



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

К 95-летию С.П.Курдюмова

К 95-летию  
со дня рождения  
С.П. Курдюмова



Горизонты  
математического моделирования  
и теория самоорганизации

А.В. Подлазов

**Решение одномерной  
самоорганизованно-критической  
модели Осло**

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Подлазов А.В. Решение одномерной самоорганизованно-критической модели Осло // Горизонты математического моделирования и теория самоорганизации. К 95-летию со дня рождения С.П. Курдюмова. — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2024. — С. 104-120.

<https://doi.org/10.20948/k95-5>

<https://keldysh.ru/e-biblio/k95/5.pdf>

# Решение одномерной самоорганизованно-критической модели Осло

А.В. Подлазов

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*

**Аннотация.** В работе исследуется модель Осло – одномерная консервативная строго изотропная самоорганизованно-критическая модель кучи песка. Для нее получено полное аналитическое решение, а также приводятся подтверждающие его результаты компьютерного эксперимента. Решение опирается на модель мезоуровня. Происходящие на нем процессы рассматриваются как аномальная диффузия. В качестве ее объяснения рассмотрены различные механизмы случайного блуждания, один из которых существенным образом учитывает одномерный характер модели.

**Ключевые слова:** самоорганизованная критичность, масштабная инвариантность, степенные распределения, кучи песка, модель Осло, модель Фретте, модель Манна, модели мезоуровня, аномальная диффузия, случайные блуждания

## Solution of the one-dimensional self-organized critical Oslo model

A.V. Podlazov

*RAS Keldysh Institute of Applied Mathematics*

**Abstract.** I study the Oslo model – a one-dimensional conservative strictly isotropic self-organized critical sandpile model. I obtain a complete analytical solution for it, and I also present confirming simulation results. The solution bases on a meso-level model. I consider the processes of this level as anomalous diffusion. To explain it, I consider various random walk mechanisms, one of which essentially takes into account the one-dimensional nature of the model.

**Keywords:** self-organized criticality, scale invariance, power-law distributions, sandpiles, Oslo model, Frette model, Mann model, meso-level models, anomalous diffusion, random walks

### Введение

Ранее [1] автором было предложено рассматривать пребывание системы в самоорганизованно-критическом состоянии [2,3] как явление,

наиболее точно соответствующим образу горения нелинейной среды, рожденному в научной школе член-корр. РАН С.П. Курдюмова [4]. В ходе развития теории самоорганизованной критичности исследователями создано огромное множество различных моделей [2,5], демонстрирующих разные аспекты этого явления. Но лишь для нескольких моделей понимание логики их функционирования удалось довести до уровня, позволяющего получить решения этих моделей [1,6,7,8,9,10].

В настоящей работе автор предлагает решение еще одной самоорганизованно-критической модели – модели Осло, предложенной норвежским исследователем В. Фретте [11]. В отличие от остальных самоорганизованно-критических моделей эта известна в литературе не по фамилии создателя, а по названию города. Причина – в попытке применения модели для описания натуральных экспериментов с кучей риса, выполненных 3 года спустя большой группой исследователей в Университете Осло [12,13].

Попытка оказалась не очень удачной – было получено лишь качественное (воспроизведение степенных зависимостей), но не количественное (воспроизведение их показателей) соответствие. Тем не менее, безличное название закрепилось и за компьютерной моделью. Прежде чем переходить к ее обсуждению, уместно вспомнить и натуральный эксперимент, который был выдающимся результатом для своего времени.

Экспериментаторы [12,13] располагали горизонтальную подложку ограниченной длины и высокую вертикальную стенку между двумя близкими параллельными стеклами. У стенки в систему по одной добавлялись рисинки, из которых постепенно формировалась куча с наклонной поверхностью. Динамика лавин, вызванных добавлением рисинок на вершину кучи, исследовалась с помощью цифровой камеры. Использование рисинок продолговатой формы помогло избежать типичной для реальных куч песка ситуации, когда его поверхностный слой съезжает как единое целое. Однако даже такой подход не позволил исключить эффекты инерции, не учитываемые в простейших компьютерных моделях. Кроме того, для эксперимента использовались подложки длиной в десятки или в лучшем случае в сотни длин рисинки, тогда как в рассматриваемой далее модели для получения надежных результатов размер системы должен исчисляться хотя бы тысячами единиц.

Хотя исторически сложилось [2], что концептуальной моделью в теории самоорганизованной критичности служит куча песка, куча риса с не меньшим правом могла бы претендовать на эту роль. Более того, описанная экспериментальная постановка с кучей риса наиболее близка к идеализированному представлению о куче песка, представленному автором в работах [1,3,6]. Реакция кучи на добавление материала у ее вершины зависит от наклона поверхности. Если он мал, последствия возмущения не достигают открытого края и наклон увеличивается. Если наклон велик, возмущение приводит к макроскопическому событию, выносящему материал

через открытый край, вследствие чего наклон уменьшается. И лишь при некотором его промежуточном значении реакция на возмущение не имеет собственного характерного размера, а значит, может достигать сколь угодно удаленного открытого края с некоторой вероятностью. За счет действия этой отрицательной обратной связи куча самоорганизуется в критическое состояние, в котором ее поведение становится целостным.

### Правила модели

Модель Осло формулируется как клеточный автомат (система с дискретными пространством, временем и состояниями) на одномерной решетке линейного размера  $L$ . Целые числа  $z_i \geq 0$  в ее ячейках  $i = 0, 1, \dots, L-1$  характеризуют локальный наклон поверхности кучи, измеряемый в песчинках.

Каждая ячейка  $i$  имеет свой *порог устойчивости*  $z_i^* \in \{1, 2\}$ , по достижении которого, т.е. при  $z_i \geq z_i^*$ , она объявляется неустойчивой и *опрокидывается*, передавая по песчинке своим соседкам:  $z_i \rightarrow z_i - 2$ ,  $z_{i\pm 1} \rightarrow z_{i\pm 1} + 1$ . После каждого опрокидывания ячейка получает новый порог устойчивости, выбираемый случайно.

При опрокидывании краевой ячейки  $i = 0$  или  $i = L - 1$  одна песчинка покидает систему, выпадая через открытый край. Потеря кучей песчинок компенсируется их *вбросом* в самую левую ячейку  $i = 0$ , осуществляемым в состоянии, когда все ячейки устойчивы, т.е.  $\forall i: z_i < z_i^*$ .

