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right) + 4b^3 \left( \frac{V_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^2 \right\}, \\
L_2^b &= \frac{1}{6} \left| \frac{r}{q} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ 4b^5 + \left( \frac{V_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^5 \right] - 2b^2 \left( \frac{V_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^3 - \right. \\
&\quad \left. - 3b^4 \left( \frac{V_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right) + 4b^3 \left( \frac{V_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$



Далее

$$6.4.2. |r/q| > \hat{d}/b:$$

$$\mathcal{B}_y^b = -|q|q \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{3} \frac{V_x}{q} b \hat{d}^3, \text{ если } \frac{V_x}{q} < -\hat{d} - \left| \frac{r}{q} \right| b, \\ \mathcal{L}_1^b, \text{ если } -\hat{d} - \left| \frac{r}{q} \right| b \leq \frac{V_x}{q} < \hat{d} - \left| \frac{r}{q} \right| b, \\ -\left| \frac{4q}{3r} \right| \hat{d}^3 \left[ \left( \frac{V_x}{q} \right)^2 + \left( \frac{r}{q} b \right)^2 + \frac{\hat{d}^2}{5} \right], \text{ если } \hat{d} - \left| \frac{r}{q} \right| b \leq \frac{V_x}{q} < \left| \frac{r}{q} \right| b - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_3^b, \text{ если } \left| \frac{r}{q} \right| b - \hat{d} \leq \frac{V_x}{q} < \hat{d} + \left| \frac{r}{q} \right| b, \\ -\frac{8}{3} \frac{V_x}{q} b \hat{d}^3, \text{ если } \frac{V_x}{q} \geq \hat{d} + \left| \frac{r}{q} \right| b, \end{array} \right. \quad (4.1.94)$$

$$\mathcal{B}_z^b = -|r|r \left\{ \begin{array}{l} -\frac{8}{3} \frac{V_x}{r} \hat{d} b^3, \text{ если } \frac{V_x}{r} < -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ L_1^b, \text{ если } -b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_x}{r} < -b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ L_3^b, \text{ если } -b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_x}{r} < b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ L_2^b, \text{ если } b - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \leq \frac{V_x}{r} < b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \\ \frac{8}{3} \frac{V_x}{r} \hat{d} b^3, \text{ если } \frac{V_x}{r} \geq b + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d}, \end{array} \right. \quad (4.1.95)$$

где

$$L_3^b = \frac{1}{6} \left| \frac{r}{q} \right| \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{V_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^5 - \left( \frac{V_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^5 \right] + \right. \\ \left. + 2b^2 \left[ \left( \frac{V_x}{r} + \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^3 - \left( \frac{V_x}{r} - \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right)^3 \right] + 6b^4 \left| \frac{q}{r} \right| \hat{d} \right\}.$$

## 4.2. Уравнения движения плота на спокойной воде

Будем считать, что репер  $C_p \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$  соответствует главным центральным осям инерции плота, а его главные моменты инерции равны  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответственно. С учетом формул (4.1.2), (4.1.38) дина-

мические уравнения плота имеют вид [46]

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\mathbf{r}}_c &= \gamma(\zeta + d)4abe_3 + \mathbf{F} + \mathbf{R}, \\
 A\dot{p} + (C - B)qr &= -a_{32}s_1 + M_x + N_x, \\
 B\dot{q} + (A - C)pr &= a_{31}s_2 + M_y + N_y, \\
 C\dot{r} + (B - A)pq &= -\gamma\frac{4a_{31}a_{32}ab}{3a_{33}}(a^2 - b^2) + M_z + N_z, \\
 \dot{a}_{31} &= a_{33}q - a_{32}r, \\
 \dot{a}_{32} &= a_{31}r - a_{33}p, \\
 \dot{a}_{33} &= a_{32}p - a_{31}q,
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \gamma ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\}, \\
 s_2 &= \gamma ab \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( 2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

а  $p, q, r$  — проекции вектора угловой скорости на оси  $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ . В общем случае, чтобы замкнуть систему (4.2.1), к ней следует добавить еще шесть кинематических уравнений вида

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_{11} &= a_{13}q - a_{12}r, & \dot{a}_{21} &= a_{23}q - a_{22}r, \\
 \dot{a}_{12} &= a_{11}r - a_{13}p, & \dot{a}_{22} &= a_{21}r - a_{23}p, \\
 \dot{a}_{13} &= a_{12}p - a_{11}q, & \dot{a}_{33} &= a_{22}p - a_{21}q
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

или использовать соотношения (4.1.9), которые в рассматриваемом диапазоне угловых отклонений плота (плот не переворачивается:  $a_{33} > 0$ ) не имеют вырождений.

Непосредственная проверка с применением уравнений (4.2.3) подтверждает, что при выполнении условия согласования (4.1.6) и если  $\varkappa = \varkappa_1 = 0$ , система (4.2.1) допускает первый интеграл

$$K_e = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{K} = A\varrho a_{31} + B\varrho a_{32} + C\varrho a_{33} = c, \tag{4.2.4}$$

где  $\mathbf{K}$  — кинетический момент плота, а  $c$  — соответствующая постоянная интегрирования. В том случае, если условие согласования (4.1.6) выполнено, но  $\varkappa \neq 0$ , либо  $\varkappa_1 \neq 0$ , то проекция  $K_e = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{K}$  кинетического момента на вертикальную ось подчиняется уравнению

$$\dot{K}_e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3. \tag{4.2.5}$$

Если условие согласования (4.1.6) не выполнено и  $\varkappa \neq 0$ , либо  $\varkappa_1 \neq 0$ , то изменение проекции кинетического момента на вертикальную ось описывается уравнением

$$\dot{K}_e = (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{e}_3, \quad (4.2.6)$$

которое при желании можно применить вместо четвертого уравнения системы (4.2.1).

Для приближенного анализа свойств системы (4.2.1) примем предположение (4.1.11) о малости угловых отклонений плота от его невозмущенного исходного положения. Тогда  $p = \dot{\alpha}_1$ ,  $q = \dot{\alpha}_2$ ,  $r = \dot{\alpha}_3$ . Допустим также, что малы скорости  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\dot{\zeta}$  и отклонение  $\tilde{\zeta} = \zeta - \zeta_0$  по вертикали центра масс от его равновесного положения. Кроме того, будем считать, что внешние силы и моменты не зависят от смещения центра масс плота, но могут зависеть от поворотов плота. После линеаризации система (4.2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} &= \alpha_1 h_{11} + \alpha_2 h_{12} + \alpha_3 h_{13} + \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15} + F_\xi^{(0)}, \\ M\ddot{\eta} &= \alpha_1 h_{21} + \alpha_2 h_{22} + \alpha_3 h_{23} - \dot{\alpha}_1 h_{24} - \dot{\eta} h_{25} + F_\eta^{(0)}, \\ -M\ddot{\zeta} &= \tilde{\zeta} h_{30} + \alpha_1 h_{31} + \alpha_2 h_{32} + \alpha_3 h_{33} + \dot{\zeta} h_{34} + F_\zeta^{(0)}, \\ A\ddot{\alpha}_1 &= -\alpha_1 b_{11} + \alpha_2 b_{12} + \alpha_3 b_{13} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} + M_x^{(0)}, \\ B\ddot{\alpha}_2 &= \alpha_1 b_{21} - \alpha_2 b_{22} + \alpha_3 b_{23} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{25} + M_y^{(0)}, \\ C\ddot{\alpha}_3 &= \alpha_1 b_{31} + \alpha_2 b_{32} + \alpha_3 b_{33} - \dot{\alpha}_3 b_{34} + M_z^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

где коэффициенты  $h_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{\partial F_\xi}{\partial \alpha_1}, \quad h_{12} = \frac{\partial F_\xi}{\partial \alpha_2}, \quad h_{13} = \frac{\partial F_\xi}{\partial \alpha_3}, \quad h_{14} = 2\varkappa abd, \quad h_{15} = 4\varkappa ab, \\ h_{21} &= \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha_1}, \quad h_{22} = \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha_2}, \quad h_{23} = \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha_3}, \quad h_{24} = h_{14}, \quad h_{25} = h_{15}, \\ h_{30} &= 4\gamma ab, \quad h_{31} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial \alpha_1}, \quad h_{32} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial \alpha_2}, \quad h_{33} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial \alpha_3}, \quad h_{34} = h_{15}, \\ b_{11} &= \frac{1}{6}\gamma ab[8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_1}, \quad b_{12} = \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_2}, \quad b_{13} = \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_3}, \\ b_{21} &= \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_1}, \quad b_{22} = \frac{1}{6}\gamma ab[8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_2}, \quad b_{23} = \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_3}, \\ b_{31} &= \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_1}, \quad b_{32} = \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_2}, \quad b_{33} = \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_3}, \quad b_{14} = 4\varkappa ab \left( \frac{b^2}{3} + \frac{d^2}{4} \right), \\ b_{15} &= h_{14}, \quad b_{24} = 4\varkappa ab \left( \frac{a^2}{3} + \frac{d^2}{4} \right), \quad b_{25} = h_{14}, \quad b_{34} = \frac{4}{3}\varkappa ab(a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Видим, что в общем случае правые части системы (4.2.7) зависят от всех фазовых координат плота.

