

А.В. Колесниченко

**Некоторые проблемы
конструирования
космических сплошных
сред**

**Моделирование аккреционных
протопланетных дисков**

**ИПМ им. М.В. Келдыша
Москва — 2017**

УДК 52+51

ББК 22.253.3. 22.317 22.318 24.54. 26.51

К 60

Колесниченко Александр Владимирович

Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред. Моделирование аккреционных протопланетных дисков — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. — 372 с.

Монография посвящена разработке континуальных моделей турбулентных космических сред, лежащих в основе постановок и численных расчётов задач образования, пространственной структуры и эволюции различных астрофизических объектов (в частности, аккреционных протопланетных дисков). Целью исследования является феноменологическое конструирование сред с усложнёнными физико-химическими характеристиками, при описании которых следует учитывать сжимаемость потока, переменность теплофизических свойств, наличие процессов тепло- и массопереноса, химических реакций, фазовых переходов и излучения, а также воздействие гравитационных и электромагнитных сил. Проблема возникновения и эволюции когерентных вихревых образований в турбулентных течениях рассматривается, исходя из анализа соотношения порядка и хаоса в открытых диссипативных системах, с позиций стохастической теории и нелинейной термодинамики необратимых процессов. Это позволяет значительно расширить возможности численного моделирования разнообразных физических явлений в таких сложных космических средах, какими являются газопылевые аккреционные диски, образующиеся у звёзд различных классов при их дифференциальном вращении вокруг центра тяжести, исследовать их структуру, физико-химические и гидродинамические свойства и временную эволюцию.

Изложенный материал представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических и других естественно-научных и инженерных специальностей.

Рецензент: академик РАН А.М. Липанов.

Электронная версия книги в формате PDF доступна по адресу
<http://keldysh.u/e-biblio/kolesn>

ISBN 978-5-98354-032-3

© А.В. Колесниченко, 2017

© ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017

Оглавление

Предисловие научного редактора.....	5
Предисловие	7
Глава 1. Основы механики турбулентной газопылевой среды для аккреционного протопланетного диска.....	15
Введение.....	15
1. Теоретические предпосылки к моделированию эволюции аккреционного турбулентного диска	23
2. Уравнения механики гетерогенных сред для моделирования допланетного газопылевого облака.....	26
3. Уравнения гетерогенной механики для описания турбулентного газопылевого диска.....	62
4. Стационарные движения в турбулентном газопылевом субдиске ...	103
Заключение	117
Литература	119
Глава 2. Термодинамическое конструирование модели МГД турбулентности электропроводящей газовой среды	126
Введение.....	126
1. Гидродинамические уравнения сжимаемой плазмы	127
2. Осреднённые уравнения турбулентного движения в одножидкостном МГД-приближении	140
3. Термодинамический вывод определяющих соотношений для турбулентных потоков в электропроводящей среде	154
Заключение	169
Литература	170
Глава 3. К моделированию сжимаемой МГД-турбулентности аккреционного протопланетного диска	172
Введение.....	172
1. Осреднённые уравнения турбулентного движения проводящей среды.....	175
2. МГД-уравнения для аккреционного диска.....	189
3. Модель тонкого протопланетного диска	199
Заключение	214
Литература	215
Глава 4. Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров в протопланетном облаке	219
Введение.....	219
1. Характер генерации фрактальных пылевых кластеров в газопылевом диске	225

2. Модель образования и динамики пылевых фрактальных кластеров: базовые уравнения.....	230
3. Процессы кластеризации во фрактальной среде.....	243
4. Стационарная модель эволюции протопланетного диска	250
Заключение	255
Литература	258
Глава 5. К теории инверсного энергетического каскада в спиральной турбулентности немагнитного астрофизического диска.....	264
Введение.....	264
1. Осреднённые гидродинамические уравнения для описания астрофизической турбулентности	269
2. Зеркально-несимметричная турбулентность в диске	276
3. Спектральные законы в спиральной турбулентности	284
Заключение	290
Литература	292
Глава 6. Синергетический подход к конструированию модели структурированной турбулентности.....	299
Введение.....	299
1. Феноменологическое конструирование модели стационарно-неравновесной турбулентности	303
2. Термодинамический вывод уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова.....	313
3. Примеры уравнений ФПК, описывающих эволюцию пульсирующих характеристик турбулентного хаоса	332
Заключение	340
Литература	341
Глава 7. Модификация в рамках неаддитивной термодинамики критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков.....	343
1. Элементы формализма деформированной статистики Курадо- Тсаллиса	346
2. Исходные уравнения q -гидродинамики	355
3. Исследование устойчивости самогравитирующих дисковых систем.....	359
Заключение	367
Литература	368
Заключение.....	371

Предисловие научного редактора

Турбулентный режим возможен практически во всех течениях ньютоновских жидкостей и газов независимо от того, происходят они в современных технических системах или в окружающей природе и в космосе. Поэтому в мировой литературе были затрачены большие усилия, чтобы попытаться понять суть этого очень сложного гидродинамического явления, разработать эмпирические и математические модели для его описания и надёжного расчёта характеристик турбулентных течений. В представленной монографии автор решает сложную и актуальную проблему конструирования континуальных моделей развитой турбулентности в многокомпонентных смесях реагирующих газов, в электропроводных и гетерогенных газопылевых средах на основе методов необратимой термодинамики. Её целью является моделирование турбулентности в многокомпонентной среде с усложнёнными физико-химическими характеристиками, при описании которых следует учитывать сжимаемость потока, переменность теплофизических свойств, наличие процессов тепло- и массопереноса, химических реакций, фазовых переходов и излучения, а также воздействие гравитационных и электромагнитных сил.

Занимаясь долгие годы проблемами турбулентного движения в верхних слоях атмосферы Земли, автор пришёл к убеждению о необходимости обобщения накопившихся подходов к феноменологическому конструированию моделей турбулентности в газожидкостных средах с усложнёнными физико-химическими характеристиками. Сказанное относится не только к изучению земной атмосферы, но к многочисленным естественнонаучным и техническим приложениям, среди которых достаточно назвать развитие научных представлений об эволюции планет и малых тел Солнечной системы, о формировании протопланетных аккреционных дисков, о протекании процессов турбулентного тепло- и массопереноса в создаваемых космических аппаратах и энергетических установках нового поколения. Наряду с этим, в монографии обсуждается актуальная теория самоорганизации при необратимых процессах и проблема структурообразования в развитых турбулентных течениях, что служит отражением общей концепции стохастической динамики, связанной с возникновением упорядоченных структур при значительном отклонении от равновесия. Проблема возникновения и эволюции когерентных вихревых образований в турбулентных течениях рассматривается, исходя из анализа соотношения порядка и хаоса в открытых диссипативных системах с позиций стохастической нелинейной термодинамики необратимых процессов.

Таким образом, можно говорить о том, что в монографии рассмотрен целый ряд сложных современных проблем геофизики и космогонии на ос-

нове методов механики сплошных сред, исходя из предложенного автором стохастико-термодинамического подхода к конструированию полуэмпирических моделей развитой турбулентности в реагирующих многокомпонентных газах, в гетерогенных и электропроводных средах, а также структурированной турбулентности в однородной жидкости. В работе охвачены практически все актуальные расчётные случаи: многокомпонентная диффузия и термодиффузия, законы межфазной диффузии и фильтрационного движения, химическая термодинамика, процессы самоорганизации в открытых системах и формализм деформированной статистики Тсаллиса, модификация 2-ого закона термодинамики и многое другое.

Использование современных вычислительных комплексов с быстродействием в 10^{17} - 10^{20} флопов делает решение пространственных уравнений классической гидромеханики для турбулентного диапазона изменения гидромеханических параметров весьма реальным. Сейчас, когда на пути прямого численного решения классических уравнений Навье-Стокса для турбулентного режима движения сделаны только первые шаги, выход в свет монографии проф. А.В. Колесниченко является своевременным, поскольку на основе полученных в ней макрокинетических результатов для турбулизированных сред со сложными физико-химическими свойствами можно строить существенно более полные модели процессов турбулентного тепло- и массопереноса как в газовых оболочках различных астрофизических объектов, так и в верхних слоях атмосферы Земли, в частности, при обтекании космических аппаратов.

академик РАН А.М. Липанов

Предисловие

На современном этапе развития науки возрастающее значение приобретает изучение космических динамических систем и проявлений их многообразных физических свойств. В основе лежат фундаментальные закономерности формирования макромолекулярных структур из гомогенной среды, наблюдаемые в окружающей природе и космосе, проникновение в сущность которых непрерывно расширяет горизонты познания. Громадную роль в этом процессе играют создаваемые математические модели, в первую очередь модели космических объектов, обычно недоступных для непосредственных исследований, с целью понимания их генезиса и этапов эволюции.

Каждая такая модель представляет собой определённую схематизацию изучаемого физического явления, учитывающую не всю полноту его существенных ему факторов, а лишь некоторую их часть, характеризующую явление с той или иной стороны. Одним из общих методов схематизации движения жидкостей, газов и других деформируемых тел, является метод, основанный на построении новых континуальных моделей среды с усложнёнными физико-химическими свойствами. Схематизация, при которой происходит замена реальной природной среды, состоящей из отдельных молекул, непрерывным континуумом, оказывается весьма удобной для применения мощного математического аппарата непрерывных функций и, как показала практика, в подавляющем большинстве случаев вполне эффективна для изучения множества наблюдаемых природных явлений и процессов

Изучение космической среды с использованием методов математического моделирования является новым научным направлением в разделе фундаментальных наук, становление и развитие которого в конце прошлого столетия стало возможным благодаря громадному прогрессу астрофизики, планетной физики и космофизики, широкому внедрению в эту область методов механики и вычислительного эксперимента. Это сделало возможным поставить на более строгую научную основу изучение процессов происхождения и эволюции Солнечного протопланетного диска, когда компьютерное моделирование, основанное на строгих математических моделях, играет ключевую роль.

Достижения последних десятилетий заставили по-новому взглянуть на многочисленные проблемы космогонии, остающиеся нерешёнными. С этими проблемами связаны наиболее актуальные направления в изучении Солнечной системы, включая вопросы эволюции вещества в протопланетных аккреционных дисках и самих дисков, рождение зародышей планет - планетезималей, разнообразные динамические процессы, включая миграцию малых тел. Современная звёздно-планетная космогония по существу

объединила все эти направления и потому она служит основополагающей дисциплиной, интегрирующей наблюдательные факты и создаваемые математические модели, диапазон которых сужается благодаря ограничениям, налагаемым астрономическими и космохимическими данными, а сложность существенно возрастает. По этой причине большинство известных моделей аккреционных протопланетных дисков основано на многочисленных исходных допущениях, существенно ограничивающих их достоверность.

Общая структура книги включает в себя семь глав, причём каждая глава имеет собственный список литературы. Автор попытался сделать главы книги по возможности независимыми друг от друга, хотя их, естественно, объединяет общая концептуальная направленность. Поскольку в книге важное внимание уделяется изучению турбулентных течений неоднородных сред с переменной плотностью, то проблема моделирования таких сред приобретает совершенно новые грани. Классические представления о турбулентных движениях в несжимаемой жидкости переплетаются с другими областями механики, которые объединяют гидромеханику смеси, термодинамику, кинетику химических реакций и теорию электромагнитного поля. В дополнение к флуктуациям скорости, существенное значение приобретают флуктуации плотности, температуры и концентраций отдельных химических компонентов смеси. В результате приходится сталкиваться с одной из сложнейших проблем механики турбулентных сред, заключающейся в необходимости полуэмпирического моделирования взаимосвязанных гидродинамических, физико-химических и радиационных процессов и явлений в турбулентном течении. Именно по этой причине в книге, наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением пульсирующих термогидродинамических параметров, систематически использовано весовое (средневзвешенное) осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись и анализ осреднённых уравнений движения сжимаемой среды.

В *первой главе* применительно к проблеме реконструирования эволюции аккреционного газопылевого диска с использованием развитых ранее автором термодинамических методов и подходов к описанию многокомпонентной турбулентности, предпринята попытка разработки модели турбулентной гетерогенной среды и конструированию на этой основе нового класса математических моделей космических сред, учитывающих влияние на характер и развитие турбулентности инерционных свойств полидисперсной смеси пылевых частиц, процессов тепло-массопереноса и коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения. Широко используемый в *первой главе* книги при разработке термодинамических моделей гетерогенной турбулентности, онзагеровский формализм классической неравновесной термодинамики позволил получить наиболее общую структуру замыкающих градиентных соотношений, как для тензора рей-

нольдсовых напряжений, так и для различных турбулентных потоков, в частности, в виде обобщённых соотношений Стефана–Максвелла для многокомпонентной многофазной турбулентной диффузии. На рассматриваемом уровне замыкания эти соотношения наиболее полно описывают турбулентный тепломассоперенос в многофазной турбулентной среде. К сожалению, любая термодинамическая теория не может дать какой-либо информации о коэффициентах турбулентного переноса, поскольку они не фигурируют явным образом в выражении для производства энтропии и в тождестве Гиббса. Поэтому для определения этих коэффициентов приходится использовать, как классические представления, восходящие к Прандтлю, Тейлору и Карману, так и более современные алгебраические модели замыкания для определения различных моментов второго порядка (например, модель турбулентности *ASTM-l Algebraic Stress Turbulence Model-scale*), когда в уравнениях соответствующей дифференциальной модели не учитывается конвективный перенос и диффузия турбулентности.

Во *второй главе* получена (в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики) замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для моделирования сдвиговых и конвективных турбулентных течений электропроводных сред в присутствии магнитного поля. При разработке модели электропроводящей турбулентной среды, наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением МГД уравнений, также систематически использовано весовое осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись осреднённых уравнений движения для сжимаемой электропроводящей жидкости и анализ механизмов усиления макроскопических полей турбулентными течениями. С целью наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса плазмы и поля, получены различные уравнения энергии, позволяющие проследить возможные переходы энергии из одной формы в другую, в частности, понять механизмы перекачки гравитационной и кинетической энергии среднего движения в магнитную энергию. Особое внимание уделено методу получения в рамках необратимой термодинамики замыкающих соотношений для полного (с учётом магнитного поля) кинетического тензора турбулентных напряжений в электропроводной среде и турбулентной электродвижущей силы (или так называемого магнитного тензора Рейнольдса), что позволяет проанализировать также ограничения, накладываемые условием возрастания энтропии на коэффициенты турбулентного переноса. Предложена методика моделирования коэффициентов турбулентного переноса, в частности, коэффициента кинематической турбулентной вязкости, позволяющая учитывать влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности в электропроводной среде.

В *третьей главе* в рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием протопланетного диска Солнца на самых ранних этапах его существования, на основе полученной замкнутой системы МГД–уравнений масштаба среднего движения (предназначенной для численного решения задач по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции аккреционного протопланетного диска и связанной с ним короны), построена модель тонкого (но оптически толстого) диска, учитывающая диссипацию турбулентности за счёт кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, наличие аккреции из окружающего пространства, воздействие турбулентного $\alpha\omega$ –динамо на генерацию магнитного поля, магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной и т.п.

Проблема образования планет в системе солнечно-подобного диска напрямую связана с ранней стадией его формирования и эволюции. По современным представлениям планеты возникают после потери гравитационной устойчивости субдиском, образованным в результате дифференциального вращения газопылевого вещества протопланетного облака по орбите вокруг звезды и процессов аккреции при оседании его пылевой составляющей к экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска. При сильном уплощении пылевой составляющей образовавшегося субдиска, когда плотность вещества в слое достигает некоторого критического значения, субдиск становится гравитационно-неустойчивым и распадается на многочисленные пылевые. В областях с высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агломератов, служащих основой зародышей изначально рыхлых прото-планетезималей, из которых происходит образование твердотельных планетезималей с большой начальной массой, а затем, на заключительной стадии процесса эволюции вещества диска, путём объединения планетезималей происходит формирование планет. К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, получении данных наблюдений околозвёздных аккреционных дисков, открытии экзопланет, совершенствовании методов математического моделирования, астрофизики все ещё далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария.

По-видимому, прогресс в объяснении известной изошрённости фактической реализации указанного сценария может быть достигнут на пути расширения арсенала теоретических подходов к моделированию различных проблем космогонии, в частности, эволюции астрофизических дисков. В *четвертой главе* предложена корректировка моделей ранней эволюции протопланетного диска связана с более углублённым пониманием тех реальных процессов, которые сопровождают объединение частиц субмикронного и микронного размеров при взаимных столкновениях в твердо-

тельные агрегаты. В связи с этим важно отметить, что до последнего времени в большинстве хорошо разработанных космогонических моделей протопланетного диска изначально принималась компактная структура растущих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, подобные пылевые образования могут иметь весьма пушистую структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность. Для таких ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с плотными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь путь эволюции в исходной газопылевой среде, т.е. путь от пылевых частиц через пушистые агрегаты к компактным планетезималиям. Вполне очевидно, что для адекватного описания эволюции подобных астрофизических протопланетных дисков и, в конечном счёте, механизма образования протопланетезималей в них, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства дисковых сред. При таком подходе, гидродинамическое моделирование фрактальной дисковой среды, обладающей нецелой фрактальной (массовой) размерностью, должно проводиться в рамках обобщённых гидродинамических уравнений, которые являются в общем случае следствием модели в дробно-интегральной форме.

В этой главе, применительно к проблеме формирования планетезималей в Солнечном протопланетном облаке, с учётом фрактальных представлений о свойствах пылевых кластеров, сформулирована эволюционная гидродинамическая модель образования и роста рыхлых пылевых агрегатов в аэродисперсной среде ламинарного диска, которая изначально состояла из газа и твёрдых частиц (суб)микронных размеров. Показано, как в процессе кластер-кластерной коагуляции происходит частичное их слияние с образованием крупных фрактальных агрегатов, являющихся основным структурообразующим элементом рыхлых протопланетезималей, возникающих в результате протекания физико-химических и гидродинамических процессов, сходных с процессами роста фрактальных кластеров.

В последнее время весьма интенсивно исследуются разнообразные когерентные (диссипативные) структуры в турбулентной несжимаемой жидкости, которые оказывают сильное влияние на различные динамические характеристики течения. С фактической точки зрения наиболее богата подобными структурами развитая турбулентность в термодинамически открытой системе, когда при очень больших числах Рейнольдса нарушаются различные симметрии (пространственные переносы, сдвиги по времени, вращения, галилеевы и масштабные преобразования и др.), допускаемые уравнениями Навье–Стокса и краевыми условиями. В этом случае в турбулентном течении самоорганизуются разнообразные пространственно-временные когерентные образования, такие как вихревые нити, спирали и клубки, турбулентные пятна, берстинги и т. п. Однако в тех случаях, когда поток свободен от внешнего принуждения (связанного, например, с крупномасштабным сдвигом скорости при вращении космического объекта),

развитая турбулентность в пределе бесконечно больших чисел Рейнольдса имеет, как известно, тенденцию восстанавливать (в статистическом смысле) нарушенные симметрии вдали от границ течения.

Вместе с тем существует турбулентность, которая и при очень больших числах Рейнольдса не восстанавливает нарушенную отражательную симметрию (закон чётности) поля пульсационных скоростей в случае преобразования $x \rightarrow -x$ координат. Примером такой турбулентности является пульсирующее поле скоростей в конвективной зоне астрофизического аккреционного диска: средние свойства этого поля не остаются инвариантными при зеркальном отражении в его экваториальной плоскости. Подобная турбулентность, как известно, называется спиральной (или гиротропной) и возникает под влиянием массовых сил с псевдовекторными свойствами (например, силы Кориолиса, магнитного поля и т.п.). В частности, реальная турбулентность во вращающемся солнечном протопланетном диске имеет спиральный характер. Спиральная турбулентность имеет дополнительный канал сброса пульсационной энергии, которым и оказывается механизм генерации крупно- и мезомасштабных вихревых структур (обратный тому, что, как правило, имеет место в «обычной» турбулентности), приводящий к передаче части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов. Таким образом спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске часто способна действовать как генератор крупно- и мезомасштабного вихревого поля, усиливая и укрупняя вихри и тем самым порождая разнообразные когерентные вихревые образования. В *пятой главе* монографии данная проблема рассмотрена с учётом результатов численных экспериментов, доказывающих реальное существование обратного энергетического каскада в трёхмерной спиральной турбулентности. Включение механизма вихревого динамо в эволюционную модель диска приводит к модификации определяющих соотношений для турбулентного потока тепла и тензора турбулентных напряжений, а также к необходимости рассмотрения дополнительных уравнений переноса для осреднённой завихрённости и осреднённой вихревой спиральности.

В *шестой главе* книги рассмотрена чрезвычайно злободневная проблема самоорганизации в развитых турбулентных течениях, которая является отражением наиболее общей концепции соотношения порядка и хаоса в природных процессах. В связи с этим следует заметить, что вопреки традиционной точки зрения механиков на турбулентность, в последнее десятилетие благодаря прогрессивному развитию методов визуального наблюдения турбулентных течений жидкости было открыто большое число разнообразных вихревых когерентных структур (КС) и надёжно установлены их топологические характеристики. В качестве примеров могут быть названы «вихри Тейлора», «турбулентные пятна», «вихревые кольца», «вихревые спирали», «структуры Брауна-Томаса», и т.п. Частота появле-

ния той или иной структуры зависит от типа течения (пограничный слой, слой смешения, струя и т.п.), геометрии и режима движения жидкости. Важно было описать, каким образом могут возникать когерентные структуры подобного рода. Частично ответ на этот вопрос может быть получен в рамках стохастической неравновесной термодинамики, принципы которой широко используются в монографии при построении полуэмпирической модели структурированной турбулентности. Используемый в книге стохастико-термодинамический подход к моделированию структурированной турбулентности основан на введении в модель набора внутренних случайных параметров – пульсирующих внутренних координат (типа скорости диссипации турбулентной энергии), характеризующих структуру и временную эволюцию пульсирующего поля гидродинамических параметров течения. Это даёт возможность термодинамическими методами вывести кинетические уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), предназначенные для описания эволюции функции распределения вероятности внутренних мелкомасштабных характеристик турбулентности. Эти уравнения служат, в частности, основой при анализе марковских диффузионных процессов перехода в пространстве внутренних координат из одного стационарно-неравновесного состояния в другое в результате последовательной потери устойчивости (росте надкритичности) подсистемой турбулентного хаоса, далёкого от полного хаоса термодинамического равновесия.

Наконец, в последней *седьмой главе*, применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, в книге рассмотрен один из возможных подходов, связанный с адекватным моделированием сильного гравитационного взаимодействия между отдельными частями дисковой среды, которое проявляется специфическим образом в результате длительного процесса эволюции. Как теперь стало понятно, астрофизические диски относятся в общем случае к числу, так называемых, аномальных систем, признаком которых является несводимость всей системы к простой сумме её частей. Именно сильное гравитационное взаимодействие является причиной термодинамической неаддитивности дисковой среды, когда, например, её энтропия не является аддитивной величиной. По этой причине моделирование эволюции дискового вещества на основе классической кинетики и статистики Гиббса-Больцмана не является в общем случае вполне адекватным. Другими словами, дисковая система относится к числу сложных систем, для которых характерна слабая хаотизация фазового пространства, когда экспоненциально быстрое перемешивание приобретает другой (степенной) характер. Такой теорией является интенсивно развиваемая в последнее время неэкстенсивная (неаддитивная) статистика (термодинамика) Тсаллиса, предназначенная для описания поведения аномальных систем с сильным силовым взаимодействием, фрак-

тальным характером фазового пространства и сильными корреляциями между отдельными её частями.

В связи со сказанным, в седьмой главе вещество диска рассматривалось, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды, в фазовом пространстве которой существуют точки и области, не заполненные её составляющими. В рамках формализма деформированной статистики Тсаллиса здесь выведены обобщённые гидродинамические уравнения Навье-Стокса для фрактальной среды (так называемые уравнения q - гидродинамики). На основе этих уравнений в получены при учёте диссипативных эффектов линеаризованные уравнения колебаний твёрдотельно- вращающегося диска и дан вывод дисперсионного уравнения в ВКБ-приближении. Проведён анализ осесимметричных колебаний астрофизического дифференциально вращающегося газопылевого диска и получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинса и Тумре для вращающихся астрофизических космических объектов.

Автор хорошо осознаёт, что далеко не все вопросы в той обширной проблематике, которой посвящена книга, ему удалось осветить с одинаковой степенью полноты. Это, в первую очередь, связано с тем, что, несмотря на определённые успехи, достигнутые за последние годы в изучении столь сложной области, как турбулентность и, особенно, турбулентность неоднородных сжимаемых сред и структурированная турбулентность, многое все ещё остаётся неясным, а возникающие математические трудности часто представляются непреодолимыми. В связи с этим, необходимы разработки новых оригинальных подходов, позволяющие эффективно моделировать подобные среды.

А.В. Колесниченко

Март 2016 г.

ГЛАВА 1

Основы механики турбулентной газопылевой среды для аккреционного протопланетного диска

В данной главе применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, предпринята попытка разработки модели турбулентной гетерогенной среды и конструирования на этой основе нового класса математических моделей космических сред, учитывающих влияние на характер и развитие турбулентности инерционных свойств полидисперсной смеси пылевых частиц, процессов тепло-массо-переноса и коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения. Это позволяет значительно расширить возможности численного моделирования разнообразных физических явлений в таких сложных космических средах, какими являются аккреционные газопылевые диски, образующиеся у звёзд различных классов при их дифференциальном вращении вокруг центральн

Введение

Вещество протопланетного газопылевого облака представляет собой сложную многофазную среду с областями разной плотности, температуры и степени ионизации. Это вещество, являющееся в общем случае пылевой плазмой, замагничено и находится в состоянии сильной турбулизации. Понимание эволюции протопланетного облака является необходимой предпосылкой для решения вопроса об образовании Земли и планет – вопроса, глубоко связанного с основополагающей проблемой космогонии, решение которой является на сегодняшний день крупнейшей задачей науки. Известно, что первые серьёзные попытки получить ответ на вопрос о происхождении Солнечной системы восходят к средним векам и связаны с именами И. Канта и П.-С. Лапласа, гипотезы которых об изначальном газопылевом протопланетном облаке и формирующемся из него вращаю-

щемся диске, распадающемся в дальнейшем на отдельные сгущения, сохранили свою актуальность до настоящего времени. В нашей стране эта концепция получила наиболее полное развитие в работах О.Ю. Шмидта и его школы [45,59], что позволило более строго сформулировать модель образования зародышей планет из холодного вещества протосолнечной туманности, приобретающей форму диска вблизи экваториальной плоскости Солнца, и получить в рамках данной модели ряд количественных оценок.

К сожалению, как в этих, так и в ряде других более или менее аналогичных моделях зарубежных исследователей различные физические процессы, сопровождающие эволюцию аккреционного диска, учитывались весьма приближённо, или не учитывались вовсе. Это относится, в первую очередь, к гидродинамической турбулентности, являющейся одним из важнейших физических процессов, определяющих структуру и динамику диска. Актуальность этой проблемы становится ещё более очевидной, если принять во внимание, что турбулентное вещество диска представляет собой неоднородную дисперсную среду, состоящую из газа (в общем случае многокомпонентного) и пылевых частиц различных размеров. При этом роль пылевых частиц в турбулизации дисковой среды, включая динамику их дрейфа в направлениях, радиальном и ортогональном к экваториальной плоскости Солнца, а также фазовых переходов при испарении и/или конденсации частиц с учётом температурной стратификации в диске, оказывается, нередко, определяющей. По-видимому, этим объясняется довольно неоднородная структура дисков, о чем свидетельствуют имеющиеся (хотя и ограниченные) наблюдательные данные.

По современным представлениям планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения турбулентного протопланетного вещества по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании пылевой составляющей к экваториальной (центральной) плоскости диска, перпендикулярной оси вращения [44,45,89,101,106,124,135]. Сплющивание вращающегося допланетного облака является следствием противоборства двух основных динамических сил – гравитационной и центробежной. В условиях равновесия этих сил существенными для эволюции облака становятся более слабые факторы, такие как тепловые и вязкостные процессы, само гравитация диска и электромагнитные явления. Дискосое космическое вещество вследствие воздействия сил вязкого трения (возникающего в результате относительного сдвига элементов газовой пыли при орбитальном движении) дрейфует к прото-Солнцу по очень пологой спиральной траектории по мере того, как его момент количества движения передаётся наружу – из внутренних областей диска во внешние. Именно из газопылевого вещества субдиска, как теперь стало ясно, и образовалась Солнечная планетная система путём возникновения дискретных центров уплотнения и последующего их роста (см., например, [45,46]).

Одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно происхождения и структуры околозвёздных газопылевых аккреционных дисков любого рода является их турбулентная природа [54,63,66,78,110,137]. Допланетные аккреционные диски обладают значительной вязкостью, что приводит, в сочетании с дифференциальным вращением вещества, к наличию постоянного “собственного” источника тепловой энергии в них. Наиболее вероятными причинами вязкости дифференциально-вращающихся дисков являются сдвиговая турбулентность [11,87], а также хаотические магнитные поля (см. [62]), причём энергия последних часто сравнима с энергией гидродинамической турбулентности. Таким образом, при адекватном численном моделировании эволюции допланетного облака, окружавшего Солнце на ранней стадии его существования, необходимо, в общем случае, учитывать динамические процессы взаимодействия турбулизованного газа и пыли (в общем случае пылевой плазмы). В частности, нужно учитывать модификацию твёрдыми частицами энергии турбулентности несущей фазы (т.е. обратное влияние пылевой компоненты на турбулентный и тепловой режимы газовой составляющей диска), влияние турбулентности на скорости фазовых переходов (испарение, конденсацию), на скачкообразные процессы аккумуляции дисперсных частиц (коагуляцию и дробление при взаимном соударении частиц друг с другом в потоке вещества) и, наконец, на осаждение сквозь газ твёрдых частиц к центральной плоскости диска, где они образуют уплощённый пылевой слой (субдиск). При увеличивающейся массе протозвезды и росте плотности вещества диска важную роль начинают играть приливные взаимодействия, оказывающие, в частности, влияние на формирование концентрических газопылевых слоёв [67].

Существует обширная литература по моделированию эволюции околосолнечного допланетного облака без пылевой составляющей (см., например, пространную библиографию к обзору [66]). Вместе с тем, немногочисленные публикации по запылённым дисковым системам охватывают сравнительно узкий круг задач, относящихся к данной проблеме, а полученные в них результаты носят ограниченный характер, поскольку используемые модели турбулентности двухфазных сред “газ-твёрдые частицы” не могут быть признаны вполне удовлетворительными (см., например, [70,78,79, 90,113,118,119,121,122,129,130,136]). Это обстоятельство обусловлено, в частности, тем, что существующая в настоящее время теория турбулентности гетерогенных жидкостей не совершенна, что связано как с незавершённостью “классической” теории гидродинамической турбулентности, так и с возникновением ряда новых механизмов турбулентности в диске, реализуемых при варьировании объёмного содержания и размеров твёрдых частиц в потоке газозвеси.

Мелкодисперсные твёрдые частицы (относительно малоинерционная составляющая газозвеси) оказывают, как правило, ламинаризирующее влия-

ние на двухфазное турбулентное течение за счёт роста дополнительной диссипации, в то время как крупные частицы усиливают генерацию пульсационной энергии за счёт формирования вихревого следа. Следует отметить, что пылевая фаза может не приниматься во внимание при моделировании диска только лишь на самой начальной стадии эволюции этого космического объекта, когда почти все первичные (межзвёздные) пылевые частицы, войдя в состав допланетного диска и попав в его внутреннюю высокотемпературную область, уже либо испарились, либо сохранились частично (или полностью) в более удалённых от Солнца и потому более холодных областях. На более поздних стадиях эволюции допланетного облака, по мере охлаждения диска, конденсации твёрдых частиц и увеличения их в размерах (в основном в результате процессов коагуляции), а также диссипации газа из дисковой системы в межзвёздное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой составляющей существенно возрастает.

В этом случае при моделировании дисковой среды важно учитывать влияние пыли на турбулентность потока, которое не является, вообще говоря, однозначным, и сильно зависит от величины объёмного содержания (концентрации) и инерционности твёрдых частиц. В частности, на определённых этапах эволюции подобной гетерогенной смеси становятся существенными такие механизмы воздействия пылевой компоненты на турбулентность в диске, как турбулентный “диффузионный” перенос дисперсной составляющей, обусловленный пространственной неравномерностью распределения пылевых частиц в диске, генерирование дополнительных турбулентных возмущений за счёт коллективных эффектов, связанных с межчастичными столкновениями твёрдых частиц [61], образование вихревых структур за обтекаемыми крупными частицами при отрыве несущего газового потока, а также совместное влияние этих двух механизмов турбулизации течения и т.д. Кроме этого, само присутствие в турбулентной среде полидисперсной примеси существенно усложняет гидродинамику диска, способствуя реализации дополнительных режимов течения космического вещества. Так, например, увеличение концентрации твёрдых частиц в гетерогенном потоке, связанное с процессом оседания пыли к центральной плоскости диска под действием вертикальной компоненты тяготения прото-Солнца, приводит к локальному дополнительному усилению генерации турбулентной энергии потока, обусловленной ростом поперечного градиента относительной скорости фаз в окрестности экваториальной плоскости, т.е. к ретурбулизации течения (ср. [89]).

Помимо этого, эффективность механизмов аккрецирования вещества в допланетном облаке, особенно на стадии формирования субдиска, также в значительной степени зависит от интенсивности его турбулизации. Причём, влияние турбулентности на процесс коагуляции частиц в различных ситуациях может сказываться совершенно неожиданным образом, однако,

по-видимому, турбулентность всегда способствует коагуляции [7]. Так, если внутренний колмогоровский масштаб турбулентности λ_K меньше или сравним с размером дисперсных частиц, то имеет место турбулентное блуждание частиц (аналогичное броуновскому), приводящее к их взаимному столкновению, т.е. к турбулентной коагуляции, дополняющей эффективную в спокойном газе гравитационную коагуляцию. В тоже время для частиц, размеры которых значительно меньше λ_K , влияние турбулентности на эволюцию тонкодисперсной пылевой компоненты происходит по иным каналам. В этом случае усиление различных коагуляционных процессов (вызванных другими, нежели турбулентность, причинами) будет происходить в результате интенсивного турбулентного перемешивания частиц на расстояниях, больших колмогоровского масштаба, когда за счёт хаотических турбулентных пульсаций число взаимных столкновений твёрдых частиц в единицу времени существенно увеличивается по сравнению с ламинарным течением. Турбулентные пульсации могут способствовать втягиванию мелкодисперсных частиц в гидродинамический след или в зону действия индукционных сил в случае одноименно заряженных частиц, а также могут содействовать электростатической коагуляции путём разрушения экранировки (см. [7,8]).

Основываясь на доступных результатах лабораторных и модельных исследований (см., например, [76]), можно в первом приближении считать, что столкновения сравнительно мелких (примерно миллиметровых) частиц при скоростях < 1 м/с приводит к их объединению. Этому может способствовать, так называемая, быстрая коагуляция, не учитывающая вандерваальсовских сил отталкивания (хотя более подробного рассмотрения заслуживает при этом сам механизм прилипания – адгезии), либо рыхлая (*fluffy*) структура сталкивающихся частиц. По-видимому, на подобных структурах возможно преобладание процессов интеграционных над деструктивными даже при скоростях > 10 м/с. Эффективным механизмом аккумуляции твёрдых частиц может быть также, наряду с гравитационной, негравитационная аккреция, связанная с броуновской коагуляцией, электрической коагуляцией, турбулентно-броуновской коагуляцией заряженных и нейтральных частиц и т.п. (подробнее см.[102]). В результате роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газозвеси, что приводит, в конечном итоге, к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости протозвезды и аггломерации. Таким образом, вопреки распространённому мнению, что турбулентность в газопылевой среде субдиска не способствует укрупнению частиц (см. напр., обзор [36]), ситуация может быть обратной, что подтверждают и полученные недавно результаты наблюдений [107].

Данный вывод дополнительно подкрепляют развиваемые в данной монографии представления о том, что в охваченном турбулентными движениями аккреционном диске и субдиске должна быть велика вероятность процессов самоорганизации на фоне хаотического движения газопылевой среды. Это позволяет предполагать существенную роль этих процессов в образовании пылевых кластеров внутри упорядоченных (вихревых) структур за счёт более тесного взаимодействия (при относительно малых скоростях) частиц, способствующего их объединению. Таким образом, открывается реальная возможность преодолеть известные трудности механизма простого объединения частиц в турбулизованной дисковой среде, если принять во внимание возникновение областей самоорганизации в динамической системе вдали от состояния равновесия. Тем не менее, пока остаётся открытым вопрос о том, как и за какие времена происходит рост в турбулентной среде диска зародышей планетезималей, начиная примерно от метровых размеров [71-74,80,112,125].

Наконец, коснёмся ещё одного важного механизма, с которым связано создание космогонических моделей. Едва ли есть основания подвергать сомнению тот факт, что при образовании и в процессе эволюции околосолнечного допланетного диска существенную роль играли электродинамические (плазменные) эффекты. Космическая плазма в общем случае является пылевой, т.е. содержит мельчайшие частицы пыли (см. [53]). Так как любой аккреционный диск содержит твёрдые частицы различных размеров, то существует, по-видимому, некоторый граничный линейный масштаб (обычно он бывает порядка 10^{-5} – 10^{-7} м), зависящий от величины электромагнитного и гравитационного полей, заряда и плотности частиц, который разделяет достаточно малые частицы, являющиеся частью пылевой плазмы, и достаточно большие частицы, движение которых определяется воздействием неэлектромагнитных сил. Известно, что основными физическими процессами, определяющими поверхностный заряд пылинок, являются фотоэлектронная эмиссия и столкновения с плазменными электронами и положительными ионами (см., например, [2]). Вместе с тем, твёрдая частица в космической плазме чаще заряжается отрицательно до потенциала порядка нескольких вольт в результате столкновений с электронами. В тех случаях, когда частица попадает в область плазмы с большим количеством надтепловых электронов, её отрицательный потенциал может достигнуть значений порядка нескольких тысяч вольт, в результате чего она окажется захваченной плазмой.

В совокупности процессов формирования диска и его эволюции чрезвычайно важную роль играет электризация пылевых частиц при их оседании и взаимодействии с магнитным полем звезды, что требует учёта влияния соответствующих электродинамических эффектов в дифференциально-вращающейся среде. Это даёт возможность получить необходимые количественные оценки коэффициентов турбулентного обмена, отличных от

упрощённых коэффициентов, получаемых из соотношений размерности и широко используемых в градиентных моделях турбулентности. В частности, при движении электропроводной двухфазной среды в электромагнитном поле на заряженные частицы действует пондеромоторная сила Лоренца, что приводит к возникновению ряда дополнительных эффектов, особенно при турбулизации течения [3,6]. В данной монографии, применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного облака, предпринята попытка разработки континуальной модели дисковой среды, учитывающей совместное влияние магнитно-гидродинамических эффектов [см. Гл.2] и эффектов турбулентности на динамику и процессы тепло-массопереноса в дифференциально вращающемся космическом газопылевом веществе.

Вместе с тем, следует ясно себе представлять, что трудности моделирования турбулентности в диске не сводятся только лишь к получению достаточно надёжных значений коэффициентов турбулентного обмена в электропроводной многофазной системе. Не менее существенную роль играет изучение крупномасштабных турбулентных структур, отвечающих представлениям о возникновении когерентных упорядоченностей на фоне хаотических турбулентных движений. В то время как в хаотической турбулентности рост размеров частиц при столкновениях затруднён, внутри вихревых когерентных структур, наоборот, может происходить их объединение и укрупнение. Как уже отмечалось выше, возникновение подобных вихревых кластеров облегчает решение проблемы укрупнения пылевых частиц за счёт соударений даже при относительно небольших скоростях, что встречает известные затруднения при попытках воспроизведения подобного рода процессов в лабораторных экспериментах. Мы приходим, таким образом, к выводу, что синергетические процессы самоорганизации в термодинамически открытой системе допланетного облака на фоне крупномасштабного сдвигового течения космического вещества, связанного с его дифференциальным вращением, также являются важнейшим механизмом, формирующим свойства облака на разных стадиях его эволюции, включая формирование вязкого аккреционного диска вокруг молодого Солнца, проходившего стадию Т Тельца, формирование пылегазового субдиска, разрушение последнего в результате гравитационной неустойчивости и возникновение дискретных центров уплотнения с последующим образованием и ростом планетезималей. Подчеркнём ещё раз, что мы говорим о возникновении гравитационной неустойчивости именно в пылевом субдиске, а не в самом диске, масса которого на стадии Т-Тельца слишком мала, чтобы поддержать гравитационную неустойчивость. Сохраняется, однако, возможность магнитных неустойчивостей типа неустойчивости Балбуса–Хаули.

Таким образом, развитая турбулентность способна приводить к формированию в диске мезомасштабных, относительно устойчивых, газопы-

левых когерентных структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами вещества (см. [28,64,69,123,]). В результате происходит самопроизвольное образование и рост конденсированной пылевой компоненты (пылевых кластеров), интенсификация фазовых переходов и тепломассопереноса при различных значениях термогидродинамических параметров несущей и дисперсной фаз, существенная модификация спектра колебаний в сильно запылённой среде и т.п. Один из возможных сценариев образования и роста пылевых частиц в частично ионизованном протопланетном диске состоит из следующих этапов: сначала образуются первичные кластеры; после прохождения критического размера начинается этап гетерогенной конденсации; на следующем этапе на первый план выходят процессы коагуляции и агломерации (слипания); наконец, на последнем этапе становится наиболее важной поверхностная рекомбинация ионов, приводящая к постоянному осаждению материала на поверхности изолированных многозарядных частиц. На всех этих этапах существенный вклад вносят коллективные процессы самоорганизации.

В настоящей главе мы не будем касаться плазменных эффектов, а остановимся, в основном, на следующих четырёх аспектах проблемы построения модели среды диска:

➤ на формулировании базовой системы уравнений сохранения массы, импульса и энергии для мгновенных (актуальных) параметров течения газопылевой смеси и излучения, предназначенных для численного моделирования околосолнечного допланетного диска на разных стадиях его эволюции (в частности, ламинарной стадии образования субдиска) и в пространственных зонах, расположенных на различных расстояниях от протозвезды;

➤ на весовом осреднении (по Фавру) стохастических уравнений движения двухфазной механики с целью феноменологического описания осреднённого течения газозвеси и процессов турбулентного тепло- и массопереноса в газопылевом диске;

➤ на выводе определяющих соотношений для корреляционных характеристик турбулентного двухфазного течения, необходимых для замыкания гидродинамических уравнений масштаба среднего движения;

➤ на моделировании коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом диске с учётом обратного влияния полидисперсной составляющей на интенсивность турбулентности несущего газа.

1. Теоретические предпосылки к моделированию эволюции аккреционного турбулентного диска

Наиболее адекватное моделирование движения газозвеси в газопылевом аккреционном диске можно провести, по-видимому, в рамках механики гетерогенных турбулизованных сред, с учётом специфики физико-химических свойств фаз, процессов тепло-массопереноса и излучения, химических реакций, фазовых переходов, процессов коагуляции, дробления и т.д. Изучение эволюции подобных сред связано с привлечением новых термогидродинамических параметров и решением уравнений более сложных, чем те, с которыми приходится иметь дело в «обычной» гидродинамике. При этом детальное описание внутрифазных и межфазных взаимодействий в гетерогенных средах порою чрезвычайно сложно, и для получения достоверных результатов и их понимания здесь особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям.

Как правило, в перечисленных выше и некоторых других известных работах по континуальному моделированию турбулизованных аккреционных дисков с учётом пылевой составляющей, исходят из уравнений неразрывности, движения и энергии для каждой фазы в отдельности [27,63,94,105, 106,116,130,]. При этом авторам приходится эвристически задавать законы межфазных взаимодействий, в частности, интенсивности обмена импульсом и энергией между фазами. Такой подход является аналогом тринадцатимоментного метода Грэда [92], получившего широкое распространение, например, в кинетической теории многокомпонентной плазмы. Последующее осреднение взаимосвязанных гидродинамических уравнений для отдельных фаз (с целью описания турбулизованных движений) приводит не только к громоздким уравнениям масштаба среднего движения, что связано с необходимостью удержания в их структуре большого количества корреляционных моментов пульсирующих параметров (таких, например, как $\overline{\rho'_g \mathbf{u}'_g}$, $\overline{\rho'_d \mathbf{u}'_d \mathbf{u}'_d}$, $\overline{T' \mathbf{u}'_d}$, $\overline{T' \rho'_g}$ и т.п.), но и к затруднениям физической интерпретации каждого отдельного члена в осреднённых уравнениях. Для преодоления указанных трудностей и с целью упрощения задачи некоторые авторы часто прибегают к необоснованному отбрасыванию ряда корреляционных слагаемых, что, конечно, сужает область применения подобного подхода.

Вместе с тем, моделирование эволюции турбулизованного газопылевого облака возможно провести в рамках односкоростного приближения гетерогенной механики, аналогичного моментному методу Чепмена–Энскога решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентных газовых смесей (см., например, [38,56,]). Своеобразие этого подхода в рассматриваемом случае состоит в том, что несмотря на

разницу гидродинамических скоростей отдельных фаз и, связанную с этим, необходимость учёта динамических и инерционных эффектов их относительного движения, континуальное описание дисковой среды возможно проводить исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии для системы в целом, дополненных определяющими (замыкающими) соотношениями для ряда термогидродинамических потоков, как внутрифазных, так и межфазных. В частности, для потоков межфазной диффузии (или относительных скоростей фаз) могут быть использованы обобщённые соотношения Стефана-Максвелла, выведенные для гетерогенных смесей с достаточной полнотой и логической стройностью методами неравновесной термодинамики в работе [23]. Важно подчеркнуть, что применение только одного суммарного континуума для моделирования газопылевого космического вещества позволяет, при использовании средневзвешенного осреднения Фавра [86], выполнить осреднение гидродинамических уравнений для дисковой среды в целом достаточно аккуратно (см., например, [102]).

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность эффектов неоднородности в солнечном допланетном облаке (фазовые переходы, химические реакции, теплообмен, гравитационное взаимодействие, пульсационное и хаотическое движение, вращение, радиация, коагуляция и т.п.) с необходимостью требует разумной схематизации описания движения газопылевой среды. В связи с этим, будем в данной работе предполагать, что движение дисперсной смеси (дисперсная фаза с точки зрения термодинамики и механики сплошной среды может рассматриваться как «псевдогаз», «псевдомолекулами» которого являются дисперсные частицы.) в допланетном диске можно адекватно описать при следующих допущениях:

- > пылевые частицы (далее мы будем понимать под пылевыми частицами, твёрдые тела с размерами от одного микрона до нескольких сотен метров) – твёрдые и недеформируемые, сферичны по форме и полидисперсны;

- > предполагается несжимаемость вещества пылевых частиц, $\rho_d = const$;

- > истинная плотность частиц пыли много больше истинной плотности газовой составляющей системы, $\rho_d \gg \rho_g$;

- > объёмная концентрация дисперсной фазы не очень велика ($s^2 \ll 1$), так что членами порядка s^2 можно пренебречь;

- > несущая фаза – сжимаемый многокомпонентный совершенный газ;

- > можно пренебречь диффузионным переносом молекул всех химических сортов друг относительно друга, $\mathbf{u}_{\alpha(k)} \equiv \mathbf{u}_\alpha$;

- вязкость и теплопроводность дисперсной фазы можно не учитывать, $\mathbf{P}_d = 0$, $\mathbf{q}_d = 0$;
- предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_d = T$;
- суммарный гетерогенный континуум рассматривается в однодавленческом приближении, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;
- гетерогенные реакции на поверхности твёрдых частиц можно не учитывать;
- вкладом от приповерхностного слоя твёрдых частиц в энергетику дисковой системы в целом можно пренебречь; наличие в гетерогенных системах межфазных границ, моделируемых математическими поверхностями, на которых терпят разрыв непрерывности поля различных термодинамических параметров, приводит к весьма серьёзным осложнениям континуальной теории многофазных многокомпонентных систем (см. [41]);
- считается, что при описании динамического взаимодействия фаз вращением твёрдых частиц можно пренебречь;
- теплообмен между дисперсными частицами и несущим газом можно не учитывать.

Таким образом, предполагается моделировать гетерогенный континуум, состоящий из двух соприкасающихся друг с другом фаз – несущей газовой фазы солнечного состава и дисперсной фазы твёрдых конденсированных частиц сложного химического состава (см., например, [15]), находящийся при общей абсолютной температуре T и давлении p . Заметим, что это есть условие только термического и механического равновесия фаз, но не полного фазового равновесия, для которого дополнительно требуется ещё и совпадение химических потенциалов фаз (являющихся ключевым понятием теории фазового равновесия). Кроме того, при химическом равновесии, т.е. равновесном распределении химических компонентов между двумя фазами их химические потенциалы должны иметь постоянное значение в обеих фазах. Для применимости континуального приближения линейные размеры элементарного макро объёма δV дисковой среды должны быть намного больше линейных размеров дисперсных включений, но намного меньше характерного гидродинамического размера задачи L_{hydr} . Предполагается, что каждая фаза представляет собой гомогенную n -компонентную смесь (причём каждое геохимически значимое вещество допланетного облака присутствует в каждой фазе α). Далее для обозначения фазы будем использовать нижний греческий индекс α, β, \dots , а нижние латинские индексы в круглых скобках типа (k) или (i) у любой величины будем относить к молекулярной составляющей фазы. Газовая фаза ($\alpha = g$) является несущей средой, описываемой моделью вязкой жидкости. Дисперсная фаза ($\alpha = d$), присутствующая в виде твёрдых включений (столк-

новениями между которыми мы пренебрегать, однако, не будем), является невязкой и не теплопроводной. Иногда для обозначения газовой и конденсированной фаз вместо буквенных будем использовать цифровые индексы, отнеся нижний индекс $\alpha = 1$ к газовой фазе, а $\alpha = 2$ – к параметрам дисперсной фазы.

2. Уравнения механики гетерогенных сред для моделирования допланетного газопылевого облака

Предполагая далее локальное термодинамическое равновесие в пределах каждой фазы, а также локальное термодинамическое равновесие излучения с веществом, воспользуемся для описания гидродинамических движений в газопылевой среде (с соответствующими физико-химическими свойствами) феноменологической теорией многожидкостных взаимодействующих континуумов, учитывающей, в частности, динамические эффекты из-за несовпадения гидродинамических скоростей \mathbf{u}_α фаз, входящих в состав системы (см., например, [23,41]).

Для каждой из двух фаз в каждой пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) определим массовую плотность, гидродинамическую скорость, внутреннюю энергию и другие термогидродинамические параметры, относящиеся к своему континууму и своей химической составляющей смеси. При этом в качестве характеристик фазы будем использовать величины, осреднённые, как по совокупному элементарному макрообъёму $\delta V = \sum_\alpha \delta V_\alpha$,

относящемуся к гетерогенной системе в целом, так и по части δV_α элементарного объёма, занимаемой отдельной фазой α . В частности, наряду с распределённой (размазанной по совокупному объёму δV) массовой плотностью $\tilde{\rho}_\alpha$ фазы α , далее будем использовать истинную (физическую) плотность ρ_α (равную отношению массы частиц фазы α в элементарном макрообъёме δV к части этого объёма δV_α , которую фаза занимает), определяемую выражением

$$\rho_\alpha = \tilde{\rho}_\alpha / s_\alpha, \quad s_\alpha \equiv \delta V_\alpha / \delta V, \quad \sum_\alpha s_\alpha = 1, \quad (2.1)$$

где s_α – так называемое, объёмное содержание (объёмная концентрация или фазовая насыщенность) α -фазы. Именно истинная ρ_α , а не распределённая $\tilde{\rho}_\alpha$ плотность фазы совместно с другими параметрами состояния, например, такими, как температура T_α , внутренняя энергия e_α и энтропия

S_α определяет термодинамические свойства элементарной макрочастицы α -фазы в различных её состояниях. Кроме того, величины s_α непосредственно влияют и на гидродинамическое движение фаз, поскольку фигурируют в соответствующих уравнениях движения. Одновременно будем предполагать, что между отдельными химическими компонентами k дисковой системы возможны r независимых химических реакций, включая межфазные реакции и случаи, когда химические превращения сводятся просто к перемещению компоненты k из одной фазы в другую.

Рассмотрим сначала случай, когда все сконденсированные частицы допланетного газопылевого диска в каждом элементарном макрообъёме δV , независимо от их размеров имеют одну и ту же мгновенную гидродинамическую скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t)$. Массовую плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ и среднемассовую гидродинамическую скорость $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (мгновенную скорость движения центра тяжести элементарного макрообъёма газозвеси с центром в точке \mathbf{r}) газопылевой смеси в целом определим соотношениями

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} = \rho_g (1 - s) + \rho_d s, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = \rho^{-1} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \frac{\rho_g (1 - s)}{\rho} \mathbf{u}_g + \frac{\rho_d s}{\rho} \mathbf{u}_d, \quad (2.3)$$

где $\rho_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ – соответственно истинная массовая плотность и гидродинамическая скорость фазы α ; $s_d(\mathbf{x}, t)$ – мгновенное значение объёмной концентрации дисперсной фазы, ($s_g + s_d = 1$); индекс "d" у параметра s_d далее будем опускать, $s_d \equiv s$.

Для моделирования химического состава, особенно на ранних этапах эволюции допланетного облака (см., например, [15,132]) необходимо в общем случае привлекать уравнения баланса масс для каждой химической компоненты фазы, которые могут быть представлены в форме уравнений сохранения частиц сорта k в фазе α . С учётом сделанных выше допущений эти уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (s_{\alpha} n_{\alpha(k)}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (s_{\alpha} n_{\alpha(k)} \mathbf{u}_{\alpha}) = \sigma_{\alpha(k)} \equiv \sum_{p=1}^r v_{\alpha(k),p} \xi_p + \delta_{2\alpha} \overset{\circ}{n}_{\alpha(k)}, \quad (2.4)$$

$$(\alpha = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n),$$

или

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (s_\alpha n_{\alpha(k)} \mathbf{w}_\alpha) = \sigma_{\alpha(k)}, \quad \mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}). \quad (2.5)$$

Здесь $d(\dots)/dt \equiv \partial(\dots)/\partial t + \mathbf{u} \cdot \partial(\dots)/\partial \mathbf{x}$ – субстанциональная производная, связанная с движением элементарного макро объёма газопылевой среды в целом; $\partial(\dots)/\partial \mathbf{x} = \sum_l \mathbf{i}_l \partial(\dots)/\partial x_l$ – векторный дифференциальный оператор;

\mathbf{i}_l ($l=1,2,3$) – суть декартовы единичные векторы, параллельные соответствующим осям координат; величина $(\partial/\partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}$ является дивергенцией \mathbf{b} ; $n_{\alpha(k)}(\mathbf{x}, t)$ – число частиц химического вещества k в единице объёма, занимаемого фазой α (счётная концентрация); $\mathbf{w}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – мгновенная диффузионная скорость фазы α , удовлетворяющая, в силу определения средне-массовой скорости \mathbf{u} , соотношению

$$\sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0, \quad \mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}), \quad (2.6)$$

или

$$\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0, \quad \mathbf{J}_\alpha \equiv \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha = \rho_\alpha s_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}), \quad (2.7)$$

где $\rho_\alpha = \sum_k m_{(k)} n_{\alpha(k)}$; $\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – массовый диффузионный поток частиц α -фазы; $\sigma_{\alpha(k)}$ – скорость образования числа частиц компоненты k в единице объёма среды за счёт химических реакций и фазовых переходов (испарения и конденсации вещества), а также процессов дробления и коагуляции дисперсной составляющей; $\xi_\rho(\mathbf{x}, t)$ – скорость ρ -й химической реакции (включая межфазовые реакции и фазовые переходы), $\rho=1,2,\dots,r$; $v_{\alpha(k),\rho}$ – стехиометрический коэффициент компоненты k в фазе α по отношению к ρ -ой химической реакции, стехиометрическое уравнение которой символически может быть записано в виде (см., например, [42])

$$\sum_\alpha \sum_k v_{\alpha(k),\rho} m_{(k)} = 0, \quad (\rho=1,2,\dots,r) \quad (2.8)$$

– принцип сохранения общей массы в ρ -ой химической реакции; $m_{(k)}$ – молекулярная масса k -й компоненты; $n_{\alpha(k)}$ – величина, описывающая изменение числовой концентрации химической компоненты k в пылевой

фазе, связанное с процессами дробления или слипания сконденсированных частиц в газопылевом облаке. Стехиометрические коэффициенты компонентов, образующихся при протекании реакции (слева направо) считаются положительными, а коэффициенты расходуемых при этом компонентов – отрицательными.

Из (2.4), при условии сохранения массы всех химических компонентов в пылевой фазе в процессе трансформации твёрдых частиц

($\sum_k m_{(k)} n_{\alpha(k)} = 0$), следует дифференциальное уравнение сохранения

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\rho=1}^r v_{\alpha,\rho} \xi_\rho, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (2.9)$$

для распределённой массовой плотности

$$\tilde{\rho}_\alpha \equiv s_\alpha \sum_k m_{(k)} n_{\alpha(k)} = \rho_\alpha s_\alpha, \quad (2.10)$$

α -фазы. Здесь $v_{\alpha,\rho} \equiv \sum_k m_{(k)} v_{\alpha(k),\rho}$; величина $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$ характеризует интенсивность перехода массы из фазы α в фазу β (или наоборот, тогда $\sigma_{\alpha\beta} < 0$) за счёт химических реакций и процессов испарения или конденсации вещества в допланетном облаке; при этом $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$. Для дальнейших целей целесообразно ввести в рассмотрение массовые фазовые концентрации $C_\alpha(\mathbf{x}, t)$

$$C_\alpha \equiv \frac{\tilde{\rho}_\alpha}{\rho} = \frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho}, \quad \sum_\alpha C_\alpha = 1, \quad (2.11)$$

и относительную скорость пыли и газа $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}_{dg} = (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g)$; тогда уравнениям (2.9) можно придать более компактный вид

$$\rho \frac{dC_\alpha}{dt} = - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_\alpha \right) + \sigma_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad \mathbf{J}_{1,2} = \begin{cases} \rho C_1 \mathbf{w}_1 = -\rho C_1 C_2 \mathbf{w}, \\ \rho C_2 \mathbf{w}_2 = \rho C_1 C_2 \mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Закон сохранения массы в целом, получающийся в результате суммирования (2.4) по индексам k и α , с учётом (2.7) и (2.8), принимает обычную форму

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.13)$$

как и в однофазном континууме. Отметим, что излучение не изменяет уравнение непрерывности (2.13), поскольку оно «не обладает» массой.

Далее будем предполагать, что в процессе эволюции газопылевого облака материал твёрдых включений остаётся несжимаемым, т.е. истинная (физическая) плотность пыли $\rho_d = \text{const}$. Тогда мгновенное уравнение (2.12) для пыли сводится к уравнению

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{\rho} \right) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (s \mathbf{w}_d) + \rho_d^{-1} \sigma_{dg}, \quad \mathbf{w}_d = C_g \mathbf{w} = (1-s) \frac{\rho_g}{\rho} \mathbf{w}, \quad (2.14)$$

позволяющему найти объёмное содержание $s(\mathbf{r}, t)$ пылевой составляющей в двухфазном потоке при заданной относительной скорости фаз \mathbf{w} . Таким образом, для расчёта параметров ρ и s (а, следовательно, и плотности газа ρ_g [см. (2.2)]), можно использовать уравнения (2.13) и (2.14) вместо двух уравнений (2.9).

Интенсивность силового взаимодействия фаз и характеристики излучения в газопылевом облаке сильно зависят от характерного размера твёрдых включений (например, характерного объёма одной частицы пыли $\tilde{U}_d(\mathbf{x}, t)$) и полного их числа $N_d \equiv s \sum_k n_{d(k)}$ в единице совокупного объёма газозвеси. В случае если все твёрдофазные конденсаты являются сферическими или близкими к ним по форме с характерным диаметром Ферета $(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)})$, то $\tilde{U}_d = (\pi/6) \tilde{d}^3$. Балансовое уравнение для полного числа дисперсных частиц $N_d(\mathbf{x}, t)$ можно получить, используя (2.4); в результате будем иметь

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{N_d}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N_d \mathbf{w}_d) = \sigma_{N_d} \equiv \sum_k \sum_{\rho=1}^r v_{d(k), \rho} \xi_{\rho} + \overset{\circ}{N}_d, \quad (2.15)$$

где источниковый член $\overset{\circ}{N}_d \equiv \sum_k \overset{\circ}{n}_{\alpha(k)}$, характеризующий изменение полной числовой плотности разномасштабных твёрдых частиц за счёт процессов коагуляции и дробления, определяется в общем случае кинетическим уравнением Смолуховского [см. (2.29)]. По известным параметрам N_d и s можно определить важную характеристику коагулирующей смеси в двух-

фазном потоке – характерный объем $\tilde{U}_d(\mathbf{x}, t)$ (или средний линейный размер \tilde{d}_d) твёрдых включений:

$$\tilde{U}_d = s / N_d, \quad \tilde{d}_d = \sqrt[3]{(6 / \pi)(s / N_d)}. \quad (2.16)$$

Следует отметить, что если при численном моделировании эволюции газопылевого облака не принимать во внимание процессы дробления и коагуляции твердых частиц ($\dot{N}_d = 0$), процессы испарения и конденсации ($\sigma_{dg} = 0$), а также предположить несжимаемость материала включений ($\rho_d = const$), то будем иметь $\rho_{(k)} = m_{(k)}n_{(k)}$. При этих допущениях $\tilde{\rho}_d = s\rho_d = \rho_d\tilde{U}_dN_d$, и уравнение (2.15) (с правой нулевой частью) является просто следствием уравнения (2.14) сохранения массы второй фазы, которое в этом случае принимает более простой вид

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (s \mathbf{w}_d) = 0, \quad \mathbf{w}_d = C_g \mathbf{w}. \quad (2.14^*)$$

2.1. Межфазная диффузия. Коэффициент аэродинамического сопротивления пылевых частиц диска

Обобщённые соотношения Стефана–Максвелла могут служить исходными уравнениями при анализе процессов фазовой диффузии в газопылевом диске. Диффузия в многокомпонентной смеси газов подробно рассмотрена методами кинетической теории в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [12]. Их основной результат состоит в том, что скорость относительной диффузии ($\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}$) двух компонентов газа может быть вызвана факторами, не влияющими непосредственно на эти компоненты, например термодинамическими силами, действующими на молекулы прочих компонентов смеси. Скорости ($\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}$) находятся (в первом приближении метода Чепмена–Энскога решения уравнений Больцмана) из системы уравнений Стефана–Максвелла

$$\sum_j \frac{n_{(j)}n_{(k)}}{n^2 D_{(jk)}} (\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}) - k_{T(k)} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{d}_{(k)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p} \left\{ -\rho_{(k)} \mathbf{F}_{(k)} + \frac{\partial p_{(k)}}{\partial \mathbf{x}} - C_{(k)} \sum_j \left(-\rho_{(j)} \mathbf{F}_{(j)} + \frac{\partial p_{(j)}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

которым можно придать вид уравнений движения отдельных компонентов смеси (см., например, «Примечание И» в монографии [56]).

$$\rho_{(k)} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\partial p_{(k)}}{\partial \mathbf{x}} + \rho_{(k)} \mathbf{F}_{(k)} + \sum_j k_B T \frac{n_{(j)} n_{(k)}}{n D_{(jk)}} (\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}) - k_B k_{T(k)} n \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}.$$

Здесь $\rho_{(k)} = m_{(k)} n_{(k)}$, $C_{(k)} = \rho_{(k)} / \rho$, $p_{(k)}$ – соответственно массовая плотность, массовая концентрация и парциальное давление частиц сорта k ; $p = \sum_k p_{(k)}$ – полное давление смеси (закон Дальтона), $p_{(k)} = n_{(k)} k_B T$; k_B – постоянная Больцмана; $n = \sum_k n_{(k)}$, $\rho = \sum_k \rho_{(k)}$ – соответственно полные числовая и массовая плотности многокомпонентной смеси; $D_{(jk)}$ – бинарные коэффициенты диффузии; $\mathbf{F}_{(k)}$ – объёмная внешняя сила (на единицу массы k -й компоненты); $k_{T(k)}$ – термодиффузионное отношение.

В работе [22] соотношения Стефана–Максвелла для многокомпонентных смесей были выведены методами неравновесной термодинамики, а в работе [23] они были обобщены и на гетерогенные смеси (причём им также можно придать вид уравнений движения отдельных фаз системы). В рассматриваемом здесь однодавленческом приближении ($p_g = p_d$) эти соотношения для межфазовой диффузии принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}) - p k_{T\alpha} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{d}_{\alpha} \equiv \\ & \equiv -\tilde{\rho}_{\alpha} \mathbf{K}_{\alpha} + s_{\alpha} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} - C_{\alpha} \sum_{\beta} (-\tilde{\rho}_{\beta} \mathbf{K}_{\beta} + s_{\beta} \frac{\partial p_{\beta}}{\partial \mathbf{x}}) \equiv \\ & \equiv \rho_{\alpha} s_{\alpha} \frac{d_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{dt} + s_{\alpha} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \rho_{\alpha} s_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}), \quad (\alpha = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $d_{\alpha}(\dots)/dt = \partial(\dots)/\partial t + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \partial(\dots)/\partial \mathbf{x}$ – субстанциональная производная, вдоль траектории центра масс α -фазы, заключённой внутри элементарного макро объёма δV многофазной среды; $\mathbf{\Pi}_{\alpha}$ – парциальный тензор вязких напряжений; $R_{\alpha\beta}$ – коэффициент межфазного трения для фаз α и β (коэффициент $R_{\alpha\beta}$ отражает взаимодействие двух фазовых континуумов и

поэтому его часто удобно записать в симметричном виде $R_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}_\alpha \tilde{\rho}_\beta \theta_{\alpha\beta}$, где параметры $\theta_{\alpha\beta}$ не зависят, по крайней мере грубо, от пропорций смеси), $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$; \mathbf{F}_α – внешняя массовая сила, отнесённая к единице массы вещества фазы α ;

$$\tilde{\rho}_\alpha \mathbf{K}_\alpha \equiv -\tilde{\rho}_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \tilde{\rho}_\alpha \mathbf{F}_\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_\alpha \right) - \frac{1}{2} \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{w}_{\alpha\beta} \quad (2.18)$$

– обобщённая термодинамическая сила, сопряжённая с диффузионным потоком \mathbf{J}_α ; величины \mathbf{d}_α также имеют смысл обобщённых термодинамических сил, вызывающих относительное движение фаз ($\sum_\alpha \mathbf{d}_\alpha = 0$); $k_{T\alpha}$ –

термофоретическое отношение, причём $\sum_\alpha k_{T\alpha} = 0$. Более тонкий анализ

межфазного взаимодействия показывает, что эффекты больших градиентов макроскопических параметров, вращения твёрдых частиц, не стационарности установления профиля скоростей около частиц, деформации дисперсных частиц и некоторые другие, могут приводить к появлению дополнительных сил в левой части уравнений (2.17). Таковыми, кроме Стоксовой силы трения могут быть сила Сэфмена, связанная с неоднородностью профиля скорости несущего газа, «наследственная» сила Бассе (учитывающая предысторию движения на поведение дисперсных частиц), сила Магнуса или Жуковского (сила дополнительного воздействия на вращающиеся дисперсные частицы из-за градиентов в поле средних скоростей несущей фазы) и т.д.

Для определения величины термофоретической силы в литературе предложен целый ряд теоретических формул (см., например, [39,117]). Следует, однако, отметить, что в случае дисперсных частиц, размер которых, как правило, значительно меньше характерного размера неоднородностей температуры в диске, силу, связанную с термофорезом, можно не учитывать. Последнее слагаемое в правой части уравнения (2.17), равное

$$\frac{1}{2} \sum_\beta \mathbf{w}_{\alpha\beta} \sum_{\rho=1}^r v_{\alpha,\rho} \xi_\rho,$$

описывает изменение импульса фазы α при фазовых переходах (напомним, что $\mathbf{w}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta$). В рассматриваемом нами случае двухфазной газопылевой дисковой системы этим слагаемым учитывается утрата импульса частицами пылевой фазы за счёт перехода массы части их в газовую фазу при испарении, или приобретение дополнительного импульса дисперсной фазой за счёт образования (из газовой составляющей) новых твёрдых частиц при конденсации. Тем не менее, далее этим слагаемым мы также будем в большинстве случаев пренебрегать, поскольку

ку практически оно всегда много меньше стоксовой силы трения $\mathbf{F}_{fric,\alpha} \equiv \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} \mathbf{w}_{\alpha\beta}$, возникающей из-за эффектов вязкости фаз [41] и точно равно нулю при отсутствии фазовых переходов. Важно лишний раз подчеркнуть, что в отличие от классических безынерционных соотношений Стефана–Максвелла для относительных скоростей компонентов $\mathbf{w}_{(jk)} = \mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}$, законы межфазной диффузии, описываемые обобщёнными соотношениями (2.17), учитывают инерцию относительного движения фаз.