Когда происходит нарушение устойчивости ячейки и она опрокидывается, это может нарушить устойчивость соседних ячеек, вследствие чего те тоже могут опрокинуться и т.д. В результате развивается *лавина опрокидываний*, продолжающаяся до тех пор, пока все ячейки вновь не обретут устойчивость. По завершении лавины вбрасывается новая песчинка – и всё повторяется.

Основными характеристиками происходящих событий являются:

- *длина* области лавины  $R$  – число ячеек, в которых произошли опрокидывания (без учета его кратности);
- *длительность* лавины  $T$  – число шагов в параллельном времени (при одновременной обработке всех неустойчивых ячеек);
- *размер* лавины  $N$  – общее число опрокидываний (с учетом кратности), или число шагов в последовательном времени (при обработке неустойчивых ячеек по одной);
- *число волн опрокидывания*  $W$  – число опрокидываний точки вброса, или количество песчинок, выпавших за левый край решетки.

## Свойства степенных распределений

Из любого начального состояния куча со временем самоорганизуется в критическое состояние, где плотность вероятности распределения всех основных характеристик лавины имеет вид [1,3,6]:

$$u_x(X) = X^{-(1+\alpha_x)} g_x(X/X_1), \quad (1)$$

где  $g_x$  – скейлинговая функция, примерно постоянная при малых аргументах и убывающая быстрее любой их степени – при больших, а величина

$$X_1 \sim L^{\nu_x}$$

характеризует события, крупные настолько, что они уже не помещаются в систему конечного размера  $L$ . Исследование модели сводится к определению для каждой характеристики показателей степенных зависимостей – *характеристического*  $\alpha_x$  и *скейлингового*  $\nu_x$ .

Доля событий, не помещающихся в систему, убывает с ее размером как

$$\text{Prob}\{X > X_1\} = \int_{X_1}^{\infty} u_x(X) dX \cong \int_{L^{\nu_x}}^{\infty} X^{-(1+\alpha_x)} g_x(XL^{-\nu_x}) dX \sim L^{-\varepsilon},$$

где *универсальный показатель*  $\varepsilon \equiv \alpha_x \nu_x$  не зависит от того, какая именно величина используется для его вычисления, поскольку если событие не помещается в систему, то не помещается сразу по всем своим характеристикам.

В этом можно убедиться и непосредственно, связав две разных характеристики события  $X$  и  $Y$  формулами  $X^{\alpha_x} \sim Y^{\alpha_y}$  и  $X^{\nu_y} \sim Y^{\nu_x}$ , использующими соответственно степенной и нестепенной участки распределения (1).

Наконец, если  $\alpha_x < 1$ , то средний размер события

$$\langle X \rangle = \int X \cdot u_x(X) dX \sim L^{\nu_x(1-\alpha_x)} = L^{\nu_x - \varepsilon}.$$

Он масштабируется с ростом размера системы медленнее, чем размер крупного события  $X_1$ , что говорит о склонности критических систем к катастрофическому поведению.

## Элементарный анализ правил и общие соображения

Цель настоящего исследования – решение модели, т.е. аналитическое определение характеристических и скейлинговых показателей распределения для всех характеристик лавины. И начать здесь следует с тех показателей, которые могут быть определены непосредственно из правил модели.

Так, длина самых крупных лавин равна размеру решетки, т.е.  $R_1 = L$ ,

$$\text{или } \nu_R = 1. \quad (2)$$

Почти все выброшенные песчинки покидают решетку через ее левый край, так что можно считать, что  $\langle W \rangle = 1$ . Само по себе это выражение, к сожалению, не позволяет получить каких-либо скейлинговых соотношений. Как мы увидим далее,  $\alpha_w > 1$ , в силу чего интеграл для среднего числа волн набирается в области малых значений, так что величина показателя  $\nu_w$  не сказывается на  $\langle W \rangle$ .

Поскольку правила модели, будучи строго симметричными, сохраняют положение центра масс выброшенных песчинок, каждое выпадение песчинки через левый край решетки должно сопровождаться суммарным переносом одной песчинки на одну ячейку вправо. Таким образом, средний поток песчинок вправо через всю решетку  $J = 1/L$ . Если обозначить  $M_i$  – кратность опрокидывания ячейки  $i$  во время лавины, то  $J = -\nabla \langle M_i \rangle$ , где угловые скобки означают осреднение по всем лавинам. Отсюда с учетом краевого условия  $\langle M_L \rangle = 0$  (за пределами решетки опрокидываний уже нет) находим  $\langle M_i \rangle = 1 - i/L$ . Суммирование этих величин по всем ячейкам дает средний размер лавины  $\langle N \rangle = \sum_{i=0}^{L-1} \langle M_i \rangle \cong L/2$ , т.е.  $\nu_N - \varepsilon = 1$ , откуда с учетом показателя (2) получаем

$$N \sim R^{1+\varepsilon}. \quad (3)$$

Обычно самоорганизованно-критические модели решаются целиком, т.е. выводятся формулы, связывающие между собой различные характеристики лавины. Эти формулы в совокупности с результатами элементарного анализа правил модели дают систему уравнений, из которой и находятся все показатели. С моделью Осло всё получилось несколько иначе. Ее решение распадается на две части – геометрическую и динамическую – так, что уравнения первой оказываются независимыми от уравнений второй. В каждой из частей решения вводятся две дополнительных величины, одна из которых является времениподобной переменной, а другая представляет характерный пространственный масштаб.

Вводимые величины относятся к мезоуровню [6], на котором описывается коллективная динамика элементов системы. Формулы мезоуровня не выводятся из правил микроуровня, определяющих поведение отдельных ячеек и песчинок, а формулируются на основе общефизических соображений. Поэтому в итоге решение проверяется уже на макроуровне – сравнением с результатами компьютерного эксперимента, оперирующего лишь характеристиками завершившихся лавин.

## Класс универсальности модели

Для критических систем типична ситуация, когда модели, имеющие разные правила или даже разную идейную основу, описываются степенными зависимостями с одним и тем же набором показателей, определяющим их *класс универсальности* этих моделей, обычно обозначаемый названием одной из них.