Условие согласования (4.1.6) принимает вид

$$M_z = \alpha_1 M_y - \alpha_2 M_x.$$

Если это условие выполнено, то

$$b_{31} = -M_x^{(0)}, \quad b_{32} = M_y^{(0)}, \quad b_{33} = 0, \quad M_z^{(0)} = 0.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

### 4.2.1. Постоянная вертикальная сила

Пусть сила  $\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_3$  приложена в точке плота, заданной радиус-вектором  $\mathbf{r}_s = x_s \mathbf{e}'_1 + y_s \mathbf{e}'_2 + z_s \mathbf{e}'_3$ . Составляющие момента этой силы выражаются формулами (4.1.20), а в линейном приближении они принимают вид

$$\begin{aligned} M_x &= P(\alpha_1 z_s - y_s), \\ M_y &= P(x_s + \alpha_2 z_s), \\ M_z &= -P(\alpha_1 x_s + \alpha_2 y_s). \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Проекции  $F_\xi$ ,  $F_\eta$ ,  $F_\zeta$  от углов поворота плота не зависят. Следовательно, получаются линейные уравнения

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} &= \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15}, \\ M\ddot{\eta} &= -\dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15}, \\ M\ddot{\zeta} &= -\dot{\zeta} h_{30} - \dot{\zeta} h_{15}, \\ A\ddot{\alpha}_1 &= -\alpha_1 \tilde{b}_{11} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} - P y_s, \\ B\ddot{\alpha}_2 &= -\alpha_2 \tilde{b}_{22} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{15} + P x_s, \\ C\ddot{\alpha}_3 &= -\alpha_1 P x_s - \alpha_2 P y_s - \dot{\alpha}_3 b_{34}, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

где коэффициенты  $\tilde{b}_{11}$  и  $\tilde{b}_{22}$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{11} &= \frac{1}{6} \gamma ab [8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - P z_s, \\ \tilde{b}_{22} &= \frac{1}{6} \gamma ab [8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - P z_s. \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Если исследовать движение в окрестности положения равновесия, определенного формулами (4.1.25), то уравнения (4.2.10) несколько

упрощаются:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\xi} &= \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15}, \\
 M\ddot{\eta} &= -\dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15}, \\
 M\ddot{\zeta} &= -\tilde{\zeta} h_{30} - \dot{\zeta} h_{15}, \\
 A\ddot{\alpha}_1 &= -\tilde{\alpha}_1 \tilde{b}_{11} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} h_{14}, \\
 B\ddot{\alpha}_2 &= -\tilde{\alpha}_2 \tilde{b}_{22} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} h_{14}, \\
 C\ddot{\alpha}_3 &= -\tilde{\alpha}_1 P x_s - \tilde{\alpha}_2 P y_s - \dot{\alpha}_3 b_{34},
 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

где

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + y_s/\varkappa_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 - x_s/\varkappa_2, \quad \tilde{\alpha}_3 = \alpha_3.$$

Правая часть третьего уравнения системы (4.2.12) зависит только от переменных  $\tilde{\zeta}$  и  $\dot{\zeta}$ , и оно описывает затухающие колебания плота вдоль вертикальной оси, а правые части остальных уравнений от этих переменных не зависят. Правые части первого, второго, четвертого и пятого уравнений (4.2.12) не зависят ни от  $\tilde{\alpha}_3$ , ни от  $\dot{\alpha}_3$ . Их можно выделить в отдельную замкнутую систему

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\xi} &= \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15}, \\
 M\ddot{\eta} &= -\dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15}, \\
 A\ddot{\alpha}_1 &= -\tilde{\alpha}_1 \tilde{b}_{11} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} h_{14}, \\
 B\ddot{\alpha}_2 &= -\tilde{\alpha}_2 \tilde{b}_{22} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} h_{14}.
 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Выпишем аналог уравнения для изменения полной энергии системы (4.2.13). Обозначим

$$E = \frac{1}{2} [M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + A\dot{\alpha}_1^2 + B\dot{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_1^2 b_{11} + \tilde{\alpha}_2^2 b_{22}]. \tag{4.2.14}$$

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = -h_{15}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \dot{\alpha}_1^2 b_{14} - \dot{\alpha}_2^2 b_{24} + 2h_{14}(\dot{\xi}\dot{\alpha}_2 - \dot{\eta}\dot{\alpha}_1). \tag{4.2.15}$$

Рассмотрим выражение

$$h_{15}\dot{\xi}^2 + \dot{\alpha}_2^2 b_{24} - 2h_{14}\dot{\xi}\dot{\alpha}_2 = 4\varkappa ab \left[ \left( \dot{\xi} - \frac{d}{2}\dot{\alpha}_2 \right)^2 + \frac{a^2}{3}\dot{\alpha}_2^2 \right] > 0.$$

Аналогично

$$h_{15}\dot{\eta}^2 + \dot{\alpha}_1^2 b_{14} + 2h_{14}\dot{\eta}\dot{\alpha}_1 = 4\varkappa ab \left[ \left( \dot{\eta} + \frac{d}{2}\dot{\alpha}_1 \right)^2 + \frac{b^2}{3}\dot{\alpha}_1^2 \right] > 0.$$

Получается, что положительно определенная функция  $E$  имеет отрицательно определенную производную в силу уравнений движения. Поэтому, как и следовало ожидать, решение системы (4.2.13) асимптотически устойчиво [22].

Другими словами, при движении плота под действием постоянной вертикальной силы происходит асимптотическое успокоение всех координат с той лишь разницей, что по координатам  $\zeta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  успокоение происходит при достижении ими равновесного положения, определенного формулами (4.1.25), (4.1.37), а по координатам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\alpha_3$  — в том положении, которое было достигнуто ими в процессе успокоения координат  $\zeta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

#### 4.2.2. Компоненты силы постоянны в осях, связанных с плотом

Пусть единственная сила  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}'_1 + F_y \mathbf{e}'_2 + F_z \mathbf{e}'_3$  приложена в точке с координатами  $\mathbf{r}_s = x_s \mathbf{e}'_1 + y_s \mathbf{e}'_2 + z_s \mathbf{e}'_3$ . Проекция этой силы на оси неподвижного репера примут вид.

$$\begin{aligned} F_\xi &= F_x a_{11} + F_y a_{12} + F_z a_{13}, \\ F_\eta &= F_x a_{21} + F_y a_{22} + F_z a_{23}, \\ F_\zeta &= F_x a_{31} + F_y a_{32} + F_z a_{33}, \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

а в линейном приближении (4.1.10) они выразятся формулами

$$\begin{aligned} F_\xi &= F_x - F_y \alpha_3 + F_z \alpha_2, \\ F_\eta &= F_x \alpha_3 + F_y - F_z \alpha_1, \\ F_\zeta &= -F_x \alpha_2 + F_y \alpha_1 + F_z. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Составляющие момента  $\mathbf{M} = \mathbf{r}_s \times \mathbf{F} = M_x \mathbf{e}'_1 + M_y \mathbf{e}'_2 + M_z \mathbf{e}'_3$  этой силы выражаются формулами

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x. \quad (4.2.18)$$

Условие согласования (4.1.6) принимает вид

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{M} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}) = \mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{e}_3) = 0 \quad (4.2.19)$$

и означает, что радиус-вектор  $\mathbf{r}_s$  точки приложения силы должен быть параллелен плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{e}_3$ . Это естественно, если мы хотим заставить плот двигаться в направлении проекции силы на горизонтальную плоскость, исключив при этом возникновение углового ускорения плота вокруг вертикальной оси.

В том случае, когда на плот действуют две одинаковые силы, приложенные к разным точкам плота, условие (4.1.6) принимает вид

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{e}_3) = 0,$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиус-векторы точек приложения указанных сил. Оно означает, что сумма этих радиус-векторов параллельна плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{e}_3$ . Другими словами, диагональ параллелограмма, построенного на радиус-векторах точек приложения сил, параллельна указанной плоскости. Самый простой случай, когда это достигается, возникает при симметрии точек приложения сил относительно плоскости  $(\mathbf{F}, \mathbf{e}_3)$ . Так будет, например, если корпус робота ориентирован в направлении требуемого движения и применяется походка “галоп”.

