



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

К 95-летию С.П.Курдюмова

К 95-летию
со дня рождения
С.П. Курдюмова



Горизонты
математического моделирования
и теория самоорганизации

М.Е. Степанов

**Моделирование конкуренции трех
пространственно-распределенных
актеров при помощи клеточного
автомата**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Степанов М.Е. Моделирование конкуренции трех пространственно-распределенных акторов при помощи клеточного автомата // Горизонты математического моделирования и теория самоорганизации. К 95-летию со дня рождения С.П. Курдюмова. — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2024. — С. 121-127.

<https://doi.org/10.20948/k95-6>

<https://keldysh.ru/e-biblio/k95/6.pdf>

Моделирование конкуренции трех пространственно-распределенных акторов при помощи клеточного автомата

М.Е. Степанцов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Аннотация. В статье рассмотрена конкуренция между тремя пространственно-распределенными акторами, примером которых могут быть условные информации, при том, что их относительные силы образуют цикл. Моделирование осуществляется при помощи стохастического клеточного автомата. На основе предложенной модели построена имитационная система. Вычислительные эксперименты, проведенные с ее помощью, показывают, что наряду со стационарным и колебательным режимами, которые наблюдаются и при использовании непрерывной модели, существуют также хаотический режим и режим формирования устойчивых динамических структур. Последнее явление возникает при взаимодействии всех трех акторов в одной локации. Предложен числовой критерий, позволяющий установить наличие устойчивых динамических структур.

Ключевые слова: конкуренция условных информации, дискретная модель, клеточный автомат, имитационное моделирование

Modeling of competition between three spatially distributed actors using a cellular automaton

M. E. Stepantsov

RAS Keldysh Institute of Applied Mathematics

Abstract. This paper considers competition between three spatially distributed actors, such as conditional informations, when their relative strengths form a cycle. The model and corresponding simulation system are based on a stochastic cellular automaton. Computational experiments show that, along with stationary and oscillatory modes, observed when using a continuous model, there also exist chaotic and stable dynamic structures modes. The last phenomenon occurs when all three actors interact in one location. A numerical criterion for stable dynamic structures is proposed.

Keywords: competition of conditional informations, discrete model, cellular automaton, simulation

Задача о конкуренции акторов

Задача конкуренции двух акторов хорошо изучена при помощи математических моделей типа «хищник–жертва» [1]. При увеличении количества акторов до трех аналитическое решение классической системы дифференциальных уравнений становится невозможно получить (что очень напоминает ситуацию с задачей трех тел в механике), однако численные методы позволяют получить определенные результаты. Среди них утверждение, что помимо стационарных решений при определенных начальных условиях и параметрах системы появляются решения с непериодическим циклическим поведением [2].

При этом следует отметить, что конкретная природа акторов не очень важна для исследования этих моделей. Достаточно общего утверждения, что это субъекты, борющиеся за увеличение какой-либо своей аддитивной характеристики при условии ограниченности возможностей этого (в отсутствие ограничений задача теряет смысл). В качестве примера можно указать возможность использования подобных моделей для исследования противоборства условных информаций по Д.С. Чернавскому [3].

При этом в упомянутых непрерывных моделях не учитывается пространственное распределение акторов, то есть они взаимодействуют как точечные объекты. В то же время при конкуренции условных информаций пространственное распределение акторов играет существенную роль. Разумеется, под «пространственным» распределением имеется в виду двумерное, соответствующее распространенности условных информаций на той или иной территории, как это было сделано, например, в модели диффузии инноваций (Хагерстранд, [5]). Такое распределение может быть учтено и в рамках непрерывной модели с использованием дифференциальных уравнений в частных производных, как, например, в случае математического моделирования исторических процессов А.С. Малковым [6]. Но в данной работе предлагается метод моделирования конкуренции акторов при помощи гораздо более простой для проведения вычислительных экспериментов дискретной модели на основе клеточного автомата.