Можно указать по крайней мере три модели кучи песка, относящиеся к классу универсальности модели Осло. В этих моделях порог устойчивости одинаков для всех ячеек и неизменен во времени, но иные правила передачи песчинок, которые неустойчивая ячейка теряет при опрокидывании.

В одномерной версии модели Манна [14,15]  $z^* = 2$  и каждая из пары передаваемых песчинок случайно выбирает, перейти ей в левую или в правую соседку опрокинувшейся ячейки, т.е. на микроуровне размывается пространственная симметрия правил – они симметричны только в среднем, но не в точности.

А в модели с расширенным соседством [неопубликованные результаты автора] также  $z^* = 2$ , но пара передаваемых песчинок случайно достается либо ближайшим соседкам опрокинувшейся ячейки, либо следующим за ними ячейкам, т.е. хотя на микроуровне правила остаются в точности симметричными, размытию подвергается понятие непосредственного соседства ячеек.

Наконец, в модели, которую, учитывая количество ее авторов, можно (по аналогии с моделью Осло) назвать моделью Уханя [16],  $z^* = 4$ , но соседки опрокинувшейся ячейки получают либо одну, либо две пары песчинок, т.е. на микроуровне размыт оказывается размер опрокидывания.

Совпадение статистических свойств этих моделей говорит о том, что стохастичность правил важна лишь как фактор, предотвращающий вырождение, имеющее место в строго детерминированном варианте [11]. А что в точности затрагивает случайность – порог, симметрию, соседство или опрокидывание, – несущественно. Это служит определенным намеком на то, что при построении аналитического решения целесообразно учитывать наличие случайности, но нецелесообразно сосредотачиваться на деталях ее действия. В этой связи, прежде чем решать модель, следует сделать обзор базовых механизмов, через которые случайность может проявляться простейшим образом.

## Аномальная диффузия как случайное блуждание

Ключевое значение для решения модели будут иметь процессы, в которых величина  $x$ , имеющая смысл обобщенной координаты, зависит от величины  $k$ , имеющей смысл обобщенного времени, диффузионным образом

$$x^2 \sim Dk \tag{4}$$

с коэффициентом  $D$ , прямо или опосредовано зависящим от  $x$  и/или  $k$ . Такое поведение называют *аномальной диффузией*, подчеркивая тем самым, что для нормальной диффузии коэффициент  $D$  постоянен.

Хорошее объяснение аномальной диффузии не должно иметь каких-либо нетривиальных степенных зависимостей на входе. И в этом смысле очень удобным инструментом оказывается процесс случайного блуждания, описываемый отображением вида  $x_{k+1} = x_k + \delta$  с дискретным номером шага  $k$  и его случайной длиной  $\delta$ . Блуждание всегда предполагается несмещенным, т.е.  $\langle \delta \rangle = 0$ , и независимым, т.е.  $\langle x \cdot \delta \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle \delta \rangle = 0$ . Это позволяет воспользоваться стандартным приемом – возвести отображение в квадрат с последующим усреднением, получая среднеквадратичный прирост координаты за шаг времени  $\Delta \langle x^2 \rangle = \langle \delta^2 \rangle$ .

Поскольку при анализе степенных зависимостей, выполняемом с точностью до коэффициента, можно не отличать умножение от интегрирования, отсюда получается уравнение (4) с  $D \sim \langle \delta^2 \rangle$ .

Существует целый ряд механизмов, приводящих к нетривиальной степенной зависимости  $\langle \delta^2 \rangle$  от переменных, каждый из которых пригодится при решении модели. Ниже описаны четыре таких механизма, рассматриваемые в предельно упрощенной постановке, достаточной для объяснения физического содержания происходящих процессов и получения для них математического описания. Заметим, что три первых механизма далее нужны лишь для физически содержательной интерпретации формул, математически выводимых из более простых посылок, тогда как четвертый механизм существенным образом учитывает особенности рассматриваемой модели.

1. Несимметричное блуждание, длина шага которого принимает дискретные значения  $\delta = \pm \delta_{\pm}$  с вероятностями  $p_{\pm} = \delta_{\mp} / (\delta_{+} + \delta_{-})$ , определяемыми условием несмещенности  $\langle \delta \rangle = 0$ . При этом  $p_{+} \delta_{+} = p_{-} \delta_{-}$ , откуда прямо следует  $\langle \delta^2 \rangle = p_{+} \delta_{+}^2 + p_{-} \delta_{-}^2 = \delta_{+} \delta_{-}$ .

Одна из возможных имплементаций этого механизма связана с соотношением параллельного и последовательного времен. Модель Осло является абелевой, т.е. результат развития лавины не зависит от порядка обработки неустойчивых ячеек (при условии, что с каждой из них связана своя последовательность псевдослучайных чисел, используемых для определения новых порогов устойчивости).

Правила модели определяют порядок обработки только в параллельном времени  $t$  (все неустойчивые ячейки обрабатываются одновременно). А для последовательного времени  $n$  правила уместно доопределить так, что для обработки выбирается самая левая из неустойчивых ячеек и доводится до состояния устойчивости. При этом с точки зрения общего развития лавины, измеряемого ходом параллельного времени  $t$  либо ростом



средних кратности опрокидывания  $m$  или активности  $a$  (см. определения (5) и (13) ниже), смещение точки обработки представляется *прыжком в будущее*, в котором в ячейку попало уже много песчинок, а все ее опрокидывания – постепенным *отступлением в прошлое*. При этом длина прыжка  $\delta_+$  связана со значениями других характеристик лавины, что ведет к нетривиальным степенным зависимостям, тогда как шаг отступления  $\delta_- = \text{const}$  не влияет на величину диффузионного коэффициента  $D \sim \delta_+$ .

2. Уравнение (4) возникает и для симметричных блужданий с постоянным шагом  $\delta_{\pm} = \text{const}$ , если событие блуждания случается на очередном шаге времени лишь с вероятностью  $1/D$ , а в противном случае координата остается неизменной.

Такой взгляд на блуждание соответствует ситуации, когда номер шага  $k$  представляет собой последовательное время  $n$ , пересчитывающее события, происходящие по всей системе, а блуждающая координата  $x$  учитывает лишь процессы, относящиеся лишь к какой-то одной части системы. Природа нетривиальных степенных зависимостей здесь заключена в способе, которым выделяется эта часть.

