



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

К 95-летию С.П.Курдюмова

К 95-летию
со дня рождения
С.П. Курдюмова



Горизонты
математического моделирования
и теория самоорганизации

Г.Г. Еленин

Новые численные методы решения задачи Кеплера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Еленин Г.Г. Новые численные методы решения задачи Кеплера // Горизонты математического моделирования и теория самоорганизации. К 95-летию со дня рождения С.П. Курдюмова. — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2024. — С. 61-90.

<https://doi.org/10.20948/k95-3>

<https://keldysh.ru/e-biblio/k95/3.pdf>

Новые численные методы решения задачи Кеплера

Г.Г. Еленин

*Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН*

Аннотация. Сообщение содержит описание нового семейства адаптивных симплектических консервативных численных методов для решения задачи Кеплера. Методы осуществляют симплектическое отображение начального состояния в текущее состояние и, вследствие этого, сохраняют фазовый объем. В отличие от существующих симплектических методов, например, метода Верле, они сохраняют в рамках точной арифметики все присущие задаче первые интегралы, а именно момент импульса, полную энергию и вектор Лапласа–Рунге–Ленца. Кроме того, сохраняется орбита и годограф скорости. Переменный шаг интегрирования выбирается автоматически, исходя из локальных свойств решения задачи. Он уменьшается там, где фазовые переменные изменяются наиболее быстро. Методы аппроксимируют зависимость фазовых переменных от времени либо со вторым, либо с четвертым, либо с шестым порядком.

Ключевые слова: гамильтонова система, задача Кеплера, симплектические численные методы, адаптивные методы, первые интегралы, параметризация решения, порядок точности.

The new numerical methods for the Kepler problem

G.G. Elenin

*Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow
State University
RAS Scientific Research Institute for System Analysis*

Abstract. This message contains a discription of the new family of adaptive symplectic conservative numerical methods for the Kepler problem. The methods perform symplectic mapping from the initial to the current state and, therefore, they preserve phase volume. In contrast to the existing symplectic methods, e.g., Verlet integrator, they preserve all first integrals of the Kepler problem i.e., angular momentum, full energy and Laplace–

Runge–Lenz vector in the frame of the exact arithmetic. The orbit and the velocity hodograph are preserved as well. The numerical integration adaptive step is chosen automatically based on the local features of the solution. The step decreases where phase variables change most rapidly. The methods approximate dependence of phase variables on time with 2-nd or 4-th, or 6-th order.

Keywords: Hamiltonian system, Kepler problem, symplectic integrators, adaptive methods, first integrals, solution parameterization, order of accuracy

Введение

Особенность гамильтоновых уравнений заключается в том, что точные решения задачи Коши для этих уравнений имеют ряд глобальных свойств с глубоким геометрическим и физическим содержанием. Эти свойства определяются структурой дифференциальных уравнений и не зависят от конкретного вида дважды непрерывно дифференцируемой функции Гамильтона, определяющей уравнения. К таким свойствам относятся симплектичность отображения начального состояния в текущее состояние, обратимость во времени, наличие первых интегралов [1-3].

При конструировании эффективных численных методов, предназначенных для решения задачи Коши для гамильтоновых уравнений, естественно потребовать, чтобы они давали приближенное решение, имеющее, по возможности, те же глобальные свойства на любом шаге разностной сетки в рамках точной арифметики.

Известно [1], что широко распространенные численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений **не** сохраняют **все** перечисленные выше свойства точных решений задачи Коши для гамильтоновых систем, то есть разрушают «геометрию» фазового пространства задачи и искажают «физическое» содержание эволюции состояния исследуемых систем. Такие нежелательные эффекты особенно ярко проявляются на больших промежутках времени.

Создание численных методов, сохраняющих все глобальные свойства точных решений задачи Коши для гамильтоновых уравнений в рамках точной арифметики, представляет собой одну из фундаментальных проблем вычислительной математики, которая не нашла решения к настоящему времени в случае общего положения, несмотря на значительные усилия [4-14].

Кроме того, анализ обсуждаемых задач показывает, что их решения наряду с обширными областями плавного изменения фазовых переменных могут содержать узкие области их резкого изменения. В таких случаях численные методы с постоянным шагом интегрирования являются по понятной причине неэффективными и крайне важной является разработка алгоритмов автоматического выбора шага интегрирования.

В настоящем сообщении описаны новые одношаговые адаптивные симплектические обратимые консервативные численные методы решения задачи Кеплера, сохраняющие **все** глобальные свойства решения этой задачи в рамках точной арифметики [15-20]. Задача Кеплера является простейшей в классе рассматриваемых задач. Для приближенного решения этой задачи построены методы второго, четвертого и шестого порядка точности, а также точный метод. Приведены зависимости точности и «реальных» дисбалансов первых интегралов задачи от времени на больших отрезках интегрирования.

1. Свободное множество взаимодействующих материальных точек

Рассмотрим конечное множество материальных точек $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_N > 0$. Пусть точки взаимодействуют друг с другом и внешнее силовое поле отсутствует. Такое множество естественно назвать свободным множеством взаимодействующих материальных точек.

Пусть в некоторой инерциальной декартовой системе координат в момент времени $t > 0$ положение, скорость, импульс, момент импульса точки σ_i , $i = 1, \dots, N$, а также результирующая сила, действующая на нее со стороны всех остальных точек множества, описываются трехкомпонентными вектор-функциями

$$\mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))^T,$$

$$\mathbf{v}_i(t) = (v_{x,i}(t), v_{y,i}(t), v_{z,i}(t))^T = (dx_i(t)/dt, dy_i(t)/dt, dz_i(t)/dt)^T,$$

$$\mathbf{p}_i(t) = (p_{x,i}(t), p_{y,i}(t), p_{z,i}(t))^T,$$

$$\mathbf{f}_i(t) = (f_{x,i}(t), f_{y,i}(t), f_{z,i}(t))^T,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_i(t) = [\mathbf{r}_i(t), \mathbf{p}_i(t)] &= (l_{x,i}(t), l_{y,i}(t), l_{z,i}(t))^T = (y_i(t)p_{z,i}(t) - \\ &- z_i(t)p_{y,i}(t), x_i(t)p_{z,i}(t) - z_i(t)p_{x,i}(t), x_i(t)p_{y,i}(t) - y_i(t)p_{x,i}(t))^T =, \\ &= (\mathbf{r}_i(t)^T \mathbf{l}_x \mathbf{p}_i(t), \mathbf{r}_i(t)^T \mathbf{l}_y \mathbf{p}_i(t), \mathbf{r}_i(t)^T \mathbf{l}_z \mathbf{p}_i(t))^T \end{aligned}$$

где кососимметричные матрицы \mathbf{l}_x , \mathbf{l}_y , \mathbf{l}_z имеют следующий вид:

$$\mathbf{l}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathbf{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_{3N}(t))^T = (\mathbf{r}_1^T(t), \dots, \mathbf{r}_N^T(t))^T,$$

$$\mathbf{V}(t) = (V_1(t), \dots, V_{3N}(t))^T = (\mathbf{v}_1^T(t), \dots, \mathbf{v}_N^T(t))^T,$$

$$\mathbf{P}(t) = (P_1(t), \dots, P_{3N}(t))^T = (\mathbf{p}_1^T(t), \dots, \mathbf{p}_N^T(t))^T,$$

$$\mathbf{L}(t) = (\mathbf{l}_1^T(t), \dots, \mathbf{l}_N^T(t))^T$$

$$\mathbf{F}(t) = (\mathbf{f}_1^T(t), \dots, \mathbf{f}_N^T(t))^T$$

являются вектор-функциями, определяющими положения, скорости, импульсы, моменты импульсов всех точек множества Σ , а также силы, действующие на все точки множества. Вектор-функции $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}(t)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ содержат $3N$ скалярных компонент. Это число равно числу степеней свободы множества. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N)$$

является матрицей масс множества Σ , дважды непрерывно дифференцируемая функция $U = U(\mathbf{R})$ определяет потенциальную энергию взаимодействий между точками в Σ и трехкомпонентные вектор-функции

$$\mathbf{R}_c(t) = (m_1 \mathbf{r}_1(t) + \dots + m_N \mathbf{r}_N(t))(m_1 + \dots + m_N)^{-1},$$

$$\mathbf{V}_c(t) = (\mathbf{p}_1(t) + \dots + \mathbf{p}_N(t))(m_1 + \dots + m_N)^{-1},$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{E}_{3 \times 3N} \mathbf{P}(t),$$

$$\tilde{\mathbf{L}}(t) = (\tilde{L}_x(t), \tilde{L}_y(t), \tilde{L}_z(t))^T$$

описывают зависимости от времени положения и скорости центра масс множества, полного импульса и полного момента импульса Σ , где $\mathbf{E}_{3 \times 3N} = (\mathbf{E}_{3 \times 3}, \dots, \mathbf{E}_{3 \times 3})$, $\mathbf{E}_{3 \times 3}$ – единичная матрица 3×3 ,

$$\tilde{\mathbf{L}}_\alpha = l_{\alpha,1}(t) + \dots + l_{\alpha,N}(t) = \mathbf{R}(t)^T \mathbb{L}_\alpha \mathbf{P}(t) = \mathbf{Z}(t)^T \mathbf{L}_\alpha \mathbf{Z}(t),$$

$$\Lambda_\alpha = -\Lambda_\alpha^T = \text{diag}(\mathbf{I}_\alpha), \quad \mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha^T = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_\alpha \\ \Lambda_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = x, y, z.$$

Эволюция состояния множества Σ описывается $6N$ компонентной вектор-функцией $\mathbf{Z}(t) = (\mathbf{P}^T(t), \mathbf{R}^T(t))^T$. Свободное множество взаимодей-

ствующих материальных точек Σ лежит в основе большого числа моделей классической механики и классической молекулярной динамики. Для описания сложной динамики множества требуются высококачественные численные методы.

2. Задача Коши для уравнений движения

Функция $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(t)$ является решением задачи Коши для уравнений движения множества Σ в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = -\mathbf{J} \left(\frac{\partial H(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} \right)^T, \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0, \quad (2)$$

где
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_{3N \times 3N} \\ -\mathbf{E}_{3N \times 3N} & 0 \end{pmatrix}$$

блочная кососимметричная матрица такая, что

$$\mathbf{J}^T = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \det \mathbf{J} = 1, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{6N \times 6N},$$

$H = H(\mathbf{P}, \mathbf{R})$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция Гамильтона,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} &= \left(\frac{\partial H(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{P}}, \frac{\partial H(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{R}} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_{x,1}}, \frac{\partial H}{\partial p_{y,1}}, \frac{\partial H}{\partial p_{z,1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_{x,N}}, \frac{\partial H}{\partial p_{y,N}}, \frac{\partial H}{\partial p_{z,N}}, \frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_N}, \frac{\partial H}{\partial y_N}, \frac{\partial H}{\partial z_N} \right) \end{aligned}$$

градиент функции Гамильтона.

