



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

К 95-летию С.П.Курдюмова

К 95-летию
со дня рождения
С.П. Курдюмова



Горизонты
математического моделирования
и теория самоорганизации

Г.Г. Малинецкий

Научное творчество Сергея Павловича Курдюмова и синергетика

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Малинецкий Г.Г. Научное творчество Сергея Павловича Курдюмова и синергетика // Горизонты математического моделирования и теория самоорганизации. К 95-летию со дня рождения С.П. Курдюмова. — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2024. — С. 8-47.

<https://doi.org/10.20948/k95-1>

<https://keldysh.ru/e-biblio/k95/1.pdf>

Научное творчество Сергея Павловича Курдюмова и синергетика

Г.Г. Малинецкий

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Аннотация. Теория режимов с обострением и локализованных нестационарных диссипативных структур, развитая Сергеем Павловичем Курдюмовым и его учениками, получила мировое признание. Основы этих подходов, надежды и перспективы, которые связывались с развитием научной школы С.П. Курдюмова, рассматриваются в данной статье. Время выступает, с одной стороны, как творец, рождающий новое, а с другой – как жестокий взыскательный редактор, выбирающий из планов и прогнозов то, что станет реальностью. Если сравнить обширную научную школу с деревом, то в этой статье обсуждаются его корни, а в других работах сборника – ветви и листья, выросшие за последние десятилетия.

Ключевые слова: С.П. Курдюмов, научная школа, нестационарные диссипативные структуры, самоорганизация, синергетика, собственные функции нелинейной среды, симметрии, точные решения, самоорганизованная критичность, динамический хаос, нейронные сети

Scientific creativity of Sergey P. Kurdyumov and synergetics

G.G. Malinetskiy

RAS Keldysh Institute of Applied Mathematic

Abstract. The theory of blowup regimes and localized non-stationary dissipative structures developed by Sergey P. Kurdyumov and his progeny received worldwide recognition. I consider the foundations of these approaches, hopes and prospects that were associated with the development of Kurdyumov's scientific school. Time acts, on the one hand, as a creator giving birth to something new, and on the other hand as a cruel, demanding editor choosing from plans and forecasts what will become reality. If we compare a broad school of thought to a tree, this article discusses its roots, while other works in the issue the branches and leaves that have grown over the past decades.

Keywords: S.P. Kurdyumov, scientific school, non-stationary dissipative structures, self-organization, synergetics, nonlinear medium eigenfunctions, symmetries, exact solutions, self-organized criticality, dynamic chaos, neural networks

Одним из основоположников теории самоорганизации или синергетики является выдающийся специалист в области математического моделирования, создатель научной школы, получившей мировое признание, Сергей Павлович Курдюмов. У него очень много «научных детей», внуков, правнуков, которым посчастливилось с ним работать и развивать идеи синергетики во многих областях, его ученики работают в Болгарии, Великобритании, Канаде, США.

Сергей Павлович был романтиком в науке, уверенным в её огромных возможностях. «Ученые должны быть спасителями человечества. Они должны предлагать обществу пути в будущее, которые оно сможет, в конце концов, выбрать», – не раз говорил он своим ученикам. С 1989 по 1999 гг., в самые трудные для отечественной науки годы, он был директором Института прикладной математики им. М.В. Келдыша (ИПМ). В нашем институте он проработал всю жизнь, воспринимая его как родной дом. Сотрудники Института, среди которых было очень много его друзей, любили и доверяли ему. В течение многих лет он был секретарем партийной организации Института, и на пост директора он был выбран с большим преимуществом по сравнению с остальными кандидатами.

Большое счастье было быть учеником Сергея Павловича. Он готов был часами обсуждать проблемы теории самоорганизации, независимо от того, кто был его собеседником – школьник или академик. «Надо просто вовлечь людей в театр наших идей, и далее всё изменится. Самоорганизация спасет мир. Вы это увидите», – сказал он как-то мне в ходе одной из бесед.



Рис. 1. Сергей Павлович Курдюмова (1928–2004)

У нашего учителя был удивительный и прекрасный дар, – радоваться успехам учеников больше, чем своим, и это создавало ощущение важного, общего, интересного дела. Мы часто встречались у Сергея Павловича дома. Его единомышленником и другом была жена Сергея Павловича, однокурсница, физик, Валентина Васильевна. Их душевная щедрость, теплота, забота, начиная со студенческих времен, и кончая «взрослой жизнью», очень много значили для каждого из нас.

Облик человека меняется со временем. Но мне Сергей Павлович запомнился таким, как на рис. 1, – молодым, энергичным, веселым человеком, которому всё по плечу. Видимо, благодаря его умению убеждать, слушать и слышать, понимаю, что стратегический ресурс – это не только бомбы и ракеты, нефть и газ, но и научные коллективы, работающие на переднем крае науки, наш институт удалось сохранить как единое целое. Многим академическим организациям это не удалось. Сергей Павлович участвовал на многих десятках конференций «Математика. Компьютер. Образование», которые десятки лет проводятся под началом профессора биофака МГУ Г.Ю. Ризниченко. Его бодрость, энергия, оптимизм, надежды на будущее «зажигали» эти конференции.

Сергей Павлович было соавтором научного открытия «эффекта Т-слоя» – нового типа неустойчивости плазмы, которое в 1968 г. было внесено в Государственный реестр открытий СССР под №55. Это первое открытие в нашей стране, сделанное в ходе вычислительного эксперимента. В ходе расчетов, выполненных коллективом под руководством академиков А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, было обнаружено формирование нового типа структур в плазме. Впоследствии новосибирские ученые обнаружили такие неустойчивости и в натурном эксперименте. После этой выдающейся работы многие участники проекта начали прокладывать свои пути в науке, определять направление дальнейших поисков.

Выбор Сергея Павловича очень точно отражает стихотворение Б.Л. Пастернака:

*В родстве со всем, что есть, уверясь
И знаясь с будущим в быту,
Нельзя не впасть к концу, как в ересь,
В неслыханную простоту.
Но мы пощажены не будем,
Когда её не утаим.
Она всего нужнее людям,
Но сложное понятней им.*

Сергей Павлович выбрал простейшие модели, показывающие новый тип неустойчивости, – структуры, развивающиеся в сверхбыстром взрывном режиме – *режиме с обострением*. Так называют режимы, когда одна из величин, характеризующая систему, неограниченно возрастает за ограниченное время, называемое *временем обострения* t_f . Такие режимы

определяют приближенное описание систем с сильной положительной обратной связью. В этих системах чем дальше от положения равновесия, тем выше скорость ухода от него. Вначале думалось, что такие парадоксальные решения характерны только для ряда задач гидродинамики и физики плазмы, но оказалось, что их гораздо больше, чем кажется на первый взгляд. Теория таких систем стала одной из основ синергетики.



Рис. 2. Триединная структура синергетики

Это слово, введенное немецким физиком-теоретиком Германом Хакеном, означает «совместное действие» в переводе с греческого. Хакен в 1970-х гг. предложил рассматривать синергетику как *междисциплинарный подход* и вложил в его название два смысла.

Во-первых, это направление, исследующее появление новых свойств, качеств, типов функционирования у целого, которыми не обладают его части (см. рис. 2).

Во-вторых, это подход, развитие которого требует совместной творческой деятельности естественников, гуманитариев, математиков, инженеров, экспертов.

Сегодня синергетика представляет подход, родившийся на пересечении *сфер предметного знания, математического моделирования и философской рефлексии*.

По мнению выдающегося специалиста по философии науки В.С. Стёпина (рис. 3), именно синергетика будет основой научной картины мира, формирующейся в XXI в. Сергей Павлович часто беседовал с Вячеславом Семеновичем, выступал в Институте философии. «В этих беседах я стараюсь понять божественную гносеологию, которая определяет творчество выдающихся ученых», – как-то Стёпин сказал мне после выступления Сергея Павловича.

Друг и коллега Сергея Павловича Д.С. Чернавский (рис. 4) – выдающийся специалист в области физики, математической биологии и экономики, гармонично сочетавший эти ипостаси, – считал, что синергетику следует мыслить как *общую теорию неустойчивостей в системах разной природы*.

Сергей Павлович рассматривал синергетику как *язык концепций, понятий, моделей*, объединяющий естественников, гуманитариев и математиков. Именно на этом языке сегодня всё чаще обсуждают постановку общих проблем, требующих совместных усилий.



Рис. 3. Вячеслав Семёнович Стёпин
(1934–2018)



Рис. 4. Дмитрий Сергеевич
Чернавский (1926–2016)



Рис. 5. Самарский Александр
Андреевич (1919–2008)



Рис. 6. Соболев Илья Меерович

Принципиальную роль в научном творчестве Сергея Павловича сыграла статья, А.А. Самарского (рис. 5) и И.М. Соболя (рис. 6), опубликованная в 1963 г. и посвященная аппроксимации коэффициента теплопроводности в уравнении теплопроводности.

Сергей Павлович считал, что все ученые равны перед лицом неведомого, но среди них есть Учителя, которые видят дальше остальных, и мнение которых может оказаться очень важным. Именно таким учителем для Сергея Павловича был Александр Андреевич Самарский, вместе с которым они прошли большой научный путь. В историю ИПМ И.М. Соболев вошел как блестящий математик и выдающийся специалист по методам Монте-Карло.

В упомянутой статье в качестве теста было рассмотрено уравнение теплопроводности со степенным коэффициентом $u_t = (\kappa_0 u^\sigma u_x)_x$ и парадоксальное решение

$$u = \begin{cases} \left(\frac{\sigma(x_1 - x)^2}{2\kappa_0(\sigma + 1)(c - t)} \right)^{1/\sigma} & x \leq x_1 \\ 0 & x > x_1 \end{cases}$$

В нем решении в полупространстве при первом краевом условии, растущем в режиме с обострением, *профиль температуры оказывался локализован в пространстве*. При этом само распределение температуры имело вид линейной функции (см. рис. 7).

Большинство коллег рассматривало этот парадоксальный пример лишь как «жалкий частный случай», как иногда говорил А.А. Самарский. Сергей Павлович увидел в этом удивительное явление – *эффект локализации тепла*.

Решение действительно необычно – несмотря на неограниченный рост коэффициента теплопроводности с ростом температуры тепло оказывается локализовано в ограниченной области.

Но для того, чтобы наблюдать такую локализацию тепла нужно стремительно выращивать температуру на границе. Но можно ли обойтись без этого? Ответ дала работа Сергея Павловича с А.П. Михайловым (рис. 8) и Н.В. Змитренко (рис. 9) – его любимыми учениками «старшего поколения». В этой работе рассматривалось нелинейное уравнение теплопроводности со степенным объемным источником $T_t = (\kappa_0 T^\sigma T_x)_x + q_0 T^\beta$, $-\infty < x < \infty$, $T(x, 0) = T_0(x)$. Оказалось, что и в этом случае решение может быть локализовано в пространстве на длине L_f (см. рис. 10):

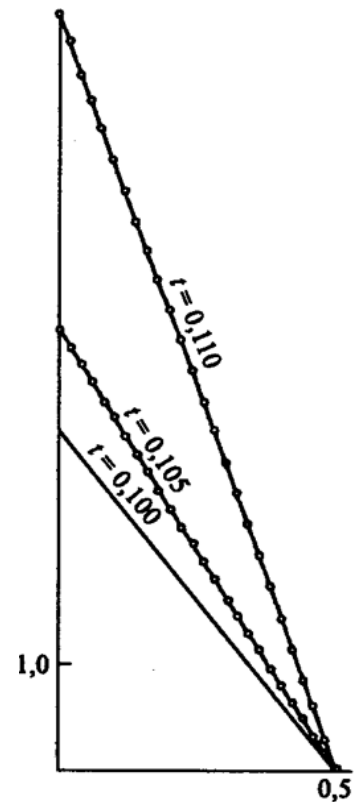


Рис. 7. Решение Самарского-Соболя, демонстрирующее эффект локализации тепла



Рис. 8. Михайлов Александр
Петрович (1947–2022)

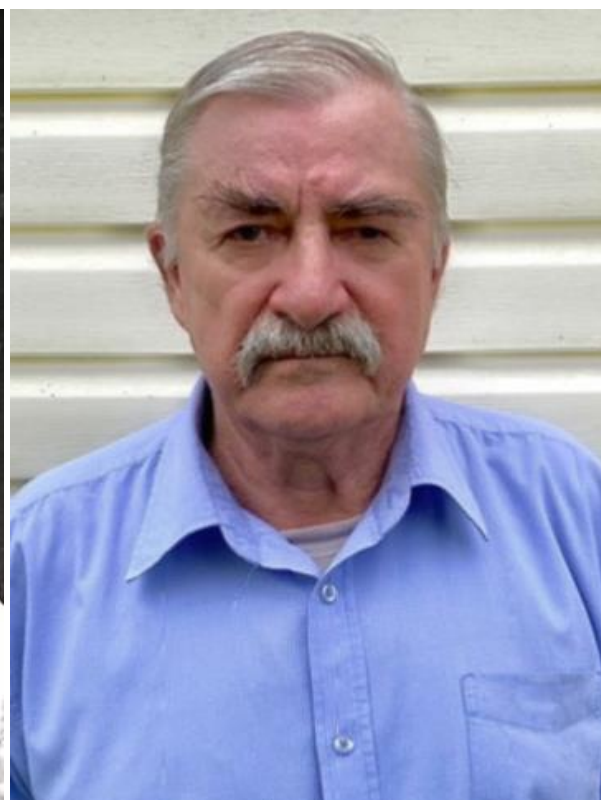


Рис. 9. Змитренко
Николай Васильевич

$$T(x,t) \sim (1-t/t_f)^{-1/(\beta-1)} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi x}{L_f} \right) \frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \right)^{1/(\sigma+1)}, \quad L_f = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\sigma+1} \sqrt{k_0/q_0}.$$

Нелинейный источник в этой задаче заменяет краевой режим в предыдущей! В среде может возникнуть этот удивительный тип неустойчивостей, при котором также имеет место локализация тепла.