3. К аналогичному результату приводят условия, при которых координата  $x$  представляет собой сумму  $D$  независимых слагаемых, каждое из которых совершает свое собственное симметричное блуждание с постоянным шагом.

По сути, этот механизм обратен механизму 2, т.е. номер шага  $k$  представляет собой параллельное время (в его роли далее выступит средняя кратность опрокидывания  $m$ ), на каждый такт которого события происходят одновременно по всей системе, а блуждает их общий результат  $x$ . Здесь возникновение нетривиальных степенных зависимостей обуславливается обстоятельствами, разделяющими систему именно на такое число независимых частей.

4. Наконец, особое значение для решения модели имеет рассмотрение отрезка, разбитого на  $D$  частей. Несимметричная и симметричная составляющие блуждания их длин трактуются как два разных физических процесса, в рамках первого из которых длина отрезка считается фиксированной, а в рамках второго – части отрезка считаются независимыми.

1) Если длина отрезка неизменна, значительно удлинить его может лишь небольшое число его частей, и только за счет небольшого укорочения всех остальных. Для определенности положим, что удлиняется только одна часть с номером  $j$ , выбор которой случаен, а длину укорочения остальных будем считать равной и примем за единицу измерения. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_1 \sum_i x_i^2 &= (x_j + D - 1)^2 - x_j^2 + \sum_{i \neq j} (x_i - 1)^2 - x_i^2 = \\ &= D(D - 1) + 2\left((D - 1)x_j - \sum_{i \neq j} x_i\right) \end{aligned} ,$$

где ради простоты записи индекс теперь нумерует не шаги времени, а части отрезка. Поскольку все они равноправны, при усреднении по реализациям последняя скобка результата обращается в ноль.

2) Если доли удлинившихся и укоротившихся частей отрезка равны соответственно  $p_+$  и  $p_-$ , то

$$\Delta_2 \sum_i x_i^2 = \sum_i p_+(x_i + 1)^2 + p_-(x_i - 1)^2 - x_i^2 = 2(p_+ - p_-)D + D.$$

Поскольку это блуждание симметрично, при усреднении по реализациям первая скобка результата обращается в ноль.

Сложение обоих процессов дает  $\Delta \sum_i \langle x_i^2 \rangle = D^2$ , или  $\Delta \langle x^2 \rangle = D$ .

### Геометрическая половина решения

Первая времениподобная величина, необходимая для решения модели, – *средняя кратность опрокидывания*

$$m \sim n/r. \quad (5)$$

Кратности опрокидывания отдельных ячеек  $m_i$  примерно пропорциональны  $m$ . Их градиент определяет поток песчинок по решетке. Хотя он может достигать значительных величин, но от номера  $i$  зависит плавно. В самом деле, количество песчинок, находящихся в ячейке, варьируется в очень узком диапазоне, так что их приток в нее должен приблизительно балансироваться оттоком.

Кратность опрокидывания максимальна в глубине области лавины и минимальна по бокам. Поэтому в левой части области лавины песчинки переносятся преимущественно влево, а в правой – вправо. При этом по мере развития лавины и увеличения длины ее области максимум кратности сам удаляется от точки вброса, чем и обеспечивается общий перенос песка вправо при строгой симметрии правил на микроуровне. Такое нарушение симметрии обеспечивается прерыванием переноса влево за счет близости левого края решетки.

Каждое опрокидывание точки вброса не только приводит к потере системой одной песчинки, выпадающей через левый край, но и отправляет одну песчинку вправо. Вызванные ею дальнейшие опрокидывания, следуя традиции, будем называть *волной опрокидывания*. Чтобы по решетке распространились  $w$  волн, необходим соответствующий градиент кратности опрокидывания  $m$  на масштабе длины области лавины  $r$ :

$$w \sim m/r. \quad (6)$$

Если с помощью определения (5) исключить из формулы (6) длину  $r$ , получаем зависимость

$$m^2 \sim wn, \quad (7)$$

которую можно интерпретировать как уравнение аномальной диффузии (4), реализующейся по механизму 1. Здесь число волн опрокидывания  $w$  и последовательное время  $n$  играют роли соответственно длины скачка  $\delta_+$  и номера шага блуждания  $k$ . При инкременте числа опрокидываний  $n$  переход от одной ячейки к другой ведет к увеличению кратности  $m$  сразу на  $w$  – число дополнительных песчинок, которые несут по решетке волны опрокидывания. А дальнейшая обработка ячейки связана с постепенным уменьшением кратности.

Если теперь с помощью определения (5) исключить из формулы (6) кратность  $m$ , получаем зависимость

$$r^2 \sim n/w, \quad (8)$$

которую можно интерпретировать как уравнение аномальной диффузии (4), реализующейся по механизму 2. Здесь число опрокидываний  $n$  играет роль номера шага. При этом лишь одно опрокидывание из  $w$  вносит вклад в изменение  $r$ . В области лавины размещены  $w$  дополнительных песчинок, переносимых вправо волнами опрокидывания. Каждая из этих песчинок находится в некотором блоке ячеек характерной длины

$$b \sim r/w. \quad (9)$$

И только те опрокидывания, которые происходят в самом правом блоке, влияют на длину области лавины  $r$ .

Если, наконец, с помощью определения (9) исключить из формулы (6) число волн  $w$ , получаем зависимость

$$r^2 \sim bm, \quad (10)$$

которую можно интерпретировать как уравнение аномальной диффузии (4), реализующейся снова по механизму 1, но в более простой трактовке. Здесь кратность опрокидывания  $m$  играет роль номера шага, а размер блока  $b$  – его длины. Инкремент кратности приводит либо (при удачном стечении обстоятельств) к продвижению границы сразу на целый блок вправо, либо (при неудачном) – к небольшому, т.е. примерно постоянному, ее отступлению влево.

Сумма длин  $b$  всех  $w$  блоков равна медленно растущей длине области лавины  $r$ . При опрокидывании ячеек в среднем по разу тот блок, на который пришлась большая часть опрокидываний, удлиняется за счет некоторого укорочения остальных. Этот процесс может быть описан как аномальная диффузия, реализующаяся по механизму 4. Соответствующее уравнение (4) имеет вид

$$b^2 \sim wm. \quad (11)$$

Здесь кратность опрокидывания  $m$  по-прежнему играет роль номера шага, а номер волны  $w$  – роль числа частей, на которые разбита область лавины.