Уравнения движения (1) могут быть записаны в так называемой разделенной форме:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = - \left(\frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \right)^T, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left(\frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \quad (4)$$

и дополнены начальными условиями:

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 \quad (5)$$

В случае свободного множества Σ его полная энергия является суммой кинетической и потенциальной энергий

$$H = H(\mathbf{P}, \mathbf{R}) = K(\mathbf{P}) + U(\mathbf{R}), \quad K(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \quad (6)$$

и уравнения (3) и (4) принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = - \left(\frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \right)^T = - \left(\frac{\partial U(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \right)^T = F(\mathbf{R}), \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left(\frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{P}} \right)^T = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{V} \quad (8)$$

Решение задачи Коши осуществляет отображение начального состояния в текущее состояние:

$$\mathbf{Z}_0 \rightarrow \mathbf{Z}(t).$$

Матрица Якоби этого отображения $\partial \mathbf{Z}(t) / \partial \mathbf{Z}_0$ является решением задачи Коши для линейного уравнения в вариациях:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \right) = - \mathbf{J} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{Z}^2} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(0)}{\partial \mathbf{Z}_0} = \mathbf{E}_{6N \times 6N}. \quad (10)$$

Элементы симметричной матрицы $\partial^2 H / \partial^2 \mathbf{Z}$ вычисляются на решении исходной задачи (1), (2).

3. Глобальные свойства решений задачи Коши для гамильтоновых систем

Решение задачи Коши для гамильтоновых систем имеет ряд глобальных свойств [1]. К ним относятся

– симплектичность отображения начального состояния в текущее состояние

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \right)^T \mathbf{J} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \right) = \mathbf{J}; \quad (11)$$

– обратимость по времени

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{P}_0, \mathbf{R}_0) \mapsto (\mathbf{P}(T), \mathbf{R}(T)) \Rightarrow \\
& (-\mathbf{P}(T), \mathbf{R}(T)) \mapsto (\tilde{\mathbf{P}}(2T), \tilde{\mathbf{R}}(2T)) \Rightarrow ; \\
& (-\tilde{\mathbf{P}}(2T), \tilde{\mathbf{R}}(2T)) = (\mathbf{P}_0, \mathbf{R}_0)
\end{aligned} \tag{12}$$

– сохранение полного импульса, полного момента импульса, полной энергии

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \tilde{\mathbf{P}}(0), \tag{13}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}(t) = \tilde{\mathbf{L}}(0), \tag{14}$$

$$H(t) = H(0); \tag{15}$$

– сохранение на множестве решений фазового объема

$$v_{\text{ph}}(t) = \int_{D_t} d\mathbf{Z} = \int_{D_0} \det \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \right) d\mathbf{Z}_0 = \int_{D_0} d\mathbf{Z}_0 = v_{\text{ph}}(0), \tag{16}$$

где D_0, D_t – области в фазовом пространстве $\{\mathbf{Z}\}$.

В случаях симметрии потенциальной энергии возможны дополнительные первые интегралы такие, как, например, вектор Лапласа-Рунге-Ленца \mathbf{e}_{LRL} в задаче Кеплера.

При разработке численных методов решения задачи Коши для гамильтоновых систем следует стремиться к сохранению приближенным решением всех глобальных свойств точного решения в рамках идеальной арифметики. К настоящему моменту времени такие методы не существуют в случае общего положения. Рассмотрим вопрос о существовании таких методов в частном случае задачи Кеплера. Замечу, что симметрично-симплектические методы Рунге–Кутты [21,22] дают обратимое во времени и симплектическое отображение на одном шаге и при этом сохраняют линейные и квадратичные формы, если эти формы являются первыми интегралами системы дифференциальных уравнений.

4. Задача Кеплера и глобальные свойства ее решения

Простейшим примером рассматриваемого класса задач является задача о движении двух гравитационно взаимодействующих материальных точек. Задача Коши в этом случае принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{du}{dr_{12}} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{17}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\frac{du}{dr_{12}} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = m_1^{-1} \mathbf{p}_1, \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = m_2^{-1} \mathbf{p}_2, \quad (20)$$

$$\mathbf{p}_1(0) = \mathbf{p}_{1,0}, \quad \mathbf{p}_2(0) = \mathbf{p}_{2,0}, \quad \mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_{1,0}, \quad \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{r}_{2,0}, \quad (21)$$

где $u = u(r_{12}) = -\gamma m_1 m_2 / r_{12}$ – потенциальная энергия гравитационного взаимодействия материальных точек σ_1 и σ_2 , $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r_{12} = \|\mathbf{r}_{12}\|$,

$$H(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + u(r_{12}), \quad p_i = \|\mathbf{p}_i\|, i = 1, 2. \quad (22)$$

Закон сохранения полного импульса позволяет свести исходную задачу к задаче о движении одной виртуальной точки единичной массы в центральном поле $u = -\tilde{\gamma} r_{12}^{-1}$, $\tilde{\gamma} = \gamma(m_1 + m_2)$,

$$\frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = -\tilde{\gamma} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad (23)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} = \mathbf{v}_{12}, \quad (24)$$

$$\mathbf{v}_{12}(0) = m_2^{-1} \mathbf{p}_{2,0} - m_1^{-1} \mathbf{p}_{1,0}, \quad \mathbf{r}_{12}(0) = \mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}. \quad (25)$$

В свою очередь, закон сохранения момента импульса позволяет свести эту задачу к задаче о двумерном движении единичной массы в плоскости Лапласа $\{x_L, y_L\}$. В дальнейшем индекс L опускается. Задача принимает вид:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x} = -\tilde{\gamma} \frac{x}{r^3}, \quad (26)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial y} = -\tilde{\gamma} \frac{y}{r^3}, \quad (27)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial v_x} = v_x, \quad (28)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{\partial v_y} = v_y, \quad (29)$$

$$v_x(0) = v_{x,0}, v_y(0) = v_{y,0}, x(0) = x_0, y(0) = y_0, \quad (30)$$

где $r = \|\mathbf{r}\|$.

Уравнения (26)–(29) являются гамильтоновыми с функцией Гамильтона

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \tilde{\gamma} \frac{1}{r}, \quad (31)$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Задачу (26)–(30) принято называть задачей Кеплера.

Решение задачи осуществляет симплектическое отображение начального состояния $(v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0)^T$ в текущее состояние $(v_x(t), v_y(t), x(t), y(t))^T$:

$$\mathbf{F}(t)^T \mathbf{J} \mathbf{F}(t) = \mathbf{J}, \quad (32)$$

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\partial(v_x(t), v_y(t), x(t), y(t))}{\partial(v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0)}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{E}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

и обратимо во времени:

$$\begin{aligned} (v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0) &\mapsto (v_x(T), v_y(T), x(T), y(T)) \Rightarrow \\ (-v_x(T), -v_y(T), x(T), y(T)) &\mapsto (\tilde{v}_x(2T), \tilde{v}_y(2T), \tilde{x}(2T), y(2T)) \Rightarrow \\ (-\tilde{v}_x(2T), -\tilde{v}_y(2T), \tilde{x}(2T), \tilde{y}(2T)) &= (v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0) \end{aligned} \quad (33)$$

Из симплектичности решения следует сохранение фазового объема. На решениях задачи (26)–(30) сохраняются момент импульса

$$l_z = xv_y - yv_x = l_{z,0} = x_0v_{y,0} - y_0v_{x,0}, \quad (34)$$

полная энергия

$$h = \frac{1}{2} v^2 - \tilde{\gamma} \frac{1}{r} = h_0 = \frac{1}{2} v_0^2 - \tilde{\gamma} \frac{1}{r_0}, \quad (35)$$

и компоненты вектора Лапласа–Рунге–Ленца

$$e_{LRL,x} = v_y l_z - \tilde{\gamma} \frac{x}{r} = e_{LRL,x,0} = v_{y,0} l_{z,0} - \tilde{\gamma} \frac{x_0}{r_0}, \quad (36)$$

$$e_{LRL,y} = -v_x l_z - \tilde{\gamma} \frac{y}{r} = e_{LRL,y,0} = -v_{x,0} l_{z,0} - \tilde{\gamma} \frac{y_0}{r_0}. \quad (37)$$

Первые интегралы функционально зависимы:

$$2hl_z^2 = e_{LRL,x}^2 + e_{LRL,y}^2 - \tilde{\gamma}^2. \quad (38)$$

Фазовая траектория принадлежит пересечению многообразий

$$\begin{aligned} l_z(v_x, v_y, x, y) &= l_{z,0}, & h(v_x, v_y, x, y) &= h_0, \\ e_{LRL,x}(v_x, v_y, x, y) &= e_{LRL,x,0}, & e_{LRL,y}(v_x, v_y, x, y) &= e_{LRL,y,0}. \end{aligned} \quad (39)$$

в фазовом пространстве $\{v_x, v_y, x, y\}$. Проекция траектории на плоскость $\{x, y\}$ и на плоскость $\{v_x, v_y\}$ дают орбиту $O(x, y) = 0$ и годограф скорости $H_v(v_x, v_y) = 0$ соответственно. Уравнения орбиты и годографа скорости могут быть получены из законов сохранения (34) и (37). Для этого не требуется знать решение задачи (26)–(30). Конкретный вид функций $O(x, y)$ и $H_v(v_x, v_y)$ будет приведен ниже.

5. Параметризации решения

Опыт показывает, что решение задачи (26)–(30) может иметь узкие области быстрого изменения фазовых переменных. По этой причине численные алгоритмы решения задачи с постоянным шагом являются неэффективными. Для разработки алгоритмов автоматического выбора шага привлекается идея «растягивания» решения в областях его быстрого изменения. Эта идея реализуется с помощью параметризации решения. Вместо независимой переменной t вводится новая независимая переменная t' следующим образом:

$$\frac{dt}{dt'} = s(v_x, v_y, x, y), \quad t(0) = 0,$$

где функция $s = s(v_x, v_y, x, y)$ выбирается определенным образом для «растягивания» решения в областях быстрого изменения фазовых переменных. Параметризованную задачу предлагается решать приближенно с постоянным шагом $\Delta t'$.