Для двухфазной газопылевой дисковой среды соотношения (2.17) принимают вид уравнений движения газа и пыли

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{gd} \mathbf{w} \equiv (1-s) s \rho_d \rho_g \theta_{dg} \mathbf{w} = \rho_g (1-s) \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} + (1-s) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \rho_g (1-s) \mathbf{g} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_g \right), \\ -R_{dg} \mathbf{w} = \rho_d s \frac{d_d \mathbf{u}_d}{dt} + s \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \rho_d s \mathbf{g}, \end{array} \right. \quad (2.17^*)$$

где $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_g \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ – объёмная сила на единицу массы, связанная в общем случае как с гравитационным притяжением звезды, так и с гравитационным притяжением самого газопылевого облака. Заметим, что общий вид уравнений движения и неразрывности у нас и у различных авторов, изучающих газовзвеси применительно к аккреционным дискам, одинаков. Отличие связано лишь с наличием члена $-s(\partial p / \partial \mathbf{x})$ в уравнении движения (2.17*) для газа и отсутствием члена $s(\partial p / \partial \mathbf{x})$ в уравнении движения (2.17*) для пыли. Их появление в континуальной гетерогенной механике связано, в конечном счёте, с учётом эффекта присоединённых масс (из-за ускоренного движения твёрдых частиц относительно несущего газа, когда в последнем возникают возмущения порядка размера частиц) и силы Архимеда, которые при больших значениях ρ_d / ρ_g (характерных для газовых потоков с твёрдыми частицами) часто намного меньше других слагаемых уравнений движения [41]. Вместе с тем, поскольку эти силы пропорциональны не только плотности газа, но и локальному ускорению среды, либо разности локальных ускорений газовой среды и твёрдых частицы, вполне возможны ситуации, когда указанные дополнительные члены уравнений (2.17*) будут соизмеримы с аэродинамической силой Стокса.

Искомое диффузионное соотношение для вектора относительной скорости пыли и газа $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g)$ можно получить из тех членов уравнений (2.18), которые описывают действие трения, если каждый из них разделить на соответствующую величину $s_{\alpha} \rho_{\alpha}$, вычесть один из другого и выделить слагаемое с \mathbf{w} . Записывая истинные скорости фаз в виде $\mathbf{u}_d = (C_g \mathbf{w} + \mathbf{u})$ и

$\mathbf{u}_g = (-C_d \mathbf{w} + \mathbf{u})$ и предполагая, что $\rho_d \gg \rho_g$, в результате получим определяющее соотношение для \mathbf{w} (аналог закона Дарси для фильтрации)

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}_d \tilde{\rho}_g} R_{dg} \mathbf{w} \equiv \rho \theta_{gd} \mathbf{w} = \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} - \frac{d_d \mathbf{u}_d}{dt} + \frac{\rho_d - \rho_g}{\rho_g \rho_d} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\tilde{\rho}_g} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_g \right) \cong -\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.19)$$

которое далее будет рассматриваться нами при моделировании фазовой диффузии в диске, как основное. Отметим, что гравитационные силы при таком вычитании взаимно уничтожились, однако их воздействие на процесс движения газопылевой среды проявляется посредством градиента давления. При написании (2.19) нами не делалось различия между субстанциональными производными для отдельных фаз и системы в целом, т.е. предполагалось, что $d_d / dt \cong d_g / dt \cong d / dt$, что справедливо в механике смесей лишь в так называемом диффузионном приближении. В общем случае, т.е. при учёте ускорения диффузионных потоков относительно центра тяжести, надлежит использовать точное преобразование

$$\begin{aligned} \frac{d_d \mathbf{u}_d}{dt} - \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} &= \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w}_d \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}_d - \left(\mathbf{w}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}_g = \\ &= \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} + C_g \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) C_g \mathbf{w} - C_d \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) C_d \mathbf{w} = \\ &= \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} + \mathfrak{I}(\mathbf{w}^2) \approx \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\mathfrak{I}(\mathbf{w}^2) \equiv C_g \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) C_g \mathbf{w} - C_d \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) C_d \mathbf{w}$ – квадратичная по \mathbf{w} функция, которая часто может быть опущена [136], в частности, для пассивной мелкодисперсной примеси, поскольку для них величина $|\mathbf{w}|$ мала. Тогда определяющее диффузионное соотношение для вектора относительной скорости фаз принимает более сложный вид:

$$\rho \theta_{gd} \mathbf{w} \cong -\frac{d\mathbf{w}}{dt} - \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} - C_g \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) C_g \mathbf{w} + C_d \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) C_d \mathbf{w} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.19^*)$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления. Коэффициент трения R_{dg} между газовым и пылевым континуумами определяется в литературе различными формулами в зависимости от характерного диаметра

\tilde{d}_d частиц дисперсной фазы (см., например, [49,60]). Если характерный размер сферических твёрдых частиц $\tilde{d}_d \ll \lambda_g$, где λ_g – длина свободного пробега молекул в газовой фазе, то величина R_{dg} задаётся формулой Эпштейна [85]. Для крупнодисперсных сферических конденсатов с диаметрами, превышающими длину свободного пробега молекул газа, коэффициент сопротивления определяется законом Стокса [120]. Таким образом, для коэффициентов сопротивления R_{dg} (или θ_{dg}) гладкой шарообразной частицы имеем (см., например, [88,128])

$$R_{dg} = \begin{cases} \frac{2\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g c_{sg}}{\tilde{d}_d \rho_d}, & \text{когда } \tilde{d}_d \ll \lambda_g \text{ (режим Эпштейна),} \\ \frac{2\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g}{\tilde{d}_d \rho_d} C_D(\mathbf{Re}_d) |\mathbf{w}|, & \text{когда } \tilde{d}_d \gg \lambda_g \text{ (режим Стокса),} \end{cases} \quad (2.21)$$

или

$$\theta_{dg} = \begin{cases} \frac{2c_{sg}}{\tilde{d}_d \rho_d}, & \text{когда } \tilde{d}_d \ll \lambda_g, \\ \frac{2}{\tilde{d}_d \rho_d} C_D(\mathbf{Re}_d) |\mathbf{w}|, & \text{когда } \tilde{d}_d \gg \lambda_g. \end{cases} \quad (2.21^*)$$

Здесь c_{sg} – скорость звука в газе [см. (2.57)]; $\mathbf{Re}_d = \tilde{d}_d |\mathbf{w}| / \nu_g$ – число Рейнольдса для пыли; ν_g – коэффициент молекулярной кинематической вязкости газовой составляющей смеси, $\nu_g = \lambda_g c_{sg} / 2$; $C_D(\mathbf{Re}_d)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления (так называемая стандартная кривая сопротивления), который имеет достаточно сложный характер. В литературе известно значительное количество формул, аппроксимирующих стандартную кривую (см., например, [39,49,58]). В частности, в астрофизике широкое распространение получило выражение [131]

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = \begin{cases} 9\mathbf{Re}_d^{-1}, & \mathbf{Re}_d \leq 1, \\ 9\mathbf{Re}_d^{-0.6}, & 1 \leq \mathbf{Re}_d \leq 800, \\ 0.165, & \mathbf{Re}_d \geq 800. \end{cases} \quad (2.22)$$

На наш взгляд, не менее удобной является трёхчленная формула

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = 9\mathbf{Re}_d^{-1}(1 + 0.179\mathbf{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathbf{Re}_d), \quad (0.1 < \mathbf{Re}_d < 10^3), \quad (2.22^*)$$

достоинством которой является возможность применения в широком диапазоне значений \mathbf{Re}_d .

Следует отметить, что в реальных многофазных потоках условия обтекания частиц, как правило, существенно отличаются от идеализированных условий, в которых применима стандартная кривая. В газопылевом облаке космические частицы, имеют, в общем случае, неправильную форму и шероховатую поверхность, движутся неравномерно в турбулентном потоке газа, который является разреженным и сжимаемым. Каждый из названных факторов, разумеется, изменяет (порой существенно) условия обтекания частицы в диске и величину силы аэродинамического сопротивления. Рассмотрим кратко их влияние, не учитываемое, как правило, в астрофизической литературе.

1) Степень отличия формы частиц от шарообразной в гетерогенной механике принято охарактеризовывать коэффициентом формы β ($\beta \geq 1$), который представляет собой отношение поверхности реальной частицы к поверхности шара того же объёма. В работе [10] предложены формулы для вычисления аэродинамических коэффициентов сопротивления $C_D(\mathbf{Re}_d, \beta)$, которые в случае существенно неизометрической формы пылевых частиц имеют более высокие значения по сравнению со стандартной кривой.

2) Авторами работы [49] установлен факт увеличения (по сравнению со стандартной кривой) коэффициента сопротивления $C_D(\mathbf{Re}_d)$ частиц с заметной шероховатостью, если она соизмерима с толщиной пограничного слоя.

3) Турбулизация течения также оказывает существенное влияние на величину $C_D(\mathbf{Re}_d)$. Как отмечается в работе [50], по данным различных авторов, например, в области $20 < Re_d < 100$ значения C_D колеблются в пределах $(0.01-3)C_D^*$ (здесь и ниже C_D^* соответствует стандартной кривой). Важно отметить, что влияние турбулентности уменьшается с уменьшением числа Рейнольдса \mathbf{Re}_d . Для сравнительно небольших Re_d можно использовать формулы Лопеса и Даклера (см., например, [49])

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = \begin{cases} 60.75\varepsilon^{1/3}\mathbf{Re}_d^{-1}, & \mathbf{Re}_d < 50; \quad 0.05 < \varepsilon < 0.5; \\ 0.0498(1 + 150 / \mathbf{Re}_d)^{1.565} + 1.5\varepsilon, & 50 < \mathbf{Re}_d < \mathbf{Re}_d^*; \quad 0.07 < \varepsilon < 0.5, \end{cases}$$

где ε – относительная степень турбулентности, т.е. отношение среднеквадратичной пульсационной скорости к осреднённой скорости скольжения;

$\mathbf{Re}_d^* = \min\{0.9\mathbf{Re}_{crit}, 700\}$; \mathbf{Re}_{crit} – критическое значение числа Рейнольдса: $\ln \mathbf{Re}_{crit} = 5.477 - 15.8\varepsilon$ ($\varepsilon \leq 0.15$); $\ln \mathbf{Re}_{crit} = 3.371 - 1.75\varepsilon$ ($\varepsilon > 0.15$).

4) Значительное влияние на аэродинамическое сопротивление частиц оказывают сжимаемость и разреженность набегающего потока. Роль этих факторов определяется, прежде всего, значениями чисел Маха $\mathbf{Ma} = |\mathbf{u}_g| / c_{sg}$ и Кнудсена \mathbf{Kn} . В высокоскоростном течении газозвеси в диске значительную роль играет сжимаемость несущего газа. Из многочисленных обобщённых зависимостей, имеющих в литературе, приведём формулу Карлсона и Хоглунда (см., например, [49])

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = 9\mathbf{Re}_d^{-1}(1 + 0.179\mathbf{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathbf{Re}_d) \times \\ \times \frac{[1 + \exp(-0.427\mathbf{Ma}^{-4.63} - 3\mathbf{Re}_d^{-0.88})]}{1 + \mathbf{Re}_d^{-1}\mathbf{Ma}[3.82 + 1.28\exp(-1.25\mathbf{Ma}^{-1}\mathbf{Re}_d)]}, \quad (2.22^{**})$$

где $\mathbf{Re}_d < 100$, $\mathbf{Ma} < 2$. Здесь два первых сомножителя в числителе соответствуют стандартной кривой, третий учитывает влияние сжимаемости, а знаменатель – разреженности.

В работе [96] для области $\mathbf{Re}_d < 10^3$ приводится зависимость

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = (C_D^* - 2) \exp \left[-3.07\gamma^{1/2} \frac{\mathbf{Ma}}{\mathbf{Re}_d} \cdot \frac{1 + \mathbf{Re}_d(12/28 + 0.584\mathbf{Re}_d)}{1 + 11.28\mathbf{Re}_d} \right] + \\ + \frac{1}{\gamma^{1/2}\mathbf{Ma}} \left[\frac{5.6}{\mathbf{Ma} + 1} + 1.7 \left(\frac{T_d}{T} \right)^{1/2} \right] \exp \left(-\frac{\mathbf{Re}_d}{2\mathbf{Ma}} \right) + 2,$$

где T_d – температура твердых частиц.

5) При пониженном давлении газа в диске (например, Вассон [126] получил следующие оценки давления в центральной плоскости околосолнечного диска: $2 \cdot 10^{-5} - 10^{-1}$ г/см³ на $r = 1$ а.е. и $5 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-6}$ г/см³ на $r = 3$ а.е.) может возникнуть скольжения газовой составляющей среды по поверхности твёрдой частицы, что также приводит к уменьшению коэффициента аэродинамического сопротивления. Разреженность среды характеризуется числом Кнудсена $\mathbf{Kn} = \lambda_g / \tilde{d}_d$. Обычно различают четыре области значений \mathbf{Kn} : свободномолекулярное обтекание ($\mathbf{Kn} > 10$), переходный режим ($10 > \mathbf{Kn} > 0.25$), течение со скольжением ($0.25 > \mathbf{Kn} > 0.01$), континуальное обтекание (эффект разреженности отсутствует, $\mathbf{Kn} < 0.01$). Для первых трех областей коэффициент аэродинамического сопротивления можно представить в виде $C_D = \phi C_D^*$, где коэффициент ϕ определяет

ся известной формулой Милликена (см., например, [55])

$$\phi = \{1 + \mathbf{Kn}[1.155 + 0.471 \exp(-0.596 / \mathbf{Kn})]\}^{-1}.$$

С увеличением разреженности влияние сжимаемости на коэффициент сопротивления вырождается. Все перечисленные усовершенствования формулы (2.22) легко могут быть учтены при численном моделировании строения допланетного газопылевого диска, например, на стадии образования субдиска.

Возвращаясь к формуле (2.21*) для коэффициента $\theta_{dg}(\mathbf{Re}_d)$ заметим, что выражение (2.21*) удобны только для монодисперсной пыли с заданным характерным линейным размером включений \tilde{d}_d , так как в этом случае θ_{dg} не зависит от объёмной концентрации дисперсной фазы s и полной числовой плотности твёрдых частиц N_d . Однако, при учёте процессов коагуляции, происходящих в газопылевом допланетном облаке, т.е. с учётом многофракционности пылевой составляющей, целесообразно переписать (2.21*) в виде, явно зависящем от параметров s и N_d , которые определяются уравнением Смолуховского. При использовании формулы (2.16), выражение (7.2.21*) для $\theta_{dg}(s, N_d, \mathbf{Re}_d)$ преобразуется к виду

$$\theta_{dg} = \theta_{dg}(s, N_d, \mathbf{Re}_d) = \begin{cases} (4/3 \pi)^{1/3} \rho_d^{-1} s^{-1/3} c_{sg} N_d^{1/3}, & \text{когда } \tilde{d}_d \ll \lambda_g, \\ (4/3 \pi)^{1/3} \rho_d^{-1} s^{-1/3} N_d^{1/3} C_D(\mathbf{Re}_d) |\mathbf{w}|, & \text{когда } \tilde{d}_d \gg \lambda_g. \end{cases} \quad (2.23)$$

2.3. Кинетическое уравнение коагуляции

Рассмотрим теперь более детально методику расчёта величины $N_d(\mathbf{x}, t)$ в случае учёта многофракционности пылевой составляющей системы. Реальное допланетное облако полидисперсно, т.е. в элементарном макрообъёме δV присутствуют сконденсированные частицы разных размеров $d_{d,k}$. Этот фактор можно учесть, если разбить пылевую составляющую на конечное число фракций, каждая из которых характеризуется, вообще говоря, своими термогидродинамическими параметрами, т.е. вместо одной дисперсной фазы, необходимо рассматривать m фаз (где m – число фракций), каждая из которых имеет свои макрохарактеристики

$$d_{d,k}, \quad n_{d,k}, \quad s_{d,k} = n_{d,k} (\pi/6) d_{d,k}^3, \quad \rho_{d,k}, \quad \mathbf{u}_{d,k} \dots \quad (k = 1, \dots, m), \quad (2.24)$$

где $\mathbf{u}_{d,k}(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамическая скорость твёрдых частиц k -ой фракции.

Будем далее считать, что вещество разных фракций одно и то же ($\rho_{d,1} = \rho_{d,2} = \dots = \rho_{d,m} = \rho_d = \text{const}$) и что твёрдофазные конденсаты фракции «1» составляют группу частиц наименьшего размера (первичные частицы), фракции «2» – группу двойных частиц и т.д. до максимального размера. Для упрощения анализа процесса коагуляции, происходящего в $(m+1)$ - фазном полидисперсном потоке, предположим также, что все твёрдые частицы являются сферическими или близкими к ним по форме с диаметрами Ферета $d_{d,k}$. Так как размер одинаковых по химическому составу твёрдых частиц после слипания возрастает пропорционально кубическому корню из количества первичных конденсатов её составляющих $d_{d,k} = d_{d,1} \sqrt[3]{k}$, то объёмная концентрация дисперсных частиц k -ой фракции определяется соотношением

$$s_{d,k} = n_{d,k} (\pi / 6) d_{d,k}^3 = U_1 k n_{d,k}, \quad (2.25)$$

где $n_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ – числовая плотность частиц k -й фракции (их число в единице совокупного объёма газозвеси); $U_1 = (\pi / 6) d^3$, $d \equiv d_{d,1}$ – соответственно объём и диаметр одной частицы наименьшего размера. Тогда объёмное содержание $s(\mathbf{x}, t)$, распределённая массовая плотность $\tilde{\rho}_d(\mathbf{x}, t)$ и гидродинамическая скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{r}, t)$ всего пылевого континуума выражаются в виде

$$s \equiv \sum_{k=1}^m s_{d,k} = U_1 \sum_{k=1}^m k n_{d,k}, \quad \tilde{\rho}_d = \rho_d \sum_{k=1}^m s_{d,k}, \quad s \mathbf{u}_d = \sum_{k=1}^m s_{d,k} \mathbf{u}_{d,k}. \quad (2.26)$$

В дисперсной смеси, в которой макроскопические скорости фракций отличаются друг от друга, т.е. фракции j и k движутся друг относительно друга со скоростью $\mathbf{u}_{d,j} - \mathbf{u}_{d,k}$ ($j, k = 1, \dots, m$), будут происходить столкновения между частицами разных фракций, что приведёт к обмену массой, импульсом и энергией между фракциями. Учёт этого обстоятельства, важного на последней стадии образования субдиска (когда возможно появление в потоке фракции «отражённых» от субдиска частиц, имеющих отличную от «падающих» частиц среднюю или макроскопическую скорость) и на этапе образования планетезималей (после развала субдиска), сильно усложнит задачу моделирования эволюции допланетного газопылевого облака (см. [23]). В данной работе, однако, будет предполагаться, что частицы вещества («псевдомолекулы»), принадлежащие к различным пылевым

континуумам (фракциям), двигаются с одной и той же гидродинамической скоростью, $\mathbf{u}_{d,k} \equiv \mathbf{u}_d$ ($k = 1, \dots, m$).

Выше уже упоминалось, что в процессе аккумуляции крупных твёрдых частиц в газопылевом облаке основными механизмами формирования их размеров являются процессы дробления и коагуляции. Механизм дробления сталкивающихся твёрдых тел основательно изучен (см., например, [50]) и при необходимости может быть учтён; поэтому далее, для того чтобы не перегружать деталями задачу моделирования эволюции диска, распад частиц рассматриваться не будет. В этом случае изменение числовой плотности $n_{d,k}$ фракции k может произойти только в результате уменьшения числа частиц этой фракции при соединении их с другими пылевыми частицами, а также в результате увеличения количества частиц этой фракции в результате слипания более мелких конденсатов. Тогда, система кинетических уравнений, описывающая процесс коагуляции, может быть записана в виде [48]

$$\dot{n}_{d,k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - \sum_{j=1}^m K_{kj} n_{d,k} n_{d,j}, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (2.27)$$

где $\dot{n}_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ – полная скорость изменения концентрации $n_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ пылевых частиц k -ой фракции за счёт процессов коагуляции; $K_{kj}(d_k, d_j)$ – коэффициент (ядро) коагуляции для частиц k -го и j -го размеров, характеризующий эффективность коагуляционного взаимодействия, определяется как среднее число столкновений частиц размера d_k с частицами размера d_j в единице объёма в единицу времени при единичной концентрации того и другого сорта. Поскольку подобное взаимодействие двух разновеликих частиц в потоке усложнено влиянием окружающей среды, характером взаимодействия в ламинарном или турбулентном потоке, а также силовыми полями (гравитацией, электромагнитным полем, молекулярным взаимодействием), то определение ядра коагуляции представляет самостоятельную сложную задачу (см., например, [8,33]). Коагуляция частиц в газопылевом потоке может быть вызвана одновременным воздействием различных механизмов столкновения частиц. Это, прежде всего, гравитационная коагуляция, электрическая коагуляция, броуновская коагуляция, турбулентная коагуляция и различные их сочетания, типа турбулентно-броуновской коагуляции заряженных и нейтральных частиц, броуновской коагуляции заряженных частиц в гравитационном поле и т.п. В работе [26] проанализированы различные механизмы коагуляции применительно к

турбулентному газопылевому облаку и приведены соответствующие выражения для коэффициентов K_{kj} . С использованием (2.27), система мгновенных уравнения сохранения числа частиц k -ой фракции пылевой фазы принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{d,k} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_{d,k} \mathbf{u}_d) = \overset{\circ}{n}_{d,k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - n_{d,k} \sum_{j=1}^m K_{kj} n_{d,j},$$

$$(k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.28)$$

Из (2.28) следует балансовое уравнение для полного числа $N'_d = \sum_k n_{d,k}$ дисперсных частиц в единице совокупного объёма газозвеси, определяемого только процессами коагуляции (см. (2.15))

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{N'_d}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N'_d \mathbf{w}_d) = \sum_k \overset{\circ}{n}_{d,k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1} \sum_{j=1} K_{kj} n_{d,k} n_{d,j}, \quad (2.29)$$

причём правая часть (2.29) равна половине второго члена в правой части уравнения (2.28), поскольку увеличения общего числа пылевых частиц в единице объёма во время коагуляции не происходит. В пространственно-однородном случае, когда все константы коагуляции приблизительно одинаковы $K_{kj} = K$, уравнение (2.29) $\partial N'_d / \partial t = -(K/2) N'^2_d$ (с начальным условием $N'_d(0) = N'_{d0}$) имеет простое решение $N'_d(t) = N'_{d0} / (1 + qt)$, где $q = KN'_{d0} / 2$, которое позволяет определить (по наклону прямой) константу коагуляции K экспериментально.

Отметим, что суммирование левых и правых частей уравнений системы (2.28) по k , предварительно умноженных на массу отдельной пылевой частицы k -й фракции $m_{d,k} = \rho_d U_1 k$, приводит, с учётом закона сохранения

полной массы пылевых частиц в процессе коагуляции $\sum_k \overset{\circ}{m}_{d,k} n_{d,k} = 0$, к

уравнению (2.14*), позволяющему рассчитать полную объёмную концентрацию пыли s в двухфазном полидисперсном потоке.

Важно также иметь в виду, что количество нелинейных дифференциальных уравнений (2.28), требуемых для описания пространственно-временного распределения всей совокупности размеров пылевых частиц в диске, в общем случае неограниченно. Вместе с тем, при численном моделировании процессов коагуляции на основе системы (2.28) приходится использовать конечное (m) число уравнений. При этом, разумеется, возможна «потеря материала», поскольку некоторое количество частиц может ко-

агулировать до размеров, превышающих наибольший из учитываемых при таком подходе размеров $d_{d,m}$. В связи с этим, для наших целей более предпочтительной является другая, интегральная форма записи системы уравнений коагуляции (2.28).

Для получения этой формы предположим, что число частиц с объёмом от U до $U + dU$, находящихся в момент времени t , в элементарном объёме в окрестности точки \mathbf{x} , равно $f(U, \mathbf{x}, t)dU$. Функция $f(U, \mathbf{x}, t)$, характеризующая спектр размеров частиц, по определению удовлетворяет следующему нормировочному соотношению

$$N_d(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} f(U, \mathbf{x}, t)dU. \quad (2.30)$$

Очевидно, что формулой

$$s(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} U f(\mathbf{x}, t, U)dU \quad (2.31)$$

определяется объёмная суммарная концентрация пылевых частиц. Поскольку объём частиц k -го размера равен kU_1 , то числовая плотность $n_{d,k}$ частиц k может быть выражена через $f(\mathbf{x}, t, U)$ следующим образом :

$$n_{d,k} = f(kU_1, \mathbf{x}, t)U_1. \quad (2.32)$$

Если воспользоваться этим соотношением, то после операции $U_1 \rightarrow dU$ из (2.28) можно получить следующее кинетическое уравнение коагуляции

$$\frac{\partial f(U, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [f(U, \mathbf{x}, t) \mathbf{u}_d] \equiv \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{f(U, \mathbf{r}, t)}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [f(U, \mathbf{x}, t) \mathbf{w}_d] = \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^U f(W, \mathbf{x}, t) f(U-W, \mathbf{r}, t) K(W, U-W) dW - f(U, \mathbf{x}, t) \int_0^{\infty} f(W, \mathbf{x}, t) K(W, U) dW,$$

являющееся обобщением на случай пространственно-неоднородных движений газозвеси известного уравнения Мюллера для описания коагулирующей дисперсной среды [8]. Здесь $K(W, U)$ – симметричное по аргументам ядро коагуляции, определяющее поведение диспергированной смеси во времени. Для решения этого уравнения необходимо потребовать выполнения соглашений $f(U, \mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ при $U \rightarrow 0$ и $U \rightarrow \infty$, а также задать начальное условие $f(U, \mathbf{x}, 0) = f_0(U, \mathbf{x})$ и граничные условия.

Кинетическое уравнение (2.33) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого в общем случае можно получить только численными методами, поскольку члены, описывающие конвекцию пылевых частиц, к сожалению, чрезвычайно усложняют

стандартное уравнение коагуляции [100]. В литературе известен ряд точных аналитических решений нестационарного пространственно-однородного аналога уравнения (2.33) для некоторых простых по структуре ядер коагуляции (линейных по каждому из аргументов в отдельности), основанных на применении интегрального преобразования Лапласа (см., например, [8,44]). В связи с этим, следует отметить следующее. Наиболее теоретически продвинутыми к настоящему времени являются исследования процессов коагуляции для ядер $K(W,U) = \Lambda_0$, не зависящих от объёмов коагулирующих частиц. Решение уравнения коагуляции с ядром $K(W,U) = \Lambda_1 WU$ вряд ли можно считать физически реализуемым, поскольку оно не обладает свойствами непрерывности во времени (начиная с некоторого времени, число частиц в системе становится отрицательным [8]). Аналитическое решение кинетического уравнения с ядром, пропорциональным сумме объёмов коагулирующих частиц $K(W,U) = \Lambda_2(W+U)$, было получено Сафроновым [44] в связи с исследованиями эволюции допланетного газопылевого облака. Однако до сих пор не найдено ни одной дисперсной системы, для которой микрофизика коагуляционного процесса в точности приводила бы к ядрам подобного типа.

Вместе с тем при гидродинамическом моделировании газопылевого диска часто не требуется полного знания функции распределения частиц по размерам, а достаточно лишь информации о поведении во времени и в пространстве её нескольких первых моментов типа $N_d(\mathbf{x}, t)$, $s(\mathbf{x}, t)$ и т.п. В этом случае можно воспользоваться одним из возможных приближенных методов решения кинетического уравнения коагуляции, в частности, методом моментов. Ниже проиллюстрированы возможности этого метода на примере решения кинетического уравнения коагуляции (2.33) для случая, когда распределение частиц по размерам зависит от одной пространственной координаты z , что соответствует установившемуся режиму движения пыли, при осаждении твёрдых частиц под действием силы тяжести в субдиск.

2.4. Уравнение сохранения количества движения газопылевого вещества и излучения

При моделировании допланетного облака приходится решать уравнения радиационной гидродинамики для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осреднённые термодинамические и радиационные параметры газопылевой дисковой среды. При линейном размере совокупного элементарного объёма δV , значительно большего длины пробега излучения λ_{rad} , пренебрегать энергией и давлением излучения нельзя. Довольно очевидно, что в случае ло-

кального равновесия излучения с веществом, когда плотность энергии излучения $E_{rad} = aT^4 / \rho$ (на единицу массы), а давление излучения

$$p_{rad} = \frac{\rho E_{rad}}{3} = \frac{1}{3} a T^4, \quad (2.34)$$

в уравнениях гетерогенной механики следует везде к внутренней энергии $E(\mathbf{x}, t)$ и тепловому давлению $p(\mathbf{x}, t)$ вещества добавлять энергию и давление излучения, а также вводить в рассмотрение процесс лучистой теплопроводности. Здесь $a = 4\sigma / c$, σ , c – соответственно постоянная плотности излучения, постоянная Стефана-Больцмана и скорость света.

Мгновенное уравнение сохранения полного количества движения газопылевого вещества можно получить, например, суммируя уравнения движения отдельных фаз (2.17*). В результате дифференциальное уравнение сохранения импульса дисковой среды в целом (с учётом поля излучения), зависящее, в отличие от уравнения неразрывности (2.13), от относительного движения фаз, может быть записано в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right) = - \frac{\partial p_{sum}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_{sum}^* \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (2.35)$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) \right) \equiv \sum_k \sum_l \mathbf{i}_l \frac{\partial(a_k b_l)}{\partial x_k}$ – дивергенция диадика $\mathbf{a}\mathbf{b} \equiv \sum_k \sum_l \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k (a_k b_l)$;

$p_{sum}(\mathbf{x}, t)$ – полное давление, равное сумме теплового давления газопылевой смеси и давления излучения, $p_{sum} = p + p_{rad}$;

$$\mathbf{\Pi}_{sum}^* \equiv \mathbf{\Pi}_{sum} + \mathbf{\Pi}_{rel} = \mathbf{\Pi}_g + \mathbf{\Pi}_{rad} - (1-s)\rho_g \mathbf{w}_g \mathbf{w}_g - s\rho_d \mathbf{w}_d \mathbf{w}_d; \quad (2.36)$$

$\mathbf{\Pi}_{sum}(\mathbf{x}, t)$ – суммарный тензор вязких напряжений, равный сумме тензора вязких напряжений для гетерогенной смеси $\mathbf{\Pi} = \sum_{\alpha} \mathbf{\Pi}_{\alpha} \cong \mathbf{\Pi}_g$ (т.к. по пред-

положению $\mathbf{\Pi}_d \cong 0$) и тензора лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{rad}$;

$\mathbf{\Pi}_{\alpha}$ – тензор вязких напряжений фазы α , зависящий от тензора скоростей деформаций, определяемого полем скоростей соответствующей фазы;

$$\mathbf{\Pi}_{rel} \equiv - \sum_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = -(1-s)\rho_g \mathbf{w}_g \mathbf{w}_g - s\rho_d \mathbf{w}_d \mathbf{w}_d \quad (2.37)$$

– тензор «относительных» напряжений, возникающий из-за динамических эффектов относительного движения твёрдых частиц и газа (заметим, что в гетерогенных средах осложняются законы, описывающие относительное движение фаз, ибо это движение определяется не диффузионным меха-

низмом (столкновение молекул при их хаотическом движении), а процессами взаимодействия фаз как макроскопических систем (см., например, [23]); эти процессы описываются с помощью сил и более последовательного учёта инерции фаз; наличие тензора относительных напряжений в суммарном уравнении движения смеси приводит к кардинальному отличию гетерогенной механики от механики многокомпонентной, для которой возможно пренебрежение членами, содержащими величины второго порядка относительно диффузионных скоростей \mathbf{w}_α (так называемое диффузионное приближение в механике смесей); $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -\partial\Psi / \partial\mathbf{x}$ – вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi(\mathbf{r}, t)$ – гравитационный ньютоновский потенциал. Когда масса газопылевого облака составляет несколько процентов от массы центрального тела (или точнее, когда $M_{disk} / M_\otimes \leq h_{disk} / R$, где h_{disk} и R полутолщина и радиус диска соответственно (см., например, [95]) можно пренебречь самогравитацией частиц диска; в этом случае будем иметь

$$\Psi = \frac{GM_\otimes}{|\tilde{\mathbf{r}}|}, \quad \mathbf{g} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\Psi = \frac{GM_\otimes}{|\tilde{\mathbf{r}}|^3}\tilde{\mathbf{r}}, \quad (2.38)$$

где M_\otimes – масса центрального тела (звезды); G – гравитационная постоянная; $|\tilde{\mathbf{r}}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – центральный радиус-вектор, $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_k \mathbf{i}_k x_k$; центр

масс протозвезды здесь и далее принят за начало системы отсчёта. В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны

$$\Psi = GM_\otimes / |\tilde{\mathbf{r}}| + \Psi_{cr}, \quad (2.38^*)$$

и потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2\Psi_{cr} = 4\pi G\rho$, где ∇^2 – оператор Лапласа.

Тензор относительных напряжений Π_{rel} для газопылевого диска можно записать в нескольких эквивалентных формах, удобных при написании модельных уравнений движения в различных системах координат. Используя (2.6) и (2.12), будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_{rel} &\equiv -(1-s)\rho_g \mathbf{w}_g \mathbf{w}_g - s\rho_d \mathbf{w}_d \mathbf{w}_d = -(1-s)\rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g - s\rho_d \mathbf{u}_d \mathbf{u}_d + \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \\ &= -s\rho_d C_g \mathbf{w} \mathbf{w} = -s\rho_d C_g \left(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 w_1 w_1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 w_1 w_2 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 w_1 w_3 + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 w_2 w_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 w_2 w_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 w_2 w_3 + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1 w_3 w_1 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2 w_3 w_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 w_3 w_3 \right). \quad (2.39) \end{aligned}$$

Важно отметить, что при моделировании динамики допланетного облака эти дополнительные напряжения должны приниматься во внимание, когда в нем присутствуют фракции относительно крупных твёрдых частиц (≥ 1 мм), поскольку в этом случае имеется существенная разница скоростей между фазами, т.е. скорость относительного движения фаз \mathbf{w} по порядку величины может быть равной гидродинамической скорости суммарного континуума \mathbf{u} . Вместе с тем, для очень мелких частиц ($\ll 1$ мм, при числе Стокса $Stk \ll 1$), когда частицы успевают реагировать на изменение параметров несущей среды, может быть использовано приближение пассивной примеси – двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной (в общем случае многокомпонентной) среды с определёнными эффективными теплофизическими свойствами (плотностью, газовой постоянной, теплоёмкостью, и т.п.) [25]. В другом крайнем случае (при $Stk \gg 1$), когда крупные твёрдые частицы в дисковой системе не изменяют своего состояния в соответствии с изменениями параметров газа, также можно рассматривать однофазное течение, но уже чистого газа, причём обратное влияние крупных тел может быть учтено путём введения распределённых источников сопротивления. Наконец, в случае, когда $C_d \ll 1$, присутствие редких частиц газопылевой смеси не влияет на параметры течения газа и поэтому можно воспользоваться приближением единичной частицы; здесь вначале решаются уравнения движения газа, а затем по известным его параметрам определяются траектории частиц и изменение их состояния вдоль траекторий (см., например, [88]). Далее мы будем пользоваться, в основном, представлением тензора $\mathbf{\Pi}_{rel}$ через вектор скорости относительного движения фаз $\mathbf{w} \equiv \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g$.

Известно (см, например, [51]), что тензор лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{rad}$ по своей структуре похож на тензор вязких напряжений для вещества $\mathbf{\Pi}$, поэтому, если учитывать взаимодействие между веществом и излучением до членов самого низкого порядка по $|\mathbf{u}|/c$, то в компоненты $(\mathbf{\Pi}_{rad})_{ik}$ тензора лучистых касательных напряжений входят и следующие члены: $-c^{-2}(u_i(\mathbf{q}_{rad})_k + u_k(\mathbf{q}_{rad})_i + \delta_{ik}u_s(\mathbf{q}_{rad})_s)$, где \mathbf{q}_{rad} – вектор лучистого потока тепла, определенный формулой (2.48) (см., [93]), и поэтому можно написать

$$\mathbf{\Pi}_{sum} \equiv (\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_{rad}) \cong 2(\mu_g + \mu_{rad}) \overset{\circ}{\mathbf{D}} + \left(\xi_g + \frac{5}{3} \mu_{rad} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{U},$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{D} - \frac{1}{3} \mathbf{U} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right), \quad (2.40)$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ – тензор скоростей деформаций; $\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{transp} \right)$ – тензор

деформаций; $\mu_g(\rho, T)$, $\xi_g(\rho, T)$ – соответственно молекулярные коэффициенты динамической и объемной вязкости газа; \mathbf{U} – единичный тензор (или единичный диадик $\mathbf{U} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$); $\mu_{rad} = 4aT^4 / 15c\tilde{\kappa}\rho$ – коэффициент лучистой вязкости; $\tilde{\kappa}$ – полная непрозрачность среды (осреднённая по Росселанду), которая, в свою очередь, также зависит от ρ , s , N_d , T и химического состава газа [см. (2.72) и (2.73)].

2.5. Уравнение притока тепла для гетерогенной газопылевой среды и радиации в диске

Мгновенное уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии) для гетерогенной газопылевой среды в целом, с учётом сделанных выше предположений, может быть записано в виде [23]

$$\rho \frac{d}{dt}(E_{sum}) = - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_{sum} \right) - p_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) + \Phi_u + \sum_{\alpha} (\mathbf{J}_{\alpha} \cdot \mathbf{K}_{\alpha}). \quad (2.41)$$

Здесь $\mathbf{K}_{\alpha} \cong - \frac{d_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{dt} + \mathbf{F}_{\alpha} - \frac{1}{2\tilde{\rho}_{\alpha}} \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{w}_{\alpha\beta}$ – обобщенная термодинамическая

сила диффузии, включающая «инерционное слагаемое» и слагаемое, обязанное фазовым переходам [см. (2.18)]; $E_{sum} \equiv E + E_{rad}$ – полная внутренняя энергия дисковой системы (вещество плюс радиация) на единицу массы; $E(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\alpha} C_{\alpha} e_{\alpha}$ – внутренняя энергия вещества (отметим, что введённая

здесь в рассмотрение внутренняя энергия газопылевой смеси является истинной внутренней энергией смеси, поскольку не содержит вклада от кинетической энергии межфазной диффузии); $e_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $h_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ ($= e_{\alpha} + p / \rho_{\alpha}$) – соответственно парциальная внутренняя энергия и энтальпия (на единицу массы) вещества α -фазы; E_{rad} – плотность энергии излучения (на единицу массы), определяемая законом Стефана–Больцмана $E_{rad} = aT^4 / \rho$;

$\mathbf{q}_{sum} \equiv \mathbf{q} + \mathbf{q}_{rad}$ – плотность полного потока энергии в системе; \mathbf{q}_{rad} – удельный поток энергии, переносимой излучением (перенос энергии излучением должен учитываться всегда, поскольку он велик даже при малой плотности энергии излучения (из-за большой скорости фотонов)); \mathbf{q} – удельный поток энергии, связанный с тепловым движением частиц фазового вещества (т.е. определяемый теплопроводностью) и с переносом пар-

циальных энтальпий потоками фазовой диффузии; $\Phi_u \cong (\mathbf{\Pi}_{sum} : \nabla \mathbf{u})$ – диссипативная функция, представляющая собой скорость, с которой теплота порождается вязким трением газа в единичном объёме в единицу времени. При написании (2.41), использовано предположение об аддитивности термодинамических функций (внутренней энергии, энтальпии и т.п.) по массам входящих в гетерогенную систему фаз, что допустимо в случае пренебрежения вкладами в термодинамические функции от приповерхностных (кнудсеновских) слоёв твёрдых частиц.

Последнее слагаемое в уравнении (2.41), с учётом (2.17) и (2.18), может быть переписано в виде $\sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \cdot \mathbf{K}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot (-\mathbf{d}_{\alpha} + s_{\alpha} \partial p / \partial \mathbf{x})$, где $\mathbf{d}_g = -\mathbf{d}_d = R_{gd} \mathbf{w}$ (без учёта термофореза). Тогда для дополнительного источника тепла, связанного с диссипацией кинетической энергии диффузии, будем иметь (аналог джоулева нагрева для плазмы)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \cdot \mathbf{K}_{\alpha} &= -C_d \mathbf{w} \cdot \left(-\mathbf{d}_g + s_g \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right) + C_g \mathbf{w} \cdot \left(-\mathbf{d}_d + s_d \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right) = \\ &= R_{gd} |\mathbf{w}|^2 - s \sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right), \end{aligned}$$

поскольку $s^2 \ll 1$. Здесь $\sigma \equiv (\rho_d - \rho_g) / \rho$ – относительное превышение плотности пылевых частиц над плотностью газа; для малых твёрдых частиц $s \sigma \ll 1$ и последним слагаемым в этом соотношении можно пренебречь.

Важно отметить, что в уравнении притока тепла (2.41) фигурирует истинная внутренняя энергия газопылевой среды E на единицу массы, которая определена путём вычитания из полной энергии U_{tot} вещества дисковой системы потенциальной и кинетической энергий всех фаз [23]

$$\begin{aligned} E &= U_{tot} - \sum_{\alpha} C_{\alpha} \Psi_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} C_{\alpha} |\mathbf{u}_{\alpha}|^2 = U_{tot} - \Psi - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - \sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{1}{2} |\mathbf{w}_{\alpha}|^2 = \\ &= U_{tot} - \Psi - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - C_d C_g |\mathbf{w}|^2 / 2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Вместе с тем, если определить внутреннюю энергию газопылевой системы соотношением $E^* = U_{tot} - \Psi - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$, то она будет включать в себя и макроскопическую кинетическую энергию фаз в системе центра масс, т.е. $E^* = E + C_d C_g |\mathbf{w}|^2 / 2$. Если теперь записать уравнение (2.41) через переопределённую таким образом внутреннюю энергию E^* , то оно примет более привычный вид, т.е. не будет содержать слагаемых

$R_{gd} |\mathbf{w}|^2 - s\sigma \mathbf{w} \cdot (\partial p / \partial \mathbf{x})$. Действительно, балансовое уравнение для кинетической энергии межфазной диффузии, с учётом (2.19*) и векторного преобразования $(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot (\partial / \partial \mathbf{x}))) \mathbf{c} = \mathbf{ab} : (\partial / \partial \mathbf{x}) \mathbf{c}$, может быть записано в виде

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{C_d C_g}{2} |\mathbf{w}|^2 \right) \approx \rho C_d C_g \frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) \cong -R_{gd} |\mathbf{w}|^2 + \left(\mathbf{\Pi}_{rel} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \right) + s\sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (2.43)$$

поскольку, с точностью до членов второго порядка относительно \mathbf{w} , имеем

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(C_d C_g \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) &= \rho C_d C_g \frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) + \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \left\{ C_d \rho \frac{dC_g}{dt} + C_g \rho \frac{dC_d}{dt} \right\} = \\ &= \rho C_d C_g \frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) + (|\mathbf{w}|^2 / 2) (C_d - C_g) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho C_g C_d \mathbf{w}) \right) \approx \rho C_d C_g \frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right). \end{aligned}$$

И все-таки, используемая в уравнении притока тепла (2.41) величина E , по-видимому, более заслуживает наименования внутренней энергии, чем величина E^* , поскольку внутренняя энергия должна содержать только вклад от теплового движения и короткодействующих молекулярных взаимодействий и не содержать каких-либо макроскопических слагаемых (см. [13]).

Другие формы записи энергетического уравнения для газозвеси.

Далее нам потребуются энергетические уравнения, записанные в нескольких других формах. Введём суммарную энтальпию $H_{sum} \equiv H + H_{rad}$ вещества и излучения в диске, где

$$\left\{ \begin{aligned} H &\equiv \sum_{\alpha} C_{\alpha} h_{\alpha} = \sum_{\alpha} C_{\alpha} (e_{\alpha} + p / \rho_{\alpha}) = E + p / \rho, \\ H_{rad} &= E_{rad} + p_{rad} / \rho = \frac{4}{3} a T^4 / \rho, \quad H_{sum} = E_{sum} + p_{sum} / \rho. \end{aligned} \right. \quad (2.44)$$

Тогда, с учётом выражения (2.42) и преобразования $\rho dE_{sum} / dt + p_{sum} (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \rho dH_{sum} / dt - dp_{sum} / dt$, являющегося следствием определений (2.44) и уравнения неразрывности смеси (2.13), будем иметь

$$\rho \frac{dH_{sum}}{dt} = \frac{dp_{sum}}{dt} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_{sum} \right) + \Phi_u + R_{gd} |\mathbf{w}|^2 - s\sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (2.45)$$

Это уравнение соответствует первому закону термодинамики (т.е. закону сохранения тепловой энергии).

Перепишем теперь уравнение (2.45) в переменных $T(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$. Для большинства целей, относящихся к рассматриваемой нами проблеме моделирования эволюции аккреционного диска, достаточно будет аппроксимировать парциальные энтальпии газа и пыли (на единицу массы) с помощью выражений: $h_g = c_{Pg}T + h_g^0$, $h_d = c_{Pd}T + h_d^0$, где h_α^0 – энтальпия фазы α при нулевой температуре (так называемая теплота образования); $c_{P\alpha}$ – удельная теплоёмкость (при постоянном давлении) фазы α . Теплофизические величины $c_{P\alpha}$ и h_α^0 будем далее считать постоянными, аппроксимируемыми реальными дисковыми теплоёмкостями $c_{P\alpha}(T)$ и парциальные теплоты образования $h_\alpha^0(T)$ в ограниченном температурном интервале. Тогда можно написать

$$H = c_P T + \sum_{\alpha} C_{\alpha} h_{\alpha}^0, \quad H_{rad} = E_{rad} + p_{rad} / \rho = \frac{4}{3} a T^4 / \rho, \quad (2.46)$$

где

$$c_P = \sum_{\alpha} c_{P\alpha} C_{\alpha} = \rho^{-1} (\rho_g (1-s) c_{Pg} + s \rho_d c_d)$$

– полная удельная теплоёмкость системы «газ-твёрдые частицы» при постоянном давлении. Используя теперь выражения (2.46), а также уравнения (2.9), (2.12), (2.13), получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{dH}{dt} &\equiv \rho \sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{dh_{\alpha}}{dt} + \rho \sum_{\alpha} h_{\alpha} \frac{dC_{\alpha}}{dt} = \rho c_P \frac{dT}{dt} + \sum_{\alpha} h_{\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_{\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} \right) = \\ &= \rho c_P \frac{dT}{dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \right] + \sum_{\rho=1}^r q_{\rho} \xi_{\rho} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\sum_{\alpha} c_{P\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (2.47)$$

где соотношением $q_{\rho} \equiv \sum_{\alpha} h_{\alpha} \nu_{\alpha,\rho} = q_{\rho}^0 + \sum_{\alpha} c_{P\alpha} \nu_{\alpha,\rho}$ введена, так называемая теплота реакции ρ , равная разности произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагентов ($\nu_{\alpha,\rho} \equiv \sum_{k=1}^N m_{(k)} \nu_{\alpha(k),\rho}$); отметим, что величина $q_{\rho}^0 = \sum_{\alpha} h_{\alpha}^0 \nu_{\alpha,\rho}$ может интерпретироваться как теплота фазового перехода ρ при нулевой температуре. Последнее слагаемое в правой

части (2.47) представляет собой эффект, так называемых, «диффундирующих теплоёмкостей», который мал и потому его, как правило, не учитывают.

Полный поток энергии $\mathbf{J}_q \equiv \mathbf{q} - \sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}$, связанный с тепловым движением частиц вещества в гетерогенном континууме, согласно [23], может быть записан в традиционном виде

$$\mathbf{J}_q \equiv \mathbf{q} - \sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \equiv \mathbf{q} - \rho C_g C_d (h_d - h_g) \mathbf{w} = -\chi_g \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}},$$

или

$$\mathbf{q} = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} - \chi_g \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.48)$$

обобщающем на гетерогенные среды аналогичное соотношение, полученное для гомогенных многокомпонентных смесей (см. [12]). Напомним, что для диффундирующих смесей можно дать различные определения потока тепла, причём каждому определению потока тепла соответствует своя специфическая форма выражения для производства энтропии $\sigma_{(S)}$; выбор в каждом конкретном случае зависит от удобства рассмотрения проблемы. В выражении (2.48) мы пренебрегли термофоретическим эффектом, $k_{T\alpha} = 0$. Подобным же образом, если исключить из рассмотрения области диска близкие к поверхности протозвезды, можно записать для вектора лучистого потока тепла закон теплопроводности

$$\mathbf{q}_{rad} = -\chi_{rad} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.48^*)$$

Здесь $\chi_{rad} = 4acT^3 / (3\tilde{\kappa}\rho)$ – коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности, весьма сильно зависящий от температуры и плотности вещества; χ_g – молекулярный коэффициент теплопроводности газа.

Подставляя (2.47), (2.48) и (2.48*) в уравнение (2.44), окончательно найдём

$$\begin{aligned} \rho c_{p,sum} \frac{dT}{dt} = \frac{dp_g}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\chi_{sum} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) - 4p_{rad} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \right) \mathbf{u} + \\ + \Phi_u + R_{gd} \mathbf{w}^2 - s\sigma \mathbf{w} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial \mathbf{x}} - \sum_{\rho=1}^r q_{\rho} \xi_{\rho}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где введены обозначения $\chi_{sum} = \chi_g + \chi_{rad}$ и $c_{p,sum} = c_p + 16aT^3 / 3\rho$.

Наконец, получим балансовое уравнение для удельной энтропии $S = \sum_{\alpha} C_{\alpha} S_{\alpha}$ суммарного континуума, моделирующего газопылевую среду диска в целом, которое обычно называют общим уравнением переноса тепла (здесь S_{α} – энтропия единицы массы α -фазы). Воспользуемся для этого фундаментальным соотношением Гиббса (см., например, [42]) для однотемпературного гетерогенного многокомпонентного радиационного континуума в однодавленческом приближении, которое, будучи записанным вдоль траектории движения центра масс элементарного объема δV , принимает вид [23]

$$T \frac{dS_{sum}}{dt} = \frac{dE_{sum}}{dt} + p_{sum} \frac{d}{d} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^n \mu_{\alpha(k)} \frac{d}{dt} \left(\frac{S_{\alpha} n_{\alpha(k)}}{\rho} \right), \quad (2.50)$$

где $\mu_{\alpha(k)}$ – химический потенциал k -й компоненты в α -фазе. С помощью уравнений (2.9), (2.13) и (2.41) соотношению Гиббса (2.50) можно придать вид уравнения баланса

$$\rho \frac{dS_{sum}}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \frac{1}{T} \left(\mathbf{q}_{sum} - \sum_{\alpha} G_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \right) \right\} = \sigma_{(S)}, \quad (2.51)$$

где

$$\begin{aligned} 0 \leq T \sigma_{(S)} = & -(\mathbf{J}_q + \mathbf{q}_{rad}) \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{x}} - \sum_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\alpha} + \\ & + \left(\mathbf{\Pi}_{sum} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \right) + \sum_{\alpha} \left(\mathbf{\Pi}_{\alpha} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w}_{\alpha} \right) + \sum_{\rho=1}^r A_{\rho} \xi_{\rho} \end{aligned} \quad (2.52)$$

– рассеяние энергии в необратимых процессах, являющееся локальной мерой неравновесности системы; $G_{\alpha} = \rho_{\alpha}^{-1} \sum_{k=1}^n \mu_{\alpha(k)} n_{\alpha(k)} = e_{\alpha} + p / \rho_{\alpha} - T S_{\alpha}$ – свободная энергия Гиббса элементарной макро частицы α - фазы;

$$A_{\rho} \equiv - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_{\alpha(k)} \nu_{\alpha(k),\rho} \quad (2.53)$$

– химическое сродство ρ -й реакции, протекающей, в общем случае, между компонентами, находящимися в разных фазах.

Отметим, что конкретное представление скорости производства энтропии ($T \sigma_{(S)}$) в виде билинейной формы, используется в неравновесной термодинамике для установления методом Онзагера определяющих соот-

ношений, линейно связывающих между собой термодинамические потоки и сопряжённые им термодинамические силы в рассматриваемом необратимом процессе. В частности, именно таким образом были выведены в работе [23] обобщённые соотношения Стефана–Максвелла (2.17) для гетерогенных сред.

2.6. Термодинамическое уравнение состояния вещества диска

В качестве термического состояния многокомпонентной газовой фазы диска (уравнения для давления) будем использовать далее бароклинное уравнение состояния для смеси совершенных газов

$$p_g = \sum_{(k)} p_{(k)} = k_B T \sum_k n_{g(k)} = \rho_g \mathfrak{R}_g T, \quad (2.54)$$

где

$$\mathfrak{R}_g = k_B \sum_k n_{g(k)} / \rho_g = k_B / M_g;$$

M_g – средняя молекулярная масса частиц газовой составляющей, которая далее считается постоянной.

Используя исходное предположение о равенстве парциальных давлений в фазах $p_g = p_d = p$, запишем уравнение состояния вещества диска в виде

$$p = \rho \mathfrak{R} T, \quad \mathfrak{R}(C_g, s) = \mathfrak{R}_g \rho_g / \rho = \mathfrak{R}_g C_g / (1-s) \cong \mathfrak{R}_g C_g. \quad (2.55)$$

(заметим, что в рассматриваемом здесь случае величина \mathfrak{R} не является константой). Приближенное равенство в формуле (2.55) имеет место для случая газовой смеси с малым объёмным содержанием конденсированной фазы (т.е. когда $s \ll 1$, что далее предполагается; тем не менее, и в этом случае динамическое воздействие твёрдых частиц на газовый поток может оказаться существенным из-за огромного влияния силы гравитации). Таким образом, газопылевая дисковая среда в целом может рассматриваться как совершенный газ с показателем адиабаты γ и скоростью звука c_s , определяемыми соотношениями

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_p - \mathfrak{R}} \cong \frac{\rho_g c_{Pg} + s \rho_d c_{Pd}}{\rho_g (c_{Pg} - \mathfrak{R}_g) + s \rho_d c_{Pd}}, \quad 1 \leq \gamma \leq \gamma_g \equiv \frac{c_{Pg}}{c_{Pg} - \mathfrak{R}_g}, \quad (2.56)$$

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \mathfrak{R} T \cong c_{sg}^2 \frac{\gamma \rho_g}{\gamma_g \rho}, \quad c_s < c_{sg} \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right)_{S_g} = (\gamma_g \mathfrak{R}_g T)^{1/2}, \quad (2.57)$$

где γ_g и c_{sg} – показатель адиабаты и изотермическая скорость звука в чистом газе. Для газа солнечного состава, состоящего на 98% из водорода и гелия, показатель адиабаты $\gamma_g = 1.45$, а средняя молекулярная масса $M_g = 2.39$.

2.7. Уравнение переноса излучения для газопылевого диска. Оптические свойства пылинок

Лучистый теплообмен оказывает определяющее влияние на состояние и движение турбулизованного высокотемпературного допланетного облака. Между тем, взаимодействие лучистого теплообмена и турбулентности почти не исследовано в литературе, вследствие чего до последнего времени оно не учитывалось и при моделировании эволюции газопылевого диска. Так как в действительности такое взаимодействие может быть существенным (см., например, [18]), то далее будет предпринята попытка учесть его (хотя бы отчасти) в рамках развиваемого в работе подхода. В связи с этим, рассмотрим более детально некоторые основные понятия теории переноса излучения, которые понадобятся нам для указанных целей.

Излучение и поглощение фотонов описывается уравнением переноса излучения, которое для локально-равновесной (в любой точке пространства и в любой момент времени) газопылевой среды принимает вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \left(\Omega \cdot \frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{x}} \right) = \rho \kappa_\nu (B_\nu - I_\nu). \quad (2.58)$$

Известно, что рассеяние непосредственным образом не отражается на тепловом режиме среды. Именно поэтому в задачах радиационной гидродинамики рассеянием излучения, как правило, пренебрегают (что мы и будем делать далее) и рассматривают только истинный коэффициент ослабления κ_ν и истинную функцию источников излучения B_ν (без учёта рассеяния). Здесь $I_\nu \equiv I_\nu(\mathbf{x}, \Omega, t)$ – спектральная интенсивность излучения, определённая таким образом, что $I_\nu d\nu d\Omega$ описывает энергию фотонов в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, пересекающих в единицу времени единичный элемент поверхности с нормалью Ω в пределах телесного угла $d\Omega$, ориентированного в направлении Ω ; $B_\nu(T) \equiv (2h\nu^3/c^2)(\exp(h\nu/k_B T) - 1)^{-1}$ – функция Планка; h – постоянная Планка; $\kappa_\nu(\mathbf{x}, t)$ – полный спектральный коэффициент ослабления (непрозрачность), выражающийся через сечения элементарных физических процессов в газопылевой смеси соотношением

$$\rho\kappa_{\nu} = (1-s) \sum_k n_{g(k)} \sigma_{(k)}(\nu) + N_d \frac{\pi \tilde{d}_d^2}{4} Q_d(m(\nu), \tilde{d}_d); \quad (2.59)$$

$$\sigma_{(k)}(\nu) = \sigma_{a(k)}(\nu) [1 - \exp(h\nu / k_B T)] + \sigma_{s(k)}^{eff}$$

– сечение ослабления излучения частоты ν в расчёте на одну молекулу газа сорта k , равное сечению поглощения фотонов (исправленное на индуцированное испускание излучения) плюс эффективное сечение рассеяния; $Q_d = Q_{ds} + Q_{da}$; Q_{ds} , Q_{da} – соответственно факторы эффективности для рассеяния и поглощения света на пылевых частицах (безразмерные величины, рассчитываемые на основе теории Ми); $m(\nu)$ – комплексный показатель преломления вещества пылинки. С функцией I_{ν} связаны используемые в работе моменты:

$$E_{rad,\nu}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{c\rho} \int_{4\pi} I_{\nu}(\mathbf{x}, \Omega, t) d\Omega \quad (2.60)$$

– спектральная плотность энергии (на единицу массы вещества),

$$\mathbf{q}_{rad,\nu}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{4\pi} I_{\nu}(\mathbf{x}, \Omega, t) \Omega d\Omega \quad (2.61)$$

– спектральная поток энергии по направлению Ω . Полные плотность энергии и поток получаются интегрированием соответствующих монохроматических величин по частоте

$$E_{rad}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} E_{rad,\nu}(\mathbf{x}, t) d\nu, \quad \mathbf{q}_{rad}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{q}_{rad,\nu}(\mathbf{x}, t) d\nu. \quad (2.62)$$

Уравнение (2.58), записанное вдоль направления распространения излучения, принимает более простой вид

$$\frac{dI_{\nu}}{dl} = \rho\kappa_{\nu}(B_{\nu} - I_{\nu}). \quad (2.63)$$

Здесь l – координата вдоль луча; член $c^{-1} \partial I_{\nu} / \partial t$ в уравнении (2.58) далее будем опускать, поскольку характерные времена при движении газопылевой среды много больше, чем l^* / c , где l^* – длина луча. Если определить оптическую толщину слоя газопылевой среды (с длиной луча l) вдоль направления распространения излучения выражением

$$\tau_{\nu} = \int_0^l \rho\kappa_{\nu} dl, \quad (2.64)$$

то легко можно проинтегрировать уравнение (2.63); в результате получим следующее выражение для интенсивности излучения из области, имеющей полную оптическую толщину τ_v :

$$I_v(\tau_v) = I_v(0)\exp(-\tau_v) + \int_{\tau_{v1}=0}^{\tau_v} B_v(\tau_{v1})\exp[-(\tau_v - \tau_{v1})]d\tau_{v1}, \quad (2.65)$$

где $I_v(0)$ – постоянная интегрирования, которая имеет смысл интенсивности излучения в некоторой точке на луче, в которой примем координату l равной нулю, $l = 0$. При удалении точки $l = 0$ на очень большое расстояние из (2.65) следует

$$I_v \approx \int_{-\infty}^l B_v(l_1)\exp\left(-\int_{l_2=l_1}^l \rho\kappa_v(l_2)dl_2\right) \cdot \rho\kappa_v(l_1)dl_1. \quad (2.66)$$

Выражения (2.65) и (2.66) позволяют в идеале найти, при известных оптических свойствах среды (т.е. распределении $\kappa_v(\mathbf{x}, t)$) и граничных условий на центральной плоскости диска, интенсивность $I_v(\mathbf{x}, \Omega, t)$ в разных точках и по разным направлениям, после чего по формулам (2.61) и (2.62) можно будет рассчитать распределение лучистого теплового потока $\mathbf{q}_{rad}(\mathbf{x}, t)$.

Вместе с тем, в уравнения притока тепла (2.41) или (2.45) входит дивергенция потока излучения $(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}_{rad}$. Часто, при известном распределении I_v эту величину можно найти, не вычисляя \mathbf{q}_{rad} по (2.62). Проинтегрировав стационарное уравнение (2.58) по всему спектру частот и по телесному углу Ω , получим следующее общее выражение для вклада радиации в тепловой баланс газопылевой среды диска

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_{rad}\right) = -\int_{v=0}^{\infty} \int_{4\pi} \left(\Omega \cdot \frac{\partial I_v}{\partial \mathbf{x}}\right) d\Omega dv = \int_{v=0}^{\infty} \left\{ 4\pi\rho\kappa_v B_v(T) - \int_{4\pi} \rho\kappa_v I_v d\Omega \right\} dv, \quad (2.67)$$

где первый член соответствует спонтанно излучаемой, а второй – поглощаемой радиационной энергии в единице объёма в единицу времени. Вычисления вклада излучения в уравнение притока тепла (2.41) по формуле (2.67) в общем случае очень сложны. Однако они значительно упрощаются в следующих двух случаях, важных при моделировании различных этапов эволюции допланетного газопылевого облака:

1. При очень малой оптической толщине газопылевого диска. В этом случае в (2.67) можно пренебречь членом с I_v , т.е. в уравнении притока тепла можно принять

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_{rad} \right] \cong 4\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \rho \kappa_{\nu} B_{\nu}(T) d\nu. \quad (2.68)$$

При очень высоких температурах среды этот член может быть существенным даже при малой оптической толщине газа (см. [19]), например, в приповерхностном слое диска.

2. При очень большой оптической плотности газопылевого диска для излучения всех частот ν , существенных в энергетическом отношении. В этом случае применимо диффузионное приближение для лучистого переноса тепла (приближение лучистой теплопроводности), когда поле излучения I_{ν} оказывается лишь слегка анизотропным. При умножении уравнения переноса излучения (2.58) на Ω и интегрировании по всем углам, получим (с учётом того, что изотропный член с $\rho \kappa_{\nu} B_{\nu}$ не зависит от направления и потому не вносит вклада в интеграл)

$$\int_{4\pi} \Omega \left(\Omega \cdot \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega = -\rho \kappa_{\nu} \mathbf{q}_{rad,\nu}, \quad (2.69)$$

откуда для полного потока тепла будем иметь

$$\mathbf{q}_{rad} = -\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho \kappa_{\nu}} \int_{4\pi} \Omega \left(\Omega \cdot \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega. \quad (2.70)$$

Если для слегка анизотропного поля излучения в левой части (2.69) оставить в рассмотрении только наиболее значащую изотропную часть, то

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{rad} &= -\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho \kappa_{\nu}} \int_{4\pi} \Omega \left(\Omega \cdot \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega \cong -\frac{c}{4\pi} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho \kappa_{\nu}} \left(\frac{\partial B_{\nu}}{\partial \mathbf{x}} \int_{4\pi} \cdot \Omega \right) \Omega d\Omega = \\ &= -\frac{c}{3\rho} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \mathbf{x}} d\nu = -\frac{c}{3\rho} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{dB_{\nu}}{dT} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} d\nu = -\frac{4caT^3}{3\rho \tilde{\kappa}} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = -\chi_{rad} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где введена в рассмотрение, так называемая полная непрозрачность среды $\tilde{\kappa}(\rho, s, T, N_d)$, которая определяется как Росселандово среднее по обратным величинам $1/\kappa_{\nu}$ спектральной непрозрачности (см. [109])

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} \equiv \frac{1}{4aT^3} \int_{\nu=0}^{\infty} (1/\kappa_{\nu})(dB_{\nu}/dT)d\nu = \frac{\int_{\nu=0}^{\infty} (1/\kappa_{\nu})(dB_{\nu}/dT)d\nu}{\int_{\nu=0}^{\infty} (dB_{\nu}/dT)d\nu} \quad (2.72)$$

(поскольку $\int_{\nu=0}^{\infty} dB_{\nu} / dT d\nu = 4aT^3$). Диффузионное приближение справедливо, если поле излучения изотропно на расстояниях, сравнимых со средней длиной свободного пробега фотонов: $\lambda_{\nu} = 1 / \kappa_{\nu}$, или малых по сравнению с ней. Отметим также, что уравнение (2.71) с очень хорошей точностью выражает вектор лучистого потока \mathbf{q}_{rad} во внутренних областях газопылевого диска. Однако в приповерхностных слоях диска оптическая толщина порядка единицы или меньше, и поток уже не определяется этим локальным выражением. Поэтому нужно использовать нелокальное решение (2.68) уравнения переноса, которое обычно используют при изучении звёздных атмосфер.

Оптические свойства пылинок. Спектральную непрозрачность среды, связанную с пылевой составляющей, определяемую соотношением (2.59), удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \kappa_{\nu}(\rho, s, N_d) &= \frac{\pi \tilde{d}_d^2}{4\rho} N_d Q_d(m(\nu), d_d) = \\ &= \frac{\pi^{1/3} 6^{2/3}}{4\rho} s^{2/3} N_d^{1/3} \left[Q_{da}(m(\nu), d_d) + Q_{ds}(m(\nu), d_d) \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

явно зависящем от первых моментов s и N_d [см. (2.30) и (2.31)] функция распределения $f(U, \mathbf{x}, t)$ пылевых частиц по размерам. Расчёты рассеяния и поглощения света сферическими твёрдыми телами с комплексным показателем преломления m предполагается проводить на основе теории Ми. Заметим, что, например, $m = \infty$ соответствует бесконечной диэлектрической проницаемости, $m = 1.33$ соответствует частичкам льда (для видимых длин волн), $m = 1.33 - 0.09i$ соответствует грязному льду (льду с поглощающими примесями), $m = 1.27 - 1.37i$ соответствует пылинкам из железа.

Размер сферической твёрдой частицы обычно выражают через безразмерный параметр $x(\nu) = \pi d_d / \lambda$, где $\lambda = c / \nu$ – длина волны света. Для малых x фактор эффективности рассеяния света на пылевых частицах фактор эффективности рассеяния Q_{ds} становится очень малым; при $|mx| \ll 1$ имеем обычную формулу Рэлеевского рассеяния

$$Q_{ds} = \frac{8}{3} x^4 \left| (m^2 - 1) / (m^2 + 2) \right|^2, \quad (2.74)$$

а фактор эффективности поглощения в этом случае даётся соотношением

$$Q_{da} = -4x \operatorname{Im} \left[(m^2 - 1) / (m^2 + 2) \right], \quad (2.75)$$

где Im означает, что нужно брать мнимую часть.

2.8. Базовая система ламинарных уравнений движения газопылевой дисковой среды

Для удобства ссылок суммируем приведённые выше уравнения движения двухфазной полидисперсной среды, состоящей из газа и пыли. Эти уравнения (опорный базис модели), учитывающие относительное движение фаз, процессы коагуляции и фазовые переходы, а также различные физико-химические и радиативные процессы, предназначены, в частности, для континуального описания пространственно-временной эволюции состава, динамики и теплового режима газопылевого облака на последней ламинарной стадии эволюции допланетного диска (т.е. после затухания турбулентных движений; отметим, что в областях диска, близких к протосолнцу, полного затухания турбулентности может и не быть из-за возмущающего воздействия на среду магнитных полей, корпускулярных потоков и т.п.) в зонах субдиска, расположенных на различных расстояниях от протосолнца (см., например, [106]). Существенным также является и то, что эти уравнения, описывающие мгновенное состояние турбулизованного допланетного облака на любой стадии его эволюции, могут рассматриваться как исходные при изучении осреднённого движения дисковой системы, когда с целью феноменологического описания гидродинамических и физико-химических процессов приходится проводить теоретико-вероятностное осреднение стохастических уравнений движения. Итак, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right), \\
 \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{s\rho_d}{\rho} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_d \right) + \sum_{\rho=1}^r v_{d,\rho} \xi_{\rho}, \quad (\mathbf{J}_d = \rho C_d C_g \mathbf{w}, \quad C_g = 1 - \frac{s\rho_d}{\rho}, \rho_d = const), \\
 \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{N_d}{\rho} \right) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N_d C_g \mathbf{w}) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(W, U) f(W) f(U) dW dU + \sum_k \sum_{\rho=1}^r v_{d(k),\rho} \xi_{\rho}, \\
 \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \frac{\partial(p + p_{rad})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{\Pi}_{sum} - \mathbf{J}_d \mathbf{w}) \right) + \rho \frac{GM_{\otimes}}{|\tilde{\mathbf{r}}|^3} \tilde{\mathbf{r}}, \\
 (\rho c_{Vg} + 4aT^3/3) \frac{dT}{dt} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{J}_q + \mathbf{q}_{rad}) - (p + 4p_{rad}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) + \Phi_u + \\
 - s\rho_d C_g \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) - \sum_{\rho=1}^r q_{\rho} \xi_{\rho}, \quad (\rho_g \equiv \rho - s\rho_d), \\
 p = p_g = \rho_g \mathfrak{R}_g T, \quad p_{rad} = aT^4/3.
 \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Гидродинамические уравнения движения (2.76) должны быть дополнены соответствующими выражениями для скоростей фазовых переходов ξ_{ρ} и определяющими соотношениями для термодинамических потоков

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{\Pi}_{sum} = (\mu_g + \mu_{rad}) \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{transp} \right] + \left(\xi_g - \frac{2}{3} \mu_g + \mu_{rad} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{U}, \\
 \mathbf{w} \equiv \frac{1}{\rho \theta_{dg}} \left(- \frac{d\mathbf{w}}{dt} - \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial \mathbf{x}} \right), \\
 \mathbf{J}_q = - \chi_g \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{q}_{rad} = - \chi_{rad} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}},
 \end{array} \right. \quad (2.77)$$

а также выражениями для коэффициентов коагуляции $K(W, U)$ (см. [26]) и коэффициентов молекулярного переноса $\mu_g(s, T)$, $\xi_g(s, T)$, $\chi_g(s, T)$,

$\theta_{dg}(s, N_d, Re)$ и лучистой теплопроводности $\chi_{rad}(s, N_d, T)$. Для выписанной системы уравнений двухфазной механики (2.76)-(2.77) необходимо задать начальные и граничные условия, выбор которых требует в каждом конкретном случае специального рассмотрения, поскольку, как правило, моделируется не дисковая система в целом, имеющая, скажем, такие естественные границы, как экваториальная плоскость диска или его внешняя граница, а её отдельные области.