Определения (5) и (9) и уравнения (6) и (11) дают связь основных характеристик лавины

$$n^4 \sim r^9. \quad (12)$$

Из нее с помощью зависимости (3) определяем универсальный показатель  $\varepsilon = 5/4$ . Используя его и показатель (2), находим  $\alpha_R = 5/4$ . Откуда с учетом связи (12) получаем  $v_N = 9/4$  и  $\alpha_N = 5/9$ . Наконец, уравнение (8) позволяет вычислить  $v_w = 1/4$  и  $\alpha_w = 5$ .

### Динамическая половина решения

Показатели для длительности лавины пока остаются пока неизвестными. Чтобы найти их, введем представление об *очагах*, под которыми будем понимать протяженные фрагменты области лавины, разделенные участками с дефицитом песка. Можно считать, что происходящее в одном очаге практически не влияет происходящее в соседних, тогда как внутри очага нет преград для распространения активности.

Интегральной мерой *активности* служит число неустойчивых ячеек

$$a \sim n/t. \quad (13)$$

Если всего имеется  $h$  очагов, то их средняя протяженность

$$c = r/h \quad (14)$$

опосредует связь между условным временем  $a$ , ход которого измеряется инкрементом активности, и параллельным временем  $t$

$$a \sim t/c. \quad (15)$$

В самом деле, активность систематически увеличивается в результате развития лавины, связанного с ростом ее области, который, в свою очередь, обуславливается сдвиганием границ очагов (сама граница области лавины является одновременно и границей самого правого очага). Но эти участки дефицитны по песку, поэтому сдвигаться они могут только под общим воздействием всех неустойчивых ячеек очага. Таким образом, каждый инкремент активности  $a$  требует порядка  $c$  шагов параллельного времени  $t$ , в течение которых песчинки могут пройти от одного края очага до другого.

Если с помощью определения (13) исключить из формулы (15) активность  $a$ , получаем зависимость

$$t^2 \sim cn, \quad (16)$$

которую можно интерпретировать как уравнение аномальной диффузии (4), реализующейся по механизму 1. Здесь длина очага  $c$  и последовательное время  $n$  играют роли соответственно длины скачка  $\delta_+$  и номера шага блуждания  $k$ . При инкременте числа опрокидываний  $n$  переход от одной ячейки к другой ведет к увеличению параллельного времени  $t$  сразу на  $c$  шагов, ушедших на перенос песчинок от других ячеек очага. А дальнейшая обработка этой ячейки связана с постепенным возвратом к предыдущим шагам параллельного времени. Формула (16) является полным аналогом формулы (7).

Если теперь с помощью определения (13) исключить из формулы (15) время  $t$ , получаем зависимость

$$a^2 \sim n/c, \quad (17)$$

которую можно интерпретировать как уравнение аномальной диффузии (4), реализующейся по механизму 2. Здесь число опрокидываний  $n$  играет роль номера шага. При этом лишь одно опрокидывание из  $c$  вносит вклад в изменение  $a$ . Ведь на активности систематически сказываются не все опрокидывания, а лишь те, которые происходят у границ очагов и могут изменять их длины. Формула (17) является полным аналогом формулы (8).

Если, наконец, с помощью определений (5) и (14) исключить из зависимости (17) число опрокидываний  $n$ , она перейдет в зависимость

$$a^2 \sim hm, \quad (18)$$

которую можно интерпретировать как уравнение аномальной диффузии (4), реализующейся по механизму 3. При инкременте кратности опрокидывания  $m$  в каждом очаге число неустойчивых ячеек совершает симметричное случайное блуждание с постоянным шагом. А поскольку очаги независимы, их вклады суммируются. Формула (18) очень похожа на формулу (10), но в действительности не имеет с ней ничего общего не только по механизму, но и по смыслу. Если формула (10) описывает блуждание пространственного масштаба  $r$ , то формула (18) – времениподобной переменной  $a$ .

Сумма длин  $c$  всех  $h$  очагов равна медленно растущей длине области лавины  $r$ . Инкремент  $a$ , т.е. появление дополнительной неустойчивой ячейки, раздвигает границы того очага, в котором это произошло, за счет некоторого сжатия остальных. Этот процесс может быть описан как аномальная диффузия, реализующаяся по механизму 4. Соответствующее уравнение (4) имеет вид

$$c^2 \sim ha. \quad (19)$$

Здесь активность  $a$  играет роль номера шага  $k$ , а число очагов  $h$  – роль числа частей, на которые разбита область лавины. Природа формул (19) и (11) полностью идентична, а их записи – аналогичны в том смысле,

что каждая из формул связывает введенные в соответствующих частях решения пространственные масштабы и времениподобные переменные.

Сочетание определений (13) и (14) и уравнений (15) и (19) приводит к формуле  $t^7 \sim n^4 r$ , а она через связь (12) дает недостающую часть решения

$$t^7 \sim r^{10}, \quad (20)$$

с помощью которой находятся показатели  $\nu_T = 10/7$  и  $\alpha_T = 7/8$ .

### Обсуждение структуры решения

Для решения модели кроме определений (5), (9) и (13), (14), дополняющих набор основных характеристик, были использованы 4 физически содержательные формулы, распадающиеся на две группы разной природы. Формулы (6) и (15) имеют очень простую запись и дают понимание свойств используемых величин, неочевидные на уровне их определений.

Из этих формул легко выводятся уравнения (7), (8), (10) и (16), (17), (18), которые были проинтерпретированы как аномальная диффузия. Выбор того, чтобы представить именно эти уравнения как математические следствия, обусловлен исключительно их более сложной записью по сравнению с формулами (6) и (15), каждая из которых сама могла бы рассматриваться и как следствие любого из перечисленных уравнений в своей половине решения.

Формулы (11) и (19) устроены совершенно иначе. Они описывают нетривиальные физические процессы, предложить для которых простые эквивалентные выражения не удастся. Механизм 4 аномальной диффузии, приводящий к этим уравнениям, существенным образом учитывает одномерный характер модели Осло, в которой песчинки не могут обойти какие-то ячейки решетки сбоку и вынуждены проходить их одну за другой.