Рассмотрим линейные уравнения движения:

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} &= F_x - F_y\alpha_3 + F_z\alpha_2 + \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15}, \\ M\ddot{\eta} &= F_x\alpha_3 + F_y - F_z\alpha_1 - \dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15}, \\ M\ddot{\zeta} &= -\zeta h_{30} + F_x\alpha_2 - F_y\alpha_1 - F_z - \dot{\zeta} h_{15}, \\ A\ddot{\alpha}_1 &= -\alpha_1 \bar{b}_{11} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} + M_x, \\ B\ddot{\alpha}_2 &= -\alpha_2 \bar{b}_{22} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{15} + M_y, \\ C\ddot{\alpha}_3 &= M_z - \dot{\alpha}_3 b_{34}, \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{b}_{11} &= \frac{1}{6}\gamma ab[8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)], \\ \bar{b}_{22} &= \frac{1}{6}\gamma ab[8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)], \\ \zeta_0 &= -\frac{F_z}{4\gamma ab} - d. \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Найдем стационарное решение, при котором

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = \dot{\zeta} = \dot{\xi} = \dot{\eta} \equiv 0.$$

Подставив указанные значения в (4.2.20), получим следующую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} F_y \hat{\alpha}_3 - F_z \hat{\alpha}_2 + \dot{\xi} h_{15} &= F_x, \\ F_z \hat{\alpha}_1 - F_x \hat{\alpha}_3 + \dot{\eta} h_{15} &= F_y, \\ \dot{\zeta} h_{30} - F_x \hat{\alpha}_2 + F_y \hat{\alpha}_1 &= -F_z, \\ \hat{\alpha}_1 \bar{b}_{11} + \dot{\eta} b_{15} &= M_x, \\ \hat{\alpha}_2 \bar{b}_{22} - \dot{\xi} b_{15} &= M_y, \\ M_z &= 0, \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

где символ ( $\hat{\phantom{x}}$ ) поверх буквы означает стационарное значение координат. Последнее равенство системы (4.2.22) отвечает условию согласования (4.2.19). Другими словами, стационарное движение невозможно, если условие согласования не выполнено. Решение системы (4.2.22) может быть найдено из формул

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= \frac{1}{w_1} \left( F_x - F_y \hat{\alpha}_3 + \frac{F_z M_y}{b_{22}} \right), \\ \dot{\hat{\eta}} &= \frac{1}{w_2} \left( F_y + F_x \hat{\alpha}_3 - \frac{F_z M_x}{b_{11}} \right), \\ \hat{\alpha}_1 &= \frac{M_x - \dot{\hat{\eta}} b_{15}}{\bar{b}_{11}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{M_y + \dot{\hat{\xi}} b_{15}}{\bar{b}_{22}}, \\ \hat{\zeta} &= \frac{M_y + \dot{\hat{\xi}} b_{15}}{\bar{b}_{22} h_{30}} F_x - \frac{M_x - \dot{\hat{\eta}} b_{15}}{\bar{b}_{11} h_{30}} F_y - \frac{F_z}{h_{30}},\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

в которых с учетом (4.2.21) и (4.2.8) обозначено

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{h_{15} b_{22} - F_z b_{15}}{b_{22}} = h_{15} \frac{8a^2 + 3[(\zeta_0 + d)^2 - d^2]}{8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)} > 0, \\ w_2 &= \frac{h_{15} b_{11} - F_z b_{15}}{b_{11}} = h_{15} \frac{8b^2 + 3[(\zeta_0 + d)^2 - d^2]}{8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)} > 0,\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

а угол  $\hat{\alpha}_3$  служит параметром и может быть выбран произвольно. Имеем параметрическое семейство стационарных движений, для траекторий которого скорость центра пласта может отличаться в значительных пределах. Обозначим

$$\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}, \quad \tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - \hat{\alpha}_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 - \hat{\alpha}_2, \quad \tilde{\zeta} = \zeta - \hat{\zeta}$$

отклонения координат от их стационарных значений. Уравнения для этих отклонений примут вид

$$\begin{aligned}M\ddot{\tilde{\xi}} &= -F_y \alpha_3 + F_z \tilde{\alpha}_2 + \dot{\tilde{\alpha}}_2 h_{14} - \dot{\tilde{\xi}} h_{15}, \\ M\ddot{\tilde{\eta}} &= F_x \alpha_3 - F_z \tilde{\alpha}_1 - \dot{\tilde{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\tilde{\eta}} h_{15}, \\ M\ddot{\tilde{\zeta}} &= -\tilde{\zeta} h_{30} - F_x \tilde{\alpha}_2 + F_y \tilde{\alpha}_1 - \dot{\tilde{\zeta}} h_{15}, \\ A\ddot{\tilde{\alpha}}_1 &= -\tilde{\alpha}_1 \bar{b}_{11} - \dot{\tilde{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\tilde{\eta}} b_{15}, \\ B\ddot{\tilde{\alpha}}_2 &= -\tilde{\alpha}_2 \bar{b}_{22} - \dot{\tilde{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\tilde{\xi}} b_{15}, \\ C\ddot{\tilde{\alpha}}_3 &= -\dot{\tilde{\alpha}}_3 b_{34},\end{aligned}\tag{4.2.25}$$

Решение последнего уравнения этой системы имеет вид

$$\alpha_3 = \frac{\dot{\alpha}_{30}}{b_{34}} [1 - \exp(-b_{34}(t - t_0))] + \alpha_{30},$$



где  $\dot{\alpha}_{30}$  и  $\alpha_{30}$  — значения  $\dot{\alpha}_3$  и  $\alpha_3$  в начальный момент времени  $t_0$ . Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_3 = \frac{\dot{\alpha}_{30}}{b_{34}} + \alpha_{30}$$

зависит от начальной скорости  $\dot{\alpha}_3(0)$ . Поэтому значение параметра  $\alpha_3$  в формулах (4.2.23) подвержено существенному влиянию ошибок начальных данных, а в зависимости от этого параметра меняется направление стационарного движения плота. Следовательно, движение плота в целом будет неустойчивым.

### 4.2.3. Сила постоянна в неподвижных осях

Пусть единственная сила  $\mathbf{F} = F_\xi \mathbf{e}_1 + F_\eta \mathbf{e}_2 + F_\zeta \mathbf{e}_3$  приложена в точке с координатами  $\mathbf{r}_s = x_s \mathbf{e}'_1 + y_s \mathbf{e}'_2 + z_s \mathbf{e}'_3$ . Проекция этой силы на оси репера, связанного с плотом, примут вид

$$\begin{aligned} F_x &= F_\xi a_{11} + F_\eta a_{21} + F_\zeta a_{31}, \\ F_y &= F_\xi a_{12} + F_\eta a_{22} + F_\zeta a_{32}, \\ F_z &= F_\xi a_{13} + F_\eta a_{23} + F_\zeta a_{33}, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

а соответствующие компоненты момента выразятся формулами

$$\begin{aligned} M_x &= F_\xi (a_{13} y_s - a_{12} z_s) + F_\eta (a_{23} y_s - a_{22} z_s) + F_\zeta (a_{33} y_s - a_{32} z_s), \\ M_y &= F_\xi (a_{11} z_s - a_{13} x_s) + F_\eta (a_{21} z_s - a_{23} x_s) + F_\zeta (a_{31} z_s - a_{33} x_s), \\ M_z &= F_\xi (a_{12} x_s - a_{11} y_s) + F_\eta (a_{22} x_s - a_{21} y_s) + F_\zeta (a_{32} x_s - a_{31} y_s). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Условие согласования (4.1.6) принимает вид

$$x_s (F_\eta a_{11} - F_\xi a_{21}) + y_s (F_\eta a_{12} - F_\xi a_{22}) + z_s (F_\eta a_{13} - F_\xi a_{23}) = 0 \quad (4.2.28)$$

и по-прежнему означает, что точка  $\mathbf{r}_s$  приложения силы должна быть параллельна, но теперь уже фиксированной в неподвижном пространстве, плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{e}_3$ . В линейном приближении (4.1.10) формулы (4.2.27) и равенство (4.2.28) примут вид

$$\begin{aligned} M_x &= F_\xi (\alpha_2 y_s + \alpha_3 z_s) - F_\eta (\alpha_1 y_s + z_s) + F_\zeta (y_s - \alpha_1 z_s), \\ M_y &= F_\xi (z_s - \alpha_2 x_s) + F_\eta (\alpha_3 z_s + \alpha_1 x_s) - F_\zeta (\alpha_2 z_s + x_s), \\ M_z &= -F_\xi (\alpha_3 x_s + y_s) + F_\eta (x_s - \alpha_3 y_s) + F_\zeta (\alpha_1 x_s + \alpha_2 y_s), \\ x_s (F_\eta - F_\xi \alpha_3) - y_s (F_\eta \alpha_3 + F_\xi) + z_s (F_\eta \alpha_2 + F_\xi \alpha_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Рассмотрим линейные уравнения движения:

$$\begin{aligned}
M\ddot{\xi} &= F_\xi + \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15}, \\
M\dot{\eta} &= F_\eta - \dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15}, \\
M\ddot{\zeta} &= -\tilde{\zeta} h_{30} - F_\zeta - \dot{\zeta} h_{15}, \\
A\ddot{\alpha}_1 &= -\alpha_1(c_{11} + \bar{b}_{11}) + \alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} + c_{10}, \\
B\ddot{\alpha}_2 &= \alpha_1 c_{21} - \alpha_2(c_{22} + \bar{b}_{22}) + \alpha_3 c_{23} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{15} + c_{20}, \\
C\ddot{\alpha}_3 &= \alpha_1 c_{31} + \alpha_2 c_{32} - \alpha_3 c_{33} - \dot{\alpha}_3 b_{34} + c_{30},
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{11} &= F_\eta y_s + F_\zeta z_s, & c_{12} &= F_\xi y_s, & c_{13} &= F_\xi z_s, & c_{10} &= F_\zeta y_s - F_\eta z_s, \\
c_{21} &= F_\eta x_s, & c_{22} &= F_\xi x_s + F_\zeta z_s, & c_{23} &= F_\eta z_s, & c_{20} &= F_\xi z_s - F_\zeta x_s, \\
c_{31} &= F_\zeta x_s, & c_{32} &= F_\zeta y_s, & c_{33} &= F_\xi x_s + F_\eta y_s, & c_{30} &= F_\eta x_s - F_\xi y_s,
\end{aligned}$$