Важно подчеркнуть, что приведённая система уравнений (2.76)-(2.77), описывающая при заданных начальных и граничных условиях также и все детали мгновенного состояния стохастических термогидродинамических полей турбулизованного течения газопылевой дисковой среды и их вариации, зачастую не может быть решена с помощью современных вычислительных средств. Это обусловлено тем, что применение численных методов влечёт за собой аппроксимацию колоссального пространственно-временного поля параметров турбулизованного потока конечным числом узлов сетки, которое нужно использовать, чтобы решить конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход: решать гидродинамические уравнения (2.76)-(2.77) только для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осреднённые структурные параметры подобной стохастической среды, а все более мелкие масштабы моделировать феноменологически.

3. Уравнения гетерогенной механики для описания турбулентного газопылевого диска

Прежде чем приступить к конструированию феноменологической модели эволюции турбулентного газопылевого диска, отметим следующее: имеющиеся на сегодняшний день подходы к описанию многофазных турбулентных течений несовершенны (см., например, [5,60]), поскольку проблема обратного влияния твёрдых частиц на характеристики турбулентного течения всё ещё не решена. Это касается, в частности, способов моделирования коллективных эффектов, связанных с межчастичным взаимодействием, роль которого возрастает с увеличением концентрации и размера твёрдых частиц. Например, с межчастичными столкновениями связан механизм интенсивной хаотизации движения относительно крупных частиц (так называемая псевдо турбулентность), которые слабо увлекаются турбулентными пульсациями несущей среды (см., [61]). Таким образом, в силу отмеченной специфики турбулентных течений в гетерогенных средах, любые теоретические подходы к их описанию и развитые на их основе математические модели всегда будут ограничены, поскольку относятся, как

правило, к строго определённым диапазонам концентраций и инерционности дисперсной фазы.

Перейдём теперь к выводу базовых осреднённых гидродинамических уравнений для дисковой газопылевой турбулизованной среды, предназначенных для постановки и численного решения конкретных задач по взаимосогласованному моделированию физических и химических параметров допланетного облака на разных этапах его эволюции, и проанализируем физический смысл отдельных членов этих уравнений. Для того чтобы функции, входящие в эти уравнения, были гладкими и непрерывными с непрерывными первыми производными, необходимо провести осреднение стохастических уравнений (2.76) для газовой смеси по времени или по ансамблю возможных реализаций. Достигнутый в последнее время прогресс в развитии и применении полуэмпирических моделей турбулентности первого порядка замыкания (так называемых градиентных моделей) для однофазной сжимаемой жидкости (см. [4,24,27,52]), позволяет получить обобщения некоторых из подобных моделей и на случай сдвиговых течений двухфазной газопылевой среды, описываемой в данной главе в рамках однофазного континуума. Вывод замыкающих соотношений для турбулентных потоков фазовой диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений Рейнольдса мы проведём здесь традиционным способом, основанном на понятии пути смешения.

Далее при разработке моделей газопылевой среды диска, мы будем использовать, наряду с «обычными» средними значениями для некоторых пульсирующих параметров, так называемое средневзвешенное значение (среднее по Фавру [86]) для ряда других параметров, задаваемое, соотношением

$$\langle A \rangle \equiv \overline{\rho A} / \bar{\rho}; \quad (3.1)$$

при этом: $A = \langle A \rangle + A''$, $\overline{A''} = 0$; здесь A'' соответствующая турбулентная пульсация. Таким образом, для осреднения уравнений гетерогенной механики мы будем поступать точно также, как и в случае моделирования турбулентности многокомпонентной смеси (см. [27]). Для обозначения средних величин в этой главе использовано два символа: черта сверху означает осреднение по ансамблю (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают средневзвешенное осреднение. Двойной штрих используется для обозначения пульсаций относительно величины, осреднённой по Фавру. Заметим, что осреднение по Фавру ряда пульсирующих термогидродинамических параметров гетерогенного континуума в существенно упрощает запись и анализ осреднённых уравнений движения. Это связано с тем, что при обычном осреднении (без веса) корреляции вида $\overline{\rho' A'}$, $\overline{\rho' A' u'}$ и т.п. фигурируют в явном виде в осреднённых уравнениях движения, в то время как при осреднении по Фавру подобные корреляции

скрыты в соответствующих членах уравнений, которые по этой причине имеют более простой (традиционный) вид. В монографии автора [27] приведены некоторые свойства средневзвешенного осреднения, которые будут широко использованы и при построении модели гетерогенной турбулентности.

3.1. Осреднённые уравнения баланса масс газопылевого вещества. Коэффициент турбулентного переноса

Итак, будем рассматривать протопланетное турбулентное газопылевое облако, как континуальную среду, мгновенные движения которой могут быть описаны системой гидродинамических уравнений (2.76) при случайной выборке начальных и граничных условий. Это возможно для пространственно-временных масштабов, заключённых между масштабами молекулярных движений и минимальными масштабами турбулентности (линейный размер и время существования наименьших из вихрей), которые, как правило, на несколько порядков (по крайней мере, на три порядка) превосходят масштабы молекулярных движений (см., например, [4]).

Тогда макро уравнения турбулентного движения газопылевой среды можно получить путём теоретико-вероятностного осреднения по ансамблю стохастических уравнений (2.76), при использовании средневзвешенных значений для таких характеристик движения, как скорость $\langle \mathbf{u} \rangle$, температура $\langle T \rangle$, массовые концентрации $\langle C_\alpha \rangle$ и т.п. Однако, давление p и массовую плотность ρ газозвеси, а также все «молекулярные» термодинамические потоки $\mathbf{J}_\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{\Pi}, \xi_\rho$ удобно осреднять «обычным» образом, т.е. без использования весовых коэффициентов. Заметим, что процедура осреднения по Фавру уравнений движения для двухфазного течения газозвеси (описываемой далее в рамках одножидкостного континуума), выполнена здесь, по-видимому, впервые.

Осреднённое уравнение неразрывности. Легко видеть, что осреднённая массовая плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость газозвеси $\langle \mathbf{u} \rangle = \overline{\rho \mathbf{u}} / \bar{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) = 0, \quad \text{или} \quad \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) = 0. \quad (3.2)$$

По поводу этого уравнения важно подчеркнуть следующее: при известных трудностях моделирования двойных корреляций $\overline{\rho' \mathbf{u}'}$, появляющихся при «обычном» осреднении без веса уравнения неразрывности (2.13) для истинных значений плотности и гидродинамической скорости двухфазной системы, сохранение стандартной формы (3.2) для осреднённого уравне-

ния неразрывности является убедительным аргументом в пользу использования средневзвешенного осреднения $\langle \mathbf{u} \rangle$ для полной гидродинамической скорости течения (см. [24,27]).

При осреднении операторного соотношения $\rho dA / dt = \partial(\rho A) / \partial t + (\partial/\partial \mathbf{x}) \cdot (\rho A \mathbf{u})$, с учётом уравнения (3.2), получим широко используемое далее соотношение

$$\begin{aligned} \overline{\rho \frac{dA}{dt}} &= \overline{\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}} + \left(\overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho A \mathbf{u})} \right) = \\ &= \overline{\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}} + \left(\overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [\bar{\rho} \langle A \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \rho A \mathbf{u}'']} \right) = \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle A \rangle + \left(\overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_A^{turb}} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{J}_A^{turb} \equiv \overline{\rho A \mathbf{u}''} = \bar{\rho} \langle A \mathbf{u}'' \rangle \quad (3.4)$$

– так называемый, турбулентный поток, связанный с переносом субстанции A турбулентными пульсациями гидродинамической скорости гетерогенной системы.

Приведём уже здесь формулу для турбулентного потока \mathbf{J}_v^{turb} удельного объёма $v(\mathbf{x}, t)$ ($\equiv 1/\rho$). Поток \mathbf{J}_v^{turb} играет важную роль в рассматриваемом подходе, поскольку фигурирует в осреднённых уравнениях движения газозвеси, в частности, в осреднённом энергетическом уравнении. Используя соотношение $v'' = -\rho' / \rho \bar{\rho}$, которое следует непосредственно из определения пульсации v'' ($v'' = v - \langle v \rangle = 1/\rho - 1/\bar{\rho} = -\rho' / \rho \bar{\rho}$), из (3.4) легко получить

$$\mathbf{J}_v^{turb} \equiv \overline{\rho v'' \mathbf{u}''} = -\overline{\rho' \mathbf{u}''} / \bar{\rho} = \overline{\mathbf{u}''}. \quad (3.5)$$

Далее везде будем исходить из того, что в газопылевом потоке флуктуируют только объёмное содержание пыли s и истинная плотность газа ρ_g (это ключевое предположение развиваемого далее подхода); тогда из формулы (2.2) следует

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \cong (1 - \bar{s}) \frac{\rho'_g}{\bar{\rho}} + \langle \sigma \rangle s' = \langle C_g \rangle \frac{\rho'_g}{\bar{\rho}_g} + \langle \sigma \rangle s', \quad (3.6)$$

где введено обозначение

$$\langle \sigma \rangle \equiv (\rho_d - \bar{\rho}_g) / \bar{\rho} \cong \rho_d / \bar{\rho} \quad (3.7)$$

для осреднённого превышения плотности пылевых частиц над плотностью газовой фазы и использовано выражение

$$\langle C_g \rangle \equiv \frac{\overline{(1-s)\rho_g}}{\bar{\rho}} \cong \frac{(1-\bar{s})\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}} \cong \frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}}, \quad (3.8)$$

для осреднённой массовой концентрации газовой фазы; при этом

$$\langle C_d \rangle \equiv \rho_d \bar{s} / \bar{\rho} \cong \bar{s} \langle \sigma \rangle, \quad \langle C_g \rangle + \langle C_d \rangle = 1.$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает следующее важное выражение для турбулентного потока удельного объёма \mathbf{J}_v^{turb} в газопылевой среде

$$\mathbf{J}_v^{turb} \equiv -\overline{\rho' \mathbf{u}''} / \bar{\rho} = -\langle \sigma \rangle \overline{s' \mathbf{u}''} - \left(1 - \frac{\rho_d \bar{s}}{\bar{\rho}} \right) \frac{\overline{\rho'_g \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g}. \quad (3.9)$$

Следует отметить, что приведённые выше выражения и для величин ρ' и $\langle C_g \rangle$ (как и некоторые подобные им, которые будут появляться в дальнейшем в ходе построения модели гетерогенной турбулентности) справедливы лишь в том случае, когда справедливы неравенства $\overline{A B'} / \bar{A} \bar{B} \ll 1$ и $\langle A B'' \rangle / \langle A \rangle \langle B \rangle \ll 1$ для любых (не равных скорости газопылевого потока \mathbf{u}) пульсирующих термодинамических параметров A и B ; малость подобного рода отношений далее всюду нами предполагается без специальных оговорок.

Осреднённое уравнение диффузии дисперсной составляющей дисковой системы. Применим теперь оператор осреднения (3.3) к диффузионному уравнению (2.12) для дисперсных частиц; в результате получим следующее балансовое уравнение для концентрации пыли:

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle C_d \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\mathbf{J}}_d + \mathbf{J}_d^{turb}) = \overline{\sigma_{dg}}, \quad \overline{\sigma_{dg}} \equiv \sum_{\rho=1}^r v_{d,\rho} \bar{\xi}_{\rho}. \quad (3.10)$$

Здесь $\langle C_d \rangle = \rho_d \bar{s} / \bar{\rho}$; $\bar{\mathbf{J}}_d$ – осреднённый «молекулярный» диффузионный поток пыли, определяемый соотношением [см.(2.12)]

$$\bar{\mathbf{J}}_d \equiv \overline{\rho C_d C_g \mathbf{w}} \cong \bar{\rho} \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \cong \rho_d \frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}} \bar{s} \bar{\mathbf{w}}; \quad (3.11)$$

$$\mathbf{J}_d^{turb} \equiv \overline{\rho C_d'' \mathbf{u}''} = \rho_d \overline{s'' \mathbf{u}''} \quad (3.12)$$

– так называемый, турбулентный поток диффузии вещества дисперсной фазы; заметим, что для турбулентного диффузионного потока газа можно написать

$$\mathbf{J}_g^{turb} \equiv \overline{\rho C_g'' \mathbf{u}''} = -\overline{\rho C_d'' \mathbf{u}''} = -\mathbf{J}_d^{turb}.$$

В случае, если записать турбулентный поток пыли в виде $\mathbf{J}_d^{turb} = \rho_d \bar{s} \mathbf{J}_v^{turb} + \rho_d \overline{s' \mathbf{u}''}$, то, с учётом (7.3.9), можно получить следующую формулу для турбулентного потока удельного объёма

$$\mathbf{J}_v^{turb} = -\langle \sigma \rangle \frac{\bar{\rho}}{\rho_d \bar{\rho}_g} \mathbf{J}_d^{turb} - (1 - \bar{s}) \frac{\overline{\rho_g' \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g}, \quad (3.13)$$

которая будет использована в дальнейшем.

Для замыкания осреднённого диффузионного уравнения (3.10) необходимо иметь определяющее соотношение для турбулентного диффузионного потока пыли $\mathbf{J}_d^{turb} \equiv \bar{\rho} \langle C_d'' \mathbf{u}'' \rangle$. Известно, что имеется несколько подходов к моделированию подобного рода корреляционных моментов второго порядка, различающихся степенью сложности. Здесь мы ограничимся наиболее простым градиентным соотношением, которое получим традиционным способом, вводя понятие пути смешения.

Итак, будем полагать, что перенос каких-либо полевых характеристик A газопылевого потока турбулентными пульсациями среды происходит как исключительно диффузионный процесс и что можно допустить существование некоторого эффективного пути смешения ξ_A субстанции A , представляющего собой расстояние, на которое перемещаются турбулентные моли (вихри) в потоке, прежде чем они разрушатся за счёт взаимодействия с другими возмущениями. Если обозначить через A_L'' лагранжеву турбулентную пульсацию переносимой субстанции A , соответствующую эйлеровой пульсации A'' , а через ξ_A – эффективный путь смешения, то

можно написать $A_L'' = A'' + \left(\xi_A \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle A \rangle \right)$. Будем теперь считать, что вихри, смещаясь на расстояние ξ_A сохраняют в лагранжевом объёме ту же

удельную плотность пыли, которой она обладала на исходном уровне (предполагается, что пылевая субстанция обладает свойством неуничтожимости: количество её в элементарном объёме не изменяется за время, в течение которого она движется, не смешиваясь с окружающим газом); тогда $(C_d)''_L \equiv 0$, или $C_d'' = - \left(\xi_d \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle C_d \rangle \right)$. Отсюда диффузионный поток \mathbf{J}_d^{turb}

пылевой составляющей газозвеси в рамках градиентных представлений

равен

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d^{turb} &\equiv \overline{\rho C_d'' \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} \langle \mathbf{u}'' \xi_d \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle C_d \rangle = \\ &= -\bar{\rho} \left(\mathbf{D}_d^{turb} \cdot \frac{\partial \langle C_d \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right) = -\bar{\rho} \rho_d \left(\mathbf{D}_d^{turb} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь диада $\mathbf{D}_d^{turb} \equiv \langle \mathbf{u}'' \xi_d \rangle$ определяет несимметричный тензор коэффициентов турбулентной диффузии пыли, учитывающий в общем анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций скорости и концентрации твёрдых частиц вдоль разных осей координат. Соотношение (3.14) эквивалентно утверждению, что турбулентный поток пылевой фазы пропорционален градиенту средней концентрации $\langle C_d \rangle$ и имеет по отношению к нему обратное направление. Важно при этом иметь в виду, что применение градиентной гипотезы не исключает всех затруднений, связанных с проблемой замыкания, поскольку необходимо ещё определить (экспериментально или на базе физического анализа) соответствующие коэффициенты турбулентной диффузии.

В случае изотропного турбулентного поля можно считать, что тензор \mathbf{D}_d^{turb} шаровой, $\mathbf{D}_d^{turb} = \mathbf{U} D_d^{turb}$, т.е. определяется одним коэффициентом турбулентной диффузии пыли $D_d^{turb}(\mathbf{r})$ (который является некоторой статистической характеристикой турбулентности газозвеси); тогда

$$\mathbf{J}_d^{turb} = -\bar{\rho} D_d^{turb} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle C_d \rangle \cong -D_d^{turb} \frac{\rho_d \bar{\rho}_g}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \mathbf{x}} - \bar{s} \frac{\partial \ln \bar{\rho}_g}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.15)$$

и осреднённое диффузионное уравнение (3.10) принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{D \langle C_d \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \bar{\mathbf{w}} - \frac{\bar{\rho} v^{turb}}{\mathbf{Sc}^{turb}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle C_d \rangle \right\} = \bar{\sigma}_{dg}. \quad (3.10^*)$$

Здесь v^{turb} – турбулентный аналог коэффициента кинематической вязкости газопылевой смеси; $\mathbf{Sc}^{turb} \equiv v^{turb} / D_d^{turb}$ – турбулентное число Шмидта для дисперсной фазы (безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от природы пылевой субстанции и являющийся некоторой функцией безразмерных характеристик потока). В рамках градиентной теории число Шмидта вычисляется по формуле $\mathbf{Sc}^{turb} \equiv \xi_u / \xi_d$, где ξ_u – длина пути смешения по скорости. Заметим, что впервые зависимость числа Шмидта от концентрации пылевых частиц была получена в работе [1].

Коэффициент турбулентного переноса; число Стокса. Отметим, что коэффициенты турбулентного переноса в любой турбулентной среде, в отличие от соответствующих коэффициентов молекулярного переноса, описывают не просто её теплофизические свойства, но и состояние турбулентного поля и потому непосредственно зависят от масштаба осреднения пульсирующих термогидродинамических параметров. Именно по этой причине способ введения осреднённых характеристик турбулентного движения газозвеси является решающим при разработке методов экспериментального определения подобного рода коэффициентов переноса. В основе наиболее продвинутого подхода к моделированию коэффициентов турбулентной диффузии лежит предположение о полном увлечении частиц турбулентными пульсациями того масштаба, который играет основную роль в механизме сближения частиц (приближение пассивной примеси). Если твёрдые частицы очень малы, и в силу этого их движение практически ничем не отличается от движения несущих молекул газа, то для них имеет место равенство коэффициентов турбулентной диффузии частиц пыли D_d^{turb} и турбулентной вязкости ν^{turb} газа. В этом случае D_d^{turb} зависит только от масштаба турбулентных пульсаций несущего газа и оценивается, например, выражением

$$D_d^{turb} \cong \nu^{turb} = \sqrt{bl} \cong (\varepsilon l)^{1/3} l = \varepsilon^{1/3} l^{4/3}, \text{ когда } l > \lambda_K, \quad (3.16)$$

в котором использованы следующие обозначения: b – турбулентная энергия газопылевой среды в целом [(см. (3.26)]; $\varepsilon \cong b^{3/2} / l \cong v_g^3 / \lambda_K^4$ – скорость диссипации турбулентной энергии газа [см. (3.44*)]; $\lambda_K \cong (v_g^3 / \varepsilon)^{1/4}$ – колмогоровский (внутренний) масштаб турбулентности; $l(\mathbf{r})$ – длина пути перемешивания по Прандтлю (числовой множитель можно включить в значение l). В дальнейшем мы будем называть l пространственным масштабом турбулентности в данной точке потока.

Следует, однако, отметить, что многочисленные экспериментальные данные [39] подтверждают равенство $D_d^{turb} \cong \nu^{turb}$ лишь для очень мелких частиц, когда безразмерное число Стокса в крупномасштабном пульсационном движении $Stk \ll 1$. Заметим, что в общем случае для турбулизованного гетерогенного потока можно ввести несколько чисел Стокса Stk , равных отношению времени динамической релаксации пылевых частиц к тем или иным временным масштабам течения (например, к временному колмогоровскому масштабу турбулентности $\tau_K \cong (v_g / \varepsilon)^{1/2}$, или к крупномасштабному пульсационному движению среды $\tau_L \propto b / \varepsilon$), которые характеризуют инерционность частиц по отношению к выбранному масштабу течения в турбулентном потоке. В случае кеплеровского дифференциаль-

ного вращения твёрдых частиц в диске, где имеется градиент осреднённой скорости в радиальном направлении, важно учитывать инерционность частиц при анализе процесса релаксации осреднённых скоростей фаз. Для этого удобно ввести число Стокса в осреднённом движении, которое мы запишем в следующем виде $\mathbf{Stk} = \omega_{turb} \tau_{relax}$, где τ_{relax} – время динамической релаксации (динамической инерционности) частиц; ω_{turb} – нижний предел частоты турбулентных пульсаций несущего газа в диске, принадлежащий наиболее крупным вихрям с масштабом L (макро масштаб турбулентности); тогда частота ω_{turb} определяет медленные макроскопические изменения параметров течения (которые, вообще говоря, не связаны с турбулентностью) и согласно Сафронову [44] задаётся в виде $\omega_{turb} = \Omega_{K,mid}$, где $\Omega_{K,mid} \equiv \sqrt{GM_{\otimes} / \tilde{r}^3}$ – орбитальная частота (кеплеровская угловая скорость в районе центральной плоскости околозвездного диска). В работе [70] эта оценка была несколько уточнена $\omega_{turb} \approx \zeta \Omega_{K,mid}$, где $\zeta \approx 0.0126$.

Для малых сферических частиц (например, с диаметром $\ll 1$ см на 1 а.е., или ~ 600 см на 10 а.е.) время динамической релаксации определяется законом Эпштейна [см. (2.21)]

$$\tau_{relax}^{Ep} = \frac{\tilde{\rho}_d \tilde{\rho}_g}{\rho R_{dg}} = \frac{\rho_d \tilde{d}_d}{2\rho c_{sg}}, \quad \tilde{d}_d < \lambda_g \quad (3.17)$$

(длина свободного пробега молекул газа $\lambda_g \sim 1$ см на 1 а.е.). Однако, для грубодисперсных сферических частиц эта формула несколько видоизменяется. Наиболее простое выражение для τ_{relax} можно получить, когда число Рейнольдса для пыли $\mathbf{Re}_d = \tilde{d}_d |\mathbf{w}| / \nu_g = 2\tilde{d}_d |\mathbf{w}| / \lambda_g c_{sg}$ имеет достаточно малые значения, $\mathbf{Re}_d < 1$ (что имеет место для, так называемых, стоксовых частиц). Это неравенство справедливо, например, для частиц с диаметрами между 1 и 10 см на 1 а.е., и между 600 и 1000 см на 10 а.е. [79]. В этом случае, согласно формуле (2.22), коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D(\mathbf{Re}_d) = 9\mathbf{Re}_d^{-1}$ и время динамической релаксации τ_{relax} будет определяться законом Стокса ($\tilde{d}_d > \lambda_g$)

$$\tau_{relax}^{St} = \frac{\tilde{\rho}_d \tilde{\rho}_g}{\rho R_{dg}} = \frac{\tilde{d}_d \rho_d}{2\bar{\rho} C_D(\mathbf{Re}_d) |\mathbf{w}|} \cong \frac{\tilde{d}_d \rho_d \mathbf{Re}_d}{18\bar{\rho} |\mathbf{w}|} = \frac{\rho_d \tilde{d}_d^2}{9\bar{\rho} c_{sg} \lambda_g} = \frac{\rho_d \tilde{d}_d^2}{18\bar{\rho} \nu_g}, \quad (3.18)$$

Таким образом, инерционность стоксовой частицы зависит от харак-

теристик среды, в которой она движется. Кроме того, если частицы не слишком малы (и в силу этого увлекаются несущими их молями газа не полностью), то их относительные скорости, приобретаемые за счёт турбулентных пульсаций, существенно зависят от их массы. Заметим, что в случае движения не стоксовой частицы её инерционность зависит от числа Рейнольдса для пыли \mathbf{Re}_d и может быть записана в виде

$$\tau_{relax} = \tau_{relax}^{St} / C(\mathbf{Re}_d), \quad (3.18^*)$$

где

$$C(\mathbf{Re}_d) = \begin{cases} 1 + 0.179\mathbf{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathbf{Re}_d, & \mathbf{Re}_d \leq 10^3; \\ 0.0183\mathbf{Re}_d, & \mathbf{Re}_d > 10^3 \end{cases}$$

– некоторая поправочная функция, учитывающая влияние сил инерции на время релаксации не стоксовой частицы (коэффициент аэродинамического сопротивления частицы равен $C_D(\mathbf{Re}_d) = 9\mathbf{Re}_d^{-1}C(\mathbf{Re}_d)$). Разность пульсационных скоростей частиц разного размера обуславливает их сближение и увеличивает вероятность столкновений. С этим обстоятельством связан также и инерционный механизм коагуляции частиц в турбулентном потоке. Таким образом, для полидисперсной дисковой среды справедлива формула (ср., например, [70])

$$\mathbf{Sc}^{turb} = \frac{v^{turb}}{D_d^{turb}} \cong (1 + \mathbf{Stk}) \sqrt{1 + 3|\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2b}, \quad \mathbf{Stk} = \zeta \Omega_{K,mid} \frac{\rho_d \tilde{d}_d^2}{18\rho_v g C(\mathbf{Re}_d)}. \quad (3.19)$$

Определяющее уравнение для осреднённой скорости относительного движения фаз. Осредняя определяющее уравнение (2.19*) для актуальных значений вектора \mathbf{w} , в результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \theta_{gd} \bar{\mathbf{w}} &\cong -\frac{D\bar{\mathbf{w}}}{Dt} - \overline{\left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= -\frac{D\bar{\mathbf{w}}}{Dt} - \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{w}} \right) - \overline{\left(\mathbf{u}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w}' \right)} - \overline{\left(\bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle} - \overline{\left(\mathbf{w}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}''} + \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} - \\ &\quad - \overline{\left(\bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J}_v^{turb}} = -\frac{D\bar{\mathbf{w}}}{Dt} - \overline{\left(\bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle} + \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При написании этого соотношения мы пренебрегли пульсациями \mathbf{w}' относительной скорости (что справедливо лишь для тех случаев, когда скорость осреднённого относительного движения фаз $\bar{\mathbf{w}}$ намного больше скорости

пульсаций w' , т.е. для достаточно крупных частиц) и произведениями осреднённых термодинамических потоков различной природы, как членами второго порядка малости. Кроме этого здесь было использовано тождественное преобразование

$$\overline{\frac{dA}{dt}} \equiv \frac{D\bar{A}}{Dt} + \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{A} \right) + \left(\mathbf{u}'' \cdot \frac{\partial A'}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.21)$$

которое может быть получено путём осреднения субстанциональной производной dA / dt , предварительно записанной в виде

$$dA / dt = DA / Dt + \mathbf{u}'' \cdot (\partial A / \partial \mathbf{r}) = DA / Dt + \left(\mathbf{u}'' \cdot (\partial \bar{A} / \partial \mathbf{x}) \right) + \left(\mathbf{u}'' \cdot (\partial A' / \partial \mathbf{x}) \right)$$

3.2. Осреднённое уравнение коагуляции Смолуховского

Турбулентность приводит к двоякого рода явлениям, влияющим на процесс коагуляции в дисперсной системе. Во-первых, под действием турбулентных пульсаций частицы приобретают дополнительную относительную скорость, что в свою очередь изменяет ядро коагуляции $K(W, U)$, характеризующее вероятность столкновения частиц в системе (см., например, [8]). Здесь с известной определённостью пока можно говорить о двух эффектах, ускоряющих коагуляцию. Первый из них связан с увеличением коэффициента захвата за счёт турбулентного перемешивания, в результате чего число столкновений твёрдых частиц существенно увеличивается по сравнению с ламинарным потоком. Второй эффект связан с наличием сдвига в поле скоростей турбулентного потока, который приводит к изменению условий захвата в области значений $K(W, U)$, близких к нулю, и увеличивает вероятность коагуляции мелких частиц (см., например, [133]).

Явления второго типа связаны с коллективным поведением частиц в турбулизованной системе. Турбулентность, увеличивая локальные неоднородности распределения коагулирующих частиц до масштабов, сравнимых со средним расстоянием между частицами, приводит к возникновению флуктуаций функции распределения частиц по размерам $f(U, \mathbf{r}, t)$ на макроскопических расстояниях. С физической точки зрения это колебание концентрации частиц с объёмом U , в силу нелинейного характера уравнений коагуляции (2.33), приводит к тому, что в области с повышенной концентрацией частиц коагуляция ускоряется, а с пониженной – замедляется, так что в среднем это приводит к иной скорости коагуляции, чем в однородном случае ($U = const$) и способствует более быстрому появлению крупных частиц.

Такой процесс может быть описан формальным осреднением уравнения коагуляции (2.33)

$$\begin{aligned}
 & \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{f(U)}}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\mathbf{J}_f^{turb}(U) + \overline{f(U)} \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^U \overline{f(W) f(U-W) K(W, U-W)} dW - \overline{f(U)} \int_0^\infty \overline{f(W) K(W, U)} dW + \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^U \overline{f'(W) f'(U-W) K(W, U-W)} dW - \int_0^\infty \overline{f'(U) f'(W) K(W, U)} dW,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

где

$$\mathbf{J}_f^{turb}(U) \equiv \overline{\rho (f/\rho)'' \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} D_U^{turb} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\overline{f(U)}}{\bar{\rho}} \right) \tag{3.23}$$

– турбулентный поток пылевых частиц объёма U ; $\langle C_g \rangle = (1 - \bar{s}) \bar{\rho}_g / \bar{\rho}$; D_U^{turb} – коэффициент турбулентной диффузии для частиц U -фракции, выражение для которого получено, например, в работе [116]. Уравнение (3.22) является незамкнутым, поскольку функция $\gamma(U, W, \mathbf{r}, t) \equiv \overline{f'(U, \mathbf{r}, t) f'(W, \mathbf{r}, t)}$ не определена. Уравнение для $\gamma(U, W, \mathbf{r}, t)$ можно получить путём умножения исходного уравнения (2.33) на f и последующего стохастического осреднения по ансамблю возможных реализаций, в результате чего получится уравнение, содержащее среднее от произведения трёх функций f' . Подобная операция приводит к бесконечной цепочке уравнений. Проблема замыкания последней может быть решена лишь путём введения какой-либо гипотезы.

Если проинтегрировать уравнение (3.22) по размеру U , то уравнение для осреднённого полного числа дисперсных частиц $\bar{N}_d(\mathbf{r}, t)$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \bar{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{N}_d}{\bar{\rho}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{J}_{N_d}^{turb} + \frac{\bar{N}_d (1 - \bar{s}) \bar{\rho}_g}{\bar{\rho}} \bar{\mathbf{w}} \right) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(W, U) \bar{f}(W, \mathbf{r}, t) \bar{f}(U, \mathbf{r}, t) dW dU - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(W, U) \gamma(U, W, \mathbf{r}, t) dW dU + \sum_k \sum_{\rho=1}^r v_{d(k), \rho} \bar{\xi}_{\rho},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

где

$$\mathbf{J}_{N_d}^{turb} = \int_U \mathbf{J}_f^{turb}(U) dU \quad (3.25)$$

– турбулентный поток числа пылевых частиц, для которого справедливо представление $\mathbf{J}_{N_d}^{turb} = \overline{N_d \mathbf{u}''} = \mathbf{J}_d^{turb} / \rho_d \tilde{U}_d$. Так как функция $\gamma(U, W, \mathbf{r}, t)$ должна быть положительно определённой в силу своей симметрии по U и W , то коагуляция в турбулизованной среде с неравномерно распределёнными частицами должна происходить быстрее. В заключение заметим, что вопрос о влиянии флуктуаций на скорость коагуляции, несмотря на свою важность, до настоящего времени является практически неразработанным и требует дальнейшего исследования.

3.3. Осреднённое уравнение движения для газопылевой дисковой среды

Осредняя по Фавру мгновенное уравнение движения (2.35) газопылевой смеси, рассматриваемой как единое целое, при учёте формулы (3.3) получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) \right) = \\ &= -\frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{R} + \bar{\Pi}_{sum} + \bar{\Pi}_{rel}) \right) + \bar{\rho} \frac{GM_{\otimes}}{|\tilde{\mathbf{r}}|^3} \tilde{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\mathbf{R} \equiv -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} \langle \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' \rangle \quad (3.27)$$

– так называемый тензор турбулентных (рейнольдсовых) напряжений, который, будучи записанным в декартовой системе координат, принимает вид:

$$R_{ij} \equiv -\overline{\rho u_i'' u_j''} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u_1''^2} & -\overline{\rho u_1'' u_2''} & -\overline{\rho u_1'' u_3''} \\ -\overline{\rho u_2'' u_1''} & -\overline{\rho u_2''^2} & -\overline{\rho u_2'' u_3''} \\ -\overline{\rho u_3'' u_1''} & -\overline{\rho u_3'' u_2''} & -\overline{\rho u_3''^2} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Тензор Рейнольдса является симметричным тензором второго ранга и описывает турбулентные напряжения, обусловленные пульсациями поля турбулентных скоростей газопылевого континуума в целом. Известно (см., например, [40]), что в развитом турбулентном потоке однофазного течения, т.е. при больших значениях глобального числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{glob} = L u_0 / \nu$, соответствующих крупномасштабным движениям (здесь u_0 – типичные изменения скорости газопылевой смеси на расстояниях по-

рядка макро масштаба турбулентности L ; ν – эффективный коэффициент кинематической вязкости газозвеси) можно пренебречь осреднённым тензором вязких напряжений среды $\bar{\mathbf{P}}$ по сравнению с напряжениями Рейнольдса \mathbf{R} , за исключением тонких областей, так называемого, вязкого подслоя, граничащих с твёрдой подложкой (в рассматриваемом нами случае такой подложкой является тонкий слой пыли, примыкающим к центральной плоскости диска). Это справедливо и для допланетного дифференциально вращающегося кеплеровского диска с характерным значением числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{glob} \geq 10^{10}$, поскольку турбулентная вязкость его вещества, на 8 и более порядков выше молекулярной, что следует из наблюдаемого распределения углового момента и массы в Солнечной системе и в многочисленных системах молодых звёзд с дисками (см., например, [110]). Следует, однако, иметь в виду, что сказанное не относится к осреднённому тензору «напряжений относительного движения фаз» $\bar{\mathbf{P}}_{rel}$, влияние которого на двухфазное течение дисковой среды может быть сопоставимым по порядку величины с тензором Рейнольдса \mathbf{R} . В частности, в окрестности субдиска, где значительна концентрация пылевых частиц достаточно крупных размеров (и, следовательно, $\bar{\mathbf{w}} \gg 0$) эти «сдвиговые» напряжения действуют особенно эффективно, приводя к дополнительной турбулизации потока, правда, в объёме, сопоставимом с объёмом пылевого слоя, т.е. малом по сравнению со всем объёмом диска [89].

Можно показать, используя консервативность $(\mathbf{u}'')_L \cong 0$ лагранжевых пульсаций среднемассовой скорости газопылевого потока, что тензор Рейнольдса \mathbf{R} (в случае изотропного турбулентного поля) связан с градиентами $\partial\langle\mathbf{u}\rangle/\partial\mathbf{r}$ осреднённой по Фавру скорости течения следующим определяющим соотношением [24].

$$\mathbf{R} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}b\mathbf{U} + 2\bar{\rho}\nu^{turb}\overset{\circ}{\mathbf{D}}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{D} - \frac{1}{3}\mathbf{U}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot \langle\mathbf{u}\rangle\right), \quad (3.29)$$

или

$$\mathbf{R} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}b\mathbf{U} + \bar{\rho}\nu^{turb}\left(\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}}\right)^{transp}\right) - \frac{2}{3}\bar{\rho}\nu^{turb}\mathbf{U}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot \langle\mathbf{u}\rangle\right), \quad (3.30)$$

где $\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}}\right)^{transp}\right)$ – тензор осредненных деформаций; $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ –

тензор осреднённых скоростей деформаций, ν^{turb} – кинематический коэффициент турбулентной вязкости газопылевой смеси (возможная в дифференциально вращающемся газопылевом облаке анизотропия коэффициен-

тов турбулентной вязкости ν^{turb} (см. [44]) подробно проанализирована в работе [25]. Здесь и далее оставлены прежние обозначения \mathbf{D} и \mathbf{D}° для осреднённых тензоров деформации и скоростей деформации, что не должно привести к двусмысленности [ср. с (2.40)].

В соотношение (3.29) входит ключевая в теории турбулентности величина

$$b \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho} \quad (3.31)$$

– осреднённое значение кинетической энергии турбулентных пульсаций среднемассовой скорости газопылевого континуума (турбулентная энергия), для нахождения которой необходимо иметь, в общем случае, соответствующее балансовое уравнение [см. (3.63)]. Отметим, что поскольку в развитом турбулентном потоке создаётся непрерывное распределение пульсаций скорости \mathbf{u}'' на самых различных частотах f (от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения), то дисперсию (3.31) часто удобно представлять в виде суммы соответствующих величин, относящихся к разным частотам

$$b = \int_0^{\infty} b(f) df, \quad (3.32)$$

где $b(f)$ – доля турбулентной энергии газопылевой смеси, соответствующая полосе частот df (энергетический спектр величины b).

Осреднённый тензор «относительных» напряжений $\overline{\mathbf{\Pi}_{rel}}$ в уравнении (3.26) (напомним, что тензор $\mathbf{\Pi}_{rel}$ возникает из-за инерционных эффектов относительного движения низкодисперсной фракции твёрдых частиц и газа [см. (2.37)]) можно, с учётом принятых нами выше предположений, преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{\Pi}_{rel}} &\equiv -\overline{\rho C_d C_g \mathbf{w} \mathbf{w}} = -\overline{\rho C_d C_g (\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}' \mathbf{w}')} - \overline{\mathbf{w} \mathbf{w} (\rho C_d C_g)'} = \\ &= -(\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'}) (\bar{\rho} \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle + \overline{\rho C_d'' C_g''}) - 2\bar{\mathbf{w}} \overline{\mathbf{w}' (\rho C_d C_g)'} - \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}' (\rho C_d C_g)'} \cong \\ &\cong -\bar{s} \rho_d \langle C_g \rangle (\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'}) - 2\bar{\mathbf{w}} (\rho_d \overline{\mathbf{w}' s'} \langle C_g \rangle + \overline{\rho C_g'' \mathbf{w}' \langle C_d \rangle} + \overline{\rho C_d'' C_g'' \mathbf{w}'}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Для двухфазного турбулентного потока в соотношениях типа (3.33) всеми корреляционными членами обычно пренебрегают и учитывают только первое слагаемое (см., например, [17,20]):

$$\overline{\Pi_{rel}} \cong -\bar{s}\rho_d \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}, \quad (3.34)$$

что разумеется справедливо лишь в том случае, когда скорость осреднённого относительного движения фаз $\bar{\mathbf{w}}$ намного больше скорости пульсаций \mathbf{w}' , т.е. для достаточно крупных твёрдых частиц. Для менее инерционных мелко- и среднедисперсных частиц нужно учитывать два первых члена в (3.33); тогда

$$\overline{\Pi_{rel}} = -\bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'} + \mathbf{R}_{rel}, \quad (3.35)$$

где $\mathbf{R}_{rel} \equiv -\bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'}$ – дополнительный тензор рейнольдсовых напряжений, обусловленный пульсациями поля относительных скоростей фаз. В рамках градиентных моделей возможны два подхода к определению подобного рода парных корреляций. Согласно первому из них корреляционные моменты \mathbf{R}_{rel} для относительно мелких частиц выражаются непосредственно через рейнольдсовы напряжения \mathbf{R} газопылевого континуума в целом, т.е. $\mathbf{R}_{rel} = \beta \mathbf{R}$, где β – коэффициент вовлечения дисперсных частиц в пульсационное движение газа [9]. Вторым способом определения дополнительных турбулентных напряжений \mathbf{R}_{rel} является использование градиентных соотношений типа (3.30), с заменой осреднённых скоростей $\langle \mathbf{u} \rangle$ на $\bar{\mathbf{w}}$ и определением соответствующего коэффициента «турбулентной вязкости» [103].

3.4. Уравнение баланса для осреднённой внутренней энергии газозвеси

Энергетическое уравнение масштаба среднего движения для газопылевой дисковой системы в целом получим, осредняя по ансамблю возможных реализаций уравнение энергии (2.45) для истинного мгновенного движения; в результате будем иметь

$$\bar{\rho} \frac{D \langle H_{sum} \rangle}{Dt} = \frac{dp_{sum}}{dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}_{sum}^{turb} + \bar{\mathbf{q}}_{sum} \right) + \overline{\Phi_u} + R_{gd} |\bar{\mathbf{w}}|^2 - s\sigma \left(\bar{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{sum}^{turb} &= \mathbf{q}^{turb} + \mathbf{q}_{rad}^{turb}; \\ \mathbf{q}^{turb} &\equiv \overline{\rho H'' \mathbf{u}''} \cong \langle c_p \rangle \overline{\rho T'' \mathbf{u}''} + \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb} \end{aligned} \quad (3.37)$$

– турбулентный поток тепла, возникающий благодаря корреляции между пульсациями энтальпии H'' вещества и гидродинамической скорости \mathbf{u}'' ;

$$\mathbf{q}_{rad}^{turb} \equiv \overline{\rho H''_{rad} \mathbf{u}''} \cong \langle c_{P,rad} \rangle \overline{\rho T'' \mathbf{u}''}, \quad \langle c_{P,rad} \rangle \equiv 16a \langle T \rangle^3 / 3\bar{\rho} \quad (3.38)$$

– турбулентный радиационный поток тепла. Приближенные соотношения для потоков тепловой энергии (3.37) и (3.38) записаны с точностью до членов, содержащих тройные корреляции. Формулу (3.37) легко получить, используя свойства осреднения Фавра и выражение

$$H'' = \sum_{\alpha} \left[h''_{\alpha} \langle C_{\alpha} \rangle + \langle h_{\alpha} \rangle C''_{\alpha} + (C''_{\alpha} h''_{\alpha})'' \right] = \langle c_p \rangle T'' + \sum_{\alpha} C''_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle + (c''_p T'')'' \quad (3.39)$$

для пульсации удельной энтальпии вещества диска. Здесь $h''_{\alpha} = c_{p\alpha} T''$ – пульсация парциальной энтальпии фазы α ($c_{p\alpha} \cong const$);

$$\langle c_p \rangle = \sum_{\alpha} c_{p\alpha} \langle C_{\alpha} \rangle, \quad c''_p = \sum_{\alpha} c_{p\alpha} C''_{\alpha} \quad (3.40)$$

– соответственно, осреднённая и пульсационная составляющие удельной теплоёмкости смеси при постоянном давлении. Осреднённые значения для энтальпий излучения и вещества, входящие в уравнение (3.36), определяются соотношениями

$$\langle H_{rad} \rangle \cong \frac{4}{3} a \langle T \rangle^4 / \bar{\rho}, \quad \langle H \rangle \cong \langle c_p \rangle \langle T \rangle + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^0 \langle C_{\alpha} \rangle, \quad (3.41)$$

которые следуют из (2.43) и (2.44).

Субстанциональную производную от суммарного давления в уравнении (3.36) удобно далее представить, с учётом формулы (3.21), в виде

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dp_{sum}}{dt}} &\equiv \frac{D\bar{p}_{sum}}{Dt} + \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \overline{\left(\mathbf{u}'' \cdot \frac{\partial p'_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right)} = \\ &= \frac{D\bar{p}_{sum}}{Dt} + \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \overline{\left(p'_{sum} \mathbf{u}'' \right)} - \overline{p'_{sum} (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}''}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Кроме того, величину $\overline{\Phi_u}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\overline{\Phi_u} \equiv \left(\bar{\Pi}_{sum} : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right) + \overline{\left(\Pi_{sum} : \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial \mathbf{x}} \right)} = \left(\bar{\Pi}_{sum} : \mathbf{D} \right) + \bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle, \quad (3.43)$$

где

$$\bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle \equiv \overline{\left(\Pi_{sum} : \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial \mathbf{x}} \right)} \quad (3.44)$$

– скорость диссипации турбулентной кинетической энергии газопылевой смеси в тепло под действием «молекулярной» вязкости (вторая ключевая

характеристика в теории гетерогенной турбулентности). Можно показать [102], что в случае развитой турбулентности диссипативное слагаемое (3.44) упрощается

$$\bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle \cong \left(\bar{\Pi}_{sum} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}_v^{turb} \right) + \overline{\left(\Pi' : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}' \right)} \approx \overline{\left(\Pi' : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}' \right)} \equiv \bar{\rho} \varepsilon \geq 0; \quad (3.44^*)$$

заметим, что величина ε (так называемая «истинная» диссипация турбулентной энергии) всегда положительна. Подставляя (3.42) и (3.44*) в (3.36), получим следующее выражение для осреднённого энергетического уравнения газопылевой смеси

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D \langle H_{sum} \rangle}{Dt} &= \frac{D \bar{p}_{sum}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} + \bar{\mathbf{q}}_{sum} \right) + \left(\bar{\Pi}_{sum} : \mathbf{D} \right) + \\ &+ \overline{R_{gd} |\mathbf{w}|^2} - s \overline{\left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right)} + \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \overline{p'_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} + \bar{\rho} \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Для замыкания уравнения (3.45) необходимы определяющие соотношения для турбулентных потоков тепла; эти соотношения, полученные в монографии [102], имеют вид

$$\mathbf{q}^{turb} = \overline{p' \mathbf{u}''} - \chi^{turb} \left\{ \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right\} + \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{q}_{rad}^{turb} = \overline{p'_{rad} \mathbf{u}''} - \chi_{rad} \left\{ \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_{p,rad} \rangle} \frac{\partial \bar{p}_{rad}}{\partial \mathbf{x}} \right\}, \quad (3.47)$$

где

$$\chi^{turb} = \bar{\rho} \langle c_p \rangle \frac{\mathbf{v}^{turb}}{\mathbf{S}c^{turb}}, \quad \chi_{rad} = \frac{4ac \langle T \rangle^3}{3\kappa \bar{\rho}} \quad (3.48)$$

– соответственно коэффициент турбулентной теплопроводности газопылевой среды и коэффициент турбулентной лучистой теплопроводности;

$$\langle c_p \rangle = \left[\bar{\rho}_g (1 - \bar{s}) + \rho_d \bar{s} c_{pd} \right] / \bar{\rho}$$

– осреднённая удельная теплоёмкость (при постоянном давлении) для суммарного континуума. Далее будем считать, что в диске $\mathbf{S}c^{turb} = \mathbf{P}r^{turb}$, поскольку обычно в турбулизованной смеси предполагают равенство турбулентных коэффициентов диффузии и температуропроводности ($\chi^{turb} / \bar{\rho} \langle c_p \rangle = D^{turb}$), что равносильно равенству путей смешения для ве-

щества и тепла. В соответствии с выражением (3.46) существует два механизма передачи тепловой энергии через газозвесь:

1) под действием градиента температуры (точнее потенциальной температуры для осреднённого движения

$$\theta \equiv \text{const} \cdot \langle T \rangle / \bar{p}^{\langle \mathfrak{R} \rangle / \langle c_p \rangle}, \quad (3.49)$$

поскольку

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{p} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right) \approx \frac{1}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + G_a \right),$$

где $G_a \equiv g_z / \langle c_p \rangle$ – адиабатический градиент температуры в газопылевом диске;

2) потоками турбулентной диффузии $\mathbf{J}_\alpha^{turb} = -\bar{\rho} D^{turb} \partial \langle C_\alpha \rangle / \partial \mathbf{x}$ [см. (3.15)], причём каждая частица вещества фазы α переносит с собой в среднем $\langle h_\alpha \rangle$ тепловой энергии (заметим, что поскольку $\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha^{turb} = 0$, то и

$D_d^{turb} = D_g^{turb} = D^{turb}$). Следует также отметить, что первые члены в (3.46) и (3.47) не играют роли потока энергии, поскольку величина $\overline{p'_{sum} \mathbf{u}''}$ выпадает из полного энергетического уравнения (3.45), и оставлены в формулах (3.46) и (3.47) только из соображений удобства.

Приведём теперь полезную при моделировании турбулизованной газозвеси форму записи соотношения (3.46). Используя (3.15) для преобразования (3.46), в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{turb} &= \overline{p' \mathbf{u}''} - \chi^{turb} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{p} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right) - D^{turb} \bar{\rho} \sum_\alpha \langle h_\alpha \rangle \frac{\partial \langle C_\alpha \rangle}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= \overline{p' \mathbf{u}''} - \frac{\chi^{turb}}{\langle c_p \rangle} \left(\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.46^*)$$

Здесь сделано обычное для теории турбулентности предположение о равенстве единице турбулентного числа Льюиса, $\text{Le}^{turb} \equiv \chi^{turb} / \bar{p} \langle c_p \rangle D^{turb} = 1$ [40].

Уравнение (3.45) иногда удобно записать через осреднённую суммарную энергию $\langle E_{sum} \rangle$ вещества и излучения. Используя для этого преобразование

$$\bar{\rho} D \langle E_{sum} \rangle / Dt + \bar{p}_{sum} (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = \bar{\rho} D \langle H_{sum} \rangle / Dt - D \bar{p}_{sum} / Dt, \quad (3.50)$$

являющееся следствием соотношения $\langle H_{sum} \rangle = \langle E_{sum} \rangle + \bar{p}_{sum} / \bar{p}$ и осреднён-

ного уравнения неразрывности (3.2), для развитого турбулентного течения в диске получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle E_{sum} \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} + \bar{\mathbf{q}}_{sum} \right) = -\bar{p}_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + (\bar{\mathbf{\Pi}}_{sum} : \mathbf{D}) + \\ + R_{gd} |\mathbf{w}|^2 - s\sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \overline{p'_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} + \bar{\rho} \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.45^*)$$

Турбулентный поток удельного объёма в газопылевой среде. Получим теперь окончательное соотношение для турбулентного потока удельного объёма \mathbf{J}_v^{turb} [см. (3.9*)]. Для его вывода найдём сначала выражение для турбулентных пульсаций плотности ρ'_g в газовой составляющей смеси, в качестве уравнения состояния которой возьмём, как и прежде, уравнение состояния совершенного многокомпонентного газа

$$p = p_g = k_B T \sum_k n_{g(k)} = \rho_g \mathfrak{R}_g T, \quad (3.51)$$

где

$$\mathfrak{R}_g = k_B \sum_k n_{g(k)} / \rho_g = k_B \sum_k Z_k \quad (3.52)$$

– так называемая «газовая постоянная» для смеси газов; $Z_k = n_{g(k)} / \rho_g$ – удельная (на единицу массы газового континуума) числовая плотность k -ой компоненты.

Представляя актуальные значения величин \mathfrak{R}_g и T в виде сумм осреднённых и пульсационных значений ($\mathfrak{R}_g = \langle \mathfrak{R}_g \rangle + \mathfrak{R}_g''$, $T = \langle T \rangle + T''$), перепишем (3.51) следующим образом

$$\begin{aligned} p = \langle \mathfrak{R}_g \rangle \rho_g \langle T \rangle + \mathfrak{R}_g'' \rho_g \langle T \rangle + \langle \mathfrak{R}_g \rangle \rho_g T'' + \mathfrak{R}_g'' \rho_g T'' = \\ \cong \langle \mathfrak{R}_g \rangle \rho_g \langle T \rangle + k_B \rho_g \langle T \rangle \sum_{k=1}^n Z_k'' + \langle \mathfrak{R}_g \rangle \rho_g T'' + k_B \rho_g \sum_{k=1}^n (Z_k'' T''). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Если теперь применить к (3.53) оператор статистического осреднения, то получим осреднённое уравнение состояния для теплового давления газозвеси

$$\bar{p} = \langle \mathfrak{R}_g \rangle \bar{\rho}_g \langle T \rangle + k_B \bar{\rho}_g \sum_{k=1}^n \langle Z_k'' T'' \rangle \cong \langle \mathfrak{R}_g \rangle \bar{\rho}_g \langle T \rangle \quad (3.54)$$

(заметим, что пульсационный член в осреднённом уравнении состояния (3.54) в теории турбулентности обычно опускают), которое используем для исключения произведения $\langle \mathfrak{R}_g \rangle \langle T \rangle$ из (7.3.53); в результате для пульсаций ρ'_g будем иметь [38]

$$\frac{\rho'_g}{\bar{\rho}_g} = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho_g T''}{\bar{\rho}_g \langle T \rangle} - \frac{k_B \langle T \rangle \rho_g}{\bar{p}} \sum_{k=1}^n Z_k'' . \quad (3.55)$$

Известно, что относительными пульсациями давления для течений газа с малыми числами Маха, \mathbf{Ma} , почти всегда можно пренебречь по сравнению с относительными пульсациями температуры. Эта гипотеза [104], проверенная вплоть до $\mathbf{Ma} = 5$, справедлива, по-видимому, и для турбулентных движений в тонких аккреционных дисках: движение вдоль r - и z -направлений происходят с дозвуковыми скоростями, а скорость вращения u_ϕ превосходит скорость звука c_{gs} (условие тонкости диска $h_{disk} \ll r$ вместе с выражением $h_{disk} \approx c_{gs} / \Omega_{K,mid}$ для толщины диска требует $h_{disk} / r \approx c_{gs} / u_\phi \ll 1$). Далее будем также предполагать, что средняя масса газовой составляющей газозвеси не флуктуирует, поэтому $\sum_{k=1}^n Z_k'' = (n_g / \rho_g)'' = 0$. Тогда, при учёте (3.55), корреляционный член (со- держащий пульсации истинной плотности газа) в соотношении (3.13) можно переписать в виде

$$-\frac{\overline{\rho'_g \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g} = \frac{\overline{\rho C_g T'' \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g \langle T \rangle} \cong \langle C_g \rangle \frac{\overline{\rho T'' \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g \langle T \rangle} = \frac{\langle T'' \mathbf{u}'' \rangle}{\langle T \rangle} . \quad (3.56)$$

(здесь, как и всюду далее члены с тройными корреляциями отброшены). Для окончательного преобразования этого выражения воспользуемся определяющим соотношением (3.46) для турбулентного потока тепла (3.37):

$$-\frac{\overline{\rho'_g \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g} \cong \frac{1}{\langle T \rangle} \overline{\rho T'' \mathbf{u}''} \cong \frac{1}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb} \right) . \quad (3.57)$$

Наконец, подставляя (3.15) и (3.57) в (3.13) и учитывая (3.48), в результате получим следующее определяющее соотношение для турбулентного потока удельного объёма гетерогенной смеси

$$\mathbf{J}_v^{turb} = -\langle \sigma \rangle \frac{\bar{\rho}}{\rho_d \bar{\rho}_g} \mathbf{J}_d^{turb} + \frac{1}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb} \right) \cong$$

$$\cong \bar{\rho} \frac{v^{turb}}{\mathbf{Sc}^{turb}} \left[\frac{\rho_d}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}} \right) - \frac{1}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]. \quad (3.58)$$

3.5. Балансовые энергетические уравнения дискового вещества

В турбулентном течении дискового вещества, по сравнению с его ламинарным аналогом, существует большое разнообразие всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергий движения твёрдых частиц и газа, вносящих свой вклад в сохраняющуюся осреднённую суммарную энергию. Для наиболее точного истолкования отдельных слагаемых энергетического баланса, рассмотрим полную систему уравнений энергии для осреднённых полей пульсирующих термодинамических параметров газопылевого облака, включая уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Уравнение баланса осреднённой кинетической энергии газопылевого потока. Умножая скалярно уравнение движения (3.26) на скорость $\langle \mathbf{u} \rangle$ и учитывая формулу (2.38) для гравитационной силы, после простых преобразований получим следующую субстанциональную форму уравнения живых сил для осреднённого движения дискового вещества (теорема количества движения)

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{|\langle \mathbf{u} \rangle|^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\left[\mathbf{U} \bar{p}_{sum} - \mathbf{R} - \overline{\mathbf{\Pi}_{sum}^*} \right] \langle \mathbf{u} \rangle \right) = \\ & = \bar{p}_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) - \left(\left[\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}_{sum}^*} \right] : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right) - \bar{\rho} \left(\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Здесь $-\partial \langle \Psi \rangle / \partial \mathbf{x} = \mathbf{g} = G M_{\otimes} \tilde{\mathbf{r}} / |\tilde{\mathbf{r}}|^3$; $|\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2$ – удельная кинетическая энергия осреднённого движения вещества диска. Хотя уравнение (3.59) имеет энергетическую природу, оно не является законом сохранения энергии в турбулентном континууме: уравнение (3.59) описывает закон превращения кинетической энергии осреднённого движения газозвеси в работу внешних массовых и поверхностных сил и в работу внутренних сил (и обратно) без учёта необратимого перехода механической энергии диска в тепловую или другие виды энергии.

Поясним физический смысл отдельных членов уравнения (3.59): величина $(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot (\bar{p}_{sum} \langle \mathbf{u} \rangle)$ связана с оттоком механической энергии из единицы объёма дисковой среды за единичный интервал времени; диверген-

ция $(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \left[\left(\mathbf{R} + \overline{\Pi_{sum}^*} \right) \langle \mathbf{u} \rangle \right]$ представляет собой скорость, с которой полное поверхностное напряжение $\left(\mathbf{R} + \overline{\Pi_{sum}^*} \right)$ в осреднённой движущейся системе «газовзвесь плюс излучение» совершает работу в единичном объёме; величина $\overline{p_{sum}} (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$ (> 0 , или < 0) связана со скоростью обратного адиабатического превращения осреднённой внутренней энергии (тепла) $\langle E_{sum} \rangle$ в механическую энергию системы [см. (3.45*)] и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единичном объёме против осреднённого суммарного давления $\overline{p_{sum}}$ потоком движущейся газозвеси; знак величины $\overline{p_{sum}} (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$ зависит от того, будет ли поток смеси расширяться ($(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle > 0$) или сжиматься ($(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle < 0$); величина $\left(\mathbf{R} + \overline{\Pi_{sum}^*} \right) : \partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x}$ представляет собой полную скорость необратимого превращения кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии [см. уравнения (3.45*), (3.62) и (3.67)], причём диссипация энергии происходит как под влиянием «молекулярной» вязкости со скоростями $(\overline{\Pi_{sum}} : \partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x})$ и $(\overline{\Pi_{rel}} : \partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x})$, так и под влиянием турбулентной вязкости со скоростью $(\mathbf{R} : \partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x})$.

Если сложить уравнение (3.59) и осреднённое уравнение баланса потенциальной энергии вещества диска

$$\overline{\rho} \frac{D \langle \Psi \rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial \overline{\rho} \langle \Psi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\overline{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \langle \Psi \rangle) = \overline{\rho} \left(\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (3.60)$$

то в результате получим следующее уравнение переноса осреднённой механической энергии турбулизованного газопылевого потока

$$\begin{aligned} \overline{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{|\langle \mathbf{u} \rangle|^2}{2} + \langle \Psi \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\left[\mathbf{U} \overline{p_{sum}} - \mathbf{R} - \overline{\Pi_{sum}} - \overline{\Pi_{rel}} \right] \langle \mathbf{u} \rangle \right) = \\ = \overline{p_{sum}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) - \left(\left[\mathbf{R} + \overline{\Pi_{sum}} + \overline{\Pi_{rel}} \right] : \partial \mathbf{D} / \partial \mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Уравнение баланса осреднённой кинетической энергии относительно движения фаз. Осредняя уравнение (2.43) и пренебрегая корреляционными членами третьего порядка (и тем самым турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии, а также произведениями термо-

гидродинамических потоков (например, членами типа $(\bar{\Pi}_{rel} : \partial J_v^{turb} / \partial \mathbf{x})$) в осреднённом газопылевом континууме, как величинами второго порядка малости, в результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\langle C_d \rangle \langle C_g \rangle |\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2 \right) &\approx \bar{\rho} \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle \frac{D}{Dt} \left(|\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2 \right) \equiv \\ &\equiv -R_{gd} |\bar{\mathbf{w}}|^2 + s \overline{\sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right)} + (\bar{\Pi}_{rel} : \mathbf{D}) - \bar{\rho} \sigma_{rel}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где

$$\bar{\rho} \sigma_{rel} \equiv - \overline{\left(\mathbf{\Pi}'_{rel} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \right)}. \quad (3.63)$$

Заметим, что турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии, как величиной третьего порядка малости мы пренебрегаем и тем самым не рассматриваем конкретный вид связанного с наличием мелкодисперсных частиц дополнительного диссипативного члена [75] в уравнении переноса турбулентной энергии газопылевой среды [см. (3.67)], рассматриваемой как единое целое. Важно отметить, что в случае течения со средними и крупными частицами, время релаксации которых значительно, величина дополнительной диссипации энергии турбулентности будет пренебрежимо мала по сравнению с другими членами уравнения (3.67) (см., например, [5]). Здесь диссипация тепла $(\bar{\Pi}_{rel} : \mathbf{D})$ (представляющая собой среднее значение работы, совершаемой тензором относительных напряжений над градиентом осреднённой скорости $\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x} \neq 0$ вследствие относительного сдвига скоростей фаз при орбитальном движении дискового вещества), связана со скоростью перехода осреднённой кинетической энергии диффузии в кинетическую энергию осреднённого движения газопылевой смеси в целом [ср. с (3.59)]; σ_{rel} – дополнительный источник генерирования турбулентной энергии b , связанный с присутствием средних и крупных инерционных частиц в потоке [см. (3.67*)]. Следует иметь в виду, что согласно [91] только за крупными частицами (при числах Рейнольдса обтекания частиц $Re_d > 400$) возникают турбулентные вихревые следы, дестабилизирующие течение газовой составляющей и трансформирующие энергию осреднённого относительного движения в высокочастотные компоненты энергетического спектра турбулентности. Мелкие же частицы ($Re_d < 110$) преимущественно подавляют энергию турбулентности, расходуя её на собственное ускорение (т.е. на вовлечение в пульсационное движение полидисперсного потока), причём с уменьшением инерционности частиц (до определённой степени) ламинаризирующее воздействие дисперсной фазы

на поток возрастает. Что касается частиц средних размеров ($110 < \text{Re}_d < 400$), то они оказывают смешанное влияние на дисковую турбулентность.

Баланс турбулентной энергии. Рассмотрим теперь уравнение переноса турбулентной энергии $b \equiv |\mathbf{u}''|^2 / 2$ газопылевого вещества аккреционного диска. Это фундаментальное в теории турбулентности уравнение, или некоторые его модификации, лежит в основе многих современных полуэмпирических теорий турбулентности (см. [24,27,40]). С помощью уравнения для величины b в случае гетерогенной среды можно, в частности, проанализировать динамическое воздействие дисперсной фазы на интенсивность турбулентности в газопылевой дисковой среде, а также разработать феноменологический способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости среды с учётом влияния обратных эффектов переноса пыли и «потенциальной» температуры на затухание (поддержание) сдвиговой турбулентности в допланетном облаке. Балансовое уравнение для b может быть получено различными способами (см. [102]), одним из которых мы воспользуемся и в рассматриваемом здесь случае двухфазной среды.

Пусть $A(\mathbf{x}, t)$ актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho dA / dt = -(\partial/\partial\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_A + \sigma_A$, где \mathbf{J}_A и σ_A – соответственно вектор субстанциональной плотности потока и объёмная плотность источника признака A . Например, для уравнения движения:

$$A \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{J}_A \equiv -\mathbf{\Pi}_{\text{sum}}^*, \quad \sigma_A \equiv -p_{\text{sum}} \mathbf{U} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.64)$$

Легко показать (для чего нужно умножить тождество $dA'' / dt = dA / dt - D\langle A \rangle / Dt - \mathbf{u}'' \cdot (\partial/\partial\mathbf{x})\langle A \rangle$ на $\rho A''$ и осреднить результат по Рейнольдсу), что балансовое уравнение для среднеквадратичной пульсации $\langle A''^2 \rangle$ имеет следующий общий вид [21]

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle A''^2 / 2 \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot \left(\overline{\rho A''^2 \mathbf{u}''} / 2 + \overline{A'' \mathbf{J}_{(A)j}} \right) = \\ -\mathbf{J}_A^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \langle A \rangle + \overline{A'' \sigma_A} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_A \rangle, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где

$$\bar{\rho} \langle \varepsilon_A \rangle \equiv - \overline{\left(\mathbf{J}_A \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} A'' \right)} \quad (3.66)$$

– скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle A''^2 \rangle$. Обобщённое уравне-

ние переноса (3.65) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение дисперсии $\langle \mathbf{A}''^2 \rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, диффузии, образования за счёт обмена энергии между осреднённым и пульсационным движением, перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle \mathbf{A}''^2 \rangle$ вследствие «молекулярных» процессов переноса.

Подставим теперь (3.64) в (3.65) и (3.66); в результате получим следующее уравнение переноса турбулентной энергии газопылевой смеси

$$\bar{\rho} \frac{Db}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_b^{turb} = (\mathbf{R} : \mathbf{D}) - \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \overline{p'_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle, \quad (3.67)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{J}_b^{turb} \equiv \overline{\rho \left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 + p'_{sum} / \rho \right) \mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{\Pi}_{sum} + \mathbf{\Pi}_{rel}) \cdot \mathbf{u}''} \\ \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle \equiv \overline{(\mathbf{\Pi}_{sum} + \mathbf{\Pi}_{rel}) : \partial \mathbf{u}'' / \partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.68)$$

Оценки отдельных членов уравнения (3.67), проведённые для случая развитой турбулентности в монографии [102], позволяют несколько его упростить

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D|\mathbf{u}''|^2 / 2}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \overline{\rho \left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 + p'_{sum} / \rho \right) \mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{\Pi}_{sum}^*)' \cdot \mathbf{u}''} \right\} = \\ = (\mathbf{R} : \mathbf{D}) + \overline{p'_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}' \right)} - \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} \sigma_{rel}, \end{aligned} \quad (3.67^*)$$

где

$$\bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle = (\bar{\mathbf{\Pi}}_{sum} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{rel}) : \partial \mathbf{J}_v^{turb} / \partial \mathbf{x} + \overline{\mathbf{\Pi}'_{sum} : \partial \mathbf{u}' / \partial \mathbf{x}} + \overline{\mathbf{\Pi}'_{rel} : \partial \mathbf{u}' / \partial \mathbf{x}} \cong \bar{\rho} \varepsilon - \bar{\rho} \sigma_{rel}.$$

Первый член в левой части уравнения (3.67*) характеризует изменение во времени (и конвективный перенос осреднённым движением) кинетической энергии турбулентности диска b , а второй член – отражает перенос энергии турбулентных пульсаций за счёт процессов турбулентной «диффузии»; величина (диссипация энергии)

$$\mathbf{R} : \mathbf{D} \equiv -\frac{2}{3} \bar{\rho} b \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + 2 \bar{\rho} v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) \quad (3.69)$$

в правых частях уравнений (3.59) и (3.67*) фигурирует с разными знаками и потому её можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии осреднённого движения в энергию турбулентности газопылевой дисковой среды, рассматриваемой как целое (этот гидродинамический механизм генерации турбулентности в дифференциально вращающемся кеплеровском диске рассматривается в данной работе как основной (следует подчеркнуть, что этот переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора пространственно-временного масштаба осреднения турбулентного движения; в случае мелкомасштабной турбулентности величина $(\mathbf{R}:\mathbf{D})$ всегда положительна, так что мелкомасштабная турбулентность всегда преобразует кинетическую энергию осреднённого движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций (это так называемый диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности); вместе с тем, крупномасштабными турбулентными вихрями кинетическая энергия турбулентности может передаваться энергии осреднённого движения (см., например, [4]); величина $p'_{sum}(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии газозвеси в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объёма пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций суммарного давления p'_{sum} дисковой системы и расширения или сжатия турбулентных вихрей ($(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}' > 0$ или $(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}' < 0$); величина $(\mathbf{J}_v^{turb}\cdot\partial\bar{p}_{sum}/\partial\mathbf{x})$ представляет собой скорость перехода (в единице объёма среды) между турбулентной и осреднённой внутренней энергиями диска, причём мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них величина $\mathbf{J}_v^{turb}\cdot\partial\bar{p}_{sum}/\partial\mathbf{x} > 0$, а крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией (для которых $\mathbf{J}_v^{turb}\cdot\partial\bar{p}_{sum}/\partial\mathbf{x} < 0$ [24], напротив, преобразовывают тепловую энергию газопылевого потока в осреднённую кинетическую энергию пульсаций скорости (следует отметить, что этот механизм генерации турбулентности в диске, предложенный в работе [99] как основной, не может рассматриваться в таком качестве, поскольку он не всеобъемлющий и носит временный характер [108,111]; парная корреляция $\bar{p}\varepsilon \equiv \overline{\mathbf{P}'_{sum} : \partial\mathbf{u}' / \partial\mathbf{x}} > 0$ в развитом турбулентном потоке (представляющая собой среднее значение работы, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений (напомним, что величина пульсаций \mathbf{P}' тензора вязких напряжений определяется эффективным (учитывающим наличие дисперсной добавки) коэффициентом кинематической вязкости газопылевой среды, рассматриваемой как целое; таким образом, чем больше степень вовлечения мелкодисперсных частиц в пульсационное движение, тем большее влияние они оказывают на величину пульсационной со-

ставляющей тензора Π , вызывая дополнительную диссипацию турбулентной энергии газозвеси) над турбулентными вихрями с градиентом пульсационной скорости, $(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}' \neq 0$) представляет собой скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости [см. (3.45*)]; наконец, величину $\bar{\rho} \sigma_{rel} \equiv -\overline{\Pi'_{rel} : \partial \mathbf{u}' / \partial \mathbf{x}} > 0$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесённую к единице времени и единице объёма), совершаемую пульсациями тензора относительных напряжений над турбулентными вихрями [см. (3.63)], можно интерпретировать как дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом диске, возникающую из-за инерционных эффектов относительного движения дисперсной и газовой фаз и связанную с образованием вихревого следа за крупными частицами с размерами > 1 см (см., например, [16]). Отметим, что именно с этим механизмом турбулизации потока фракцией крупномасштабных частиц сантиметрового размера и более (рождающихся благодаря процессам коагуляции и оседания в окрестности центральной плоскости допланетного облака) можно связать часть того дополнительного источника турбулизации течения газозвеси в окрестности тонкого пылевого слоя [89], которая, по мнению многих исследователей, в значительной степени предотвращает дальнейшее оседание мелких пылевых частиц (микронных размеров) в субдиск и тем самым отодвигает во времени момент наступления прямой гравитационной неустойчивости этого слоя (см., например, [44,90,130]). Для достижения критической плотности в пылевом слое необходима очень высокая степень его успокоения и уплощения [44].