Здесь невольно напрашивается забавная с философской точки зрения аналогия с уравнениями Максвелла. Одна их пара просто уточняет смысл и природу используемых понятий, констатируя, что заряды являются источником индукции. И лишь другая пара уравнений описывает электромагнитную динамику, указывая, что изменение индукции и токи порождают вихревые поля.

Еще одно обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание, связано с тем, что модели кучи песка обычно предполагают не краевой вброс инициирующих песчинок, а объемный (случайно по всей решетке или вблизи ее центра). Как показано в работе [15], локализация вброса не влияет на скейлинговые показатели  $\nu_X$ , но влияет на универсальный  $\varepsilon$  и характеристические  $\alpha_X$  показатели. В самом деле, масштабирование с размером решетки  $L$  крупного события  $X_1$ , для которого она мала, не должно зависеть от способа инициации. Но от него не может не зависеть масштабирование среднего события  $\langle X \rangle$ , а также вероятности для события не поместиться в решетку  $\text{Prob}\{X > X_1\}$ .

При объемном вбросе в моделях с симметричными (хотя бы в среднем) правилами передачи песчинок  $\langle N \rangle \sim L^2$  [3,6]. Этого достаточно, чтобы без труда рассчитать для варианта модели Осло с объемным вбросом значения универсального показателя  $\varepsilon = 1/4$  и характеристических показателей  $\alpha_R = 1/4$ ,  $\alpha_N = 1/9$  и  $\alpha_T = 7/40$ , подтверждаемые компьютерным экспериментом [17,18]. Куда труднее применить к модифицированной модели тот ход рассуждений, который привел к решению ее канонической версии. В нем важную роль играет число волн опрокидывания  $W$ , при объемном вбросе утрачивающее ясный физический смысл и грозящее стать еще одной дополнительной переменной.

### Результаты компьютерного эксперимента

Запись (1) позволяет отстраиваться от конечности размера системы при анализе результатов компьютерного эксперимента. Для этого рассматриваются зависимости  $X^{1+\alpha_X} \cdot u_X(X)$  от  $X/L^{\nu_X}$ , полученные при различных размерах решетки  $L$ . При правильно определенных показателях  $\alpha_X$  и  $\nu_X$  графики, построенные таким образом, выполаживаются в их средней части, относящейся к области промежуточной асимптотики степенного вида, и совмещаются в их правой части, относящейся к области нарушения степенного вида плотности.