В ряде случаев решение может быть получено аналитически, а затем реализовано в вычислительном эксперименте. Это еще одна из особенностей научной школы Сергея Павловича, – начинать с самых простых задач, в которых можно разобраться, получать оценки, доказывать теоремы, а затем проверять найденное в ходе расчетов и уже потом продвигаться дальше.

Как-то раз профессор Р.Г. Баранцев на семинаре спросил Сергея Павловича, видит ли тот какие-нибудь ограничения в распространении идей синергетики. «Пока не видим, и будем двигаться, исходя из этого, пока нос не расшибем», – последовал ответ, восхитивший аудиторию. Сергей Павлович очень серьезно относится к развитию своей научной школы, к возможности коллег разобраться, если у них будет желание, что, как и почему мы делали. По его инициативе наиболее важные для развития научной школы статьи были опубликованы в сборнике [1]. Поэтому многие упоминаемые результаты рассматриваются в этой книге.

Вспоминаю свою первую встречу с Сергеем Павловичем в скверике на Миусской площади перед зданием ИПМ. Сергей Павлович поразил меня доброжелательностью, эрудицией, а также тем, что разговоры в основном касались не математики, а философии. И действительно, свои идеи и работу научной школы он связывал с изменением мировоззрения, с философским контекстом.

Сергей Павлович со школьных лет вел дневники, часть которых вошла в книгу о нем и его идеях [2]. С тех школьных времен он вновь и вновь возвращался и переосмысливал афоризм Гераклита: «Этот космос, один и тот же для всего существующего, не создал никто из богов и никто из людей, но всегда был, есть и будет вечно живым огнем, мерами загорающимся, и мерами потухающим» (см. рис. 11). Сергей Павлович мыслил Вселенную как огромную среду, ключевую роль в которой играет горение и его аналоги.

В самом деле, можно мыслить сущее как результат организации, предпринятой Богом или другими высшими силами. На этом настаивает религия. Гомеровские «Илиада» и «Одиссея» утверждают, что бессмертные боги самым активным образом участвуют в наших мирских делах.

Однако если не привлекать богов к делам нашей реальности, то надо понять и объяснить, как возникло сущее, начиная от элементарных частиц и звезд и кончая жизнью, сознанием, биосферой, обществом. Если не рассматривать организацию свыше, то надо опираться на представления о самоорганизации. Это грандиозная

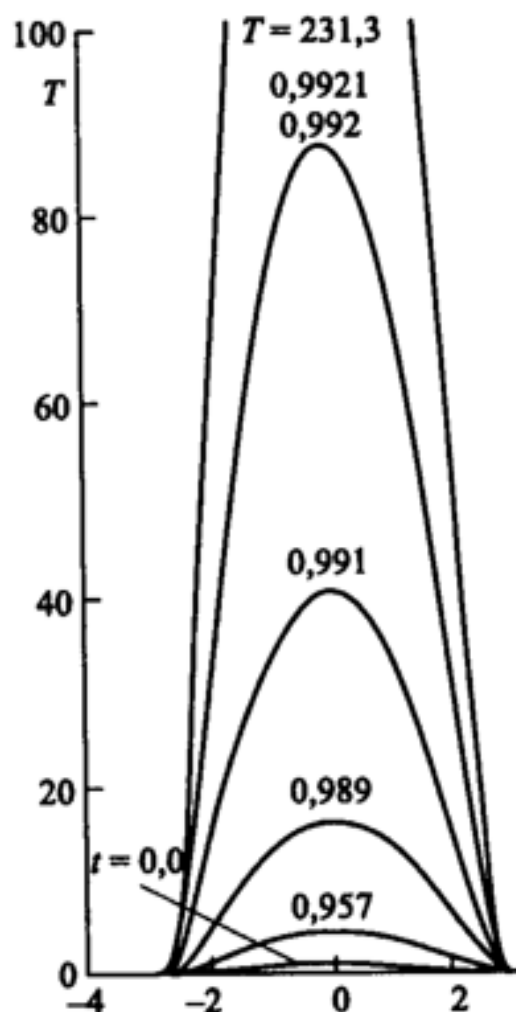


Рис. 10. Эффект локализации тепла в среде с объемным тепловым источником при постоянной длине области локализации



Рис. 11. Гераклит

задача для всей современной науки! По-видимому, концепция самоорганизации станет в XXI в. такой же общей, как представления об информации, сознании, эволюции, движении.

Сергей Павлович не раз перечитывал Платона. Мысль философа о совершенных, абсолютных формах, которые и определяют, в конечном счете, происходящее в мире, казалась ему очень глубокой. В размышлениях древних он видел предвидение квантовой механики и последующих теорий. В самом деле, «химический код» Вселенной – таблица Менделеева – определяется набором форм решений *одного уравнения* и соответствующими уровнями энергии.

Большое влияние на научное творчество Сергея Павловича оказали идеи одного из создателей квантовой механики В. Гейзенберга. Если вся химия содержится в уравнении Шредингера с его вариациями, то естественно двигаться этим путем и дальше. Почему масса протона в 1836 раз больше массы электрона? Почему элементарных частиц так много и их массы распределены странным образом. Гейзенберг считал, что ответ на эти волнующие вопросы даст некое нелинейное уравнение и искал его. Сергей Павлович считал, что нелинейное уравнение теплопроводности с источником является предвестником тех фундаментальных уравнений, которые определяют термодинамику открытых нелинейных систем.

В основе большинства современных физических теорий лежат законы сохранения. Процессы рассеяния энергии, диссипация возникают на следующей стадии исследования как результат осреднения, отказа от точного описания ради упрощения ситуации. Этот взгляд считается общепринятым. Сергей Павлович, как и лауреат Нобелевской премии по химии И.Р. Пригожин (1977), считал, что диссипативные процессы оказываются не результатом упрощения, а являются важнейшим элементом фундаментального описания материи. Изменение мировых констант, «стареющий» фотон, Вселенная, идущая от рождения к финалу, часто были темой наших бесед.

Принципиальный шаг в развитии научного творчества Сергея Павловича оказался связан с его совместной работой с его любимым учеником Г.Г. Елениным (см. рис. 12). В их работе обсуждался очень важный вопрос, – сколько различных структур может описывать нелинейное уравнение теплопроводности с источником, которое постоянно находилось в центре внимания его научной школы.

Оказалось, что их может существовать несколько! Эти структуры описываются ав-



Рис. 12. Еленин
Георгий Георгиевич

то модельными (самоподобными – self-similar) решениями вида

$$T(x, t) = g(t)f(x/\varphi(t)).$$

Здесь функция $g(t)$ определяет закон роста амплитуды структуры, $f(\xi)$ – её форму, а $\varphi(t)$ и $\xi = x/\varphi(t)$ показывают, как меняется полуширина распределения температуры. Оказалось, что при одних и тех же $g(t)$ и $\varphi(t)$ существует конечный набор функций $f(\xi)$, определяющих форму решений (см. рис. 13). Они имеют разное число максимумов и описывают сходящиеся к центру и растущие в режиме с обострением волны горения.

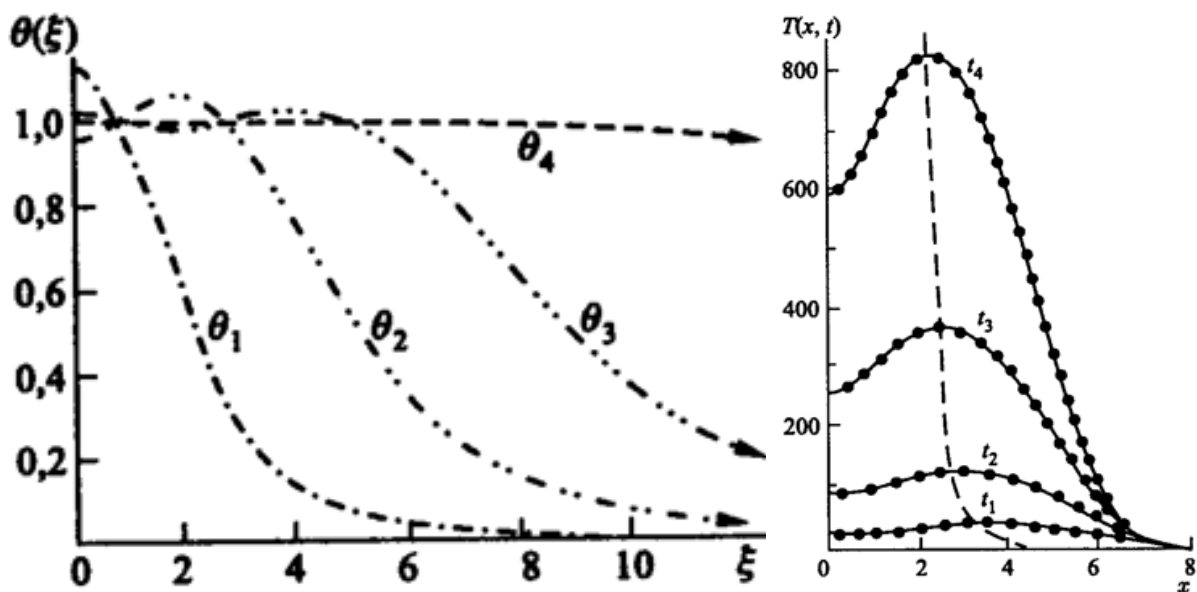


Рис. 13. Собственные функции нелинейной среды. Слева – полный набор для некой среды, справа – динамика функции θ_2

Эти результаты парадоксальны. Обычное линейное уравнение теплопроводности описывает выравнивание профиля температуры и уничтожение какой-либо упорядоченности. Здесь же нелинейность и источник дают новое качество, – они формируют структуры, согласовывая процессы горения в разных точках пространства!

Найденные решения уравнения для $f(\xi)$ Сергей Павлович назвал *собственными функциями нелинейной среды*. Стоит подчеркнуть необычность этого понятия

В «обычной», линейной математической физике решение линейного уравнения $Lu = 0$ ищут в виде

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x).$$

А если есть зависимость от времени, то в виде

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \varphi_m(x),$$

где $\varphi_m(x)$ называются собственными функциями.

Таким образом, решение задачи ищется как сумма собственных функций с некоторыми коэффициентами. Другими словами, имеет место *принцип суперпозиции* (наложения) – общее решение ищется как сумма частных. Именно это всё упрощает – появляется возможность разделять переменные и сводить сложную задачу к набору более простых. Именно это осваивают студенты в курсах математической физики. Естественно собственные функции $\varphi_m(x)$ зависят от краевых условий. Для разных областей и условий они различны.

Собственные функции нелинейной среды, введенные Сергеем Павловичем, описывают локализованные решения. Соответствующие структуры могут возникнуть в любом месте среды. Кроме того, здесь нет принципа суперпозиции, – они определяют не только отдельные частные решения, но и асимптотику всех других решений, когда амплитуда неограниченно возрастает и $t \rightarrow t_f$.

В эпоху вычислительного эксперимента есть соблазн поверить, что всё обстоит именно так, как считает машина. Это не так. Есть множество задач «неудобных» для компьютера. Простейший пример – отображение $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$, $-1 < x_1 < 1$. Нетрудно разобраться, как ведет себя последовательность $\{x_n\}$, и убедиться, что компьютер дает совсем другой результат.