Параметризованная задача имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt'} = -s(\mathbf{P}, \mathbf{R}) \left(\frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \right)^T, \quad (40)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt'} = s(\mathbf{P}, \mathbf{R}) \left(\frac{\partial H(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{P}} \right)^T, \quad (41)$$

$$\frac{dt}{dt'} = s(\mathbf{P}, \mathbf{R}), \quad (42)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0, \quad t(0) = 0. \quad (43)$$

В случае задачи Кеплера имеем:

$$\frac{dv_x}{dt'} = -s(v_x, v_y, x, y) \frac{\partial h}{\partial x} = -\tilde{\gamma} s(v_x, v_y, x, y) \frac{x}{r^3}, \quad (44)$$

$$\frac{dv_y}{dt'} = -s(v_x, v_y, x, y) \frac{\partial h}{\partial y} = -\tilde{\gamma} s(v_x, v_y, x, y) \frac{y}{r^3}, \quad (46)$$

$$\frac{dx}{dt'} = s(v_x, v_y, x, y) \frac{\partial h}{\partial v_x} = s(v_x, v_y, x, y) v_x, \quad (46)$$

$$\frac{dy}{dt'} = s(v_x, v_y, x, y) \frac{\partial h}{\partial v_y} = s(v_x, v_y, x, y) v_y, \quad (47)$$

$$\frac{dt}{dt'} = s(v_x, v_y, x, y), \quad (48)$$

$$v_x(0) = v_{x,0}, \quad v_y(0) = v_{y,0}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (49)$$

Применение численного метода с постоянным шагом $\Delta t'$ для решения задач (40)–(43) и (44)–(49) дает приближенное решение исходной задачи на сетке с переменным шагом τ_i :

$$\tau_i = \int_{i\Delta t'}^{(i+1)\Delta t'} s((\mathbf{P}(\xi), \mathbf{R}(\xi))) d\xi. \quad (50)$$

На решениях задачи (44)–(49) сохраняются $l_z(t')$, $h(t')$, $e_{LRL,x}(t')$, $e_{LRL,y}(t')$. Однако, в отличие от уравнений исходной задачи уравнения (44)–(49) не являются гамильтоновыми при любой функции выбора шага $s = s(\mathbf{P}, \mathbf{R}) \neq \text{const}$. Хотелось, чтобы уравнения для «спрямленного» решения были гамильтоновыми. Для получения таких уравнений перейдем либо в фазовое пространство меньшей размерности, либо в фазовое пространство большей размерности. Ограничимся случаями перехода в фазовые пространства меньшей размерности, используя первые интегралы.

6. Редукции фазового пространства

Наличие первых интегралов позволяет понизить размерность фазового пространства $\{v_x, v_y, x, y\}$ задачи Кеплера. Рассмотрим некоторые переходы из исходного четырехмерного фазового пространства в двумерные фазовые пространства. Ограничимся рассмотрением переходов

$$\{v_x, v_y, x, y\} \rightarrow \{x, y\}$$

и $\{v_x, v_y, x, y\} \rightarrow \{v_x, v_y\}$.

Переход $\{v_x, v_y, x, y\} \rightarrow \{x, y\}$. Вариант 1. Из сохранения l_z , $e_{LRL,x}$, $e_{LRL,y}$, см. (34), (36), (37), следуют линейная зависимость расстояния до силового центра от координат

$$r = \tilde{\gamma}^{-1}(l_{z,0}^2 - e_{LRL,x,0}x - e_{LRL,y,0}y) \quad (51)$$

и дробно-линейные зависимости скоростей от координат

$$v_x = -[l_{z,0}^2 e_{LRL,y,0} - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} x + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,y,0}^2) y] (\tilde{\gamma} l_{z,0} r)^{-1}, \quad (52)$$

$$v_y = [(l_{z,0}^2 e_{LRL,x,0} + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,x,0}^2) x - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} y] (\tilde{\gamma} l_{z,0} r)^{-1}, \quad (53)$$

Равенство

$$x^2 + y^2 = r^2 = \tilde{\gamma}^{-2} (l_{z,0}^2 - e_{LRL,x,0}x - e_{LRL,y,0}y)^2 \quad (54)$$

является уравнением орбиты, проходящей через точку $(v_{x,0}, v_{y,0}, x_0, y_0)$ фазового пространства:

$$O(x, y) = (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,x,0}^2)x^2 + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,y,0}^2)y^2 - 2e_{LRL,x,0}e_{LRL,y,0}xy + 2l_{z,0}^2(e_{LRL,x,0}x + e_{LRL,y,0}y) - l_{z,0}^4 = 0. \quad (55)$$

При $h_0 < 0$ орбита является эллипсом с эксцентриситетом $\varepsilon = \tilde{\gamma}^{-1}(e_{LRL,x,0}^2 + e_{LRL,y,0}^2)^{1/2} \in (0, 1)$.

При $h_0 > 0$ ($h_0 = 0$) орбита является гиперболой (параболой) с эксцентриситетом $\varepsilon > 1$ ($\varepsilon = 1$). Силовой центр $(0, 0)$ находится в одном из фокусов этих линий второго порядка.

Подстановка (51), (52) и (53) в (28), (29) дает дифференциальные уравнения, связывающие координаты с временем:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -[l_{z,0}^2 e_{LRL,y,0} - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} x + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,y,0}^2) y] (\tilde{\gamma} l_{z,0} r)^{-1}, \quad (56)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = [(l_{z,0}^2 e_{LRL,x,0} + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,x,0}^2)x - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} y](\tilde{\gamma} l_{z,0} r)^{-1}. \quad (57)$$

Уравнения (56) и (57) могут быть точно линеаризованы с помощью введения новой независимой переменной $t' = \theta$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -2[l_{z,0}^2 e_{LRL,y,0} - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} x + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,y,0}^2)y](\tilde{\gamma} l_{z,0})^{-1}, \quad (58)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2[(l_{z,0}^2 e_{LRL,x,0} + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,x,0}^2)x - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} y](\tilde{\gamma} l_{z,0})^{-1}, \quad (59)$$

$$\frac{dt}{d\theta} = s_\theta(x, y) = 2r = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (60)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad t(0) = 0. \quad (61)$$

Линейные уравнения (58), (59) являются гамильтоновыми с функцией Гамильтона $h_r = (\tilde{\gamma} l_{z,0})^{-1} O(x, y)$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{\partial h_r}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial h_r}{\partial x}. \quad (62)$$

После решения задачи (58),(59),(61) можно найти зависимость $t = t(\theta)$:

$$t = 2\tilde{\gamma}^{-1} \int_0^\theta (l_{z,0}^2 - e_{LRL,x,0} x(\xi) - e_{LRL,y,0} y(\xi)) d\xi.$$

Переход $\{v_x, v_y, x, y\} \rightarrow \{x, y\}$. Вариант 2. Из сохранения l_z, h следуют зависимости скоростей от координат, но другого вида

$$v_x = |l_{z,0}| [-\text{sign}(l_{z,0})y \pm \text{sign}(x)x(2h_0 l_{z,0}^{-2} r^2 + 2\tilde{\gamma} l_{z,0}^{-2} r - 1)^{1/2}] r^{-2}, \quad (63)$$

$$v_y = |l_{z,0}| [\text{sign}(l_{z,0})x \pm \text{sign}(x)y(2h_0 l_{z,0}^{-2} r^2 + 2\tilde{\gamma} l_{z,0}^{-2} r - 1)^{1/2}] r^{-2}. \quad (64)$$

Дифференциальные уравнения, связывающие координаты и время, в этом случае принимают более громоздкий вид:

$$\frac{dx}{dt} = |l_{z,0}| [-\text{sign}(l_{z,0})y \pm \text{sign}(x)x(2h_0 l_{z,0}^{-2} r^2 + 2\tilde{\gamma} l_{z,0}^{-2} r - 1)^{1/2}] r^{-2}, \quad (65)$$

$$\frac{dy}{dt} = |l_{z,0}| [\text{sign}(l_{z,0})x \pm \text{sign}(x)y(2h_0 l_{z,0}^{-2} r^2 + 2\tilde{\gamma} l_{z,0}^{-2} r - 1)^{1/2}] r^{-2} \quad (66)$$

После параметризации имеем:

$$\frac{dx}{d\theta} = 2v_x r = 2|l_{z,0}|[-\text{sign}(l_{z,0})y \pm \text{sign}(x)x(2h_0 l_{z,0}^{-2} r^2 + 2\tilde{\gamma} l_{z,0}^{-2} r - 1)^{1/2}]r^{-1}, \quad (67)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2v_y r = 2|l_{z,0}|[\text{sign}(l_{z,0})x \pm \text{sign}(x)y(2h_0 l_{z,0}^{-2} r^2 + 2\tilde{\gamma} l_{z,0}^{-2} r - 1)^{1/2}]r^{-1}, \quad (68)$$

Точные решения задачи Коши для уравнений (58), (59) и (67), (68) совпадают. Действительно, из сохранения \mathbf{e}_{LRL} следуют равенства:

$$2v_x r = -2[l_{z,0}^2 e_{LRL,y,0} - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} x + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,y,0}^2) y](\tilde{\gamma} l_{z,0})^{-1},$$

$$2v_y r = 2[l_{z,0}^2 e_{LRL,x,0} + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,x,0}^2) x - e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0} y](\tilde{\gamma} l_{z,0})^{-1}.$$

Очевидно, что предпочтение следует отдать уравнениям (58)–(59). Следовательно точная линеаризация возможна лишь при учете сохранения вектора \mathbf{e}_{LRL} .

Переход $\{v_x, v_y, x, y\} \rightarrow \{v_x, v_y\}$. **Вариант 1.** Из условий сохранения вектора \mathbf{e}_{LRL} и l_z следуют зависимости расстояния до силового центра и координат от скоростей

$$r = \tilde{\gamma}(0.5v^2 - h_0)^{-1}, \quad (69)$$

$$x = -(e_{LRL,x,0} - l_{z,0} v_y)(0.5v^2 - h_0)^{-1}, \quad (70)$$

$$y = -(e_{LRL,y,0} + l_{z,0} v_x)(0.5v^2 - h_0)^{-1}. \quad (71)$$

Сумма возведенных в квадрат равенств (70) и (71) дает уравнение годографа скорости

$$H_v(v_x, v_y) = (e_{LRL,x,0} - l_{z,0} v_y)^2 + (e_{LRL,y,0} + l_{z,0} v_x)^2 - \tilde{\gamma}^2 = 0, \quad (72)$$

Годограф скорости является либо окружностью радиуса $\tilde{\gamma}|l_{z,0}|^{-1}$ с центром в точке

$$(-e_{LRL,y,0} l_{z,0}^{-1}, e_{LRL,x,0} l_{z,0}^{-1})$$

при $h_0 \leq 0$ ($0 < \varepsilon < 1$), либо дугой этой окружности ($v^2 \geq 2h_0$) при $h_0 > 0$ ($\varepsilon > 1$).