Корреляцию $\bar{\rho} \sigma_{rel}$ с точностью до тройных корреляционных членов можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \sigma_{rel} &= \overline{(s \rho_d C_g \mathbf{w} \mathbf{w})' : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}}} = \\ &= \rho_d \overline{\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} s C_g} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} + 2 \rho_d \overline{\bar{\mathbf{w}} s C_g \mathbf{w}'} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} + \rho_d \overline{s C_g \mathbf{w}' \mathbf{w}'} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \cong \\ &\cong \rho_d \overline{\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}} : \left(\overline{\langle C_g \rangle s' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}}} + \overline{s C_g' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}}} \right) + 2 \rho_d \overline{s \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \mathbf{w}'} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

из которого видно, что дополнительная генерация турбулентности в запылённом диске (в частности, в субдиске, в котором присутствуют относительно крупные твёрдые частицы) может возникнуть вследствие осреднённого динамического скольжения фаз, коррелированности пульсаций объёмного содержания пылевых частиц и концентрации газовой составляющей смеси с пульсационной скоростью потока, а также вследствие пуль-

сационного межфазового скольжения. Как уже подчёркивалось, для мелких частиц, для которых эффектами инерции можно пренебречь ($\Pi_{rel} \cong 0$), этот дополнительный источник турбулизации диска мал.

В заключении этого раздела отметим, что, как правило, в астрофизической литературе энергетическое уравнения (3.45*) для газопылевой дисковой системы записывают в предположении стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое внутреннее равновесие, при котором производство турбулентной энтропии S^{turb} газопылевого вещества примерно равно её диссипации. К сожалению, некоторые авторы при моделировании диска просто используют ламинарное энергетическое уравнение с заменой коэффициента молекулярной вязкости на коэффициент турбулентной вязкости, не принимая во внимание все тонкости вывода энергетического уравнения для турбулентной газовой смеси. Если такое условие принять для баланса величины S^{turb} , то будем иметь [см. (3.85)]

$$2\bar{\rho} v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) + \overline{p'_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}' \right)} - \left(\mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{sum}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} \sigma_{rel} \approx 0, \quad (3.71)$$

и уравнения (3.45*) для развитого турбулентного потока можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D \langle E_{sum} \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} \right) \cong -\bar{p}_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \\ + 2(\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad}) \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) + \bar{\rho} \sigma_{rel} + \overline{R_{gd} |\mathbf{w}|^2} - s \sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

или, с учётом (3.62),

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\langle E_{sum} \rangle + \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle |\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2 \right) \cong -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} + \mathbf{q}_{rad}^{turb} \right) - \\ - \bar{p}_{sum} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + 2(\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad}) \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) + (\bar{\Pi}_{rel} : \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Таким образом, уравнение для внутренней энергии осреднённого турбулентного газопылевого континуума, записанное через абсолютную температуру принимает вид

$$\bar{\rho} \langle c_p \rangle \frac{D \langle T \rangle}{Dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \chi^{turb} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \chi_{rad} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right\} =$$

$$= \frac{D\bar{p}_{sum}}{Dt} + 2(\bar{\rho}v^{turb} + \mu_{rad}) \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) + (\bar{\mathbf{\Pi}}_{rel} : \mathbf{D}) - \sum_{s=1}^r \langle q_s \rangle \bar{\xi}_s + \bar{\rho} \sigma_{rel} + R_{gd} |\bar{\mathbf{w}}|^2 \quad (3.72^*)$$

Здесь мы пренебрегли энергией диссипации $\bar{\Phi}_u$ (в единичном объёме в единицу времени) за счет «молекулярной» вязкости газопылевой смеси по сравнению с «фрикционным теплом» $2\bar{\rho}v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)$ за счёт вязких рей-

нольдсовых напряжений, возникающих вследствие относительного сдвига элементов газозвеси при орбитальном движении дискового вещества, а также кинетической энергией диффузии по сравнению с внутренней энергией газозвеси. Следует отметить, что наличие внутреннего источника нагрева допланетного диска, связанного с турбулентной вязкостью, удовлетворяет современным астрофизическим данным и всем космохимическим ограничениям. В стационарном состоянии это тепло, выделяющееся внутри диска из-за вязкости, не накапливается, а переносится к его поверхности (в основном излучением), а затем излучается с верхней и нижней поверхностей диска наружу. Кроме того в уравнении (3.72*), при сделанных предположениях, появляется дополнительный источник нагрева газопылевой среды, связанный с диссипацией энергии под влиянием «молекулярной» диффузии $(\bar{\mathbf{\Pi}}_{rel} : \mathbf{D})$, играющий важную роль в субдиске, где относительные скорости фаз могут быть значительными.

Закон сохранения полной энергии для турбулизованной смеси. Складывая уравнения балансов для внутренней энергии (3.45*), механической энергии (3.61), кинетической энергии межфазной диффузии (3.62) и турбулентной энергии дисковой системы (3.67), в результате получим субстанциональную форму закона сохранения полной осреднённой энергии двухфазной газопылевой смеси и излучения в диске (в этой главе для полной энергии системы «вещество плюс излучение» мы оставили обозначение U_{tot} [ср. с (2.42)].)

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle U_{tot} \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\bar{\mathbf{J}}_U + \mathbf{J}_U^{turb} \right), \quad (3.74)$$

где

$$\langle U_{tot} \rangle = \langle E_{sum} \rangle + \langle \Psi \rangle + \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle |\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2 + \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2 \quad (3.75)$$

– осреднённая полная энергия газозвеси и излучения [см. (2.42)];

$$\bar{\mathbf{J}}_U \equiv \mathbf{q}_{sum} + \overline{\left(\mathbf{U} p_{sum} - \mathbf{\Pi}_{sum} - \mathbf{\Pi}_{rel} \right) \cdot \mathbf{u}} \cong$$

$$\cong \bar{\mathbf{q}}_{sum} + \left(\mathbf{U} \bar{p}_{sum} - \bar{\Pi}_{sum} - \bar{\Pi}_{rel} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{p_{sum} \mathbf{u}''} - \overline{\Pi'_{sum} \cdot \mathbf{u}''} - \overline{\Pi'_{rel} \cdot \mathbf{u}''} \quad (3.76)$$

– осреднённый актуальный поток полной энергии а двухфазной газозвеси;

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_U^{turb} &\equiv \bar{\rho} \langle U_{tot}'' \mathbf{u}'' \rangle = \rho \left(H_{sum} - p_{sum} / \rho + \Psi + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + C_d C_g |\mathbf{w}|^2 / 2 \right) \mathbf{u}'' = \\ &= \mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p_{sum} \mathbf{u}''} + \rho |\mathbf{u}''|^2 \mathbf{u}'' / 2 - (\mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle) + \mathbf{q}_{sum}^{turb} \end{aligned} \quad (3.77)$$

– турбулентный поток полной энергии смеси.

Объединяя формулы (3.76) и (3.77), получим следующее выражение для суммарного потока полной энергии турбулизованного течения газопылевой смеси

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_U + \mathbf{J}_U^{turb} &= \rho |\mathbf{u}''|^2 \mathbf{u}'' / 2 - (\overline{\Pi'_{sum} + \Pi'_{rel}}) \cdot \mathbf{u}'' + \mathbf{q}_{sum}^{turb} + \bar{\mathbf{q}}_{sum} + \\ &+ \left(\mathbf{U} \bar{p}_{sum} - \bar{\Pi}_{sum} - \bar{\Pi}_{rel} - \mathbf{R} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (3.78)$$

Здесь $\bar{\mathbf{q}}_{sum} + \mathbf{q}_{sum}^{turb}$ – суммарный поток тепла, обусловленный как осреднённым молекулярным, так и турбулентным переносом; $\bar{p}_{sum} \langle \mathbf{u} \rangle$ – поток «механической» энергии; $(\bar{\Pi}_{sum} + \bar{\Pi}_{rel} + \mathbf{R}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$ – суммарный поток энергии, обусловленный работой вязких, относительных и турбулентных напряжений; $\rho |\mathbf{u}''|^2 \mathbf{u}'' / 2 - (\overline{\Pi'_{sum} + \Pi'_{rel}}) \cdot \mathbf{u}''$ – «диффузионный» поток вихревой турбулентной энергии. Заметим, что член $\overline{p_{sum} \mathbf{u}''}$ в (3.77) и (3.78) не играет роли потока энергии, так как он выпадает из суммарного потока энергии (3.78).

3.6. Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в пылевом субдиске

Рассмотрим теперь полуэмпирический метод определения коэффициента кинематической турбулентной вязкости ν^{turb} в двухфазной дисковой среде, учитывающий влияние инерционных эффектов средне- и крупнодисперсных частиц на дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом облаке. Далее основным источником турбулентности в диске будем считать сдвиг скорости космического вещества (когда кинетическая энергия турбулентности извлекается из кинетической энергии осреднённого движения), связанный с дифференциальностью его углового вращения вокруг прото- Солнца (см., например, [11,78]). Каждый слой вещества с радиусом r дифференциально вращающегося тонкого диска ($h_{disk}(r) \ll r$),

лежащего в окрестности плоскости $r\phi$ (расположенной при $z = 0$ в цилиндрических координатах), движется практически точно по третьему закону Кеплера, т.е. при приближении к центральному телу (с массой M_\otimes) вращается все быстрее: кеплеровская орбитальная скорость $u_\phi(r) = r\Omega_{K,mid}(r) = \sqrt{GM_\otimes/r}$, а угловая скорость орбитального вращения $\Omega_{K,mid}(r)$ растет по закону $r^{-3/2}$. Следует отметить, что толщина диска, вообще говоря, не постоянна, а увеличивается с расстоянием от протосолнца (в первом приближении $h_{disk}(r) \propto r$). Подобное движение – типичный случай крупномасштабного сдвигового течения, исследование которого возможно в рамках инвариантного моделирования развитых турбулентных течений неоднородных сред, разработанного в монографии [24].

α -параметризация вязкости допланетного диска. Впервые коэффициент турбулентной вязкости в астрофизическом газофазном диске был смоделирован в ставшей уже классической работе [114], в которой авторы, используя концепцию Колмогорова для динамического коэффициента турбулентной вязкости $\mu_g^{turb} = \bar{\rho}_g u_g^{turb} l_g^{turb}$ (где u_g^{turb} – среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, ограниченная скоростью звука в газе, вычисленной в центральной плоскости диска,

$$u_g^{turb} \leq c_{sg} \Big|_{z=0} \cong \sqrt{\bar{p}_g / \bar{\rho}_g} \Big|_{z=0};$$

l_g^{turb} – так называемая длина перемешивания Прандтля, ограниченная полутолщиной h_{disk} диска, $l_g^{turb} \leq h_{disk} \approx c_{sg} \Big|_{z=0} / \Omega_{K,mid}$; ρ_g, p_g – соответственно массовая плотность и давление в газофазном диске), получили соотношение ($\alpha \leq 1$)

$$R_{r\phi} = \bar{\rho}_g v_g^{turb}(r) r \partial_r (u_\phi / r) = -3/2 \bar{\rho}_g u_g^{turb} l_g^{turb} \Omega_{K,mid}(r) = -\alpha \bar{p}_g \Big|_{z=0}, \quad (3.79)$$

между r, ϕ -компонентой тензора турбулентных напряжений Рейнольдса $R_{r\phi}$ и тепловым давлением p_g газа. Значение дискового параметра Шакуры–Сюняева (безразмерного свободного параметра) α , характеризующего степень возбуждения турбулентных движений, может быть прокалибровано эмпирически при помощи зависящих от времени спектров, получаемых, в частности, при наблюдении вспышек в двойных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая найдены значения $0.01 \leq \alpha \leq 1$ (см., например, [82]). Модели турбулизированных аккреционных дисков, построенные с применением соотношения (3.79), относятся к так называемым вязким α -дискам. Определение параметра α на основе различных предположений о природе физических процессов, действующих в диске, было темой многочисленных исследований (см., например,

обширную библиографию к статье Макалкина [37]. В частности, ряд авторов (см. [687,78]), которые использовали α -модель при рассмотрении таких физических механизмов турбулентности в протопланетном диске, как дифференциальное вращение, тепловая конвекция и т.п. пришли к значению параметра $\alpha \approx 10^{-3}$, которое лучше других удовлетворяет астрофизическим ограничениям.

Главное достоинство подобного эвристического подхода к описанию дисковой турбулентности состоит в его относительной простоте: достаточно заменить в уравнениях звёздной гидродинамики коэффициент молекулярной вязкости ν на коэффициент турбулентной вязкости $\nu^{turb}(r)$, чтобы как-то учесть процессы турбулизации космической среды в аккреционном диске (так, собственно, и поступает большинство астрофизиков, пренебрегая, по существу, почти всеми корреляционными членами в осреднённых уравнениях движения). Вместе с тем, важно иметь в виду, что подход Шакуры–Сюняева, разработанный авторами специально для моделирования тонких (однородных по вертикали, т.е. бесструктурных) астрофизических дисков и не учитывающий зависимости коэффициента турбулентной вязкости от высоты, целесообразно использовать только при глобальном (одномерном по r) моделировании эволюции солнечного допланетного диска с параметрами, осреднёнными по его толщине. Однако, в последнее время этот подход стал некритично применяться в астрофизической литературе и в двухмерных (r, z) моделях, так или иначе, связанных с моделированием деталей вертикального строения диска, в частности, с расчётом распределения по высоте термогидродинамических параметров в пылевом субдиске, что, конечно, неправильно.

Кроме того, следует иметь в виду, что формула (3.79), выведенная для газопыльных дисков, естественно, не учитывает обратные эффекты переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в диске, что при моделировании многих существенных для космогонии явлений необходимо делать. Указанный эффект заключается в том, что благодаря различию концентраций пылевого вещества, смешанного со средой (при турбулентной диффузии), или различию температур (при переносе тепла) в отдельных точках дисковой среды возникают дополнительные архимедовы силы, способствующие или препятствующие развитию турбулентности в диске. Например, при адекватном моделировании эволюции допланетного облака, как вязкого газопылевого диска, окружавшего Солнце на ранней стадии его существования, важно учитывать динамические процессы взаимодействия газа и пыли, и, в частности, принимать во внимание обратное влияние инерционных свойств пылевых частиц на интенсивность турбулентности и тепловой режимы субдиска. Аргументом в пользу подобного общего подхода является следующее: частицы пыли, составляющие лишь около 2% массы околосолнечного допланетного облака, могут не приниматься в расчёт лишь

только на самой начальной стадии эволюции рассматриваемой космической системы, когда почти все первичные (межзвёздные) пылевые частицы испарились. На более поздних стадиях её эволюции, по мере охлаждения допланетного облака, конденсации твёрдых частиц и значительного увеличения их в размерах в результате процессов коагуляции, оседания дисперсной фазы к центральной плоскости диска, а также диссипации газа из дисковой системы в межзвёздное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой компоненты газозвеси существенно возрастает (см., например, [70]). Причём, на первый взгляд, турбулентное перемешивание мешает диффузионному разделению пылевой и газовой составляющих в гравитационном поле прото-Солнца, препятствуя опусканию мелкодисперсных твёрдых частиц к его экваториальной плоскости (где они образуют уплотнённый пылевой слой), и, тем самым, задерживает формирование критической массы субдиска, при которой возникает его гравитационная неустойчивость [44]. Однако, с другой стороны, как уже нами неоднократно отмечалось выше, при турбулентном режиме течения действенным механизмом аккумуляции средне- и крупномасштабных твёрдых частиц становится негравитационная аккреция, связанная, в частности, с ростом массы частиц в результате различных механизмов турбулентной коагуляции. Кроме того, турбулентность способствует формированию мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих наиболее благоприятные условия слипания пылевых частиц между собой. В подобных вихревых образованиях число столкновений (в единицу времени) существенно увеличивается, а относительные скорости столкновений существенно уменьшаются по сравнению с ламинарными условиями (за счёт совместного когерентного мезомасштабного движения частиц и мелкомасштабных турбулентных пульсаций их относительных скоростей внутри вихревых структур), что также способствует росту конденсированной составляющей субдиска (см. [28,64,69,123]. С ростом инерционности твёрдых частиц они все меньшей степени вовлекаются в пульсационное движение газового несущего потока. Таким образом, турбулентность, в конечном счёте, способствует эффективности оседания пылевых частиц к центральной плоскости диска, и тем самым формированию критической массы субдиска, гравитационная неустойчивость и распад которого приводит к образованию планетезималей.

Как известно, характер воздействия дисперсной фазы на динамику турбулентного течения газозвеси не является однозначным, а существенно зависит от инерционности и величины объёмного содержания (концентрации) пылевых частиц, поскольку они могут оказывать на поток как ламинаризирующее, так и турбулизирующее воздействие (см. [60]). В работе [25] были исследованы, порождаемые вращением, течения дискового вещества, когда твёрдые частицы газозвеси начинают оказывать обратное

влияние на её характеристики. Предложено обобщение формулы (3.79) для коэффициента турбулентной вязкости на случай учёта малоинерционной пылевой составляющей, когда можно было воспользоваться приближением пассивной примеси (при котором двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной «многокомпонентной» среды с известными эффективными теплофизическими свойствами). Полученные поправки к коэффициенту турбулентной вязкости, учитывающие обратный эффект переноса мелкодисперсной примеси и тепла на развитие турбулентности, рекомендовано учитывать при моделировании образования уплощённого пылевого слоя в диске.

Вместе с тем, в астрофизической литературе все ещё остаётся открытым вопрос о влиянии средне- и крупнодисперсных частиц на процессы турбулентного тепломассопереноса в допланетном газопылевом диске и их вкладе в поправочный множитель к коэффициенту турбулентной вязкости газозвеси. Определение такого рода поправки представляет собой весьма не простую задачу и требует более глубокого изучения структуры турбулентности газозвеси. В следующем разделе нами будет сделана попытка теоретического определения коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} в потоке газозвеси с крупными инерционными частицами пыли.

Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в пылевом субдиске. Прежде чем приступить к определению указанной поправки к коэффициенту ν^{turb} , напомним, что связь между коэффициентом турбулентной вязкости и энергией турбулентности газозвеси определяется при помощи соотношения Колмогорова [29] [см. (3.16)]

$$\nu^{turb} = \gamma^* l \sqrt{b}, \quad (3.80)$$

где $l = l(\mathbf{r})$ – масштаб турбулентности в данной точке потока (числовой множитель γ^* можно включить в значение l). Для турбулизированного сдвигового потока, обтекающего бесконечную плоскость (в рассматриваемом случае, экваториальную плоскость диска, $z = 0$), локальный масштаб турбулентности $l(\mathbf{r})$ можно принять пропорциональным толщине рассматриваемого тонкого слоя

$$l(z) = \gamma^* \kappa z, \quad (3.81)$$

или

$$l(z) = \gamma^* \kappa z \Phi(\mathbf{Re}_{glob}, \mathbf{Ri}, \mathbf{K}), \quad (3.82)$$

где Φ – некоторая безразмерная функция; κ – постоянная Кармана, которую можно положить равной ≈ 0.4 .

Следует иметь в виду, что вывод адекватного дифференциального

уравнения для масштаба $l(\mathbf{r})$ является одной из наиболее сложных задач полуэмпирической теории сдвиговой турбулентности. Дело в том, что параметр $l(\mathbf{r})$ не может, в общем случае, быть определён только через одноточечные моменты пульсирующей скорости. Являясь мерой расстояния между двумя точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в турбулентном потоке, на котором двухточечные корреляторы $\langle \mathbf{u}''(\mathbf{r}_1)\mathbf{u}''(\mathbf{r}_2) \rangle$ ещё заметно отличаются от нуля, масштаб $l(\mathbf{r})$ может быть найден из сложных дифференциальных уравнений для этих моментов путём их интегрирования по расстоянию между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (см., например, [18]). Вместе с тем, даже в случае известного дифференциального уравнения для $l(\mathbf{r})$ возникает сложная проблема граничных условий на свободной границе области турбулентного течения, где масштаб $l(\mathbf{r})$ не стремится к нулю [32]. Именно, по этим причинам, для обеспечения эффективности практических расчётов, локальный масштаб турбулентности $l(\mathbf{r})$ часто задаётся в виде чисто эмпирически найденных функций, или находится с помощью алгебраической формулы типа (3.82), учитывающей только геометрию потока, расстояние до стенки и т.п., и не зависящей от особенностей течения жидкости. В некоторых случаях, по видимому, можно использовать формулу Прандтля–Никурадзе для величины $l(z)$, которую применительно к рассматриваемому здесь плоскому случаю можно записать в виде

$$l(z) = \gamma 0.4z \left[1 - 1.1(z / h_{disk}) + 0.6(z / h_{disk})^2 - 0.15(z / h_{disk})^3 \right].$$

Внутреннее равновесие в структуре дисковой турбулентности.

Перейдём теперь к выводу искомой поправки к коэффициенту $\nu^{turb}(\mathbf{r})$. Ограничимся в нашем анализе некоторой упрощённой статистической схемой турбулентности в двухфазной среде на основе одного только уравнения переноса турбулентной энергии (3.67*) (однопараметрическая модель турбулентности). Для двухфазных течений начало разработки двухпараметрической модели турбулентности $b - \varepsilon$ было положено в работах [83,84]. Если пренебречь в уравнении (3.67*) малыми членами (все необходимые оценки можно найти, например, в монографии [102]), то, с учётом формулы (3.29) для тензора Рейнольдса и формулы (3.58) для турбулентного потока удельного объёма \mathbf{J}_v^{turb} , его можно переписать в виде

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} b \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_b^{turb} \right) \cong -\frac{2}{3} b \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + 2 \bar{\rho} \nu^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) +$$

$$-\langle \sigma \rangle \frac{\bar{\rho}}{\rho_d \bar{\rho}_g} \mathbf{J}_{dz}^{turb} \mathbf{g}_z + \frac{\mathbf{g}_z}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb} \right)_z - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} \sigma_{rel}, \quad (3.83)$$

где \mathbf{g}_z – вертикальная компонента тяготения прото- Солнца. Как уже подчёркивалось, вклад дополнительной диссипации в величину ε существен только для относительно мелких пылевых частиц, вследствие чего в балансовом уравнении (3.83) для крупнодисперсной пыли он заметной роли не играет (этот вклад учтён в диссипативном члене $2\bar{\rho}v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)$).

Для придания уравнению (3.83) необходимого для дальнейших целей вида, используем, развитую в работе [22], базисную концепцию двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды в виде двух взаимосвязанных континуумов (открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства диска непрерывно — подсистемы осреднённого движения и подсистемы турбулентного хаоса. Использование концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной жидкости явилось той отправной точкой, которая позволила феноменологически развить гидродинамическую модель структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами (см. [28]). Для дискового вещества континуум осреднённого движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных уравнений движения гетерогенной среды (2.76), предназначен для исследования эволюции осреднённых полей термогидродинамических характеристик газозвеси (включая также возможные крупные вихревые образования). Подсистема турбулентного хаоса для диска (вихревой континуум с внутренней структурой), состоит в общем случае из двух составляющих: собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихрённой жидкости, и внедрённой в такое почти однородное пульсирующее поле когерентной составляющей — ансамбля мезомасштабных упорядоченных вихревых структур («многомолекулярных» образований). В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными, когерентная турбулентная структура может быть определена как связная, жидкая масса с завихрённостью, скоррелированной по фазе (т.е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой. Образование гранул в солнечной фотосфере служит наглядным примером существования обширного семейства когерентных структур в турбулентном потоке, которые появляются на фоне мелкомасштабного турбулентного движения.

Для подсистемы гетерогенного турбулентного хаоса постулируем, как и в случае многокомпонентного континуума (см. Гл.1), фундаментальное тождество Гиббса [22]

$$\delta E^{turb} = T^{turb} \delta S^{turb} - p^{turb} \delta(1/\bar{\rho}), \quad (3.84)$$

с помощью которого можно известным образом (см., например, [13]) определить всю термодинамическую структуру вихревого континуума, т.е. ввести в рассмотрение удельную внутреннюю энергию $E^{turb}(\mathbf{r}, t)$, обобщённую удельную энтропию $S^{turb}(\mathbf{r}, t)$, обобщённое давление $p^{turb}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{2}{3} \bar{\rho} E^{turb}$ и обобщённую температуру $T^{turb}(\mathbf{r}, t)$ турбулизации. Различные соотношения между параметрами E^{turb} , S^{turb} , T^{turb} и p^{turb} , которые могут быть получены традиционным способом, могут интерпретироваться тогда, как «уравнения состояния» рассматриваемой подсистемы. Далее будем считать, что внутренняя энергия подсистемы турбулентного хаоса газозвеси $E^{turb}(\mathbf{r}, t)$ тождественна энергии турбулентности $\overline{E^{turb}(\mathbf{r}, t)} \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho} \equiv b(\mathbf{r}, t)$ и что подсистема «турбулентного хаоса» газозвеси в термодинамическом смысле является «идеальным газом», $\bar{\rho} b = \frac{3}{2} p^{turb} = \frac{3}{2} \Re_{gd} \bar{\rho} T^{turb}$, где $\Re_{gd} = k_B / M_{gd}$, M_{gd} – средняя молекулярная масса частиц газозвеси (кардинальные предположения модели). При использовании тождества Гиббса (3.84), уравнение (3.83) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} T^{turb} \frac{DS^{turb}}{Dt} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_b^{turb} \right) &\cong 2\bar{\rho} v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}_g} J_{dz}^{turb} \mathbf{g}_z + \\ &+ \frac{\mathbf{g}_z}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb} \right)_z - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} \sigma_{rel}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

которому, по аналогии с (2.51), можно придать форму уравнения баланса

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S^{turb}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\bar{\rho} S^{turb} \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\mathbf{J}_b^{turb}}{T^{turb}} \right) = \sigma_{S^{turb}} \equiv \sigma_{S^{turb}}^e + \sigma_{S^{turb}}^i.$$

Воспользуемся теперь уравнением (3.85) для анализа стационарно-неравновесного режима развитой ($\mathbf{Re}_{glob} \gg 1$) турбулентности газопылевой смеси в дисковой системе. Для его реализации должен, естественно, существовать какой-то постоянно действующий механизм турбулизации

среды (каким является, например, крупномасштабный сдвиг скорости потока космического вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото- Солнца, или термоконвективная крупномасштабная неустойчивость), передающий кинетическую энергию осреднённого течения вихревому движению на больших масштабах и не позволяющий подсистеме турбулентного хаоса достигнуть в течение длительного времени полного термодинамического равновесия. Мощность подобного источника энергии должна быть такой, чтобы скомпенсировать, в частности, расход турбулентной энергии, рассеиваемой в тепло за счёт «молекулярной» вязкости. Известно, что для подобного стационарно-неравновесного режима практически вся расходуемая энергия турбулентности без заметных потерь передаётся (вниз по цепочке разномасштабных вихрей в процессе их дробления) через инерционный интервал к диссипативному интервалу (см. [31]). Тогда в структуре подсистемы турбулентного хаоса устанавливается такое внутреннее равновесие (фактически во всех существующих полуэмпирических теориях турбулентности предполагается (явно или неявно) существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности, когда производство энергии турбулентности равно её диссипации в каждой точке, при котором $DS^{turb} / Dt \cong 0$ (энтропия хаоса не меняется вдоль пути элемента массы газовой смеси) и поток энтропии турбулизации постоянен, $J_{(S^{turb})} \equiv J_b^{turb} / T^{turb} \cong const$ [24]. Это означает, что производство $\sigma_{S^{turb}}^i$ энтропии турбулизации (из-за внутренних диссипативных процессов) компенсируется её оттоком $\sigma_{S^{turb}}^e$, т.е. суммарное возникновение энтропии S^{turb} отсутствует, $\sigma_{S^{turb}} = \sigma_{S^{turb}}^e + \sigma_{S^{turb}}^i \cong 0$. Таким образом, подсистема турбулентного хаоса экспортирует свою энтропию во «внешнюю среду», т.е. отдаёт её подсистеме осреднённого движения. Важно иметь в виду, что, как раз, такого рода условия являются достаточными для возникновения диссипативных когерентных структур в «открытом» вихревом континууме (см. [43]).

Вывод поправочной функции к коэффициенту v^{turb} . Итак, в случае локально-стационарного состояния развитого турбулентного течения в диске, уравнение (3.85) может быть записано в виде

$$v^{turb} (1 - R_f - K_f) \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) + \sigma_{rel} - \varepsilon \approx 0, \quad (3.86)$$

где введено безразмерное динамическое число Ричардсона

$$\mathbf{R}_f \equiv -\frac{\mathbf{g}_z \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{turb} \right)_z}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle 2 \bar{\rho} v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)} = \frac{1}{\mathbf{Sc}^{turb}} \frac{\frac{\mathbf{g}_z}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \frac{\mathbf{g}_z}{\langle c_p \rangle} \right)}{2 \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)} = \frac{\mathbf{Ri}}{\mathbf{Sc}^{turb}}, \quad (3.87)$$

учитывающее эффект влияния термической конвекции вещества на порождение турбулентности в диске по сравнению с динамическими факторами (здесь \mathbf{Ri} – градиентное число Ричардсона), и введено безразмерное динамическое число Колмогорова

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &\equiv \frac{(\mathbf{g}_z / \bar{\rho}_g) (\mathbf{J}_d^{turb})_z}{2 \bar{\rho} v^{turb} \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)} = -\frac{1}{\mathbf{Sc}^{turb}} \frac{(\mathbf{g}_z / \bar{\rho}_g) \frac{\partial \langle C_d \rangle}{\partial z}}{2 \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)} = \\ &= -\frac{1}{\mathbf{Sc}^{turb}} \frac{\langle \sigma \rangle \mathbf{g}_z \left[\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \bar{s} \frac{\partial \ln \bar{\rho}_g}{\partial z} \right]}{2 \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{Sc}^{turb}}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

являющееся критерием динамической активности пылевых частиц в турбулентном сдвиговом потоке дискового вещества. На самом деле, числом Колмогорова является только первое слагаемое в выражении (3.88) (при $\bar{\rho}_g = const$ число \mathbf{K} выражает собой относительную затрату турбулентной энергии на взвешивание частиц несущим потоком); второе слагаемое, характеризующее влияние неоднородности газовой среды на турбулентность, является, так называемым, критерием Прандтля. Введённые безразмерные параметры являются критериями динамической активности бароклинного вещества диска. Из (3.87) следует, что $\mathbf{Ri} < 0$ при $-\partial \langle T \rangle / \partial z > \mathbf{g}_z / \langle c_p \rangle$ (т.е. при неустойчивой термической стратификации вещества диска) и $\mathbf{Ri} > 0$ при $-\partial \langle T \rangle / \partial z < \mathbf{g}_z / \langle c_p \rangle$ (при устойчивой стратификации); при безразличной же стратификации $\mathbf{Ri} = 0$. Однако наличие в потоке взвешенных мелкодисперсных частиц всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку градиентное число Колмогорова всегда положительно, $\mathbf{K} > 0$. Таким образом, безразмерное число Колмогорова \mathbf{K} учитывает обратное влияние стратификации (по толщине диска) объёмной концентрации мелких пылевых частиц на развитие турбулентности в диске.

Принимая далее, согласно гипотезам Колмогорова [29], что кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb} и скорость диссипации турбулентной энергии в тепло ε зависят только от двух параметров тече-

ния – энергии турбулентности b и локального масштаба турбулентности $l(\mathbf{r})$, получим [см. (3.16)]:

$$v^{turb} = l\sqrt{b}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\alpha^2} \frac{b^{3/2}}{l}. \quad (3.89)$$

Здесь в силу неопределённости масштаба $l(\mathbf{r})$ константа в выражении для v^{turb} принята равной единице, а числовой множитель $1/\alpha^2$ в первом приближении считается постоянным. Выражение [см. (3.70)]

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\sigma_{rel} &\equiv -\overline{\left(\mathbf{\Pi}'_{rel} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}}\right)} \\ &= sp_d C_g (\mathbf{w}\mathbf{w})' : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \cong \rho_d \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} : \left(\bar{s} C'_g \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} + \langle C_g \rangle s' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \right), \end{aligned}$$

отвечающее за дополнительное порождение энергии турбулентности при больших числах Рейнольдса (в следах за движущимися крупными частицами), запишем в виде

$$\sigma_{rel} = \beta \bar{s} \frac{|\bar{\mathbf{w}}|^2 \sqrt{b}}{l}, \quad (3.90)$$

где β – эмпирическая константа. Следует отметить, что формула (3.90) достаточно близка по форме к выражению, полученному в работе [5] с использованием автотомельного решения для дальнего осесимметричного турбулентного следа [134] и в работе [14] на основе полуэмпирического подхода, и справедливому только при очень малой объёмной концентрации \bar{s} дисперсной фазы, когда отсутствует интерференция следов за отдельными частицами. Формула (3.90) полностью совпадает с выражением $\sigma_{rel} = \beta^* \bar{s} |\bar{\mathbf{w}}|^3 / d_p$, приведённым в монографии Вараксина [5] при $|\bar{\mathbf{w}}| / \sqrt{b} = d_d / l$. Здесь $\beta^* = a(C_D \delta / \xi_d)^{4/3}$; ξ_d – длина смешения концентрации пылевых частиц; δ – полуширина следа; $C_D(\mathbf{Re}_d)$ – коэффициент сопротивления частицы ($a = 0.0027$, $\delta / \xi_d = 5$).

Подставляя (3.89) и (3.90) в (3.86), будем иметь:

$$2l\sqrt{b}(1 - \mathbf{R}_f - \mathbf{K}_f) \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) + \beta \bar{s} \frac{|\bar{\mathbf{w}}|^2 \sqrt{b}}{l} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{b^{3/2}}{l} = 0. \quad (3.91)$$

Уравнение (3.91) распадается на два уравнения: $b = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения в дисковой системе, и

$$b = 2\alpha^2 l^2 \left(1 - \alpha^2 \beta \bar{s} \frac{|\bar{\mathbf{w}}|^2}{b} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\mathbf{Ri} + \mathbf{K}}{\mathbf{Sc}^{turb}} \right) \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) \quad (3.92)$$

описывающее установившийся турбулентный режим движения газозвеси. Уравнение (3.92) имеет вещественные решения только, когда $\mathbf{Ri} + \mathbf{K} < (\mathbf{Ri} + \mathbf{K})_{cr} \equiv \mathbf{Sc}^{turb}$ (при $\mathbf{Ri} + \mathbf{K} \geq \mathbf{Sc}^{turb}$ существует единственное вещественное решение $b = 0$, относящееся к ламинарному режиму течения). Пусть имеет место турбулентный режим; в этом случае

$$\sqrt{b} = \alpha l \frac{\sqrt{1 - (\mathbf{Ri} + \mathbf{K}) / \mathbf{Sc}^{turb}}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \beta^* (d_d^2 / l^2) \bar{s}}} \sqrt{2 \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)}. \quad (3.93)$$

Из формулы (3.92) видно, что наличие в потоке крупных твёрдых частиц всегда приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку осреднённая кинетическая энергия относительного движения фаз ($\propto |\bar{\mathbf{w}}|^2$) для них сопоставима с энергией турбулентности b .

Таким образом, для локального коэффициента турбулентной вязкости в газопылевом диске получим

$$\nu^{turb}(\mathbf{r}) = \alpha l^2(\mathbf{r}) \phi \phi_1 \sqrt{2 \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right)}, \quad (3.94)$$

где

$$\phi = \phi(\mathbf{Ri}, \mathbf{K}) \equiv \sqrt{1 - (\mathbf{Ri} + \mathbf{K}) / \mathbf{Sc}^{turb}}, \quad (3.95)$$

$$\phi_1 = \phi_1(\bar{s}, C_D, \delta / \xi_d, d_d / l) \equiv \sqrt{1 - \alpha^2 a (C_D \delta / \xi_d)^{4/3} (d_d / l)^2 \bar{s}} \quad (3.96)$$

– поправочные безразмерные функции, учитывающие соответственно обратный эффект переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в допланетном диске (ϕ), а также эффект влияния на процессы турбулентного теплопереноса в потоке средне- и крупнодисперсных частиц и их вклад в коэффициент турбулентной вязкости газозвеси (ϕ_1).

4. Стационарные движения в турбулентном газопылевом субдиске

В качестве иллюстрации развитого здесь подхода, применим теперь полученные выше общие соотношения к моделированию допланетного га-

зопылевого облака (вращающегося вокруг прото-Солнца, находящегося на ранней стадии эволюции, до потери им газовой составляющей) на основе достаточно схематизированного описания стационарного осесимметрического турбулизованного течения дискового вещества, приводящего, однако, к обозримым и численно решаемым уравнениям. Поскольку нас в конечном счёте будет интересовать пространственное распределение термодинамических параметров внутри пылевого слоя (в субдиске), образованного при оседании твёрдых частиц к экваториальной плоскости прото-Солнца при существовании в диске развитой турбулентности, то для полноты картины важно будет рассмотреть и некоторые простые механические свойства вращающегося газопылевого облака в целом. Анализ дисковой системы проведём при следующих предположениях:

- исследуется медленно эволюционирующее газопылевое облако, которое вращается вокруг фиксированной в пространстве оси z с некоторой угловой скоростью $\Omega(r, z)$;
- вращение предполагается настолько медленным, что меридиональной циркуляцией вещества допланетного облака можно пренебречь (по существу для кеплеровских аккреционных дисков у скорости имеется только ϕ -компонента, т.е. $u_z \ll u_r \ll u_\phi$);
- магнитные поля не играют существенной роли (как известно, в отсутствии макроскопического магнитного поля фигура облака становится сплюснутой);
- предполагается, что дисковая конфигурация стационарна в инерциальной системе отсчёта с началом в центре массы прото-Солнца;
- для бароклинного диска постулируется существование центральной плоскости симметрии, которая совпадает с экваториальной плоскостью прото-Солнца, определяемой условием $z = 0$;
- отношение полутолщины диска $h_{disk}(r)$ к его радиусу r предполагается гораздо меньшим единицы, $h_{disk}(r)/r \ll 1$ (условие тонкости диска);
- пренебрегается процессом самогравитации вещества диска по сравнению с влиянием гравитационного поля прото-Солнца;
- радиационное давление в диске считается много меньше газового давления, $p_R \ll p_g$;
- газопылевой диск обладает очень большой оптической толщиной для излучения всех частот;
- химические реакции и фазовые переходы не учитываются, состав газовой фазы диска предполагается однородным;
- механизмом турбулизации допланетного кеплеровского диска считается крупномасштабный сдвиг скорости вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото-Солнца.

4.1. Аксиально-симметричное движение в газопылевом диске

При вращении вокруг прото- Солнца практически точно по закону Кеплера каждый элемент газозвеси в диске совершает медленное движение по радиусу внутрь, поскольку торможение, связанное с силами вязкого трения между соседними цилиндрическими слоями, вращающимися с разными угловыми скоростями, приводит к перераспределению удельного момента количества движения и появлению радиального потока массы. Таким образом, основная масса вещества диска медленно (по сравнению с орбитальным движением) дрейфует к центру масс по очень пологой спиральной траектории, по мере того как момент количества движения вместе с меньшей массой вещества передаётся наружу (в силу закона сохранения) – из внутренних областей диска во внешние области. Одновременно турбулентные напряжения, возникающие вследствие относительного сдвига отдельных слоёв дискового вещества при их орбитальном движении, приводят к вязкой диссипации тепла. Как известно, условие тонкости диска означает, что температура в нем относительно низка и градиент давления значительно меньше двух основных механических сил – гравитационной и центробежной (см., например, [57]). Низкие температуры поддерживаются, однако, лишь в том случае, если диссипируемое в турбулизованной системе вязкое тепло эффективно излучается наружу и не накапливается в диске. В стационарном состоянии большая часть этого тепла должна излучаться верхней и нижней поверхностями диска (поскольку диск тонкий, излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении). Таким образом, тонкий аккреционный диск должен быть в высокой степени неадиабатическим.

Далее будем использовать инерциальную цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат, совпадающим с центром тяжести; плоскость $z = 0$ будем считать совпадающей с центральной плоскостью симметрии диска. Предположим также, что осреднённое движение космической жидкости реализуется лишь в азимутальном направлении

$$\langle u_r \rangle = 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = \Omega(r, z) r, \quad \langle u_z \rangle = 0, \quad (4.1)$$

а истинная скорость течения газопылевой смеси беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях. Можно показать, что если вещество диска находится в состоянии квазистационарного вращения в инерциальной системе отсчёта, то оно с необходимостью обладает осевой симметрией ($\partial / \partial \varphi = 0$): $\bar{s} = \bar{s}(r, z)$, $\bar{\rho}_g = \bar{\rho}_g(r, z)$, $\bar{p} = \bar{p}(r, z)$, $\bar{p} = \bar{p}(r, z)$, $\langle T \rangle = \langle T \rangle(r, z)$, $\Omega = \Omega(r, z)$ и т.п. (см. [51]). Отметим, что закон сохранения массы (3.2) в рассматриваемом стационарном случае всегда выполняется, так как движения осесимметричны, а меридиональных течений нет, $(\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$.

Уравнения сохранения импульса. Поскольку звезды T Тельца имеют, по-видимому, высокую концентрацию пыли по всей толщине диска (см., например, [65]), дополнительные напряжения, связанные с относительным движением газа и крупнодисперсной пыли, эффективно действуют только в области, непосредственно прилегающей к экваториальной плоскости диска (малой по сравнению со всем диском), то в уравнении движения они могут быть опущены. Если учесть взаимодействие между веществом и излучением внутри диска до членов самого низкого порядка по $|\langle \mathbf{u} \rangle|/c$, то три компоненты уравнения (3.26) можно записать в виде

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{p} + p^{turb}) = r\Omega^2(r, z) - \frac{GM_{\oplus} r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \equiv g_r \cong 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p^{turb}) = -\frac{GM_{\oplus} z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \equiv -g_z, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} [r\Omega(r, z, t)] &\cong \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{rad})_{r\phi} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{q}_{rad})_r r\Omega(r, z) \right] \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{rad})_{z\phi} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{q}_{rad})_z r\Omega(r, z) \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \left[(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{rad})_{\phi r} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{q}_{rad})_r r\Omega(r, z) \right] \cong 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$g_z = \frac{GM_{\oplus} z}{r^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-3/2} \cong \Omega_{K, mid}^2(r) z; \quad (4.5)$$

$\mathbf{g} = \{g_r, 0, -g_z\}$ – эффективная сила тяжести (на единицу массы) с поправкой на центробежное ускорение;

$$\Omega_K(r, z) \equiv \sqrt{GM_{\oplus} / (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

– кеплеровская угловая скорость; $\Omega_{K, mid}(r) \equiv \Omega_K(r, 0) = \sqrt{GM_{\oplus} / r^3}$ – кеплеровская угловая скорость в центральной плоскости диска; $\bar{p}(r, z)$ – тепловое давление дисковой среды, связанное с плотностью $\bar{\rho}(r, z)$ и температурой $\langle T(r, z) \rangle$ осреднённым уравнением состояния (2.55), $\bar{p} = \bar{\rho} \langle \mathcal{R} \rangle \langle T \rangle$;

$$p^{turb}(r, z) \equiv \frac{2}{3} \bar{\rho} b = \frac{1}{3} \rho \overline{|\mathbf{u}''|^2}$$

– давление турбулизации [см. (3.29)]; c – скорость света в вакууме;

$$\begin{aligned} \mathbf{R} + \bar{\mathbf{P}}_{rad} \equiv & -p^{turb} \mathbf{U} + 2(\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad}) \overset{\circ}{\mathbf{D}} = -\mathbf{i}_r \mathbf{i}_r p^{turb} - \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_\phi p^{turb} - \mathbf{i}_z \mathbf{i}_z p^{turb} + \\ & + (\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad}) \left\{ \mathbf{i}_r \mathbf{i}_\phi r \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial r} + \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_r r \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial r} + \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_z r \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} + \mathbf{i}_z \mathbf{i}_\phi r \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

[см. (3.29)]. При написании уравнения (4.2) было принято во внимание то обстоятельство, что в радиальном направлении (перпендикулярном оси вращения) сила тяготения уравновешивается центробежной силой, т. е. полный градиент давления газозвеси $\partial(\bar{p} + p^{turb}) / \partial r$ очень мал, и вращение является практически кеплеровским (однако, именно этот градиент, в конечном счёте, служит движущей силой радиального дрейфа пылевых частиц к центру диска). С другой стороны, поскольку нет результирующего движения газозвеси в вертикальном направлении (перпендикулярном центральной плоскости диска), то сохранение импульса вдоль оси \mathbf{i}_z сводится к условию гидростатического равновесия, при котором равновесие в направлении z поддерживается благодаря градиенту давления. Отметим, что замена в уравнении (3.96) дифференциалов конечными разностями, т.е. замена $\Delta(\bar{p} + p^{turb})$ на $\approx \bar{p} + p^{turb}$, где $(\bar{p} + p^{turb})$ – полное давление, вычисленное при $z = 0$, и замена $\Delta z \approx h_{disk}$, позволяет найти следующее выражение для полутолщины турбулизованного диска

$$h_{disk} = \sqrt{\left((\bar{p} + p^{turb}) / \bar{\rho} \right)_{z=0} / \Omega_{K,mid}} \cong c_s \sqrt{1 + \frac{2}{3} b c_s^{-2}} / \Omega_{K,mid} \quad (4.7)$$

[ср. с (3.79)]. В этом соотношении $\Omega_{K,mid} = \sqrt{GM_\odot / r^3}$ – кеплеровская угловая скорость; c_s – скорость звука газозвеси [см. (2.57)] в центральной плоскости диска. Именно градиент $\partial(\bar{p} + p^{turb}) / \partial z$ определяет основное направление выталкивающей силы плавучести в поле тяготения центральной массы [см. (3.83)], способствующей, в частности, дополнительной генерации турбулентной энергии за счёт конвективной неустойчивости в вертикальном направлении (между экваториальной плоскостью и поверхностями диска). Таким образом, из (4.2) и (4.3) следует, что вязкая диссипация не влияет на r - и z - компоненты уравнения движения для всего диска, которые распадаются на отдельные уравнения для осреднённых радиального и вертикального движений.

Напротив, φ -компонента уравнения движения (4.4) (по существу уравнение для определения угловой скорости $\Omega(r, z)$ при заданных граничных условиях), которую с помощью преобразований

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{R} + \bar{\mathbf{P}}_{rad}) \right]_{\varphi} \equiv \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{P}}_{rad})_{r\varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{P}}_{rad})_{z\varphi} \right] + \frac{(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{P}}_{rad})_{\varphi r}}{r} \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\mu(r, z) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z, t) \right), \quad (4.8)$$

$$- \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[r \Omega(r, z, t) \mathbf{q}_{rad} \right] \right\}_{\varphi} = - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[r^2 \Omega(r, z, t) \mathbf{q}_{rad} \right] \quad (4.9)$$

(здесь и далее для краткости через $\mu(r, z) \equiv \bar{\rho} v^{turb}(r, z) + \mu_{rad}(r, z)$ обозначен полный коэффициент сдвиговой вязкости), можно привести к виду

$$\bar{\rho} \frac{\partial J(r, z, t)}{\partial t} = (\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot \left(\mu(r, z) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z, t) \right) - c^{-2} (\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot \left(r^2 \Omega(r, z, t) \mathbf{q}_{rad} \right) \cong 0 \quad (4.10)$$

(где $(\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A} \equiv r^{-1} \partial(rA_r) / \partial r + \partial A_z / \partial z$ – дивергенция в цилиндрической системе координат), описывает необратимое изменение удельного момента количества движения $J(r, z, t) \equiv \left[r^2 \Omega(r, z, t) \right]$ за счёт вязкого трения и, кроме того, учитывает перенос момента количества движения полным лучистым потоком \mathbf{q}_{rad} (второй член в правой части уравнения (4.6) учитывает потерю момента количества движения вследствие излучения, испускаемого вращающимися областями диска). Как известно (см., например, [51]), механизм торможения излучением оказывается сильнее, чем диффузия угловой скорости за счёт вязкости, если величина $\langle T \rangle / \left| \partial \langle T \rangle / \partial \mathbf{r} \right|$ мала по сравнению с $\langle \Omega \rangle / \left| \partial \langle \Omega \rangle / \partial \mathbf{r} \right|$, что имеет место, по-видимому, лишь в областях диска, прилегающих к его излучающей поверхности Σ .

Далее мы ограничимся, однако, анализом стационарных или квазистационарных движений внутри диска, когда с точностью до членов порядка $\langle \mathbf{u} \rangle / c$ уравнение (4.10) сводится к следующему:

$$(\partial / \partial \mathbf{r}) \cdot \left[\mu(r, z) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right] = 0. \quad (4.11)$$

Поскольку на внешней границе Σ диска вектор касательных напряжений должен обращаться в нуль, то должно выполняться условие

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Omega(r, z) = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (4.12)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к дисковой поверхности.

В связи с уравнениями (4.11) и (4.12), сформулируем один любопытный результат, относящийся к проблеме медленно эволюционирующего вязкого диска. Запишем для этого полную диссипативную функцию диска в стационарном состоянии

$$\begin{aligned} D(\Omega) &\equiv \int_{\wp} \Phi_{\langle \mathbf{u} \rangle} d\mathbf{r} \equiv \int_{\wp} 2\mu \left(\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) d\mathbf{r} = \int_{\wp} 4\mu(r, z) (D_{r\varphi}^2 + D_{z\varphi}^2) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{\wp} \mu(r, z) r^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \right]^2 \right\} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где \wp – объём диска. Если рассмотреть теперь произвольный закон вращения диска $\Omega(r, z) + \delta\Omega(r, z, t)$, на который наложено лишь то ограничение, что сохраняются поверхность Σ и объём \wp конфигурации, то классический результат (полученный по существу ещё Гельмгольцем) состоит в том, что каждое решение уравнений (4.11) и (4.12) характеризуется тем свойством, что полная мощность (4.13), рассеиваемая трением, является абсолютным минимумом по сравнению с мощностью при любом другом движении, которое согласуется с границей Σ и объёмом \wp .

Сохранение энергии. Для моделирования внутренней термической структуры допланетного диска вокруг молодого Солнца, находящегося на стадии Т Тельца, необходимо привлекать уравнение энергии (3.73), в котором основным внутренним источником нагрева является диссипация турбулентной энергии. Если не принимать во внимание химические реакции, а также процессы испарения и конденсации дискового вещества, то для квазистационарного осесимметричного движения это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(q_r^{turb} + q_{rad,r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(q_z^{turb} + q_{rad,z} \right) = \\ \mu(r, z) r^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \right]^2 \right\} + Q_{\oplus}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(q_z^{turb} + q_{rad,z} \right) = \mu(r, z) r^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \right]^2 \right\} + Q_{\oplus}, \quad (4.14)$$

поскольку для тонкого диска, излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении. Заметим, что возможный дополнительный источник нагревания диска, связанный с членом $\bar{\Pi}_{rel} : \mathbf{D}$, эффективно действует только в пылевом субдиске (т.е. в объёме малом по сравнению со всем диском), и потому в уравнении (4.14) опущен.

В уравнениях (4.12) и (4.14) через Q_{\oplus} обозначены возможные локальные источники нагрева газопылевого облака, связанные, в частности, с поглощением солнечной электромагнитной и корпускулярной радиации составляющими газопылевого диска и её последующей трансформацией вследствие всевозможных радиативных процессов, переизлучения, рассеяния, фотохимических и химических реакций и т.п. Сложность и многочисленность химических и фотохимических реакций, протекающих в допланетной дисковой среде в самом общем случае, обусловлена присутствием основных элементов Солнечной системы, входящих в состав исходных компонентов газовой смеси, а также наличием агентов ионизации (диссоциации) в виде энергичных фотонов излучения и фотоэлектронов (продуктов фотолиза) (см., например, [132]). Их поглощение приводит к диссоциации, ионизации, и/или возбуждению вращательных и колебательных уровней газовых компонентов смеси, причём каждая из этих реакций может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. При практических расчётах далеко не все элементарные процессы, ответственные за тепловой баланс дисковой среды, можно адекватно учесть в соответствующих моделях. Именно поэтому при постановке физически самосогласованных задач моделирования эволюции химического состава и гидродинамики диска возникает как одна из важнейших проблема точного учёта вкладов от взаимодействия вещества и излучения в структуре энергетического уравнения, с целью определения так называемой функции нагревания вещества, учитывающую ту долю поглощённой солнечной радиации, которая переходит в тепло (см., например, [38]). Оценки подобной функции сопряжены с известными трудностями и требуют конкретизации химической стадии дисковой эволюции.

Турбулентный поток тепла q_z^{turb} и радиационный поток энергии $q_{rad,z}$, излучаемой диском, определяются уравнениями (3.46) и (3.47)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_z^{turb}(r, z) = -\bar{\rho} \langle c_p \rangle \frac{\mathbf{v}^{turb}(r, z)}{\mathbf{Sc}^{turb}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle + \frac{\Omega_{K, mid}^2(r)}{\langle c_p \rangle} z \right), \\ \mathbf{q}_{rad, z}(r, z) = -\chi_{rad}(r, z) \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle, \end{array} \right. \quad (4.15)$$

где $\chi_{rad}(r, z) = 4ca \langle T \rangle^3 / 3\tilde{\kappa} \bar{\rho}$ – коэффициент лучистой теплопроводности дисковой среды; $\tilde{\kappa}$ – полная осреднённая по Росселанду непрозрачность газовой среды [см. (2.72)], существенно зависящая от наличия и высотного распределения пылевых частиц в допланетном облаке (см., [109]); $\mu_{rad}(r, z) = 4a \langle T \rangle^4 / 15c\tilde{\kappa} \bar{\rho}$ – коэффициент лучистой вязкости. Уравнение (4.15) должно быть дополнено следующими граничными условиями на экваториальной плоскости (ввиду симметрии диска) и верхней поверхности диска

$$q_z^{turb} \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle = 0, \quad (*)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}^{turb} + \mathbf{q}_{rad}) = \sigma \langle T \rangle^4 - f_0 \frac{L_{\oplus}}{4\pi r^2}, \quad \text{на } \Sigma \quad (**)$$

(где σ – постоянная Стефана–Больцмана; L_{\oplus} – светимость Солнца), учитывающими баланс тепла на границах. Первый член в правой части формулы (4.16)** учитывает чёрнотельное излучение поверхности диска, а второй член описывает падающий на поверхность диска ослабленный поток излучения от протозвезды, причём ослабляющий фактор [97]

$$f_0 = \left[\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_{disk}(r, z)}{r} + \frac{2R_{\oplus}^{proto}}{3\pi r} \right) \right] \frac{L_{\oplus}^{proto}}{L_{\oplus}} \quad (4.17)$$

зависит, для $L_{\oplus}^{proto} = 7L_{\oplus}$ и $R_{\oplus}^{proto} = 5R_{\oplus}$ (см. [127]) $f_0 = 0.1$ на $r = 1$ а.е.).

от геометрии диска, радиуса R_{\oplus}^{proto} и светимости L_{\oplus}^{proto} прото-Солнца (в частности

Уравнение переноса пылевой составляющей. При моделировании эволюции турбулизованного газопылевого облака, особенно на стадии образования в окрестности его экваториальной плоскости пылевого субдиска (толщиной $2h_{subdisk}$, где $h_{subdisk}$ – верхняя граница пылевого субдиска, $h_{disk} > h_{subdisk}$) следует привлекать к рассмотрению осреднённое уравнение переноса (3.14*) для концентрации $\langle C_d \rangle = \rho_d \bar{s} / \bar{\rho}$ пылевой составляющей дискового вещества. Если не принимать во внимание процессы испарения

и конденсации ($\bar{\sigma}_{dg} = 0$) твёрдых частиц, то в стационарном состоянии имеет место баланс между осаждением пылевых частиц $\bar{\mathbf{J}}_d \equiv \overline{\tilde{\rho}_d \mathbf{w}_d} \cong \bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \bar{\mathbf{w}}$ и турбулентным перемешиванием $\mathbf{J}_d^{turb} = -\bar{\rho} D_d^{turb} \partial \langle C_d \rangle / \partial \mathbf{r}$ [см. (3.15)]; тогда уравнение (3.14*) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \bar{\mathbf{w}} - \frac{\bar{\rho} \mathbf{v}^{turb}}{S_c^{turb}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle C_d \rangle \right) = 0, \quad (4.18)$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\bar{s} \langle C_g \rangle \bar{w}_r - \frac{\bar{\rho} \mathbf{v}^{turb}}{S_c^{turb}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{s} \langle C_g \rangle \bar{w}_z - \frac{\bar{\rho} \mathbf{v}^{turb}}{S_c^{turb}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}} \right) \right) = 0, \quad (4.19)$$

где $\bar{\mathbf{w}} \equiv (\bar{\mathbf{u}}_d - \bar{\mathbf{u}}_g)$ – осреднённая относительная скорость пыли и газа, определяемая соотношением (3.20), которое в цилиндрических координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \theta_{gd} \bar{w}_r(r, z) &\cong \bar{w}_\varphi(r, z) \Omega(r, z) + \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \cong \\ &\cong \bar{w}_\varphi(r, z) \Omega_{K, mid}(r) - \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_g} r \eta \Omega_{K, mid}^2(r), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\bar{\rho} \theta_{gd} \bar{w}_\varphi(r, z) = -\frac{1}{2} \bar{w}_r(r, z) \Omega(r, z) \cong -\frac{1}{2} \bar{w}_r(r, z) \Omega_{K, mid}(r), \quad (4.21)$$

$$\bar{\rho} \theta_{gd} \bar{w}_z(r, z) = \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cong -\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_g} \Omega_{K, mid}^2(r) z. \quad (4.22)$$

Тогда r, φ, z компоненты осреднённой относительной скорости $\bar{\mathbf{w}}$, полученные с учётом уравнений движения (3.95) и (3.96), выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_r(r, z) \cong -\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_g} \eta \frac{\zeta}{1+\zeta^2} r \Omega_{K, mid}(r), \\ \bar{w}_\varphi(r, z) \cong \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_g} \eta \frac{\zeta^2}{1+\zeta^2} r \Omega_{K, mid}, \\ \bar{w}_z(r, z) \cong -\zeta z \Omega_{K, mid}(r), \end{array} \right. \quad (4.23)$$

где параметр $\zeta \equiv \Omega_{K, mid} / \bar{\rho} \theta_{gd} \ll 1$, поскольку время установления квазиравновесного движения пыли и газа ($1 / \bar{\rho} \theta_{gd}$) в диске много меньше кеплеровского периода ($2\pi / \Omega_{K, mid}$), определяющего медленные времена изменения макроскопических параметров течения. Здесь использовано, вытекающие из уравнения (7.4.2) приближенное равенство

$$\Omega(r, z) = \Omega_{K, mid}(r) [1 - \eta]^{1/2} \cong \Omega_{K, mid}(r), \quad (4.24)$$

в котором малый параметр определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \eta &\equiv -(r \Omega_{K, mid}^2 \bar{\rho})^{-1} \partial \bar{\rho} / \partial r = \\ &= -\bar{\gamma} \left(\frac{H}{r} \right)^2 \left(f + q + \frac{q+3}{2} \frac{z^2}{H^2} \right) = 3.62 \times 10^{-3} r_{a.e.}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

(ср. [106,121]).

Диффузионное уравнение (4.18) может быть упрощено в зависимости от преобладания газовой или пылевой составляющих в рассматриваемой области диска.

4.2. Коэффициент турбулентной вязкости в газопылевом диске

Коэффициент турбулентной вязкости в формулах (4.6), (4.10), (4.15) и (4.18) определяется соотношением (3.94), которое в рассматриваемом аксиально-симметричном случае принимает вид

$$v^{turb}(r, z) = \alpha l^{*2} r \sqrt{\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \right]^2 \right\}}, \quad (4.26)$$

где
$$l^*(z) \equiv l(z)[1 - (\mathbf{Ri} + \mathbf{K}) / \mathbf{Sc}^{turb}]^{0.25}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Ri} \equiv \frac{\Omega_{K,mid}^2 z}{r^2} \frac{1}{\langle T \rangle} \frac{\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + G_a}{\left[\frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \right]^2}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K} \equiv -\langle \sigma \rangle \frac{\Omega_{K,mid}^2 z}{r^2} \frac{\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \bar{s} \frac{\partial}{\partial z} \ln \bar{\rho}_g}{\left[\frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \right]^2} \quad (4.29)$$

$$G_a \equiv \frac{g_z}{\langle c_p \rangle} = -\frac{1}{\langle c_p \rangle} \frac{GM_{\oplus} z}{r^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-3/2} \cong \frac{1 - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \frac{1}{\langle \mathfrak{R} \rangle} \Omega_{K,mid}^2 z \quad (4.30)$$

– адиабатический градиент температуры в допланетном газопылевом диске; $\bar{\gamma} = \langle c_p \rangle / (\langle c_p \rangle - \langle \mathfrak{R} \rangle)$, $\langle \mathfrak{R} \rangle = \mathfrak{R}_g \bar{\rho}_g / \bar{\rho}$ – соответственно показатель адиабаты и «газовая постоянная» для осреднённого двухфазного континуума. Из формул (4.26)-(4.28) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой

$$-\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} = \left(-\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \right)_{ad} = \frac{\Omega_{K,mid}^2(r)}{\langle c_p \rangle} z, \quad (4.31)$$

число Ричардсона $\mathbf{Ri} = 0$ и температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. В случае температурно-неустойчивой стратификации ($\mathbf{Ri} < 0$) газопылевого диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \frac{\Omega_{K,mid}^2(r)}{\langle c_p \rangle} z = f \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \quad (4.32)$$

(множитель f , характеризующий превышение вертикального градиента температуры в диске над адиабатическим, может достигать величины $f = 0.2$ при $r \approx 10$ а.е. (см. [34]), энергия турбулентности возрастает за счёт энергии неустойчивости в направлении перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности) и одновременно с этим увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время, неоднородность газозвеси всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку число Колмогорова больше нуля, $\mathbf{K} > 0$. Обратное турбулентное число Шмидта $1 / \mathbf{Sc}^{turb}$ в формуле (4.27) можно при-

нять равным единице в случае, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном кеплеровском вращении диска; однако оно может быть в 2-3 раза больше, когда причиной турбулентности, является тепловая конвекция в вертикальном направлении (см., например, [115]).

Покажем теперь, что иногда в диссипативной функции $\Phi_{\langle \mathbf{u} \rangle} = 2\bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}$ осесимметричного диска можно пренебречь вертикальным градиентом угловой скорости $\partial\Omega(r, z) / \partial z$ по сравнению с её радиальным градиентом $\partial\Omega(r, z) / \partial r$ по следующим соображениям. Если предположить (для выполнения оценок) изотермичность диска в вертикальном направлении и пренебречь членами порядка $(z/r)^2$ и выше, то из уравнения (3.96) можно получить (известную для ламинарного течения) формулу для вертикального распределения плотности газозвеси в турбулентном диске

$$\bar{\rho}(r, z) = \bar{\rho}(r, 0) \exp \left\{ -\frac{\Omega_{K, mid}^2(r)}{2(\langle \mathfrak{R} \rangle \langle T \rangle + T^{turb})} z^2 \right\} = \bar{\rho}(r, 0) \exp \left\{ -\frac{z^2}{2H^2} \right\}, \quad (4.33)$$

где

$$H = \frac{\sqrt{\langle \mathfrak{R} \rangle \langle T \rangle + T^{turb}}}{\Omega_{K, mid}(r)} = \frac{\tilde{c}_s}{\bar{\gamma}^{1/2} \Omega_{K, mid}(r)} \quad (4.34)$$

– локальная шкала высот для диска,

$$\tilde{c}_s \equiv \sqrt{\left(\partial(\bar{p} + p^{turb}) / \partial \bar{\rho} \right)_{\langle S \rangle}} = \sqrt{\bar{\gamma} \langle \mathfrak{R} \rangle \langle T \rangle + T^{turb}} \quad (4.35)$$

– изотермическая скорость звука в турбулизованной среде. Пространственные распределения плотности, давления, температуры, непрозрачности и т.п. в любом аккреционном диске имеют различные значения в зависимости от его природы и расстояния от протозвезды и/или от экваториальной плоскости диска. Будем считать, что радиальные распределения подобных структурных параметров следуют степенному закону (это обычное предположение в астрофизической литературе (см., например, [121]); тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_s^2(r) = \tilde{c}_{s, a.e.}^2 r_{a.e.}^q, \quad q = -0.5, \\ \bar{\rho}(r, z) = \bar{\rho}_{a.e.} r_{a.e.}^f \exp \left\{ -z^2 / 2H^2 \right\}, \quad \bar{\rho}_{a.e.} = 2.83 \times 10^{-10} \text{ g cm}^{-3}, \quad f = -2.25 \\ H(r) = H_{a.e.} r_{a.e.}^{(q+3)/2}, \quad H_{a.e.} = 3.33 \times 10^{-2} a.e. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

где $r_{a.e}$ – радиус, измеренный в а.е. Уравнение (4.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\Omega^2(r, z) &= \Omega_{K, mid}^2 \left[1 + \frac{1}{\bar{\rho} r \Omega_{K, mid}^2} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{p} + p^{turb}) \right] = \\ &= \Omega_{K, mid}^2 \left[1 + \frac{\tilde{c}_s^2}{\bar{\rho} r \Omega_{K, mid}^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \right] \cong \Omega_{K, mid}^2 \left[1 + \frac{\bar{\gamma} H^2}{r^2} \left(f + q + \frac{q+3}{2} \frac{z^2}{H^2} \right) \right],\end{aligned}$$

откуда

$$\Omega(r, z) = \Omega_{K, mid} \left[1 + \frac{\bar{\gamma}}{2} \left(\frac{H}{r} \right)^2 \left(f + q + \frac{q+3}{2} \frac{z^2}{H^2} \right) \right]. \quad (4.37)$$

Из соотношения (4.37) следует

$$\frac{\partial}{\partial z} \Omega(r, z) \sim \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z), \quad (H/r \ll 1), \quad (4.38)$$

что и позволяет пренебречь в диссипативной функции $\Phi_{\langle u \rangle}$ вертикальным градиентом угловой скорости.

Таким образом, для большей части диска (за исключением областей, близких к прото-Солнцу) справедливо следующее приближенное выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$v^{turb}(r, z) = \alpha l^{*2} r \left| \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, z) \right|, \quad l^*(z) \equiv l(z) [1 - (\mathbf{Ri} + \mathbf{K}) / \mathbf{Sc}^{turb}]^{0.25}. \quad (4.39)$$

Для того чтобы получить формальное совпадение выражения (4.39) с формулой Шакуры–Сюняева (3.79), справедливой для газофазных аккреционных дисков, нужно положить в формуле (4.39) параметры $\mathbf{K} = 0$ и $\mathbf{Ri} = 0$. Если подставить теперь в (4.39) угловую скорость кеплеровского вращения

$$\Omega_{K, mid}(r) = (GM_{\oplus})^{1/2} r^{-3/2}$$

(заметим, что $r \left| \frac{\partial \Omega_{K, mid}(r)}{\partial r} \right| = -\frac{3}{2} \Omega_{K, mid}$) и использовать в качестве

масштаба турбулентности величину $l = h_{disk} = \sqrt{(\bar{p} / \bar{\rho})|_{z=0}} / \Omega_{K, mid}$, то в результате получим

$$v^{turb} = \frac{3}{2} \alpha (\bar{p} / \bar{\rho})|_{z=0} / \Omega_{K, mid};$$

тогда

$$R_{r\varphi} = \bar{\rho} v^T r (\partial \Omega_{K, mid}(r) / \partial r) = -\frac{9}{4} \alpha \bar{p} \Big|_{z=0}, \quad (4.40)$$

что совпадает с формулой (3.79) (поскольку безразмерный параметр α не поддаётся сколько-нибудь точному вычислению и остаётся свободным параметром в уравнениях строения диска, то множитель $\frac{9}{4}$ в формуле (4.40) не имеет принципиального значения).

Итак, уравнения (2.55), (3.95), (3.96), (4.11), (4.14) и (4.18) образуют систему шести соотношений с шестью неизвестными функциями $\bar{p}(r, z)$, $\bar{\rho}(r, z)$, $\langle T \rangle(r, z)$, \bar{s} , $\bar{\rho}_g$, $\Omega(r, z)$. Таким образом, в принципе, строение газопылевого диска с пылевой составляющей полностью определяется этими уравнениями вместе с граничными условиями и соотношениями (4.26) и (2.21*) для коэффициентов турбулентного переноса v^{turb} и для коэффициента сопротивления θ_{dg} гладкой шарообразной частицы. Полное решение поставленной задачи требует привлечения численных методов и будет представлено в отдельной публикации.

Заключение

В заключение суммируем результаты, полученные в этой главе. Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем и бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции допланетного газопылевого диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося допланетного диска при учёте магнито-гидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно-временного распределения термогидродинамических параметров дисковой среды зависит агрегатное состояние основных компонентов допланетного вещества, расположение их фронтов

конденсации-сублимации, и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остаётся нерешённым. К ним, в первую очередь, относятся вопросы о ранних этапах эволюции Солнечной системы и причинах её уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звёзд. Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей такой динамической системы, в которой эволюция изначального допланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца и уплотнённого пылегазового субдиска. Таким образом, в связи с проблемой реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, окружавшего прото-Солнце, на первый план выступает:

- построение численной модели формирования пылевого слоя (субдиска) в окрестности центральной плоскости прото-Солнца, изучение механизмов его уплощения в спокойном газе и при наличии турбулентности;
- моделирование механизмов развития гравитационной неустойчивости во вращающемся субдиске (когда плотность его вещества за счёт вертикального и радиального сжатия становится выше критического значения), образования и эволюции допланетных пылевых сгущений для зоны внутренних планет и для периферии диска;
- моделирование процессов аккумуляции Земли и планет;
- оценка следствий для химического состава Земли, планет, астероидов и комет.