Детерминированная модель

Начнем с рассмотрения простейшего случая конкуренции трёх акторов, связанных полным бинарным отношением «сильнее», означающим, что более сильный актор однозначно вытесняет более слабый, и это отношение содержит цикл длины 3 (случай, когда оно является линейным порядком, очевидно, не представляет собой никакого интереса, поскольку самый сильный из акторов просто одержит однозначную победу).

В качестве модели такой конкуренции предлагается клеточный автомат на ортогональной сетке с окрестностью фон Неймана (4 соседа для каждой клетки) [7]. Состояние клетки $s \in \{1; 2; 3\}$ соответствует преобладанию в данной локации первого, второго или третьего акторов соответ-

ственно. Бинарное отношение «сильнее» на множестве S задается матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Правила данного клеточного автомата можно задать словесно в виде «копируй с более сильного соседа», а в виде алгоритма они выглядят следующим образом:

IfCenter=1 And (North=2 Or West=2 Or East=2 Or South=2) Then Center'=2
IfCenter=2 And (North=3 Or West=3 Or East=3 Or South=3) Then Center'=3
IfCenter=3 And (North=1 Or West=1 Or East=1 Or South=1) Then Center'=1

Здесь *Center*, *North*, *West*, *East*, *South* – традиционные обозначения состояния самой клетки и четырех ее соседей, а *Center'* означает состояние клетки на следующем шаге по времени.

На основе этого автомата была построена имитационная система, моделирующая взаимодействие трех акторов. Использовалось поле размером 20×20, в качестве граничных условий было зафиксировано начальное состояние граничных клеток. При помощи данной системы при использовании различных начальных пространственных распределений акторов были повторены результаты, полученные в [4], а именно: асимптотическое стремление распространенности двух акторов к нулю (абсолютная победа третьего) и колебательные процессы (рис. 1)

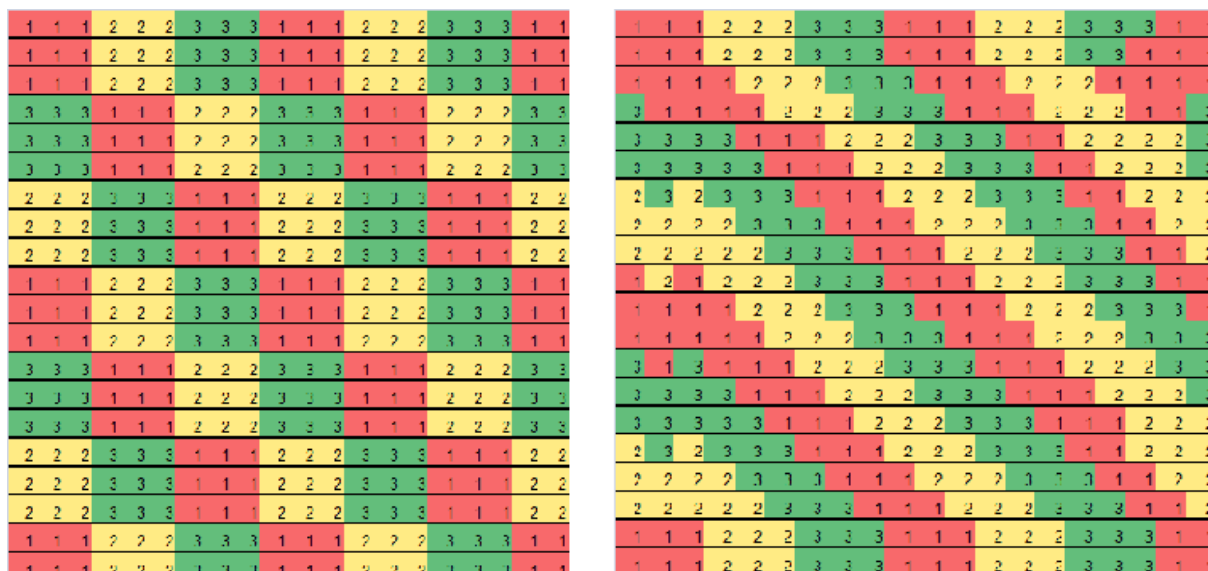


Рис. 1. Начальное распределение состояний клеток и установившийся колебательный режим