а  $\bar{b}_{22}$  и  $\bar{b}_{22}$  определены формулами (4.2.21) и отвечают за момент архимедовой силы. Найдем стационарное решение, при котором

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = \dot{\zeta} = \dot{\xi} = \dot{\eta} \equiv 0.$$

Подставив указанные значения в (4.2.30), получим следующую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^c h_{15} &= F_\xi, \\
\dot{\eta}^c h_{15} &= F_\eta, \\
\tilde{\zeta}^c h_{30} &= -F_\zeta, \\
\alpha_1^c(c_{11} + \bar{b}_{11}) - \alpha_2^c c_{12} - \alpha_3^c c_{13} + \dot{\eta}^c b_{15} &= c_{10}, \\
\alpha_1^c c_{21} - \alpha_2^c(c_{22} + \bar{b}_{22}) + \alpha_3^c c_{23} + \dot{\xi}^c b_{15} &= -c_{20}, \\
\alpha_1^c c_{31} + \alpha_2^c c_{32} - \alpha_3^c c_{33} &= -c_{30}.
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Из этой системы, в частности, следует, что центр масс пласта будет двигаться в сторону внешней силы, а относительно уровня воды он будет смещен вверх, если  $F_\zeta$  положительна, и вниз в противоположном случае.

Предположим, что внешняя сила горизонтальна, т.е.  $F_\zeta = 0$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
c_{11} &= F_\eta y_s, & c_{12} &= F_\xi y_s, & c_{13} &= F_\xi z_s, & c_{10} &= -F_\eta z_s, \\
c_{21} &= F_\eta x_s, & c_{22} &= F_\xi x_s, & c_{23} &= F_\eta z_s, & c_{20} &= F_\xi z_s, \\
c_{31} &= 0, & c_{32} &= 0, & c_{33} &= F_\xi x_s + F_\eta y_s, & c_{30} &= F_\eta x_s - F_\xi y_s,
\end{aligned}$$

и уравнения (4.2.31) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^c &= \frac{F_\xi}{h_{15}}, & \dot{\eta}^c &= \frac{F_\eta}{h_{15}}, & \tilde{\zeta}^c &= 0, & \alpha_3^c &= \frac{c_{30}}{c_{33}} = \frac{F_\eta x_s - F_\xi y_s}{F_\xi x_s + F_\eta y_s}, \\
\alpha_1^c(c_{11} + \bar{b}_{11}) - \alpha_2^c c_{12} &= c_{10} + \alpha_3^c c_{13} - \dot{\eta}^c b_{15}, \\
\alpha_1^c c_{21} - \alpha_2^c(c_{22} + \bar{b}_{22}) &= -c_{20} - \alpha_3^c c_{23} - \dot{\xi}^c b_{15}.
\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Из выражения для  $\alpha_3^c$  видим, что стационарная величина поворота вокруг вертикальной оси в линейном приближении будет равна углу между радиус-вектором точки приложения силы  $F$  и ее направлением. Другими словами, плот будет стремиться в положение, когда указанный радиус-вектор и сила  $F$  коллинеарны. При этом углы  $\alpha_1^c$  и  $\alpha_2^c$  примут некоторые значения, отвечающие перекошенному положению плота относительно действующей силы.

В практически интересном случае, когда сила направлена параллельно вектору  $\mathbf{e}_1$  и приложена к точке, расположенной на оси  $C_p \mathbf{e}'_1$ , будем иметь  $F_\eta = 0$ ,  $y_s = 0$  и

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0, & c_{12} &= 0, & c_{13} &= F_\xi z_s, & c_{10} &= 0, \\ c_{21} &= 0, & c_{22} &= F_\xi x_s, & c_{23} &= 0, & c_{20} &= F_\xi z_s, \\ c_{31} &= 0, & c_{32} &= 0, & c_{33} &= F_\xi x_s, & c_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, решение системы (4.2.32) с учетом обозначений (4.2.8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^c &= \frac{F_\xi}{h_{15}}, & \dot{\eta}^c &= 0, & \dot{\zeta}^c &= 0, & \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1^c &= 0, & \alpha_2^c &= \frac{F_\xi}{F_\xi x_s + \bar{b}_{22}} \left( z_s + \frac{d}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Если  $F_\xi x_s + \bar{b}_{22} > 0$ , получается, что плот под действием силы  $F_\xi$  будет в линейном приближении двигаться с постоянной скоростью вдоль направления силы и будет зарываться в воду в направлении движения. При этом наклон плота будет увеличен за счет действия сил трения о дно.

Обозначим

$$\hat{\xi} = \xi - \xi^c, \quad \hat{\eta} = \eta - \eta^c, \quad \hat{\zeta} = \zeta - \zeta^c, \quad \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 - \alpha_1^c, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 - \alpha_2^c, \quad \hat{\alpha}_3 = \alpha_3 - \alpha_3^c$$

и рассмотрим уравнения движения в окрестности стационарного решения.

$$\begin{aligned} M\ddot{\hat{\xi}} &= \dot{\hat{\alpha}}_2 h_{14} - \dot{\hat{\xi}} h_{15}, \\ M\ddot{\hat{\eta}} &= -\dot{\hat{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\hat{\eta}} h_{15}, \\ M\ddot{\hat{\zeta}} &= -\dot{\hat{\zeta}} h_{30} - \dot{\hat{\zeta}} h_{15}, \\ A\ddot{\hat{\alpha}}_1 &= -\hat{\alpha}_1 (c_{11} + \bar{b}_{11}) + \hat{\alpha}_2 c_{12} + \hat{\alpha}_3 c_{13} - \dot{\hat{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\hat{\eta}} b_{15}, \\ B\ddot{\hat{\alpha}}_2 &= \hat{\alpha}_1 c_{21} - \hat{\alpha}_2 (c_{22} + \bar{b}_{22}) + \hat{\alpha}_3 c_{23} - \dot{\hat{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\hat{\xi}} b_{15}, \\ C\ddot{\hat{\alpha}}_3 &= \hat{\alpha}_1 c_{31} + \hat{\alpha}_2 c_{32} - \hat{\alpha}_3 c_{33} - \dot{\hat{\alpha}}_3 b_{34}. \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Коэффициенты системы (4.2.34) существенно зависят от компонент активной силы и координат точки ее приложения. Поэтому исследование устойчивости решения этой системы в общем случае затруднено. Здесь рассмотрим наиболее простой случай, отвечающий стационарному решению (4.2.33). Система уравнений (4.2.34) принимает вид

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\xi} &= \dot{\hat{\alpha}}_2 h_{14} - \hat{\xi} \dot{h}_{15}, \\
 M\ddot{\eta} &= -\dot{\hat{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\eta} \dot{h}_{15}, \\
 M\ddot{\zeta} &= -\hat{\zeta} h_{30} - \dot{\zeta} \dot{h}_{15}, \\
 A\ddot{\hat{\alpha}}_1 &= -\hat{\alpha}_1 \bar{b}_{11} + \hat{\alpha}_3 c_{13} - \dot{\hat{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\eta} \dot{b}_{15}, \\
 B\ddot{\hat{\alpha}}_2 &= -\hat{\alpha}_2 (c_{22} + \bar{b}_{22}) - \dot{\hat{\alpha}}_2 b_{24} + \hat{\xi} \dot{b}_{15}, \\
 C\ddot{\hat{\alpha}}_3 &= -\hat{\alpha}_3 c_{33} - \dot{\hat{\alpha}}_3 b_{34}.
 \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

В третьем уравнении системы (4.2.35) все коэффициенты положительны. Следовательно, переменная  $\hat{\zeta} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поведение решения шестого уравнения (4.2.35) существенно зависит от коэффициентов  $b^{14} = 2\alpha b d > 0$  и  $c_{33} = F_\xi x^s$  [22]. Если  $F_\xi x^s < 0$ , то один из корней характеристического уравнения окажется положительным, а система в целом окажется неустойчивой. Это тот случай, когда сила и радиус-вектор ее точки приложения ориентированы в противоположные стороны. Если же  $F_\xi x^s = 0$ , то решение шестого уравнения системы (4.2.35) будет устойчивым, а при  $F_\xi x^s > 0$  оно будет асимптотически устойчивым.