В качестве первого этапа изучения комплексной проблемы планетной космогонии, в данной главе предпринята попытка конструирования модели космической среды, предназначенной для численного моделирования ранней стадии образования планетной системы – стадии допланетного газопылевого облака. Очевидно, что численное моделирование подобного облака связано, прежде всего, с построением базовой модели сплошной среды с усложнёнными физико-химическими свойствами, учитывающей, в частности, совместное протекание магнитно-гидродинамических процессов и процессов тепло-массопереноса в турбулентном аккреционном диске, с учётом инерционных эффектов твёрдых частиц космического вещества, процессов излучения, испарения, конденсации и коагуляции, а также разнообразных химических превращений. Предпринятое здесь исследование открывает, по нашему мнению, перспективы существенно более полного моделирования разнообразных процессов эволюции дифференциально вращающегося допланетного газопылевого турбулизованного диска, чем это имеет место в ряде цитируемых выше работах.

Литература

- [1] **Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А.** О диффузии тяжелых частиц в турбулентных газовых потоках// Доклады АН СССР. 1973. Т.212. № 3. С. 573-576.
- [2] **Альвен Х., Аррениус Г.** Эволюция солнечной системы. М.: Мир. 1979. 511 с.
- [3] **Бусройд Р.** Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир. 1975. 378 с.
- [4] **Ван Мигем Ж.** Энергетика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат. 1977. 327 с.
- [5] **Вараксин А.Ю.** Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит. 2003. 186 с.
- [6] **Верещагин И.П., Левитов В.И., Мирзобекий Г.З., Пашин М.М.** Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия. 1974. 480 с.
- [7] **Волощук В.М, Седунов Ю.С.** Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат. 1975. 320 с. .
- [8] **Волощук В.М.** Кинетическая теория коагуляции. М.: Гидрометиздат. 1984. 283 с.
- [9] **Гавин Л.Б., Наумов В.А., Шор В.В.** Численное исследование газовой струи с тяжелыми частицами на основе двухпараметрической модели турбулентности//ПМТФ. 1984. № 1.С. 62-67.
- [10] **Горбис З.Р.** Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия. 1970. 424 с.
- [11] **Горькавый Н.Н., Фридман А.М.** Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.
- [12] **Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ. 1961. 930 с.
- [13] **де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
- [14] **Деревич И.В.** Влияние примеси крупных частиц на турбулентные характеристики газозвеси в каналах//ПМТФ. 1994. № 2. С. 70-78.
- [15] **Дорофеева В.А., Макалкин А.Б.** Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. М.: Едиториал УРСС. 2004. 264 с.
- [16] **Зайчик Л.И., Вараксин А.Ю.** Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока//ТВТ.1999.Т.37. № 4. С.1004-1007.
- [17] **Зуев Ю.В., Лепешинский И.Ф.** Математическая модель двухфазной турбулентной струи//Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1981. № 6. С. 69-77.
- [18] **Иевлев В.М.** Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 91-103.
- [19] **Иевлев В.М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука. 1975. 256 с.
- [20] **Картушинский А.И.** Перенос инерционной примеси в двухфазной турбулентной струе//Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1984. №1. С. 36-41.

[21] **Колесниченко А.В.** К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров//Астрон. вестн. 1995. Т.29. №2. С.133-155.

[22] **Колесниченко А.В.** Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред// Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ. 1998. С. 52-76.

[23] **Колесниченко А.В. Максимов В.М.** Обобщенный закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана-Максвелла для гетерогенной среды// Математическое моделирование. 2001. том 13. №1. С.3-25.

[24] **Колесниченко А.В. Маров М.Я.** Турбулентность многокомпонентных сред. М.: "МАИК-Наука". 1999. 336 с.

[25] **Колесниченко А.В.** Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске//Астрон. вестн. 2000. Т.34. № 6. С. 516-528.

[26] **Колесниченко А.В.** Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске//Астрон. вестн. 2001. Т. 35. № 2. С. 139-155.

[27] **Колесниченко А.В.** Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического моделирования. М.: ЛЕНАНД, 2017. 400 с (Синергетика: от прошлого к будущему. № 79).

[28] **Колесниченко А.В.** О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности//Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.

[29] **Колмогоров А.Н.** Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости//Изв. АН СССР. Сер.физ. 1942. Т. 6. № 1/2. С. 56-58.

[30] **Колмогоров А.Н.** О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов// Вестник МГУ. 1954. №3. С.41-45.

[31] **Ландау Л.Д., Лифшиц В.М.** Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 733 с.

[32] **Лайтман Д.Л.** Физика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 342 с.

[33] **Мазин И.П.** Теоретическая оценка коэффициента коагуляции капель в облаках//Труды ЦАО. 1971. Вып. 95. С. 12-25.

[34] **Макалкин А.Б., Дорофеева В.А.** Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. I. Исходные данные, уравнения и методы построения моделей//Астрон. вестн. 1995. Т.29. № 2. С. 99-122.

[35] **Макалкин А.Б., Дорофеева В.А.** Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. II. Результаты расчета моделей// Астрон. вестн. 1996. Т.30. №. 6. С. 496-513.

[36] **Макалкин А.Б.** Проблемы эволюции протопланетных дисков// В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова». М.: Физматлит, 2003, с. 402-446.

[37] **Макалкин А.Б.** Особенности эволюции вязкого протопланетного окколосолнечного диска// Астрон. вестник. 2004. Т.38. № 6. С. 559-576.

[38] **Маров М.Я., Колесниченко А.В.** Введение в планетную астрономию. М.: Наука. 1987.456 с.

- [39] **Медников Е.П.** Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука. 1981. 174 с.
- [40] **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидродинамика. СПб: Гидрометеиздат. Т.1. 1992. 640 с.
- [41] **Нигматулин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука. 1978. 336 с.
- [42] **Пригожин И., Дефей Р.** Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука. 1966. 509 с.
- [43] **Пригожин И., Стенгерс И.** Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа "Прогресс", 1994. 240 с.
- [44] **Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.
- [45] **Сафронов В.С.** Современное состояние теории происхождения Земли//Физика Земли. 1982. № 6. С. 5-24.
- [46] **Сафронов В.С.** Эволюция пылевой компоненты околозвездного допланетного диска//Астрон. вестн. 1987. Т.21. № 3. С. 216-220.
- [47] **Сафронов В.С., Гусейнов К.М.** О возможности образования комет Incitu// Астрон. вестн. 1990. Т.24. № 3. С. 248-256.
- [48] **Смолуховский М.** Три доклада о диффузии, броуновском молекулярном движении и коагуляции коллоидных частиц. Броуновское движение. М. Л.: Изд. ОНТИ, 1936. 332 с.; Коагуляция коллоидов. М.: Изд. ОНТИ. 1936.
- [49] **Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М.** Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение. 1980. 171 с.
- [50] **Стернин Л.Е., Шрайбер А.А.** Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение. 1994. 319 с.
- [51] **Тассуль Ж.-Л.** Теория вращающихся звезд. М.: Мир. 1982, 472 с.
- [52] **Таунсенд А.А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Наука. 1967. 548 с.
- [53] **Фортов В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т.** Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит. 2004. 528 с.
- [54] **Фридман Ф.М.** К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды// Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С.1122-1130.
- [55] **Фукс Н.А.** Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР. 1955. 351 с.
- [56] **Чепмен С., Каулинг Т.К.** Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ. 1960. 510 с.
- [57] **Шапиро С., Тьюколски С.** Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. II. М.: Мир, 1985. 655 с.
- [58] **Шлигтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
- [59] **Шмидт О.Ю.** Четыре лекции о происхождении Земли. Изд. 3, доп. М.: Изд-во АН СССР. 1957. 140 с.
- [60] **Шрайбер А.А., Милютин В.Н., Яценко В.П.** Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наук. думка. 1987. 239 с.
- [61] **Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.** Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка. 1980. 250 с.

- [62] **Armitage P.J., Livio M., Pringle J. E.** Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2001. V.324. P. 705-711.
- [63] **Balbus S. A., Hawley J. F.** Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks// *Rev. Mod. Phys.* 1998. V. 70, P.1-53.
- [64] **Barge P., Sommeria J.** Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices?// *Astron Astrophys.* 1995. V. 295. P. L1-L4.
- [65] **Beckwith S.V.W., Henning T., Nakagawa Y.** Dust properties and assembly of large particles in protoplanetary disks// *Protostars and Planets IV/* Ed. by V. Mannings, A.P. Boss, S.S.Russell.-Tucson Univ. Ariz. Press. 2000. P. 533-558.
- [66] **Bisnovaty-Kogan G.S., Lovelace R.V.E.** Advective accretion disks and related problems including magnetic fields// *New astron. Rev.* 2001. V. 45. P.663-742.
- [67] **Bryden G, Chen X, Lin D, Nelson R and Papaloizou J** Tidally induced gap formation in protostellar disks: gap clearing and suppression of protoplanetary growth // *Astrophys. J.* 1999. V. 514 P. 344.
- [68] **Cabot W., Canuto V.M., Hubickyj O., Pollack J.B.** The role of turbulent convection in the primitive solar nebula// *Icarus.* 1987. V.69. P.387-423.
- [69] **Chavanis P.-H.** Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula// *arXiv:astro-ph/9912087.* 1999. V.16 P. 1-54.
- [70] **Cuzzi J. N., Dobrovolskis A. R., Champney J. M.** Particle-gas dynamics in the midplane of a protoplanetary nebula// *Icarus.* 1993. V.106 P. 102-134.
- [71] **Cuzzi J. N., Davis S. S., and Dobrovolskis A. R.** Blowing in the wind. II. Creation and redistribution of refractory inclusions in a turbulent protoplanetary nebula// *Icarus.* 2003. V. 166. P. 385-402.
- [72] **Cuzzi J. N.** Blowing in the wind: III. Accretion of dust rims by chondrule-sized particles in a turbulent protoplanetary nebula// *Icarus,* 2004. V. 168, P. 484-497.
- [73] **Cuzzi J. N., Ciesla F. J., Petaev M. I., Krot A. N., Scott E. R. D., and Weidenschilling S.** Nebula Evolution of Thermally Processed Solids: Reconciling Models and Meteorites Chondrites and the Protoplanetary Disk, // *ASP Conference Series, Vol. 341, Proceedings of a workshop held 8-11 November 2004 in Kaua'i, Hawaii'i.* Edited by Alexander N. Krot, Edward R. D. Scott, and Bo Reipurth. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2005., P.732-773.
- [74] **Cuzzi J. N. and Weidenschilling S. J.** Particle-Gas Dynamics and Primary Accretion// *In: Meteorites and the Early Solar System II* (D. Lauretta, L. A. Leshin, and H. McSween, eds.), Univ of Arizona Press; Tucson, 2006. 943 pp., P.353-381.
- [75] **Danon H., Wolfshtein M., Hetsroni G.** Numerical calculation of two-phase turbulent round jet// *Int. Multiphase Flow.* 1977. V. 3. № 3. P. 223-234.
- [76] **Dominik, C., Blum J., Cuzzi, J., and Wurm, G.** Growth of dust as the initial step toward planet formation.// *In: Protostars and Planets V,* Arizona Press, AZ, 2007.
- [77] **Dubrulle B.** A turbulent closure model for thin accretion disks// *Astron Astrophys.* 1992. V. 266. P. 592-604.
- [78] **Dubrulle B.** Differential rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula// *Icarus.* 1993. V. 106. P. 59-76.
- [79] **Dubrulle B., Morfill G., Sterzic M.** The dust subdisk in the protoplanetary nebula// *Icarus.* 1995. V. 114. P. 237-246.

- [80] **Dullemond C. P. and Dominik C.** Dust coagulation in protoplanetary disks: A rapid depletion of small grains// *Astron. Astrophys.* 2005. V. 434, P.971-986.
- [81] **Eardley D.M., Lightman A.P.** Magnetic viscosity in relativistic accretion discs// *Astrophys. J.* 1975. V. 200. P. 187-198.
- [82] **Eardley D.M., Lightman A.P., Payne D.G., Shapiro S.L.** Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra// *Astrophys. J.* 1978. V.234. P.53.
- [83] **Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W.** A second-order turbulence model for two-phase flows// *Heat Transfer.* 1982. V.5. P. 219-224.
- [84] **Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W.** A two-equation turbulence model for two-phase flows// *Phys. Fluids.* 1983. V.26. № 4. P. 931-938.
- [85] **Epstein P.S.** On the resistance experienced by spheres in their motion through gases// *Phys. Rev.* 1924. V.23. P. 710-733.
- [86] **Favre A.** Equations statistiques des gaz turbulents// *Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды.* М.: Наука. 1969. С. 483-511.
- [87] **Fridman A.M., Boyarchuck F.F., Bisikalo D.V., Kuznetsov O.A., Khoruzhii O.V., Torgashin Yu. M., Kilpio A.A.** The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks/. *Physics Letters A.* 2003. V. 317. P. 181-198.
- [88] **Garaud P., Barriere-Fouchet L., Lin D.N.C.** Individual and collective behavior of dust particles in a protoplanetary nebula// *J. Astroph.* 2005. V. 603. P. 292-306.
- [89] **Goldrich P., Ward W.R.** The formation of planetesimals// *Astrophys. J.* 1973. V.183. № 3. P. 1051-1061.
- [90] **Goodmann J., Pindor B.** Secular instability and planetesimal formation in the dust layer// *Icarus.* 2000. V.148. P. 537-549.
- [91] **Gore R. A., Crowe C.T.** Effect of particle size on modulating turbulent intensity//*Int. J. Multiphase Flow.* 1989. V. 15. № 2. P. 279-285.
- [92] **Grad H.** On the kinetic theory of rarefied gases// *Commun. Pure Appl. Math.* 1949. V.2. P.331 (русский перевод в сб. «Механика» М.: ИЛ. 1952. № 4. С.71, №5. С. 61).
- [93] **Hazlehurst J., Sargent W.L. W.** // *Astrophys. J.* 1959. V. 130. P. 276-285.
- [94] **Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y.** Formation of the Solar System//*In Protostars and Planets II,* (D. C. Black & M. S. Matthews, eds.), University of Arizona Press, Tucson, 1985. P. 1100-1153.
- [95] **Hersant F., Dadrulle B., Hure J.-M.** Turbulence in circumstellar disks//*Astron. astrophys. manuscript № aa3549.* 2004. P. 1-12.
- [96] **Hunter S.C., Cherry S.S., Kliegel J.R., Waldman C. H.** Gas-particle nozzle flow with reaction and particle size change// *AIAA Paper.* 1981/ № 37. 14 p.
- [97] **Kusaka T., Nakano N., Hayashi C.** Growth of solid particles in the primordial solar nebula// *Progr. Theor. Phys.* 1970. V. 44. P. 1580-1595.
- [98] **Leonard A.** Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows// *Adv. Geophys.* 1974. A 18. P. 237-248.
- [99] **Lin D.N.C., Papaloizou J.** On the structure and evolution of the primordial solar nebula// *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1980. V. 191. 31. P. 37-48.

- [100] **Lissauer J.J., Stewart G.R.** Growth of planets from planetesimals// *Protostars and Planets III*/ Eds. E.H. Levy, I. J. Lunine. Tucson: Univ. Arizona Press. 1993. P. 1061-1088.
- [101] **Makalkin A.B.** Radial compaction of the dust subdisk in a protoplanetary disk as possible way to gravitational instability// *Lunar Planet. Sci.* 1994. V.25. P. 827-828.
- [102] **Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.** Mechanics of turbulence of multi-component gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers, 2002. 375 p.
- [103] **Melville W.K., Bray K.N.C.** A model of the two-phase turbulent jet// *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 1979. V.22. P. 647-656.
- [104] **Morkovin M.V.** Effects of compressibility on turbulent flow// *Mechanics of Turbulence*, N.Y. Gordon and Breach. 1961. 367 p.
- [105] **Nakagawa Y., Nakagawa K. Hayashi C.** Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula// *Icarus.* 1981. V. 45. P. 517-528.
- [106] **Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C.** Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// *Icarus.* 1986. V.67. P. 375-390.
- [107] **Natta, A., Testi, L., Calvet, N. Henning, T., Waters, R., and Wilner D.** Dust in proto-planetary discs: Properties and evolution// In: *Protostars and Planets V*, Arizona Press, AZ, 2007.
- [108] **Nomura H.** Structure and instabilities of an irradiated viscous protoplanetary disks// *Astrophys. J.* 2002. V. 567. P. 587-595.
- [109] **Pollack J.B., McKay C.P., Cristofferson B.M.** A calculation of a Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae// *Icarus.* 1985. V. 64. P. 473-492.
- [110] **Richard D., Zahn J.-P.** Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette-Taylor experiment// *Astron. Astrophys.* 1999. V. 347. P. 734-738.
- [111] **Ruden S.P., Pollack J.B.** The dynamical evolution of the protosolar nebula// *Asrophys. J.* 1991. V. 375. P. 740-760.
- [112] **Russell S. S., Hartmann L. A., Cuzzi J. N., Krot A. N., and Weidenschilling S.J.**// *Timescales of the Solar Protoplanetary Disk In: Meteorites and the Early Solar System, II* (D. Lauretta, L. A. Leshin, and H. McSween, eds.), 2006. University of Arizona Press, Tucson, 943 pp., P.233-251.
- [113] **Sekiya M., Nakagawa Y.** Settling of Dust Particles and Formation of Planetesimals// *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 1988. V. 96, P. 141-150.
- [114] **Shakura N.I., Sunyaev R.A.** Black holes in binary systems. Observational appearance// *Astron. Astrophys.* 1973. V. 24. p. 337-355.
- [115] **Shakura N.I., Sunyaev R.A., Zilitinkevich S.S.** On the turbulent energy transport in accretion disk// *Astron. Astrophys.* 1978. V.62. P.179-187.
- [116] **Schmitt W., Henning T., Mucha R.** Dust evolution in protoplanetary accretion disks// *Astron. astrophys.* 1997. V. 325 .P. 569-584.
- [117] **Soo S. L., Ihrig H.K., Kouh A.F.** Experimental determination of statistical properties of two-phase turbulent motion// *Trans. ASME J. Basic Engng.* 1960. V.82. № 3. P. 609-621.

[118] **Stepinski T.F., Valageas P.** Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. I. Aerodynamics of solid particles// *Astron. Astrophys.* 1996. V. 309. P. 301-312.

[119] **Stepinski T.F., Valageas P.** Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. II. Development of icy planetesimals// *Astron. Astrophys.* 1997. V. 319. P. 1007-1019.

[120] **Stokes G.G.** On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums// *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1851. V. 9. Pt. II. P. 8-106.

[121] **Takeuchi T., Lin D.N.C.** Radial flow of dust particles in accretion disks//*Astrophys. J.* 2002. V. 581. № 2. P. 1344-1355.

[122] **Takeuchi T., Lin D.N.C.** Surface out in optically thick dust disks by the radiation pressure//*Astrophys. J.* 2003. V. 593. P. 524-538.

[123] **Tanga P., Babiano A., Dubrulle B.** Forming planetesimals in vortices// *Icarus.* 1996. V.121. P.158-170.

[124] **Toomre A.** On the gravitational stability of a disk of stars// *Astrophys. J.* 1964. V.139. P. 1217-1238.

[125] **Wadhwa, M., Amelin, Y. Davis, A. M., Lugmair, G. W., Meyer B., Gounelle, M., and Desch S. J.** From Dust to Planetesimals: Implications for the Solar Protoplanetary Disk from Short-lived Radionuclides// In: *Protostars and Planets V*, Arizona Press, AZ, 2007.

[126] **Wasson J.T.** Meteorites: Their record of early solar-system history//1985. New York. W.H. Freeman and Co. 274 p.

[127] **Watanabe S., Nakagawa Y., Nakazawa K.** Cooling and quasi-static contraction of the primitive solar nebula after gas accretion// *Astrophys. J.* 1990 V/358. P. 282-292.

[128] **Weidenschilling S. J.** Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1977. V. 180, P.57-70.

[129] **Weidenschilling S. J.** Dust to Planetesimals: Settling and Coagulation in the Solar Nebula// *Icarus.*1980. V. 44, P.172-189.

[130] **Weidenschilling S. J.** Evolution of grains in a turbulent solar nebula// *Icarus.* 1984. V.60. P. 553-567.

[131] **Whipple F.L.** From plasma to planet. London. 1972. 211 p.

[132] **Willacy K., Klahr H.H., Millar T.J., Henning Th.** Gas and grain chemistry in a protoplanetary disk//*Astron. Astrophys.* 1998. V. 338. P. 995-1005.

[133] **Woods J. D., Drake J.C., Goldsmith P.** Coalescence in a turbulent cloud// *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 1972. V. 98. P. 135-149.

[134] **Yarin L.P., Hetsroni G.** Turbulence intensity in dilute two-phase flow -3. The particles-turbulence interaction in dilute two-phase flow// *Int. J. Multiphase Flow.* 1994. V.20. № 1. P. 27-44.

[135] **Youdin A.N., Shu F.** Planetesimal formation by gravitational instability// *Astrophys. J.* 2002. V. 580. P. 494-505.

[136] **Youdin A.N., Goodman J.** Streaming instabilities in protoplanetary disks//arXiv: Astro-ph/0409263. 2004. V. 1 P. 1-26.

[137] **Zel'dovich Ya. B.** On the friction of fluids between rotating cylinders// *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1981. V. A374. P. 299-312.

ГЛАВА 2

Термодинамическое конструирование модели МГД турбулентности электропроводящей газовой среды

Целью данной главы является вывод в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики замкнутой системы магнито гидродинамических уравнений (МГД–уравнений) масштаба среднего движения, предназначенной для моделирования турбулентных течений электропроводящих сред в присутствии электромагнитного поля.

Введение

Если плазма магнитогиродинамически неустойчива, то в ней возможно возбуждение сравнительно медленных крупномасштабных движений, которые могут быть адекватно описаны в рамках приближения одножидкостной магнитной гидродинамики. Эти течения имеют сходство с обычными течениями жидкости и газа, усложнённые, однако, действием объёмной силы Лоренца. При этом движение электропроводящей жидкости в магнитном поле сопровождается специфическими явлениями. Эти явления связаны с тем, что при перемещении проводящих масс жидкости в них возбуждаются токи индукции, которые совместно с магнитным полем оказывают обратное воздействие на жидкость. Если механизмы диссипации в плазме достаточно слабы, то эти течения приобретают турбулентный характер.

В настоящее время какой-либо строгой и общепринятой феноменологической теории турбулентности проводящих сжимаемых сред не существует. Полученные в этой главе осреднённые уравнения плазмы могут быть использованы, в частности, для численного решения задач по взаимосогласованному моделированию мощных турбулентных течений космической среды в аккреционных дисках и в связанных с ними коронах, в которых магнитное поле существенно влияет на динамику происходящих астрофизических процессов. При конструировании феноменологической мо-

дели проводящей турбулизованной среды, наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением МГД-уравнений, здесь систематически использовано весовое осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись осреднённых уравнений движения для сжимаемой электропроводящей жидкости и анализ механизмов усиления макроскопических полей турбулентными течениями. С целью наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса турбулентной плазмы и пульсирующего электромагнитного поля получены различные уравнения энергии, позволяющие проследить возможные переходы энергии из одной формы в другую, в частности, понять механизмы перекачки гравитационной и кинетической энергии среднего движения в магнитную энергию.

Особое внимание уделено методу получения в рамках необратимой термодинамики замыкающих соотношений для полного (с учётом магнитного поля) кинетического тензора турбулентных напряжений в проводящей среде и турбулентной электродвижущей силы (так называемого магнитного тензора Рейнольдса), что позволяет проанализировать также ограничения, накладываемые условием возрастания энтропии на коэффициенты турбулентного переноса. Предложена методика моделирования коэффициентов турбулентного переноса, в частности, коэффициента кинематической турбулентной вязкости, позволяющая учитывать влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности в дифференциально вращающемся электропроводном аккреционном диске.

1. Гидродинамические уравнения сжимаемой плазмы

Поскольку имеется множество работ, подробно описывающих вывод ламинарных МГД-уравнений (см., например, [1-3]), то в этом вводном разделе, являющемся подготовительным для более подробного рассмотрения магнитогидродинамической турбулентности, мы приведём эти уравнения в том виде, который будет использован далее при получении осреднённых уравнений турбулентного движения электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля.

1.1. Уравнение магнитной индукции

Дифференциальные уравнения нерелятивистской магнитной гидродинамики (МГД) представляют собой законы сохранения, полученные из электромагнитных уравнений Максвелла и общих гидродинамических уравнений движения жидкости. Обозначим через $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ – вектор напряжённости магнитного поля, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ – век-

тор напряжённости электрического поля, $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ – плотность электрического тока, $\rho_e(\mathbf{x}, t)$ – плотность заряда, $\mu(\mathbf{x}, t)$ – магнитную проницаемость, $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ – диэлектрическую проницаемость (безразмерные коэффициенты ε и μ связаны с физическими свойствами среды), $\sigma_e(\mathbf{x}, t)$ – удельную электропроводность и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – гидродинамическую скорость течения проводящей жидкости. Будем далее считать для простоты параметры μ , ε и σ_e постоянными, а переносные свойства среды, несмотря на присутствие магнитного поля, изотропными. Основное предположение магнитной гидродинамики состоит в том, что характерная электромагнитная (плазменная) скорость

$$U_0 \equiv l_0 / t_0 \ll c \quad \text{и} \quad E_0 / l_0 \approx B_0 / t_0. \quad (1.1)$$

Здесь E_0 и B_0 – типичные значения \mathbf{E} и \mathbf{B} ; l_0 и t_0 – характерные электромагнитные длина и время; c – скорость распространения света в пустоте. В этом случае уравнения Максвелла (записанные координатном виде в абсолютной гауссовой системе единиц) для определения полей B_j , H_j , E_j и j_j принимают вид

$$c^{-1} \partial B_i / \partial t = -\varepsilon_{ijk} \partial E_k / \partial x_j, \quad \varepsilon_{ijk} \partial H_k / \partial x_j = 4\pi c^{-1} j_i, \quad (1.2)$$

$$\partial D_j / \partial x_j = 4\pi \rho_e, \quad \partial B_j / \partial x_j = 0, \quad (1.3)$$

при этом объёмная плотность электрического заряда $\rho_e(\mathbf{x}, t)$ и плотность полного тока $\mathbf{j}_j(\mathbf{x}, t)$ (в неподвижной системе координат), индуцированные движением заряженных частиц плазмы, определяются формулами:

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \cong 0, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \rho_e \mathbf{u} + \mathbf{j}^* \cong \mathbf{j}^*.$$

Здесь ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга (альтернирующий тензор Леви–Чивита), который определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если любые два индекса равны;} \\ +1, & \text{если все индексы различны и расположены в циклическом порядке;} \\ -1, & \text{если все индексы различны, но расположены не в циклическом порядке;} \end{cases}$$

$n_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ – соответственно числовая плотность (на единицу объёма среды) и средняя гидродинамическая скорость частиц α -го сорта плазмы;

$\mathbf{j}^* \equiv \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u})$ – плотность тока проводимости (тока, измеряемого наблюдателем, движущимся вместе с газом). В формулах для ρ_e и \mathbf{j} суммирование идёт по электронам (с зарядом $e_e = -e$) и по заряженным частицам α с зарядом $e_{\alpha} = eZ_{\alpha}$. Характерной особенностью процессов, происходящих, например, в ионосфере Земли, является то, что плазма с высокой степенью приближения является электрически нейтральной ($\rho_e \cong 0$), что означает практически отсутствие объёмного заряда вне сферы дебаевского радиуса $R_D \equiv \sqrt{k_B T / (4\pi n_e e_{\alpha}^2)}$, называемой квазинейтральной областью (здесь k_B – постоянная Больцмана). В этом случае во всех максвелловских и гидродинамических уравнениях можно пренебречь членами с объёмным зарядом ρ_e . В частности, можно пренебречь плотностью конвективного тока $\rho_e \mathbf{u}$, считая, что плотность электрического тока \mathbf{j} тождественно равна плотности тока проводимости \mathbf{j}^* . Для замыкания системы уравнений Максвелла (1.2)-(1.3) необходимы следующие два соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

описывающие законы поляризации и намагничивания, а также закон Ома, $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}^*[\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{u}, \partial / \partial \mathbf{x}]$, дающий зависимость тока проводимости \mathbf{j}^* от различных факторов, вызывающих диффузию заряженных компонентов электропроводной смеси, в том числе от полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , гидродинамической скорости среды \mathbf{u} , а также от пространственных градиентов некоторых структурных параметров среды. В простейшем варианте МГД, которым мы ограничимся, используется следующая упрощённая форма закона Ома

$$j_i^* = \sigma_e \left(E_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right). \quad (1.4)$$

Заметим, что одним из следствий условия (1.1) является то, что при написании второго уравнения (1.2) возможно было опустить член, связанный с током смещения $c^{-1} \partial \mathbf{D}_j / \partial t$. Другое следствие состоит в том, что уравнение непрерывности для электрического заряда ρ_e принимает вид $\partial j_j / \partial x_j = 0$ (результат взятия дивергенции от второго уравнения (1.2)); физически это означает, что локальные изменения плотности заряда ρ_e во времени пренебрежимо малы, а электрические токи текут по замкнутым контурам. Уравнение Пуассона (1.3) служит при этом лишь для определения (по найденному из остальных уравнений системы (1.2) и (1.3) электрическому полю) малого отклонения плазмы от квазинейтральности, которое

часто необходимо учитывать либо вблизи границы рассматриваемой системы (в частности, в слое толщиной порядка дебаевского радиуса R_D), либо при анализе высокочастотных плазменных колебаний.

Из уравнений Максвелла (1.2) и закона Ома (1.4) удобно исключить поля E_j и j_j , что приводит, при использовании известной формулы векторного анализа

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{a}$$

к уравнению магнитной индукции

$$\partial B_i / \partial t = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial (u_l B_m) / \partial x_j + v_M \partial^2 B_i / \partial x_i^2, \quad (1.5)$$

являющемся одним из основных уравнений магнитной гидродинамики. Здесь $v_M \equiv c^2 / 4\pi\mu\sigma_e$ – так называемый коэффициент диффузии магнитного поля (или коэффициент магнитной вязкости), который имеет такую же размерность, как и коэффициент кинематической вязкости ν , или коэффициент молекулярной диффузии D , т.е. $\text{см}^2/\text{с}$; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ – оператор (в декартовой системе координат), с помощью которого можно записать большинство операторов дифференцирования, действующих на тензорных полях, в частности, $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} \right) = \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$ – дивергенция; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \Delta \equiv \partial^2 / \partial x_j^2$ – оператор

Лапласа; $\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a} \right\}_i = \varepsilon_{ijk} \partial a_k / \partial x_j$ – ротор; $\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a} \right\}_i = \partial (a_j a_i) / \partial x_j$ – дивергенция от тензора (диады).

Если применить операцию дивергенции к уравнению индукции (1.5), то получим, что в МГД приближении имеет место уравнение $\partial(\partial B_j / \partial x_j) / \partial t = 0$. Поэтому для того чтобы какое-либо решение удовлетворяло уравнению $\partial B_j / \partial x_j = 0$, достаточно потребовать, чтобы этому уравнению удовлетворяли начальные условия. Таким образом, второе равенство (1.3) выполняется в силу уравнения индукции и начальных условий.

Для дальнейших целей уравнение (1.5) удобно записать в другой форме. Используя формулу векторного анализа

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{a} - \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a}$$

и уравнение непрерывности для скорости среды [см. (1.8)], перепишем (1.5) в виде

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_i}{\rho} \right) = B_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu_M \Delta B_i, \quad (1.6)$$

где $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot (\partial/\partial \mathbf{x})$ – субстанциональная производная, описывающая скорость изменения какого-либо параметра в системе координат, передвигающейся со скоростью \mathbf{u} .

Из уравнения (1.5) видно, что эволюция вектора магнитной индукции \mathbf{B} зависит от движения электропроводящей среды, т.е. при известной гидродинамической скорости \mathbf{u} уравнение (1.5) полностью определяет вектор \mathbf{B} , удовлетворяющий условию $\partial B_j / \partial x_j = 0$. Таким образом, вектор индукции в МГД рассматривается как первопричина возникновения электродинамических движений, а возникновение плотности тока и электрического поля – как вторичные явления: соответствующие значения \mathbf{j} и \mathbf{E} могут быть найдены из законов Ампера и Ома

$$j_i = c(4\pi\mu)^{-1} \varepsilon_{ijk} \partial B_k / \partial x_j, \quad E_i = c^{-1} \varepsilon_{ijk} \left(\nu_M \partial B_k / \partial x_j - u_j B_k \right), \quad (1.7)$$

а плотность заряда ρ_e , в тех случаях, когда это представляет интерес, может быть определена из уравнения Пуассона $\rho_e = (\varepsilon / 4\pi)(\partial E_i / \partial x_i)$.

Из уравнения магнитной индукции (1.6) следует, что условия подобия течений электропроводящих сред дополнительно определяются магнитным числом Рейнольдса $Re_M \equiv U_0 L_0 / \nu_M$, характеризующим отношение конвективного члена в уравнении (1.6) к диффузионному члену. Здесь ρ_0 , U_0 и L_0 – характерные для рассматриваемой задачи значения плотности, скорости и длины соответственно. Если $Re_M \gg 1$, то членами с магнитной вязкостью ν_M в (1.8) можно пренебречь. В свою очередь закон Ома (1.4) в случае идеально проводящей среды с очень высокой степенью аппроксимации сводится к виду $E_i = -c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k$. В магнитной гидродинамике показано (см., например, [1]), что в этом случае величина (B_j / ρ) в каждой точке среды изменяется пропорционально удалению друг от друга двух соседних «жидких частиц», расположенных на магнитной силовой линии, другими словами силовые линии магнитного поля как бы «вморожены» в частицы вещества. Если $Re_M \ll 1$, то уравнение индукции принимает простой вид $\partial B_i / \partial t = \nu_M \Delta B_i$, когда поле B_i определяется уравнением диффузии.

1.2. Уравнения сохранения массы и импульса

Рассмотрим теперь несколько подробнее магнитогидродинамические уравнения, которые достаточно хорошо описывают крупномасштабные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении составляющих её компонент.

Уравнение непрерывности. Уравнение сохранения массы может быть записано в виде

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u_j) / \partial x_j = 0. \quad (1.8)$$

Здесь плотность массы $\rho(\mathbf{x}, t)$ и полная гидродинамическая скорость потока $u_j(\mathbf{x}, t)$ определяются соотношениями: $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}$,

$u_j(\mathbf{x}, t) \equiv \rho^{-1} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} u_{\alpha j}$, где m_{α} – молекулярная масса частицы сорта α .

Сохранение импульса. Уравнение баланса импульса для проводящей среды имеет вид

$$\rho \frac{d}{dt} u_i \equiv \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} F_{\alpha i}, \quad (1.9)$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ – термодинамическое давление жидкости; $u_i u_j$ – тензор с девятью декартовыми компонентами; $\tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения всех компонент плазмы, причём для изотропной жидкости связь между тензорами вязкости τ_{jk} и дилатации $\partial u_k / \partial x_j$ имеет обычную форму

$$\tau_{jk}(\mathbf{x}, t) = \rho \nu \left\{ \partial u_k / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \right\} + \mu_g \delta_{jk} ((\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}), \quad (1.10)$$

где ν , μ_g – молекулярные коэффициенты кинематической и объёмной вязкости соответственно; $F_{\alpha j}(\mathbf{x}, t) = F_{\alpha j}^{\text{pond}}(\mathbf{x}, t) + m_{\alpha} g_j(\mathbf{x})$ – внешняя сила, действующая на одну заряженную частицу вещества сорта α ; $F_{\alpha j}^{\text{pond}}(\mathbf{x}, t)$ – сила Лоренца (так называемая пондеромоторная сила электромагнитного поля), которая в инерциальной системе координат в нерелятивистском приближении имеет вид

$$F_{\alpha i}^{\text{pond}}(\mathbf{x}, t) \equiv e_{\alpha} \left(E_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right),$$

и её нужно учитывать, если частицы сорта α несут заряд e_α ; $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = -\partial\Psi_G/\partial x_j$ – вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi_G(\mathbf{x})$ – потенциальная функция гравитационного поля, $\Psi_G(\mathbf{x}) = GM_\odot/|\mathbf{x}|$, где M_\odot – масса центрального притягивающего тела; G – гравитационная постоянная; $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – модуль центрального радиуса-вектора. Заметим, что в тех случаях, когда важны эффекты самогравитации, функция Ψ_G определяется соотношением $\Psi_G = GM_\odot/|\mathbf{x}| + \Psi_{cr}$, в котором потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Psi_{cr} = 4\pi G\rho.$$

При использовании силы Лоренца $F_{\alpha j}^{pond}$ член в уравнении движения (1.9), соответствующий внешним электромагнитным и гравитационным силам, в случае квазинейтральности плазмы принимает вид

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} F_{\alpha i} = \rho g_i + \rho_e \left(E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right) + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k \cong \rho g_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k. \quad (1.11)$$

Плотность пондеромоторной силы $c^{-1} \varepsilon_{ijk} j_j B_k$ в этом выражении, при использовании (1.7) и известной формулы векторного анализа

$$\mathbf{a} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} |\mathbf{a}|^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a} \right) + \mathbf{a} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} \right),$$

может быть представлена следующим образом:

$$\frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{B_i B_j}{4\pi\mu} \right) = -\frac{\partial p^M}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^M}{\partial x_j}. \quad (1.12)$$

Здесь $\tau_{ij}^M(\mathbf{x}, t) \equiv (B_i B_j)/4\pi\mu$ – тензор магнитных натяжений Максвелла; $p^M(\mathbf{x}, t) \equiv |\mathbf{B}|^2/8\pi\mu$ – давление магнитного поля. В результате уравнение баланса импульса (1.9) может быть записано в виде

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k + \rho g_i = -\frac{\partial p^\Sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^M \right) - \rho \frac{\partial \Psi_G}{\partial x_i}, \quad (1.13)$$

где

$$p^\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv p + p^M = p + |\mathbf{B}|^2 / 8\pi\mu$$

– полное давление плазмы.

Проанализируем это уравнение. Из соображений размерности легко получить следующие выражения: $F_{\text{iner}} \propto \rho U_0^2 / L_0$ – для оценки силы инерции, $F_{\text{vis}} \propto \rho \nu U_0 / L_0^2$ – для вязкой силы, $F_{\text{mag}} \propto \sigma_e B_0^2 U_0 / c^2$ – для электромагнитной силы (здесь B_0 – характерная величина индукции магнитного поля; σ_e – электрическая проводимость жидкости). Отсюда следует, что порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкости характеризует величина $\sigma_e B_0^2 L_0^2 / \rho \nu c^2$. Обычно используется квадратный корень из этой величины, называемый числом Гартмана $\mathbf{Ha} \equiv B_0 L_0 \sqrt{\sigma_e / \rho \nu c^2}$. Порядок отношения электромагнитной силы к силе инерции характеризует число Стюарта $\mathbf{N} \equiv \sigma_e B_0^2 L_0 / c^2 \rho U_0$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{Ha}^2 = \mathbf{NRe}$, где $\mathbf{Re} \equiv U_0 L_0 / \nu$ – число Рейнольдса. Из критериев \mathbf{Re} , \mathbf{N} и \mathbf{Re}_M можно получить, путём их комбинации, все другие критерии, характеризующие движение проводящей жидкости в магнитном поле. В частности, при делении числа Стюарта на магнитное число Рейнольдса получается критерий, называемый числом Альфвена: $\mathbf{Al} \equiv B_0^2 / 4\pi\mu\rho U_0^2$, характеризующий отношение магнитной энергии к кинетической энергии. Заметим, что в случае, когда рассматриваются вопросы теплообмена, к этим критериям необходимо добавить числа Нуссельта, Пекле и др.

1.3. Уравнения энергетического баланса для электропроводной среды

При феноменологическом построении одножидкостной модели МГД-турбулентности нам придётся осреднять различные уравнения энергетического баланса. Приведём здесь их краткий вывод.

Уравнение для механической энергии проводящего вещества. Уравнение механической энергии (кинетической энергии движения центра тяжести плюс потенциальной энергии) вещества плазмы может быть получено путём умножения уравнения движения (1.13) на скорость u_j . В результате получим

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ p^\Sigma u_j - (\tau_{ij} + \tau_{ij}^M) u_i \right\} + p^\Sigma \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (\tau_{ij} + \tau_{ij}^M) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

или (в виде уравнения баланса)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_{(mech)j}) = p^\Sigma \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (\tau_{ij} + \tau_{ij}^M) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1.15)$$

Здесь $J_{(mech)} \equiv \left\{ \rho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G \right) \mathbf{u} + p^\Sigma \mathbf{u} - (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^M) \cdot \mathbf{u} \right\}$ – полный поток механической энергии плазмы. Энергия, стоящая в правой части уравнения (1.15) и представляющая собой работу, затрачиваемую на деформацию, расширение или сжатие единичного объёма среды, превращается в другие формы энергии, например, во внутреннюю энергию [см. (1.16)] или энергию магнитного поля [см. (1.24)].

Уравнение для внутренней энергии. Дифференциальное уравнение (закон сохранения) для внутренней (удельной) энергии $E(\mathbf{x}, t)$ вещества в МГД – приближении может быть записано в следующей субстанциональной форме:

$$\rho \frac{d}{dt} E + \frac{\partial}{\partial x_j} (q_j + q_{Rj}) = - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e} \equiv Q_E, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ – плотность молекулярного потока тепла; $\mathbf{q}_R(\mathbf{x}, t)$ – плотность потока энергии, переносимого излучением. Последний член в правой части этого уравнения представляет собой джоулево тепло за единицу времени. Уравнение (1.16) является модификацией уравнения для внутренней энергии многокомпонентной смеси на случай проводящей среды, получающейся при использовании преобразования

$$\sum_{\alpha=1} n_\alpha (u_{\alpha i} - u_i) F_{\alpha i} = j_i (E_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k) = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e} = \frac{v_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right)^2. \quad (1.17)$$

Приведём также другую полезную для дальнейшего форму записи энергетического уравнения для электропроводящего вещества. При использовании тождества Гиббса $TdS/dt = dE/dt + p dv/dt$ для энтропии $S(\mathbf{x}, t)$ (на единицу массы) системы, которая есть функция внутренней энергии $E(\mathbf{x}, t)$ и удельного объёма $v(\mathbf{x}, t)$, совершенно такой же, как в случае неэлектропроводной жидкости [4], запишем (1.16) в виде так называемого общего уравнения переноса тепла

$$\rho T \frac{d}{dt} S = - \frac{\partial}{\partial x_j} (q_j + q_{Rj}) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + j_i \left(E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right), \quad (1.18)$$

где для идеальной жидкости $S(\mathbf{x}, t) = c_V \ln(p \rho^{-\gamma}) + const$; c_P, c_V – соответственно удельная теплоёмкость при постоянном давлении и объёме; $\gamma = c_P / c_V$ – показатель адиабаты. Уравнение (1.18) может быть переписано в дивергентном (балансовом) виде

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho S \mathbf{u} + \mathbf{J}_{(S)}) = \sigma_{(S)} \geq 0, \quad (1.19)$$

где $\mathbf{J}_{(S)}(\mathbf{x}, t) \equiv (\mathbf{q} + \mathbf{q}_R) / T$ – субстанциональный поток энтропии;

$$0 \leq \sigma_{(S)} \equiv \frac{1}{T} \left\{ -(q_j + q_{Rj}) \frac{\partial \ln T}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + j_i \left(E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right) \right\} \quad (1.20)$$

– возникновение энтропии в результате необратимых процессов теплопроводности, внутреннего трения и электропроводности среды. Последний член в (1.20), соответствующий джоулевому нагреву, учитывает вклад электромагнитных явлений в производство энтропии системы. Заметим, что именно выражение (1.20) позволяет получить при использовании метода Онзагера неравновесной термодинамики замыкающие (определяющие) соотношения для необратимых процессов в электропроводной среде, которые линейно (в первом приближении) связывают термодинамические потоки $j_i(\mathbf{x}, t)$, $q_j(\mathbf{x}, t)$, $\tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ с термодинамическими силами $(E_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k)$, $\partial \ln T / \partial x_j$, $\partial u_i / \partial x_j$.

В дополнение к приведённым выше уравнениям электродинамики и гидродинамики необходимо привлекать уравнение состояния $p = p(\rho, T)$ и калорическое уравнение состояния $E = E(\rho, T)$. Давление газа будем далее определять уравнением состояния совершенного газа $p = \mathfrak{R} \rho T$, где $\mathfrak{R} = R / \tilde{\mu}$; R – газовая постоянная; $\tilde{\mu}$ – средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p). Здесь знак тильды служит для того, чтобы отличить среднюю атомную массу от магнитной проницаемости. Внутреннюю энергию газа будем далее считать пропорциональной температуре $E(\mathbf{x}, t) = c_V T = p / (\gamma - 1) \rho$, где $c_V = (R / \tilde{\mu}) / (\gamma - 1)$ – теплоёмкость газа, соответствующая нагреванию при постоянном объёме, которую в дальнейшем будем считать постоянной величиной.

Уравнение для магнитной энергии плазмы. Уравнение для магнитной энергии плазмы $E^M(\mathbf{x}, t) \equiv (B_i B_i) / 8\pi\mu$ (на единицу массы) получим путём скалярного умножения на вектор \mathbf{B} уравнения индукции (1.6). В результате, при учёте дифференциального тождества

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} \right) = \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{c},$$

будем иметь

$$\rho \frac{d}{dt} E^M = -p^M \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij}^M \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{v_M}{4\pi\mu} B_i \Delta B_i, \quad (1.21)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E^M)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\rho E^M + p^M) u_j - v_M \frac{\partial p^M}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_M \tau_{ij}^M) \right\} = \\ = \tau_{ij}^M \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{v_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Балансовая форма (1.22) представления уравнения для магнитной энергии записана с использованием соотношения

$$\frac{v_M}{4\pi\mu} B_i \Delta B_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} v_M (-p^M \delta_{ij} + \tau_{ij}^M) \right\} - \frac{v_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right)^2,$$

которое получается с учётом формулы векторного анализа

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{b},$$

путём взятия дивергенции от выражения (1.12).

Следует отметить, что в некоторых случаях уравнение (1.22) удобно переписать, используя так называемый вектор Умова–Пойнтинга

$$Q_{(Poynt)i}(\mathbf{x}, t) \equiv (c / 4\pi) \varepsilon_{ijk} E_j H_k,$$

который имеет смысл плотности потока энергии электромагнитного поля. В МГД–приближении этот вектор может быть преобразован, при использовании соотношений (1.7) и (1.12), к следующему виду

$$Q_{(Poynt)i}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\mu} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \left(v_M \frac{\partial B_m}{\partial x_l} - u_l B_m \right) B_k =$$

$$= (\rho E^M + p^M) u_i - \tau_{ij}^M u_j - v_M \partial p^M / \partial x_i + v_M \partial \tau_{ij}^M / \partial x_j. \quad (1.23)$$

С учётом этого выражения, уравнение баланса для магнитной энергии (1.22) для медленно движущейся среды ($|\mathbf{u}|/c \ll 1$) может быть записано в следующей «классической» форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E^M)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{c}{4\pi} \varepsilon_{ijk} E_j H_k - p^M u_i + \tau_{ij}^M u_j \right\} - \\ &- p^M \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij}^M \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - j_i \left(E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ q_{(Poynt)i} \right\} - j_i E_i. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Наконец, комбинируя (1.15) и (1.24), получим уравнение баланса механической и магнитной энергии электропроводной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[|\mathbf{u}|^2 / 2 + \Psi_G + E^M \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \rho \left(|\mathbf{u}|^2 / 2 + \Psi_G \right) \mathbf{u} + p \mathbf{u} + \mathbf{q}_{(Poynt)} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} \right\} = \\ = p \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) - \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e} \equiv -Q_E. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Это уравнение выражает тот факт, что сумма плотностей механической энергии и магнитной энергии плазмы не сохраняется, а именно, количество энергии, равное Q_E , превращается во внутреннюю энергию системы [см. (1.16)]. Заметим, что в приближении МГД электрическое поле не создаёт энергии в среде.

Сохранение полной энергии электропроводящей среды. Уравнение первого начала термодинамики, выражающее сохранение полной энергии (на единицу массы вещества) замкнутой системы (электропроводная среда плюс магнитное поле)

$$U_{tot}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{u}|^2 / 2 + \Psi_G + E + E^M, \quad (1.26)$$

может быть получено путём сложения балансовых уравнений для механической энергии (1.15), внутренней энергии (1.16) и магнитной энергии (1.24) плазмы. В результате получим

$$\frac{\partial(\rho U_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \rho U_{tot} \mathbf{u} + \mathbf{J}_{U_{tot}} \right\} = 0, \quad (1.27)$$

где

$$\mathbf{J}_{U_{tot}}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{q} + \mathbf{q}_R + \mathbf{q}_{Poynt} + p \mathbf{u} - \left(|\mathbf{B}|^2 / 8\pi\mu \right) \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} =$$

$$= \mathbf{q} + \mathbf{q}_R + (p + p^M) \mathbf{u} - (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^M) \cdot \mathbf{u} - v_M \frac{\partial p^M}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (v_M \boldsymbol{\tau}^M) \quad (1.28)$$

– вектор субстанционального потока полной энергии движущейся плазмы (в одножидкостном МГД-приближении с законом Ома в форме (1.4)).

Система магнитогидродинамических уравнений должна быть дополнена определяющими соотношениями для потоков энергии $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ и радиационного тепла $\mathbf{q}_R(\mathbf{x}, t)$, для тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$, а также выражениями для всех необходимых термодинамических и переносных характеристик среды. Отметим, что граничные и начальные условия для гидротермодинамических параметров в МГД не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводных сред, но необходимы дополнительные условия для поля магнитной индукции [5].

Следует иметь в виду, что в настоящее время все более широкое применение находят методы прямого численного моделирования (*Direct Numerical Simulation, DNS*) на основе решения выписанной нестационарной системы трёхмерных МГД-уравнений. В приложении к конкретным видам течений метод DNS предполагает решение дискретного аналога этих уравнений без привлечения каких-либо дополнительных соотношений. Этот метод представляется наиболее надёжным подходом, предоставляющим возможность всестороннего изучения турбулентных явлений в тех случаях, когда экспериментальные исследования затруднены или вообще невозможны. Он позволяет иногда проследить не только эволюцию образований различных пространственных структур с течением времени, но также изучать общую динамику и природу развития турбулентности. Заметим, однако, что в силу стохастичности явления турбулентности, в реальности методом *DNS* удаётся получать интересные результаты только при сравнительно невысоких значениях числа Рейнольдса.

В связи с этим в настоящее время на первый план выступает задача приближенного описания турбулентности, основанная на осреднённых МГД-уравнениях. Метод осреднения МГД-уравнений, имеющий английскую аббревиатуру *RANS* (*Reynolds-averaged Navies-Stokes*), предполагает запись уравнений переноса осреднённого по времени потока, со всеми предполагаемыми масштабами турбулентности. Такой подход значительно уменьшает вычислительные ресурсы, необходимые для решения численной задачи.

2. Осреднённые уравнения турбулентного движения в одножидкостном МГД-приближении

Как уже отмечалось, в настоящее время какой-либо строгой и общепринятой полуэмпирической теории турбулентности электропроводных сред не существует. Большая часть теоретических работ по моделированию турбулентного движения подобных сред выполнена для проводящей жидкости с постоянными свойствами и изотропным тензором проводимости, т.е. применительно к случаю, когда качественное различие между плазмой и жидкими металлами не проявляется. Как известно, к этому случаю при некоторых ограничениях можно отнести и проблемы моделирования турбулентного движения высокотемпературных электропроводящих сред с большой плотностью, либо при небольшой величине напряжённости магнитного поля (напомним, что высокотемпературные электропроводящие среды (плазма) в магнитном поле характеризуются в общем случае анизотропным коэффициентом проводимости). В этой главе предпринята попытка термодинамического вывода основной системы осреднённых уравнений МГД – турбулентности. Подобный подход позволяет описать все основные специфические особенности, присущие турбулентным движениям проводящих изотропных сред в присутствии магнитного поля, которые важны не только для задач моделирования магнитных астрофизических аккреционных дисков (естественным состоянием движения которых в виду их огромности должно быть турбулентное движение), но и для многих других случаев [25].

Как уже говорилось выше, магнитогидродинамические течения при $\mathbf{Re}_M \ll 1$ и при $\mathbf{Re}_M \gg 1$ качественно отличаются друг от друга. Это, естественно, относится и к турбулентным течениям, когда в качестве характерных скорости U_0 и пространственного масштаба L_0 течения выбра-

ны пульсационная скорость $w \equiv \sqrt{|\mathbf{u}''|^2}$ и масштаб турбулентности L . Если магнитное число Рейнольдса $\mathbf{Re}_M \equiv Lw/\nu_M$ для турбулентных пульсаций много больше единицы, то представление о «вмороженном» магнитном поле применимо как для движений крупных турбулентных вихрей, так и для исследования мелкомасштабной структуры турбулентности в таком диапазоне масштабов, в котором число \mathbf{Re}_M для соответствующих вихрей остаётся существенно больше единицы. Это означает, что магнитные силовые линии получают столь же запутанными, как и «материальные» линии, образованные жидкими частицами. В результате возникает пульсирующее магнитное поле. Физической причиной его возникновения являются, в конечном счёте, турбулентные электрические токи, возникающие в среде в результате турбулентных пульсаций скорости при наличии магнитного поля.

Далее мы ограничимся рассмотрением только магнитогидродинамической турбулентности низкотемпературной плазмы при следующих предположениях, вытекающих из анализа уравнений МГД [6]:

(i) $\mathbf{Re}_M \leq 1$; в этом случае можно учитывать влияние на поток только внешнего магнитного поля B_0 и вызываемых им токов.

(ii) $\mathbf{NRe}_M \ll 1$ в этом случае оказывается несущественной генерация магнитогидродинамических волн турбулентными пульсациями.

(iii) $(c_A/c_s)(\mathbf{NRe}_M)^{3/2} \ll 1$, $w/c_s \ll 1$ (где $c_A \equiv B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ – характерная альфвеновская скорость, c_s – скорость звука); в этом случае динамика развития турбулентности может рассматриваться без учёта генерации акустических колебаний.

При нарушении какого-либо из указанных условий механизм турбулентного движения существенно усложняется. Например, при нарушении условия (ii) турбулентные пульсации в электропроводящей среде должны приводить к появлению турбулентного поля магнитогидродинамических и акустических волн, и волн, связанных с взаимодействием магнитогидродинамических и акустических колебаний, причём энергия пульсационного движения среды может быть при этом меньше или равна энергии пульсационного магнитного поля и энергии акустических колебаний. В тоже время и при таких ограниченных полях, при которых условие (ii) выполняется, воздействие магнитного поля на турбулентность может быть весьма существенным.

2.1. Уравнение непрерывности для средних полей

Легко видеть, что осреднённая плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость плазмы $\langle u_j \rangle \equiv \overline{\rho u_j} / \bar{\rho}$ удовлетворяют следующему уравнению непрерывности для среднего движения

$$\partial \bar{\rho} / \partial t + \partial (\bar{\rho} \langle u_j \rangle) / \partial x_j = 0. \quad (2.1)$$

Далее мы будем широко использовать тождество [см. Гл.2]

$$\overline{\rho \frac{dA}{dt}} \equiv \bar{\rho} \frac{D\langle A \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} J_{(A)j}^{turb}, \quad (2.2)$$

которое, при учёте (2.1), получается путём осреднения по Рейнольдсу операторного соотношения $\rho dA/dt = \partial(\rho A)/\partial t + \partial(\rho A u_j)/\partial x_j$, описывающего связь между субстанциональным и локальным изменениями характеристики $A(\mathbf{x}, t)$ в мгновенном движении среды. Здесь

$$J_{(A)j}^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho A u_j''} = \bar{\rho} \langle A u_j'' \rangle \quad (2.3)$$

– турбулентный поток характеристики $A(\mathbf{x}, t)$.

2.2. Уравнение магнитной индукции для средних полей

Осредняя по ансамблю возможных реализаций стохастического электропроводящего жидкостного континуума, справедливые по предположению уравнения Максвелла (1.2)-(1.3) и закон Ома (1.4) для мгновенных значений электродинамических полей, в результате получим

$$c^{-1} \partial \bar{\mathbf{B}}_i / \partial t = -\varepsilon_{ijk} \partial \bar{\mathbf{E}}_k / \partial x_j, \quad \varepsilon_{ijk} \partial \bar{\mathbf{B}}_k / \partial x_j = (4\pi\mu / c) \bar{j}_i, \quad \partial \bar{\mathbf{B}}_j / \partial x_j = 0, \quad (2.4)$$

$$\bar{j}_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_e \left(\bar{\mathbf{E}}_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \overline{u_j'' B_k} \right) \equiv \sigma_e \left(\bar{\mathbf{E}}_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \langle u_j \rangle \bar{\mathbf{B}}_k + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \overline{u_j'' B_k} \right). \quad (2.5)$$

Из (2.4) видно, что уравнения Максвелла в силу их линейности сохраняют свой первоначальный вид и для осреднённых электромагнитных полей. Однако в осреднённом законе Ома (2.5) появляется новый член $c^{-1} \varepsilon_{ijk} \overline{u_j'' B_k}$, который приводит к дополнительной «турбулентной электродвижущей силе»

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \overline{u_j'' B_k}. \quad (2.6)$$

Величина $\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, t)$ имеет размерность напряжённости электрического поля и описывает средний результат взаимодействия пульсаций поля скоростей и магнитной индукции. Силу \mathbf{G}_i для дальнейших целей удобно представлять в виде

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, t) \equiv -\frac{1}{2c} \varepsilon_{ijk} R_{jk}^M, \quad (2.6^*)$$

где $R_{jk}^M(\mathbf{x}, t) = -\left(\overline{u_j'' B_k} - \overline{u_k'' B_j} \right)$ – так называемый магнитный тензор Рейнольдса. Таким образом, закон Ома для средних полей принимает вид

$$\bar{j}_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_e \left(\bar{\mathbf{E}}_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} \langle u_j \rangle \bar{\mathbf{B}}_k + \mathbf{G}_i \right) \equiv \sigma_e \left(\mathbf{E}_i^* + \mathbf{G}_i \right), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{E}_i^*(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\mathbf{E}}_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} \langle u_j \rangle \bar{\mathbf{B}}_k$ – электрическое поле в системе координат, движущейся с осреднённой скоростью $\langle u_j \rangle$.

Таким образом, в отличие от регулярного течения, для определения

осреднённых полей $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$, $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$ и $\overline{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$ необходимо знание не только величины осреднённой скорости $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x},t)$, но и турбулентной электродвижущей силы $\mathbf{G}(\mathbf{x},t)$:

$$\overline{\mathbf{j}}_i = (c / 4\pi\mu) \varepsilon_{ijk} \partial \overline{\mathbf{B}}_k / \partial x_j, \quad (2.8)$$

$$\overline{\mathbf{E}}_i = \frac{1}{\sigma_e} \overline{\mathbf{j}}_i - \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \langle u_j \rangle \overline{\mathbf{B}}_k - \mathbf{G}_i = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \left(v_M \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_k}{\partial x_j} - \langle u_j \rangle \overline{\mathbf{B}}_k \right) - \mathbf{G}_i. \quad (2.9)$$

При этом эволюция магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ определяется следующим осреднённым уравнением индукции

$$\overline{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_i}{\overline{\rho}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\mathbf{B}}_j u_i'' \right) = \overline{\mathbf{B}}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \overline{\mathbf{B}}_j \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + v_M \Delta \overline{\mathbf{B}}_i, \quad \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.10)$$

которое может быть получено путём осреднения по Рейнольдсу уравнения (1.6). Для дальнейших целей уравнение (2.10) удобно записать в более компактном виде

$$\overline{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_i}{\overline{\rho}} \right) = \overline{\mathbf{B}}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + c \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial x_j} + v_M \Delta \overline{\mathbf{B}}_i, \quad (2.10^*)$$

или, если использовать преобразование

$$c \varepsilon_{ijk} \partial \mathbf{G}_k / \partial x_j = \overline{\mathbf{B}}_j \partial u_i'' / \partial x_j - u_j'' \partial \overline{\mathbf{B}}_i / \partial x_j - \overline{\mathbf{B}}_i \partial u_j'' / \partial x_j \equiv \partial R_{ij}^M / \partial x_j,$$

в виде

$$\overline{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_i}{\overline{\rho}} \right) = \overline{\mathbf{B}}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial R_{ij}^M}{\partial x_j} + v_M \Delta \overline{\mathbf{B}}_i. \quad (2.11)$$

Таким образом, в осреднённом уравнении индукции (2.10*) появился член $c \varepsilon_{ijk} (\partial \mathbf{G}_k / \partial x_j)$, играющий роль дополнительного источника, генерирующего магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$. Ясно, что одной из основных целей полупэмпирической теории МГД – турбулентности должно являться конструирование специального замыкающего соотношения для турбулентной электродвижущей силы $\mathbf{G}(\mathbf{x},t)$, как функции средних полей $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ и $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x},t)$, с тем чтобы, задав поле $\langle \mathbf{u} \rangle$, можно было решить уравнение (2.10*).

2.3. Осреднённое уравнение движения плазмы

Осреднённое уравнение движения для электропроводных сред получим путём осреднения уравнения движения (1.13) для регулярных течений. В результате будем иметь

$$\bar{\rho} \frac{D\langle u_j \rangle}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} + \overline{p^M}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\tau_{ij}} + R_{ij} + \overline{\tau_{ij}^M}) - \bar{\rho} \frac{\partial \Psi_G}{\partial x_j}. \quad (2.12)$$

Здесь $\overline{\tau}$ – осреднённый тензор вязких напряжений, описывающий обмен импульсом между жидкими частицами благодаря силам молекулярной вязкости; $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = -\bar{\rho} \langle \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' \rangle$ – «обычный» тензор Рейнольдса для жидкости, имеющий смысл турбулентных напряжений; $\tau^M(\mathbf{x}, t) \equiv (1/4\pi\mu) \overline{\mathbf{B}\mathbf{B}} = \tau_{(av)}^M + \tau_{(turb)}^M$ и $\overline{p^M} \equiv p_{av}^M + p_{turb}^M$ – осреднённый тензор магнитных натяжений и осреднённое давление магнитного поля соответственно; $\tau_{(av)}^M(\mathbf{x}, t) \equiv (1/4\pi\mu) \overline{\mathbf{B}\mathbf{B}}$ и $\tau_{(turb)}^M(\mathbf{x}, t) \equiv (1/4\pi\mu) \overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'}$ – тензоры магнитных натяжений для осреднённого магнитного поля и пульсационной составляющей магнитного поля; $p_{av}^M(\mathbf{x}, t) \equiv |\overline{\mathbf{B}}|^2 / 8\pi\mu$ и $p_{turb}^M(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}'} / 8\pi\mu$ – давление осреднённого магнитного поля и турбулентное магнитное давление электропроводящей жидкости.

Используя преобразование [ср. с (1.15)]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_{av}^M}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{(av)ij}^M) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{B_i B_j}}{4\pi\mu} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\mu} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \overline{B_j} \frac{\partial \overline{B_m}}{\partial x_l} = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \overline{j_j} \overline{B_k} \end{aligned}$$

придадим осреднённому уравнению движения плазмы (2.12) следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle u_i \rangle}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p_{turb}^M) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ij}} + R_{ij} + \tau_{(turb)ij}^M) + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \overline{j_j} \overline{B_k} - \bar{\rho} \frac{\partial \Psi_G}{\partial x_i} \cong \\ &\cong -\frac{\partial (\bar{p} + p_{turb}^M)}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{ij}^K}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \overline{B_k} \frac{\partial \overline{B_m}}{\partial x_l} + \bar{\rho} g_i, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\mathbf{R}^K(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{R} + \tau_{(turb)}^M \equiv \left(-\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''} + \frac{1}{4\pi\mu} \overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'} \right)$ – полный тензор турбулентных напряжений в плазме (так называемый кинетический тензор Рейноль-

дса для электропроводной жидкости, находящейся в магнитном поле). Отметим, что приближённая форма уравнения (2.13) справедлива только в случае развитой турбулентности, когда осреднённым тензором вязких (молекулярных) напряжений $\bar{\tau}$ можно пренебречь по сравнению с тензором \mathbf{R} (за исключением примыкающего к твёрдым стенкам вязкого подслоя).

2.4. Энергетические уравнения масштаба среднего движения для электропроводящего вещества

В осреднённом турбулентном течении проводящей жидкости, по сравнению с его регулярным аналогом, существует большое количество всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергии движущихся элементарных объёмов вещества, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию материально-полевого плазменного континуума. Для наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса, выпишем сначала различные уравнения энергии для осреднённого движения материальной составляющей плазмы, включая уравнение баланса для турбулентной кинетической энергии вещества.

Уравнение притока тепла для среднего движения турбулентной плазмы. Осредняя по Рейнольдсу уравнение (1.16) для внутренней энергии плазмы и используя тождества

$$\bar{\rho} D\langle E \rangle / Dt + \bar{p} \partial \langle u_j \rangle / \partial x_j \equiv \bar{\rho} D\langle H \rangle / Dt - D\bar{p} / Dt,$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} \equiv \frac{D\bar{p}}{Dt} + \mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\overline{p' \mathbf{u}''}) - \overline{p' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)},$$

где $\langle H \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \langle E \rangle + \bar{p}/\bar{\rho}$ – осреднённая энтальпия среды, получим уравнение притока тепла для среднего движения проводящей жидкости в следующем виде

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D\langle E \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{q}_j + \bar{q}_{Rj} + \tilde{q}_j^{turb} \right) = \\ & = -\bar{p} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \mathbf{J}_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

или

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D\langle H \rangle}{Dt} + \frac{\partial J_{\langle E \rangle j}}{\partial x_j} = \\ & = \frac{D\bar{p}}{Dt} + \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + J_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle + \bar{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь $J_{(v)}^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\mathbf{u}''}$ и $\mathbf{q}^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho H'' \mathbf{u}''}$ – соответственно турбулентные потоки удельного объёма и тепла; $\tilde{\mathbf{q}}^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{q}^{turb} - \overline{p' \mathbf{u}''}$; $0 \leq \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\boldsymbol{\tau}_{kj} : \partial \mathbf{u}'' / \partial \mathbf{x}}$ и $0 \leq \bar{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle \equiv \overline{|\mathbf{j}'|^2} / \sigma_e$ – соответственно удельная скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости) и удельная скорость диссипации энергии турбулентности, связанная с действием пульсирующего магнитного поля (эту величину можно интерпретировать как джоулево тепловыделение от пульсационных электрических токов, возникающих при турбулентных пульсациях магнитного поля в проводящей среде); $J_{\langle E \rangle}(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}_R + \tilde{\mathbf{q}}^{turb}$ – полный поток внутренней энергии осреднённого движения плазмы.

Уравнение для осреднённой механической энергии в присутствии магнитного поля. Уравнение для осреднённой механической энергии плазмы может быть получено путём умножения обеих частей осреднённого уравнения движения (2.12) на компоненту скорости $\langle u_j \rangle$ и суммирования полученного результата по индексу j . В результате получим:

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\left(\langle \mathbf{u} \rangle \right)^2 / 2 + \Psi_G \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\bar{p} + p_{turb}^M \right) \langle u_j \rangle - \left(\overline{\tau_{ij}} + R_{ij}^K + \tau_{(av)ij}^M \right) \langle u_i \rangle \right\} = \\ & = \left(\bar{p} + p_{turb}^M \right) \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} - \left(\overline{\tau_{ij}} + R_{ij}^K + \tau_{(av)ij}^M \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Уравнение для турбулентной энергии вещества плазмы. Уравнение для турбулентной кинетической энергии вещества может быть получено различными способами (см., например, [8]), одним из которых мы воспользуемся в рассматриваемом здесь случае электропроводной среды. Пусть $A(\mathbf{x}, t)$ – актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты какого-либо вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho dA / dt = -\partial J_{(A)j} / \partial x_j + \sigma_{(A)}$, где $J_{(A)j}$ и σ_A – соответственно вектор субстанциональной плотности потока и

объёмная плотность источника признака $A(\mathbf{x}, t)$. Легко показать (для чего нужно умножить тождество $dA''/dt \equiv dA/dt - D\langle A \rangle/Dt - u_j(\partial\langle A \rangle/\partial x_j)$ на $\rho A''$ и осреднить результат по Рейнольдсу), что уравнение переноса для среднеквадратичной пульсации $\langle A''^2 \rangle$ имеет следующий общий вид [9]

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\langle A''^2 \rangle}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho A''^2 u_j''} + \overline{A'' J_{(A)j}} \right) = - J_{(A)j}^{turb} \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x_j} + \overline{A'' \sigma_{(A)}} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_{(A)} \rangle, \quad (2.17)$$

где $\bar{\rho} \langle \varepsilon_{(A)} \rangle \equiv - \overline{J_{(A)j} \partial A'' / \partial x_j}$ – скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle A''^2 \rangle$. Уравнение переноса (2.17) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение дисперсии $\langle A''^2 \rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, турбулентной диффузии (второй член слева), образования за счёт обмена энергией между осреднённым и пульсационным движением (первый член справа), перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle A''^2 \rangle$ вследствие «молекулярных» процессов переноса.