Однако помимо этого при других начальных распределениях акторов в дискретной модели возникают другие режимы, не обнаруженные при исследовании классической модели. В частности, система переходит в хаотический режим, причем даже при использовании в качестве начального распределения упорядоченной структуры. А при наличии на достаточно большом пространстве только одной локации, где встречаются все три актора, возникают устойчивые динамические структуры, напоминающие спирали (рис. 2).

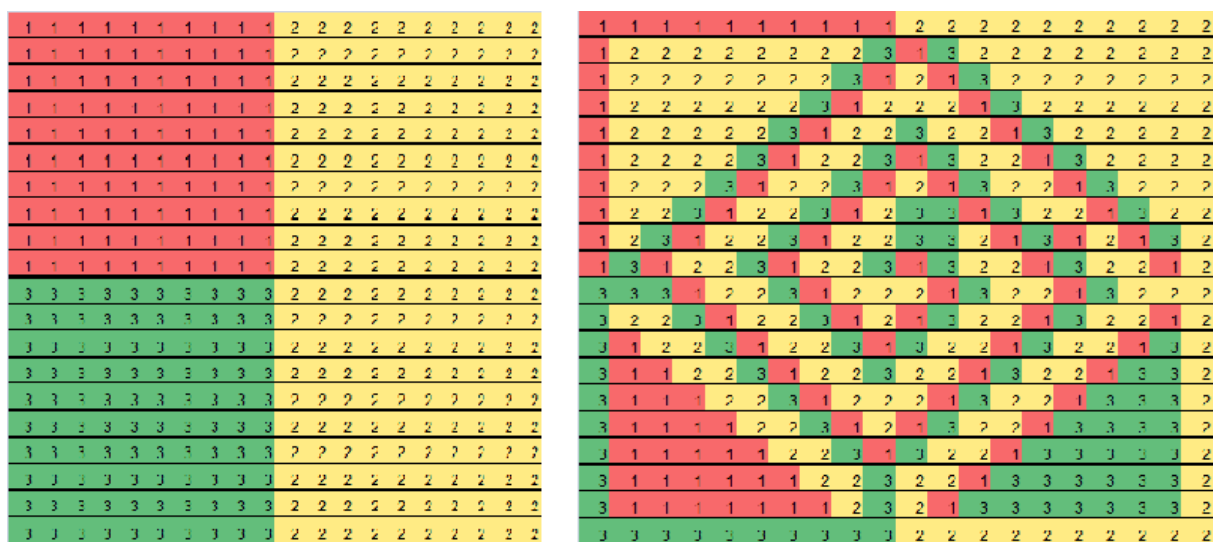


Рис. 2. Начальное распределение состояний клеток и возникшие динамические структуры.

Стохастическая модель

Для моделирования конкуренции акторов с различными значениями относительных сил может быть использован стохастический клеточный автомат, в котором переход между состояниями клетки осуществляется с некоторыми заданными вероятностями, которые и имеют смысл силы того актора, в состояние которого переходит клетка.

Таким образом, в этой версии модели копирование более сильного актора становится случайным событием, происходящим с вероятностями p_{21} , p_{32} и p_{13} соответственно. Новый алгоритм, задающий правила автомата, будет иметь вид:

If Center=1 And (North=2 Or West=2 Or East=2 Or South=2) And $r < p_{21}$ Then Center'=2
 If Center=2 And (North=3 Or West=3 Or East=3 Or South=3) And $r < p_{32}$ Then Center'=3
 If Center=3 And (North=1 Or West=1 Or East=1 Or South=1) And $r < p_{13}$ Then Center'=1

В этом случае при моделировании динамики системы при тех же начальных распределениях акторов по полю клеточного автомата структуры, подобные изображённым на рисунках 1 и 2, где их можно чётко уви-

деть, сохраняются лишь при $p_{ij} \gtrsim 0,98$. Хаотический режим, естественно, проявляет себя в явном виде и в случае стохастического автомата.