Для простоты дальнейшего анализа примем, что точка приложения силы  $\mathbf{F}$  принадлежит срединной плоскости плота:  $z_s = 0$ . Тогда  $c_{13} = 0$ , а система из четырех оставшихся уравнений (4.2.35) примет вид

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\xi} &= \dot{\hat{\alpha}}_2 h_{14} - \hat{\xi} \dot{h}_{15}, \\
 M\ddot{\eta} &= -\dot{\hat{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\eta} \dot{h}_{15}, \\
 A\ddot{\hat{\alpha}}_1 &= -\hat{\alpha}_1 \bar{b}_{11} - \dot{\hat{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\eta} \dot{b}_{15}, \\
 B\ddot{\hat{\alpha}}_2 &= -\hat{\alpha}_2 (c_{22} + \bar{b}_{22}) - \dot{\hat{\alpha}}_2 b_{24} + \hat{\xi} \dot{b}_{15}.
 \end{aligned}$$

Эта система подобна системе (4.2.13). Если ввести функцию

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} [M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + A\dot{\hat{\alpha}}_1^2 + B\dot{\hat{\alpha}}_2^2 + \tilde{\alpha}_1^2 b_{11} + \tilde{\alpha}_2^2 (c_{22} + b_{22})],$$

то производная по времени от этой функции примет вид

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = -h_{15}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \dot{\hat{\alpha}}_1^2 b_{14} - \dot{\hat{\alpha}}_2^2 b_{24} + 2h_{14}(\dot{\xi}\dot{\hat{\alpha}}_2 - \dot{\eta}\dot{\hat{\alpha}}_1).$$

При  $c_{22} = F_{\xi} x^s \geq 0$  функция  $\tilde{E}$  будет положительной, а, как следует из анализа уравнения (4.2.15), правая часть полученного уравнения окажется отрицательной. Поэтому нулевое решение системы (4.2.35) окажется в данном случае асимптотически устойчивым.

### 4.3. Переправа робота на плоту

Решаемая задача формулируется следующим образом. Робот прямолинейно идет по горизонтальной плоскости. На его пути имеется водная преграда со спокойной водой, ограниченная двумя берегами, находящимися в одном уровне и перпендикулярными к направлению движения робота. Около ближайшего к роботу берега на воде покоится плот, касаясь берега своей узкой стороной. Робот должен подойти к берегу, перебраться на плот и, оттолкнувшись от берега с достаточной силой, доплыть на плоту до противоположного берега водной преграды. Затем он должен перебраться на другой берег и продолжить движение. Переправа происходит в соответствии со следующими этапами.

4.3.1. Робот приближается к берегу маршевой походкой “трешки”. Подойдя к берегу, он переходит на походку “галоп”.

4.3.2. В режиме походки “галоп” робот переходит в конфигурацию, при которой передние и средние ноги находятся на плоту с положением корпуса, обеспечивающим достаточный запас статической устойчивости для переноса задних ног, которые пока остаются на берегу (рис.4.3.1, а).

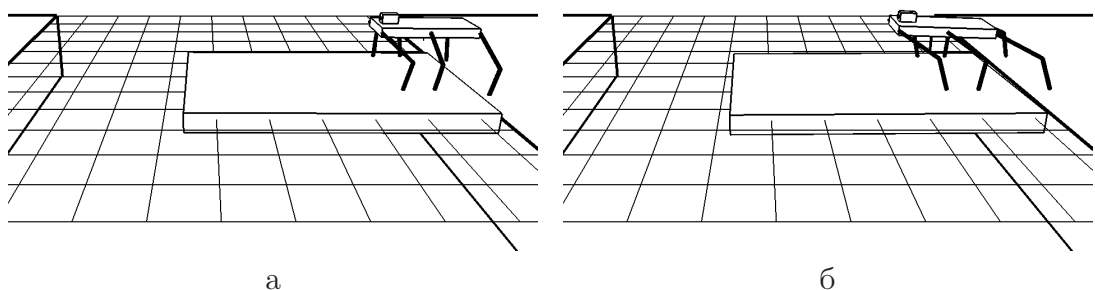


Рис. 4.3.1: а) Позиция перед отталкиванием от берега, б) отталкивание от берега задними ногами

4.3.3. Стоя на плоту на передних и средних ногах, робот отталкивается от берега, придавая плоту вместе с роботом скорость  $v_0$ ,

достаточную для достижения другого берега (рис.4.3.1, б). Задние ноги после толчка переносятся на плот. Скорость  $v_0$  в зависимости от расстояния  $S$  между берегами можно оценить по приближенной формуле

$$v_0 = v_\epsilon \exp \left[ \frac{\alpha_2(S - \sigma)}{m + M} \right],$$

где  $v_\epsilon$  — максимально допустимая малая скорость причаливания плота к другому берегу,  $\sigma$  — длина плота в направлении на другой берег,  $M$  — масса плота,  $m$  — масса робота,  $\alpha_2$  — коэффициент квадратичного по скорости сопротивления воды с учетом формы плота при поступательном движении (раздел 4.1.2).

4.3.4. После толчка плот плывет к противоположному берегу, а робот идет по плоту к краю, которым плот должен причалить после переправы (рис.4.3.2, а).

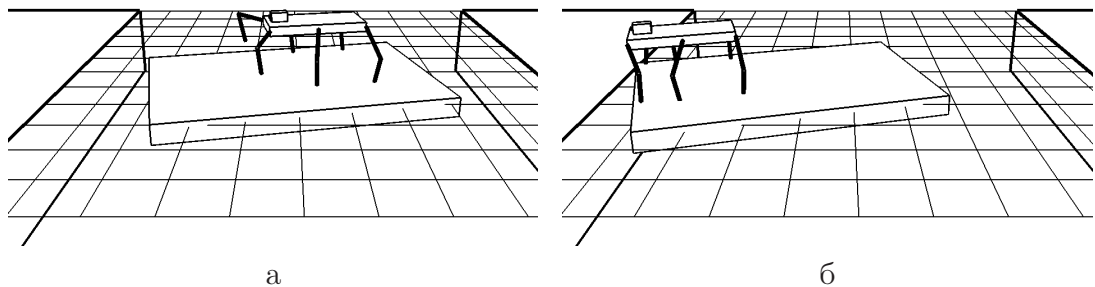


Рис. 4.3.2: а) Переправа на другой берег, б) причаливание

Движение плота на воде является возмущенным в связи с ошибками исполнения при маневрах и из-за появления дополнительной нагрузки в виде робота и его перемещений на плоту. Взаимодействие плота с роботом при моделировании осуществляется лишь силами, возникающими при контакте стоп ног робота с поверхностью плота. В частности, в процессе движения плот может поворачиваться вокруг вертикальной оси из-за того, что центр плота не принадлежал основанию суммарной силы при толчке от берега. Пока плот плывет, робот идет в системе координат, связанной с плотом, чтобы не потерять опору из-за вращения плота.

4.3.5. В зависимости от ширины водной преграды плот может приблизиться к берегу, имея некоторый угол поворота вокруг вертикальной оси (рис.4.3.2, б). Величину угла поворота можно оценить

по приближенной формуле

$$\varphi = \frac{J}{\alpha_3} \ln \left\{ 1 + \frac{\alpha_3(M+m)}{J\alpha_2 h} \left[ \exp \left( \frac{\alpha_2(S-\sigma)}{m+M} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (4.3.1)$$

где  $J$  – эффективный момент инерции плота вместе с роботом вокруг вертикальной оси,  $\alpha_3$  – коэффициент сопротивления воды с учетом формы плота при вращении вокруг вертикальной оси (раздел 4.1.2),  $h$  – расстояние от центра плота до линии действия суммарного импульса сил при отталкивании от берега. При малой величине отношения  $\alpha_3/J$  формула (4.3.1) упрощается:

$$\varphi = \frac{(M+m)}{\alpha_2 h} \left[ \exp \left( \frac{\alpha_2(S-\sigma)}{m+M} \right) - 1 \right].$$

Робот должен сориентировать свою конфигурацию так, чтобы его передняя часть была напротив той стороны плота, которая составляет наименьший угол с берегом при причаливании. В частности, если угол поворота плота оказывается меньше, чем  $\pi/4$ , то плот причалит к берегу так, что узкая сторона, противоположная той, которой он касался берега в начале движения, составит наименьший угол с другим берегом. Тогда роботу не придется маневрировать на плоту при причаливании. Единственное, что может потребоваться – это подойти поближе боком к угловой точке плота, которая коснется берега.