Поэтому важен и интересен поиск аналитических решений, и Сергей Павлович обращал на это внимание своих учеников. В свое время норвежский математик Мариус Софус Ли (1842–1899) решил найти способ аналитического решения дифференциальных уравнений в частных производных. Значение решения этой задачи трудно переоценить – именно с помощью таких уравнений мы записываем законы природы и математические модели в разных областях (акустика, гидродинамика, теория упругости, электродинамика, квантовая механика, общая теория относительности). Идея классика состояла в использовании геометрических представлений и теории групп для решения дифференциальных уравнений. Решить эту задачу не удалось, но был создан удивительно красивый математический аппарат и получен прекрасный инструмент для поиска автомодельных и аналитических решений дифференциальных уравнений. Ситуация напоминает открытие Христофора Колумба – плыли в Индию, попали в Америку.

После работ Л.В. Овсянникова по групповому анализу дифференциальных уравнений этот инструмент начал активно использоваться в «нелинейной математике».

В 1970-80-е гг. возник новый взгляд на уравнения – многие из них «нелинейные по форме» оказались «линейными по существу». Яркий при-

мер здесь – уравнение Кортевега-де-Фриза. В 1895 г. голландский физик Дидерик Кортевег и его студент Густав де Фриз вывели уравнение, описывающее волны на мелкой воде, $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.

Проведенные вычисления показали, что решение этого уравнения с течением времени распадается на набор уединенных волн-солитонов (solitary wave), имеющих вид $u = A \operatorname{ch}^{-2}((x - ct)/\Delta)$.

Дальнейшие исследования показали, что оно (а также несколько других нелинейных уравнений) имеет бесконечное число законов сохранения, а само уравнение может быть сведено к линейной задаче, самым тесным образом связанной с обратной задачей квантовой механики.

Важную роль в этих исследованиях сыграл И.М. Гельфанд, много лет работавший в нашем институте.

Многие фундаментальные результаты ИПМ связаны с методами решения обратных задач. Принципиальные результаты здесь были получены А.Н. Тихоновым и коллективом, которым он руководил. Если представить прямую задачу в виде $Az = u$, то она сводится к нахождению решения z при известном операторе A и правой части u . В обратной задаче по данным о z и u надо восстановить оператор A .

Обратные задачи удивительны. Например, частица в потенциальной яме, $U(x)$ при разных энергиях E имеет разный период. Прямая задача –



Рис. 14. Дородницын
Владимир Анатольевич



Рис. 15. Свирщевский
Сергей Ростиславович

нахождение функции $T(E)$ при заданном потенциале $U(x)$ решается без труда. Однако обратная задача – нахождение $U(x)$ по функции $T(E)$ имеет бесконечно много решений.

Совершенно иначе дело обстоит в квантовой механике. Здесь по результатам рассеяния на потенциале $U(x)$ можно однозначно найти сам потенциал. Этот важный результат был получен сотрудником ИПМ И.М. Гельфандом. Именно уравнение Гельфанда–Левитана и позволяет построить линейное уравнение, определяющее решения уравнения Кортевега-де-Фриза. В это время многие коллеги советовали Сергею Павловичу переключиться на солитонную тематику, но Сергей Павлович вел свою научную школу выбранным им курсом.

Принципиальные результаты были получены в инвариантно-групповом анализе задач, поставленных Сергеем Павловичем, его учениками В.А. Дородницыным (рис. 14) и С.Р. Свирщевским (рис. 15). В результате работы В.А. Дородницына была проведена классификация нелинейных уравнений теплопроводности с источником и были найдены новые парадоксальные автомодельные и аналитические решения этого класса уравнений. Инвариантно-групповой анализ позволяет найти коэффициенты теплопроводности и объемные источники, при которых существуют автомодельные решения:

$k(u)$	$q(u)$
e^u	$\pm e^u + \delta$
u^σ	$\pm u^{\sigma+1} + \delta u$
$u^{-4/3}$	$\alpha u^{-1/3} + \delta u$
1	$\delta u \ln u$
1	$\pm e^u$

В настоящее время В.А. Дородницын является одним из ведущих специалистов в области инвариантно-группового анализа и построения разностных схем.

Стоит обратить внимание на книгу В.А. Галактионова и С.Р. Свирщевского (рис. 16). На мой взгляд, она опередила свое время. Оказалось, что в уравнении нелинейной теплопроводности при определенной нелинейности коэффициента теплопроводности, а также во многих других интересных нелинейных уравнениях, есть конечномерные инвариантные подпространства, которые эти уравнения переводят в себя. Их анализ дает удиви-

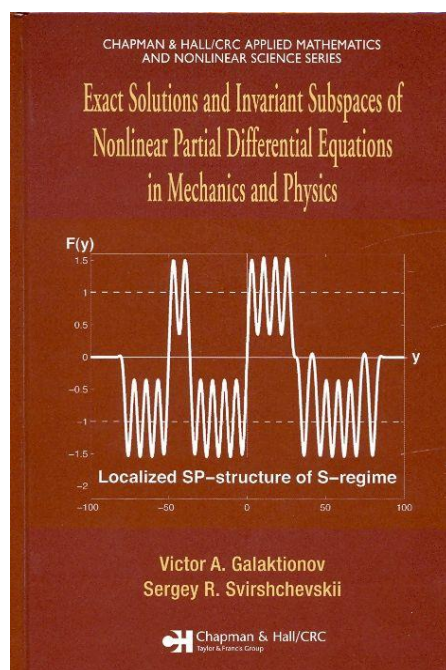


Рис. 16. Работа, представляющая набор точных решений для широкого класса нелинейный сред

тельные инструменты для поиска точных решений. Это путь в будущее для важной части нелинейной науки. Вспомним, что к анализу эффекта локализации тепла Сергея Павловича привело аналитическое решение Самарского – Соболя. За многими парадоксальными аналитическими решениями, построенными и описанными в этой книге, тоже, вероятно, стоят важные и интересные эффекты.

Для того чтобы понять и использовать это, нужны читатели, широкий междисциплинарный подход, позволяющий осмыслить и использовать эту математику. Возможно, они появятся не быстро. В свое время выдающийся математик, физик, философ Анри Пуанкаре заложил основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, разобрался, каковы аттракторы для простейших динамических систем. Однако понадобилось почти десять лет для того, чтобы инженеры и физики поняли, что эти работы создали аппарат теории колебаний, позволяющий конструировать новые радиотехнические устройства, что в те годы имело огромное значение. Как-то на одном семинаре после упреков в том, что развивающийся в научной школе Сергея Павловича подход далек от приложений, наш учитель воскликнул: «Разве не очевидно, что мы сегодня подыскиваем математический аппарат к тем задачам, которые будут решаться завтра?!».

Важной частью научного творчества Сергея Павловича и его учеников являются строгие результаты для больших классов нелинейных параболических уравнений. Ключевую роль в развитии этого направления сыг-



Рис. 17. Галактионов Виктор Александрович в те далекие времена, когда были получены эти результаты



Рис. 18. Посашков Сергей Александрович

рали его ученики В.А. Галактионов (рис. 17) и С.А. Посашков (рис. 18). Импульсом к этим исследованиям было стремление создать качественную теорию нелинейных параболических уравнений так же, как в своё время была построена качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Для большого класса уравнений это удалось сделать, получить оценки времени существования решений и областей локализации.

Классические курсы математической физики содержат теоремы сравнения для линейного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Эти теоремы дают вехи, позволяющие оценивать, например, решения задач для этого уравнения с различными начальными данными.

Однако оказалось, что теоремы сравнения имеют место и для нелинейных уравнений теплопроводности с объемными источниками $T_t = (k(T)T_x)_x + q(T)$ при определенных условиях на нелинейности:

$$\begin{aligned} k^{(2)}(T) - k^{(1)}(T) &\geq 0 \\ k^{(2)'}(T)k^{(1)}(T) - k^{(1)'}(T)k^{(2)}(T) &\geq 0 \\ q^{(2)}(T)k^{(1)}(T) - q^{(1)}(T)k^{(2)}(T) &\geq 0 \end{aligned}$$

Трудно сказать даже о наиболее важных строгих результатах. Например, оказалось, что при стремлении к моменту обострения различные нелинейные уравнения вырождаются в нелинейные уравнения первого порядка, и их анализ позволяет строить *приближенные автотельные решения*. Для нелинейного уравнения теплопроводности с краевым режимом, растущим в режиме с обострением, такое решение определяется уравнением первого порядка:

$$T_t = \frac{k(T)}{T+1} (T_x)^2, \quad (t, x) \in \omega_T$$

Многие строгие результаты, полученные при исследовании *модели тепловых структур* (того самого нелинейного уравнения теплопроводности со степенным коэффициентом теплопроводности и степенной зависимостью объемного источника от температуры) представлены в фундаментальной монографии [4] (рис. 19). В ней содержатся не только полученные результаты, но и множество интересных гипотез, определяющих пути дальнейшего построения теории в этой области.

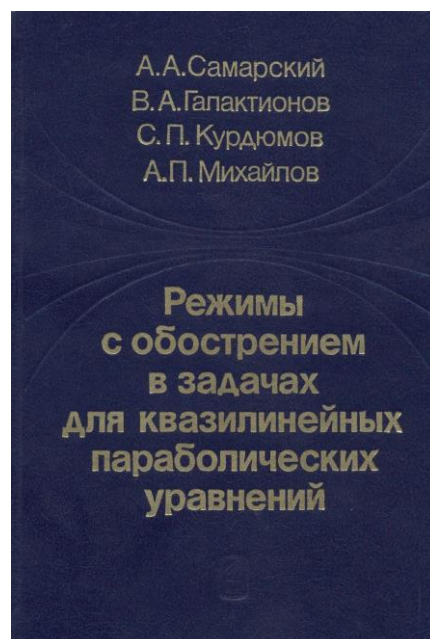


Рис. 19. Изложение ключевых строгих результатов для нелинейных сред, в которых возможны режимы с обострением

Сергей Павлович относился к модели тепловых структур не как к математической игрушке, а как к ключу к новым физическим эффектам и высоким технологиям. Режимы с обострением возникли в связи с исследованием и моделированием лазерного термоядерного синтеза (ЛТС). Это направление, направленное на получение дешевой чистой энергии, основано на способности лазера концентрировать энергию в малых объемах вещества (10^{-6} см³) за короткие промежутки времени (меньше 10^{-9} - 10^{-12} с) и осуществить инерциальное удержание плазмы. Идея такого синтеза была впервые выдвинута в 1961 г. Н.Г. Басовым и О.Н. Крохиным. Отдел ИПМ, которым руководил А.А. Самарский, вел большие совместные работы с командой Н.Г. Басова. Думалось, что режим с обострением должен был существенно уменьшить огромный объем энергии, который был нужен лазером, чтобы сжать дейтерий-тритиевую таблетку до плотности, при которой возникает термоядерная плазма.

Научная школа Сергея Павловича активно работала с коллективом, который возглавлял специалист по лазерам и ректор Физтеха Н.В. Карлов. В этой работе исследовались математические модели *лазерной термохимии*. Лазеры небольшой мощности оказывались эффективным инструментом управления химическими реакциями [5]. Сергея Павловича очень радовало, что в экспериментах наблюдались эффекты самоорганизации, обнаруженные при исследовании модели тепловых структур.

На пути к реальности при изучении эффекта локализации тепла естественно возникает необходимость исследовать многомерные тепловые структуры. В самом деле, одномерные модели, о которых шла речь, описывают локализованные только в направлении x структуры. Распределение температуры представляет при этом в трехмерном пространстве бесконечные листы в направлении y и z .

Моделирование «настоящей» локализации требует трехмерных, а на худой конец, двухмерных расчетов и исследования происходящего. В группе, которая этим занималась, входили Ю.П. Попов (рис. 20), Ю.А. Повещенко (рис. 21) и Г.Г. Малинецкий (см. рис. 22). Юрий Петрович Попов был в свой время также дипломником Сергея Павловича. Попов – один из участников физтеховского КВН в студенческие годы, прекрасный автор, исследователь, выдвинувший идею полной консервативности разностных схем, блестящий организатор. С 1999 по 2008 гг. он был директором ИПМ. Это было нелегкое время и Институт очень многим ему обязан. Его аспирант Ю.А. Повещенко в те годы создал замечательный пакет прикладных программ ТЕКОН (тепловой конструктор), блестяще использовал программистские возможности, которые в те годы были в Институте. «Пришел, ворвался в другие отделы, освоил их методологию и получил блестящие результаты!» – часто говорил о нем Сергей Павлович. В те времена в Институте был сильный программистский блок, – специалисты создали РЕФАЛ и другие языки программирования, была разработана и внедрена операцион-



Рис. 20 Попов Юрий Петрович (1941–2016)



Рис. 21. Повещенко Юрий Андреевич



Рис. 22. Малинецкий Георгий Геннадьевич

ная система ОС ИПМ, трансляторы, развито направление, связанное с компьютерной графикой, и многое другое. Проведенные многомерные расчеты и проделанный анализ показали, что локализация тепла и многомерные тепловые структуры, развивающиеся в режиме с обострением, действительно имеют место (см. рис. 23).