Дифференциальные уравнения, связывающие скорости и время имеют вид

$$\frac{dv_x}{dt} = -\tilde{\gamma} \frac{x}{r^3} = \tilde{\gamma}^{-2} (e_{LRL,x,0} - l_{z,0} v_y) \left(\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2) - h_0 \right)^2 = (e_{LRL,x,0} - l_{z,0} v_y) \frac{1}{r^2}, \quad (73)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\tilde{\gamma} \frac{y}{r^3} = \tilde{\gamma}^{-2} (e_{LRL,y,0} + l_{z,0} v_x) \left(\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2) - h_0 \right)^2 = (e_{LRL,y,0} + l_{z,0} v_x) \frac{1}{r^2}. \quad (74)$$

Уравнения (73) и (74) могут быть точно линеаризованы с помощью введения новой независимой переменной $t' = \omega$:

$$\frac{dt}{d\omega} = r^2, \quad (75)$$

$$\frac{dv_x}{d\omega} = e_{LRL,x,0} - l_{z,0} v_y, \quad (76)$$

$$\frac{dv_y}{d\omega} = e_{LRL,y,0} + l_{z,0} v_x, \quad (77)$$

$$v_x(0) = v_{x,0}, \quad v_y(0) = v_{y,0}, \quad t(0) = 0. \quad (78)$$

Линейные уравнения (76), (77) являются гамильтоновыми с функцией Гамильтона

$$h_v = \frac{1}{2} \frac{1}{l_{z,0}} H_v(v_x, v_y). \quad (79)$$

После решения задачи (76)-(78) можно найти зависимость $t = t(\omega)$:

$$t = \tilde{\gamma}^2 \int_0^\omega \left(\frac{1}{2} v(\xi)^2 - h_0 \right)^{-2} d\xi. \quad (80)$$

Переход $\{v_x, v_y, x, y\} \rightarrow \{v_x, v_y\}$. Вариант 2. Из условий сохранения l_z и h следуют зависимости координат от скоростей:

$$x = (l_{z,0} v_y \pm |l_{z,0}| v_x (\tilde{\gamma}^2 l_{z,0}^{-2} v^2 (v^2 / 2 - h_0)^{-2} - 1)^{1/2}) \frac{1}{v^2}, \quad (81)$$

$$y = (-l_{z,0} v_x \pm |l_{z,0}| v_y (\tilde{\gamma}^2 l_{z,0}^{-2} v^2 (v^2 / 2 - h_0)^{-2} - 1)^{1/2}) \frac{1}{v^2}. \quad (82)$$

Дифференциальные уравнения, связывающие скорости и время в этом случае имеют вид:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\tilde{\gamma} \frac{x}{r^3} = -\tilde{\gamma}^{-2} (v_y l_{z,0} \pm v_x |l_{z,0}| (\tilde{\gamma}^2 l_{z,0}^{-2} v^2 (v^2 / 2 - h_0)^{-2} - 1)^{1/2}) (v^2 / 2 - h_0)^3 v^{-2}, \quad (83)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\tilde{\gamma} \frac{y}{r^3} = -\tilde{\gamma}^{-2} (-v_x l_{z,0} \pm v_y |l_{z,0}| (\tilde{\gamma}^2 l_{z,0}^{-2} v^2 (v^2 / 2 - h_0)^{-2} - 1)^{1/2}) (v^2 / 2 - h_0)^3 v^{-2}. \quad (84)$$

После параметризации имеем:

$$\frac{dv_x}{d\omega} = -\tilde{\gamma} \frac{x}{r} = -(v_y l_{z,0} \pm v_x |l_{z,0}| (\tilde{\gamma}^2 l_{z,0}^{-2} v^2 (v^2 / 2 - h_0)^{-2} - 1)^{1/2}) (v^2 / 2 - h_0)^3 v^{-2}, \quad (85)$$

$$\frac{dv_y}{d\omega} = -\tilde{\gamma} \frac{y}{r} = -(-v_x l_{z,0} \pm v_y |l_{z,0}| (\tilde{\gamma}^2 l_{z,0}^{-2} v^2 (v^2 / 2 - h_0)^{-2} - 1)^{1/2}) (v^2 / 2 - h_0)^3 v^{-2}. \quad (86)$$

Точные решения задачи Коши для уравнений (75), (76) и (83), (84) совпадают. Действительно, из сохранения \mathbf{e}_{LRL} следует, что

$$-\tilde{\gamma} \frac{x}{r} = e_{LRL,x,0} - l_{z,0} v_y, \quad -\tilde{\gamma} \frac{y}{r} = e_{LRL,y,0} + l_{z,0} v_x.$$

Очевидно, что предпочтение следует отдать уравнениям (75)–(77).

7. Точное решение задачи Кеплера в различных представлениях

Параметризация (60). Представление точного решения задачи (58),(59),(61) зависит от знака h_0 . При $h_0 < 0$ имеем:

$$x(\theta) = x_0 + (x_0 - e_{LRL,x,0} (2h_0)^{-1}) (\cos(\lambda_0 \theta) - 1) + v_{x,0} r_0 (2|h_0|)^{-1/2} \sin(\lambda_0 \theta), \quad (87)$$

$$y(\theta) = y_0 + (x_0 - e_{LRL,y,0} (2h_0)^{-1}) (\cos(\lambda_0 \theta) - 1) + v_{y,0} r_0 (2|h_0|)^{-1/2} \sin(\lambda_0 \theta), \quad (88)$$

$$t(\theta) = -\tilde{\gamma} h_0^{-1} \theta + (r_0 + \tilde{\gamma} (2h_0)^{-1}) (-2h_0)^{-1/2} \sin(\lambda_0 \theta) + (v_{x,0} x_0 + v_{y,0} y_0) (2h_0)^{-1} (\cos(\lambda_0 \theta) - 1), \quad (89)$$

$$\lambda_0 = 2\sqrt{2|h_0|}.$$

Решение (87)–(89) описывает периодическое движение по эллиптической орбите $O(x, y) = 0$ с эксцентриситетом

$$\varepsilon = \tilde{\gamma}^{-1} \sqrt{(e_{LRL,x,0}^2 + e_{LRL,y,0}^2)} < 1.$$

Периоды движения вычисляются по формулам $T_\theta = \pi(2|h_0|)^{-1/2}$, $T_t = 2\pi\tilde{\gamma}(2|h_0|)^{-3/2}$.

При $h_0 = 0$ движение является инфинитным. Его формулы представимы в виде:

$$x(\theta) = x_0 + 2v_{x,0}r_0\theta - 2e_{LRL,x,0}\theta^2, \quad (90)$$

$$y(\theta) = y_0 + 2v_{y,0}r_0\theta - 2e_{LRL,y,0}\theta^2, \quad (91)$$

$$t(\theta) = 2r_0\theta + 2(v_{x,0}x_0 + v_{y,0}y_0)\theta^2 + \frac{4}{3}\tilde{\gamma}\theta^3. \quad (92)$$

Орбита является параболой ($\varepsilon = 1$):

$$(e_{LRL,y,0}x - e_{LRL,x,0}y)^2 + 2l_{z,0}^2(e_{LRL,x,0}x + e_{LRL,y,0}y) - l_{z,0}^4 = 0,$$

так как $\tilde{\gamma}^2 = e_{LRL,x,0}^2 + e_{LRL,y,0}^2$.

При $h_0 > 0$ движение также инфинитно и описывается следующим образом:

$$x(\theta) = x_0 + e_{LRL,x,0}(2h_0)^{-1} + (x_0 - e_{LRL,x,0}(2h_0)^{-1})(\lambda_0\theta - 1) + v_{x,0}r_0(2h_0)^{-1/2}(\lambda_0\theta), \quad (93)$$

$$y(\theta) = y_0 + e_{LRL,y,0}(2h_0)^{-1} + (y_0 - e_{LRL,y,0}(2h_0)^{-1})(\lambda_0\theta - 1) + v_{y,0}r_0(2h_0)^{-1/2}(\lambda_0\theta), \quad (94)$$

$$t(\theta) = -\tilde{\gamma}h_0^{-1}\theta + (r_0 + \tilde{\gamma}(2h_0)^{-1})(2h_0)^{-1/2}(\lambda_0\theta) + (x_0v_{x,0} + y_0v_{y,0})(2h_0)^{-1}(\lambda_0\theta - 1). \quad (95)$$

Орбита является гиперболой ($\varepsilon > 1$).

Минимальное расстояние от силового центра до орбиты $r_p = l_{z,0}^2\tilde{\gamma}^{-1}(1 + \varepsilon)^{-1}$ достигается в точке с координатами $x_p = e_{LRL,x,0}l_{z,0}^2\tilde{\gamma}^{-2}(\varepsilon(1 + \varepsilon))^{-1}$, $y_p = e_{LRL,y,0}l_{z,0}^2\tilde{\gamma}^{-2}(\varepsilon(1 + \varepsilon))^{-1}$. В этой точке $v_{x,p} = -e_{LRL,y,0}l_{z,0}^{-1}(1 + \varepsilon)\varepsilon$, $v_{y,p} = e_{LRL,x,0}l_{z,0}^{-1}(1 + \varepsilon)\varepsilon$, $v_p = \tilde{\gamma}(1 + \varepsilon)|l_{z,0}|^{-1}$, $x_pv_{x,p} + y_pv_{y,p} = 0$.

Дугой обхода силового центра назовем меньшую часть орбиты, заключенной между точками (x_c, y_c) и $(-x_c, -y_c)$ с координатами

$x_c = l_{z,0}^2 e_{LRL,y,0} (\tilde{\gamma}^2 \varepsilon)^{-1}$, $y_c = -l_{z,0}^2 e_{LRL,x,0} (\tilde{\gamma}^2 \varepsilon)^{-1}$. Эти точки лежат на орбите $O(x, y) = 0$ и прямой $y = -e_{LRL,x,0} e_{LRL,y,0}^{-1} x$ и расположены на расстоянии $r_c = l_{z,0}^2 \tilde{\gamma}^{-1} = r_p (1 + \varepsilon)$ от силового центра. Дуга обхода силового центра θ_c равна удвоенной дуге прохода по орбите от точки (x_p, y_p) до точки (x_c, y_c) и определяется по формуле:

$$\theta_c = \begin{cases} |l_{z,0}| \tilde{\gamma}^{-1} (1 - \varepsilon)^{1/2} \arccos(\varepsilon) = \arccos(\varepsilon) \pi^{-1} T_0, & h_0 < 0 \\ |l_{z,0}| \tilde{\gamma}^{-1}, & h_0 = 0, \\ |l_{z,0}| \tilde{\gamma}^{-1} (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} \ln(1 + (\varepsilon - 1) + (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}), & h_0 > 0. \end{cases}$$

Время обхода силового центра t_c можно вычислить по формуле:

$$t_c = \begin{cases} \frac{2 |l_{z,0}|^3 \tilde{\gamma}^{-2}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} (\arccos(\varepsilon) - \varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{1/2}) = (\arccos(\varepsilon) - \varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{1/2}) \pi^{-1} T_0, & h_0 < 0 \\ \frac{4}{3} |l_{z,0}|^3 \tilde{\gamma}^{-2}, & h_0 = 0 \\ \frac{2 |l_{z,0}|^3 \tilde{\gamma}^{-2}}{(\varepsilon^2 - 1)^{3/2}} (\ln(1 + (\varepsilon - 1) + (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}) - \varepsilon (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}), & h_0 > 0. \end{cases}$$

Формулы (87)–(95) дают параметрическое представление точного решения задачи (26)–(30) в виде комбинации элементарных функций. Величина θ_c используются для определения шага в новых адаптивных обратимых симплектических консервативных численных методах, которые будут рассмотрены далее.