4.3.6. Для того чтобы обеспечить надежный переход с плота на берег, необходимо добиться того, чтобы вся сторона плота, напротив которой стоит робот, касалась берега или, по крайней мере, отстояла от него ненамного. С этой целью робот приседает, чтобы максимально обеспечить возможность дотягивания до берега, переносит на берег передние ноги и, прижимая их стопы к берегу, подтягивает плот, поворачивая его так, чтобы приблизить к берегу всю соответствующую сторону плота (рис.4.3.3, а). Левая стопа (относительно корпуса по ходу движения) подтягивается к корпусу, оставаясь неподвижной на берегу, а правая нога, как и все остальные ноги, зафиксирована относительно корпуса. При этом стопы передних ног из-за значительного горизонтального усилия могут проскальзывать относительно берега, а угловая точка плота, первоначально бывшая в соприкосновении с берегом, может отойти от берега (рис.4.3.4). Если этот отход оказался значительным, то подтягивание к берегу следует продолжить. На рис.4.3.4 тонкими линиями показаны абсолютные траектории стоп передних ног.

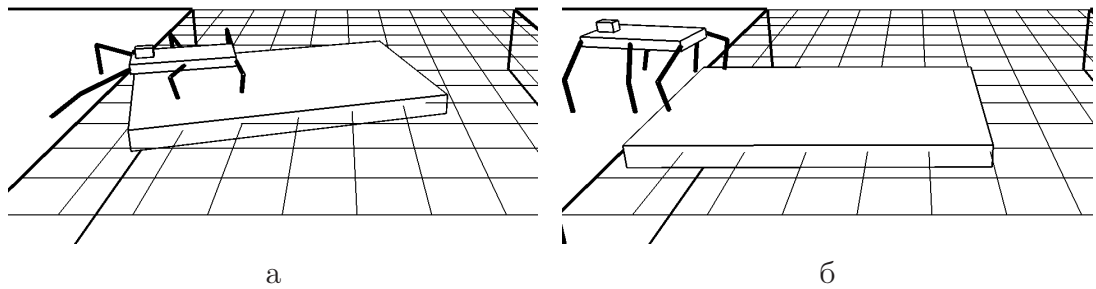


Рис. 4.3.3: а) Подтягивание плота к берегу, б) переход на другой берег

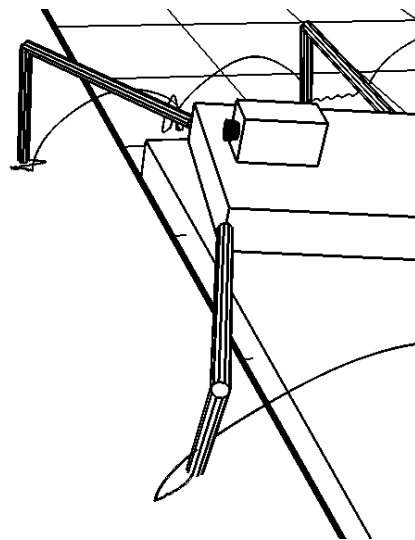


Рис. 4.3.4: Проскальзывание передних ног при подтягивании плота к берегу

Видно, что, когда стопы стоят на плоте, имеется их некоторое колебание из-за возмущенного движения плота. Когда стопы стоят на берегу, то след левой стопы является монотонным, а след правой стопы немонотонен, что отражает движение плота относительно берега при подтягивании плота. Чтобы уменьшить проскальзывание, прижатие передних стоп к берегу усиливается в зависимости от смещения соответствующей стопы от исходной точки ее опоры. Если смещение стопы при проскальзывании оказалось недопустимо большим (теряется контакт с берегом), то стопа вновь переносится в исходную точку опоры и подтягивание продолжается. Возможен вариант, когда плот подтягивается к берегу обеими ногами. Такой вариант предпочтительнее, когда требуется уменьшить нагрузку на ноги. При проскальзывании может возникнуть значительный горизонтальный перекося корпуса робота относительно поверхности пло-



та.

4.3.7. Как только соответствующая сторона плота приблизится к берегу на достаточно малое расстояние, робот незамедлительно, несмотря на возможный перекося корпуса относительно плота, поднимает корпус до маршевой высоты и осуществляет переход на другой берег, т.к. плот находится в постоянном движении и из-за этого могут нарушиться условия дотягивания ног до возможных точек опоры на берегу (рис.4.3.3, б).

## 4.4. Компьютерное моделирование

Соотношение размеров корпуса, размеров плота и ширины водной преграды имеет вид

$$a_r : a : b : d : S = 1 : 1.5 : 1 : 0.1 : 5.2.$$

Используется модель сил сопротивления воды из раздела 4.1.2. Представление о движении робота и других элементов виртуальной среды возникает в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений полной трехмерной динамики робота вместе с входящими в систему окружающими предметами. Поскольку в точках контакта объектов предполагается силовое взаимодействие, соответствующая механическая система имеет 30 степеней свободы. Результаты компьютерного моделирования отображаются на экране монитора в виде движения геометрических образов исследуемых материальных объектов.

На рис. 4.4.1 представлены графики изменения по времени горизонтальных координат  $\xi$ ,  $\eta$  середины плота, причем ось  $\eta$  ориентирована против направления движения робота до переправы, координат центра корпуса  $\eta_b$ , координат  $\xi_r$ ,  $\eta_r$  передней правой ноги, координат  $\xi_l$ ,  $\eta_l$  передней левой ноги, угла  $\varphi_b$  вращения корпуса относительно вертикали, отсчитываемого от оси  $\xi$ , и угла  $\varphi$  вращения плота вокруг вертикали, отсчитываемого от оси  $\eta$ . Все координаты приведены в метрах, а углы — в радианах.

Прямые, параллельные оси ординат и обозначенные римскими цифрами, выделяют этапы и стадии движения робота.

Линия I соответствует окончанию этапа 4.3.1 и началу этапа 4.3.2. Линия II соответствует окончанию этапа 4.3.2 и началу этапа 4.3.3, на котором робот отталкивается вместе с плотом от берега. Линия III (начало этапа 4.3.4) отмечает окончание толчка и начало переправы.

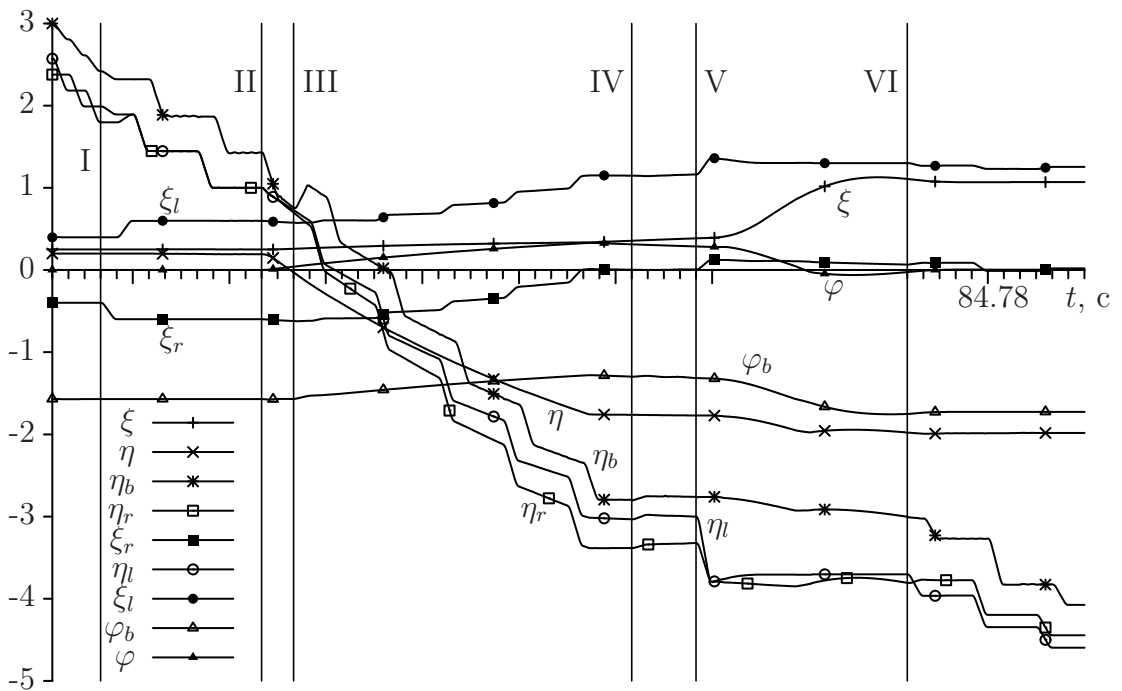


Рис. 4.4.1: Переправа на плоту, зависимость основных параметров от времени

Между линиями III и IV заметно вращение плота вместе с роботом. Между линиями IV и V выполняется этап 4.3.5, т.е. робот подходит к тому краю плота, который ближе всего к берегу. От линии V до линии VI выполняется этап 4.3.6, на котором плот подтягивается к берегу. Наконец, после линии VI робот заканчивает переправу на другой берег.