Сергей Павлович поставил задачу построить набор многомерных собственных функций нелинейной среды. Это тоже автономные решения, описывающие сходящиеся к центру тепловые волны, но чтобы их построить надо было решить весьма сложное эллиптическое уравнение. С этой нелегкой задачей блестяще справились ученики Сергея Павловича Е.С. Куркина (рис. 24) и А.Б. Потапов (рис. 25). На рис. 26 и 27 показаны примеры двумерных собственных функций нелинейной среды.

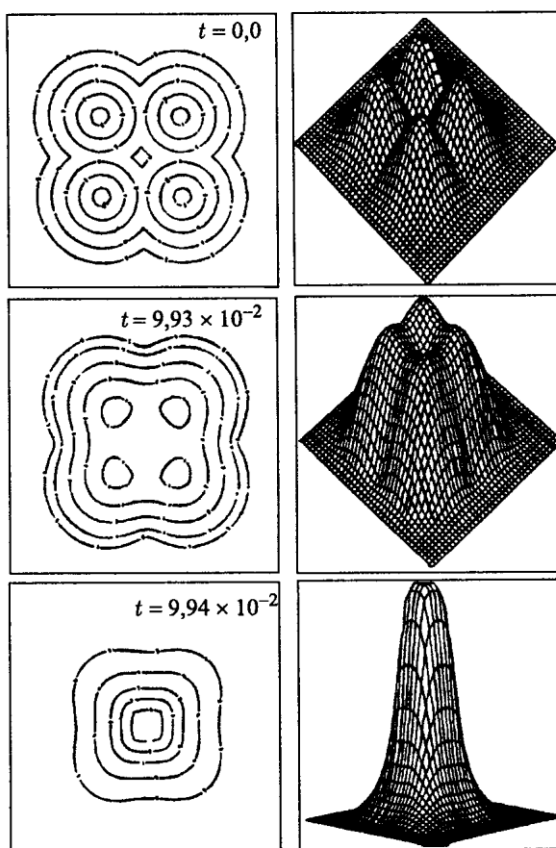


Рис. 23. Пример двумерной пространственно-локализованной структуры, развивающейся в режиме с обострением (слева – линии уровня, справа – видовая проекция)



Рис. 24. Куркина Елена Сергеевна (1956–2021)



Рис. 25. Потапов Алексей Борисович

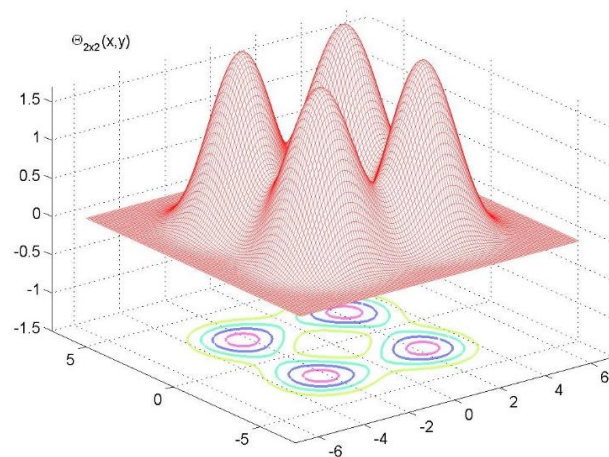


Рис. 26. Пример собственной функции нелинейной среды (на плоскости показаны линии уровня двумерного автомодельного решения)

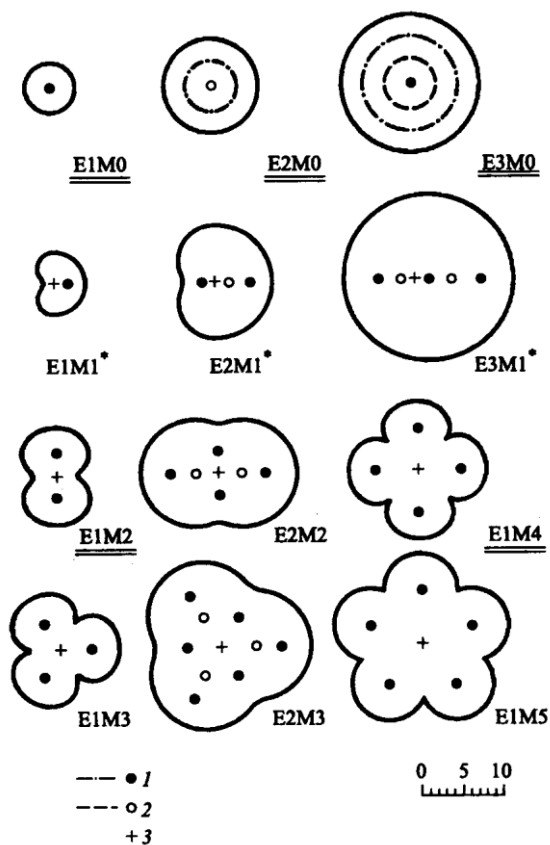


Рис. 27. Карта собственных функций некоторой нелинейной среды



Рис. 28. Бакирова Маргарита
Илларионовна (1947–1996)

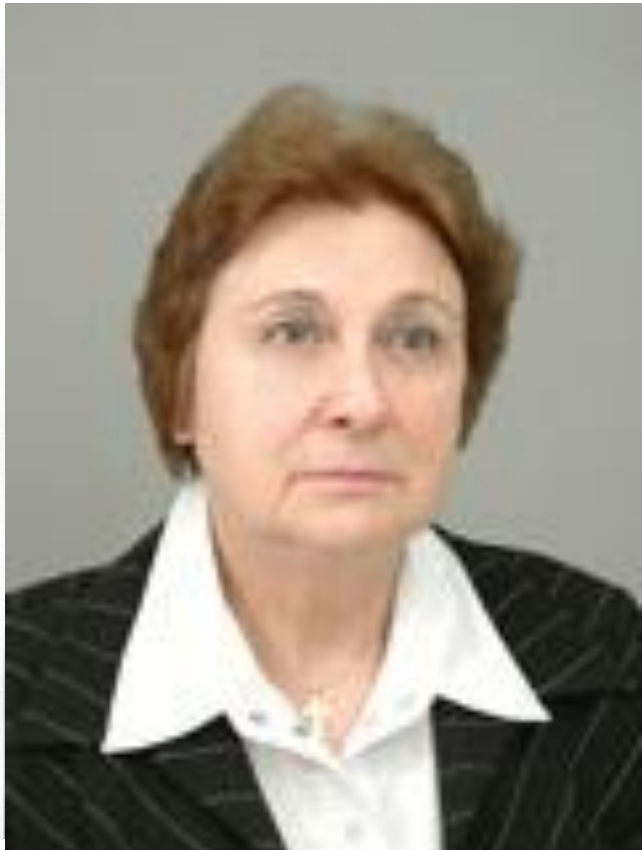


Рис. 29. Димова Стефка Николаева

Чтобы соответствующие итерационные методы сходились, нужно, учитывая специфику задачи, найти очень точное начальное приближение. И им это удалось! Линеаризованная задача, которая для этого использовалась, в ряде случаев совпадала с уравнением Шредингера для пространственной компоненты волновой функции. Сергей Павлович и Лена Куркина полагали, что это поможет переосмыслить и развить квантовую механику... Будущее покажет, насколько оправданы эти надежды.

Большую роль в развитии научной школы С.П. Курдюмова сыграли работы сотрудницы ИПМ М.И.Бакировой (рис. 28) и болгарской ученицы нашего учителя С.Н. Димовой (рис. 29). Им удалось развить вычислительные методы высокой точности, и это позволило им вместе с коллегами построить удивительный класс тепловых структур (см. рис. 30). Приведем вид реше-

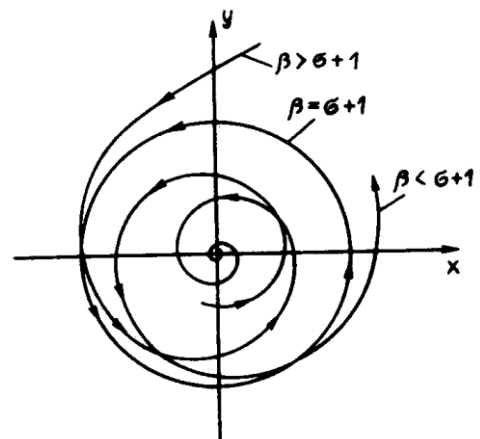


Рис. 30. Динамика максимума температуры парадоксального решения, описывающего спиральные волны, развивающиеся в режиме с обострением

ния, описывающего спиральную волну

$$u(t, r, \varphi) = (t_f - t)^{1/(1-\beta)} \tilde{u}(R, \Phi)$$

$$R = r(t_f - t)^{(\beta-\sigma-1)/2(1-\beta)}, \quad \Phi = \varphi - c \ln(t_f - t)$$

Кибернетика во многом началась с размышлений Норберта Винера и его кружка над работой сердца. Результатом этих размышлений стала модель спиральной волны в активной среде. Однако из работ М.И. Бакировой следует, что максимум температуры тепловой волны в модели тепловых структур может как раскручиваться, стремясь к центру распределения температур, так и закручиваться. Это парадоксальное решение кардинально отличается от интуитивных представлений о решениях уравнения теплопроводности.

Стоит обратить внимание на необычные режимы распространения тепла в пространственно-неоднородных средах. В них распределение температуры может быть пространственно локализовано в одном направлении и неограниченно распространяться в другом (см. рис. 31). Так обстоит дело, например, в модели, описываемой уравнением

$$u_t = (u^3 u_x)_x + (u u_y)_y + u^3.$$

Иногда ученых сравнивают с кротами, роющими свою норку, и чем глубже, тем лучше. Из глубокой норки не видно, чем же занимаются коллеги даже в близких областях. В результате появляются специалисты, которые знают «всё ни о чем». Сергей Павлович был категорическим противником такой стратегии. Он часто повторял фразу лауреата Нобелевской премии Георга Лихтенберга: «Человек, изучающий химию и только химию, и саму химию знает плохо».

С.П. Курдюмов полагал, что в XXI в. наука перейдет от анализа к синтезу, от узкого профессионального деления к

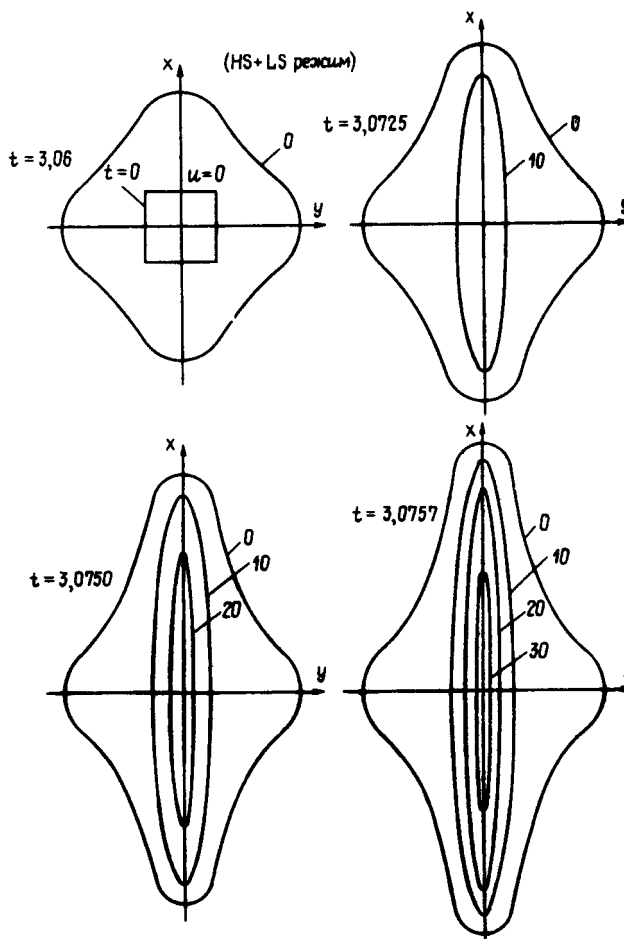


Рис. 31. Решение, пространственно-локализованное в одном направлении и неограниченно распространяющееся в другом

широким междисциплинарным подходам, ломающим цеховые барьеры. По его мнению, наука – это диалог, а не монолог. Такой взгляд приводит к обсуждению наших проблем со многими выдающимися учеными, к острым дискуссиям.