Между тем есть основания полагать, что и в таких моделях должны наблюдаться колебательные процессы и формирование устойчивых динамических структур. Для отслеживания этих явлений требуется ввести количественный показатель упорядоченности распределения акторов по полю клеточного автомата.

Критерий наличия периодических структур

Для того, чтобы количественно охарактеризовать возникновение структур, предлагается рассмотреть автокорреляционную функцию состояний клеток поля клеточного автомата.

$$A(u, v) = \frac{1}{400} \sum_{\substack{x=0 \\ y=0}}^{20} e^{\frac{2\pi i(S(x+u, y+v) - S(x, y))}{3}}$$

В качестве характеристики наличия периодических структур рассмотрим значение $A^* = \max_{u+v \neq 0} A(u, v)$, где значение функции $A(0,0) = 1$ из рассмотрения исключено.

Результаты вычислений значений A^* для трех режимов детерминированной модели представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения A^* для случаев колебательного, хаотического режима и динамических структур

Режим	Начальное распределение	Установившийся режим
Колебательный	0,85	0,81
Хаотический	0,85	0,16
Динамических структур	0,92	0,44

В начальных состояниях, заданных в каждом из случаев правильными структурами прямоугольной формы, значение максимума автокорреляционной функции, естественно, высоко. Периодические структуры характеризуются почти таким же высоким показателем автокорреляции, а спиралеподобные динамические структуры значительно уступают им, однако и в этом случае A^* заметно выше, чем при хаосе.

Значения A^* , полученные для детерминированной модели можно использовать как реперные точки при исследовании динамики стохастического автомата.

Результаты моделирования при помощи стохастического автомата и обсуждение предложенных моделей

На рис. 3 приведена типичная зависимость критерия A^* от времени при моделировании системы с начальными условиями, соответствующими рис. 2, но теперь для стохастического автомата с $p_{21} = 0,5$, $p_{32} = 0,6$ и $p_{13} = 0,4$. Величина A^* убывает со временем, однако в течение 20 шагов остается значительно выше как уровня 0,16, характерного для хаотической динамики системы, так и уровня 0,44, соответствующего динамическим структурам в случае детерминированной модели. Поскольку начальная упорядоченная структура за это время разрушилась, как и в случае детерминированного автомата, здесь можно сделать вывод о сохранении в течение этого времени динамических структур.