Параметризация (75). Точное решение задачи (76)–(78) имеет вид:

$$\begin{aligned} v_x(\omega) &= v_{x,0} - \\ & - (v_{x,0} + e_{LRL,y,0} l_{z,0}^{-1}) (1 - \cos(\eta)) - \text{sign}(l_{z,0}) (v_{y,0} - e_{LRL,x,0} l_{z,0}^{-1}) \sin(\eta) =, \quad (96) \\ & = v_{x,0} - \tilde{\gamma} r_0^{-1} l_{z,0}^{-1} [x_0 \text{sign}(l_{z,0}) l_{z,0}^{-1} \sin(\eta) - y_0 (1 - \cos(\eta))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y(\omega) &= v_{y,0} - \\ & - (v_{y,0} - e_{LRL,x,0} l_{z,0}^{-1}) (1 - \cos(\eta)) + \text{sign}(l_{z,0}) (v_{x,0} + e_{LRL,y,0} l_{z,0}^{-1}) \sin(\eta) =, \quad (97) \\ & = v_{y,0} - \tilde{\gamma} r_0^{-1} l_{z,0}^{-1} [y_0 \text{sign}(l_{z,0}) l_{z,0}^{-1} \sin(\eta) + x_0 (1 - \cos(\eta))] \end{aligned}$$

где $\eta = |l_{z,0}| \omega$. Подстановка (96) и (97) в (80) позволяет найти зависимость t от параметра ω . Анализ показывает, что искомая зависимость существует для всех $\omega \in [0, +\infty)$ при $h_0 < 0$ ($0 < \varepsilon < 1$) и на полуинтервале $[0, \omega_\infty)$ при $h_0 > 0$ ($\varepsilon > 1$).

В первом случае ($h_0 < 0$) удобно представить зависимость в следующем виде

$$t(\omega) = T_t M + t'(\omega'), \quad \omega = 2\pi |l_{z,0}|^{-1} M + \omega', \quad M = 0, 1, \dots,$$

$$\omega' \in [0, 2\pi |l_{z,0}|^{-1}], \quad 0 < t' < T_t = t'(2\pi |l_{z,0}|^{-1}).$$

Во втором случае ($h_0 > 0$): $t(\omega) = t'(\omega')$, $\omega' \in [0, \omega_\infty)$, $0 < \omega_\infty$, $t \rightarrow \infty$ при $\omega' \rightarrow \omega_\infty - 0$.

Определим зависимость $t'(\omega')$:

$$t'(\omega') = \tilde{\gamma}^{-2} |l_{z,0}|^3 \int_0^{\eta'} (a + b \cos(\xi) + c \sin(\xi))^{-2} d\xi,$$

где $\eta' = |l_{z,0}| \omega'$, $a = 1$, $b = (\tilde{\gamma} r_0)^{-1} l_{z,0}^2 - 1 = \alpha^{-1} - 1$,
 $c = -(x_0 v_{x,0} + y_0 v_{y,0}) |l_{z,0}| (\tilde{\gamma} r_0)^{-1} = -\beta \alpha^{-1}$ в виде комбинации элементарных функций. Согласно [23; стр. 163-164, 2.558; 1, 4]

$$\int (a + b \cos(x) + c \sin(x))^{-2} dx = \\ = (a^2 - b^2 - c^2)^{-1} [(c \cos(x) - b \sin(x))(a + b \cos(x) + c \sin(x))^{-1} + a I(x)]',$$

$$\text{где } I(x) = \begin{cases} 2(a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2} I_+(x), & a^2 - b^2 - c^2 > 0 (h_0 < 0) \\ (b^2 + c^2 - a^2)^{-1/2} I_-(x), & b^2 - c^2 - a^2 > 0 (h_0 > 0), \\ c^{-1} \ln(a + c(x/2)), & a = b, (2\tilde{\gamma} r_0 = l_{z,0}^2) \end{cases}$$

$$I_+(x) = [(a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2}] ((a - b) \left(\frac{1}{2x} \right) + c),$$

$$I_-(x) = \ln \frac{(a - b)(1/2x) + c - (b^2 + c^2 - a^2)^{1/2}}{(a - b)(1/2x) + c + (b^2 + c^2 - a^2)^{1/2}}.$$

Поэтому при $h_0 < 0$, ($\varepsilon > 1$) имеем:

$$t'(\omega') = |l_{z,0}|^3 \tilde{\gamma}^{-2} (1 - \varepsilon^2)^{-1} \cdot [[(\beta(1 - \cos(\eta')) + ((1 - \varepsilon^2)\alpha - 1)\sin(\eta')) \\ (1 + (\alpha^{-1} - 1)\cos(\eta') - \beta\alpha^{-1}\sin(\eta'))^{-1} + 2(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}]. \quad (98)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_0(\eta'), & 0 \leq \eta' \leq \eta^*, \\ \frac{1}{2}\pi + [\beta\alpha^{-1}(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}], & \eta' = \pi, \\ \phi_0(\eta') + \pi, & \eta^* < \eta' < 2\pi. \end{array} \right.$$

где $\eta^* = \begin{cases} 2\pi - 2(|\beta|^{-1}) > \pi, & \beta < 0 \\ 2(|\beta|^{-1}) < \pi, & \beta > 0 \end{cases}$,

$$\phi_0(\eta') = [\alpha(1 - \varepsilon^2)^{1/2}(\eta' / 2)(1 - \beta(\eta' / 2))^{-1}].$$

Итак, при $h_0 < 0$ движение финитно, имеет период T_ω по параметру ω равный $2\pi|l_{z,0}|^{-1}$. Зависимость времени t' от параметра ω' , $\omega' \in [0, 2\pi|l_{z,0}|^{-1}]$ имеет вид (98). Период по времени $T_t = t'(2\pi|l_{z,0}|^{-1})$ вычисляется по формуле

$$T_t = t'(2\pi|l_{z,0}|^{-1}) = 2\pi|l_{z,0}|^3 \tilde{\gamma}^{-2}(1 - \varepsilon^2)^{-3/2} = 2\pi\tilde{\gamma}(2|h_0|)^{-3/2} \quad (99)$$

так как $\phi_0(2\pi) = 0$.

При $h_0 > 0$ ($\varepsilon > 1$) движение является инфинитным и зависимость $t'(\omega')$ определена на полуинтервале $[0, \omega_\infty]$:

$$t'(\omega') = |l_{z,0}|^3 \tilde{\gamma}^{-2}(1 - \varepsilon^2)^{-1} \left\{ \frac{\beta(1 - \cos(\eta')) - ((\varepsilon^2 - 1)\alpha + 1)\sin(\eta')}{1 + (\alpha^{-1} - 1)\cos(\eta') - \alpha^{-1}\beta\sin(\eta')} + \right. \\ \left. + (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} \ln \left| \frac{1 + (\alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} - \beta)(\eta' / 2)}{1 - (\alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} + \beta)(\eta' / 2)} \right| \right\}, \quad (100)$$

$$\eta_\infty = \begin{cases} \frac{2}{\alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} + \beta} > \pi & a - b > 0, c > 0 (\alpha > 1/2, \beta < -\alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2}) \\ \frac{2}{\alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} + \beta} < \pi & a - b > 0, c < 0 (\alpha > 1/2, \beta > \alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2}) \\ & a - b < 0, c < 0 (0 < \alpha < \frac{1}{2}, 0 < \beta < \alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2}) \\ & a - b < 0, c > 0 (0 < \alpha < \frac{1}{2}, -\alpha(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} < \beta < 0) \\ & \omega_\infty = |l_{z,0}|^{-1} \eta_\infty \end{cases} \cdot (101)$$

При $\omega \rightarrow \omega_\infty - 0$ получаем, что $t \rightarrow +\infty$ и $v \rightarrow \sqrt{2h}$.

Формулы (96)-(101) дают параметрическое представление точного решения задачи (75)-(78) в виде комбинации элементарных функций.

Продемонстрируем графики периодических решений задачи при $\tilde{\gamma} = 2.0$, для двух вариантов начальных условий.

Вариант №1: $x_0 = 0,921$, $y_0 = 1,116$, $v_{x,0} = -0,029$, $v_{y,0} = 1,215$. В этом случае $T_t = 8,603$, $T_\theta = 2,769$, $\varepsilon = 0,7572$, $h_0 = -0,644$, $l_{z,0} = 1,087$,

$e_{LRL,x,0} = 0,126$, $e_{LRL,y,0} = -1,509$. Орбита умеренно вытянута $r_{max} \approx 7,237r_{min}$,
 $t_c T_t^{-1} = 0,0692$.