Большую известность получили статья С.П. Курдюмова и Е.Н. Князевой [6; 9; 10], в которых они дискутируют с концепцией И.Р. Пригожина (см. рис. 32). В отличие от Пригожина, они считают современную науку *материалистической*, допуская, что процессы эволюции в разных уголках Вселенной имеют разные моменты обострения. И это создает проблему связи между ними и, возможно, объясняет парадокс Ферми – молчащий космос, несмотря на то, что в нем должны быть цивилизации на много порядков более развитые, чем наша.

В отличие от Пригожина, они не считают, что современная наука является *редукционистской*. Синергетика показывает, что это не так. Теория самоорганизации перебрасывает мостик между естественными и гуманитарными науками, между живым и мертвым.

Кроме того, они полагают, что наука и сегодня является *детерминистской*. Действительно, для активных, сложных, открытых систем характерны и бифуркации, и чувствительность по отношению к начальным данным и параметрам, кризис аттракторов. Будущее неединственно – как правило, есть несколько вариантов развития событий. Но вместе с тем, число этих сценариев ограничено, наука помогает их увидеть. По сути, Пригожин, считающий, что «кости ещё не брошены», является агностиком и пессимистом, в то время как Курдюмов – романтиком и оптимистом, возлагающим большие надежды на будущее.

В ИПМ и Российскую академию государственной службы при Президенте РФ (РАГС) приезжал один из основоположников синергетики Герман Хакен. На конференции в РАГС состоялся очень интересный диалог наших научных школ (рис. 33). Эта конференция состоялась во многом благодаря инициативе, энергии и самоотверженности заведующего кафедрой государственной службы и кадровой политики РАГС Вячеслава Леонидовича Романова. Благодаря его усилиям удалось издать 7 томов трудов этой конференции.

Очень интересно, что именно в России и Германии и общество в целом, и исследователи оказались гораздо лучше подготовлены к восприятию междисциплинарных подходов. Акцент на мировоззрении, на «по-

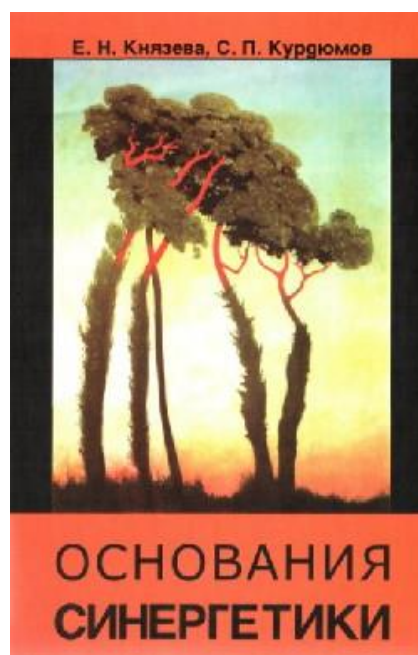


Рис. 32. Книга, разъясняющая основания синергетики гуманитариям



Рис. 33. Участники конференции в РАГС в гостях у С.П.Курдюмова: вверху – С.П.Курдюмов, В.И.Аршинов, В.Г.Буданов, Г.Хакен, Г.Г.Малинецкий, К.Майнцер, И.Е.Москалёв, В.С.Курдюмов, внизу – В.В.Мурина (Курдюмова), Н.М.Чернавская, В.Л.Романов, В.Эбелинг

следних вопросах», на понимании целого отличал выдающихся русских ученых – Ломоносова, Менделеева, Вернадского и всю отечественную науку. На излете советской эпохи исследования велись по всему научному фронту. Наверно, А.А. Блок точно отразил одну из важных черт нашего менталитета:

*Мы любим всё – и жар холодных числ,
И дар божественных видений,
Нам внятно всё – и острый гальский смысл,
И сумрачный германский гений.*

Имена трех гигантов мысли в Германии – Гёте, Гаусса и Гегеля показывают стремление к целостности, универсальности создаваемого мировидения.

В ходе дискуссии отличия стали видны. Концепция ключевых, ведущих переменных – параметров порядка, в терминах синергетики, – связывалась с сами медленными переменными, процессами, которые со временем начинают определять динамику всех остальных переменных исследу-

емой системы. Кроме того, по прогнозу Г. Хакена самоорганизация приведет к разгосударствлению, к массовому появлению частных тюрем, военных компаний, пенсионных фондов, структур, обеспечивающих правопорядок, а также ряда других сущностей, находившихся в государственном подчинении.

Представления курдюмовской школы существенно отличаются от описанной выше картины. Мы живем в мире изменений, поэтому вновь и вновь во множестве областей параметрами порядка оказываются быстрые, а не медленные переменные. Кроме того, есть диалектика, определяющая сочетание самоорганизации и организации. Рынок в его либертарианском понимании, как показывает мировой опыт, не может решить многие проблемы, связанные с окружающей средой, с масштабными исследовательскими программами, с социальным обеспечением. Печальный опыт российских реформ, исходивших из того, что «рынок всё решит», а также ряд кризисных явлений в современной Европе показал, что курдюмовский подход ближе к реальности.

Большое влияние на научное творчество Сергея Павловича имел выдающийся математик, специалист по моделированию, философ Н.Н. Моисеев (рис. 34) и его научная школа. Вычислительный центр Академии, которому он отдал много лет жизни, был не только научной структурой, но и элементом культуры. Междисциплинарные подходы активно развивались в моисеевской научной школе, простираясь от военных и инженерных задач до вопросов экологии, экономики, стратегии освоения Северного морского пути, глубоких философских проблем. Никита Николаевич с большим вниманием и интересом следил за исследованиями курдюмовской школы, иногда упрекая нашего учителя в излишней скромности. Помнится, он показывал мне медаль Академии естественных наук на черно-белой ленте, которой он был удостоен за исследования в области самоорганизации: «С не меньшим основанием, чем я, такой награды заслуживает Сергей Павлович. Жаль, что он реже и сдержаннее выступает, чем хотелось бы».

Огромной удачей для научной школы является выяснение на определенном этапе того, что именно она и занимается наиболее важным делом. Такой период был в жизни курдюмовской научной школы. Он связан с совместной работой с выдающимся просветителем России С.П. Капицей (рис. 35). Как правило, демографы рассматривают прогноз населения от-



Рис. 34. Никита Николаевич Моисеев (1917–2000)

дельных стран, регионов и областей и стремятся учесть множество деталей. В отличие от них С.П. Капицу заинтересовала динамика населения всей нашей планеты на протяжении сотен веков. Действительно, интересно понять, как же нам, в отличие от других видов, удалось завоевать Землю и стать абсолютным хищником. Статистика и данные палеодемографов, изучающих рост населения в прошлом, приводит к поразительному результату $N(t) \sim (t_f - t)^{-1} t_f \approx 2025 \text{ год}$.

Другими словами, в течение сотен веков население Земли росло в режиме с обострением. Причина этого – самоорганизация, определившая эту сильную положительную обратную связь. Дело в том, что мы можем с пользой для дела привлечь для решения своих проблем любое количество и знакомых и незнакомых людей. Именно самоорганизация привела к тому, что мы научились передавать свои жизнеспасающие технологии в пространстве (из региона в регион) и во времени (от одного поколения к другому). «Я много рассказывал о своих идеях и моделях, но первый раз меня поняли и поддержали на семинаре в ИПМ у Сергея Павловича Курдюмова», – иногда говорил он. Интересно, что все наиболее популярные модели глобальной динамики оказались в той или иной степени связаны с ИПМ или были созданы у нас.

На рис. 36 виден масштаб происходящих изменений. Красная кривая показывает закон роста в течение 200 тысяч лет и следующий из этого прогноз – при таком законе роста к 2025 г. нас стало бы бесконечно много. Однако, как следует дальше из теории режимов с обострением, – при очень больших масштабах исследуемых величин должны включаться ограничивающие факторы (пока не связанные с ограниченностью природных ресурсов) и закон роста меняется (синяя кривая на рис. 36). В нашем случае происходит *глобальный демографический переход* – резкое, на времени жизни одного поколения, уменьшение скорости роста числа людей на планете. По сравнению с прежней зависимостью отличие составляет уже несколько миллиардов человек. Это самый крутой поворот в истории цивилизации на Земле. Глобальные демо-

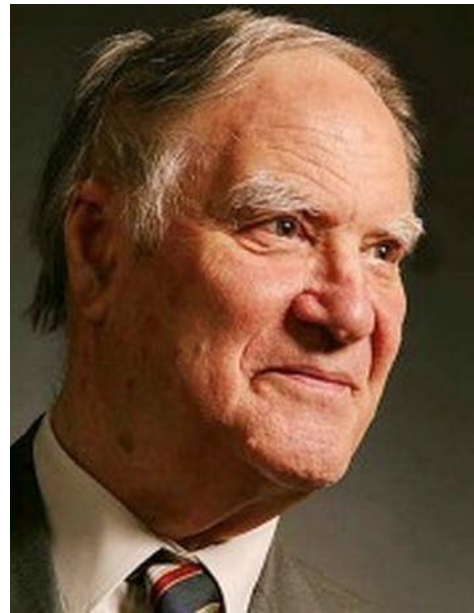


Рис. 35. Сергей Петрович Капица (1928–2012)

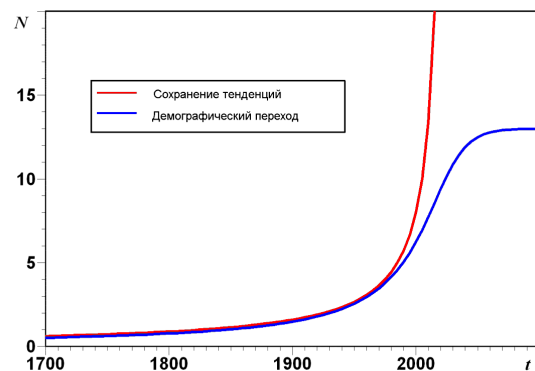


Рис. 36. Динамика и прогноз роста населения мира

графические теории объясняют причины и следствия этого перехода.

В разных странах демографический переход происходит в разном темпе, и это может привести к новому глобальному переселению. XXI столетие часто называют столетием Африки. По прогнозу ООН 40% населения мира к 2100 г. будет жить в Африке, 40% в Азии и по 10% в Европе и Америке.

Самоорганизация, демография и образование будут решающими сущностями в XXI в., и во многих случаях это следует иметь в виду. С этой мыслью по инициативе С.П. Курдюмова и С.П. Капицы была написана книга, изданная много раз (и со временем превратившаяся в двухтомник [7; 8]), на обложке которой была представлена улыбка чеширского кота (см. рис. 37).

Сергей Павлович уделял большое внимание лекциям, выступлениям на семинарах и конференциях. По его мысли, идеи синергетики должны преобразить мир, а для этого люди должны знать их. Он полагал, что философское осмысление синергетики и ее оснований откроет двери в культуру этому междисциплинарному подходу. И действительно, наибольшую популярность получили его книги, рассматривающие философские основания синергетики [9,10].

Эти работы широко использовались в образовании студентов различного профиля, были поняты и оценены научным и педагогическим сообществом. В 2022 г. Сергей Павлович совместно с С.П. Капицей (Институт физических проблем им. П.Л. Капицы), Г.Г. Малинецким (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), Э.М. Кольцовой (МХТИ им. Д.И. Менделеева), Л.С. Гордеевым (МХТИ им. М.В. Ломоносова), Ю.Д. Третьяковым (МГУ им. М.В. Ломоносова) был удостоен премии Правительства Российской Федерации в области образования.

Заметим, что идеи синергетики активно используются и в естественнонаучном, и в гуманитарном образовании во многих странах. В упоминавшейся российско-германской конференции в РАГС активно участвовал профессор Клаус Майнцер, учебник синергетики которого был переведен на китайский, японский и множество европейских языков. По мнению Сергея Павловича, было бы важно перевести его на русский язык, и это тоже было сделано [11].