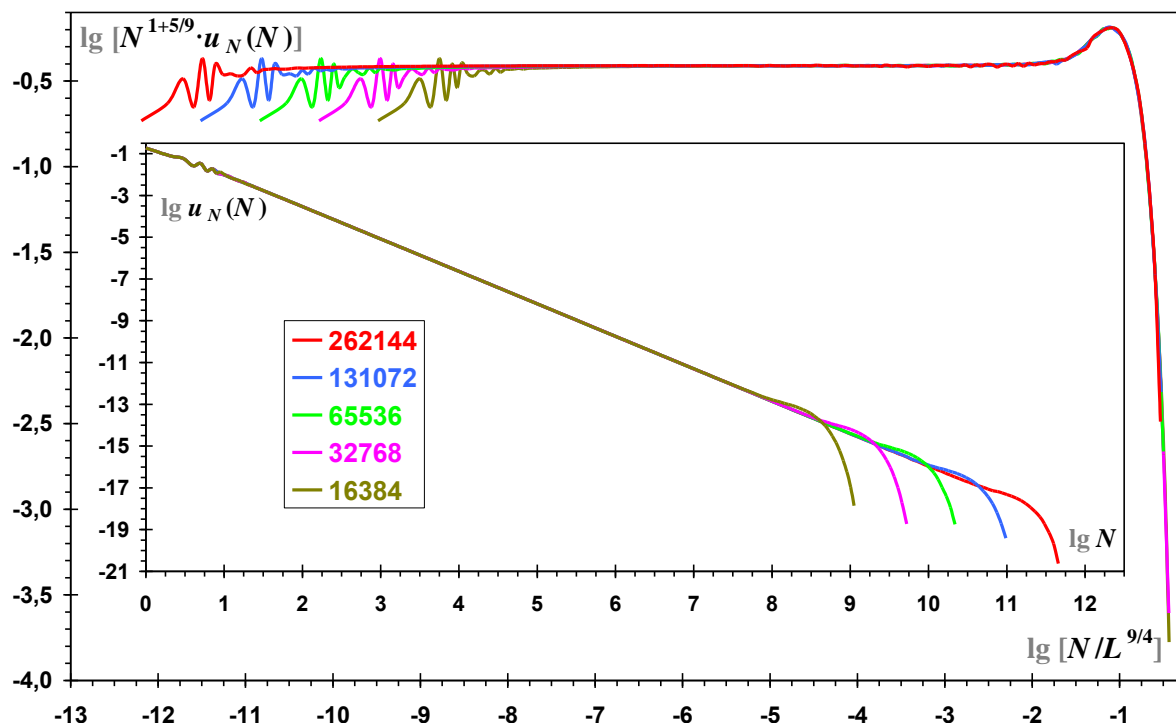


Рис. 1. Распределение лавин по размеру

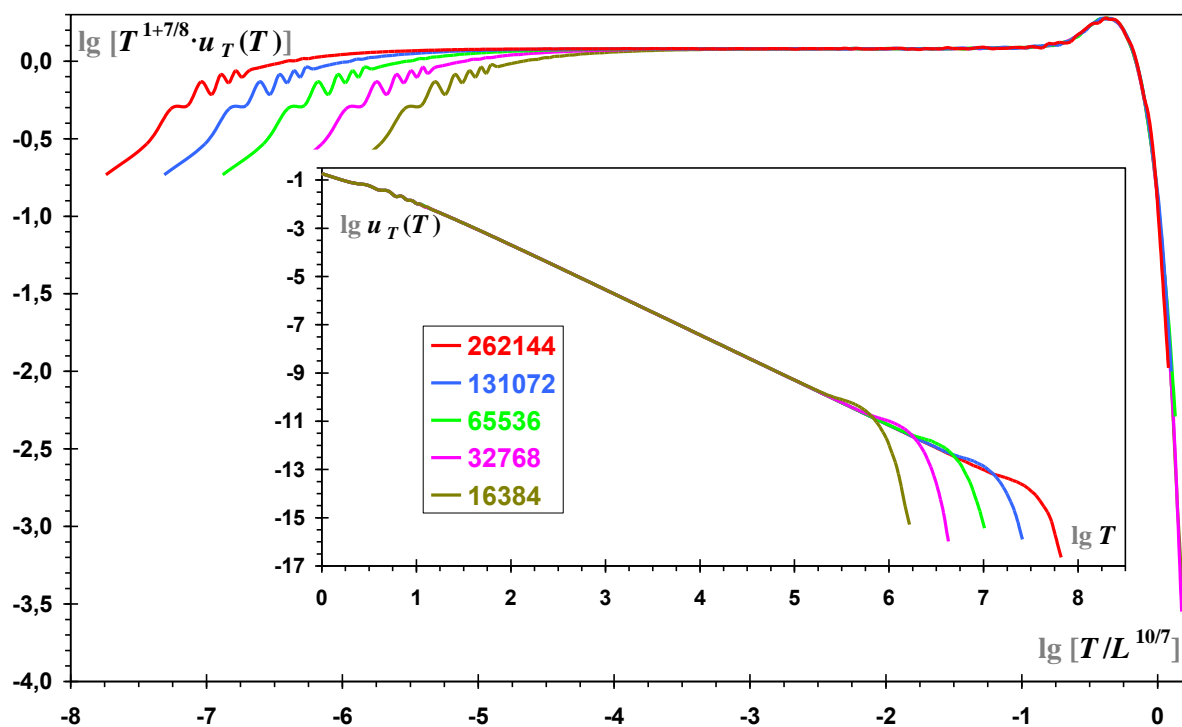


Рис. 2. Распределение лавин по длительности

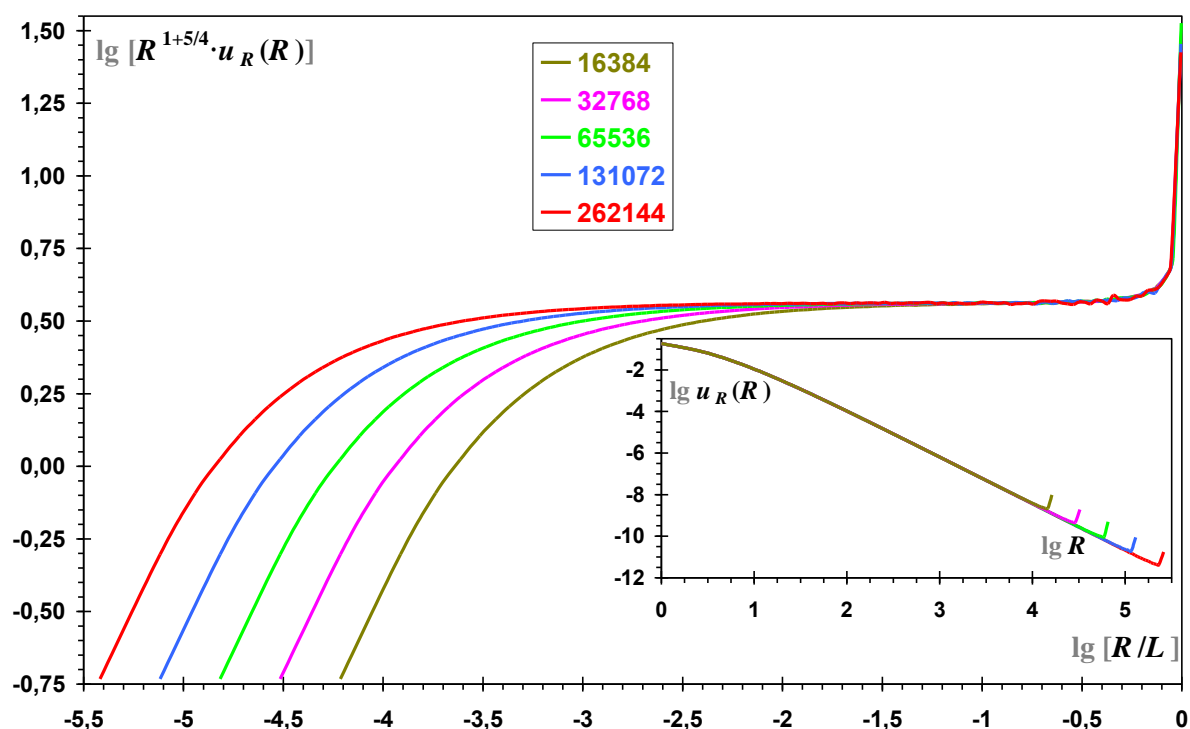


Рис. 3. Распределение лавин по длине их области

На рис. 1, 2, 3, 4 и представлены распределения лавин соответственно по размеру  $N$ , по длительности  $T$ , по длине их области  $R$  и по числу волн опрокидывания  $W$ . Все рисунки однотипны. Графики построены для



решеток различного размера  $L$  в двойном логарифмическом масштабе, в котором степенная зависимость представляется прямой линией. На врезках использованы исходные эмпирические зависимости, а на основных картинках выполнен их конечноразмерный скейлинг.