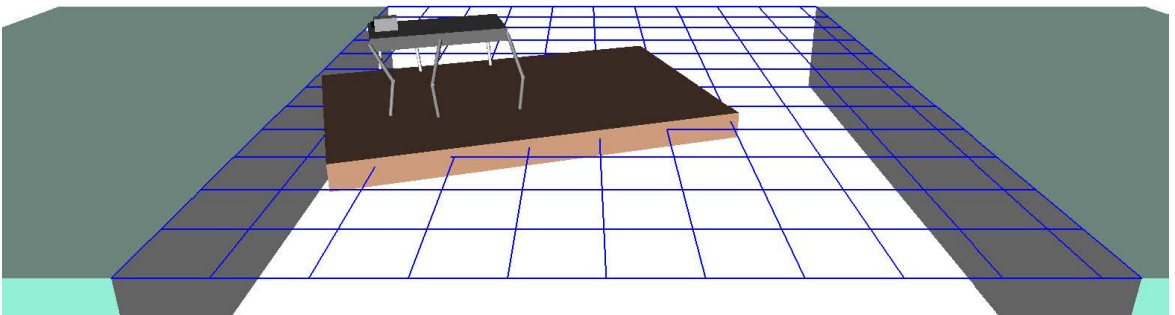


Рис. 4.4.2: Ролик доступен отдельно по адресу <http://keldysh.ru/e-biblio/golubev/raft.mp4>

На рис. 4.4.2 приведен фрагмент компьютерной 3D анимации полученного решения в реальном масштабе времени. По нему можно

наглядно и детально представить себе, как происходит переправа шестиногого автономного робота с одного берега на другой неширокой, но протяженной водной преграды.

## Заключение

Материал, изложенный выше, позволяет судить о больших принципиальных возможностях шагающих инсектоморфных роботов при движении по местности чрезвычайной сложности, которая может доставить непреодолимые трудности для транспортных средств другого типа. Рассмотренные в книге типовые препятствия и некоторые их комбинации, конечно, идеализированы и отнюдь не исчерпывают множество возможных вариантов, имеющих в природе. Кроме того, компьютерное моделирование, выполненное на данном этапе исследований, не учитывало многих погрешностей, неизбежно возникающих при работе реальных машин. Вместе с тем опыт, полученный при создании алгоритмов преодоления роботом рассмотренных в книге препятствий, позволяет сформулировать некоторые общие правила, лежащие в основе разработанных методов, несмотря на большую вариативность их применения в конкретных случаях. Перечислим эти правила.

- Наиболее целесообразной представляется иерархическая структура управления, отделяющая задачи планирования и построения движения от задач практической реализации этого движения посредством подачи сигналов на управляющие двигатели.
- Планирование и реализацию движения целесообразно осуществлять по методу кусочно-терминального управления с прогнозом изменяющейся конфигурации, особенно в случае подвижной опорной поверхности [54]. При планировании закона движения корпуса желательно обеспечивать максимальную плавность, растягивая маневр на допустимо большой промежуток времени. Программное движение не должно содержать разрывов вторых производных по времени. Реакция системы управления двигателями на изменение программного движения должна быть незамедлительной. Необходимо следить за соблюдением условия статической устойчивости в любой момент времени движения.

- Удачным оказалось применение адаптивных эластичных шаговых циклов, позволяющих учитывать не только ориентацию в пространстве и форму опорных поверхностей, но и расположение на них допустимых опорных точек. Для обеспечения устойчивости движения робота на препятствиях было полезным применение модифицированной походки “галоги” со специально выбираемым порядком смены опорных ног. Во избежание динамических ударов целесообразно применять также сплайновую организацию движения корпуса, когда корпус отслеживает касательную к траектории его характерной точки. Изменение высоты корпуса над опорной поверхностью часто позволяет избежать опасности взаимного пересечения ног и обеспечить возможность дотягивания ног до опорных точек. При формировании программного движения корпуса следует учитывать возможность дотягивания ног не только до планируемых опорных точек, но и до точек опоры, уже используемых для реализации требуемого движения. Предотвратить опасность проскальзывания стоп относительно опоры можно, применив рациональное распределение реакций опоры за счет управляемого программного заглубления в грунт планируемых опорных точек.
- Использование инерционных свойств неустойчивых препятствий может помочь их преодолению. При движении по местности со сложным рельефом робот может активно использовать отдельные препятствия с целью повышения собственной проходимости. Полезным может оказаться использование в случае необходимости резонансных эффектов для перемещения неустойчивых крупногабаритных препятствий или предметов с одного места на другое.
- Форма корпуса и вид симметрии точек крепления ног к корпусу не имеют большого значения для возможности преодоления изолированных препятствий на открытой местности. Для уменьшения опасности взаимного пересечения ног существенным является правильное соотношение между звеньями ног и расстояниями между точками крепления ног на корпусе.

Собранные в книге алгоритмы преодоления как одиночных препятствий, так и их комбинаций, отнюдь не исчерпывают всех вариантов, которые могут возникнуть при работе в природных условиях.

Каждый раз преодоление новых еще не встречавшихся препятствий вызывает затруднение даже у опытных верхолазов и спортсменов. К этому следует добавить, что для увеличения проходимости автономных машин, помимо построения алгоритмов преодоления новых типов препятствий, необходимо совершенствование уже существующих из-за отсутствия в природе идеализированных геометрических объектов. В книге рассмотрены лишь принципиальные вопросы о существовании решения задачи формирования движения в тех или иных экстремальных случаях. Для отработки устойчиво работающих алгоритмов применялись средства компьютерного моделирования полной динамики робота и окружающей его среды [40]. Эти же средства позволяют частично выявить и требования, которые следует предъявить к реальным шагающим машинам. В частности, оказалось, что необходимые для реализации устойчивого движения шарнирные моменты не превосходят величин, доступных современным электроприводам, а необходимый коэффициент трения в большинстве случаев не превосходит единицы. Только в случае залезания на вертикальный угол дома роботу потребовался коэффициент трения 1,1, что незначительно превосходит теоретическую нижнюю грань коэффициента трения в данном случае. Существенные вопросы, связанные со способами получения с требуемой точностью необходимой роботу информации о движении и расположении препятствий, а также вопросы, связанные с допустимыми погрешностями исполнения, остались за пределами предпринятого исследования. Для получения полноценного ответа на вопрос о том, можно ли практически реализовать построенные алгоритмы управления уже в настоящее время, следует провести как с помощью компьютерного моделирования, так и посредством натурного или полунатурного макетирования специальное исследование влияния измерительных и исполнительных погрешностей на процесс управления. Вместе с тем успехи живых существ при прецизионном выполнении двигательных задач в необычных для них ситуациях позволяют надеяться, что в недалеком будущем трудности, связанные с практической реализацией способов движения по препятствиям экстремальной сложности будут преодолены.

# Литература

1. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. 312 с.
2. *Павловский В.Е.* О разработках шагающих машин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 101. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-101>
3. *Pugh D.R., Ribble E.A., Vohnout V.J. et al.* Technical Description of the Adaptive Suspension Vehicle // Internat. J. Robotics Research. 1990. V. 9. № 2. P. 24-42.
4. *Pfeiffer F., Loffler K., Gienger M.* Design Aspects of Walking Machines // Proc. Third Internat. Conf. CLAWAR-2000. Madrid, Spain, 2000.
5. *Брискин Е.С., Жога В.В., Чернышов В.В., Малолетов А.В.* Динамика и управление движением шагающих машин с цикловыми движителями / под ред. Е.С. Брискина. — М.: Машиностроение, 2009. 191 с.
6. *Брискин Е.С., Вершинина И.П., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г.* Об управлении движением шагающей машины со сдвоенными ортогонально поворотными двигателями // Изв. РАН. ТИСУ. 2014. № 3. С. 168-176.  
*Briskin E.S., Vershinina I.P., Maloletov A.V., and Sharonov N.G.* On the Control of Motion of a Walking Machine with Twin Orthogonal Rotatory Movers. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2014. Vol. 53, No 3. Pp. 464-472.
7. *Гурфинкель В.С., Гурфинкель Е.В., Девянин Е.А., Ефремов Е.В., Жихарев Д.Н., Ленский А.В., Шнейдер А.Ю., Штильман Л.Г.* Макет шестиногого аппарата с супервизорным управлением. Отчет ИМ МГУ, 1978, № 2036.