Рис. 37. Работа, представляющая теорию роста народонаселения, идеи математической истории и модели развития системы образования

Книга действительно интересная, но стоит прокомментировать ее название. В России, Германии, во многих европейских странах теорию самоорганизации называют синергетикой. В США это направление именуют «исследованием сложности». Книга Майнцера вышла под заголовком «Мышление в сложности». Для русскоязычных читателей название странное. Ведь задача науки в том и состоит, чтобы сделать кажущееся сложным простым и понятным. Наши философы по примеру В.И. Аршинова начали называть сущности, для которых понятие сложности кажется узким, *сложностностью*. Пояснить это можно так, – понятие сложности имеет, с одной стороны, точное математическое определение. С другой стороны, его широко используют в кибернетике, имея в виду структуру, многоуровневые, иерархические или сетевые системы. Синергетика развивает междисциплинарные подходы, рассматривает объекты, способные к рефлексии, эволюцию, в ряде случаев в ней структура системы может меняться в зависимости от решаемых задач или изменившегося окружения. Оригинальный подход нашел руководитель книжного издательства УРСС Марий Доминго Рикой, назвав книгу Майнцера «Сложносистемное мышление». По-моему, именно это название и прижилось. Мне термин «синергетика» кажется простым и понятным, хотя история науки показывает, что придумывать новые слова очень полезно. «Аттракторы», «динамический хаос», «горизонт прогноза», «режимы с обострением», «фракталы», «локализация тепла» и многие другие понятия появились в связи с междисциплинарными исследованиями. За каждым из них стоит научное направление, размышления многих исследователей и появившиеся интуитивные понятия. Последние не менее важны. Они меняют массовое сознание и помогают преобразить мир.

У научной школы есть не только корни, но и крона, – новые подходы, опирающиеся на созданное и расширяющие круг задач, который становится доступным.

Сергей Павлович огромные надежды связывал с пониманием, которое появится после исследования нелинейного уравнения теплопроводности с помощью разнообразных методов. Один из аспирантов С.П. Курдюмова предлагал поставить памятник этому уравнению во дворе ИПМ. Но ведь должны быть и другие глубокие содержательные уравнения, которые описывали бы самоорганизацию. В самом деле, размышляя о сущностях, которые позже стали называть притягивающими множествами в фазовом пространстве или аттракторами, Анри Пуанкаре исходил о представлениях о том, что динамических систем может быть много, а аттракторов мало. Классическая математическая физика ставит во главу угла три уравнения – Лапласа, теплопроводности и колебаний струны. В возможности описать многое с помощью немногого Пуанкаре видел единство мира, считая его материальность очевидной.

Синергетика во многом началась с работы выдающегося британского математика и криптографа Алана Тьюринга, предложившего рассматривать системы типа реакция–диффузия

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 u_{xx} + f(u, v) \\ v_t &= D_2 v_{xx} + g(u, v) \end{aligned}$$

Область применения этого уравнения оказалась огромна, – его исследованию в разных ипостасях сейчас посвящено более 30 тыс. работ. В этой области одним из ключевых уравнений оказалось уравнение Курамото–Цузуки (иногда используют другое его название – зависящее от времени обобщенное уравнение Ландау–Гинзбурга).

$$\begin{aligned} W_t &= W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)W|W|^2 \\ W(x, t) &= u(x, t) + iv(x, t) \end{aligned}$$

Можно ли его исследовать, следуя логике подхода, развитого в научной школе С.П. Курдюмова, построить иерархию упрощенных моделей и добиться, чтобы после вычислений приходило понимание? Оказывается, это можно сделать, и большую роль в понимании этого сыграла Т.С. Ахромеева (рис. 38). Можно привести только один пример. Сложный пространственно-временной хаос, описываемый этим уравнением в частных производных может описан с помощью простейшего, на первый взгляд, семейства одномерных отображений $M_{n+1} = f(M_n, \lambda(c_1, c_2))$ (см. рис. 39). Динамика уравнения в ряде случаев прекрасно отражает странный аттрактор (см рис. 40):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) \\ \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 0.75\eta) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta \\ \dot{\zeta} &= c_2(2\xi - 0.5\eta) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2 \\ k &= \pi/l \end{aligned}$$

За внешней сложностью скрывается внутренняя простота [12].



Рис. 38. Ахромеева Татьяна Сергеевна

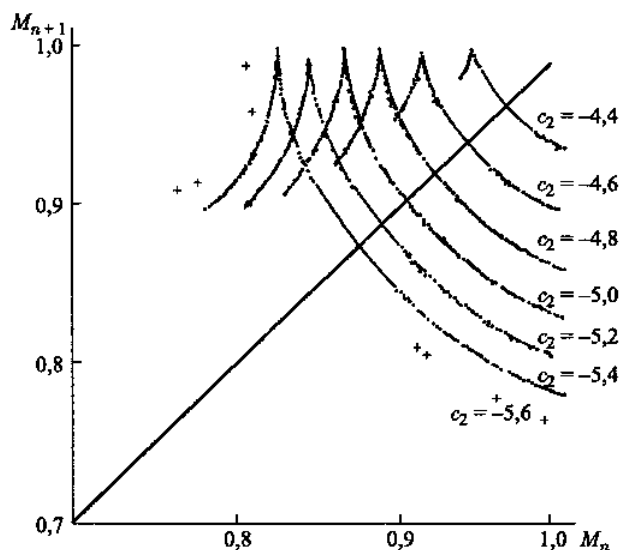


Рис. 39. Одномерное отображение, порождаемое решениями уравнения Курамото–Цзузуки

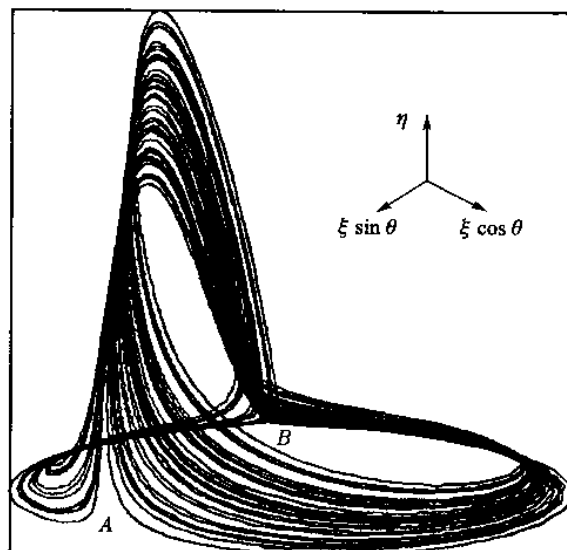


Рис. 40. Пример странного аттрактора в галёркинской системе, соответствующей уравнению Курамото–Цзузуки

В XX в. основными «заказчиками» исследований в области прикладной математики были физика, химия, механика, техника. Однако мир меняется – человечество входит в *постиндустриальную фазу развития цивилизации*, где во главе угла оказывается человек. Именно с ним, а не с природой или машинами, оказываются связаны и большие риски, и открывающиеся возможности. Поэтому на первый план выходят гуманитарные дисциплины, и активными «заказчиками» работ по прикладной математике становятся социология, экономика, психология, история, лингвистика, география.

В 1990-х гг. С.П. Курдюмов, С.П. Капица и автор выдвинули исследовательскую программу, связанную с построением *математической истории*. В этой программе предполагалось на основе построения количественных моделей, опирающихся на идеи синергетики, создать математические модели исторических процессов. В силу нелинейности в таких моделях могут быть бифуркации, поэтому появляется возможность рассматривать варианты исследуемых процессов. У истории появляется сослагательное наклонение.

Цель науки – прогноз, и история не должна быть исключением. Сравнить различные теории в этой области надо по тому, насколько точным оказался их прогноз.

Управление связано с выбором. Поэтому модели исторических процессов, показавшие свою эффективность в исследовании прошлого, можно использовать для прогноза будущих процессов. Возникает серьезная научная основа для стратегического планирования. У истории появляется повелительное наклонение.

Но не слишком ли далека синергетика от этих сущностей? С одной стороны, результаты почти каждого из нас в историческом контексте ничтожны, с другой стороны, благодаря нашим усилиям и самоорганизации происходят поражающие воображение перемены... Иными словами, мы имеем дело с многомасштабными процессами. Но тогда в каких-то гуманитарных науках это должно наглядно проявиться, независимо от того, знали ли люди, создававшие их, слово «самоорганизация» или нет.

И действительно, результаты самоорганизации увидел в 1913 г. немецкий ученый Ф. Ауэрбах. Он выяснил, что численность населения r -го города в списке городов страны, составленном по убыванию (N_1 – численность населения крупнейшего города, N_2 – второго по численности и т.д.) зависит от r по степенному закону $N_r \sim r^{-1}$ (см. рис. 41).

Нетрудно объяснить, почему дела обстоят так. Дело в положительной обратной связи: «На деньги деньги бежит». Представим себе, что мы приехали в незнакомую страну. Нам надо найти жилье и работу. Конечно, мы начинаем поиск с крупнейших городов, и если что-то находим там, то туда и едем, при этом увеличивая число жителей этого города. Построенные модели подтверждают эту логику.

Однако выписанная зависимость является удивительной по еще одной причине. И в технике, и в социологии мы привыкли оперировать средними величинами – средний рост, средний балл, средняя грузоподъемность, средняя скорость и т.д. Дисперсия говорит о том, насколько велика вероятность отклонений от среднего.

Здесь всё не так. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ не сходится, – тут нельзя говорить о среднем. Это степенные распределения, у которых могут быть «тяжелые хвосты». Эта возможность парадоксальной статистики. Размер одного крупнейшего события может быть сравним с суммарным масштабом всех остальных...

Описанная картина близка к той, которая описана в «Сказках 1001-й ночи», где водятся джинны ростом 10 метров, дэвы – 100 метров ифриты – 150 метров, и нельзя пренебречь вероятностью редких катастрофических событий. Скорее всего, немногие встретят таких существ, но уж если встретят, то их реальность изменится кардинально. Это разительно отлича-

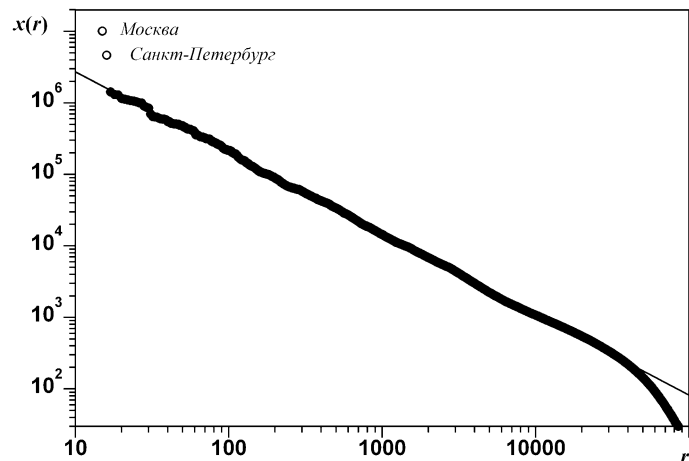


Рис. 41. Ранжировка населенных пунктов России по размеру (2002 г.)

ется от наших интуитивных представлений, – мы можем пренебречь возможностью встречи с 30-сантиметровым карликом или 2,5-метровым гигантом. Однако дело в том, что мир масштабно-инвариантных систем удивительно широк и многообразен. Именно с ним связаны природные и техногенные катастрофы, эпидемии и нашествия компьютерных вирусов, а также и удачи, – фантастические гонорары авторов бестселлеров, взлет инновационных компаний и многое другое. Мы живем одновременно и в обычном мире, и в мире восточных сказок.

В случае с городами степенные зависимости получались, потому что каждый из приезжавших в страну, представлял ее население, а, значит, и размеры городов в ней. Но оказывается есть совсем другие механизмы, приводящие к возникновению степенных зависимостей, обусловленные самоорганизацией. Они связаны с *самоорганизованной критичностью* – одним из активно развивающихся разделов синергетики. Базовой моделью в ней является куча песка на чашке весов, на которую случайным образом бросаются песчинки. Пока куча невелика, она растет. Когда она велика, возникает лавина. В результате самоорганизации наклон кучи стремится к критическому состоянию, в котором возможны лавины любого масштаба. Конечно, можно посчитать на компьютере статистику распределения лавин и критические показатели, характеризующие степенные распределения. Однако понимание происходящего связано с возможностью предска-



Рис. 42. Подлазов Андрей Викторович Рис. 43. Малков Артемий Сергеевич

зывать эти показатели на основе теоретического анализа, строить своеобразные точные решения. Ключом здесь также являются идеи теории самоорганизации, позволяющие выделить структуры, лавины и далее воспользоваться аппаратом теоретической физики. Для многих ключевых моделей теории самоорганизованной критичности эта важная и интересная работа была выполнена А.В. Подлазовым (рис. 42) [13].

Область применения теории самоорганизованной критичности очень велика – от теории управления риском до биологической эволюции, от механизмов возникновения землетрясений до анализа биржевых крахов и механизмов работы мозга [14].