Тогда уравнение для турбулентной энергии $\langle b \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho u_i'' u_i''} / 2\bar{\rho}$ вещества может быть получено из (2.17) путём подстановки в него следующих выражений:

$$A \equiv u_i, \quad J_{(u_i)j} \equiv -\tau_{ij}, \quad \sigma_{(u_i)} \equiv -\partial p / \partial x_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} j_j B_k + \rho g_i$$

(см. (1.13)); в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle b \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(J_{\langle b \rangle j} \right) = R_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - J_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} - \\ - \mathbf{G}_j \bar{j}_j - \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \langle u_i \rangle \bar{j}_j B'_k + \bar{j}_j E'_j - \bar{\rho} \{ \langle \varepsilon_b \rangle + \langle \varepsilon_M \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $J_{\langle b \rangle}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho(b + p' / \rho) \mathbf{u}''} - \overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}''}$ – турбулентно-диффузионный поток турбулентной энергии вещественной составляющей плазмы. При написании (2.18) было использовано преобразование

$$c^{-1} \varepsilon_{ijk} \overline{u_i'' j_j B_k} \equiv -c^{-1} \varepsilon_{ijk} \langle u_i \rangle \bar{j}_j B'_k + \bar{j}_j E'_j - \bar{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle - \mathbf{G}_j \bar{j}_j. \quad (2.19)$$

Физический смысл членов, стоящих в правой части уравнения (2.18)

следующий: величина $R_{ij}(\partial\langle u_i \rangle / \partial x_j)$ фигурирует в правых частях уравнений (2.16) и (2.18) с разными знаками, и потому её можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии осреднённого движения в энергию турбулентности электропроводной жидкости; величина $\overline{p' \partial u_j''} / \partial x_j$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии плазмы в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объёма пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций гидродинамического давления p' в системе и расширения ($\partial u_j'' / \partial x_j > 0$) или сжатия ($\partial u_j'' / \partial x_j < 0$) турбулентных вихрей; величина $J_{(v)j}^{turb}(\partial \bar{p} / \partial x_j)$ представляет собой скорость перехода (в единице объёма среды) между турбулентной и осреднённой внутренней энергиями системы, причём мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них эта величина всегда положительна (заметим, однако, что крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией, для которых $J_{(v)j}^{turb}(\partial \bar{p} / \partial x_j) < 0$, могут преобразовывать тепловую энергию турбулизованного потока в осреднённую кинетическую энергию пульсаций скорости [10]); парная корреляция $\bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle(\mathbf{x}, t)$ в развитом турбулентном потоке представляет собой скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости [см. (2.14)]; наконец, величину $\bar{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle(\mathbf{x}, t)$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесённую к единице времени и единице объёма), совершаемую пульсациями тензора магнитных натяжений над турбулентными вихрями, можно интерпретировать как дополнительное рассеяние турбулентной энергии под влиянием магнитной вязкости, происходящее в электропроводной турбулентной среде (джоулева диссипация).

Уравнение для полной осреднённой энергии вещества плазмы. Комбинируя уравнения (2.14), (2.16) и (2.18), получим балансовое уравнение для полной осреднённой удельной энергии

$$\langle U_{tot}^{sub} \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv |\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2 + \Psi_G + \langle E \rangle + \langle b \rangle$$

электропроводного вещества в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \langle U_{tot}^{sub} \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} \langle U_{tot}^{sub} \rangle \langle u_j \rangle + J_{\langle U_{tot}^{sub} \rangle j} \right\} =$$

$$= \overline{p^M} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} - \overline{\tau_{ij}^M} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{|\overline{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} - \mathbf{G}_j \overline{j}_j - \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \langle u_i \rangle \overline{j'_j B'_k} + \overline{j'_j E'_j} \equiv \mathfrak{N}, \quad (2.20)$$

где

$$\mathbf{J}_{\langle U_{tot}^{sub} \rangle}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{q}}_R + \mathbf{q}^{turb} + \overline{\rho b \mathbf{u}''} - \overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}''} + (\overline{p} + p_{turb}^M) \langle \mathbf{u} \rangle - (\overline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_{(av)}^M + \mathbf{R}^K) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$$

– субстанциональный поток полной осреднённой энергии вещественной составляющей турбулентной плазмы. Из этого уравнения видно, что осреднённая плотность полной энергии для электропроводного вещества не сохраняется: полная энергия вещества $\langle U_{tot}^{sub} \rangle(\mathbf{x}, t)$ и магнитная энергия $\langle E^M \rangle(\mathbf{x}, t)$ могут переходить одна в другую [см. (2.21)].

2.5. Уравнения для магнитной энергии турбулентной плазмы

Для турбулентной плазмы следует принимать во внимание ещё и другие виды энергии, связанные с проявлением магнитного поля. Получим сначала уравнение для осреднённой плотности магнитной энергии плазмы $\langle E^M \rangle(\mathbf{x}, t)$, которую удобно разложить на сумму двух величин:

$$\langle E^M \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{|\mathbf{B}|^2} / 8\pi\mu / \overline{\rho} = E_{av}^M(\mathbf{x}, t) + \langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t),$$

где $E_{av}^M(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{|\mathbf{B}|^2} / 8\pi\mu\overline{\rho}$ – плотность магнитной энергии среднего поля; $\langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}'} / 8\pi\mu\overline{\rho}$ – плотность турбулентной магнитной энергии. Проводя теоретико-вероятностное осреднение уравнения (1.26) и учитывая соотношения (2.20), (2.28) и (2.29), будем иметь

$$\overline{\rho} \frac{D \langle E^M \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \mathbf{J}_{(E^M)}^{turb} + \overline{p^M \mathbf{u}''} - \overline{\boldsymbol{\tau}^M \cdot \mathbf{u}''} - v_M \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \overline{p^M} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (v_M \overline{\boldsymbol{\tau}^M}) \right\} = -\mathfrak{N}, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{J}_{(E^M)}^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho E^M \mathbf{u}''} = \frac{1}{8\pi\mu} \overline{|\mathbf{B}|^2 \mathbf{u}''}$ – турбулентный поток магнитной энергии плазмы.

Следует отметить, что поскольку правые части уравнений (2.20) и (2.21) отличаются лишь по знаку, то плотность полной энергии осреднённого континуума $\langle U_{(tot)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \langle U_{tot}^{sub} \rangle + \langle E^M \rangle$, равная сумме плотностей (на единицу массы), осреднённой энергии вещества $\langle U_{tot}^{sub} \rangle(\mathbf{x}, t)$ и осреднённой магнитной энергии плазмы $\langle E^M \rangle(\mathbf{x}, t)$ сохраняется. Единственным процессом, под влиянием которого изменяется в неподвижном объёме полная

энергия $\langle U_{(tot)} \rangle(\mathbf{x}, t)$ осреднённого континуума для плазмы является приток или отток энергии через поверхность этого объёма, что и выражает принцип сохранения энергии в механически, термически и электромагнитно изолированной системе.

Если использовать осреднённый вектор Пойнтинга [см. (1.29)]

$$\overline{q_{(Poynt)i}}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{c}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \overline{E_j H_k} = \overline{\rho(E^M + p^M/\rho)u_i - \tau_{ij}^M u_j - v_M \frac{\partial p^M}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_M \tau_{ij}^M)}, \quad (2.22)$$

то уравнению (2.21) для осреднённой магнитной энергии можно придать следующий балансый вид:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \langle E^M \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \bar{\mathbf{q}}_{(Poynt)} - \bar{p}^M \langle \mathbf{u} \rangle + \bar{\boldsymbol{\tau}}^M \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = -\mathfrak{N} \quad (2.23)$$

эквивалентный, как легко проверить, осреднённому закону сохранения энергии электромагнитного поля [11]

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \langle E^M \rangle)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\bar{\mathbf{q}}_{(Poynt)} \right) - \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{E}}. \quad (2.24)$$

Уравнение для магнитной энергии среднего поля. Получим теперь уравнение для магнитной энергии среднего поля. С этой целью умножим на $\bar{B}_j/4\pi\mu$ осреднённое уравнение индукции (2.10*) и результат просуммируем по индексу j . При учёте выражения

$$\frac{v_M}{4\pi\mu} \bar{B}_i \Delta \bar{B}_i = -\frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -v_M \frac{\partial p_{av}^M}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_M \tau_{(av)ij}^M) \right\}, \quad (2.25)$$

справедливого также и для осреднённых полей, в результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D}{Dt} E_{av}^M + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -v_M \frac{\partial p_{av}^M}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_M \tau_{(av)ij}^M) \right\} = \\ & -p_{av}^M \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \tau_{(av)ij}^M \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{c}{4\pi\mu} \varepsilon_{ijk} \bar{B}_i \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial x_j} - \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Придадим уравнению (2.26) более наглядный вид, воспользовавшись для

этого соотношением $|\bar{\mathbf{j}}|^2 / \sigma_e = v_M (4\pi\mu)^{-1} (\varepsilon_{ijk} \partial \bar{B}_k / \partial x_j)^2$ и формулой

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a} \right) - \mathbf{a} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{b} \right);$$

в результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} E_{av}^M + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -v_M \frac{\partial p_{av}^M}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_M \tau_{(av)ij}^M) - \frac{c}{4\pi\mu} \varepsilon_{ijk} \mathbf{G}_j \bar{B}_k \right\} = \\ = -p_{av}^M \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \tau_{(av)ij}^M \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \bar{j}_j \mathbf{G}_j - \frac{v_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из правой части этого уравнения видно, что магнитная энергия среднего поля E_{av}^M убывает за счёт диссипации (последний член) и возрастает в результате перехода кинетической энергии среднего движения (второй член справа) и турбулентной кинетической энергии вещества (третий член справа) в магнитную энергию среднего уравнения (2.19*), (2.23) и (2.27)].

Уравнение для турбулентной магнитной энергии. Уравнение для турбулентной магнитной энергии $\langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t)$ может быть получено тогда из разности уравнений (2.21) и (2.27):

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D \langle b_M \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_{\langle b_M \rangle j}) = \\ = -p_{turb}^M \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \tau_{(turb)ij}^M \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \langle u_i \rangle \varepsilon_{ijk} \overline{j'_j B'_k} - \overline{j'_j E'_j}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $J_{\langle b_M \rangle i}(\mathbf{x}, t) \equiv \left\{ \overline{\rho (E^M + p^M / \rho) u_i''} - \overline{\tau_{ij}^M u_j''} + (c / 4\pi\mu) \varepsilon_{ijk} \mathbf{G}_j \bar{B}_k \right\}$ – диффузионный поток турбулентной магнитной энергии $\langle b_M \rangle$ плазмы. Из этого уравнения видно, что физической причиной возникновения и поддержания турбулентной магнитной энергии (турбулентного магнитного поля) являются турбулентные электрические токи (слагаемое $c^{-1} \varepsilon_{ijk} \overline{j'_j B'_k} \equiv \partial(\tau_{(turb)ij}^M) / \partial x_j$), возникающие в среде при турбулентных пульсациях скорости при наличии магнитного поля и пульсациях магнитного поля. Последний член уравнения (2.28) описывает убывание турбулентной магнитной энергии за счёт перехода её в турбулентную энергию среды [см. (2.18)].

Балансовое уравнение для полной турбулентной энергии плазмы. Складывая теперь (2.18) и (2.28), получим балансовое уравнение для полной энергии турбулентности $b_\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \langle b \rangle(\mathbf{x}, t) + \langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t)$ электропроводной среды в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} b_\Sigma) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} b_\Sigma \langle u_j \rangle + J_{(b_\Sigma)j} \right\} = \\ & = -p_{turb}^M \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + R_{ij}^K \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu} R_{ij}^M \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - J_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} - \bar{\rho} \varepsilon_\Sigma, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$J_{(b_\Sigma)j}(\mathbf{x}, t) = \overline{\rho(b + p'/\rho) u_j''} - \left[\tau_{ij} + \left(\frac{1}{4} \pi\mu \right) B_i' B_j' \right] u_i'' - \left(\frac{1}{4} \pi\mu \right) \left\{ \overline{B_i' u_i''} \bar{B}_j + u_j'' \bar{B}_i \bar{B}_i \right\}$$

– диффузионный поток полной (кинетической плюс магнитной) турбулентной энергии электропроводной среды;

$$\bar{\rho} \varepsilon_\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\rho} \left(\langle \varepsilon_M \rangle + \langle \varepsilon_b \rangle \right) = \overline{\tau_{ij} \partial u'' / \partial x_j} + \overline{j_i' j_i'} / \sigma_e \quad (2.30)$$

– полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости и вязкости магнитного поля); $\mathbf{R}^K(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\tau}^{turb}(\mathbf{x}, t)$ – полный тензор турбулентных напряжений плазмы (так называемый кинетический тензор Рейнольдса). При написании (2.29) использовано преобразование

$$\mathbf{G}_i \bar{j}_j \equiv -\left(\frac{1}{4} \pi\mu \right) R_{ij}^M \partial \bar{B}_i / \partial x_j, \quad (2.31)$$

которое следует из соотношений (2.6*) и (2.8); действительно,

$$\mathbf{G}_i \bar{j}_i = -\frac{1}{8\pi\mu} \varepsilon_{kji} \varepsilon_{mli} R_{jk}^M \frac{\partial \bar{B}_m}{\partial x_l} = -\frac{1}{8\pi\mu} R_{jk}^M \frac{\partial \bar{B}_m}{\partial x_l} (\delta_{km} \delta_{jl} - \delta_{jm} \delta_{kl}) = -\frac{1}{4\pi\mu} R_{jk}^M \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j}.$$

Заметим, что в пульсационном магнитном поле может содержаться значительная (а по некоторым оценкам даже большая) часть общей энергии турбулентности системы. Из уравнения (2.29) видно, что джоулева диссипация [член $\bar{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle$] приводит к более быстрому затуханию возмущения плазмы, чем в случае, когда имеется лишь вязкая диссипация, т.е. непосредственное взаимодействие поля с возмущениями течения всегда приводит к повышению устойчивости течения плазмы. С другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с осреднённым течением жид-

кости. При этом скорость кинематического обмена $R_{ij}^K (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j)$ между кинетической энергией среднего движения жидкости [см. (2.16)] и кинетической энергией вихревого движения системы зависит как от корреляции между пульсациями составляющих скоростей R_{ij} и пульсациями компонент магнитного поля R_{ij}^M , так и от сдвига средней скорости $\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$, т.е. тензор дисторсии оказывает определённое воздействие на устойчивость течения.

Развитая турбулентность. При решении практических задач гидродинамики электропроводных сред в случае развитой турбулентности (когда $Re \gg 1$) часто поступают следующим образом. Подставляя в (2.19*) выражение $\langle H \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \langle H_0 \rangle - |\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2 - \Psi_G$ (где $\langle H_0 \rangle(\mathbf{x}, t)$ – так называемая полная энтальпия среды, определяемая этим соотношением), после несложных преобразований, выполненных с использованием уравнения баланса осреднённой механической энергии (2.16), получим

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D \langle H_0 \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \bar{\mathbf{q}}_R + \tilde{\mathbf{q}}^{turb} + \overline{p^M \langle \mathbf{u} \rangle} - (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{(av)}^M + \mathbf{R}^K) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = \\ & = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \overline{p^M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - (\boldsymbol{\tau}_{(av)}^M + \mathbf{R}^K) : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \overline{p' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}''} + \mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} + \bar{\rho} \varepsilon_\Sigma. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Сделаем теперь важное предположение (которое часто реализуется на практике), что в структуре пульсирующих полей \mathbf{u}'' и \mathbf{B}' в случае развитой турбулентности, устанавливается такое стационарно-неравновесное состояние турбулентного поля, при котором полная турбулентная энергия плазмы b_Σ почти не меняется как во времени, так и в пространстве. В этом случае справедливо следующее приближённое соотношение [см. (2.29)]

$$-p_{turb}^M \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{R}^K : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{R}^M : \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} \cong \mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} - p' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right) + \bar{\rho} \varepsilon_\Sigma. \quad (2.33)$$

С учётом (2.29) уравнение притока тепла (2.15) принимает форму

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D \langle H \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \bar{\mathbf{q}}_R + \tilde{\mathbf{q}}^{turb} \right\} = \frac{D \bar{p}}{Dt} - p_{turb}^M \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \\ & + \mathbf{R}^K : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{R}^M : \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

а уравнение (2.32) для полной энтальпии $\langle H_0 \rangle(\mathbf{x}, t)$ при учёте тождественного преобразования

$$\langle u_j \rangle \frac{\partial p_{av}^M}{\partial x_j} - \langle u_j \rangle \frac{\partial \tau_{(av)ij}^M}{\partial x_i} = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \bar{j}_i \langle u_j \rangle \bar{B}_k = \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \frac{1}{4\pi\mu} R_{ij}^M \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \bar{j}_j \bar{E}_j,$$

принимает следующий почти «классический» вид:

$$\bar{\rho} \frac{D\langle H_0 \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \bar{\mathbf{q}}_R + \tilde{\mathbf{q}}^{turb} + p_{turb}^M \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{R}^K : \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{E}}. \quad (2.35)$$

Заметим, что на практике осреднённое уравнение для внутренней энергии плазмы может быть использовано в любой форме: (2.15), (2.34) или (2.35).

Система осреднённых уравнений среднего движения электропроводной среды должна быть дополнена осреднённым уравнением состояния для давления

$$\bar{p} = \Re \bar{\rho} \langle T \rangle, \quad (2.36)$$

которое обычно применяется в простых моделях МГД- турбулентности, основанных на градиентной гипотезе замыкания.

3. Термодинамический вывод определяющих соотношений для турбулентных потоков в электропроводящей среде

В предыдущем разделе на основе классических одножидкостных МГД- уравнений с упрощённой формой закона Ома были получены (при использовании средневзвешенного осреднения Фавра) магнитогидродинамические уравнения масштаба среднего движения, предназначенные для описания осреднённых турбулентных течений электропроводной среды в присутствии магнитного поля. Эти уравнения имеют, вообще говоря, ту же форму, как и выписанные в первом разделе уравнения магнитной гидродинамики для регулярного режима движения проводящей жидкости. Вместе с тем, основная система осреднённых магнитогидродинамических уравнений, состоящая из уравнений (2.1), (2.11), (2.13), (2.15), (2.29) и (2.36), является незамкнутой, поскольку содержит, наряду со средними значениями параметров состояния, таких как $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$, $\langle u_j \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$, $\langle T \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\bar{B}_j(\mathbf{x}, t)$ и их производными, также и неопределённые корреляционные вторые моменты (турбулентные потоки) $q_j^{turb}(\mathbf{x}, t)$, $R_{ij}^K(\mathbf{x}, t)$, $J_{(v)j}^{turb}(\mathbf{x}, t)$ и $R_{ij}^M(\mathbf{x}, t)$, которые появляются в результате осреднения исходных нелинейных МГД

уравнений. В связи с этим обстоятельством возникает главная проблема полуэмпирической теории турбулентности плазмы – проблема замыкания, связанная с необходимостью конструирования определяющих соотношений для перечисленных турбулентных потоков, которые для турбулентного течения электропроводящей среды в присутствии магнитного поля имеют свои специфические особенности. Воспользуемся для этой цели методами неравновесной термодинамики [12].

3.1. Уравнение баланса осреднённой энтропии

Термодинамический анализ турбулентной электропроводной среды мы проведём в предположении, что одноточечные корреляции $\langle A \mathbf{B} \rangle$ для любых (но не равных гидродинамической скорости течения \mathbf{u}) пульсирующих термодинамических параметров A и B малы по сравнению с членами первого порядка $\langle A \rangle \langle B \rangle$ и могут быть опущены. В Гл.1 было показано [13], что в этом случае фундаментальное тождество Гиббса для микродвижений среды (записанное вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объёма) справедливо и для средневзвешенных удельной энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ и удельной внутренней энергии $\langle E \rangle(\mathbf{x}, t)$ проводящей жидкости

$$\langle T \rangle \frac{D \langle S \rangle}{Dt} = \frac{D \langle E \rangle}{Dt} + \bar{p} \frac{D \langle v \rangle}{Dt}. \quad (3.1)$$

Исключая из (3.1) производные от параметров $\langle E \rangle(\mathbf{x}, t)$ и $\langle v \rangle(\mathbf{x}, t)$ с помощью уравнений (2.1) и (2.14), в результате получим уравнение субстанционального баланса осреднённой энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ среды в следующем явном виде:

$$\bar{p} \frac{D}{Dt} \langle S \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\bar{q}_j + \bar{q}_{Rj} + \tilde{q}_j^{turb}}{\langle T \rangle} \right\} = \sigma_{\langle S \rangle} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}, \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -J_{\langle S \rangle j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{v_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \geq 0, \\ \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -\overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} + J_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \bar{p} \varepsilon_\Sigma \right\} \equiv \frac{\mathfrak{S}}{\langle T \rangle}. \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

Величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, определяющая скорость локального производства эн-

тропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ проводящей жидкости (обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы осреднённого движения), всегда положительна. Однако величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ (относящаяся к стоку или притоку осреднённой энтропии) может быть разной по знаку и, как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами осреднённого движения и так называемой подсистемой турбулентного хаоса [13]. Таким образом, одной только энтропии $\langle S \rangle$ недостаточно для адекватного описания всех особенностей турбулентного течения проводящей жидкости, поскольку для неё не выполняется второй закон термодинамики. Кроме этого, энтропия $\langle S \rangle$ не связана явно с какими-либо параметрами пульсирующего турбулентного хаоса, характеризующими его внутреннюю структуру, в частности, с такими ключевыми характеристиками турбулентности, как энергия кинетической турбулентности $\langle b \rangle(\mathbf{x}, t)$ и энергия турбулентности магнитного поля $\langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t)$. Собственно, по этой причине представляется необходимым при конструировании адекватной термодинамической модели турбулентной электропроводящей среды введение в рассмотрение подсистемы турбулентного хаоса.

3.2. Уравнения баланса энтропии и производство энтропии для подсистемы турбулентного хаоса

Турбулентное движение плазмы будем далее описывать в рамках двухжидкостного континуума, состоящего из двух взаимосвязанных открытых подсистем: подсистемы среднего движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения МГД-уравнений, и подсистемы турбулентного хаоса, которая связана с пульсационным движением электропроводящей среды. Будем при этом считать, что термодинамически элементарный объем $d\mathbf{x}$ может быть дополнительно охарактеризован экстенсивными переменными состояния, такими как плотность внутренней энергии $E_{turb}(\mathbf{x}, t)$ и обобщённая энтропия $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ турбулизации вещества, а также интенсивными переменными состояния, в качестве которых фигурируют обобщённая температура турбулизации $T_{turb}(\mathbf{x}, t)$ (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций) и давление турбулизации $p_{turb}(\mathbf{x}, t)$ [14]. При этом важно иметь в виду, что такие термодинамические параметры состояния турбулентного хаоса, как энтропия S_{turb} и энергия E_{turb} турбулизации (рассматриваемые далее в качестве первичных концепций) вводятся здесь *a priori* для обеспечения связности теории и не имеют, в общем случае, точной физической интерпретации [12].

Перейдём теперь к некоторым следствиям из этого формального под-

хода. Следуя методу Гиббса, выберем в качестве локальной характеристической функции, содержащей все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного хаоса в локально-равновесном (либо в стационарном состоянии), фундаментальное уравнение Гиббса для обобщённой энтропии: $S_{turb} = S_{turb}(E_{turb}, \langle v \rangle)$. Это функциональное соотношение будем считать заданным *a priori*. Примем теперь, как это делается обычно при формализованном построении классической термодинамики, следующие определения сопряжённых переменных $T_{turb}(\mathbf{x}, t)$ и $p_{turb}(\mathbf{x}, t)$ (считая, что все указанные производные положительны):

$$1/T_{turb} \equiv \left\{ \partial S_{turb} / \partial E_{turb} \right\}_{\langle v \rangle}, \quad p_{turb} / T_{turb} \equiv \left\{ \partial S_{turb} / \partial \langle v \rangle \right\}_{E_{turb}}.$$

В этом случае интенсивным переменным $T_{turb}(\mathbf{x}, t)$ и $p_{turb}(\mathbf{x}, t)$ можно приписать смысл соответственно обобщённой температуры и давления (турбулизации). Тогда, дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объёма, принимает вид [13]

$$T_{turb} DS_{turb} / Dt = DE_{turb} / Dt - 1/3 R_{ij}^K \delta_{ij} D\langle v \rangle / Dt. \quad (3.4)$$

Далее будем отождествлять величину $E_{turb}(\mathbf{x}, t)$ с полной энергией турбулентности электропроводной жидкости

$$\bar{\rho} E_{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\rho} b_{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \overline{\rho |\mathbf{u}'|^2 / 2 + |\mathbf{B}'|^2 / 8\pi\mu};$$

тогда $p_{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv 1/3 (R_{ij}^K \delta_{ij}) = 2/3 \bar{\rho} b_{\Sigma}$. Соответствующее балансовое уравнение для энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ проводящей среды получим из (3.4) рассмотренным в Гл.1. способом, используя для этого уравнение для удельного объёма $\langle v \rangle(\mathbf{x}, t)$ и уравнение (2.29) для полной турбулентной энергии $b_{\Sigma}(\mathbf{x}, t)$; в результате будем иметь:

$$\bar{\rho} \frac{DS_{turb}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{J_{(b_{\Sigma})j}}{T_{turb}} \right\} = \sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma_{(S_{turb})}^{(i)} + \sigma_{(S_{turb})}^{(e)}, \quad (3.5)$$

$$0 \leq \sigma_{(S_{turb})}^{(i)} = \frac{1}{T_{turb}} \left\{ -J_{(b_{\Sigma})j} \frac{\partial \ln T_{turb}}{\partial x_j} + \left(\left[R_{ij}^K - 1/3 (R_{lm}^K \delta_{lm}) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{4\pi\mu} R_{ij}^M \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} \right\}, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{(S_{turb})}^{(e)} \equiv \frac{1}{T_{turb}} \left\{ p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} - J_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{\rho} \varepsilon_{\Sigma} \right\} \equiv -\frac{\mathfrak{S}}{T_{turb}}. \quad (3.7)$$

Здесь величины $\sigma_{(S_{turb})}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ и $\sigma_{(S_{turb})}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ имеют соответственно смысл скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$. Отметим, что отнесение отдельных слагаемых уравнения (3.5) к турбулентному потоку $J_{(S_{turb})}(\mathbf{x}, t) \equiv J_{(b_{\Sigma})} / T_{turb}$ либо к производству $\sigma_{(S_{turb})}(\mathbf{x}, t)$ энтропии S_{turb} , вообще говоря, неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения величины $J_{(S_{turb})}$.

3.3. Балансовое уравнение для суммарной энтропии

Таким образом, введение двух энтропий $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ и $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ конкретизирует наше представление о турбулентном осреднённом континууме, как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы среднего движения проводящей жидкости и подсистемы турбулентного хаоса. Комбинируя (3.2) и (3.5), получим уравнение баланса для суммарной $S_{\Sigma}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle S \rangle + S_{turb}$ энтропии системы в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S_{\Sigma}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} S_{\Sigma} \langle u_j \rangle + \frac{J_{\langle E \rangle j}}{\langle T \rangle} + \frac{J_{(b_{\Sigma}) j}}{T_{turb}} \right\} = \sigma_{\Sigma} \geq 0, \quad (3.8)$$

где $\sigma_{\Sigma} \equiv \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{(S_{turb})}^{(i)} + \mathfrak{S} \frac{T_{turb} - \langle T \rangle}{T_{turb} \langle T \rangle}$ – производство суммарной энтропии,

связанное с необратимыми процессами в турбулентной плазме;

$\mathfrak{S} \equiv -p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} + J_{(v)j}^{turb} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \varepsilon_{\Sigma}$ – поток энергии перехода между подсистемами осреднённого движения и турбулентного хаоса.

Положительная величина $\sigma_{\Sigma}(\mathbf{x}, t)$ имеет следующую билинейную структуру

$$0 \leq \sigma_{\Sigma} \equiv \mathfrak{S} \frac{T_{turb} - \langle T \rangle}{T_{turb} \langle T \rangle} + \frac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -J_{\langle E \rangle j} \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{v_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} \right)^2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{T_{turb}} \left\{ -J_{(b_\Sigma)j} \frac{\partial \ln T_{turb}}{\partial x_j} + \left[R_{ij}^K - \frac{1}{3} (R_{lm}^K \delta_{lm}) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu} R_{ij}^M \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} \right\}. \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что локальное производство σ_Σ суммарной энтропии S_Σ определяется следующим набором термодинамических потоков

$$J_{\langle E \rangle j}, J_{(b_\Sigma)j}, \tau_{ij}, \left[R_{ij}^K - \frac{1}{3} (R_{lm}^K \delta_{lm}) \delta_{ij} \right], R_{ij}^M, \mathfrak{Z}$$

и сопряжённых им термодинамических сил

$$\frac{\partial(1/\langle T \rangle)}{\partial x_j}, \frac{\partial(1/T_{turb})}{\partial x_j}, \frac{1}{\langle T \rangle} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}, \frac{1}{T_{turb}} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}, \frac{1}{T_{turb}} \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j}, \frac{T_{turb} - \langle T \rangle}{T_{turb} \langle T \rangle}.$$

Согласно основному постулату неравновесной термодинамики в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия или вблизи устойчивого стационарно-неравновесного состояния, термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных конститутивных соотношений от сопряжённых им макроскопических сил [4,15]. Это позволяет получить замыкающие определяющие соотношения, как для осреднённых молекулярных потоков, так и для турбулентных потоков, фигурирующих в осреднённых уравнениях МГД. Следует иметь в виду, что спектр возможных перекрёстных эффектов для турбулентного режима течения электропроводной жидкости значительно расширяется по сравнению с её регулярным режимом течения. Однако в настоящее время, к сожалению, отсутствуют надёжные экспериментальные данные, количественно описывающие многие эффекты такого рода. Кроме того, вклад от любых перекрёстных эффектов в общую скорость процессов переноса на порядок меньше вклада от прямых эффектов [15]. С учётом этих замечаний будем далее распространять условие положительности производства суммарной энтропии σ_Σ на каждое слагаемое в отдельности, т.е. полагать, что $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} \geq 0$, $\sigma_{S_{turb}}^{(i)} \geq 0$, $\sigma_{\langle S \rangle, S_{turb}} \geq 0$. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрёстных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение заметим, что первое слагаемое в правой части (3.9), описывающее производство энтропии внутри полной системы за счёт необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осреднённого движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно $\sigma_{\langle S \rangle, S_{turb}} = \mathfrak{Z}(T_{turb} - \langle T \rangle) / T_{turb} \langle T \rangle \geq 0$, и потому «направление» термодинамического потока $\mathfrak{Z}(\mathbf{x}, t)$ определяется знаком функции состояния $X_{\mathfrak{Z}}(\mathbf{x}, t) \equiv (1/\langle T \rangle - 1/T_{turb})$. Эту функцию следует рассматривать как

сопряжённую термодинамическую силу, вызывающую именно этот поток энтропии. Известно, что подобного рода обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является неперенным условием возникновения когерентных структур, т.е. может быть источником самоорганизации в одной из них [15]. Покажем, что диссипативная активность подсистемы турбулентного хаоса в случае стационарно-неравновесного состояния как раз и определяется притоком отрицательной энтропии ($\sigma_{(S_{turb})}^e \equiv -\mathfrak{S} / T_{turb} < 0$) от подсистемы осреднённого движения.

3.4. Стационарно-неравновесный режим подсистемы турбулентного хаоса

С этой целью проанализируем режим развитого турбулентного движения жидкости – режим стационарно-неравновесной турбулентности, когда в подсистеме турбулентного хаоса устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором $dS_{turb} / dt \cong 0$, а поток $J_{(S_{turb})j}(\mathbf{x}, t) \equiv J_{(b_{\Sigma})j} / T_{turb}$ энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ почти постоянен, $J_{(S_{turb})j} \cong const$ [10,13]. Последнее означает, что производство $\sigma_{(S_{turb})}^i(\mathbf{x}, t)$ энтропии турбулизации таким образом компенсируется её оттоком $\sigma_{(S_{turb})}^e(\mathbf{x}, t)$, что суммарное возникновение энтропии $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ почти отсутствует, $\sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma_{(S_{turb})}^e + \sigma_{(S_{turb})}^i \cong 0$. Так как величина $\sigma_{(S_{turb})}^i \geq 0$, то справедливо приближённое равенство $0 > \sigma_{(S_{turb})}^e \cong -\sigma_{(S_{turb})}^i$. Таким образом, в этом случае турбулентный хаос должен экспортировать энтропию во «внешнюю среду» (т.е. отдавать количество $\sigma_{(S_{turb})}^e$ осреднённому движению) для того чтобы скомпенсировать её производство (количество $\sigma_{(S_{turb})}^i$) за счёт внутренних необратимых процессов. Другими словами, для поддержания квазистационарного состояния в подсистеме турбулентной надструктуры необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от подсистемы осреднённого движения,

$$\sigma_{(S_{turb})}^e \equiv -\mathfrak{S} / T_{turb} = -\langle T \rangle \sigma_{\langle S \rangle}^e / T_{turb} < 0.$$

Именно эта поступающая в подсистему турбулентного хаоса негэнтропия расходуется на образование разнообразных диссипативных структур [10].

Действительно, поскольку в стационарно-неравновесном состоянии величина оттока энтропии из подсистемы осреднённого движения положительна $0 \leq \sigma_{\langle S \rangle}^e = \mathfrak{S} / \langle T \rangle$, то скорость обмена энтропией (теплом) между

осреднённым и турбулентным движениями также положительна, $\mathfrak{S} \geq 0$. Но тогда из неравенства $\sigma_{\langle S \rangle, S_{turb}} \equiv \mathfrak{S}(T_{turb} - \langle T \rangle) / T_{turb} \langle T \rangle \geq 0$ следует, что температура турбулизации T_{turb} выше осреднённой температуры $\langle T \rangle$, что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации диссипативной системы. В соответствии с этим принципом, формирование упорядоченных структур (разномасштабных вихревых образований) в подсистеме турбулентного хаоса при отводе тепла из неё, т.е. при переходе к более низким температурам, является универсальным свойством материи [16].

Кроме этого, в рассматриваемом случае верно приближенное равенство $0 \leq \sigma_{\langle S \rangle}^e = -T_{turb} \sigma_{(S_{turb})}^e / \langle T \rangle \cong T_{turb} \sigma_{(S_{turb})}^i / \langle T \rangle$, и уравнение (3.2) для энтропии $\langle S \rangle$ принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle S \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{J_{\langle E \rangle j}}{\langle T \rangle} \right\} = \sigma_{\langle S \rangle} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \frac{T_{turb}}{\langle T \rangle} \sigma_{(S_{turb})}^i, \quad (3.10)$$

где для локального рассеяния энергии $\langle T \rangle \sigma_{\langle S \rangle}$ справедливо выражение

$$0 \leq \langle T \rangle \sigma_{\langle S \rangle} \equiv -\tilde{q}_j^{turb} \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x_j} + \frac{\mathbf{v}_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} \right)^2 + \left[\mathbf{R}_{ij}^K - \frac{1}{3} (\mathbf{R}_{lm}^K \delta_{lm}) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{R}_{ij}^M \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) содержит потоки и термодинамические силы первой и второй тензорных размерностей. Если разложить тензор второго ранга $\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$ на симметричную $\mathbf{D}_{ij} \equiv (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j)^s = (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i) / 2$ (тензор скорости деформации) и $(\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j)^a = (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j - \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i) / 2$ антисимметричную части, то предпоследнее слагаемое в (3.11) может быть переписано в виде

$$\left[\mathbf{R}^K - \frac{1}{3} (\mathbf{R}^K : \mathbf{I}) \mathbf{I} \right] : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \equiv \mathbf{R}^K : \mathbf{D}^0, \quad \mathbf{R}^K \equiv \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau}_{(turb)}^M, \quad (3.12)$$

где

$$\mathbf{D}^0 = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \left\{ \mathbf{I} : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) \right\}, \quad \mathbf{R}^0 \equiv \mathbf{R} - \frac{1}{3} (\mathbf{R} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = \mathbf{R} + \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b \rangle \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\tau}_{(turb)}^M \equiv \boldsymbol{\tau}_{(turb)}^M - \frac{1}{3} \left(\boldsymbol{\tau}_{(turb)}^M : \mathbf{I} \right) \mathbf{I} = \boldsymbol{\tau}_{(turb)}^M + \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b_M \rangle \mathbf{I}$$

– симметричные тензоры турбулентных напряжений Рейнольдса \mathbf{R} и магнитных натяжений $\boldsymbol{\tau}_{(turb)}^M$. Аналогично, последнее слагаемое в (3.11), с учётом (2.6*), может быть представлено в виде

$$(4\pi\mu)^{-1} R_{ij}^M \partial \bar{B}_i / \partial x_j = (4\pi\mu)^{-1} R_{ij}^M \left\{ (\partial \bar{\mathbf{B}} / \partial \mathbf{x})^s + (\partial \bar{\mathbf{B}} / \partial \mathbf{x})^a \right\} = -\mathbf{G}_j \bar{j}_j. \quad (3.13)$$

Исходя из (3.11) при использовании принципа Кюри-Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна [4]) можно получить следующие определяющие соотношения для турбулентных потоков:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\langle E \rangle k}(\mathbf{x}, t) = -\lambda^{turb} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_k}, \\ R_{jk}^K(\mathbf{x}, t) = -\frac{2}{3} \bar{\rho} \Gamma \delta_{jk} + \bar{\rho} v_K^{turb} \left\{ \left(\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_l} \right\} - v_{K,M}^{turb} \left(\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} \right), \\ R_{jk}^M(\mathbf{x}, t) = -v_{M,K}^{turb} \left(\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \right) + v_M^{turb} \left(\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} \right), \end{array} \right. \quad (3.14)$$

где $\Gamma(\mathbf{x}, t) \equiv \langle b \rangle - \langle b_M \rangle$; $\lambda^{turb}(\mathbf{x}, t)$, $v_K^{turb}(\mathbf{x}, t)$, $v_M^{turb}(\mathbf{x}, t)$ – соответственно эмпирические коэффициенты турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля. Заметим, что в общем случае анизотропной турбулентности эти коэффициенты являются тензорами 2-го или 4-го рангов [3, 17-19]. В случае развитой турбулентности электропроводной среды коэффициенты турбулентного переноса зависят от поля пульсирующих параметров u_j'' , B_j' , $\partial u_k'' / \partial x_j$ и масштаба $L(\mathbf{x}, t)$, который может быть отождествлён с прандтлевской «длиной пути смешения» [6].

Из (2.6*) и третьего соотношения (3.14) вытекает следующее представление для турбулентной электродвижущей силы

$$c \mathbf{G}_i(\mathbf{x}, t) = -v_M^{turb} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} + v_{M,K}^{turb} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j}. \quad (3.15)$$

Коэффициенты v_M^{turb} и $v_{M,K}^{turb}$, определяемые пульсационным полем скорости

\mathbf{u}'' , будем считать далее постоянными. Поскольку вектор $\bar{\mathbf{B}}$ является псевдовектором (т.е. он изменяет знак при инверсии пространственных координат), а вектор \mathbf{G}_i представляет собой истинный (полярный) вектор и должен быть образован из различных истинных векторов, то магнитный коэффициент турбулентной вязкости (диффузии) v_M^{turb} должен являться скаляром, в то время как коэффициенты $v_{M,K}^{turb}$ и $v_{K,M}^{turb}$ являются псевдоскалярами. Часто, слагаемые с коэффициентами $v_{M,K}^{turb}$ и $v_{K,M}^{turb} \cong \frac{7}{5} v_{M,K}^{turb}$, описывающие перекрёстные эффекты, могут быть опущены [18]. Тогда соотношение (3.15) принимает простой вид: $c\mathbf{G}_i = -v_M^{turb} \varepsilon_{ijk} \partial \bar{B}_k / \partial x_j$. Подстановка этого выражения в (2.10*) приводит к следующему виду уравнения индукции для средних полей:

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}_i}{\bar{\rho}} \right) = \bar{B}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + (v_M + v_M^{turb}) \Delta \bar{B}_i, \quad (3.16)$$

из которого следует, что суммарное влияние ЭДС \mathbf{G}_j сводится просто к изменению величины эффективного коэффициента диффузии магнитного поля, т.е. v_M переходит в $(v_M + v_M^{turb})$. Поэтому, когда коэффициент v_M^{turb} положителен, следует ожидать, что случайное перемешивание среды (создаваемое пульсационным полем скорости \mathbf{u}'') должно не ослаблять, а усиливать процесс диффузии.

Покажем теперь, что в рамках развитого здесь термодинамического подхода коэффициент турбулентной диффузии v_M^{turb} должен быть всегда положительным. Сразу же отметим, что данное утверждение находится в противоречии с известной точкой зрения Моффата, предполагающего, что коэффициент v_M^{turb} при некоторых экстремальных условиях может стать отрицательным [17]. Подставляя для этого (3.14) в (3.11), получим для производства энтропии $\langle S \rangle$ следующее выражение:

$$0 \leq \langle T \rangle \sigma'_{\langle S \rangle} \equiv R_{ij}^K D_{ij}^0 - \mathbf{G}_j \cdot \bar{\mathbf{j}}_j = 2\bar{\rho} v_K^{turb} D_{ij}^0 D_{ij}^0 + v_M^{turb} \frac{4\pi\mu}{c^2} |\bar{\mathbf{j}}|^2. \quad (3.17)$$

Здесь первый член представляет собой увеличение энтропии $\langle S \rangle$ благодаря кинематической турбулентной вязкости, а второй – её увеличение, обусловленное магнитной вязкостью. Второй закон термодинамики требует положительности всей суммы (3.17) в целом. Вместе с тем, второе слагаемое этой суммы может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю

первого члена (симметричный тензор D_{ij}^0 обращается в нуль, например, когда вещество локально покоится или когда оно вращается как твёрдое тело с постоянной угловой скоростью). Отсюда следует, в частности, что коэффициент v_M^{turb} при всех условиях должен быть положительным, а это означает, что случайное перемешивание всегда усиливает процесс магнитной молекулярной диффузии. Приведённые соображения являются термодинамическим обоснованием невозможности появления эффекта отрицательной магнитной вязкости в изотропных зеркально-симметричных турбулентных течениях электропроводной жидкости.

Формула (3.15) получена для изотропной мелкомасштабной турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей \mathbf{u}'' обладает зеркальной симметрией, при которой полученные из него любые средние величины инвариантны при отражении поля относительно произвольной плоскости. Может, однако, случиться, что в турбулентной среде отсутствует зеркальная симметрия поля \mathbf{u}'' относительно некоторых плоскостей и турбулентность имеет так называемую спиральность [20], при которой левовращательные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. Обобщённая на этот случай формула (3.15) принимает следующий вид [22]:

$$c\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, t) = \alpha \bar{B}_i - v_M^{turb} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j} + v_{M,K}^{turb} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j}, \quad (3.18)$$

где безразмерный коэффициент α является псевдоскаляром [21]. Покажем, что для случая изотропного и зеркально-симметричного поля скоростей \mathbf{u}'' коэффициент α должен быть равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность, как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из неё зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величина α не должна изменяться, если выполнить это отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; поэтому $\alpha = 0$. Таким образом, отражательно-симметричная изотропная турбулентность, в отличие от гиротропной (отражательно-несимметричной турбулентности), может вызывать только турбулентную диффузию магнитного поля [20].

Подставляя теперь в осреднённый закон Ома (2.7) выражение (3.18), получим следующее выражение для осреднённого тока:

$$\bar{j}_j(\mathbf{x}, t) = \sigma_e^{turb} \left(\bar{E}_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} \langle u_j \rangle \bar{B}_k + \alpha c^{-1} \bar{B}_j \right),$$

$$\sigma_e^{turb} = \frac{\sigma_e}{1 + 4\pi\mu v_M^{turb} \sigma_e / c^2} = \frac{\sigma_e v_M}{v_M + v_M^{turb}}, \quad (3.19)$$

из которого видно, что турбулентная проводимость σ_e^{turb} всегда меньше молекулярной проводимости σ_e .

3.5. Вывод поправки к коэффициенту турбулентной вязкости для электропроводящей среды с переменной плотностью

Рассмотрим теперь полуэмпирический способ определения коэффициентов турбулентного переноса в электропроводящей среде, находящейся под воздействием магнитного поля. Известно, что при изотропной турбулентности оба коэффициента ν_K^{turb} и ν_M^{turb} близки к произведению $w_{turb} l_{cor}$ скорости турбулентных вихрей $w_{turb} \cong \sqrt{|\mathbf{u}''|^2}$ и их корреляционной длины l_{cor} , а коэффициент α по порядку величины

$$\alpha \cong -\frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} \overline{u_i'' \partial u_k'' / \partial x_j} \tau_{cor} = -\frac{1}{3} h \tau_{cor},$$

где h – так называемая вихревая спиральность (псевдоскаляр), τ_{cor} – масштаб, характеризующий изменения поля турбулентных скоростей \mathbf{u}'' во времени [20,22]. Обобщая известную формулу Колмогорова для непроводящей жидкости на случай МГД – турбулентности, можно, с точностью, вполне достаточной для практических приложений, предполагать, что кинетический коэффициент турбулентной вязкости ν_K^{turb} может быть вычислен по формуле $\nu_K^{turb} = L \sqrt{b_\Sigma}$, где L – путь перемешивания по Прандтлю при отсутствии магнитного поля (здесь числовой множитель включён в L). Однако в этой формуле явно не учитывается влияние магнитного поля на турбулентное течение проводящей жидкости через посредство пути смешения L , что для многих практически важных случаев развитой МГД–турбулентности становится не вполне приемлемым. По этой причине в соотношение для ν_K^{turb} необходимо вводить поправочный множитель, учитывающий влияние как магнитного поля, так и обратных эффектов переноса тепла на развитие турбулентности.

Далее, предполагая стационарно-неравновесный режим турбулентности в электропроводной среде, для определения указанного множителя к коэффициенту турбулентной вязкости воспользуемся уравнением (5.3.5) для энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$.

$$\bar{\rho} \frac{DS_{turb}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_{(S_{turb})} = \frac{1}{T_{turb}} \left\{ \mathbf{R}^{\mathbf{K}} : \mathbf{D}^0 - \mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{j}} - \mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} - \bar{\rho} \varepsilon_{\Sigma} \right\} \cong 0. \quad (3.20)$$

Диссипацию турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло ε_{Σ} при развитом режиме турбулентности будем считать (на основании соображений теории подобия при числе Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$) прямо пропорциональной кубу характерной пульсационной скорости w_{turb} и обратно пропорциональной характерной длине L , $\varepsilon_{\Sigma} \propto w_{turb}^3 / L$ [23]. Воспользовавшись выражениями

$$\mathbf{R}^{\mathbf{K}} : \mathbf{D}^0 = 2\bar{\rho} v_{\mathbf{K}}^{turb} \mathbf{D}^0 : \mathbf{D}^0,$$

$$\mathbf{G}_j \bar{\mathbf{j}}_j = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \alpha \bar{\mathbf{B}}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_j}{\partial x_k} - v_{\mathbf{M}}^{turb} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2 \right),$$

$$\mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \cong - \frac{\lambda^{turb} \mathbf{g}}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{\langle c_p \rangle} \right),$$

преобразуем правую часть (3.20) к следующему виду:

$$2\bar{\rho} v_{\mathbf{K}}^{turb} \mathbf{D}_{ij}^0 \mathbf{D}_{ij}^0 - \frac{v_{\mathbf{M}}^{turb}}{4\pi\mu} \left(\frac{c\alpha}{v_{\mathbf{M}}^{turb}} \varepsilon_{ijk} \bar{\mathbf{B}}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_j}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2 \right) +$$

$$+ \frac{\lambda^{turb}}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle} \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}_j}{\langle c_p \rangle} \right) - \bar{\rho} \varepsilon_{\Sigma} \cong 0 \quad (3.21)$$

Используя теперь величины w_{turb} и L , можно написать

$$v_{\mathbf{K}}^{turb} = L w_{turb}, \quad v_{\mathbf{M}}^{turb} = \frac{L w_{turb}}{\mathbf{Pr}_{\mathbf{M}}^{turb}}, \quad \frac{\lambda^{turb}}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} = \frac{L w_{turb}}{\mathbf{Pr}_{\mathbf{K}}^{turb}}, \quad \varepsilon_{\Sigma} = \frac{1}{\alpha_{ss}^2} \frac{w_{turb}^3}{L}, \quad (3.22)$$

где эмпирическую константу α_{ss} , а также турбулентные числа Прандтля (кинетическое $\mathbf{Pr}_{\mathbf{K}}^{turb} = \bar{\rho} \langle c_p \rangle v_{\mathbf{K}}^{turb} / \lambda^{turb}$ и магнитное $\mathbf{Pr}_{\mathbf{M}}^{turb} = v_{\mathbf{K}}^{turb} / v_{\mathbf{M}}^{turb}$) будем в первом приближении считать постоянными, предполагая, что $v_{\mathbf{M}}^{turb} > 0$ и $\mathbf{Pr}_{\mathbf{M}}^{turb} \cong \mathbf{Pr}_{\mathbf{K}}^{turb}$. При подстановке (3.22) в (3.21) будем иметь

$$w_{turb} \left\{ 2L \overset{0}{D}_{ij} \overset{0}{D}_{ij} + \frac{L}{\text{Pr}_M^{turb}} \frac{l_{cor}^{-1} \varepsilon_{ijk} \bar{B}_i (\partial \bar{B}_j / \partial x_k) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{4\pi\mu\bar{\rho}} + \right. \\ \left. + \frac{L}{\text{Pr}_K^{turb}} \frac{\mathbf{g}}{\langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{\langle c_p \rangle} \right) - \frac{1}{\alpha_{ss}^2} \frac{w_{turb}^2}{L} \right\} \cong 0, \quad (3.23)$$

где $l_{cor} \equiv -(v_M^{turb} / \alpha)$ – масштаб корреляции, характеризующий изменение поля турбулентных скоростей в пространстве. Это уравнение распадается на два: уравнение $w_{turb} = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения, и уравнение

$$w_{turb}^2 / \alpha_{ss}^2 L^2 = \\ = \left\{ 2 \overset{0}{D}_{ij} \overset{0}{D}_{ij} + \frac{1}{4\pi\mu\bar{\rho} \text{Pr}_M^{turb}} \left(\frac{1}{l_{cor}} \varepsilon_{ijk} \bar{B}_i \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\text{Pr}_K^{turb}} \frac{\mathbf{g}}{\langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{\langle c_p \rangle} \right) \right\} \quad (3.24)$$

для установившегося турбулентного режима. Уравнение (3.24) имеет вещественное решение только в том случае, когда

$$0 \leq 2 \left(\overset{0}{D}_{ij} \overset{0}{D}_{ij} \right) + \\ + \frac{1}{\text{Pr}_K^{turb}} \left\{ \frac{1}{4\pi\mu\bar{\rho}} \left(\frac{1}{l_{cor}} \varepsilon_{ijk} \bar{B}_i \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2 \right) + \frac{\mathbf{g}}{\langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{\langle c_p \rangle} \right) \right\}, \quad (3.25)$$

откуда следует, что $Ri_\Sigma \equiv Ri_K - Ri_M \leq (Ri_\Sigma)_{cr} = \text{Pr}_K^{turb}$, где

$$\mathbf{Ri}_K \equiv \frac{\tilde{\mathbf{q}}^{turb}}{2\lambda^{turb} \langle T \rangle \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{1}{2 \langle T \rangle \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}} \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{\langle c_p \rangle} \right), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{Ri}_M \equiv - \frac{1}{\bar{\rho} v_M^{turb} \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}} \frac{\mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{j}}}{2 \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}} = \frac{1}{4\pi\mu\bar{\rho} l_{cor}} \frac{\varepsilon_{ijk} \bar{B}_i \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{2 \overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}} \quad (3.27)$$

– соответственно градиентное гидродинамическое число Ричардсона (безразмерная величина, определяющая относительный вклад термической конвекции вещества в порождение турбулентной энергии в проводящей среде) и градиентное магнитогиродинамическое число Ричардсона (учитывающее влияние магнитного поля, в частности турбулентной электродвижущей силы на возникновение турбулентности в потоке). Легко видеть, что число \mathbf{Ri}_M пропорционально числу Альфвена $\mathbf{Al} = \mathbf{N} / \mathbf{Re}_M \equiv V_0^2 / 4\pi\mu\sigma U_0^2$ и характеризует отношение магнитной энергии к кинетической энергии плазмы.

Если $\mathbf{Ri}_\Sigma = \mathbf{Pr}_K^{turb}$, то имеется единственное вещественное решение $w_{turb} = 0$, соответствующее ламинарному режиму. Пусть имеет место турбулентный режим и, следовательно, $\mathbf{Ri}_\Sigma < (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{cr}$, тогда для турбулентного коэффициента вязкости электропроводной жидкости получим

$$v_K^{turb} = \alpha_{ss} L^2 \sqrt{2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{ij} & D_{ij} \end{pmatrix}} \sqrt{1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{turb}} = \alpha_{ss} L^{*2} \sqrt{2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{ij} & D_{ij} \end{pmatrix}}, \quad (3.28)$$

где L^* – масштаб смешения в случае течения электропроводной жидкости под влиянием магнитного поля. Таким образом, рассмотрев балансовое уравнение (3.20) для энтропии турбулентного хаоса, мы установили вид безразмерной функции $\varphi(\mathbf{Ri}_\Sigma / (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{cr}) = (1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{turb})^{1/4}$, учитывающей влияние магнитного поля и обратный эффект переноса тепла на развитие турбулентности через посредство обобщённого пути смешения

$$L^* \equiv L(1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{turb})^{1/4} = L\varphi(\mathbf{Ri}_\Sigma / (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{cr}). \quad (3.29)$$

Одновременно получилась приближённая оценка для критического числа Ричардсона

$$(\mathbf{Ri}_\Sigma)_{cr} = \mathbf{Pr}_K^{turb} = \bar{\rho} \langle c_p \rangle v_K^{turb} / \lambda^{turb}. \quad (3.30)$$

Заметим, что для определения величины пути смешения L при отсутствии магнитного поля можно воспользоваться формулой $L = L_{00} \left\{ 1 - \exp(-zu^* / Av) \right\}$ Никурадзе с поправкой Ван–Драйста [24], учитывающей быстрое затухание турбулентности вблизи твёрдой стенки (здесь A – численная константа, u^* – динамическая скорость на стенке; L_{00} – величина пути смешения, предложенная Прандтлем–Никурадзе, которая, например, для тонкого слоя толщиной δh имеет вид

$$L_{00} / \delta h = 0,14 - 0,08(1 - z/\delta h)^2 - 0,06(1 - z/\delta h)^4). \quad (3.31)$$

В заключение отметим, что в общем случае влияние магнитного поля на турбулентное течение электропроводных сред существенно зависит также и от относительной ориентации магнитного поля и средней скорости потока (см., например, [6]). Кроме того, магнитное поле может создаваться не только токами в плазме, но и внешними по отношению к рассматриваемой среде источниками. В этом случае рассмотренный в работе подход претерпит незначительные изменения.

Заключение

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей электропроводящей турбулентной среды. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты. Математическое моделирование является, по существу, единственным методом, позволяющим реконструировать соответствующие физические процессы с учётом ограничений, накладываемых доступными наблюдательными данными эволюции околозвёздных дисков на разных стадиях.

К сожалению, современная вычислительная математика всё ещё не позволяет провести в полном объёме комплексный анализ крупномасштабных турбулентных процессов в электропроводящем протопланетном диске, отвечающий этим теоретическим разработкам, поэтому численные модели последовательных этапов эволюции протопланетного диска строятся с использованием целого ряда упрощений (см., например, [26]). Проведённое в этой главе исследование является необходимым звеном, в частности, и для адекватного моделирования эволюции протопланетного диска, когда для получения достоверных результатов особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и численно решаемым уравнениям. Здесь использован классический подход к моделированию турбулентности сжимаемой плазмы, который основывается на идее Рейнольдса об осреднении гидродинамических

уравнений по ансамблю тождественных систем (возможных реализаций турбулентного течения), или посредством другой эквивалентной процедуры осреднения. Полученные таким образом МГД уравнения масштаба среднего движения, вследствие нелинейности исходных магнитогидродинамических уравнений, содержат большое количество неопределённых корреляционных членов и потому оказываются незамкнутыми. Замыкание осреднённых по Рейнольдсу уравнений проводится здесь с помощью методов неравновесной термодинамики.

Вместе с тем, важно указать и на принципиальный недостаток этого подхода, который состоит в том, что изначальное осреднение Рейнольдса (Фавра) осуществляется по всем пространственным масштабам турбулентности, т.е. моделирование с использованием градиентных гипотез замыкания по необходимости проводится одновременно по всему спектру разномасштабных вихревых структур. Если учесть, что, в отличие от практически универсального спектра мелкомасштабных пульсаций, крупномасштабные вихревые структуры существенно различны для разных течений, то становится очевидной бесперспективность создания и на этом пути универсальных полуэмпирических моделей турбулентности, пригодных для описания разнотипных турбулентных течений. По этой причине первоначальная задача исследования изучаемой проблемы состоит в обосновании применимости используемой модели турбулентности плазмы.

Литература

- [1] Сыроватский С.И. Магнитная гидродинамика// УФН. 1957. Т. 62. № 3. С. 247-303.
- [2] Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физ-мат. лит. 1962. 246
- [3] Biskamp D. Magnetohydrodynamic turbulence. Cambridge: University Press. 2003. 297 p.
- [4] де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
- [5] Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука. 1974. 718 с.
- [6] Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука. 1975. 256 с.
- [7] Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2002. 375 p.
- [8] Favre A. Statistical Equations of Turbulent Gases// In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia. 1969. P. 231-267.
- [9] Колесниченко А.В. К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров// Астрон. вестн. 1995. Т.29. № 2. С.133-155.

- [10] **Колесниченко А.В. Маров М.Я.** Турбулентность многокомпонентных сред. М.: “МАИК-Наука”. 1999. 336 с.
- [11] **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. М.: Наука. 1989. 504 с.
- [12] **Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж.** Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований. 2006. 528 с.
- [13] **Колесниченко А.В.** Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред// Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ. 1998. С. 52-76.
- [14] **Blackadar А.К.** Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system// J. Meteorology. 1955. V. 12.
- [15] **Дьярмати И.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1974. 304 с.
- [16] **Пригожин И., Стенгерс И.** Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа “Прогресс”, 1994. 240 с.
- [17] **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 339 с.
- [18] **Yoshizawa А.** Self –consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields// Phys. Fluids B. 1990. V. 2. № 7. P. 1589-1600.
- [19] **Брановер Г.Г., Цинобер А.Б.** Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука. 1970. 379 с.
- [20] **Колесниченко А.В, Маров М.Я.** О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке// Астрон. вестник. 2007. Т.41. № 1. С. 3-23.
- [21] **Steenbeck M., Krause F., Rädler К.-H.** Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung// Z. Naturforsch. 1966. 21a. S. 369-376.
- [22] **Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.** Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984. 315 с.
- [23] **Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [24] **Van–Driest E.R.** On turbulent flow near a wall// J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 10. P. 107.
- [25] **Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya.** Turbulence and selforganizing: problems modelling of space and environments// Springer. Berlin. 2012. P. 657.
- [26] **Колесниченко А.В.** К моделированию сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности аккреционного протопланетного диска// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 66.47 с.

ГЛАВА 3

К моделированию сжимаемой МГД-турбулентности аккреционного протопланетного диска

В рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием протопланетного диска Солнца на самых ранних этапах его существования, сформулирована замкнутая система МГД-уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для численного решения задач по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции аккреционного протопланетного диска и связанной с ним короны. Обсуждается модель тонкого (но оптически толстого) диска, учитывающая диссипацию турбулентности за счёт кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, наличие аккреции из окружающего пространства, воздействие турбулентного $\alpha\omega$ -динамо на генерацию магнитного поля, магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной.

Введение

Значительная доля газа в околозвёздном аккреционном диске, находящимся на самом начальном этапе своей эволюции, представляет собой частично ионизованную плазму, степени ионизации которой вполне достаточно для развития в ней различного рода плазменных неустойчивостей [11,12], в частности, гидромагнитной сдвиговой неустойчивости, открытой Велиховым [13]. Эта неустойчивость, которая в приложении к астрофизическим дискам получила название магниторотационной неустойчивости Бальбюса–Хаули [14], возникает, когда существует компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости вращения диска, а угловая скорость вращения уменьшается с расстоянием. В результате появляется большое число неустойчивых мелкомасштабных (по сравнению с толщиной диска) мод, развитие которых эффективно генерирует турбулентность в дифференциально вращающемся диске [15-23].

Существование крупномасштабного магнитного поля (даже слабого, $|\bar{\mathbf{B}}|^2 / 4\pi\mu\rho \leq c_s^2$) существенно усложняет гидродинамические течения в протопланетном диске звезды. Действующие на проводящие слои диска магнитные силы заметно влияют на динамику происходящих в них астрофизических процессов, таких как перенос углового момента на периферию диска, характер и темп аккреции из окружающего пространства (из космической диффузной среды), струйные истечения из короны диска (МГД-активного верхнего слоя) замагниченного вращающегося ветра и т.п. Вполне вероятно, что на раннем этапе образования протопланетного диска во внутренних его областях (т.е. при малых расстояниях ϖ от звезды) в верхних слоях (при больших z) присутствовали и хаотические магнитные поля, генерируемые механизмом турбулентного динамо или просто привнесённые в диск вместе с аккрецируемой межзвёздной плазмой. Эти поля, турбулентная энергия которых сопоставима с энергией гидродинамической турбулентности, перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению вещества диска, вносят значительный вклад в турбулентную вязкость как во внутренней области диска, так и во внешних слоях его короны. Эффективность МГД турбулентности как механизма диссипации также существенно зависит от процесса магнитного перезамыкания силовых линий магнитного поля, возможного в том случае, когда силовые линии разной направленности тесно сближаются друг с другом. Перед началом этого процесса в плазме имеется определённый избыток магнитной энергии, затем в ней начинает развиваться так называемая разрывная (*тиринг*) неустойчивость, которая, в конечном счёте, приводит к перезамыканию силовых линий и переходу избыточной энергии магнитного поля в кинетическую или тепловую энергию плазмы [24].

В результате воздействия магнитного поля на движение космической плазмы в диске возникают не только эффективная турбулентная вязкость и турбулентная магнитная диффузия, но и все эффекты, связанные с электродинамикой средних полей [25]. В частности, поскольку во вращающейся проводящей среде эффективную магнитную диффузию неизбежно сопровождает возникновение турбулентной электродвижущей силы $\alpha\mathbf{V}$ (так называемый α -эффект, связанный в конечном счёте с влиянием кинематической и магнитной спиральности на генерацию индуцированного магнитного поля [7,26,27]), то следует ожидать существенного воздействия механизма турбулентного динамо на структуру и эволюцию «молодого» протопланетного диска. Как известно [28], мелкомасштабная отражательно-неинвариантная (гиротропная) турбулентность во вращающемся диске создаёт «петли», когда любая силовая трубка магнитного поля под действием локального спирального движения приобретает форму скрученной буквы Ω . Эта магнитная петля сопровождается током, имеющим антипараллельную (параллельную) относительно приложенного среднего магнитного по-

ля компоненту для правовинтовых (левовинтовых) случайных спиральных движений. Энергия производимого подобными токами джоулева тепла является мощным источником нагрева, при котором создаётся, в частности, дисковая корона, толщина которой порядка толщины диска [29,30]. В действительности корона может быть и гораздо толще [17], поскольку в результате перезамыкания малых петель могут образовываться и крупные петли, которые всплывают в турбулентной среде под действием подъёмной силы. Одновременно короной поддерживается магнитная связь удалённых друг от друга областей диска посредством проходящих через неё крупномасштабных силовых линий, замыкающихся в диске. Подобного рода магнитная связь является также возможным дополнительным источником напряжений в короне и тем самым её нагрева.

Таким образом, из-за вязких напряжений, возникающих вследствие дифференциального вращения намагниченного аккреционного диска звезды и действия турбулентного динамо, его корона нагревается, подобно тому, как нагревается солнечная корона. Горячая корона способна породить струйное истечение вещества и поля. Фактически подобная струя является замагниченным вращающимся плазменным ветром, истекающим из аккрецирующего диска [31,32]. В свою очередь, вращающийся ветер переносит на бесконечность вместе с веществом и магнитным полем значительный момент количества движения диска, позволяя тем самым ему медленно сжиматься и обеспечивая, наряду с вязким переносом углового момента наружу, другую возможность удалить момент количества движения из диска [33]. Отметим, что магнитные напряжения в ветре могут также вызывать очень эффективную фокусировку движения вещества – джеты [34].

Применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого аккреционного диска автором в цикле работ [1-5,8-10] был разработан подход к решению проблемы адекватного математического моделирования дисковой турбулентной среды, учитывающей совместное влияние магнитогидродинамических эффектов и эффектов гидродинамической турбулентности на динамику и процессы тепло- и массопереноса в дифференциально вращающейся космической газопылевой плазме, инерционные свойства полидисперсной примеси твёрдых частиц, процессы коагуляции и излучения, а также ряд дополнительных эффектов, возникающих при турбулентных движениях плазмы в магнитном поле. В частности, в работе [8] в рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием протопланетного аккреционного диска, окружавшего протозвезду на ранних этапах её существования, была получена в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для ряда схематизированных постановок и численных решений специальных задач по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции турбулизованного вещества в магнитном диске и в

связанной с ним короне в случае, когда происходит аккреция вещества из окружающего космического пространства.

В данной главе рассмотрены следующие четыре аспекта проблемы построения адекватной модели эволюции протопланетного диска звезды:

- формулирование базовой системы осреднённых МГД-уравнений для развитой турбулентности, предназначенной для постановки и численного решения задач по взаимосогласованному моделированию астрофизического диска и его короны на ранних этапах их существования;
- разработка нового подхода к моделированию коэффициентов турбулентного переноса в проводящем диске, позволяющего учитывать эффекты обратного влияния магнитного поля и процессов конвективного переноса тепла на развитие турбулентности в стратифицированном по плотности слое конечной толщины;
- анализ влияния на формирование структуры, движения и энергетики осесимметричного диска крупномасштабного магнитного поля, порождаемого механизмом турбулентного $\alpha\omega$ -динамо;
- постановка задачи моделирования тонкого (но оптически толстого) проводящего диска, учитывающая магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной, диссипацию турбулентности за счёт кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, генерацию крупномасштабного магнитного поля механизмом турбулентного динамо, приток вещества, количества движения и энергии (кинетической и гравитационной) из внешней аккреционной оболочки.

1. Осреднённые уравнения турбулентного движения проводящей среды

Основываясь на результатах Гл. 2, выпишем вначале систему осреднённых МГД – уравнений для развитой турбулентности, на основе которых возможно провести численное моделирование, позволяющее реконструировать структуру и ход эволюции аккреционного протопланетного диска, находящегося около молодой прото-звезды.

1.1. Исходные МГД-уравнения

Далее для обозначения осреднённых параметров задачи будем использовать два символа: черта сверху означает традиционное теоретико-вероятностное осреднение какого-либо параметра дисковой среды по ансамблю возможных реализаций (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают весовое осреднение Фавра [35]; используемые здесь свойства весового осреднения можно найти в монографии [36]. В инерциальной системе отсчёта осреднённые гидродинамические уравне-

ния для развитого турбулентного течения и уравнение магнитной индукции для среднего магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ в абсолютной гауссовской системе единиц принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) = 0, \quad (1.1)$$

$$\bar{\rho} \frac{D \langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\bar{p} + p_{turb}^M) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R}^K + \frac{1}{c} \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{B}} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Psi_G, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D \langle E \rangle}{Dt} = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\mathbf{q}}_R + \mathbf{q}^{turb}) - (\bar{p} + p_{turb}^M) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \mathbf{R}^K : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \\ & + \frac{1}{4\pi\mu_0} \mathbf{R}^M : \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{\sigma_e} |\bar{\mathbf{j}}|^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = \left(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R}^M + v_M \Delta \bar{\mathbf{B}}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.4)$$

$$\bar{p} = \Re \bar{\rho} \langle T \rangle. \quad (1.5)$$

Здесь $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot (\partial/\partial \mathbf{x})$ – субстанциональная производная по времени для осреднённого континуума; $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$, $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho \mathbf{u}} / \bar{\rho}$ – соответственно осреднённые массовая плотность и гидродинамическая скорость космического вещества в диске ($\rho = \bar{\rho} + \rho'$; $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}''$; \mathbf{u}'' – турбулентная пульсация осреднённой по Фавру скорости); $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ – осреднённый вектор напряжённости пульсирующего магнитного поля (среднее магнитное поле);

$$\mathbf{R}^M(\mathbf{x}, t) \equiv - \left(\overline{\mathbf{u}'' \mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B} \mathbf{u}''} \right) \quad (1.6)$$

– так называемый, магнитный тензор Рейнольдса; $v_M \equiv c^2/4\pi\mu_0\sigma_e$ – коэффициент молекулярной магнитной вязкости; c – скорость света; μ_0 – магнитная проницаемость, σ_e – удельный молекулярный коэффициент электропроводности (далее будем предполагать, что эти коэффициенты – постоянны); $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$, $p_{turb}^M(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 8\pi\mu_0$ – соответственно газодинамическое давление и турбулентное магнитное давление;

$$\mathbf{R}^K(\mathbf{x}, t) \equiv \left\{ -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''} + \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'} / 4\pi\mu_0 \right\} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\tau}_{turb}^M(\mathbf{x}, t) \quad (1.7)$$

– кинетический тензор турбулентных напряжений Рейнольдса для турбулизованной среды в присутствии пульсирующего магнитного поля; $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''}$ – «обычный» тензор Рейнольдса для газа, имеющий смысл дополнительных (турбулентных) напряжений; $\boldsymbol{\tau}_{turb}^M(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'}$ / $4\pi\mu_0$ – тензор магнитных натяжений для пульсационной составляющей магнитного поля; $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ – плотность тока проводимости (тока, измеряемого наблюдателем, движущимся вместе с электропроводящим газом), фигурирующая в осреднённом законе Ампера

$$\bar{\mathbf{j}} = (c / 4\pi\mu_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \overline{\mathbf{B}}; \quad (1.8)$$

$$\Psi_G \equiv -G M_\otimes |\mathbf{x}|^{-1/2} \quad (1.9)$$

– потенциальная функция гравитационного поля, M_\otimes – масса протозвезды, G – гравитационная постоянная (ниже будем пренебрегать самогравитацией диска, что возможно всегда, когда $M_{disk} / M_\otimes \leq h / R_\infty \ll 1$, здесь h и R_∞ – полутолщина и внешний радиус диска соответственно); $\langle E \rangle \equiv \overline{\rho E} / \bar{\rho}$ – осреднённое по Фавру удельное значение внутренней энергии $E(\mathbf{x}, t)$ дисковой среды (далее внутреннюю энергию газа будем считать пропорциональной температуре

$$E(\mathbf{x}, t) = c_V T = \mathfrak{R} T (\gamma - 1)^{-1}, \quad (1.10)$$

где $\mathfrak{R} = R / \mu$; R – газовая постоянная; μ – средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p); $\gamma = c_p / c_V$ – показатель адиабаты; c_p , $c_V = \mathfrak{R} / (\gamma - 1)$ – соответственно удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении и теплоёмкость при постоянном объёме (далее эти величины будем считать постоянными); $\bar{\mathbf{q}}_R$ – плотность потока энергии, переносимого излучением; $\mathbf{q}_*^{turb} \cong c_p \overline{\rho T'' \mathbf{u}''}$, $\mathbf{q}^{turb} \equiv \mathbf{q}_*^{turb} - \overline{\rho' \mathbf{u}''}$ – соответственно турбулентный и приведённый поток тепла [36].