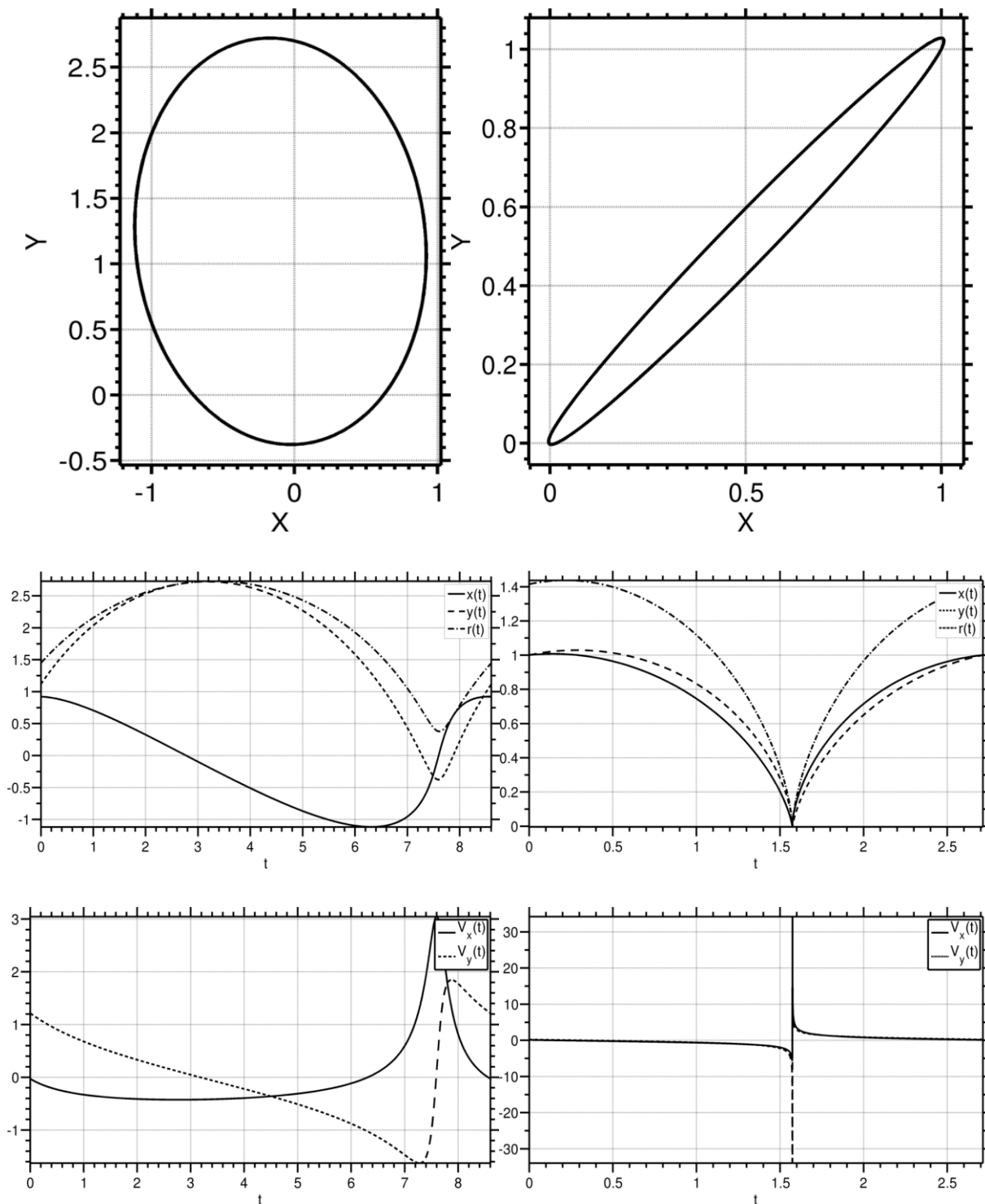


Рис. 1. Орбиты (вверху) для вариантов №1 (слева) и №2 (справа) и зависимости положения (x , y , r), скорости (v_x , v_y) от времени на одном периоде для начальных условий №1 и №2

Вариант №2: $x_0 = 1,0$, $y_0 = 1,0$, $v_{x,0} = 0,1$, $v_{y,0} = 0,2$. При таких начальных условиях имеем $T_t = 2,713$, $T_\theta = 1,885$, $\varepsilon = 0,996$, $h_0 = -1,389$, $l_{z,0} = 0,1$, $e_{LRL,x,0} = -1,394$, $e_{LRL,y,0} = -1,424$. Орбита сильно вытянута $r_{max} \approx 573,713r_{min}$, $t_c T_t^{-1} = 1,509 \cdot 10^{-4}$.

Правая колонка графиков (начальные условия №2) на рис. 1 демонстрирует резкое изменение фазовых переменных в окрестности силового центра. На рис. 2 показан график зависимости $t = t(\theta)$ для начальных условий №2. Отчетливо видно уменьшение шага τ в окрестности силового центра при постоянном шаге $\Delta\theta$.

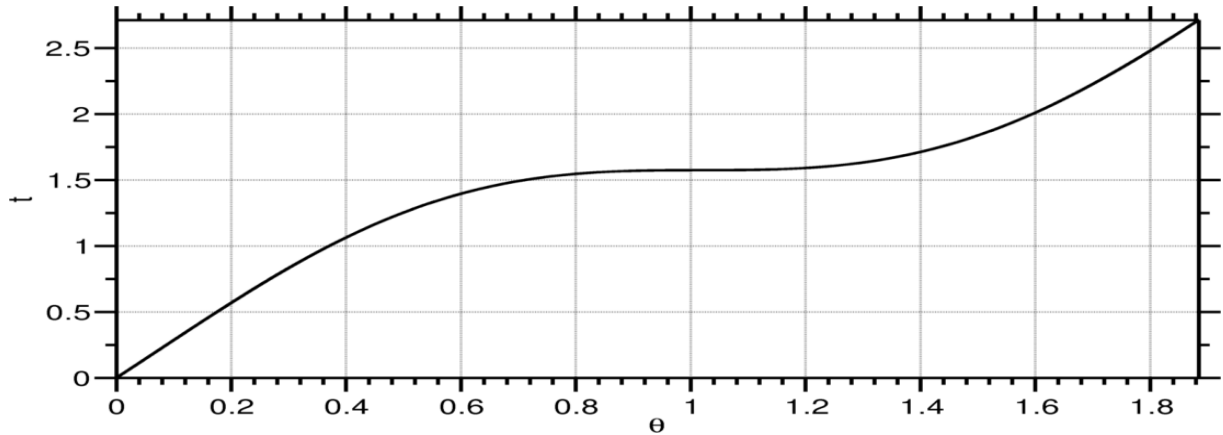


Рис. 2. График зависимости между независимыми переменными.

8. Точный численный метод в различных представлениях

Используя (87)-(101) можно получить формулы точного одношагового численного метода решения задачи Кеплера $(v_{x,i}, v_{y,i}, x_i, y_i, t_i) \rightarrow (v_{x,i+1}, v_{y,i+1}, x_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1})$ на неравномерной сетке $\Omega_t = \{t_i, t_i = t_{i-1} + \tau_i, i = 1, \dots\}$ в двух представлениях.

1. Формулы метода, основанного на уравнениях (58)–(61):

Случай $h_0 < 0$:

$$x_{i+1} = x_i + (x_i - e_{LRL,x,0}(2h_0)^{-1})(\cos(\lambda_0 \Delta\theta) - 1) + v_{x,i} r_i (2|h_0|)^{-1/2} \sin(\lambda_0 \Delta\theta), \quad (102)$$

$$y_{i+1} = y_i + (y_i - e_{LRL,y,0}(2h_0)^{-1})(\cos(\lambda_0 \Delta\theta) - 1) + v_{y,i} r_i (2|h_0|)^{-1/2} \sin(\lambda_0 \Delta\theta), \quad (103)$$

$$\tau_{i+1} = -\tilde{\gamma} h_0^{-1} \Delta\theta + (r_i + \tilde{\gamma}(2h_0)^{-1})(2h_0)^{-1/2} \sin(\lambda_0 \Delta\theta) + (v_{x,i} x_i + v_{y,i} y_i)(2h_0)^{-1} (\cos(\lambda_0 \Delta\theta) - 1). \quad (104)$$

Случай $h_0 = 0$:

$$x_{i+1} = x_i + 2v_{x,i}r_i\Delta\theta - 2e_{LRL,x,0}(\Delta\theta)^2, \quad (105)$$

$$y_{i+1} = y_i + 2v_{y,i}r_i\Delta\theta - 2e_{LRL,y,0}(\Delta\theta)^2, \quad (106)$$

$$\tau_{i+1} = 2r_i\Delta\theta + 2(v_{x,i}x_i + v_{y,i}y_i)(\Delta\theta)^2 + \frac{4}{3}\tilde{\gamma}(\Delta\theta)^3. \quad (107)$$

Случай $h_0 > 0$:

$$x_{i+1} = x_i + (x_i - e_{LRL,x,0}(2h_0)^{-1})(\lambda_0\Delta\theta - 1) + v_{x,i}r_i(2h_0)^{-1/2}(\lambda_0\Delta\theta), \quad (108)$$

$$y_{i+1} = y_i + (y_i - e_{LRL,y,0}(2h_0)^{-1})(\lambda_0\Delta\theta - 1) + v_{y,i}r_i(2h_0)^{-1/2}(\lambda_0\Delta\theta), \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} = & -\tilde{\gamma}h_0^{-1}\Delta\theta + (r_i + \tilde{\gamma}(2h_0)^{-1})(2h_0)^{-1/2}(\lambda_0\Delta\theta) + \\ & + (x_iv_{x,i} + y_iv_{y,i})(2h_0)^{-1}((\lambda_0\Delta\theta) - 1) \end{aligned} \quad (110)$$

2. Формулы метода, основанного на уравнениях (75)-(78):

$$\begin{aligned} v_{x,i+1} = & v_{x,i} - (v_{x,i} + e_{LRL,y,0}l_{z,0}^{-1})(1 - \cos(\Delta\eta)) - \\ & - \text{sign}(l_{z,0})(v_{y,i} - e_{LRL,x,0}l_{z,0}^{-1})\sin(\Delta\eta) = \\ = & v_{x,i} - \Delta\omega\tilde{\gamma}r_i^{-1}[(\Delta\eta)^{-1}\sin(\Delta\eta)x_i - \text{sign}(l_{z,0})(\Delta\eta)^{-1}(1 - \cos(\Delta\eta))y_i] \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} v_{y,i+1} = & v_{y,i} - \left(v_{y,i} - \frac{e_{LRL,x,0}}{l_{z,0}} \right) (1 - \cos(\Delta\eta)) + \\ & + \text{sign}(l_{z,0}) \left(v_{x,i} + \frac{e_{LRL,y,0}}{l_{z,0}} \right) \sin(\Delta\eta) = \end{aligned} \quad (112)$$

$$v_{y,i} - \Delta\omega\tilde{\gamma}r_i^{-1}[(\Delta\eta)^{-1}\sin(\Delta\eta)y_i + \text{sign}(l_{z,0})(\Delta\eta)^{-1}(1 - \cos(\Delta\eta))x_i]$$

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} = & t_{i+1} - t_i = |l_{z,i}|^3 \tilde{\gamma}^{-2} (1 - \varepsilon^2)^{-1} \cdot \left[\frac{\beta_i(1 - \cos(\Delta\eta)) + ((1 - \varepsilon^2)\alpha_i - 1)\sin(\Delta\eta)}{1 + (\alpha_i^{-1} - 1)\cos(\Delta\eta) - \beta_i\alpha_i^{-1}\sin(\Delta\eta)} + \right. \\ & + \left. (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \begin{cases} 2[\alpha_i(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \frac{(\Delta\eta/2)}{(1 - \beta_i(\Delta\eta/2))}], & h_0 < 0 \\ \ln \left| \frac{1 + (\alpha_i(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} - \beta_i)(\Delta\eta/2)}{1 - (\alpha_i(\varepsilon^2 - 1)^{1/2} + \beta_i)(\Delta\eta/2)} \right|, & h_0 > 0 \end{cases} \right] \end{aligned} \quad (113)$$

$$r_{i+1} = \tilde{\gamma}((1/2)v_{i+1}^2 - h_0)^{-1}, \quad (114)$$

$$x_{i+1} = -\tilde{\gamma}^{-1}(e_{LRL,x,0} - l_{z,0}v_{y,i+1})r_{i+1} = -(e_{LRL,x,0} - l_{z,0}v_{y,i+1})\left(\frac{1}{2}v_{i+1}^2 - h_0\right)^{-1}, \quad (115)$$

$$y_{i+1} = -\tilde{\gamma}^{-1}(e_{LRL,y,0} + l_{z,0}v_{x,i+1})r_{i+1} = -(e_{LRL,y,0} + l_{z,0}v_{x,i+1})\left(\frac{1}{2}v_{i+1}^2 - h_0\right)^{-1}. \quad (116)$$

где $\alpha_i = \tilde{\gamma}r_i l_{z,0}^{-2}$, $\beta_i = (x_i v_{x,i} + y_i v_{y,i})|l_{z,0}|^{-1}$, $\Delta\eta = |l_{z,0}| \Delta\omega$.