Вернемся к математической теории. Результатами компьютерных расчетов очень часто оказываются не числа, а выявление наиболее важных

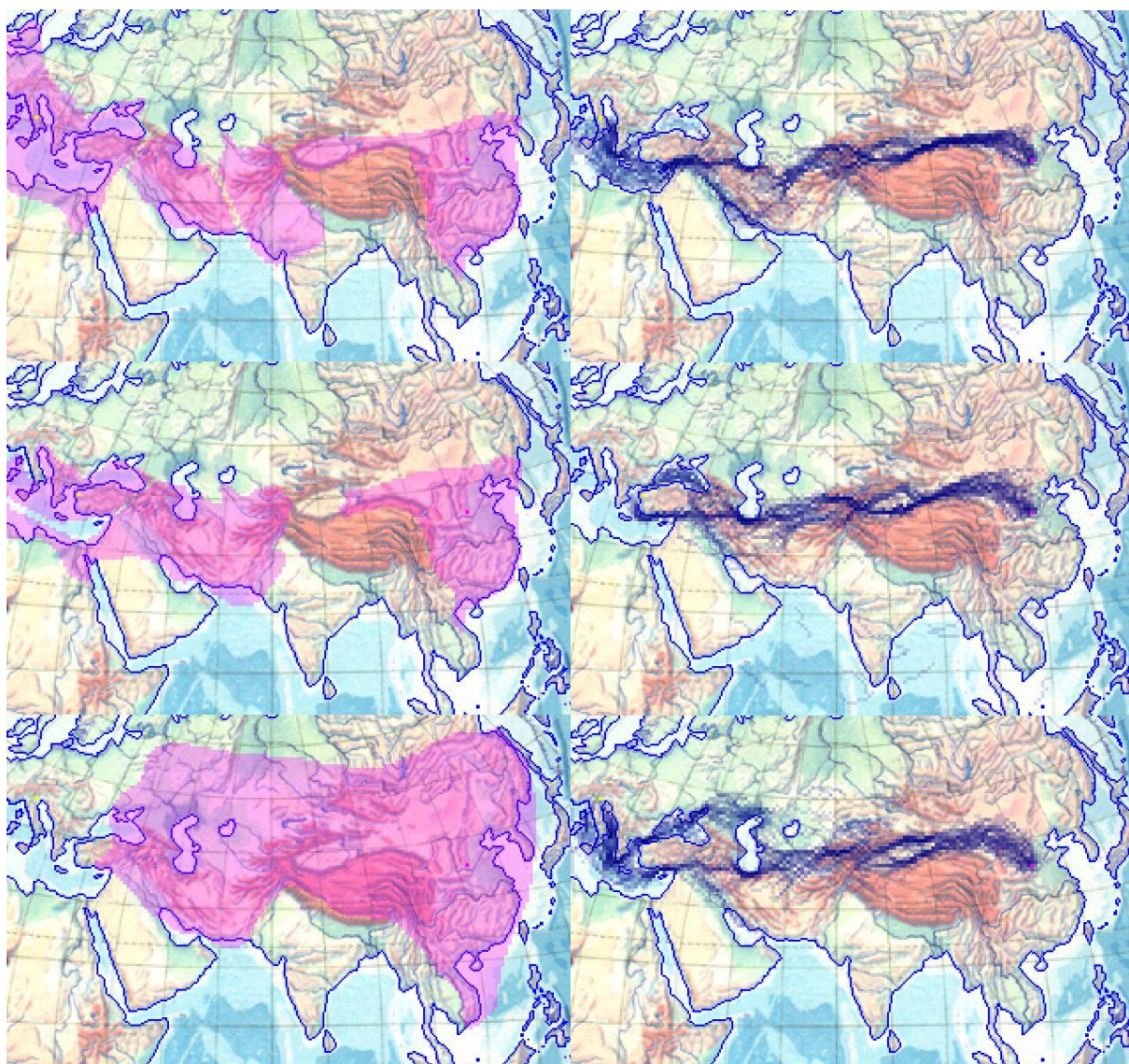


Рис. 44. Различные этапы истории Великого шелкового пути (слева – расположение империй, справа – сам путь для II–II, VI–VIII и XII–XIV вв.)

причинно-следственных связей, понимание происходящего. Великий шелковый путь сыграл огромную роль в истории. По этому пути из Китая в Европу шли ткани, масла, специи, фарфор, фаянс, изделия из кости, эмали, бронзы и серебра. В обратном направлении везли меха, косметику, редких животных и ценные сорта древесины. Этот путь способствовал распространению технологий шелководства, изготовления бумаги и стекла. В его истории было несколько периодов его активного использования – II в. до н.э. – II в., расцвет IV–VIII вв., а далее XII–XIV вв. Традиционная история описывает массу тонких деталей, объясняющих, почему дело обстояло таким образом. Великие империи по территории которых шел путь, дворцовые заговоры, смена власти и многое другое включалось в рассмотрение. «Научный внук» С.П. Курдюмова А.С. Малков (рис. 43) попробовал описать это гораздо проще. В курсах математической физики подробно рассматривается уравнение теплопроводности, показывающее как меняется температура исследуемого образца в пространстве и во времени. Артемий Малков для описания Великого шелкового пути предложил «уравнение товаропроводности», в котором роль температуры играла цена шелка в разных участках пути. Мы не знаем в деталях, что в какие периоды и в каком объеме двигалось по этому пути, однако само его расположение в разные эпохи историки и археологи представляют достаточно точно. Оказалось, что этот подход, связанные с «уравнением товаропроводности» траектории пути прекрасно согласуются с данными историков и географов (см. рис. 44). Разумеется, коэффициенты в уравнении определялись, исходя из данных о растительности территорий, по которым проходил путь, высоты над уровнем моря и ряда других факторов. Ряд данных опирались на описание «Книги чудес света», написанной Марко Поло, путешествовавшего с 1276 по 1291 гг. и посетившего Китай. Совпадение результатов компьютерного анализа и ряда известных данных истории впечатляет [15]. Насколько мне известно, А.С. Малков защитил первую в России диссертацию по математической истории.

Одним из ключевых механизмов самоорганизации является эволюция. Гегелю принадлежит фраза «Математика – наука точная, потому что наука тощая». Действительно, квадратные уравнения, окружности и прямые, свойства которых изучают в школе, были достаточно далеки от многих глубинных вопросов, волнующих людей. Развитие компьютерного моделирования в XX в. кардинально изменило эту ситуацию. Появилась возможность смоделировать эволюцию на некой игрушечной планете, а с ней и новое направление теории самоорганизации – *искусственная жизнь*. Вероятно, первая в нашей стране диссертация по искусственной жизни была защищена «научным внуком» Сергея Павловича М.С. Бурцевым (рис. 45).

Во вселенной, созданной в ходе компьютерного эксперимента, особи могли двигаться, нападать и защищаться, искать ресурсы, необходимые им

для выживания, они имели геномы, умели размножаться и учились по ходу своей жизни.

На какие вопросы позволяют отвечать такие модели? Один из них – *проблема альтруиста*. Что такое альтруизм? Это готовность отдать часть своего жизненно важного ресурса другому. Однако такие действия уменьшают шансы альтруиста выжить и оставить потомков. Следовательно, через несколько поколений альтруистов не останется.

Однако без альтруистов многие виды не выживают... Как же эволюция решает эту задачу? Компьютерные расчеты дают удивительные результаты, – число возможных стратегий, а значит и сценариев самоорганизации, в такой системе может быть огромным. На первый взгляд, кажется, что всё множество со временем разобьется на «ястребов» (индивидуальное нападение) и «голубей» (индивидуальная защита). Однако кроме них, оказывается возникают «жаворонки» (коллективная защита), «вороны» (коллективное нападение) и многие другие виды. Причем компьютерная вселенная выстраивает эволюцию так, что в будущее передаются стратегии, определяемые геномом, иногда в ущерб продолжительности жизни отдельных особей [16]. По сути дела, в ходе эволюции идет конкуренция генов. Наблюдаемая картина очень близка к той, которую описывает Ричард Докинз в книге «Эгоистичный ген» [17]. Здесь можно привести следующее сравнение, – гены можно сравнить с гребцами, а особи с лодками. Лодки соревнуются в ходе конкуренции, и у генов победителей появляется больше шансов оставить себе подобных.

Конечно же хочется, как в школьные годы, открыть конец задачника и узнать ответ, – например, долю разных видов в сложившейся популяции. Но в системах такой сложности это оказывается невозможно, – доли колеблются и время от времени происходят революционные изменения «и последние становятся первыми».

Выигрышные стратегии в прежней реальности становятся не слишком успешными в новой. Это согласуется с нашими представлениями об эволюции – в разные ее периоды различные виды играли роль абсолютно-го хищника на планете.

Мне часто вспоминаются вечера в квартире Сергея Павловича на улице Обручева и удивительно вкусный чай, которым нас поила Валентина Васильевна, и, конечно, разговоры о самых важных вещах. «Подождите



Рис. 45. Бурцев Михаил Сергеевич

немного, и вы увидите, что развитие теории самоорганизации через 10-20 лет приведет к настоящей революции», – иногда говорил мне учитель. Наверно, с такими словами он обращался и к другим ученикам. Это предвидение Сергея Павловича удивительным образом сбылось.

Огромную роль в формировании компьютерной реальности сыграла гипотетическая модель – *машина Тьюринга*, предложенная в 1936 г. Эта машина представляет собой бесконечную ленту с напечатанными на ней символами, а также головку чтения-записи, которая может находиться в конечном числе состояний. В зависимости от символа, который был прочитан, управляющее устройство может перемещаться вправо или влево по ленте, оставаться в неподвижном состоянии, а также записывать в ячейки символы некоторого конечного алфавита.

Тезис Тьюринга гласит: каково бы ни было разумное понимание алгоритма, любой алгоритм, соответствующий такому пониманию, может быть реализован на машине Тьюринга.

Именно эта машина является прообразом современной программной индустрии, а почти все современные компьютеры ее несовершенным воплощением. В 1970-х гг. академик Андрей Петрович Ершов, благодаря инициативе которого наши школьники учат информатику, считал, что значительная часть всего человечества в недалеком будущем будет состоять из программистов.

Алан Тьюринг размышлял, может ли вычислительная машина мыслить, и опубликовал статью, посвященную этой проблеме [18]. Он полагал, что мы должны признать машину мыслящей, если она будет обыгрывать человека в игру «Имитация». Игра проста – за экраном находится человек, дающий (или печатающий ответы) на задаваемые игроком вопросы. По этим ответам надо определить, кто отвечает – мужчина или женщина. Естественно, отвечающий стремится запутать игрока. Тьюринг считал, что если машина в позиции игрока будет давать большую долю правильных ответов, чем человек на ее месте, то мы должны признать, что машина мыслит.

Рассуждения Сергея Павловича были такими. Сможем ли мы вообще обойтись без программирования или свести эту часть работы к минимуму? Основатели кибернетики часто сравнивали компьютер и мозг человека, состоящий примерно из 86 млрд нервных клеток – нейронов. Нейробиологи выяснили, что нейроны являются достаточно простыми клетками в сравнении с другими, которые есть в организме. Откуда же берутся память, воля, сознание, творчество, другие удивительные функции мозга?

Ответ, который дает направление, называемое *коннекционизмом* (от английского to connect – связывать), утверждает, что удивительные свойства мозга *определяются связями между нейронами, которые формируются в ходе самоорганизации*. Множество этих связей возникает и развивается в ходе нашего обучения, дальнейшей жизни и деятельности. «Надо

понять эти законы самоорганизации, и тогда мы сможем обойтись без программирования», – иногда говорил Сергей Павлович.

Попытки сделать это предпринимались с 1956 г. в теории искусственного интеллекта, а точнее, в теории нейронных сетей. Биологическим нейронам сопоставлялись их аналоги в компьютерах, которые располагались слоями. Между нами формировались связи в ходе «обучения» таких существ. В этой области было много «зим» и «весен». Однако в последние десятилетия здесь произошел прорыв – ученые и инженеры «научили учиться» нейронные сети. Предвидение Сергея Павловича оправдалось.

Самоорганизация в этой области во многих задачах оставила далеко позади организацию, писание программ. Приведем два примера. Сетчатка нашего глаза содержит около 7 млн колбочек и от 75 до 150 млн палочек, – фоторецепторов, обеспечивающих наше зрение. Нейробиологи говорят иногда, что мы видим не глазом, а мозгом. Есть несколько систем зрения (их совместная работа порой приводит к оптическим иллюзиям) и с десятком уровней обработки информации.

Современные нейронные аналоги глаза могут иметь *миллиарды* сенсоров и до *сотни* уровней обработки информации. Естественно, они могут «видеть» не только в том диапазоне электромагнитных волн, в которых мы с вами, но и во многих других. Этот инструмент может многократно превосходить наши возможности обработки зрительной информации.