Относительно осреднённых МГД-уравнений (1.1)-(1.5) заметим следующее: при их написании мы для простоты не учитывали давление и энергию излучения, хотя часто необходимо рассматривать дисковую среду как смесь идеального газа и излучения абсолютно чёрного тела. Обобщение на этот случай приведённых уравнений не представляет труда.

В уравнении индукции (1.4) присутствует член

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R}^M \equiv \overline{\left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}''} - \overline{\left(\mathbf{u}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{B}} - \mathbf{B} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \left(\overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}} \right) \equiv c \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{G}, \quad (1.11)$$

играющий роль дополнительного источника, генерирующего среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}$. Здесь

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \equiv c^{-1} \overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}} = c^{-1} \overline{\rho \mathbf{u}'' \times (\mathbf{B}/\rho)}, \quad (1.12)$$

(или в тензорном виде $\mathbf{G}_i \equiv -\varepsilon_{ijk} R_{jk}^M / 2c$) – порождаемая случайными флуктуациями скорости и магнитного поля дополнительная электродвижущая сила, появляющаяся и в осреднённом законе Ома

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e (\bar{\mathbf{E}}^* + \mathbf{G}), \quad \bar{\mathbf{E}}^* \equiv \bar{\mathbf{E}} + c^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle \times \bar{\mathbf{B}}; \quad (1.13)$$

$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ – вектор напряжённости электрического поля; ε_{ijk} – альтернирующий тензор Леви–Чивита. Отметим, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД–турбулентности как раз и является конструирование специального замыкающего соотношения для турбулентного потока \mathbf{G} , как функции средних полей $\bar{\mathbf{B}}$ и $\langle \mathbf{u} \rangle$, с тем, чтобы при известном поле $\langle \mathbf{u} \rangle$, можно было найти вектор $\bar{\mathbf{B}}$ из уравнения индукции (1.4). С учётом (1.12), предпоследний член в уравнении притока тепла (1.3) для среднего движения может быть представлен в виде

$$(1/4\pi\mu_0) \mathbf{R}^M : \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{j}}. \quad (1.14)$$

Наконец, важно ясно себе представлять [8], что субстанциональное уравнение баланса внутренней энергии принимает форму (1.3) только в случае сильно развитой турбулентности, когда в структуре пульсирующих полей \mathbf{u}'' и \mathbf{B}' устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором полная турбулентная энергия плазмы

$$\langle b \rangle_\Sigma \equiv \langle b \rangle + \langle b \rangle_M \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho} + \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 8\pi\mu_0 \bar{\rho}, \quad (1.15)$$

равная сумме пульсационной кинетической энергии газа $\langle b \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho}$ и турбулентной энергии магнитного поля $\langle b \rangle_M(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 8\pi\mu_0 \bar{\rho}$, мало меняется как во времени, так и в пространстве, $D \langle b \rangle_\Sigma / Dt \cong 0$ [см. Гл.2].

Система уравнений (1.1)-(1.5) должна быть дополнена замыкающими соотношениями для турбулентных потоков, а также выражениями для тер-

модинамических и переносных характеристик. Граничные и начальные условия для структурных параметров не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводящих сред, но необходимо привлекать дополнительные условия для среднего магнитного поля.

1.2. Закон сохранения полной энергии

Для целей моделирования аккреционного диска нам понадобится также уравнение баланса осреднённой полной энергии дисковой системы, равной сумме $\langle U \rangle_{tot} = \langle U \rangle_{tot}^{sub} + \langle E \rangle^M$ полной энергии электропроводящего газа

$$\langle U \rangle_{tot}^{sub}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle E \rangle + \Psi_G + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u} \rangle^2 + \langle b \rangle \quad (1.16)$$

и осреднённой энергии электромагнитного поля [см. Гл.4]

$$\langle E \rangle_M(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho E_M / \bar{\rho}} \equiv \overline{\rho (|\mathbf{B}|^2 / 8\pi\mu_0\rho)} / \bar{\rho} = \overline{|\mathbf{B}|^2} / 8\pi\mu_0\bar{\rho} + \langle b \rangle_M. \quad (1.17)$$

Следуя работе [8], это уравнение для развитой турбулентности запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \langle U \rangle_{tot}^{sub} + \bar{\rho} \langle E \rangle^M \right) = \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \left(\bar{\rho} \langle U \rangle_{tot}^{sub} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{q}^{turb} + \bar{p} \langle \mathbf{u} \rangle - \left(\frac{\overline{|\mathbf{B}|^2}}{8\pi\mu_0} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\mathbf{q}_{Poynt}} - \mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\rho b'' \mathbf{u}''} \right\} + Q_R, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\overline{\mathbf{q}_{Poynt}} \equiv (c / 4\pi) \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \quad (1.19)$$

– осреднённый вектор Пойнтинга, имеющий смысл плотности потока энергии электромагнитного поля;

$$Q_{rad} \equiv - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_R = A - R = \int_0^\infty \int_\Omega \rho \kappa_{\nu a} I_\nu d\Omega d\nu - 4\pi \int_0^\infty \rho \kappa_{\nu a} B_\nu d\nu; \quad (1.20)$$

где ν , $I_\nu(\mathbf{x}, \Omega, t)$ и $B_\nu(\mathbf{x}, \Omega, t)$ – соответственно частота, спектральная интенсивность и функция внутренних источников излучения; Ω – направление движения фотонов, $\kappa_{\nu a}$ – истинный коэффициент поглощения излучения веществом диска (спектральная непрозрачность). Первый член (A) в выражении (1.20) соответствует поглощаемой, а второй (R) – спонтанно

излучаемой радиационной энергии в единице объёма в единицу времени. Возможны несколько режимов переноса излучения, которые применимы в различных областях диска в зависимости от темпа аккреции, массы протозвезды и т.п. В частности, если полная оптическая толщина диска $d\tau_v = \rho\kappa_{va}ds$ вдоль направления распространения s превосходит единицу, фотоны переносятся к его поверхности путём диффузии. В общем случае спектральная интенсивность I_ν , входящая в формулу (1.20), должна определяться в процессе решения уравнения переноса излучения.

В МГД-приближении вектор Пойнтинга $\overline{\mathbf{q}}_{Poynt}$ может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{q}}_{Poynt} = & \overline{\rho} \left(\frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0\overline{\rho}} + b_M + \frac{p_{turb}^M}{\overline{\rho}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \left(\frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0} \mathbf{I} - \frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \boldsymbol{\tau}_{turb}^M \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \\ & + \frac{1}{4\pi\mu_0} \overline{(|\mathbf{B}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}''} - \nu_M \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0} \mathbf{I} - \frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \right) - \nu_M \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (p_{turb}^M \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_{turb}^M), \end{aligned} \quad (1.19^*)$$

причём для сильно развитой турбулентности последние два малых члена, включающие коэффициент ν_M , для большинства областей аккреционного диска и короны могут быть опущены [37]. Их следует принимать во внимание только в областях высоких градиентов магнитного поля, например, в области стохастического перезамыкания магнитных силовых линий.

Комбинируя (1.18) и (1.19*), запишем закон сохранения полной энергии дисковой системы в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\overline{\rho} \langle U \rangle_{tot}) = & Q_{rad} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \mathbf{q}^{turb} + (\overline{\rho} + p_{turb}^M) \langle \mathbf{u} \rangle - \left(\mathbf{R}^K + \frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \right. \\ & \left. + \overline{\rho b'' \mathbf{u}''} + \frac{1}{4\pi\mu_0} \overline{\rho \left(\frac{|\mathbf{B}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}}{\rho} \right)'' \cdot \mathbf{u}''} \right\}, \end{aligned} \quad (1.18^*)$$

причём два корреляционных члена в левой части этого уравнения также можно опустить в силу их малости в рассматриваемой здесь задаче [38].

1.3. Определяющие соотношения

В монографии автора [8] описание турбулентных движений многокомпонентного газа проводилось в рамках двухжидкостного термодина-

мического континуума, состоящего из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы осреднённого движения и подсистемы турбулентного хаоса, связанного с пульсационным движением вещества и поля. Предполагалось, что элементарный объём $d\mathbf{x}$ подсистемы турбулентного хаоса может быть охарактеризован обобщёнными термодинамическими параметрами состояния, такими как энтропия $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$, внутренняя энергия $E_{turb}(\mathbf{x}, t)$, давление $p_{turb}(\mathbf{x}, t)$ и температура $T_{turb}(\mathbf{x}, t)$ турбулизации (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций [39]). Энтропия S_{turb} и внутренняя энергия E_{turb} турбулизации рассматривались в качестве первичных концепций и вводились в модель *a priori* для обеспечения связности термодинамической теории; при этом не подразумевалась их точная физическая интерпретация [40]. Особо был проанализирован квазиравновесный режим движения в подсистеме турбулентного хаоса, при котором суммарное возникновение $\sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma_{(S_{turb})}^e + \sigma_{(S_{turb})}^i$ энтропии турбулизации S_{turb} почти отсутствует. Это условие означает, что производство $\sigma_{(S_{turb})}^i(\mathbf{x}, t)$ энтропии $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ (за счёт необратимых процессов внутри подсистемы турбулентного хаоса) в такой степени компенсируется её оттоком $\sigma_{(S_{turb})}^e(\mathbf{x}, t)$ к подсистеме осреднённого движения, что $\sigma_{(S_{turb})} \cong 0$. Поскольку всегда $\sigma_{(S_{turb})}^i(\mathbf{x}, t) \geq 0$, то справедливо неравенство $0 > \sigma_{(S_{turb})}^e \cong -\sigma_{(S_{turb})}^i$. Отсюда следует, что для поддержания стационарно-неравновесного режима турбулентности необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от осреднённого движения к хаотической составляющей, причём $\sigma_{(S_{turb})}^e = -T\sigma_{\langle S \rangle}^e / T_{turb} < 0$. Только в этом случае балансовое уравнение для удельной энтропии системы $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t) = c_V \ln(\langle T \rangle / \bar{\rho}^{\gamma-1})$ принимает «стандартный» вид общего уравнения переноса тепла [10]

$$\bar{\rho} D\langle S \rangle / Dt + (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{q}^{turb} / \langle T \rangle) = \sigma_{\langle S \rangle}, \quad (1.21)$$

где локальное возникновение $\sigma_{\langle S \rangle}(\mathbf{x}, t)$ энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ за счёт диссипативных процессов в электропроводящей турбулентной среде определяется выражением

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \langle T \rangle \sigma_{\langle S \rangle}(\mathbf{x}, t) = \\
& = -\mathbf{q}^{turb} \cdot \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \left(\mathbf{R}^K + \frac{2}{3} \bar{\rho} (\langle b \rangle - \langle b \rangle_M) \mathbf{I} \right) : \overset{0}{\mathbf{D}} + \frac{1}{4\pi\mu_0} \mathbf{R}^M : \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a + \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e} + Q_R.
\end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь $\overset{0}{\mathbf{D}} \equiv \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right)^s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right)$ – скорость сдвига для среднего движения;

$$\left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right)^s_{jk} \equiv \frac{1}{2} (\partial \langle u \rangle_j / \partial x_k + \partial \langle u \rangle_k / \partial x_j), \quad \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a_{jk} \equiv \frac{1}{2} (\partial \bar{B}_j / \partial x_k - \partial \bar{B}_k / \partial x_j)$$

– соответственно симметрическая и антисимметрическая части тензоров $\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x}$ и $\partial \bar{\mathbf{B}} / \partial \mathbf{x}$; \mathbf{I} – единичный тензор.

При использовании метода Онзагера неравновесной термодинамики билинейная форма (1.22) для $\sigma_{\langle S \rangle}(\mathbf{x}, t)$ позволяет получить определяющие (замыкающие) соотношения для турбулентного потока тепла $\mathbf{q}^{turb}(\mathbf{x}, t)$, полного тензора турбулентных напряжений $\mathbf{R}^K(\mathbf{x}, t)$ и магнитного тензора Рейнольдса $\mathbf{R}^M(\mathbf{x}, t)$, отвечающие режиму стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля [8]. Для изотропной турбулентности (здесь мы ограничимся именно этим случаем), при использовании принципа Кюри–Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна), эти соотношения в случае пренебрежения малыми перекрёстными эффектами принимают вид

$$\mathbf{q}^{turb}(\mathbf{x}, t) = -\lambda^{turb} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right) = -\lambda^{turb} \frac{\langle T \rangle}{c_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \mathbf{x}} \cong -\lambda^{turb} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right), \quad (1.23)$$

$$\mathbf{R}^K(\mathbf{x}, t) = -\frac{2}{3} \bar{\rho} (\langle b \rangle - \langle b \rangle_M) \mathbf{I} + 2\bar{\rho} v_K^{turb} \left\{ \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right)^s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) \right\}, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{R}^M = 2v_M^{turb} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a, \quad (\text{или } c\mathbf{G} = -v_M^{turb} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}}), \quad (1.25)$$

где λ^{turb} , v_K^{turb} , v_M^{turb} – соответственно коэффициенты турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля, зависящие в общем случае от параметров: $\bar{\rho}$, $\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{B}} / 4\pi\mu_0$ и L (величина $L(\mathbf{x})$ является некоторой геометриче-

ской характеристикой расположения точки \mathbf{x} , например, равной обычной «длине пути смещения» [41]).

Определяющее соотношение для вектора радиации будем использовать в форме лучистого потока тепла:

$$\mathbf{q}_R(\mathbf{x}, t) = -\chi_R \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{16\sigma_B \langle T \rangle^3}{3\kappa \bar{\rho}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.26)$$

справедливой в случае диффузии равновесного излучения (например, при локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом внутри оптически толстых дисков). Здесь σ_B , $\chi_R = 16\sigma_B \langle T \rangle^3 / 3\kappa \bar{\rho}$ – соответственно, постоянная Стефана–Больцмана и коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности среды, весьма сильно зависящий от температуры и плотности вещества; $\kappa(\rho, T)$ – полная непрозрачность среды, которая сложным образом зависит от параметров ρ и T , а также от степени ионизации, химического состава [42] и т.п. В общем случае величина $\kappa(\rho, T)$ определяется как Росселандово среднее по обратным величинам $1/\kappa_\nu$ спектральной непрозрачности [43]. Как известно, доминирующий вклад κ_{ff} в непрозрачность $\kappa(\rho, T)$ в аккреционном диске вносит нерелятивистское тепловое тормозное излучение, или «свободно-свободные переходы». Связанную с этими процессами поглощения среднюю по Росселанду непрозрачность $\kappa(\rho, T)$, можно определять формулой Крамерса

$$\kappa_{ff}(\rho, T) = K\rho T^{-7/2} \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}, \quad (1.27)$$

где $K = 0.32 \times 10^{23}$ – константа. В оптически толстых дисках сравнимую (но всё же меньшую) величину $\kappa_{es} = 2 \times 10^{-2}(1+X) \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}$ вносят «связанно-связанные» переходы в линиях и «связанно-свободные» ионизационные переходы (здесь X – массовая доля водорода в среде).

Сделаем теперь важное замечание по поводу формулы (1.25) для ЭДС, связанной с вектором \mathbf{G} . Эта формула справедлива только для изотропной (в гидродинамическом смысле) турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей $\mathbf{u}''(\mathbf{x}, t)$ обладает зеркальной симметрией во всей системе. Однако в случае вращающегося аккреционного диска возможна ситуация, когда, например, в верхней части диска левовращательные турбулентные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. Физической причиной нарушения отражательной симметрии служит воздействие силы Кориолиса на вихри, всплывающие и опускающиеся в турбулентной среде диска. При этом отсутствует зеркальная симметрия поля \mathbf{u}'' относительно центральной плоскости диска, и турбулентность может обладать

так называемой гидродинамической спиральностью $h_{hel} \equiv \overline{\mathbf{u}'' \cdot ((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{u}'')}$, которая характеризует избыток вихрей данного знака [7,26,27,44]. Обобщение формулы (1.25) на случай отражательно-несимметричной турбулентности принимает вид [45]

$$c \mathbf{G} = \alpha \bar{\mathbf{B}} - v_M^{turb} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}}, \quad (1.25^*)$$

где коэффициент спиральности α является псевдоскаляром. Легко видеть, что с дополнительным слагаемым в соотношении (1.25*) связан электрический ток $\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e \alpha \bar{\mathbf{B}} + \dots$, направленный вдоль магнитного поля. Простые рассуждения показывают, что для случая изотропного и зеркально-симметричного поля скоростей \mathbf{u}'' , коэффициент спиральности α равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность как некоторой фиксированной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из неё зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величина α не должна изменяться, если выполнить это отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; поэтому $\alpha = 0$.

Подстановка (1.25*) в уравнение индукции (1.4) для средних полей даёт

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = \left(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + (v_M + v_M^{turb}) \Delta \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \left\{ v_M^{turb} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times (\alpha \bar{\mathbf{B}}). \quad (1.28)$$

Для хорошо перемешанной турбулентности (создаваемой полем \mathbf{u}''), когда магнитное поле становится запутанным и мелкомасштабным, процесс диффузии усиливается и $v_M^{turb} \gg v_M > 0$ (условие сильно развитой турбулентности). Ниже мы будем для простоты предполагать, что в уравнении (1.28) $v_M^{turb} = const$; $\alpha = const$; тогда

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = \left(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + v_M^{turb} \Delta \bar{\mathbf{B}} + \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}}. \quad (1.28^*)$$

Отсюда видно, что отражательно-симметричная изотропная турбулентность, в отличие от гиротропной, вызывает только турбулентную диффузию магнитного поля.

Следует иметь в виду, что в силу своей псевдоскалярной природы альфа-эффект антисимметричен относительно центральной плоскости диска. Свойства симметрии уравнений Максвелла допускают при этом два вида симметрии для собственных решений (мод) уравнения динамо среднего поля (1.28*): магнитные поля могут быть антисимметричными относительно экватора (дипольная симметрия) и симметричны относительно экватора

(квадрупольная симметрия). В частности, механизм солнечного динамо возбуждает, как правило, преимущественно дипольную осциллирующую моду (*правило Хейла*).

Если теперь подставить в закон Ома (1.13) для средних полей выражения (1.25*) и (1.8), то для осреднённого тока будем иметь

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = \sigma_e^{turb} \bar{\mathbf{E}}^* + \frac{c\alpha}{4\pi\mu_0 v_M^{turb}} \bar{\mathbf{V}} \cong \sigma_e^{turb} \left(\bar{\mathbf{E}}^* + c^{-1} \alpha \bar{\mathbf{V}} \right). \quad (1.29)$$

Здесь турбулентная проводимость σ_e^{turb} определяется формулой

$$\sigma_e^{turb} = \frac{\sigma_e}{1 + 4\pi\mu_0 v_M^{turb} \sigma_e / c^2} = \frac{\sigma_e v_M}{v_M + v_M^{turb}} \cong \frac{\sigma_e v_M}{v_M^{turb}} = \frac{c^2}{4\pi\mu_0 v_M^{turb}}, \quad (1.30)$$

из которой видно, что турбулентная проводимость σ_e^{turb} в случае развитой турбулентности меньше молекулярной проводимости σ_e .

Общее уравнение переноса тепла (1.21), с учётом определяющих соотношений (1.23)-(1.25), принимает вид

$$\begin{aligned} \langle T \rangle \bar{\rho} \frac{D\tilde{S}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \lambda^{turb} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} = \\ = 2\bar{\rho} v_K^{turb} \left(\overset{0}{\mathbf{D}} : \overset{0}{\mathbf{D}} \right) + \frac{v_M^{turb}}{2\pi\mu_0} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a : \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + Q_R. \end{aligned} \quad (1.22^*)$$

Поскольку, в силу (1.30), имеем

$$\frac{v_M^{turb}}{2\pi\mu_0} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a : \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^a + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} = \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{turb}} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} \cong \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{turb}},$$

то уравнение (1.22*) может быть переписано в следующей окончательной форме

$$\langle T \rangle \bar{\rho} \frac{D\langle S \rangle}{Dt} \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\lambda^{turb} \langle T \rangle}{c_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right) + 2\bar{\rho} v_K^{turb} \left(\overset{0}{\mathbf{D}} : \overset{0}{\mathbf{D}} \right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{turb}} + Q_R, \quad (1.22^{**})$$

где величина $\langle T \rangle \bar{\rho} D\langle S \rangle / Dt$ представляет собой количество тепла (относённое к единице объёма среды), получаемого системой в единицу времени, первый член справа есть тепло, приносимое в рассматриваемый объём посредством турбулентной теплопроводности, второй член представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря турбулентной вяз-

кости, третий член, соответствующий джоулевому нагреву, учитывает вклад среднего магнитного поля в производство энтропии системы и, наконец, последний член $Q_R \equiv -(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}_R$ связан с процессом лучистого теплоотвода из системы.

1.4. Коэффициенты турбулентного переноса

Известно, что при изотропной турбулентности коэффициенты турбулентной кинематической вязкости ν_K^{turb} и турбулентной диффузии магнитного поля ν_M^{turb} близки к произведению $w_{turb} l_{cor}$ скорости турбулентных вихрей $w_{turb} \cong \sqrt{|\mathbf{u}''|^2}$ и их корреляционной длины l_{cor} , а коэффициент спиральности α по порядку величины $\alpha \cong -1/3 h_{hel} \tau_{cor}$, где

$$h_{hel} \equiv \overline{\mathbf{u}'' \cdot ((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{u}'')}.$$

– плотность гидродинамической спиральности (псевдоскаляр), τ_{cor} – масштаб, характеризующий изменения поля турбулентных скоростей \mathbf{u}'' во времени [44]. В частности, если согласно стандартной гипотезе Шакуры и Сюняева [46] принять, что l_{cor} – эффективная полутолщина аккреционного диска, а w_{turb} выражается через термическую скорость звука c_s , то турбулентная диффузия приводит к характерному времени затухания магнитного поля (вернее, тех его компонентов, которые заметно меняются на масштабе толщины диска) порядка периода кеплеровского вращения. При этом магнитное число Рейнольдса $Re_M \propto 1$ и важен турбулентный перенос.

С другой стороны, обобщая известную формулу Колмогорова для непроводящей жидкости на случай МГД–турбулентности, можно предположить, что кинетический коэффициент турбулентной вязкости ν_K^{turb} вычисляется по формуле

$$\nu_K^{turb} = L \sqrt{b_\Sigma}, \quad (1.31)$$

где L – путь перемешивания по Прандтлю (числовой множитель может быть включён в величину L). Это предположение также часто вполне приемлемо для практических приложений. Вместе с тем, в соотношении (1.31) явно не учитывается возможное влияние магнитного поля на характер перемешивания, что для развитой МГД–турбулентности не вполне корректно (например, для возмущений больших масштабов). По этой причине в формулу (1.31) необходимо, в общем случае, вводить поправку, учитыва-

ющую обратный эффект диффузии магнитного поля и переноса тепла на развитие турбулентности в электропроводящей дисковой среде.

Для нахождения такого поправочного множителя к величине L мы воспользуемся уравнением баланса энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$, которое, в случае стационарно-неравновесного режима развитой турбулентности, принимает вид

$$0 \cong \bar{\rho} \frac{DS_{turb}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_{S_{turb}} =$$

$$= 2\bar{\rho} v_K^{turb} \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right) + \frac{v_M^{turb} \left((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{4\pi\mu} + \frac{\lambda^{turb} \mathbf{g}}{c_p \langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) - \bar{\rho} \varepsilon_\Sigma. \quad (1.32)$$

Здесь $\mathbf{g} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Psi_G = GM_\odot \mathbf{r} / |\mathbf{r}|^3$; $\Phi_v \equiv 2\bar{\rho} v_K^{turb} \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right)$ – диссипативная

функция; $\varepsilon_\Sigma \equiv \langle \varepsilon_M \rangle + \langle \varepsilon_b \rangle = - \left\{ \overline{\rho(\boldsymbol{\tau}/\rho)'' : \partial \mathbf{u}'' / \partial \mathbf{x}} + (v_M / 4\pi\mu_0) \overline{[(\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{B}]^2} \right\}$

– полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости и вязкости магнитного поля); $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения дискового вещества.

Используя обозначение w_{turb} для характерной пульсационной скорости проводящей среды, и L для пути перемешивания по Прандтлю (в случае отсутствия магнитного поля), напишем

$$v_K^{turb} = L w_{turb}, \quad v_M^{turb} = \frac{L w_{turb}}{Pr_M^{turb}}, \quad \frac{\lambda^{turb}}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} = \frac{L w_{turb}}{Pr_K^{turb}}, \quad \varepsilon_\Sigma = \frac{1}{\alpha_{ss}^2} \frac{w_{turb}^3}{L}. \quad (1.33)$$

При этом эмпирическую константу α_{ss} , а также турбулентные числа Прандтля–Шмидта (кинетическое и магнитное)

$$Pr_K^{turb} = \bar{\rho} c_p v_K^{turb} / \lambda^{turb}, \quad Pr_M^{turb} = v_K^{turb} / v_M^{turb} \quad (1.34)$$

будем в первом приближении считать постоянными. Подставляя эти выражения в (1.32), получим для стационарного режима:

$$w_{\text{turb}} \left\{ 2L \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right) + \frac{L}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}} \frac{\left((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{4\pi\mu\bar{\rho}} + \frac{L}{\text{Pr}_K^{\text{turb}} \langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) - \frac{1}{\alpha_{ss}^2} \frac{w_{\text{turb}}^2}{L} \right\} \approx 0 \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) распадается на два уравнения: уравнение $w_{\text{turb}} = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения, и уравнение

$$w_{\text{turb}}^2 = \alpha_{ss}^2 L^2 \left\{ 2 \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right) + \frac{1}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} + \frac{1}{\text{Pr}_K^{\text{turb}} \langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) \right\}, \quad (1.36)$$

описывающее установившийся турбулентный режим. Уравнение (1.36) имеет вещественное решение только в том случае, когда

$$2 \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right) + \frac{1}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}} \left\{ \frac{\left((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} + \frac{\mathbf{g}}{\langle T \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) \right\} \geq 0;$$

отсюда получаем, что $\text{Ri}_\Sigma \equiv \text{Ri}_K - \text{Ri}_M \leq (\text{Ri}_\Sigma)_{cr} = \text{Pr}_K^{\text{turb}}$. Здесь введены обозначения

$$\text{Ri}_K \equiv - \frac{\mathbf{g} \cdot (\partial \langle T \rangle / \partial \mathbf{x}) - \mathbf{g} / c_p}{2 \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right)}, \quad \text{Ri}_M \equiv \frac{1}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} \frac{\left((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \bar{\mathbf{B}} \right)^2}{2 \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right)} \quad (1.37)$$

где Ri_K и Ri_M — соответственно градиентное гидродинамическое число Ричардсона (безразмерная величина, определяющая относительный вклад термической конвекции вещества в порождение турбулентной энергии по сравнению с передачей энергии от осреднённого движения) и градиентное магнитогидродинамическое число Ричардсона (пропорциональное отношению магнитной энергии к кинетической энергии плазмы), учитывающее влияние магнитного поля на возникновение турбулентности в потоке.

Если $\text{Ri}_\Sigma = \text{Pr}_K^{\text{turb}}$, то имеется единственное вещественное решение $w_{\text{turb}} = 0$, соответствующее ламинарному режиму. В случае, когда имеет место турбулентный режим и, следовательно, $\text{Ri}_\Sigma < (\text{Ri}_\Sigma)_{cr}$, для турбулентного коэффициента вязкости электропроводной жидкости получим

$$v_K^{turb} = \alpha_{ss} L^{*2} \sqrt{2 \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right)}, \quad L^* \equiv L(1 - Ri_\Sigma / Pr_K^{turb})^{0.25}, \quad (1.38)$$

где $L^* = L\vartheta$; безразмерная функция $\vartheta \equiv (1 - Ri_\Sigma / Pr_K^{turb})^{0.25}$ учитывает влияние магнитного поля и обратный эффект переноса тепла на развитие турбулентности через посредство пути смешения. Одновременно получилась и приближенная оценка для критического числа Ричардсона $(Ri_\Sigma)_{cr} = Pr_K^{turb} = \bar{\rho} c_p v_K^{turb} / \lambda^{turb}$.

Для вычисления пути перемешивания по Прандтлю (в случае отсутствия магнитного поля) можно воспользоваться известной формулой Прандтля–Никурадзе, которая применительно к моделированию дисковой структуры может быть записана в виде

$$L / h_{eff} = 0,14 - 0,08(1 - z / h_{eff})^2 - 0,06(1 - z / h_{eff})^4. \quad (1.39)$$

Приведённая в этом разделе замкнутая система осреднённых МГД-уравнений является основной при моделировании структуры и эволюции аккреционного протопланетного диска; при моделировании тонких турбулизованных дисков она может быть существенно упрощена [47].

2. МГД-уравнения для аккреционного диска

Рассмотрим теперь медленно эволюционирующий аккреционный турбулентный диск, который в момент времени t вращается с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z)$ вокруг оси z . Будем полагать, что диск является электропроводящим и имеется начальное крупномасштабное и медленно меняющееся осесимметричное магнитное поле \mathbf{B}_\otimes протозвезды, дипольный момент которого совпадает с осью вращения диска. Далее мы будем использовать цилиндрическую систему координат (ϖ, ϕ, z) и предполагать, что центральная плоскость аккреционного диска совпадает с экваториальной плоскостью звезды, определяемой условием $z = 0$. Ограничимся здесь моделью тонкого осесимметричного ($\partial(\dots) / \partial \phi = 0$) аккреционного диска, когда пространственный масштаб изменения структурных параметров в слое перпендикулярном к экваториальной плоскости велик по сравнению с полутолщиной диска, т.е. величина $h(\varpi)$ мала по сравнению с ϖ для всех ϖ , $\partial h / \partial \varpi \approx h / \varpi \ll 1$. Можно показать, что толщина аккреционного диска зависит от баланса нагрева и охлаждения [56]. Эффективное охлаждение приводит к геометрически тонкому диску. Для такого диска характер тече-

ния проводящего дискового вещества может быть проанализирован с использованием двумерных МГД-уравнений.

2.1. Коэффициент турбулентной вязкости

Проанализируем вначале выражение (1.38) для коэффициента вязкости в тонком аккреционном диске, движение вещества в котором можно представить как суперпозицию общего дифференциального вращения и случайного турбулентного движения. Для простоты будем предполагать, что вращение диска настолько медленное, что меридиональной циркуляцией можно пренебречь [48], т.е. осреднённое движение космического вещества реализуется лишь в азимутальном направлении, а истинная скорость течения беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях; тогда $\langle \mathbf{u} \rangle_{\varpi} = 0$, $\langle \mathbf{u} \rangle_{\varphi} = \varpi \Omega(\varpi, z)$, $\langle \mathbf{u} \rangle_z = 0$.

В принятых предположениях $\varpi\varphi$ -компонента кинетического тензора Рейнольдса (1.24) и диссипативная функция Φ_v принимают соответственно вид

$$R_{\varpi\varphi}^K = \bar{\rho} v_K^{turb} \varpi \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi},$$

$$\Phi_v \equiv v_K^{turb} 2 \left(\frac{0}{\mathbf{D}} : \frac{0}{\mathbf{D}} \right) = v_K^{turb} \varpi^2 \left\{ \left(\frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (2.1)$$

Тогда для большей части диска (за исключением областей, близких к звезде) справедливо следующее приближённое выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$v_K^{turb} = \alpha_{ss} L^{*2} \varpi \left| \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi} \right|, \quad L^*(z) \equiv L(z) \left\{ 1 - \frac{\text{Ri}_K - \text{Ri}_M}{\text{Pr}_K^{turb}} \right\}^{0.25}, \quad (2.2)$$

где

$$\text{Ri}_K \equiv \frac{\Omega_{K,mid}^2 z}{\varpi^2} \frac{1}{\langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle / \partial z + G_a}{(\partial \Omega / \partial z)^2}, \quad \text{Ri}_M \equiv \frac{1}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} \frac{(\partial \bar{B}_\varphi / \partial z)^2}{\varpi^2 (\partial \Omega / \partial z)^2}, \quad (2.3)$$

$$G_a \equiv \frac{g_z}{c_p} = -\frac{1}{c_p} \frac{GM_\odot z}{\varpi^3} \left(1 + \frac{z^2}{\varpi^2} \right)^{-3/2} \equiv \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{1}{\mathfrak{R}} \Omega_{K,mid}^2 z \quad (2.4)$$

– адиабатический градиент температуры в протопланетном аккреционном диске. В выражениях (2.3) и (2.4) использована эффективная сила тяжести $\mathbf{g} = \{0, 0, -g_z\}$, где

$$g_z = \frac{GM_{\otimes} z}{\varpi^3} \left(1 + \frac{z^2}{\varpi^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cong \Omega_{K,mid}^2(\varpi) z; \quad \Omega_K(\varpi, z) \equiv \sqrt{\frac{GM_{\otimes}}{(\varpi^2 + z^2)^{3/2}}} \quad (2.5)$$

– кеплеровская угловая скорость; $\Omega_{K,mid}(\varpi) \equiv \Omega_K(\varpi, 0) = \sqrt{GM_{\otimes} / \varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость вращения в центральной плоскости диска.

Из формулы (2.3) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой, когда $-\partial\langle T \rangle / \partial z = -(\partial\langle T \rangle / \partial z)_{ad} = z\Omega_{K,mid}^2(\varpi) / c_p$, число Ричардсона $Ri_K = 0$, т.е. температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. Однако, в случае неустойчивой термической стратификации аккреционного диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры, энергия турбулентности возрастает за счёт энергии неустойчивости в направлении, перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности); при этом одновременно увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время пространственная неоднородность (по высоте) осреднённого магнитного поля приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку магнитное число Ричардсона $Ri_M > 0$. Заметим, что обратное турбулентное число Прандтля–Шмидта $1 / Pr_K^{turb}$ в формуле (2.2) можно принять равным единице, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном вращении диска; однако оно может быть в 2-3 раза больше, когда причиной турбулентности, является тепловая конвекция в вертикальном направлении.

Для того чтобы получить совпадение выражения (2.2) с широко используемой в астрофизической литературе формулой Шакуры–Сюняева [49], предназначенной для моделирования лежащего в центральной плоскости кеплеровского диска тонкого слоя, нужно положить в выражении (2.2) параметры $Ri = 0$ и $Ri_M = 0$ и подставить в него угловую скорость кеплеровского вращения $\Omega_{K,mid}(\varpi)$. Если использовать теперь в качестве масштаба турбулентности $h_{eff} \cong c_s|_{z=0} / \Omega_{K,mid}$ – эффективную полутолщину диска, то в результате получим

$$v_K^{turb} = \frac{3}{2} \alpha_{ss} h_{eff}^2 \Omega_{K,mid} = \frac{3}{2} \alpha_{ss} h_{eff} c_s|_{z=0} = \frac{3}{2} \alpha_{ss} \gamma(\bar{p} / \bar{\rho})|_{z=0} / \Omega_{K,mid}. \quad (2.6)$$

В этом случае между ϖ, ϕ -компонентой тензора Рейнольдса $R_{\varpi\phi}$ и давлением \bar{p} газа имеет место следующая «каноническая» зависимость

$$R_{\varpi\phi} = \bar{\rho} v_K^{turb} \varpi (\partial \Omega_{K,mid} / \partial \varpi) = -\alpha_s \bar{p} \Big|_{z=0}. \quad (2.7)$$

Здесь $c_s \Big|_{z=0} \cong \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}} \Big|_{z=0}$ – термическая скорость звука; $\alpha_s = 9/4 \alpha_{ss}$ – не поддающийся сколько-нибудь точному определению свободный параметр, удовлетворяющий ограничению $\alpha_s \leq 1$ [49].

Астрофизические модели, построенные с применением соотношения (2.7), относятся к так называемым вязким α -дискам. В моделях подобного рода параметр Шакуры–Сюнйева α_s остаётся обычно свободным параметром в уравнениях строения диска. Значение α_s может быть прокалибровано эмпирически, в частности, при помощи зависящих от времени спектров, получаемых при наблюдении вспышек в двойных звёздных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая в работах [50,51] были найдены значения α_{ss} в интервале $0.1 \leq \alpha_s \leq 1$. Эти значения частично совпадают с оценками $0.01 \leq \alpha_s \leq 1$ из работ [15,42,52-54], где рассматривалась вязкость, возникающая вследствие сдвига скорости, и перезамыкание силовых линий хаотического магнитного поля. В аналитических работах [18,19] была получена связь между вязкостью в диске и процессом перезамыкания магнитных полей внутри диска. Известно, что скорость перезамыкания может быть охарактеризована числом Маха $M_A = u/c_A$, где u – скорость вещества перед разрывом, а $c_A = |\mathbf{B}| / \sqrt{4\pi\mu\rho}$ – альфвеновская скорость перед разрывом [55]. Обе эти модели используют сдвиговое течение внутри диска для усиления магнитного поля и используют МГД-турбулентность как механизм радиального переноса вещества. Вязкий параметр Шакуры–Сюнйева, полученный в работе Коронити [18], выражается через параметр перезамыкания следующим образом: $\alpha_{ss} \approx M_A^{2/3}$. Модель Тоута и Прингла [19] даёт следующее выражение для параметра Шакуры–Сюнйева: $\alpha_{ss} \approx 0.6 M_A$. Для того чтобы вызвать аккрецию, согласующуюся с наблюдениями различных астрофизических явлений, число Маха M_A должно быть порядка 0.1, что предполагает очень большие скорости перезамыкания в режиме турбулентной МГД, чему нет, вообще говоря, никаких оснований. Чтобы получить реальную картину связи между аккрецией и перезамыканием, необходимо, по-видимому, численное моделирование, которое рассматривает турбулентное динамо и процесс перезамыкания самосогласованно.

Отметим ещё раз, что в подходе Шакуры и Сюняева, разработанном специально для тонких аккреционных дисков, не принималось во внимание обратное влияние конвективного переноса тепла, а также влияние градиента крупномасштабного магнитного поля на развитие дисковой турбулентности. В связи с адекватным моделированием структуры и эволюции солнечного протопланетного диска и его короны мы сочли целесообразным отойти от «классического» α -формализма и получить обобщение формулы (46) на случай расслоённого по плотности вещества в диске конечной толщины.

2.2. Осреднённые гидродинамические уравнения в цилиндрических координатах

Осреднённое уравнение неразрывности. Запишем теперь осреднённые МГД-уравнения для турбулизированной среды в цилиндрической системе координат. Уравнение сохранения массы для осреднённого движения (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \bar{\rho} \langle u \rangle_{\varpi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \langle u \rangle_z) = 0. \quad (2.8)$$

Из этого уравнения следует, что

$$|\langle u \rangle_z / \langle u \rangle_{\varpi}| \leq h / \varpi \ll 1. \quad (2.9)$$

Далее для компонент скорости в дифференциально вращающемся диске будем употреблять новые обозначения: радиальную скорость, которая по предположению не зависит от z -координаты, будем обозначать $\langle u \rangle_{\varpi}(\varpi, z) \equiv \langle u \rangle_{\varpi}(\varpi, z=0) \equiv V_{\varpi}(\varpi) > 0$; орбитальную скорость определим соотношением $\langle u \rangle_{\varphi}(\varpi, z) \equiv V_{\varphi}(\varpi, z) = \varpi \Omega(\varpi, z)$, где $\Omega(\varpi, z)$ – угловая скорость вращения дискового вещества, а осреднённую вертикальную скорость обозначим так: $\langle u \rangle_z(\varpi, z) \equiv V_z(\varpi, z)$.

Осреднённое уравнение движения. При использовании справедливых для тонких дисков оценочных неравенств [56]

$$V_{\varphi} \gg V_{\varpi} \gg V_z, \quad c_s / V_{\varphi} \propto h / \varpi \ll 1, \quad v_K^{turb} \propto \varepsilon c_s h \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (2.10)$$

(здесь $c_s \equiv \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ – изотермическая скорость звука), а также справедливых в цилиндрической системе координат выражений

$$\bar{\mathbf{j}} = \frac{c}{4\pi\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{B}} \right) = \frac{c}{4\pi\mu_0} \left\{ \mathbf{e}_\varpi \left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial B_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varpi} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi B_\varphi)}{\partial \varpi} \right\}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{B}} = & \frac{1}{4\pi\mu_0} \left\{ \mathbf{e}_\varpi \left(-\frac{1}{2\varpi^2} \frac{\partial(\varpi^2 \bar{B}_\varphi^2)}{\partial \varpi} + \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{B}_z \bar{j}_\varphi \right) + \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\bar{B}_\varpi}{\varpi} \frac{\partial(\varpi \bar{B}_\varphi)}{\partial \varpi} + \bar{B}_z \frac{\partial \bar{B}_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \left(-\frac{\partial(\bar{B}_\varphi^2 / 2)}{\partial z} - \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{B}_\varpi \bar{j}_\varphi \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

радиальную, азимутальную и вертикальную компоненты уравнения движения (1.3) запишем в следующем виде:

$$\bar{\rho} \left(\frac{DV_\varpi}{Dt} - \varpi \Omega^2 \right) = -\bar{\rho} \frac{GM_\otimes}{\varpi^2} - \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\bar{p} + p_{turb} + \frac{1}{3} p_{turb}^M \right) - \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{\varpi^2 \bar{B}_\varphi^2}{8\pi\mu_0} \right) + \frac{1}{c} \bar{B}_z \bar{j}_\varphi, \quad (2.13)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{D(\varpi \Omega)}{Dt} + V_\varpi \Omega \right) = \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\bar{\rho} v_K^{turb} \varpi^3 \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} + \varpi^2 \frac{\bar{B}_\varphi \bar{B}_\varpi}{4\pi\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{B}_\varphi \bar{B}_z}{4\pi\mu_0} \right), \quad (2.14)$$

$$\bar{\rho} \frac{DV_z}{Dt} = -\bar{\rho} \frac{GM_\otimes z}{\varpi^3} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{p} + p_{turb} + \frac{1}{3} p_{turb}^M + \frac{\bar{B}_\varphi^2}{8\pi\mu_0} \right) - \frac{1}{c} \bar{B}_\varpi \bar{j}_\varphi, \quad (2.15)$$

где

$$\bar{\rho} \frac{DA}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} A) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \bar{\rho} A V_\varpi) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} A V_z). \quad (2.16)$$

– субстанциональная производная параметра $A(\mathbf{x}, t)$ в цилиндрической системе координат. Оператор (2.16) позволяет переписать уравнения (2.13)–(2.15) в более удобном дивергентном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} V_\varpi) + \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \bar{\rho} V_\varpi^2 + P + \frac{\bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right) - \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \frac{(\bar{B}_\varpi^2 - \bar{B}_\varphi^2)}{8\pi\mu_0} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} V_\varpi V_z - \frac{\bar{B}_\varpi \bar{B}_z}{4\pi\mu_0} \right) - \bar{\rho} \varpi \Omega^2 + \bar{\rho} \frac{GM_\otimes}{\varpi^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.13^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}J) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \bar{\rho} J V_{\varpi} - \varpi^3 \bar{\rho} v_K^{turb} \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} - \varpi^2 \frac{\bar{B}_{\varphi} \bar{B}_r}{4\pi\mu_0} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} J V_z - \varpi \frac{\bar{B}_{\varphi} \bar{B}_z}{4\pi\mu_0} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.14^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} V_z) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi \left(\bar{\rho} V_z V_{\varpi} - \frac{\bar{B}_z \bar{B}_{\varpi}}{4\pi\mu_0} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} V_z^2 + P + \frac{\bar{B}_{\varpi}^2 + \bar{B}_{\varphi}^2 - \bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right) + \bar{\rho} \frac{GM_{\otimes} z}{\varpi^3} = 0. \end{aligned} \quad (2.15^*)$$

Здесь $P \equiv \left(\bar{p} + p_{turb} + \frac{1}{3} p_{turb}^M \right)$ – полное давление в турбулизованной электропроводящей среде; $\bar{p} = \mathfrak{R} \bar{\rho} \langle T \rangle$ – давление турбулизованного газа; $p_{turb}(\varpi, z) = \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b \rangle$ – так называемое давление турбулизации [8]; $p_{turb}^M(\varpi, z) = \bar{\rho} \langle b \rangle_M$ – турбулентное магнитное давление; $J(\varpi, z) \equiv \varpi^2 \Omega(\varpi, z)$ – удельный угловой момент импульса дискового вещества, находящегося на расстоянии ϖ от центра вращения. Заметим, что азимутальная компонента уравнения движения (2.14*) описывает эволюцию момента количества движения J за счёт вязкого трения и влияния магнитного поля.

Осреднённое энергетическое уравнение. Уравнение переноса тепла (1.22**) для тонкого аккреционного диска, при учёте (2.1), принимает вид

$$\begin{aligned} \langle T \rangle \bar{\rho} \frac{D \langle S \rangle}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda^{turb}}{c_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial z} \right) = \\ = \bar{\rho} v_K^{turb} \varpi^2 \left(\frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi} \right)^2 + \frac{v_M^{turb}}{4\pi\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_{\varpi}}{\partial z} \right)^2 \right\} + Q_{rad}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Это уравнение может быть использовано, в частности, для определения вертикального распределения температуры в тонком диске с учётом конвекции, лучистой теплопроводности, вязкой и магнитной диссипации.

Вместе с тем, уравнение (1.18*) для полной энергии дисковой системы удобно использовать в стационарных моделях тонкого диска; в цилиндрической системе координат оно принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \mathbf{J}_{\text{U}_{\text{tot}}, \varpi}^{\text{sub}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{J}_{\text{U}_{\text{tot}}, z}^{\text{sub}} \right) = Q_{\text{rad}}, \quad (2.18)$$

где

$$\mathbf{J}_{\text{U}_{\text{tot}}}^{\text{sub}} = \mathbf{J}_{\text{U}_{\text{tot}}} - \bar{\rho} \langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}} \langle \mathbf{u} \rangle \cong \mathbf{q}^{\text{turb}} + P \langle \mathbf{u} \rangle - 2\bar{\rho} v_{\text{K}}^{\text{turb}} \left(\overset{0}{\mathbf{D}} : \overset{0}{\mathbf{D}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \quad (2.19)$$

– субстанциональный поток полной энергии $\langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}}$ через единичную площадку за единицу времени; его составляющие в радиальном и вертикальном направлении определяются соотношениями

$$\left(\mathbf{J}_{\text{U}_{\text{tot}}}^{\text{sub}} \right)_{\varpi} = -\lambda^{\text{turb}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \varpi} - \bar{\rho} \varpi^2 v_{\text{K}}^{\text{turb}} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} - \varpi \Omega \frac{\overline{B}_{\varpi} \overline{B}_{\varphi}}{4\pi\mu_0},$$

$$\left(\mathbf{J}_{\text{U}_{\text{tot}}}^{\text{sub}} \right)_z = -\lambda^{\text{turb}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} - \frac{4\sigma_{\text{B}}}{3\kappa\bar{\rho}} \frac{\partial \langle T \rangle^4}{\partial z} - \bar{\rho} \varpi^2 v_{\text{K}}^{\text{turb}} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\overline{B}_z \overline{B}_{\varphi}}{4\pi\mu_0} \varpi \Omega.$$

Осреднённое уравнение магнитной индукции. Поскольку влияние гидродинамической спиральности [7] на генерацию среднего магнитного поля неизбежно сопровождается эффективную магнитную диффузию, то в общем случае для описания структуры и механизма генерации крупномасштабного магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$ в диске необходимо привлекать к рассмотрению уравнение индукции (1.28*). При этом действие α -эффекта и дифференциального вращения в осесимметричном диске удобно проанализировать с помощью разложения магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$ на тороидальную $\overline{B}_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}$ и полоидальную $\overline{\mathbf{B}}_p$ составляющие [44]. Тогда уравнение (1.28*) заменяется двумя скалярными уравнениями. Действительно, разложив осреднённую скорость течения

$$\langle \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{V} = V_{\varpi} \mathbf{e}_{\varpi} + V_z \mathbf{e}_z + V_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}$$

дискового вещества и среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}$ на полоидальную и тороидальную компоненты: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \varpi \Omega(\varpi, z) \mathbf{e}_{\varphi}$, $\mathbf{V}_p = V_{\varpi} \mathbf{e}_{\varpi} + V_z \mathbf{e}_z$,

$\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}_p + \overline{B}_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}$, и полагая

$$\overline{\mathbf{B}}_p(\varpi, z) \equiv \overline{B}_{\varpi} \mathbf{e}_{\varpi} + \overline{B}_z \mathbf{e}_z = (\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi A)}{\partial \varpi} \mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{A} = A_{\varphi}(\varpi, z) \mathbf{e}_{\varphi} \equiv A(\varpi, z) \mathbf{e}_{\varphi}$ – магнитный векторный потенциал, получим

$$\frac{\partial \bar{B}_\varphi}{\partial t} + \varpi \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\bar{B}_\varphi \mathbf{V}_p}{\varpi} \right) = \varpi \left(\bar{\mathbf{B}}_p \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \Omega + v_M^{turb} \left(\Delta \bar{B}_\varphi - \frac{\bar{B}_\varphi}{\varpi^2} \right) - \alpha \left(\Delta A - \frac{A}{\varpi^2} \right), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \left(\mathbf{V}_p \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) (\varpi A) = v_M^{turb} \left(\Delta A - \frac{A}{\varpi^2} \right) + \alpha \bar{B}_\varphi. \quad (2.21)$$

Уравнениям (2.20) и (2.21) легко придать более наглядный вид:

$$\frac{\partial \bar{B}_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varpi} (\bar{B}_\varphi V_\varpi) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{B}_\varphi V_z) = \varpi \left(B_\varpi \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} + B_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + v_M^{turb} \frac{\partial^2 \bar{B}_\varphi}{\partial z^2} + \alpha \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{j}_\varphi, \quad (2.20^*)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_\varpi \bar{B}_z - V_z \bar{B}_\varpi = -\frac{4\pi\mu_0}{c} v_M^{turb} \bar{j}_\varphi + \alpha \bar{B}_\varphi. \quad (2.21^*)$$

При моделировании структуры магнитного поля в тонком аккреционном диске эти уравнения решаются в некоторой конечной области, ограниченной плоскостями $z = \pm h$, при этом α -эффект сконцентрирован в окрестности плоскостей $z = \pm \xi h(\varpi)$ ($\xi < 1$). В астрофизических приложениях обычно ограничиваются рассмотрением случая, когда коэффициент спиральности $\alpha(z)$ является заданной нечётной функцией z , $\alpha(z) = -\alpha(-z)$ [26], например, ступенчатой функцией

$$\alpha(z) = \begin{cases} \alpha_0, & 0 < z < h; \\ 0, & z = 0; \\ -\alpha_0, & -h < z < 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Относительно уравнений (2.20) и (2.21) заметим следующее. Поскольку $\Delta A - A/\varpi^2 = -4\pi\mu_0 c^{-1} \bar{j}_\varphi = -\left((\partial / \partial \mathbf{x}) \times \bar{\mathbf{B}}_p \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi$, то в правой части уравнения (2.20) имеются два члена, содержащие $\bar{\mathbf{B}}_p$, и в зависимости от того, какой из них преобладает, получаются два типа турбулентного динамо, генерирующего дополнительную электродвижущую силу в законе Ома для средних полей. Если относительную величину α -эффекта охарактеризовать безразмерным числом $R_\alpha = \alpha_0 l / v_M^{turb}$, а относительную роль дифференциального вращения – числом $R_\omega = \left| (\partial \Omega / \partial \mathbf{x}) \right|_0 l^3 / v_M^{turb}$ (здесь нижний индекс «0» обозначает характерные значения соответствующих параметров, а величина l означает масштаб, характеризующий пространственные изменения турбулизованного поля), то по порядку величины отношение этих двух членов равно

$$\left| \varpi \left(\bar{\mathbf{V}}_p \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \Omega \right| / \left| \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{V}}_p \right| \propto R_\omega / R_\alpha = 1^2 \left| \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 / \alpha_0. \quad (2.23)$$

Таким образом, различные режимы генерации магнитного поля определяются соотношением этих безразмерных чисел. Если $R_\alpha \gg R_\omega$, то в (2.20) можно пренебречь членом с дифференциальным вращением. В этом случае α -эффект действует в качестве источника как полоидального поля $\bar{\mathbf{V}}_p$, так и, благодаря члену $\alpha \bar{\mathbf{V}}_\phi$ в уравнении (2.21), источником тороидального поля $\bar{\mathbf{V}}_\phi$. Подобного рода динамо, отличительной особенностью которого является двукратное действие α -эффекта, обычно называют « α^2 -динамо». В этом случае магнитные петли растягиваются и складываются в восьмёрку спиральными турбулентными потоками.

С другой стороны, если $R_\alpha \ll R_\omega$, то более эффективно становится растягивание магнитных петель дифференциальным вращением, а их складывание происходит за счёт α -эффекта (« $\alpha\omega$ -динамо»). В уравнении (2.20) доминирует тогда член с дифференциальным вращением, и в результате мы имеем

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_\phi}{\partial t} + \varpi \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{V}}_\phi \mathbf{V}_p}{\varpi} \right) = \varpi \left(\bar{\mathbf{V}}_p \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \Omega + v_M^{turb} \left(\Delta \bar{\mathbf{V}}_\phi - \frac{\bar{\mathbf{V}}_\phi}{\varpi^2} \right). \quad (2.20^{**})$$

В этом случае тороидальное поле генерируется дифференциальным вращением, а полоидальное поле определяется α -эффектом. В дифференциально вращающихся аккреционных дисках действует, как правило, $\alpha\omega$ -динамо [25]. Для $\alpha\omega$ -динамо простое перемасштабирование переменных позволяет связать два безразмерных числа R_α и R_ω в одно безразмерное динамо-число $D = R_\alpha R_\omega$, с помощью которого возможна приблизительная оценка вероятности самовозбуждения крупномасштабного магнитного поля в данном течении; при этом вероятность самовозбуждения сводится к требованию, чтобы динамо-число D превышало некоторое критическое значение D_{cr} , которое можно вычислить, найдя нетривиальные стационарные решения уравнения динамо. При малых динамо-числах магнитное поле затухает, а по достижению критического значения $D = D_{cr}$ наступает самовозбуждение.

Сделаем теперь некоторые оценки. Из максвелловского уравнения $(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0$ следует, что $|\bar{V}_\varpi| / |\bar{V}_z| \propto \varpi / h \gg 1$, откуда $|\bar{V}_\varpi| \gg |\bar{V}_z|$. Из (2.20*) вытекает, что $|\bar{\mathbf{V}}_p| \propto \alpha_0 (1/v_M^{turb}) |\bar{\mathbf{V}}_\phi|$, а из (2.21) следует, что

$|\bar{B}_\varphi| \propto \left(\left| \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right|_0 I^3 / v_M^{turb} \right) |\bar{B}_p|$; следовательно, для $\alpha \omega$ – динамо справедлива оценка $|\bar{B}_\varphi| / |\bar{B}_p| \propto \sqrt{\left| \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right|_0^2 / \alpha_0} \gg 1$, откуда $|\bar{B}_\varphi| \gg |\bar{B}_p| \propto |\bar{B}_\varpi| \gg |\bar{B}_z|$. Можно показать, что для реалистических коэффициентов магнитной диффузии в диске магнитные силы в уравнении (2.14) не могут значительно превышать вязкие силы [57]. Это условие совместно с оценкой (2.9) приводит к тому, что для тонких дисков в уравнении (2.20) адвективные члены и радиальные производные становятся малыми, и уравнения (2.20**) и (2.21*) для тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля в медленно вращающихся аккреционных дисках принимают вид

$$\varpi \bar{B}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + v_M^{turb} \frac{\partial^2 \bar{B}_\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.24)$$

$$-\alpha \bar{B}_\varphi + \frac{4\pi\mu_0}{c} v_M^{turb} \bar{j}_\varphi = 0, \quad \text{где} \quad \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{j}_\varphi = \frac{\partial \bar{B}_\varpi}{\partial z}. \quad (2.25)$$

В заключение этого раздела отметим, что по сравнительно давней оценке Пудрица [57], а с тех пор, по мнению автора, теория астрофизического динамо не получила существенного развития, критическое значение динамо-числа D_{cr} меньше 10, в то время как реальное значение D приближается к $(6/5\pi)M_A^{-2}$, где M_A – число Маха турбулентных движений. Поэтому $\alpha \omega$ –динамо действует лишь в том случае, когда турбулентность в диске «достаточно дозвуковая». Поскольку достоверно не известно, насколько турбулентная скорость меньше скорости звука в реальных условиях эволюции протопланетного диска, количественные результаты, полученные с учётом « $\alpha \omega$ –динамо», могут носить лишь приблизительный характер.

3. Модель тонкого протопланетного диска

Рассмотрим теперь тонкий (но оптически толстый) протопланетный диск, для которого в слое перпендикулярном к экваториальной плоскости пространственный масштаб изменения структурных параметров велик по сравнению с полутолщиной диска, т.е. величина $h(\varpi)$ мала по сравнению с ϖ для всех ϖ , $\partial h / \partial \varpi \approx h / \varpi \ll 1$. В этом случае характер течения проводящего дискового вещества (особенно в его верхнем МГД–активном слое) может быть проанализирован с использованием одномерных уравнений магнитной гидродинамики. Возможность понижения размерности задачи связана с дополнительными предположениями о симметрии определяю-

щих параметров задачи и о медлительном характере течения в плоскости слоя по сравнению со временем установления равновесия в вертикальном z -направлении. Далее мы будем предполагать, что плотность и давление, имея максимальное значение на центральной плоскости $z = 0$, убывают с высотой так, что на верхней и нижней поверхностях диска $\rho(\varpi, \pm h) = p(\varpi, \pm h) = 0$; при $z = 0$ вертикальная скорость дискового вещества $V_z(\varpi, z = 0) = 0$. Кроме этого, будем считать, что плотность, давление и компоненты скорости имеют следующую отражательную симметрию относительно экваториальной плоскости диска

$$\rho(\varpi, z) = \rho(\varpi, -z), \quad P(\varpi, z) = P(\varpi, -z),$$

$$V_\varpi(\varpi, z) = V_\varpi(\varpi, -z), \quad V_\varphi(\varpi, z) = V_\varphi(\varpi, -z), \quad V_z(\varpi, z) = -V_z(\varpi, -z). \quad (3.1)$$

Существующая магнитная связь между короной и характером формирования аккреционного диска сильно зависит от конфигурации магнитного поля \mathbf{B} в диске. В отсутствие сформировавшегося диска силовые линии внешнего магнитного поля (поля протозвезды) не имеют, как правило, φ -компоненты (т.е. лежат в меридиональных плоскостях), а вблизи экваториальной плоскости преобладает компонента \bar{B}_z . Однако, по мере формирования ионизованного диска, силовые линии, первоначально «вмороженные» во вращающуюся плазму, начинают испытывать сдвиг в азимутальном направлении φ , который приводит к появлению отличной от нуля компоненты \bar{B}_φ . В предположении непрерывности силовых линий дипольного поля \mathbf{B} при пересечении поверхности диска, можно сделать вывод, что радиальная и азимутальная компоненты магнитного поля должны быть одинаковыми по величине, но противоположными по направлению сверху и снизу от центральной плоскости диска. Таким образом, будем считать, что компоненты \bar{B}_ϖ и \bar{B}_φ нечётны по z , а компонента \bar{B}_z чётна; тогда:

$$\bar{B}_\varpi(\varpi, z) = -\bar{B}_\varpi(\varpi, -z), \quad \bar{B}_\varphi(\varpi, z) = -\bar{B}_\varphi(\varpi, -z), \quad \bar{B}_z(\varpi, z) = \bar{B}_z(\varpi, -z) \quad (3.2)$$

Прежде чем выполнить z -осреднение МГД-уравнений (2.8), (2.12), (2.13), (2.14) и (2.17) для турбулентного дискового вещества, выполним его для балансового уравнения общего вида (записанного в цилиндрической системе координат)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi J_{(A \varpi)})}{\partial \varpi} + \frac{\partial(J_{(A z)})}{\partial z} = S_{(A)}. \quad (3.3)$$

Здесь $J_{(A)}(t, \varpi, z)$, $S_{(A)}(t, \varpi, z)$ – соответственно поток и возникновение

величины $A(t, \varpi, z)$. Вводя обозначение

$$\langle A(\varpi, t) \rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} dz A(t, \varpi, z), \quad (3.4)$$

для осреднённого по вертикали параметра A и интегрируя (3.3) по вертикальной компоненте z от $-h(\varpi)$ до $h(\varpi)$, в результате получим

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} dz \frac{\partial (\varpi J_{(A\varpi)})}{\partial \varpi} + (J_{(Az)}^+ - J_{(Az)}^-) = \langle S_{(A)} \rangle,$$

или

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \langle J_{(A\varpi)} \rangle) - (J_{(A\varpi)}^+ - J_{(A\varpi)}^-) \frac{\partial h(\varpi)}{\partial \varpi} + (J_{(Az)}^+ - J_{(Az)}^-) = \langle S_{(A)} \rangle. \quad (3.5)$$

Здесь $J_{(A\varpi)}^+$, $J_{(Az)}^+$ ($J_{(A\varpi)}^-$, $J_{(Az)}^-$) – значения потоковых членов $J_{(A\varpi)}$, $J_{(Az)}$ на верхней, $+h(\varpi)$ (нижней, $-h(\varpi)$) границе диска. Поскольку для тонких дисков $J_{(A\varpi)} \gg J_{(Az)}$ и $\partial h(\varpi) / \partial \varpi = \alpha h(\varpi) / \varpi$, то первым поверхностным членом в выражении (3.5) можно пренебречь по сравнению со вторым. Таким образом, результат интегрирования общего балансового уравнения по z -координате приводит к выражению

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \langle J_{(A\varpi)} \rangle) + (J_{(Az)}^+ - J_{(Az)}^-) = \langle S_{(A)} \rangle, \quad (3.6)$$

которым мы далее воспользуемся при осреднении по вертикали исходных МГД-уравнений для турбулентного движения, заменяя при этом интегралы от произведений зависящих от z величин произведением осреднённых величин.

Уравнение неразрывности для тонкого диска. Осреднение по z уравнения (2.8) с учётом свойств отражательной симметрии (3.1) приводит к следующему «одномерному» уравнению сохранения массы тонкого диска

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \Sigma V_\varpi) = -2\bar{\rho}^+ \tilde{u}_z^+ \equiv S^+, \quad (3.7)$$

где

$$\Sigma(\varpi, t) \equiv \langle \bar{\rho} \rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} dz \bar{\rho}(t, \varpi, z) \quad (3.8)$$

– поверхностная плотность диска на расстоянии ϖ от центра протозвезды (масса, содержащаяся в столбе единичного сечения, ориентированном перпендикулярно экваториальной плоскости диска); $\bar{\rho}^+(\varpi) \equiv \bar{\rho}(\varpi, z = +h(\varpi))$; $V_z^+(\varpi) \equiv V_z(\varpi, z = +h(\varpi))$; $S^+(\varpi)$ – увеличение в единицу времени поверхностной плотности за счёт выпадения вещества на диск из аккреционной оболочки. Заметим, что для получения полной картины эволюции протопланетного диска необходимо принимать во внимание внешние источники аккреции и оттоки вещества с его поверхности.

Радиальная компонента уравнения движения для тонкого диска. При осреднении по вертикали остальных гидродинамических уравнений мы воспользуемся следующим операторным соотношением

$$\Sigma \frac{D\langle A \rangle}{Dt} + S^+\langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial t}(\langle A \rangle \Sigma) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi}(\varpi \Sigma V_\varpi \langle A \rangle), \quad (3.9)$$

которое можно получить, комбинируя (2.16) и (3.7). Здесь и далее использовано следующее обозначение

$$\frac{D\langle A \rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} + V_\varpi \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial \varpi} \quad (3.10)$$

для субстанциональной производной осреднённого по вертикали движения.

Осреднённая по z радиальная компонента (2.13*) уравнения движения, с учётом (3.9), а также свойств (3.2) отражательной симметрии магнитного поля, принимает вид

$$\begin{aligned} \Sigma \left(\frac{D}{Dt} \langle V_\varpi \rangle - \varpi \langle \Omega \rangle^2 \right) + S^+(\langle V_\varpi \rangle - V_\varpi^+) = -\Sigma \frac{GM_\odot}{\varpi^2} - \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\langle P + \frac{\bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right\rangle - \\ - \frac{1}{8\pi\mu_0} \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \langle \bar{B}_\varphi^2 - \bar{B}_\varpi^2 \rangle \right\} + \frac{\bar{B}_\varpi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \langle V_\varpi \rangle = \frac{1}{\Sigma} \int_{-h}^{+h} \bar{\rho} V_\varpi dz = V_\varpi(\varpi); \quad \langle \bar{B}_\varphi^2 - \bar{B}_\varpi^2 \rangle \cong 2h(\varpi) \left(\bar{B}_\varphi^2 - \bar{B}_\varpi^2 \right) \Big|_{z=0}; \\ \langle P + \bar{B}_z^2 / 8\pi\mu_0 \rangle \cong 2h(\varpi) \left(P + \bar{B}_z^2 / 8\pi\mu_0 \right) \Big|_{z=0}. \end{aligned}$$

Для очень тонких дисков, когда $h(\varpi) \rightarrow 0$, уравнение (3.11) сводится к виду

$$\langle \Omega \rangle^2 \cong \Omega_{K,mid}^2 - \frac{1}{\varpi \Sigma} \frac{\bar{B}_\varpi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0}. \quad (3.12)$$

Здесь $\langle \Omega \rangle = \Sigma^{-1} \int_{-h}^{+h} \bar{\rho} \Omega(\varpi, z) dz$ – осреднённая по толщине диска угловая скорость вращения дискового вещества; $\Omega_{K,mid}(\varpi) \equiv \sqrt{GM_\odot / \varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость вращения в центральной плоскости диска.

Таким образом, в ионизованном диске гравитационная сила уравновешивается не только центростремительной силой, но также и силой тензора магнитных натяжений $\mathbf{T}_{av}^M \equiv \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}} / 4\pi\mu_0$ для осреднённой составляющей магнитного поля. В пределе нулевой толщины диска величины \bar{B}_ϖ и \bar{B}_φ имеют разрыв при пересечении диска, в результате чего возникает конечная сила магнитных натяжений (подобная силе, поддерживающей в равновесии солнечные протуберанцы), которая является новой особенностью взаимодействия диска и короны. Важно также отметить, что в рассматриваемом случае, появляющаяся в уравнении (3.12) (ϖ, z) -компонента этой силы $(\bar{B}_\varpi^+ \bar{B}_z / 2\pi\mu_0)$, приводит к отклонению скорости вращения дискового вещества от кеплеровского закона вращения. В пределе нулевого магнитного поля соотношение (3.12) даёт для угловой скорости вращения $\langle \Omega \rangle$ кеплеровский закон.