8. *Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Боровин Г.К., Карпов И.И., Лазутин Ю.М., Кугушев Е.И., Павловский В.Е., Ярошевский В.С.* Управление интегральным локомоционным роботом. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1974, № 6.
9. *Ishigure Ya., Kawasaki H., Kato T., Hirai K., Inuma N., Ueki S.* Climbing Robot Equipped with a Postural Adjustment Mechanism for Conical Poles // Proc. of the 16-th Intern. Conf. CLAWAR-2013. Sydney. Australia: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013. P. 343-350.
10. *Lopes G.* Abstractions for Legged Locomotion // Mobile Service Robotics: Proc. of the 17-th Intern. Conf. CLAWAR-2014. Poznan. Poland: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014. P. 3-37.
11. *Alyseychik A., Orlov I., Stepanova E., Pavlovsky V.* Wheel-Walking Pneumatically Actuated Robot // Mobile Service Robotics: Proc. of the 17-th Intern. Conf. CLAWAR-2014. Poznan. Poland: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014. P. 159-164.
12. *Panchenko A. V.* Control Algorithm for Walking Robot with Mosaic Body // Proc. of the 18-th Intern. Conf. CLAWAR-2015. HangZhou. China: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. P. 265-271.
13. *Ilg W., Albiez J., Berns K.* Learning of Posture Control Mechanisms for the Four-Legged Walking Machine BISAM // Proc. Third Internat. Conf. CLAWAR-2000. Madrid, Spain, 2000.
14. *Wong H.C., Orin D.E.* Control of a Quadruped Standing Jump and Running Jump Over Irregular Terrain Obstacles // Autonomous Robots. 1995. V. 1.
15. *De Man H., Lefeber D., Vermeulen J.* Design and Control of a One-Legged Robot Hopping on Irregular Terrain // Proc. Euromech 375: Biology and Technology of Walking. Munich, Germany, 1998.
16. *Nishi A., Wakasugi Y., Watanabe K.* Design of a robot capable of moving on a vertical Wall // Advanced Robotics. 1986. V. 1. № 1.
17. *Gradetsky V., Kalinichenko S., Kravchuk L. et al.* Stability Motion Problem for Wall Climbing Robot with Transition Possibilities // Proc. Third Internat. Conf. CLAWAR-2000. Madrid, Spain, 2000.

18. *Ward P., Liu D., Waldron K., Hasan M.* Optimal Design of a Magnetic Adhesion for Climbing Robots // Proc. of the 16-th Intern. Conf. CLAWAR-2013. Nature-Inspired Mobile Robotics: Sydney. Australia: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013. P. 375-382.
19. *Gradetsky V.G., Knyazkov M.M., Fomin L.F., Sukhanov A.N., Kryukova A.A.* Influence of External Vibration Disturbances on a Wall Climbing Robot with Vacuum Grippers // Mobile Service Robotics: Proc. of the 17-th Intern. Conf. CLAWAR-2014. Poznan. Poland: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014. P. 451-457.
20. *Sandoval-Castro X.Ya., Gracia-Murillo M.A., Zavala-De Paz J.P., Castillo-Castaneda E.* Hex-Piderix: A Six-Legged Walking Climbing Robot to Perform Inspection Tasks on Vertical Surfaces // Proc. of the 16-th Intern. Conf. CLAWAR-2013. Nature-Inspired Mobile Robotics: Sydney. Australia: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013. P. 399-407.
21. *Longo D., Muscato G.* Adhesion techniques for climbing robots: State of the art and experimental considerations // Proc. 11-th Internat. Conf. CLAWAR-2008. Coimbra, Portugal: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2008. P. 6-28.
22. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
23. *Голубев Ю.Ф., Селенский Е.Е.* Ходьба шестиногого шагающего аппарата в горизонтальных цилиндрических трубах с вязким трением // Изв. РАН. ТИСУ. 2001. № 2.
24. *Golubev Yu.F., Korianov V.V., Okhotsimsky D.E. et al.* Neurocontrol and Dynamics of a legged Robot Climbing along the Vertical Column // 47th IWK (Int. Scientific Colloquium) of the Technische Universitat Ilmenau. Proc. CD, Session 7. Ilmenau, Germany, 2002.
25. *Golubev Yu.F., Korianov V.V.* Motion design for six-legged robot overcoming the vertical column by means of friction forces // Proc. 6-th Internat. Conf. CLAWAR-2003. Catania, Italy, 2003. P. 609-616.



26. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Построение движений инсектоморфного робота, преодолевающего комбинацию препятствий с помощью сил кулоновского трения // Изв. РАН. ТИСУ. 2005. № 3. С. 143-155;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Construction of Motions of an Insectomorphic Robot that Overcomes a Combination of Obstacles with the Help of Coulomb Friction Forces. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2005. Vol. 44, No. 3. Pp. 460-472.
27. *Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Technique for a Six-Legged Walker Climbing a High Shelf by Using a Vertical Column // Proc. 7-th Internat. Conf. CLAWAR-2004. Madrid, Spain, 2004.
28. *Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Computer Simulation of a Climbing Insectomorphic Robot // Proc. 9-th Intern. Conf. on Simulation of Adaptive Behavior. Rome, Italy, 2006. LNAI. V. 4095. Berlin: Springer-Verlag, 2006. P. 126-137.
29. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Управление инсектоморфным роботом при залезании на вершину вертикального угла и при движении по приставной лестнице // Изв. РАН. ТИСУ. 2008. № 1. С. 148-157;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* A Control for an Insectomorphic Robot in Climbing to the Top of a Vertical Corner and in Moving on a Step Ladder. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2008. Vol. 47, No. 1. Pp. 139-148.
30. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Управление инсектоморфным роботом при движении по вертикальному углу и по горизонтальному брусу // Изв. РАН. ТИСУ. 2006. № 1. С. 149-157;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* A Control for an Insectomorphic Robot in Motion along a Vertical Corner and a Horizontal Beam. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2006. Vol. 45, No. 1. Pp. 144-152.
31. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Залезание инсектоморфного робота на крышу по стенам вертикального прямого угла // Матер. научн. школы-конференции “Мобильные роботы и мехатронные системы 2006”. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 107-115.

32. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М.* Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 1.
33. *Голубев Ю.Ф.* Робот-эквилибрист на цилиндре // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 603-619.
34. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2012. — 232 с. — ISBN 978-5-9221-1460-8.
35. *Kitagai M., Ochiai T.* Development of a robot balanced on a ball — Application of passive motion to transport // Proc. of IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation 2009. Kobe, Japan, 2009. P. 4106-4111.
36. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Управление движением инсектоморфного робота на подвижном шаре // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 5. С. 131-142;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Motion Control for an Insectomorphic Robot on a Movable Ball. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2009. Vol. 48, No. 5. Pp. 801-813.
37. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Залезание инсектоморфного робота на свободно катающийся шар // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 6. С. 182-192;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Insectomorphic Robot Climbing a Freely Rolling Ball. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2010. Vol. 49, No. 6. Pp. 1009-1019.
38. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Движение инсектоморфного робота с использованием незакрепленных шаров // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 50. 24с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-50>
39. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Маневрирование инсектоморфного робота на свободно катающихся шарах // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С.134-146;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Insectomorphic Robot Maneuvering

- on Freely Rolling Balls. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2016. Vol. 55, No 1. Pp. 125-137.
40. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем. URL: <http://www.umlabor.ru>.
41. *Pogorelov D. Yu.* On numerical methods of modeling large multibody systems // Mech. and Mash. Theory. 1999. V. 34. № 5.
42. *Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Motion design for an insectomorphic robot on unstable obstacles // Proc. 11-th Intern. Conf. CLAWAR-2008. Coimbra, Portugal: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008. P. 654-661.
43. *Golubev Yu.F., Korianov V.V., Pavlovsky V.E., Panchenko A.V.* Motion Control for the 6-legged Robot in Extreme Conditions // Proc. of the 16-th Intern. Conf. CLAWAR-2013. Nature-Inspired Mobile Robotics: Sydney. Australia: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013. P. 427-434.
44. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Перелезание инсектоморфного робота через свободно катающийся шар // Изв. РАН. ТИСУ. 2014. № 5. С. 116-125;  
*Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* An Insectomorphic Robot Climbing over a Freely Rolling Ball. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2014. Vol. 53, No 5. Pp. 733-742.
45. *Голубев Ю.Ф.* Нестационарная модель сил воздействия воды на плоский прямоугольный плот // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 53. 40с. doi:10.20948/prepr-2016-53  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-53>
46. *Голубев Ю.Ф.* Нестационарная модель возмущенной динамики прямоугольного плота на спокойной воде // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 54. 18с. doi:10.20948/prepr-2016-54  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-54>
47. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI Гидродинамика. 5-е Издание стереотипное. М.: Физматлит, 2015. 736 с.

48. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Учебник. Под ред. И.А. Кибеля. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
49. *Митрофанов А.А.* Лесосплав. Новые технологии, научное и техническое обеспечение. Архангельск: Изд-во АГТУ, 2007. 492 с.
50. *Мурашова О.В., Митрофанов А.А.* Исследование гидродинамических характеристик плоских сплоточных единиц на моделях и в натуральных условиях. ИВУЗ. “Лесной журнал”. 2007. № 1. С. 58-66.
51. *Ватлина Я.В., Суров Г.Я.* Результаты исследования сопротивления воды движению лесотранспортных единиц. ИВУЗ. “Лесной журнал”. 2014. № 2. С. 52-60.
52. *Гориневский Д.М., Формальский А.М., Шнейдер А.Ю.* Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях/ Под ред. В.С. Гурфинкеля и Е.А. Девянина. — М.: Физматлит, 1994. — 368 с. — (Научные основы робототехники) — ISBN 5-02-014589-0.
53. *Голубев Ю.Ф.* Механические системы с сервосвязями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 211-224.
54. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1975. 390 с.