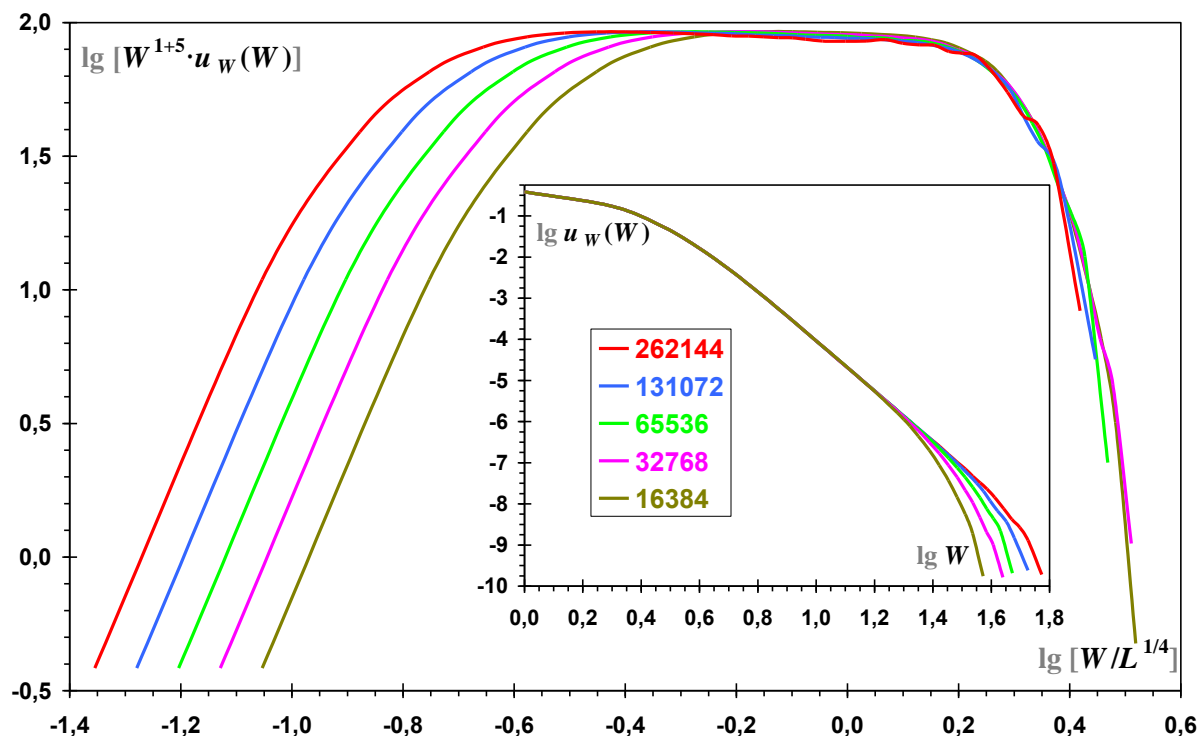


Рис. 4. Распределение лавин по числу волн опрокидывания

В ряду рисунков, упорядоченных по величине характеристического показателя  $\alpha_N < \alpha_T < \alpha_R \ll \alpha_W$ , можно наблюдать сокращение области промежуточной асимптотики, в которой плотность вероятности имеет степенной вид. На рис. 1 общий для всех графиков горизонтальный участок охватывает более половины ширины рисунка, на рис. 2 – около половины, на рис. 3 – уже менее половины, а на рис. 4 область промежуточной асимптотики оказывается настолько узка, что статистики объемом в десятки миллиардов лавин на каждую длину решетки уже недостаточно для визуального удовлетворительного выполаживания и совмещения графиков.

На рис. 3 в левой части графиков следует обратить внимание на нестепенной участок шириной более двух порядков, протяженностью которого и определяется тот минимальный размер системы, позволяющий избежать краевых эффектов, который был упомянут во введении.

Для рис. 4 скейлинговый показатель столь мал, что все возможные числа волн опрокидывания по многу раз попадают в выборку. Из-за этого графики на врезке обрываются в правой части на одной и той же высоте. А значения прочих характеристик, порождаемые сверхкрупными лавинами, оказываются спорадическими, что при равном объеме статистики приво-

дит к падению минимальной регистрируемой вероятности по мере увеличения длины решетки, как можно видеть на рис. 1, 2, 3

## Литература

1. Подлазов А.В. Самоорганизованная критичность как образ горения нелинейной среды на примере модели Манны // Горизонты синергетики: Структуры, хаос, режимы с обострением. – М.: Ленанд, 2019. С.127-144. – (Синергетика: от прошлого к будущему; №89)
2. Бак П. Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности. – М.: URSS, 2015. – 276 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему. №66)
3. Подлазов А.В. Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности // Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. – М.: УРСС, 2005. С.404-426.
4. Режимы с обострением: Эволюция идеи / Ред. Г.Г.Малинецкий / 2-е изд., испр. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.
5. *Pruessner G.* Self-organised criticality: Theory, models and characterisation. – Cambridge University Press, 2012.
6. Подлазов А.В. Решение самоорганизованно-критической модели Манны для размерностей пространства 2–4 // [ЖЭТФ 161\(3\), 414-429 \(2022\)](#).
7. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena// *Phys. Rev. Lett.* 63(16), 1659-1662 (1989).
8. *Kitavov D.V., Lübeck S., Grassberger P., Priezzhev V.B.* Scaling of waves in the Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model // *Phys. Rev. E* 61(1), 81-92 (2000).
9. *Kloster M., Maslov S., Tang C.* Exact solution of stochastic directed sandpile model// *Phys. Rev. E* 63, 026111 (2001).
10. Подлазов А.В. Классические двумерные модели кучи песка // [Изв. вузов: ПНД 24\(4\), 39-70 \(2016\)](#).
11. *Frette V.* Sandpile models with dynamically varying critical slopes // [Phys. Rev. Lett.](#) 70(18), 2762-2765 (1993).
12. *Christensen K., Corral Á., Frette V., Feder J., Jøssang T.* Tracer dispersion in a self-organized critical system // [Phys. Rev. Lett.](#) 77(1), 107-110 (1996).
13. *Frette V., Christensen K., Malthé-Sørenssen A., Feder J., Jøssang T., Meakin P.* Avalanche dynamics in a pile of rice // [Nature](#) 379(6560), 49-52 (1996).
14. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality // [J. Phys. A: Math. Gen.](#) 24(7), L363-L639 (1991).
15. *Nakanishi H., Sneppen K.* Universal versus drive-dependent exponents for sandpile models // [Phys. Rev. E](#) 55(4), 4012-4016 (1997).
16. *Pan G.-J., Zhang D.-M., Sun H.-Z., Yin Y.-P.* Universality class in Abelian sandpile models with stochastic toppling rules // [Comm. Theor. Phys.](#) 44(3), 483-486 (2005).
17. *Christensen K.* On self-organised criticality in one dimension // [Physica A](#) 340(4), 527-534 (2004).
18. *Grassberger P., Dhar D., Mohanty P.K.* Oslo model, hyperuniformity, and the quenched Edwards–Wilkinson model // [Phys. Rev. E](#) 94, 042314 (2016).