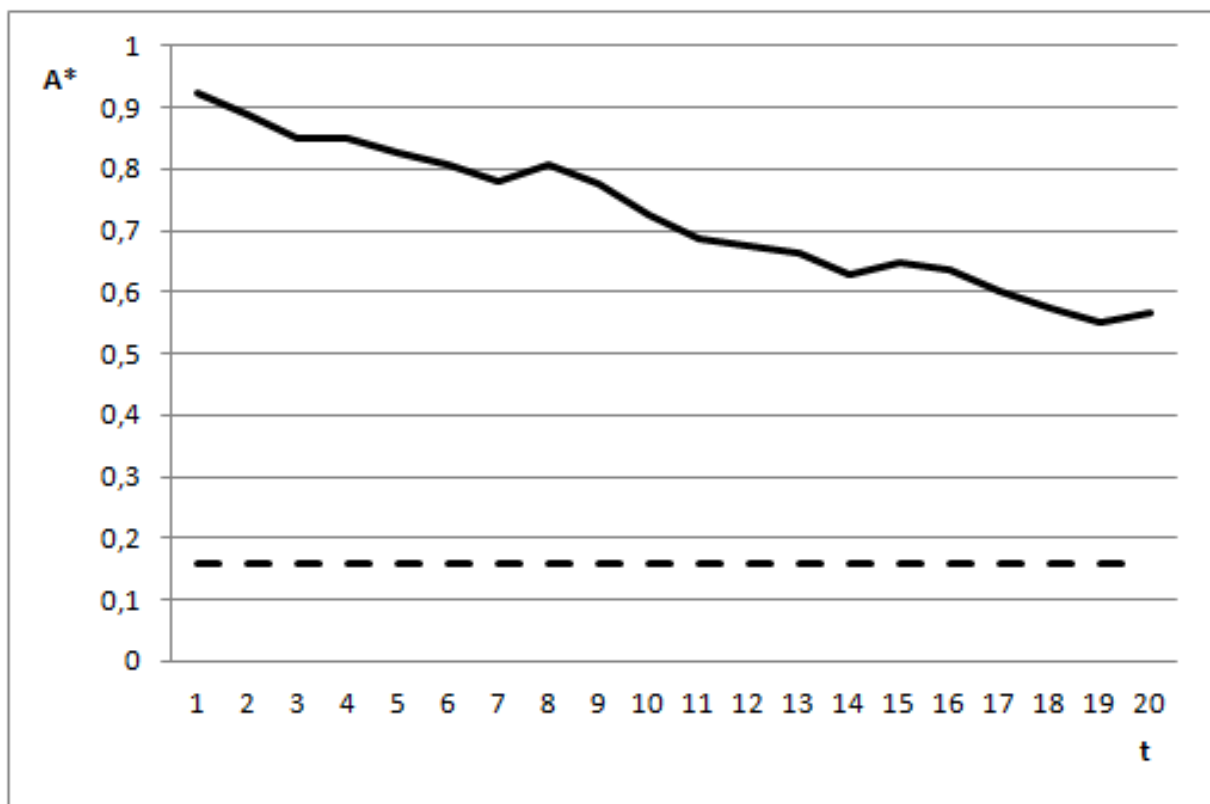


Рис. 3. Динамика критерия A^* , соответствующая формированию спиралевидных структур при моделировании с использованием стохастического клеточного автомата. Пунктиром показано значение критерия для хаотического режима

Таким образом предложенная модель, в отличие от непрерывных аналогов, позволяет учитывать пространственное распределение противоборствующих акторов.

Помимо наблюдавшегося на непрерывных моделях выхода на стационар (окончательной победы одного из акторов) и колебательного режима

(поочередного доминирования акторов) предложенная модель может в зависимости от начальных условий находиться в режимах хаоса и образования динамических структур, не наблюдавшихся в непрерывных моделях.

Характеристики режимов, возникающих в стохастическом варианте модели, могут быть выявлены при помощи критерия, представляющего собой максимальное значение автокорреляционной функции состояний клеток поля клеточного автомата.

Предложенная модель не привязана к конкретной природе акторов, поэтому может при условии необходимых модификаций использоваться для решения широкого круга задач, связанных с конкуренцией нескольких сил.

Литература

1. *Lotka A.J.* Elements of physical biology. Williams and Wilkins, 1925.
2. *May R.M., Leonard W.J.* Nonlinear aspects of competition between three species // *J. Appl. Math.*, , 1975, Vol. 29, No. 2. P.243-253.
3. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация. – М.: Наука, 2001.
4. *Малков С.Ю., Кирилюк И.Л.* Базовая модель социальных взаимодействий // Анализ и моделирование мировой и страновой динамики: методология и базовые модели. – М.: Учитель, 2015. С.78-93.
5. *Haegerstrand T.* Innovation diffusion as a spatial process. Lund, CWK Gleerup, 1953.
6. *Малков А.С.* О математическом моделировании товаропотоков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005, №11.
7. *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. – М: Мир, 1991.