Параметр $\Delta\eta$ составляет малую часть либо от 2π , либо от η_∞ ,

$$\Delta\eta = \begin{cases} 2\pi N_s^{-1}, & h_0 < 0 \\ \eta_\infty N_s^{-1}, & h_0 > 0 \end{cases}.$$

где $N_s > 10$ – число расчетных точек на носителе точного решения.

9. Новые одношаговые адаптивные симплектические консервативные обратимые методы численного решения задачи Кеплера

Решения редуцированных задач предлагалось находить численно с помощью симметрично-симплектических одно-, двух- и трехстадийных методов Рунге–Кутты [16-19]. В результате получена группа новых одношаговых численных методов, сохраняющих все перечисленные выше глобальные свойства решений задачи Кеплера в рамках точной арифметики.

Методы являются адаптивными. Переменный шаг по времени выбирается автоматически, исходя из свойств решения (см. рис. 2). Методы сохраняют орбиту и годограф скорости в рамках точной арифметики и аппроксимируют зависимости фазовых переменных от времени с вторым, четвертым и шестым порядком. В группе содержатся также точные методы. Ограничимся рассмотрением методов, аппроксимирующих уравнения (58)–(61).

Формулы методов имеют следующий вид:

$$x_{i+1} = x_i(1 + 2(2h_0)q_2(\Delta\theta)^2) + 2r_i v_{x,i} q_1 \Delta\theta - 2e_{LRL,x,i} q_2 (\Delta\theta)^2,$$

$$y_{i+1} = y_i(1 + 2(2h_0)q_2(\Delta\theta)^2) + 2r_i v_{y,i} q_1 \Delta\theta - 2e_{LRL,y,i} q_2 \Delta\theta^2,$$

$$t_{i+1} = t_i + 2r_i q_1 \Delta\theta + 2(x_i v_{x,i} + y_i v_{y,i}) q_2 \Delta\theta^2 + \tilde{\gamma} q_3 \Delta\theta^3,$$

$$r_{i+1} = \tilde{\gamma}^{-1}(l_{z,i}^2 - e_{LRL,x,i} x_{i+1} - e_{LRL,y,i} y_{i+1}),$$

$$v_{x,i+1} = -(l_{z,i}^2 e_{LRL,y,i} - e_{LRL,x,i} e_{LRL,y,i} x_{i+1} + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,y,i}^2) y_{i+1})(\tilde{\gamma} l_{z,i} r_{i+1})^{-1},$$

$$v_{y,i+1} = (l_{z,i}^2 e_{LRL,x,i} + (\tilde{\gamma}^2 - e_{LRL,x,i}^2) x_{i+1} - e_{LRL,x,i} e_{LRL,y,i} y_{i+1}) (\tilde{\gamma} l_{z,i} r_{i+1})^{-1}.$$

Параметр $\Delta\theta$ определяет величину i -го шага по времени $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ и составляет малую долю от величины θ_c . Коэффициенты q_1 , q_2 , q_3 и параметр $\Delta\theta$ зависят:

$$q_2 = 2q_1^2(1 + (1 + 8h_0(\Delta\theta)^2 q_1^2)^{1/2})^{-1}, \quad q_3 = -h_0^{-1}(\Delta\theta)^{-2}(1 - q_1).$$

Допустимые зависимости q_1 от $\Delta\theta$ определяют порядок аппроксимации методов p . Предлагаются следующие варианты зависимости:

$$1. \quad q_1 = \Delta_1^{-1} \Rightarrow p = 2;$$

$$2. \quad q_1 = (1 + 2s^2 h_0(\Delta\theta)^2) \Delta_2^{-1}; s = -1/\sqrt{3} \Rightarrow p = 4;$$

$$3. \quad q_1 = (1 - 16(\Delta\theta)^2 h_0(-(1-b)c^2 + (1-2b)(2c-s_1)s_1) + 64(\Delta\theta)^4 h_0^2(1-2b)(c-s_1)^2(c^2 - (1-2b)(2c-s_1)s_1)) \Delta_3^{-1},$$

$$c = -\frac{1}{2}(6b)^{-1/2}, \quad b = 5/18, \quad s_1 = 3/4(3/5)^{1/2} \Rightarrow p = 6;$$

$$4. \quad q_1 = \begin{cases} \sin(\lambda_0 \Delta\theta)(\lambda_0 \Delta\theta)^{-1}, & h_0 < 0 \\ 1, & h_0 = 0 \\ (\lambda_0 \Delta\theta)(\lambda_0 \Delta\theta)^{-1}, & h_0^* > 0 \end{cases} \Rightarrow p = \infty, \quad \Delta_1 = 1 - 2h_0(\Delta\theta)^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 1 - 2(1 - 2s^2)h_0(\Delta\theta)^2 + 4s^4 h_0^2(\Delta\theta)^4, \\ \Delta_3 &= 1 - 2h_0(\Delta\theta)^2(1 - 8c^2 + 16(1-2b)cs_1 - 8(1-2b)s_1^2) + \\ &+ 32(\Delta\theta)^4 h_0^2(-c^2(1-2b-2c^2) + 2(1-2b)c(1-4c^2)s_1 - \\ &-(1-2b)(1-4(3-4b)c^2)s_1^2 - 8(1-2b)^2 cs_1^3 + 2(1-2b)^2 s_1^4) - \\ &- 128(\Delta\theta)^6 h_0^3(1-2b)^2(c-s_1)^4, \quad c = -0.5(6b)^{-1/2}. \end{aligned}$$

В первом, втором и третьем вариантах зависимостей методы имеют второй, четвертый и шестой порядок аппроксимации соответственно. Обозначим эти методы следующим образом: ASSCM2, ASSCM4, ASSCM6. Четвертый вариант зависимости дает точный метод.

10. Дисбалансы первых интегралов и точность новых методов на больших отрезках времени

Большой интерес представляет поведение зависимостей дисбалансов первых интегралов от времени на больших отрезках времени. Пусть ΔH_N , $\Delta I_{z,N}$, $\Delta e_{LRL,N}$ являются максимумами модулей дисбалансов полной энер-

гии и момента импульса, а также нормой дисбаланса вектора e_{LRL} на N -ом периоде приближенного решения. На рис. 3 представлены графики зависимости этих величин от $N \in \{0, 1, 2, \dots, 50000\}$ для начальных условий 1. На больших интервалах времени наблюдается умеренный рост дисбалансов не превышающий 10^{-11} .

На неограниченном промежутке времени все зависимости демонстрируют эффект биений. Биения в зависимости погрешности от времени вызваны тем, что период точного решения и «период» приближенного решения различаются на величину пропорциональную погрешности численного метода. Максимальная погрешность положения достигается тогда, когда точки, изображающие точное и приближенное решения в плоскости (x, y) , из-за различия периода точного решения и «периода» приближенного решения оказываются приблизительно в диаметрально противоположных концах сохраняющейся орбиты. Метод ASSCM2 имеет второй порядок и период биений погрешностей составляет приблизительно 3000 периодов точного решения. В случаях методов ASSCM4 и ASSCM6 порядок точности равен 4 и 6 соответственно и поэтому период биений значительно превышает 50000 периодов точного решения. Погрешности на финальный момент времени ($t_f = 50000T_i$) у этих методов равны приблизительно 10^{-2} и 10^{-6} соответственно.

Выводы:

1. Из условий сохранения момента количества движения и компонент вектора Лапласа-Рунге-Ленца получено семейство одношаговых адаптивных обратимых симплектических численных методов решения задачи Кеплера, сохраняющих момент количества движения, полную энергию, компоненты вектора ЛРЛ и орбиту с точностью порядка 10^{-11} на отрезках времени в 50000 периодов точного решения.

2. Тестовые испытания показали, что при числе расчетных точек, превышающих несколько десятков на длину дуги обхода силового центра, методы имеют, по крайней мере второй порядок точности зависимостей фазовых переменных от времени. Выбор определенных значений свободных параметров позволяет повышать порядок аппроксимации до четырех или шести. Семейство содержит ранее опубликованные методы второго порядка [12-15].

3. Методы являются адаптивными. Шаг по времени выбирается автоматически, исходя из свойств решения задачи. Адаптивность методов позволяет эффективно проводить расчеты орбит с большим эксцентриситетом ($\varepsilon \approx 0,99$).