Нейронные сети можно учить методом проб и ошибок, а их быстрое действие позволяет сделать очень много проб. Поэтому нейронные сети сдают экзамены по многим предметам гораздо лучше студентов и школьников. Они могут писать сочинения и курсовые работы. И это всё чаще вызывает вопросы у учителей и преподавателей – кто же это написал – машина или человек.

Происходящее меняет мир. Один из ведущих специалистов по искусственному интеллекту Кай-Фу Ли считает, что через 10-15 лет половина работающих в США окажется без того дела, которыми они занимаются сейчас [19]. Их заменят компьютеры и системы искусственного интеллекта. Как общество ответит на этот вызов? Очевидно, ответ будет связан с уровнем самоорганизации общества. США и Китай называют сверхдержавами искусственного интеллекта. Президент России заявил: «Искусственный интеллект – это будущее не только России, это будущее всего человечества. Здесь колоссальные возможности и трудно прогнозируемые сегодня угрозы. Тот, кто станет лидером в этой сфере, будет властелином мира» [20].

«Математика из забавы любознательных профессоров с появлением и развитием компьютеров превратилась в отрасль промышленности, в стратегический ресурс», – не раз говорил Сергей Павлович на посту директора ИПМ.

И действительно, в мире сейчас работает более 6,2 млрд компьютеров. Степень интеграции элементов на кристалле Q росла более

полувек в соответствии с законом Мура – удваивалась каждые два года $Q \sim 2^{(t/200da)}$ (см. рис. 46).

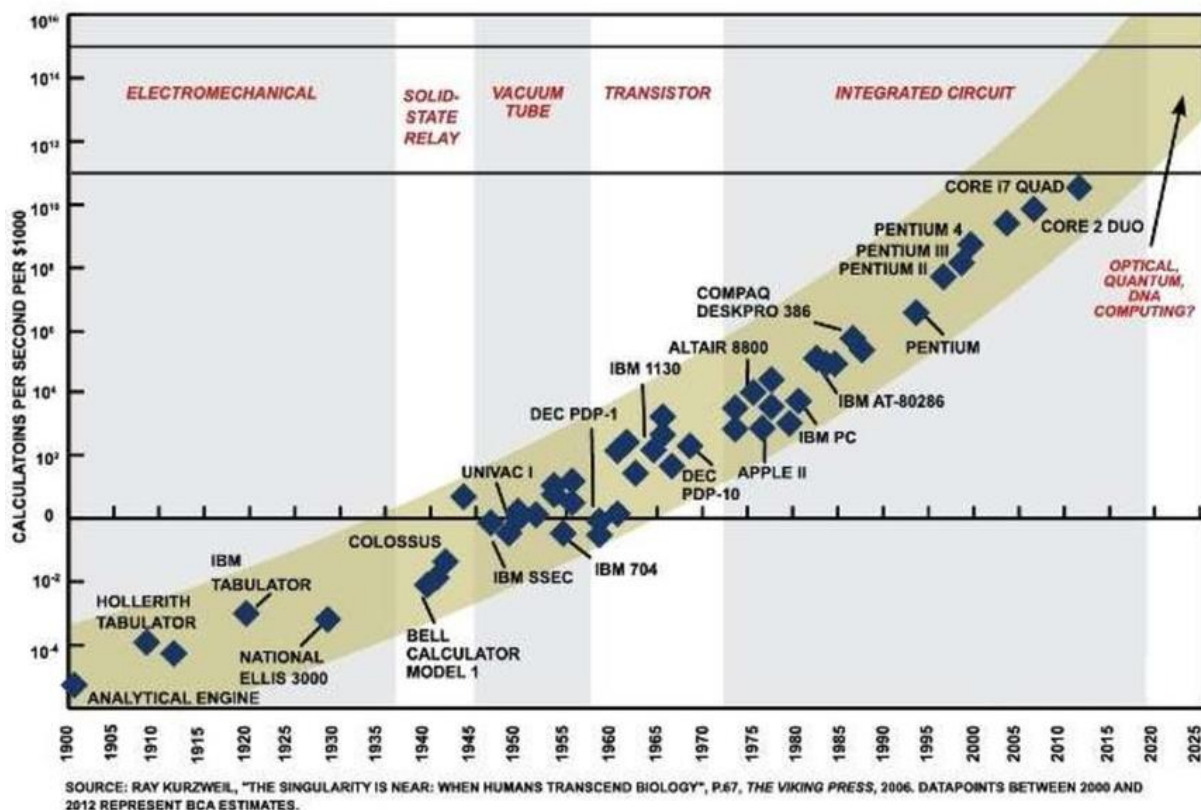


Рис. 46. Закон Мура

Этот рост по экспоненте привел к тому, что современные суперкомпьютеры считают в 10^{15} раз быстрее первых вычислительных машин.

Эта ситуация представляется парадоксальной. Обычно лошадь ставят впереди телеги – есть проблема, и для ее решения создается технология. Здесь ситуация обратная – впервые мы имеем стремительный технологический рост без конкретных задач, которые требовали бы такого развития. Важнейшие научно-технические программы XX в., которые требовали вычислительного эксперимента, – Атомный и Космический проекты. Соответствующие расчеты выполнялись на вычислительных машинах, которые работали гораздо медленнее, чем компьютеры в наших смартфонах.

Зачем нужно такое огромное быстродействие? Сейчас появился достаточно убедительный ответ – это обслуживание систем в области искусственного интеллекта. Один пример здесь проясняет происходящее лучше, чем множество общих слов. В течение многих лет ученые пробовали научить машину играть в старинную китайскую игру го, хотя бы на уровне среднего игрока. Это не удавалось сделать. Иногда используют такое сравнение – если шахматы – это битва, то го – это война. В данной игре суще-

ствуется более 10^{170} позиций. Это число больше, чем атомов во Вселенной, число которых оценивают в 10^{82} .

В попытке решить эту задачу ученые обратились к самоорганизации. Суперкомпьютер разбили на две части, им сообщили правила игры в го (не предъявив ни одной партии, сыгранной людьми) и предоставили им возможность играть друг с другом. В ходе таких игр менялись поведенческие стратегии этих машин, изменялись связи между компьютерными аналогами нейронов. 27.05.2017 чемпион мира, китайский спортсмен Ка Цзе проиграл программе AlphaGo три игры на саммите «Будущее го» в Вуцхепе в Китае. Сотни миллионов китайцев следили за этой игрой. Программа AlphaGo показала новый стиль игры, который идет вразрез с мировой традицией. Ка Цзе сказал после матча: «В прошлом году я думал, что стиль игры AlphaGo близок к человеческому. Но сегодня я понял, что она играет как бог игры го» [21: 28].

Огромное внимание сейчас привлекают большие языковые модели и их применение. На основе огромных массивов запомненной использованной информации они могут давать ответы на вопросы, которые перед ними ставят, рисовать картины, переделывать их по желанию заказчика – решать задачи, связанные с творчеством, которые раньше считали прерогативой человека.

Например, уважаемые учебные заведения в течение многих лет при участии пяти министерств сочиняли список наиболее перспективных профессий XXI в., что, конечно, потребовало весьма серьезных средств. Появился список профессий, который обсуждался, комментировался, публиковался.

Ту же задачу ChatGPT решил сразу. Вот какие профессии он считает самыми перспективными:

1. Инженер-программист систем с искусственным интеллектом
2. Робототехник
3. Специалист по кибербезопасности
4. Биотехнолог
5. Разработчик виртуальной и дополненной реальности
6. Блокчейн-инженер
7. Инженер устойчивой энергетики
8. Специалист по генной терапии и генному регулированию
9. Data-аналитик
10. Инженер-программист интернета вещей

По-моему, неплохо. Но если учесть, что ни в «человеческом», ни в «машинном» списке нет особого смысла – проблема нашей средней и высшей школы совсем в другом – то просто отлично!

Один из «научных внуков» С.П. Курдюмова В.С. Смолин (рис. 47), занимающийся проблемой искусственного интеллекта, полагает, что сильный ИИ, в ряде сфер сравнимый, а в ряде – превосходящий возможности человека, появится в ближайшие несколько лет.

Пожалуй, стоит сказать ещё об одной исполнившейся мечте Сергея Павловича. Когда к нам в институт приезжал Герман Хакен, то он рассказал о нескольких десятках книг по синергетике в серии «Лекции по синергетике», в которой он был председателем редколлегии.

«Нам тоже нужна такая серия. У нас она тоже будет», – воскликнул Сергей Павлович. После этого он ходил по Институту и спрашивал своих друзей и сотрудников про то, когда и какую книжку они напишут в нашу новую серию. Я напоминал время от времени, что серии ещё нет, и что ни одна книжка ещё не вышла. «Не беспокойся об этом! С первой сотней книг вообще проблем нет, думай про другую сотню», – обычно я слышал в ответ.

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему» начала издаваться в 2002 г. в издательстве URSS. Недавно мы отметили выход первой сотни книг в этой серии. Символом нашей серии стал трехголовый дракон (см. рис. 48), который допускает множество разных интерпретаций.

Сергей Павлович был романтиком в науке, стремящимся заглядывать в будущее. Он часто говорил, что нельзя действовать методом проб и ошибок, что надо проектировать будущее, что в обществе не должно быть футурофобии – боязни будущего. По его инициативе с 2004 г. выходит серия книг «Будущая Россия», в которой ученые из разных областей, опираясь на междисциплинарные представления и свои подходы, рассказывают, каким будет наше Отечество через 30-40 лет.

Огонь, зажженный Сергеем Павловичем, горит и освещает путь в Будущее. «Будущее неединственно. У ученых есть шанс найти его разумный вариант. И это прекрасно!», – наверно, сказал бы сейчас Сергей Павлович, как не раз восклицал в конце семинаров.



Рис. 47. Смолин Владимир Сергеевич



Рис. 48. Символ серии «Синергетика: от прошлого к будущему»

Рассказ о его научном творчестве тоже можно закончить строками Б.Л. Пастернака:

*Жизнь ведь тоже только миг,
Только растворенье
Нас самих во всех других
Как бы им в даренье.*

Литература

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур / Ред. Г.Г.Малинецкий. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.
2. Мне нужно быть: Памяти Сергея Павловича Курдюмова / Ред. З.Е.Журавлёва. – М.: Красанд, 2010. – 480 с.
3. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. – New York Chapman and Hall / CRC, 2006.
4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
5. Карлов Н.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. Лазерная термохимия. – М.: Наука, 1992. – 296 с.
6. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Синергетика как новое мировидение: Диалог с И. Пригожиным // Вопросы философии. 1992, №12, с.3-20.
7. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего / 3-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 288 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №3)
8. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего: Книга 2. Образование. Демография. Проблемы прогноза/ Изд.4, испр. и суц. дополн. – М.: Ленанд, 2020. – 384 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №100)
9. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики: Синергетическое мировидение / Изд.стереотип. – М.: URSS, 2014. – 256 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №20)
10. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики: Человек, конструирующий себя и свое будущее / Изд. стереотип. – М.: URSS, 2014. – 264 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №21)
11. Майнцер К. Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез / Пер. с англ. – М.: Либроком, 2009. – 464 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №42)
12. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.
13. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды / Изд. стереотип. – М.: URSS, 2016. – 280 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №28)

14. *Бак П.* Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности / Пер. с англ. / Изд. стереотип. – М.: URSS, 2015. – 276 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №66)
15. *Малков А.С., Малинецкий Г.Г., Чернавский Д.С.* О математическом моделировании исторических процессов. Аграрные общества // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005, вып.2, с.50-61.
16. *Burtsev M.S., Turchin P.V.* Evolution of cooperative strategies from first principles// Nature (Letters to Editor). 2006. N440, pp.1041–1044.
17. *Докинз Р.* Эгоистический ген / Пер. с англ. Н.О.Фомина. – М.: Corpus(АСТ), 1989. – 435 с.
18. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? – Саратов: Колледж, 1999. – 100 с.
19. *Ли К.-Ф.* Сверхдержавы искусственного интеллекта: Китай, Кремниевая долина и новый мировой порядок. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2019. – 240 с.
20. *Дружинин А.* Путин: Лидер в сфере искусственного интеллекта станет властелином мира. <https://ria.ru/20170901/1501566046.html>
21. *Сейновски Т.* Антология машинного обучения: важнейшие исследования в области ИИ за последние 60 лет / Пер. с англ. М.А. Райтмана, Е.В. Сазановой. – М.: Эксмо, 2022. – 340 с. – (Библиотека MIT)