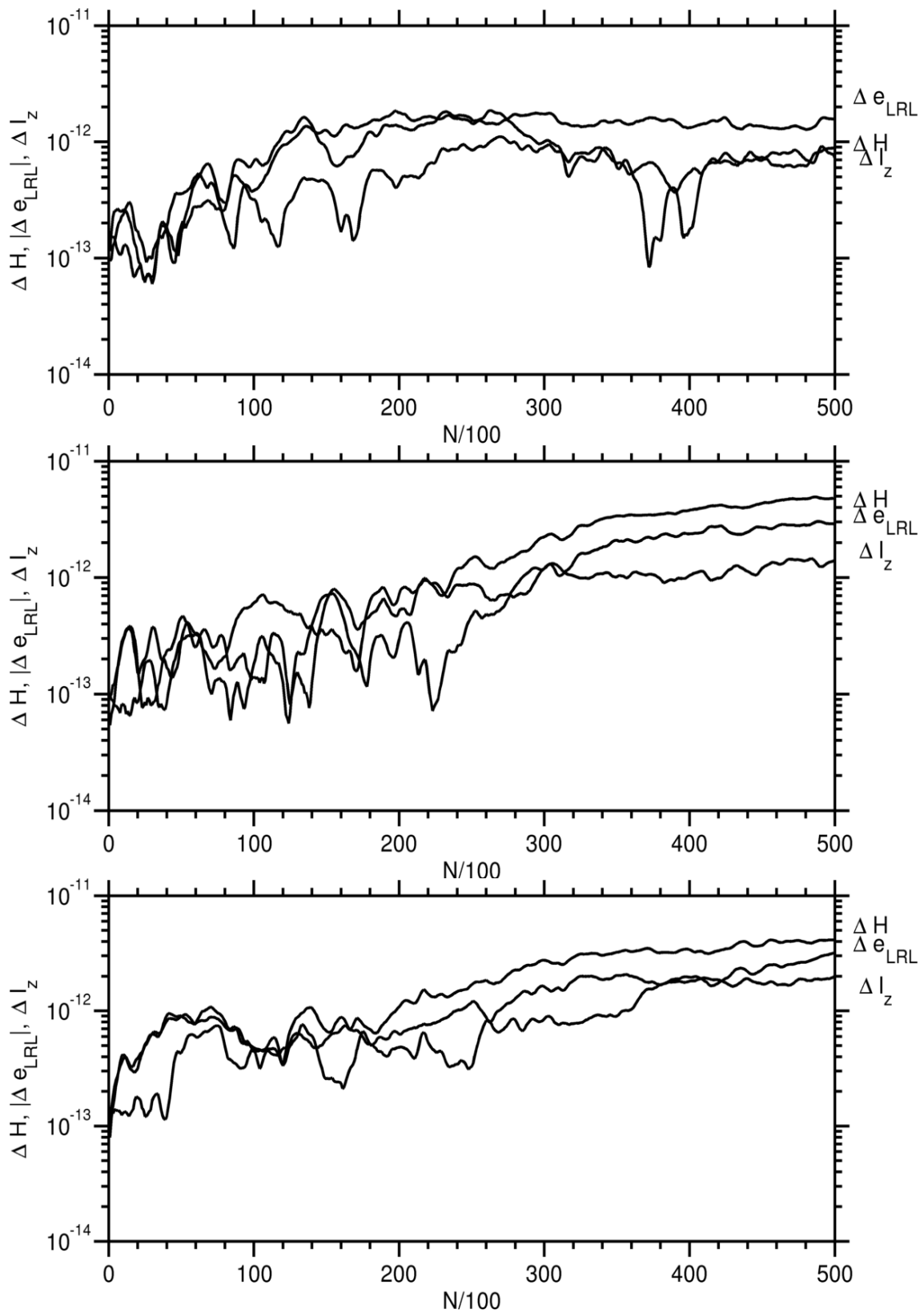


Рис. 3. Зависимости дисбалансов от номера периода N для методов ASSCM2, ASSCM4 и ASSCM4

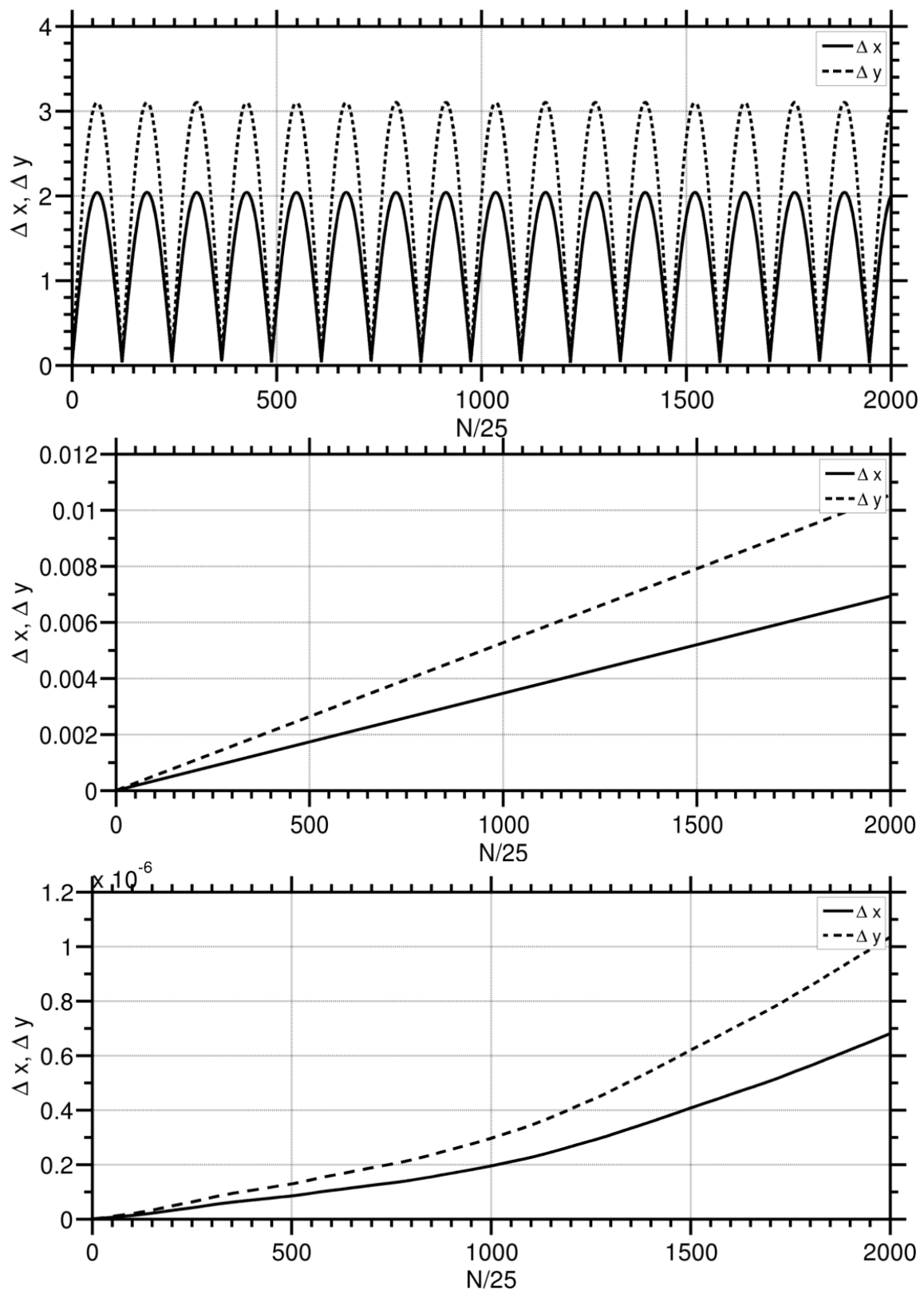


Рис. 4. Зависимости погрешностей координат от номера периода N для методов ASSCM2, ASSCM4 и ASSCM4

Не меньший интерес представляет поведение зависимостей погрешностей приближенного решения от времени на больших отрезках времени.

На рис. 4 представлены зависимости погрешности координат Δx , Δy от номера периода N для начальных условий 1 для трех методов.

Работа выполнена при частичной поддержке ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Тема №FNEF-2024-0001 (1023032100070-3-1.2.1)) и ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова (НИР «Математическое моделирование и численные методы в фундаментальных задачах науки»).

Литература

1. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric numerical integration (2nd ed.)7 – Springer, Berlin, 2006.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. – М.: Наука, 1973. – 207 с.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979, 431.
4. *Verlet L.* Computer “experiments” on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules // *Phys. Rev.* 1967, 159, 98-103.
5. *Sanz-Serna J.M.* Runge-Kutta schemes for Hamiltonian systems. *BIT.* 1988, 28(4), 877-883.
6. *McLachan R.I., Quispel G.R.W., Robidoux N.* Geometric integration using discrete gradients // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1999, 397, 1021-1045.
7. *Reich S.* Momentum conserving symplectic integrators // *Phys. D*, 1994, 76, 375-383.
8. *Deuffhard P., Hermans J., Leimkuhler B. et al.* Computational molecular dynamics: Challenges, methods, ideas. Vol. 4 of Lectures Notes in Com. Sci. & Eng. Berlin. 1998.
9. *Kane C., Marsden J.E., Ortiz M.* Symplectic-energy-momentum preserving variational integrators. *J. Math. Phys.* 1999, 40(7), 3353-3371.
10. *Marsden J.E., West M.* Discrete mechanics & variational integrators // *Acta Numerica.* 2001, 10, 357-514.
11. *LaBudde R.A., Greenspen D.* Discrete mechanics. A general treatment // *J. Comput. Phys.* 1974, 15, 134-167.
12. *Minesaki Y., Nakamura Y.* A new discretization of the Kepler motion which conserves the Runge-Lenz vector // *Phys. Lett. A.* 2002, 306, 127-133.
13. *Kozlov R.* Conservative discretization of the Keplerian motions // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2007, 40, 4529-4539.
14. *Cieslinski J.L.* An orbit-preserving discretization of the classical Keplerian problem // *Phys. Lett. A.* 2007, 370(1), 8-12.
15. *Еленин Г.Г., Еленина Т.Г.* Об одном однопараметрическом семействе разностных схем для численного решения задачи Кеплера // *ЖВМиМФ*, 2015, 55(8), 1292-1298.
16. *Еленин Г.Г., Еленина Т.Г.* Адаптивные симплектические консервативные численные методы решения задачи Кеплера // *Дифференциальные уравнения.* 2017, 53(7), 950-961.

18. *Еленин Г.Г., Еленина Т.Г.* Тестовые испытания адаптивных симплектических консервативных численных методов решения задачи Кеплера // ЖВМиМФ., 2018, 58(6), 895-913.
19. *Еленин Г.Г., Еленина Т.Г.* Адаптивные симплектические консервативные численные методы решения задачи Кеплера // Дифференциальные уравнения. 2017, 53(7), 950-961.
20. *Еленин Г.Г., Еленина Т.Г., Иванов А.А.* О точности одного семейства адаптивных симплектических консервативных численных методов решения задачи Кеплера // Математическое моделирование. 2021, 33(2), 55-66.
21. *Oewel W., Sofrouniou M.* Symplectic Runge-Kutta schemes II: Classification of symmetric methods // Preprint, 1997, University of Paderborn, 47 p.
22. *Еленин Г.Г., Шляхов П.И.* Геометрическая структура пространства параметров симплектических методов Рунге-Кутты // Математическое моделирование. 2011, 23(5), 16-34.
23. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М: Изд-во физ. мат. лит., 1963. – 1100 с.