Азимутальная компонента уравнения движения для тонкого диска. Осреднение по толщине диска уравнения (2.14*) с учётом формулы (3.9) приводит к следующему закону сохранения углового момента импульса дискового вещества

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\langle J \rangle \Sigma)}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \Sigma V_\varpi \langle J \rangle - \varpi^3 \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} \right) - \\ - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi^2 \frac{\langle \bar{B}_\varphi \bar{B}_\varpi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) = \varpi \frac{\bar{B}_\varphi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0} + S^+ J^+. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $\langle \bar{B}_\varphi \bar{B}_\varpi \rangle = 2 \int_0^h \bar{B}_\varphi \bar{B}_\varpi dz$; $\varpi^3 \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \partial \langle \Omega \rangle / \partial \varpi$ – осреднённый момент вязкой силы на радиусе ϖ ; $\langle J \rangle = \varpi^2 \langle \Omega \rangle$ – осреднённый удельный угловой момент импульса вещества, находящегося на расстоянии ϖ ; J^+ – удельный угловой момент импульса вещества, подающего на верхнюю границу

диска; $S^+ = -2\bar{\rho}^+ V_z^+$; $S^+ J^+$ – скорость изменения на расстоянии ϖ количества движения дискового вещества, связанного с притоком из аккреционной оболочки. Осреднённый по z коэффициент турбулентной вязкости определяется формулой [см. (41)]

$$\langle v_K^{turb} \rangle = \frac{4}{9} \alpha_s L^{*2} \varpi \left| \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} \right|,$$

$$L^*(\varpi) \equiv h_{eff}(\varpi) \left\{ 1 - (\text{Ri}_K - \text{Ri}_M) / \text{Pr}_K^{turb} \right\}^{0.25}, (0 < \alpha_s < 1). \quad (3.14)$$

Заметим, что в задачах, не рассматривающих взаимодействия диска и короны, в уравнении (3.13) можно опустить предпоследний член, полагая, что на границе диска $\bar{B}_\varphi^+ = \bar{B}_\varphi(\varpi, z = \pm h) = 0$. В случае квазикеплеровского вращения диска, когда $\langle \Omega \rangle \cong \Omega_K$ и $\partial \langle \Omega \rangle / \partial t = 0$, из балансового уравнения для момента количества движения (3.13) следует выражение для потока массы

$$\varpi \Sigma V_\varpi = -3\sqrt{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\sqrt{\varpi} \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle - \frac{\sqrt{\varpi}}{\Omega_K} \frac{\langle \bar{B}_\varphi \bar{B}_\varpi \rangle}{6\pi\mu_0} \right) + \frac{\varpi \bar{B}_\varphi^+ \bar{B}_z}{\pi\mu_0 \Omega_K} - 2S^+ \varpi^2 \left(1 - \frac{J^+}{\varpi^2 \Omega_K} \right), \quad (3.15)$$

справедливое для проводящего аккреционного диска. Это выражение в пределе нулевого магнитного поля и в пренебрежении потоком вещества на диск ($S^+ = 0$) сводится к классическому результату для радиальной скорости V_ϖ кеплеровского диска

$$V_\varpi = -\frac{3}{\Sigma\sqrt{\varpi}} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\sqrt{\varpi} \langle v_K^{turb} \rangle \Sigma \right). \quad (3.15^*)$$

Подстановка (3.15) в (3.7) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \sqrt{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\sqrt{\varpi} \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle - \frac{\sqrt{\varpi}}{\Omega_K} \frac{\langle \bar{B}_\varphi \bar{B}_\varpi \rangle}{6\pi\mu_0} \right) \right\} - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{\varpi}{\Omega_K} \frac{\bar{B}_\varphi^+ \bar{B}_z}{\pi\mu_0} \right) \quad (3.16)$$

для определения поверхностной плотности $\Sigma(\varpi)$ в случае проводящего диска. Уравнение (3.16) в пределе нулевого магнитного поля сводится к хорошо известному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \Sigma(\varpi)}{\partial t} - \frac{3}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left[\sqrt{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\sqrt{\varpi} \langle v_K^{turb} \rangle \Sigma(\varpi) \right) \right] = 0,$$

показывающему, что поверхностная плотность диска может изменяться по радиусу ϖ только в вязкостной шкале времени $t_v \propto \varpi^2 / \langle v_K^{turb} \rangle$.

Вертикальная компонента уравнения движения для тонкого диска. Для получения осреднённого по z уравнения движения перепишем (2.15*), с учётом оценки (2.24), в виде

$$\bar{\rho} \frac{D V_z}{D t} = -\bar{\rho} z \Omega_{K, mid}^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{\bar{B}_\varpi^2 + \bar{B}_\varphi^2}{8\pi\mu_0} \right).$$

Для эффективной полутолщины диска и осреднённой по z вертикальной скорости газа используем следующие определения:

$$h_{eff} \equiv \frac{2}{\Sigma} \int_0^{+h} \bar{\rho} z dz \quad \text{и} \quad V_{z, av} \equiv \frac{2}{\Sigma} \int_0^{+h} \bar{\rho} V_z dz. \quad (3.17)$$

Принимая теперь во внимание, что на границе поверхности диска $P|_{z=\pm h} = 0$, а на центральной плоскости диска $V_z|_{z=0} = 0$, $\bar{B}_\varpi|_{z=0} = 0$, $\bar{B}_\varphi|_{z=0} = 0$, в результате осреднения (3.16) (при учёте (3.9)) получим

$$\Sigma \frac{D}{D t} \left(\frac{V_{z, av}}{2} \right) + \frac{S^+}{2} (V_{z, av} - V_z^+) = -\Sigma \frac{G M_\odot h_{eff}}{2\varpi^3} + P|_{z=0} - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \quad (3.18)$$

Отсюда для медленного (по сравнению со временем установления равновесия в вертикальном направлении) течения газа в плоскости диска, когда справедливо неравенство $V_{z, av} / V_z^+ \ll 1$, следует

$$\bar{\rho}^+ (V_z^+)^2 = P|_{z=0} - \Sigma \frac{G M_\odot h_{eff}}{2\varpi^3} - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \quad (3.19)$$

В предельном случае $h_{eff} \rightarrow 0$ это соотношение сводится к следующему:

$$P|_{z=0} = \bar{\rho}^+ (V_z^+)^2 + \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \quad (3.19^*)$$

Если теперь учесть, что в приближении тонкого проводящего диска справедлива оценка, $\Sigma(\varpi) \cong 2h_{eff}\bar{\rho}_0(\varpi)$, где $\bar{\rho}_0(\varpi) \equiv \bar{\rho}(\varpi, z=0)$, то из (3.17), в случае когда $V_z^+ = 0$, следует соотношение для определения h_{eff}

$$\frac{h_{eff}^2 G M_\odot}{\varpi^3} = \left(\frac{p^{tot}}{\bar{\rho}} \right) \Big|_{z=0} - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0\bar{\rho}_0},$$

или

$$h_{eff}^2 = \frac{c_{s0}^2}{\gamma\Omega_{K,mid}^2} \left(1 - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\varphi^+)^2}{8\pi\mu_0\bar{\rho}_0 c_s^2} \right). \quad (3.20)$$

Здесь $c_{s0} \equiv \sqrt{\gamma(P/\bar{\rho})|_{z=0}}$ – скорость звука, соответствующая полному давлению в центральной плоскости диска. В случае, если $(\bar{B}_\varpi^{+2} + \bar{B}_\varphi^{+2})/8\pi\mu_0\bar{\rho}_0 \ll c_s^2$, то эффективная полутолщина проводящего диска определяется точно такой же формулой, как и для неэлектропроводящего диска, т.е.

$$h_{eff}(\varpi) = \frac{c_{s0}(\varpi)}{\sqrt{\gamma\Omega_{K,mid}(\varpi)}} \cong \left(\frac{R\Gamma\varpi^3}{GM_\odot\mu} \right)^{1/2}. \quad (3.20^*)$$

Уравнение баланса полной энергии для тонкого диска. Для тонкого аккреционного диска в выражении для полной энергии системы

$$\langle U \rangle_{tot}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle E \rangle + |\bar{\mathbf{B}}|^2 / 8\pi\mu_0\bar{\rho} + |\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2 + \Psi_G + \langle b \rangle_\Sigma$$

можно оставить в рассмотрении только слагаемые, связанные с гравитационной $\Psi_G = -GM_\odot/\varpi$ и центробежной $\varpi^2\Omega^2/2$ энергиями; можно также пренебречь потоком энтальпии [58]. Тогда осреднённое по вертикали z энергетическое уравнение (2.18), при использовании соотношения (3.9), принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Sigma \left(\frac{\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) \right\} &= -\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi \Sigma V_\varpi \left(\frac{\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) \right\} + \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\varphi^+}{2\pi\mu_0} \varpi \langle \Omega \rangle + \\ &+ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \langle \Omega \rangle \left(\Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \varpi \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_\varpi \bar{B}_\varphi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) \right\} + S^+ \left(\frac{\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right)^+ + \langle Q_{rad} \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В правой части этого уравнения находятся члены, равные дивергенции потока кинетической и гравитационной энергии (первый член), вязкому потоку энергии, возникающей за счёт диссипации турбулентности (второй член), потоку вектора Пойнтинга [см. (1.19*)], описывающего обмен электромеханической энергией с короной (третий член), притоку этих энергий в диск из аккреционной оболочки (предпоследний член). Величина

$$\langle Q_{rad} \rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} Q_{rad} dz = -2q_{R,z}^+(\varpi), \quad q_{R,z}^+(\varpi) \equiv q_{R,z} \Big|_{z=h} \quad (3.22)$$

связана с теплом, которое излучается наружу (посредством излучения) с верхней и нижней поверхностей диска при радиусе ϖ . Здесь [ср. (1.18*)]

$$Q_{rad}(\varpi, z) = -\frac{\partial q_{R,z}}{\partial z}, \quad q_{R,z}(\varpi, z) = -\frac{4\sigma_B}{3\kappa(\varpi, z)\bar{\rho}} \frac{\partial \langle T \rangle^4}{\partial z}. \quad (3.23)$$

Заметим, что поскольку диск тонкий, то излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении. Так как на поверхности диска $\bar{p} \Big|_{z=\pm h} = \langle T \rangle \Big|_{z=\pm h} = 0$, то из второй формулы (3.23) следует, что

$$\int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi, z) \bar{\rho}(\varpi, z) q_{R,z}(\varpi, z) dz = \frac{4\sigma_B}{3} \langle T \rangle_0^4(\varpi), \quad (3.24)$$

где принято обозначение $\langle T \rangle_0(\varpi) \equiv \langle T \rangle(\varpi, 0)$. Аппроксимируем теперь интеграл в выражении (3.24) следующим образом

$$\int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi, z) \bar{\rho}(\varpi, z) q_{R,z}(\varpi, z) dz \cong q_{R,z}^+(\varpi) \tau(\varpi), \quad (3.25)$$

где

$$\tau(\varpi) = \int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi, z) \bar{\rho}(\varpi, z) dz = \Sigma \langle \kappa \rangle / 2, \quad \langle \kappa \rangle = \frac{K \Sigma}{2h_{eff} \langle T \rangle_0^{7/2}} \quad (3.26)$$

– соответственно оптическая толщина, вычисленная на основе полной осреднённой по Росселанду непрозрачности κ и формула Крамерса для осреднённого по вертикали коэффициента непрозрачности $\langle \kappa \rangle$; тогда (3.24) можно переписать так

$$q_{R,z}^+(\varpi) = \frac{4\sigma_B}{3\tau(\varpi)} \langle T \rangle_0^4(\varpi) = \sigma_B T_{eff}^4(\varpi), \quad (3.27)$$

откуда следует важное для тонких излучающих радиацию дисков соотношение

$$\langle Q_{rad} \rangle = -2q_{R,z}^+(\varpi) = -2\sigma_B T_{eff}^4(\varpi), \quad (3.28)$$

где $T_{eff}(\varpi)$ – некоторая эффективная температура верхней (нижней) границы диска.

Итак, приведённых гидродинамических уравнений вполне достаточно для полного решения эволюционной задачи для диска [11,12] в том случае, когда задано магнитное поле как функция расстояния от центра ϖ . Действительно, после решения уравнений (3.12) и (3.13) относительно переменных $\Sigma(\varpi)$ и $\langle \Omega \rangle(\varpi)$, закон сохранения массы (3.7) позволяет найти в этом случае радиальную скорость $V_{\varpi}(\varpi)$, а уравнение энергии (3.21) позволяет определить потерю диска на излучение.

В общем же случае необходимо знание пространственного распределения среднего магнитного поля в диске, которое складывается из затравочного начального поля протозвезды \mathbf{B}_{\odot} и существенной части, сгенерированной в дифференциально вращающемся диске механизмом $\alpha\omega$ -динамо. Магнитное поле может быть рассчитано путём самосогласованного решения приведённых выше гидродинамических уравнений и задачи динамо (уравнения (2.24) и (2.25)). Решения такого рода задач приведены в работах Пудрица [57,59], в которых, в частности, доказано, что действие динамо в аккреционных дисках вполне вероятно. В частности, им найдено распределение поля $\bar{\mathbf{B}}$ в собственных функциях задачи динамо, когда его компоненты выражаются через функции Бесселя с радиальным масштабом, заключённым между толщиной диска и некоторыми большими значениями, особенно вблизи порога генерации.

Вместе с тем, как уже отмечалось выше, в реальных условиях эволюции протопланетного диска, количественные результаты, полученные с учётом механизма « $\alpha\omega$ -динамо» (эффективно действующего лишь в том случае, когда турбулентность в диске достаточно дозвуковая), могут носить лишь приближённый характер, поскольку в настоящее время в астрофизической литературе отсутствуют надёжные оценки турбулентной скорости в протопланетном диске на самых ранних этапах его существования.

В связи с этим нам представляется целесообразным анализ относительно простых моделей распределения осреднённого магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$ в диске, когда его полоидальная компонента \bar{B}_p в точности совпадает с внешним магнитным полем прото-Солнца. Для моделирования \bar{B}_p используем дипольное поле [60]. Тогда

$$A = \frac{\Psi(\varpi, z)}{\varpi}, \quad \Psi(\varpi, z) = \frac{B_{\otimes} R_{\otimes}^3}{2} \frac{\varpi^2}{(\varpi^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.29)$$

где Ψ – полоидальный магнитный поток, постоянный в осесимметричном случае на магнитной поверхности; R_{\otimes} – солнечный радиус, B_{\otimes} – средняя

напряжённость магнитного поля на поверхности протосолнца, и полоидальный вектор $\bar{\mathbf{B}}_p$ принимает вид

$$\bar{\mathbf{B}}_p(\varpi, z) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times (A(\varpi, z) \mathbf{e}_\varphi) \cong \frac{3B_\otimes R_\otimes^3}{2} \frac{z\varpi}{(\varpi^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_\varpi - \frac{B_\otimes R_\otimes^3}{2} \frac{\varpi^2 - 2z^2}{(\varpi^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z. \quad (3.30)$$

В этом случае для определения тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля в диске (когда $|z|/\omega \ll 1$) могут быть использованы следующие уравнения:

$$\bar{B}_z = -\frac{B_\otimes}{2} \left(\frac{R_\otimes}{\varpi} \right)^3, \quad \bar{B}_\varpi = \frac{3B_\otimes}{2} \left(\frac{R_\otimes}{\varpi} \right)^3 \frac{z}{\varpi}, \quad (\bar{B}_z \gg \bar{B}_\varpi), \quad (3.31)$$

$$v_M^{turb} \frac{\partial^2 \bar{B}_\varphi}{\partial z^2} = -\varpi \bar{B}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad v_M^{turb} = \frac{v_K^{turb}}{Pr_M^{turb}}. \quad (3.32)$$

Заметим, что если дважды проинтегрировать уравнение индукции (3.32) по вертикали от z до ∞ и учесть, что

$$\Omega = \begin{cases} \Omega, & |z| < h, \\ \Omega_\otimes, & |z| > h, \end{cases} \quad \bar{B}_\varphi(\varpi, 0) = 0 \text{ и } \partial \bar{B}_\varphi / \partial z = 0, \text{ когда } \varpi \gg |z| > h \quad (3.33)$$

– условие, определяющее дисковую поверхность, то в результате получим алгебраическое соотношение для определения тороидальной компоненты магнитного поля

$$\bar{B}_\varphi(\varpi, z) = \frac{\varpi \bar{B}_z}{v_M^{turb}} (\Omega_\otimes - \Omega) z, \quad |z| < h, \quad (3.34)$$

где Ω_\otimes – угловая скорость Солнца. Результат осреднения (3.34) по вертикали, с использованием (3.17), даёт

$$\langle \bar{B}_\varphi \rangle = \frac{\varpi \bar{B}_z}{\langle v_M^{turb} \rangle} (\Omega_\otimes - \langle \Omega \rangle) h_{eff}, \quad \langle v_M^{turb} \rangle = \frac{\langle v_K^{turb} \rangle}{Pr_M^{turb}}. \quad (3.35)$$

Стационарное состояние проводящего диска. Известно, что в протопланетном диске, особенно для внутренней его части ($\varpi \leq 10$ а.е.), довольно быстро, по сравнению со временем его динамической эволюции, устанавливается квазистационарный режим, с не зависящим от переменной ϖ и направленным внутрь полным потоком массы [50]. Получим

здесь основные МГД–уравнения, описывающие структуру протопланетного аккреционного проводящего диска в стационарном состоянии.

Стационарное уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \Sigma V_{\varpi}) = S^+ = -2\bar{\rho}^+ \langle \mathbf{u} \rangle_z^+ \quad (3.36)$$

Если ввести обозначение

$$\dot{M}_A(\varpi) \equiv 2\pi\varpi\Sigma(-V_{\varpi}) \quad (3.37)$$

(здесь множитель 2π появляется за счёт осреднения по азимуту, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) для скорости аккреции вещества на диск (полный поток массы из аккреционной оболочки), то уравнение (3.36) запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\dot{M}_A(\varpi) \right) = -2\pi\varpi S^+ = 4\pi\varpi \bar{\rho}^+ \langle \mathbf{u} \rangle_z^+ = -\frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\dot{M}_W(\varpi) \right), \quad (3.38)$$

где

$$\dot{M}_W(\varpi) \equiv 2\pi\varpi \int_{\varpi}^{\infty} S^+ d\varpi = -4\pi\varpi \int_{\varpi}^{\infty} (\bar{\rho}^+ \langle \mathbf{u} \rangle_z^+) d\varpi \quad (3.39)$$

– скорость утечки вещества из диска в аккреционную оболочку. Из (3.38) следует, что $\dot{M}_A(\varpi) + \dot{M}_W(\varpi) = const \equiv \dot{M}$, где $\dot{M} = \dot{M}_A(\infty)$ – так называемый, темп аккреции. Тогда

$$2\pi\varpi\Sigma(-V_{\varpi}) \equiv \dot{M}_A = \dot{M} - \dot{M}_W \equiv \dot{M} - 4\pi\varpi \int_{\varpi}^{\infty} (\bar{\rho}^+ \langle \mathbf{u} \rangle_z^+) d\varpi. \quad (3.40)$$

Заметим, что в астрофизической литературе существует немало количество феноменологических моделей, связывающих между собой величины

$\dot{M}_A(\varpi)$ и \dot{M} (см., например, [62]).

Из выражения (3.12) для радиальной компоненты уравнения движения проводящего диска следует, что скорость его углового вращения отличается от кеплеровской

$$\langle \Omega \rangle^2 = \Omega_{K,mid}^2 - \frac{1}{\varpi \Sigma} \frac{\bar{B}_{\varpi}^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0}, \quad \text{где } \bar{B}_{\varpi}^+ \equiv \bar{B}_{\varpi}(\varpi, h). \quad (3.41)$$

Осреднённое по вертикали азимутальное уравнение движения (3.13*) в стационарном случае при использовании выражения (3.10) принимает вид

$$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \Sigma V_{\varpi} \langle J \rangle - \varpi^3 \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} - \varpi^2 \frac{\langle \bar{B}_{\phi} \bar{B}_{\varpi} \rangle}{4\pi\mu_0} \right) = \varpi \frac{\bar{B}_{\phi}^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0} + S^+ J^+, \quad (3.42)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \dot{M}_A \varpi^2 \langle \Omega \rangle + 2\pi\varpi^2 \left(\varpi \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_{\phi} \bar{B}_{\varpi} \rangle}{4\pi\mu_0} \right) \right\} = -\varpi^2 \frac{\bar{B}_{\phi}^+ \bar{B}_z}{\mu_0} + J^+ \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\dot{M}_A \right),$$

где $J^+ = \varpi^2 \Omega^+ = \varpi^2 \Omega(\varpi, h)$, $S^+ \equiv -2\bar{\rho}^+ \langle u \rangle_z^+ = -2\bar{\rho}(\varpi, h) \langle u \rangle_z(\varpi, h)$. При интегрировании (3.42) по ϖ от внутреннего радиуса диска ϖ_i до ϖ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \dot{M}_A \varpi^2 \langle \Omega \rangle + 2\pi\varpi^2 \left(\varpi \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_{\phi} \bar{B}_{\varpi} \rangle}{4\pi\mu_0} \right) + \\ & + \frac{1}{\mu_0} \int_{\varpi_i}^{\varpi} \varpi^2 \bar{B}_{\phi}^+ \bar{B}_z d\varpi - \int_{\varpi_i}^{\varpi} \varpi^2 \Omega^+ \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\dot{M}_A \right) d\varpi = const, \end{aligned} \quad (3.43)$$

которое служит для определения скорости углового вращения $\langle \Omega \rangle$ в общем случае МГД-активного аккреционного диска. В пределе нулевого магнитного поля, когда соотношение (3.41) даёт кеплеровский закон вращения, из уравнения (3.43), в пренебрежении потоком аккрецирующего вещества на диск, $S^+ = 0$, следует

$$\dot{M} \varpi^2 \Omega_{K,mid} + 2\pi\varpi^3 \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \frac{\partial \Omega_{K,mid}}{\partial \varpi} = const = J, \quad (3.44)$$

где J – полный радиальный поток углового момента, связанный с вкладами от аккрецирующего на диск вещества и вязкого перераспределения. Поскольку диск граничит почти с поверхностью звезды, то можно огрублённо принять $\varpi_i \cong R_{\otimes}$; тогда константа J определяется формулой

$J = \dot{M} R_{\otimes}^2 \Omega_K(R_{\otimes})$ [56]. Уравнение (3.44) в этом случае сводится к хорошо известному результату для вязких дисков

$$\Sigma \langle v_K^{turb} \rangle = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{\otimes}}{\varpi} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.45)$$

Из (3.45), при учёте «новой» формулы (3.14) для коэффициента $\langle v_K^{turb} \rangle$, можно определить радиальную скорость вещества в диске

$$V_{\varpi} = -\frac{3\langle v_K^{turb} \rangle}{2\varpi} \left[1 - \left(\frac{R_{\otimes}}{\varpi} \right)^{1/2} \right]^{-1} = -\alpha_s h_{eff}^2 \left(\frac{1 - Ri_K}{Pr_K^{turb}} \right)^{1/2} \frac{\Omega_{K,mid}}{\varpi} \left[1 - \left(\frac{R_{\otimes}}{\varpi} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (3.46)$$

Осреднённая по z вертикальная компонента уравнения движения (3.19), позволяет найти определяемую формулой (3.17) эффективную толщину h_{eff} диска

$$h_{eff}(\varpi) = \frac{2}{\Sigma \Omega_{K,mid}^2} \left(P_0 - \bar{\rho}^+ (V_z^+)^2 - \frac{(\bar{B}_{\varphi}^+)^2}{8\pi\mu_0} \right), \quad (3.47)$$

где $P_0 = P_0(\varpi) \equiv P(\varpi, z=0)$. Это выражение отличается от стандартной формулы для непроводящего диска наличием двух дополнительных слагаемых (2-е и 3-е), способствующих истончению проводящего диска за счёт аккреции и присутствия магнитного поля.

Наконец, уравнение баланса полной энергии (3.21) с учётом соотношения (3.9) в стационарном случае может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \varpi \Sigma V_{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{1}{2} \varpi^2 \langle \Omega \rangle^2 - \frac{GM_{\odot}}{\varpi} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \langle \Omega \rangle \left(\Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \varpi \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_{\varpi} \bar{B}_{\varphi} \rangle}{4\pi\mu_0} \right) \right\} + \\ &+ 2\varpi^2 \frac{\bar{B}_z \bar{B}_{\varphi}^+}{4\pi\mu_0} \langle \Omega \rangle + \frac{1}{2} S^+ \varpi \left\{ \varpi^2 (\Omega^2)^+ - \varpi^2 \langle \Omega \rangle^2 \right\} + \varpi \langle Q_{rad} \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle Q_{rad} \rangle = -2q_{R,z}^+(\varpi)$. Комбинация этого уравнения и, умноженного на $\langle \Omega \rangle$ стационарного уравнения (3.13) приводит к

$$\begin{aligned} -\Sigma V_{\varpi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2)}{\partial \varpi} - \langle \Omega \rangle \varpi^2 \frac{\partial (\langle \Omega \rangle)}{\partial \varpi} + \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{GM_{\odot}}{\varpi} \right) \right) &= \\ = \varpi^2 \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \left(\frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} \right)^2 + \varpi \frac{\langle \bar{B}_{\varpi} \bar{B}_{\varphi} \rangle}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + 2 \frac{\bar{B}_z \bar{B}_{\varphi}^+}{4\pi\mu_0} \varpi \langle \Omega \rangle + \\ + S^+ \left\{ \left(\frac{1}{2} \varpi^2 \Omega^2 \right)^+ + \left(\frac{1}{2} \varpi^2 \langle \Omega \rangle^2 \right) - \langle \Omega \rangle J^+ \right\} + \langle Q_{rad} \rangle. \quad (3.48) \end{aligned}$$

В случае квазикеплеровского диска левая часть этого уравнения обращается в нуль; тогда из (3.48) следует соотношение, связывающее коэф-

коэффициент турбулентной вязкости $\langle v_K^{turb} \rangle$ с эффективной температурой T_{eff} излучающего диска

$$\sigma_B T_{eff}^4(\varpi) = \frac{9}{8} \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle \Omega_K^2 - \frac{3}{2} \Omega_K \int_0^h \frac{\bar{B}_\phi \bar{B}_\varpi}{4\pi\mu_0} dz + \varpi \Omega_K \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\phi^+}{4\pi\mu_0} + \frac{1}{2} S^+ \varpi^2 \Omega_K^2 \left(1 - \frac{J^+}{\varpi^2 \Omega_K} \right). \quad (3.49)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения соответствует нагреву дифференциально вращающегося диска механизмом вязкой диссипации энергии турбулентности, второй член связан с диссипацией среднего движения под влиянием тензора натяжений осреднённой составляющей магнитного поля, третий член описывает энергетическое взаимодействие с короной, последний член соответствует нагреву диска веществом, падающим на него из аккреционной оболочки. Формула (3.49) обобщает на рассматриваемый здесь случай проводящего и аккрецирующего диска известное соотношение, полученное для вязких дисков

$$\frac{4\sigma_B}{3\tau(\varpi)} \langle T \rangle_0^4(\varpi) = \frac{9}{8} \frac{GM_\odot}{\varpi^3} \Sigma \langle v_K^{turb} \rangle = \frac{3GM_\odot \dot{M}}{8\pi\varpi^3} \left[1 - \left(\frac{R_\odot}{\varpi} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.50)$$

Заметим, что в некоторых частных случаях стационарная задача моделирования структуры проводящего аккреционного диска может быть решена аналитически [32].

Итак, представленная в этой главе система магнитогидродинамических уравнений позволяет самосогласованно моделировать структуру и эволюцию турбулентной космической плазмы в тонком протопланетном диске и в связанной с ним замагниченной короне на ранней стадии их образования. К ключевым задачам, реконструирующим до известной степени процесс эволюции проводящего диска, можно отнести: эволюционную модель переноса углового момента в диске, самосогласованную модель структуры турбулизованного диска и его корональных областей с учётом нагрева короны и различных темпов аккреции; модель струйного истечения плазмы (уносящей угловой момент) из диска с учётом магнитного силового взаимодействия между диском и его короной, эволюционную модель дифференциально вращающегося протопланетного диска, с учётом генерации крупномасштабного магнитного поля механизмом турбулентного $\alpha\omega$ -динамо, и, наконец, исследование плазменных неустойчивостей в слабо ионизованном диске с омической диссипацией, в частности, магниторотационной неустойчивости в центральной плоскости дифференциально вращающегося диска.

Заключение

За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты. Математическое моделирование является, по существу, единственным методом, позволяющим реконструировать соответствующие процессы с учётом ограничений, накладываемых доступными наблюдательными данными эволюции околозвёздных дисков на разных стадиях. Сценарий такой эволюции в общем случае включает в себя аккрецию на диск протозвёздного вещества и его температурное фракционирование, последовательное образование фаз в гетерогенной системе солнечного состава при её охлаждении, сжатие и уплотнение диска вплоть до возникновения гравитационной неустойчивости пылевого субдиска, образующегося в экваториальной плоскости, образование первичных пылевых кластеров, служащих основой зародышей планет. Очевидно, столь сложный характер процессов требует, прежде всего, разработки адекватной теоретической основы, на базе которой строятся упомянутые модели.

Рассмотренный здесь подход к моделированию астрофизических протопланетных дисков даёт возможность проследить несколько важных этапов образования в общем случае газопылевого диска вокруг молодого Солнца, проходящего стадию Т–Тельца, его дальнейшую динамическую, термическую и космохимическую эволюцию, включающую этапы конденсации и уплотнения вещества, вплоть до образования пылевых кластеров, служащих зародышами при формировании планетезималей, и в дальнейшем планетных тел. К сожалению, современная вычислительная математика всё ещё не позволяет провести в полном объёме комплексный анализ крупномасштабных процессов в протопланетном диске, отвечающий этим теоретическим разработкам, поэтому численные модели нескольких последовательных этапов эволюции протопланетного диска строятся с использованием целого ряда упрощений [61]. Проведённое здесь исследование является необходимым звеном для адекватного моделирования эволюции проводящего турбулизованного диска, когда для получения достоверных результатов особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым численно уравнениям.

Литература

- [1] **Колесниченко А.В.** Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // *Астрон. Вестник*. 2000. Т. 34. С. 516-528.
- [2] **Колесниченко А.В.** Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске// *Астрон. Вестник*, 2001. Т. 35. С. 139-155.
- [3] **Колесниченко А.В.** Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем// В сб. “Современные проблемы механики и физики космоса”. М.: Физматлит. 2003. С. 123-162.
- [4] **Колесниченко А.В.** Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учёте флуктуаций диссипации энергии// *Астрон. Вестник*. 2004. Т. 38. С. 144-170.
- [5] **Колесниченко А.В.** О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности// *Математ. мод.* 2005. Т. 17. № 10. С. 47-79.
- [6] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твёрдых частиц на турбулентность в диске// *Астрон. Вестник*. 2006. Т. 40. С. 1-62.
- [7] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке// *Астрон. Вестник*. 2007. Т. 41. С. 3-23.
- [8] **Колесниченко А.В.** Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического моделирования. М.: ЛЕНАНД, 2017. 400 с (Синергетика: от прошлого к будущему. № 79).
- [9] **Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.** Mechanics of turbulence of multicomponent gases// Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London. 2002. 373 p.
- [10] **Marov M.Ya. and. Kolesnichenko A.V.** Chaotic and ordered structures in the developed turbulence// In: “Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena” (eds.: A.M. Fridman and M.Ya. Marov), Springer, 2006. P. 23-54.
- [11] **Sano T., Miyama S.M.** Magnetorotational instability in Protoplanetary disks. I. On the global stability of weakly ionized disks with ohmic dissipation // *Astrophys. J.* 1999. V. 515. P. 776-786.
- [12] **Sano T., Miyama S.M., Umebayashi T., Nakano T.** Magnetorotational instability in Proto planetary disks. II. Ionization state and unstable regions// *Astrophys. J.* 2000. V. 543. P. 486-501.
- [13] **Velikhov E.P.** Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic fluid// *Sov. Phys. JETP*. 1959. V. 9. P. 995-998.
- [14] **Hawley J.F., Balbus S.A.** A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. II. Nonlinear evolution// *Astrophys. J.* 1991. V. 376. P. 223-233.
- [15] **Eardley D.M., Lightman A.P.** Magnetic viscosity in relativistic accretion disks// *Astrophys. J.* 1975. V. 200. P. 187-203.
- [16] **Альвен Х., Аррениус Г.** Эволюция солнечной системы. М.: Мир. 1979.
- [17] **Galeev A.A., Rosner R., Viana G.S.** Structured coronae of accretion disks// *Astrophys. J.* 1979. V. 229. P. 318-326.

- [18] **Coroniti F.V.** On the magnetic viscosity in Keplerian accretion disks// *Astrophys. J.* 1981. V. 244. P. 587-599.
- [19] **Tout C., Pringle J.E.** Accretion disk viscosity- a simple model for a magnetic dynamo// *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1992. V. 259. P. 604-612.
- [20] **Brandenburg A., Nordlund A., Stein R.F., Torkelsson U.** The disk accretion rate for dynamo-generated turbulence // *Astrophys. J.* 1996. V. 458. P. 145-148.
- [21] **Lesch H.** Magnetic reconnection in accretion disc coronae// *Solar and Astrophysical Magnetohydrodynamic Flows*/Ed. By K.C. Tsinganos, Dordrecht Kluwer. 1996. P. 673-682.
- [22] **Bisnovaty-Kogan G.S., Lovelace R.V.E.** Advective accretion disks and related problems including magnetic fields // *New astron. Rev.* 2001. V. 45.P. 663-742.
- [23] **Armitage P.J., Livio M., Pringle J.E.** Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks// *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2001. V. 324. P. 705-711.
- [24] **Кадомцев Б.Б.** Перезамыкание магнитных силовых линий / *УФН.* 1987. Т.151. С. 3-29.
- [25] **Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.** Магнитные поля в астрофизике// Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006.
- [26] **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде// М.: Мир. 1980.
- [27] **Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б, Рузмайкин А.А.** Турбулентное динамо в астрофизике// М.: Наука. 1980.
- [28] **Parker E.N.** Hydromagnetic dynamo model// *Astrophys. J.* 1955. V.122. P. 293-314.
- [29] **Heyvaerts J., Priest E.R.** A self-consistent turbulent model for solar coronal heating// *Astrophys. J.* 1992. V. 390. P. 297-308.
- [30] **Inverarity G.W., Priest E.R., Heyvaerts J.** Turbulent coronal heating. I. Sheared arcade// *Astron. Astrophys.* 1995. V. 293. P. 913-926.
- [31] **Pudritz R.E., Norman C. A.** Bipolar hydromagnetic winds from disks around protostellar objects// *Astrophys. J.* 1986. V. 301. P. 571-586.
- [32] **Campbell C.G.** Disc –wind field matching in accretion discs with magnetically influenced wind// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2005. V. 361. P. 396-404.
- [33] **Konigl A., Pudritz R.E.** Disk winds and the accretion – outflow connection// *Protostars and Planets IV*/Eds V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Russell, Tucson: Univ. Arizona Press. 2000. P. 759-788.
- [34] **Wang J.C.L., Sulkanen M.E., Lovelace R.V.E.** Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks: The even-symmetry case// *Astrophys. J.* 1990. V.355. P. 38-43.
- [35] **Favre A.** Statistical Equations of Turbulent Gases// In: *Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics.* SIAM. Philadelphia. 1969. P. 231–267.
- [36] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: “БИНОМ. Лаборатория знаний”. 2009.

- [37] **Lazarian A., Vishniac E.T.** Reconnection in a Weakly Stochastic Field// The Astrophysical Journal. 1999. V. 517. P. 700-718.
- [38] **Pudritz R.E.** Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes-I. The fluctuations// Mon. Not. R. Astr. Soc.1981. V. 195. P. 881-896.
- [39] **Blackadar A.K.** Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system// J. Meteorology. 1955. V. 12.
- [40] **Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж.** Расширенная необратимая термодинамика// Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006.
- [41] **Иевлев В.М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред// М.: Наука. 1975.
- [42] **Фридман А.М., Бисикало Д.В.** Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность// УФН. 2010. Т. 178. С. 577-604.
- [43] **Франк-Каменецкий Д.А.** Физические процессы внутри звезд// М.: Физматлит. 1959.
- [44] **Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.** Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо// М.: Мир. 1984.
- [45] **Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.** Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung// Z. Naturforsch. 1966. 21a. P. 369-376.
- [46] **Shakura N.I., Sunyaev R.A.** Black holes in binary systems. Observational appearance// Astron. Astrophys. 1973. V. 24. P. 337-355.
- [47] **Pringle J.E., King A.R.** Astrophysical flow// Cambridge. 2007.
- [48] **Тассуль Ж.-Л.** Теория вращающихся звёзд// М.: Мир. 1982.
- [49] **Шакура Н.И.** Дискковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе// Астрон. журн. 1972. Т.49. С. 921-929.
- [50] **Lynden-Bell D., Pringle J.E.** The Evolution of Viscous Discs and the Origin of the Nebular Variables // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.1974. V. 168. P. 603.
- [51] **Bath G.T., Pringle J.E.** The Evolution of Viscous Discs,-I. Mass Transfer Variations// Mon. Not. Roy. Astron. Soc.1981. V. 194. P. 967.
- [53] **Eardley D.M., Lightman A.P., Payne D.G., Shapiro S.L.** Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra// Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.
- [54] **Heyvaerts J., Priest E.R., Bardou A.** Magnetic field diffusion in self-consistently turbulent accretion disks // Astrophys. J.1996. V. 473. P. 403-421.
- [55] **Прист Э., Форбс Т.** Магнитное пересоединение. Магнитогидродинамическая теория и приложения// М.: Физматлит. 2005.
- [56] **Шапиро С., Тьюколски С.** Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. II// М.: Мир. 1985.
- [57] **Pudritz R.E.** Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes-II. The mean magnetic field// Mon. Not. R. Astr. Soc. 1981. V. 195.P. 897-914.
- [58] **Lovelace R.V.E., Wang J.C.L., Sulkanen M.E.** Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks// Astr. J. 1987/. V. 515. P. 504-535.
- [59] **Pudritz R.E., Fahlman G.G.** The structure and variability of dynamo driven accretion discs// Mon. Not. R. Astr. Soc.1982. V. 198. P. 689-706.

[60] **Campbell C.G., Caunt S.E.** An analytic model for magneto-viscous accretion discs// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1999. V. 306. P. 122-136.

[61] **Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н., Чернов А.В.** От протосолнечного облака к планетной системе: Модель эволюции газопылевого диска// В сб. «Проблемы зарождения и эволюции биосферы/Под ред. Э.М. Галимова, М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2008.

[62] **Casse F, Ferreira J.** Magnetized Accretion-Ejection Structures. IV. Magnetically-Driven Jets from Resistive, Viscous, Keplerian Discs//*Astron. Astrophys.* 2000. V. 353. P. 1115-1128.

ГЛАВА 4

Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров в протопланетном облаке

С учетом фрактальных представлений о свойствах пылевых кластеров, построена эволюционная гидродинамическая модель образования и роста рыхлых пылевых агрегатов в аэродисперсной среде ламинарного диска, которая изначально состояла из газа и твёрдых частиц (суб)микронных размеров. В отличие от ряда классических исследований, в которых моделирование процесса агрегации проводилось в рамках «обычной» сплошной среды, когда зачастую не принимались во внимание многофракционность пылевой составляющей протопланетного облака, а также фрактальная природа пылевых кластеров формирующихся в процессе его эволюции, в данной главе предлагается рассматривать совокупность рыхлых пылевых агрегатов, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды, в которой существуют точки и области, не заполненные пылевыми частицами.

Введение

Проблема образования планет Солнечной системы напрямую связана с ранней стадией формирования и эволюции протопланетного газопылевого диска. По современным представлениям, планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения вещества турбулизованного протопланетного облака по орбите вокруг солнцеподобной звезды, и процессов аккреции при оседании его пылевой составляющей к экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска (см., например, [16,40,56,70,80]). При этом большинство исследователей придерживается следующих этапов подобного сценария эволюции: Солнце, оказывая на турбулентное газопылевое облако силовое воздействие (вследствие турбу-

лентной вязкости¹⁾, отдаёт ему угловой момент количества движения [32]), отодвигая тем самым вещество облака от себя к периферии, что приводит к образованию протопланетного аккреционного диска, обладающего дифференциальным вращением. Молодой диск содержит в основном водород и гелий. После прекращения сжатия протосолнечной туманности вещество в облаке быстро охлаждается, и в нем конденсируются пылевые частицы (суб)микронного размера (в общем случае композитные тела, состоящие из водяного льда, силикатов, железа и других веществ²⁾), которые оседают сквозь газ, образуя пылевой слой в окрестности экваториальной плоскости газопылевого облака. Сталкиваясь, частицы слипаются и одновременно растут, причём более крупные опускаются и растут быстрее [54]. Из-за баланса давления, гравитации и центробежной силы скорость орбитального движения газа меньше, чем у твёрдых частиц на том же расстоянии от звезды. В результате этого пылинки размером более нескольких миллиметров тормозятся встречным ветром, который вынуждает их опускаться по спирали к звезде [56]. Приближаясь к звезде, они нагреваются и постепенно содержащиеся в них фракции с низкой температурой кипения испаряются. Интервал расстояний $\sim 2-4$ а.е., на котором происходит этот процесс (так называемая «линия льда») делит диск на внутреннюю область, лишённую летучих веществ и содержащую тугоплавкие тела, и внешнюю, богатую летучими веществами и содержащую ледяные тела. В области «линии льда», где накапливаются испарившиеся из ледяных пылинок молекулы воды, происходит разрыв в гидротермодинамических параметрах газа и возникает скачок давления, ускоряющий движение газа вокруг Солнца. В результате этого происходит изменение направления силы трения, которая останавливает миграцию твёрдых частиц внутрь диска, находящихся под влиянием попутного течения. А поскольку из внешних слоёв диска твёрдые частицы всё ещё продолжают поступать, то область «линии льда» превращается в зону их скопления и роста. Тогда как мелкие частицы ещё остаются на больших z - координатах, более крупные достигают окрестности центральной плоскости и повышают там плотность пыли [33]. Резкой границы пылевого слоя нет. При сильном уплотнении пылевой составляющей образовавшегося субдиска, когда плотность пыли в слое достигает некоторого критического значения, субдиск становится гравитационно- неустойчивым и распадается на многочисленные пылевые сгущения

¹⁾ Главным аргументом в пользу турбулентности в диске является большое число Рейнольдса $\sim 10^{14}$.

²⁾ Пылинки представляют собой мелкие кристаллические или аморфные образования, состоящие из силикатов, графита и, возможно, окислов металлов, покрытые сверху оболочкой из намерзших газов, в частности, ледяные частицы состоят из тугоплавкого ядра и оболочки из лёгких элементов, а окисидные пылинки представляет собой смесь мелких частиц, состоящих из двухатомных окислов MgO, SiO, CaO, FeO.

[15,16,40,57]. В районах с высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агломератов [31], служащих основой зародышей рыхлых (*fluffy*) протопланетезималей. Наконец, на заключительной стадии процесса эволюции первичного газопылевого диска благодаря собственной гравитации, происходит формирование твёрдотельных километровых планетезималей с большой начальной массой порядка массы астероидов $\sim 10^{15} - 10^{19}$ г и размерами в пределах $\sim 0,1-10$ км (см. [16,55,76]. Частичное сохранение рассеянной пылевой компоненты вне сгущений после их образования и её дальнейшее поступление в сгущения ведёт к ускорению роста их плотности и более быстрому превращению в сплошные тела (см., например, [1,9]).

К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, получении данных наблюдений околозвёздных аккреционных дисков, открытии экзопланет, совершенствовании теоретических подходов и методов математического моделирования, астрофизики всё ещё далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария. Одна из таких нерешённых проблем – поиск физического механизма объединения исходных пылевых частиц субмикронного и микронного размеров газопылевого диска в твёрдотельные планетезимали. Известно, что вероятность агрегации (слипания) пылевых частиц при парных столкновениях понижается, когда образовавшиеся агрегаты становятся больше $r \sim 0.1-1$ см, а при увеличении размеров до $r \gg 10$ см она стремится к нулю. Дополнительным аргументом против образования планетезималей путём их прямого роста при столкновениях пылевых частиц является факт быстрого дрейфа к Солнцу твёрдых тел метрового размера в результате потери ими момента вращения при торможении в газе протопланетного диска. Твёрдые тела с радиусом $r \sim 1$ м могут сократить своё расстояние от звезды вдвое всего за 10^3 лет. Собственно, именно, по этой причине астрофизики уже на протяжении более чем тридцати лет не могут определиться с механизмом роста частиц с размерами $\sim 5-10$ см до десятикилометровых планетезималей – происходит их рост путём их агрегации при взаимных столкновениях или путём модификации после стадии джинсовской неустойчивости пылевого субдиска.

Вместе с тем, по мере возникновения явно выраженной границы между пылевым субдиском и газом, на границе пылевого слоя развивается экмановский погранслой, в котором возникает вполне развитая турбулентность [40]. В сочетании с дифференциальным вращением космического вещества это приводит к формированию собственного источника энергии, связанного с вязкой диссипацией крупномасштабного (орбитального) сдвигового течения в диске. Наличие подобного долговременного источника энергии играет чрезвычайно важную роль в последующей самоорга-

низации дисковой системы, проявляющейся в поэтапном возникновении ряда пространственно-временных структур типа долгоживущих когерентных вихревых образований, колец из твёрдых мелкодисперсных частиц и т.п. (см. [2]). Данный вывод дополнительно подкрепляет концепция энергетической подпитки крупномасштабных вихревых образований (в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса немагнитного протопланетного диска) механизмом вихревого динамо, изложенная в работах [4-7]. Благодаря этому механизму в спиральной³⁾ (гиротропной) дисковой турбулентности инверсный энергетический каскад, образовавшийся в результате перераспределения части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов, порождает в окрестности центральной плоскости диска иерархическую систему макроскопических энергетически ёмких когерентных вихревых структур (колец, вихревых спиралей, турбулентных пятен и т.п.) обратно тому, что, как правило, имеет место в «обычной» зеркально-симметричной турбулентности [11]. В частности, наличие долгоживущих вихревых колец в окрестности экваториальной плоскости, служащих, по мнению ряда авторов (см. [41-43]), «питомником» для формирования относительно крупных газопылевых кластеров в протопланетном диске, способствует объединению мелкодисперсных частиц пыли, как за счёт более тесного их сближения и роста частоты соударений, так и за счёт более низких скоростей столкновения. Действительно, когерентное поведение огромного числа твёрдых частиц аэродисперсной среды, которые участвуют в коллективных, согласованных и взаимосвязанных хаотических движениях, отвечающих разномасштабным турбулентным вихрям (непрерывно распределённым в пульсирующем потоке дискового вещества), обеспечивает благоприятные условия для их механического, физико-химического и электрического слипания [52,53,], что, как известно, встречает известные трудности в лабораторных экспериментах (см. [23,30,69]).

Таким образом, турбулентные вихри, образующиеся в протопланетном диске, могут играть значительную роль в процессе эволюции пылевых частиц, сконденсированных из протозвездных туманностей [22,28,34,37]. По оценке авторов работы [41] размеры захватываемых в вихри частиц пыли и их относительно крупных агрегатов находятся в интервале от 1 мм до 10 см. В результате, возникают весьма благоприятные условия для самопроизвольного образования устойчивых пылевых структур (в общем случае фрактальных кластеров⁴⁾), формирующихся благодаря коагуляции

³⁾ Существование спиральной турбулентности в Солнечном протопланетном диске обусловлено, в конечном счёте, фактом отсутствия отражательной симметрии анизотропного поля пульсационных скоростей относительно его экваториальной плоскости [7].

⁴⁾ Под фрактальным пылевым кластером обычно понимают систему взаимодействующих частиц-мономеров, которая обладает свойством масштабного самоподобия в

движущихся по определённом закону твёрдых мономеров [10,17,18], для стимуляции процессов конденсации твёрдых частиц и фазовых переходов в диске, для турбулентного переноса и перемешивания между различными его областями, для существенной модификации спектра колебаний и т.п.

В связи с этим важно отметить, что до последнего времени в большинстве теоретических моделей агрегации пылевых частиц в протопланетном диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых кластеров. Однако как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые образования могут иметь весьма пушистую структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность (см., например, [25,60,61,67,68,75]). Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с компактными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь режим движения в газовой среде, в частности, из-за значительного изменения силы трения. Следовательно, для адекватного описания эволюции пылевых агрегатов в диске и, в конечном счёте, механизма образования протопланетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства и внутреннюю структуру подобных пылевых агрегатов.

В этой главе мы не будем, однако, учитывать влияние турбулентности на указанные процессы, а сосредоточимся на построении эволюционной модели ламинарного диска, описывающей рост рыхлых пылевых агрегатов и их гидродинамический перенос с точки зрения фрактальных представлений. Как было отмечено выше, в последние годы появилось значительное число работ, в которых рассматривается внутренняя структура пористых пылевых агрегатов в диске и её перестройка при достаточно сильных столкновениях кластеров, что, несомненно, способствует более углублённому пониманию тех реальных процессов, которые сопровождают ассоциацию мелкодисперсных пылевых частиц в протопланетезимали (см., например, [25,27,60-62,67,68,75]). Однако в этих работ, как и в ряде классических исследований (см., например, [16,54,56,76]), моделирование велось в рамках «обычной» сплошной среды и зачастую не принимались во внимание многофракционность пылевой составляющей первичного протопланетного облака, а также фрактальная природа формирующихся в процессе его эволюции пылевых кластеров (изучались в основном компактные пылевые образования с постоянной плотностью или пористые тела. В отличие от этих работ, в данной главе предлагается рассматривать совокупность пылевых агрегатов, как особый тип сплошной среды – фрактальной

интервале размеров $r_0 \ll R$, где r_0 – масштабная единица измерения (например, радиус мономера) линейного размера кластера R .

среды⁵⁾, для которой существуют точки и области, не заполненные её частями. Заметим, что дробный векторный анализ на фрактальных множествах, как обобщение математического анализа на гладких многообразиях, в настоящее время активно разрабатывается (см., например, [8,44,45,65]). В частности, гидродинамическое моделирование фрактальной среды, обладающей нецелой массовой размерностью D_f (основанное на дробном векторном математическом анализе), можно проводить в рамках дробно-интегральной модели, использующей различные интегралы дробных порядков, для которых порядок дробного интегрирования определяется массовой размерностью среды. При этом сам интеграл дробного порядка интерпретируется как особый тип интеграла на фрактале с точностью до числового множителя (см. [71,72]). Вместе с тем, удобнее воспользоваться соответствующими обобщёнными дифференциальными уравнениями гидродинамики (описывающими законы сохранения массы, импульса и внутренней энергии для фрактальных сред), которые, являясь следствием модели в дробно-интегральной форме, содержат производные только целого порядка⁶⁾, что существенно облегчает их применение для различных прикладных задач.

Предложенное здесь рассмотрение посвящено исключительно математическим аспектам подобного гидродинамического моделирования протопланетного ламинарного диска, в котором в процессе его эволюции формируются разномасштабные пылевые фрактальные агрегаты, служащие, в конечном счёте, основой зародышей рыхлых протопланетезималей. При этом исследуется ранняя стадия этого процесса, происходящая без перестройки внутренней структуры кластеров. Более поздняя фаза кластер-кластерной агрегации, связанная с их сжатием при столкновениях с энергией превышающей некоторое критическое значение, может быть учтена опосредованно при использовании характерной для достаточно сжатых агрегатов массовой размерности среды, равной 2.5. Кроме этого, при моделировании брауновской и гравитационной коагуляции пылевых мономеров и фрактальных кластеров, предполагалось, что они находятся в кинетическом и диффузионном режимах движения. Это позволило достаточно точно рассчитать процесс седиментации рыхлых пылевых агрегатов и определить их максимальные размеры в случае пренебрежения радиальным дрейфом и фрагментацией. Следующий этап моделирования должен включать в себя учёт радиального дрейфа и радиального перемешивания пылевых образований, когда мономерам и кластерным агрегатам «разрешено» двигаться во внутренние области диска и исчезать в зоне испарения.

⁵⁾ Фрактальными средами являются среды с нецелой массовой размерностью (являющейся физическим аналогом размерности Хаусдорфа, не требующим, однако, перехода к пределу бесконечно малых диаметров покрывающих множеств).

⁶⁾ Дробные частные производные имеют важное значение для построения обобщенной гидродинамики эрдитарных и нелокальных сред [20].

В этом общем случае необходимо будет решать $2 + 1$ -мерное кинетическое уравнение коагуляции, в котором одно измерение связано с радиальной координатой диска ϖ , другое измерение – с высотой над экваториальной плоскостью z , а третья координата отвечает массе пылевых кластеров. Специфические особенности развиваемого здесь подхода были продемонстрированы на ряде численных примеров, относящихся к моделированию эволюции пылевых фрактальных кластеров в конкретных областях протопланетного газопылевого облака.

1. Характер генерации фрактальных пылевых кластеров в газопылевом диске

Процесс коагуляции малых (суб-) миллиметровых пылевых частиц протопланетного диска начинается с формирования разветвлённых цепочечных структур – фрактальных нитей с размерами, значительно превышающими размер кластеров, которые из них, в конечном счёте, и формируются [38]. Затем, в условиях эволюции дисковой системы такие нити перепутываются⁷⁾ и образуют клубки – первичные фрактальные кластеры (ФК). В дальнейшем в процессе кластер-кластерной коагуляции происходит частичное их слияние с образованием крупных фрактальных агрегатов, являющихся основным структурообразующим элементом рыхлых протопланетезималей, возникающих в результате протекания физико-химических и динамических процессов, сходных с процессами роста ФК.

При моделировании дисковой системы будем исходить из того, что на самой ранней стадии эволюции газопылевого диска, мелкодисперсные твёрдые частицы (мономеры), двигаясь вместе с газом и сталкиваясь на предельно низких скоростях (~ 10 см/с), слипаются друг с другом (при этом ближайшие соседи образуют химическую связь в зонах контакта), создавая пылевые фрактальные кластеры с квазимонодисперсным распределением по размерам. Благодаря низкоскоростным столкновениям растущие пылевые кластеры имеют ворсистую (*fluffy*) структуру с дробной фрактальной размерностью $1.7 < D_f < 2.1$ (см. [50]). По мере связывания мономеров в крупные пылевые кластеры, механизм «частица-кластер» замещается агрегацией «кластер-кластер» [49,51], что приводит к формированию

⁷⁾ Вместе с тем фрактальные нити могут рассматриваться как предельный результат направленной кластер-кластерной агрегации во внешнем поле; однако в изотропных условиях кластер-кластерная агрегация приводит к образованию изотропных разреженных агрегатов.

фрактальных структур с более высоким значением массовой размерности D_f . В частности, в случае частиц водяного льда кластеры могут расти без значительных сбоев в результате кластер-кластерной коагуляции при скоростях столкновения вплоть до нескольких десятков м/с ($\sim 50-60$ м/с) (см., например, [73,74]). При этом массовая размерность кластеров может достигать значений ~ 2.5 , что свидетельствует, в частности, о том, что крупные сжатые пылевые агрегаты в протопланетном облаке могут формироваться при столкновениях «пушистых» ФК (при этом размер сжатия агрегата является функцией энергии соударения). Эти результаты, по мнению авторов статей [74,75], подтверждают аналогичный сценарий, по которому и прото-планетезимали могут образовываться путём столкновения фрактальных пылевых агрегатов.

Далее все первичные мелкодисперсные компактные частицы газопылевого протопланетного облака вне зависимости от их реальной формы, размера и материала будем считать твёрдыми сферами, имеющими один и тот же радиус r_0 и массу μ_0 , поскольку форма мономера (сферическая, эллипсоидальная и т.п.) оказывает незначительное влияние ($\lesssim 2\%$) на фрактальную размерность образующихся кластеров (см., например, [24]). На первоначальном этапе роста (на основе механизма «частица-частица») пылевые образования состоят из небольшого числа первичных мономеров и по этой причине не могут, вообще говоря, считаться фракталами. Но, по мере дальнейшего слипания мономеров в кластеры, механизмом «кластер-кластер» формируются фрактальные пылевые агрегаты относительно крупных размеров. При этом число n_0 первичных пылевых частиц (ядер), входящих в состав изотропного ФК и масса кластера m^{cl} определяются следующими асимптотическими формулами [19]

$$n_0 = (R_g / r_0)^{D_f}, \quad m^{cl} = \mu_0 n_0 = \mu_0 (R_g / r_0)^{D_f}, \quad R_g / r_0 \gg 1, \quad (1.1)$$

в которых $R_g = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centre}|^2 \right)^{1/2}$ – радиус гирации⁸⁾ (характерный размер изотропного кластера), определяемый как среднеквадратичный

⁸⁾ В случае анизотропных агрегатов для количественного описания степени анизотропии обычно определяют все компоненты тензора инерции для кластера, равные

радиус агрегата, измеряемый от его центра тяжести (см. [47,59]); N – число элементов изображения, принадлежащих кластеру; \mathbf{x}_i – радиус вектор i -го мономера, входящего в кластер, \mathbf{x}_{centre} – положение центра масс ФК;

$$D_f = \ln n_0 / \ln(R_g / r_0), \quad (1 < D_f < D) \quad (1.2)$$

– фрактальная массовая размерность (или фрактальная размерность числа частиц) кластера, являющаяся количественной характеристикой заполнения им евклидова пространства (с размерностью D), а также характеризующая самоподобие его внутренней структуры. При этом размерность D_f не зависит от того, является ли упаковка сфер радиуса r_0 плотной, случайной или пористой с однородным распределением пустот. Следует отметить, что реальная структура кластеров характеризуется в общем случае чрезвычайно сложной и нерегулярной геометрией. Тем не менее, хотя размерность D_f и не отражает полностью всех геометрических свойств фрактала, она, однако, позволяет учитывать основные динамические свойства фрактальных структур при моделировании широкого класса явлений. Далее мы ограничимся рассмотрением случая гомогенной фрактальной среды, когда степенной закон (1.1) не зависит от расположения (перемещения) кластеров в пространстве. Кроме этого будем предполагать, что внутренняя структура всех кластеров, формирующихся в аэродисперсной дисковой среде одинакова, поскольку они образуются в одних и тех же областях диска. Именно, по этой причине численные значения массовой размерности D_f кластеров (при однотипном способе их сборки) будем считать (при моделировании эволюции диска) одинаковыми для всего ансамбля разномасштабных фрактальных кластеров.

При объединении большого числа малых кластеров (в результате процесса кластер-кластерной ассоциации) образуются обладающие самоподобными свойствами на малых расстояниях⁹⁾ однородные рыхлые агрегаты, в которых, по мере увеличения их радиуса гирации, увеличиваются

$R_{mn}^2 = n_0^{-1} \sum_{i,j=1}^{n_0} (x_{mi} - x_{mj})(x_{ni} - x_{nj})$; диагонализация этого тензора даёт главные радиусы

гирации, отношение которых определяет степень анизотропии ФК.

⁹⁾ Для кластера со случайным расположением частиц свойство самоподобия следует понимать статистически: если в разных частях кластера вырезать большое число кусков, находящихся в одинаковом объёме, то в среднем они будут содержать одинаковое число частиц.

размеры пустот, а средняя плотность (средняя массовая плотность вещества в объёме, занимаемом кластером) убывает по закону

$$\bar{\rho}^{\text{cl}} = \rho_0 \left(r_0 / R_g \right)^{3-D_f},$$

где $\rho_0 = 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер. Отсюда следует вывод, что чем больший объём занимают части фрактального агрегата, тем больше пустот всех размеров он содержит. Таким образом, одним из характерных свойств фрактального агрегата является его способность охватывать большое пространство (за счёт создания ажурной, сильно разветвлённой структуры) при использовании меньшего по сравнению с плотным агрегатом количества вещества, необходимого для его образования. Поскольку пустоты существуют в любой фрактальной среде, которые не заполнены веществом, то и дисковая среда пылевых фрактальных агрегатов не может моделироваться в общем случае в рамках традиционной сплошной среды, но должна рассматриваться как особый тип сплошной среды – фрактальной среды, для описания которой необходимо привлекать интегро-дифференцирование в пространстве с нецелой размерностью [64].

Компактность и физические свойства отдельного кластера зависят как от характера движения первичных мономеров и кластеров (прямолинейное или брауновское) до столкновения, так и от вероятности слипания мономеров и кластеров при их соприкосновении. В зависимости от числовой плотности $N_1(\mathbf{x}, t)$ мономеров в единице объёма дисковой среды (не входящих в состав кластеров) возможны два механизма роста кластеров с фрактальной структурой: в результате прилипания к кластеру мономеров, или благодаря процессу кластер-кластерной агрегации. При этом, в первом случае, процесс роста кластера может происходить либо в результате присоединения к нему единичных ядер,двигающихся прямолинейно (кинетический режим), либо когда много первичных пылевых мономеров,двигающихся диффузионно, одновременно объединяются с кластером (диффузионный или гидродинамический режим).

Дробная массовая размерность D_f пылевых кластеров в дисковой среде определяет, в конечном счёте, их аэродинамические свойства, стабильность и динамику роста (см. [29,77]), а, следовательно, и пространственно-временную эволюцию этих рыхлых образований [18]. В частности, в силу рыхлой структуры и меньшей массовой плотности, ФК обла-

дают гораздо бóльшей седиментационной устойчивостью (т.е. низкой скоростью оседания частиц) по сравнению с плотными пылевыми кластерами. К сожалению, сведения о дробной размерности, структуре и свойствах природных ФК имеют слабое экспериментальное подтверждение и все ещё базируются на результатах теоретических моделей. В частности, массовую размерность D_f определяют, как правило, на основе численного моделирования поведения кластера в гравитационном (или электрическом) поле с помощью “*in-situ*”-методов процесса его сборки. Эти методы различаются различными деталями кластер-кластерной агрегации, к которым, в частности, можно отнести: характер движения кластеров (прямолинейное или брауновское), характер объединения кластеров в зависимости от вероятности слипания при их взаимном касании, наличие или отсутствие полного реструктуринга (при котором кластеры связываются в трёх точках), нарушение изотропии объединяемых кластеров, связанного с наведённым электрическим диполем во внешнем электрическом поле или наведённым магнитным моментом во внешнем магнитном поле [48], несферичность сталкивающихся кластеров [63], наличие вращательной диффузии ФК, приводящей к захвату налетающего кластера краями образуемого пылевого агрегата (что способствует уменьшению его фрактальной размерности) и т.д. (см. [3,46,49]). В табл.1 представлены значения фрактальной размерности кластеров, образующихся в трехмерном пространстве при различных механизмах роста.

Первая компьютерная модель для описания процесса сборки кластера была предложена в работе [78] и получила название *DLA*-модель (*Diffusion Limited Aggregation*). В этой модели предполагается, что частицы, совершая брауновское движение в пространстве, соприкасаются с кластером и прилипают к нему. Виттен-сэндеровская модель хорошо применима для изучения агрегационных явлений, вызванных внешними полями, где, в дополнение к межчастичному взаимодействию, существует внешнее поле, которое приводит к взаимодействию частицы и агрегата. В случае *ССА*-модели (*Cluster-Cluster Aggregation*) (см. [49]) на первой стадии процесса образуется большое число кластеров малых размеров, которые далее объединяются в кластеры бóльших размеров. В результате образуются более рыхлые кластеры, чем в рамках *DLA*-модели, поскольку при таком способе сборки труднее заполнить пустоты. В этих моделях считается, что ассоциирующие частицы совершают диффузионное движение в пространстве, т.е. длина пробега частиц мала по сравнению с характерными размерами обла-

сти, ответственной за рост кластера. Кроме этого, предполагается, что соприкосновение частиц ведёт к их слипанию с вероятностью порядка единицы. В *RLCA*-модели (*Reaction Limited Cluster Aggregation*) (см., например, [38]) вероятность прилипания при касании частиц считается малой, поэтому при кластер-кластерной агрегации кластеры могут глубже проникать друг в друга и в результате образуется более компактный кластер. Наконец, в случае баллистической модели сборки кластеров (*BCCA*) считается, что длина пробега частиц велика по сравнению с размерами области прилипания и потому траектории их движения являются прямолинейными; при таком способе сборки кластер становится наиболее компактным (см. [66,79]).

Таблица 1. Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации твёрдых частиц [18]

Модель агрегации	Вероятность прилипания, κ^P	Фрактальная размерность
Прямолинейная траектория, кластер-частица κ^P	$\kappa^P = 1$	$2,97 \pm 0,08$
Брауновское движение, кластер-частица	$\kappa^P = 1$	$2,51 \pm 0,06$
	$\kappa^P = 0,25$	$2,48 \pm 0,12$
Прямолинейная траектория, кластер-кластер	$\kappa^P = 1$	$2,00 \pm 0,05$
Брауновское движение, кластер-кластер	$= 1$	$1,78 \pm 0,05$
Кластер-кластер, малая вероятность прилипания (<i>RLCA</i> -модель)	$\kappa^P < 1$	$2,11 \pm 0,03$

2. Модель образования и динамики пылевых фрактальных кластеров: базовые уравнения

2.1. Основные допущения модели

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность физико-химических, коагуляционных и динамических эффектов происходящих в протопланетном газопылевом облаке в процессе его эволюции с необходимостью требует разумной схематизации описания дисковой гетерогенной среды. В связи с этим, будем далее предполагать, что движение газа и дисперсной составляющей диска можно адекватно описать при следующих допущениях:

I) первичные пылевые частицы (мономеры) – однородные по составу,

твёрдые и недеформируемые, сферичные по форме и монодисперсные;

II) предполагается несжимаемость материала мономеров, $\rho_0 = const$;

III) истинная плотность материала мономеров много больше истинной плотности газовой составляющей дисковой системы, $\rho_0 \gg \tilde{\rho}_g$;

IV) объёмное содержание s^{cl} дисперсной фазы не очень велико ($(s^{cl})^2 \ll 1$), так что членами порядка $(s^{cl})^2$ можно пренебречь;

V) несущая фаза – сжимаемый идеальный газ;

VI) вязкость дисперсной фазы можно не учитывать;

VII) предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_d = T$;

VIII) суммарный гетерогенный континуум рассматривается в однодавленческом приближении, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;

IX) вкладом от приповерхностного слоя кластеров в динамику дисковой системы в целом можно пренебречь (заметим, что наличие в гетерогенной системе межфазных границ, моделируемых математическими поверхностями, на которых терпят разрыв непрерывности поля различных термогидродинамических параметров, приводит к весьма серьёзным осложнениям континуальной теории такой системы (см. [12]);

X) при описании динамического взаимодействия фаз вращением пылевых кластеров можно пренебречь;

XI) фрактальная среда пылевых кластеров внутри некоторого макробъёма W имеет массовую размерность D_f , а размерность на его границе ∂W равна d ; в общем случае размерность d не равна ни 2, ни $D_f - 1$.

Для применимости континуального приближения линейные размеры элементарного объёма δV дисковой среды считаются намного больше линейных размеров любых дисперсных включений, но намного меньше характерного гидродинамического размера рассматриваемой модели L_{hydr} .

Таким образом, эволюционирующее газопылевое протопланетное облако предполагается рассматривать как гетерогенный термодинамический комплекс, состоящий из двух взаимосвязанных подсистем, которые заполняют одновременно один и тот же объём евклидова пространства – газовой фазы солнечного состава (континуальная среда) и полидисперсной фазы пылевых частиц (фрактальная среда с нецелой массовой размерностью D_f , меньшей размерности D координатного пространства задачи), которые

находятся при общей абсолютной температуре T и давлении p . Газовую фазу, являющуюся несущей средой, будем описывать далее моделью вязкой жидкости. В свою очередь, полидисперсную пылевую фазу будем считать многоскоростной средой, состоящей из нескольких фракций: фракции первичных пылевых конденсированных мономеров и внедрённых в неё большого числа фракций пылевых фрактальных агрегатов, отличающихся друг от друга только размерами. Другими словами, элементарный макрообъём δV дисковой среды содержит, помимо несущей газовой фазы, описываемой обычными структурными параметрами (такими как числовая $n_g(\mathbf{x}, t)$ и массовая $\rho_g(\mathbf{x}, t) = n_g \mu_g$ плотности, давление $p_g(\mathbf{x}, t)$, температура $T_g(\mathbf{x}, t)$, гидродинамическая скорость $\mathbf{U}_g(\mathbf{x}, t)$ и т.п.), ещё множество твердотельных фрактальных образований, которое можно разбить на k ($k = 1, 2, \dots, Q$) фракций – пылевых кластеров с одинаковыми размерами. Если пронумеровать эти фракции в порядке возрастания размеров кластеров, то фракция-1 будет содержать первичные мономеры, фракция-2 содержит ассоциации двух мономеров и т.д. В результате мы получим Q фракций, характеризующихся следующими макрохарактеристиками

$$m_k^{cl} = n_{0,k} \mu_0, \quad R_{gk} = r_0 n_{0,k}^{1/D_f}, \quad V_k^{cl} = (4\pi/3) R_{gk}^3, \quad \rho_k^{cl}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 n_{0,k} N_k^{cl},$$

$$N_k^{cl}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{\rho}_k^{cl} = m_k^{cl} / V_k^{cl}, \quad s_k^{cl}(\mathbf{x}, t) = V_k^{cl} N_k^{cl}, \quad \mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Здесь r_0 и μ_0 – радиус и масса первичных мономеров, из которых составлен фрактальный агрегат (ФА); $\rho_0 = 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер; $n_{0,k} = (R_{gk} / r_0)^{D_f}$ – число первичных мономеров, входящих в состав k -го ФК; R_{gk} – радиус гирации k -го ФК, состоящего из $n_{0,k}$ пылевых мономеров; D_f – фрактальная размерность отдельного кластера и фрактальной среды в целом; $V_k^{cl} = (4/3)\pi r_0^3 n_{0,k}^{3/D_f}$, $m_k^{cl} = \mu_0 (R_{gk} / r_0)^{D_f}$, $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)$ – соответственно объём¹⁰⁾, масса и гидродинамическая скорость ФК k -сорта; $N_k^{cl}(\mathbf{x}, t)$ – числовая плотность

¹⁰⁾ Более общее определение объёма ФК задаётся формулой (2.2).

ФК k -го сорта (число кластеров в единице макрообъёма δV дисковой среды); $\rho_k^{cl}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 (R_{gk} / r_0)^{D_f} N_k^{cl}$ – массовая плотность ФК k -го сорта; $\tilde{\rho}_k^{cl}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 (R_{gk} / r_0)^{D_f - 3}$ – истинная массовая плотность ФК; $s_k^{cl}(\mathbf{x}, t)$ – объёмное содержание фрактальных кластеров k -го сорта, $s_k^{cl}(\mathbf{x}, t) = \rho_k^{cl} / \tilde{\rho}_k^{cl}$; при этом объёмное содержание (концентрация) s_g несущей фазы выражается в виде

$$s \equiv s_g = 1 - s^{cl}, \quad s^{cl} = \sum_{k=1}^Q s_k^{cl} = \sum_{k=1}^Q v_k^{cl} N_k^{cl}.$$

Отметим, что необходимость введения в рассмотрение объёмных содержаний заключается в том, что, в отличие от гомогенной смеси, где каждый компонент может рассматриваться как занимающий весь элементарный объём пространства непрерывно и равномерно с другими компонентами, в гетерогенной газопылевой системе протопланетного облака каждая фракция занимает лишь часть элементарного объёма. Кроме этого, поскольку пылевые кластеры разных сортов движутся друг относительно друга со скоростями $\mathbf{w}_{kj}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_j$ ($k, j = 1, 2, \dots, Q$), возможны столкновения между ними, что приведёт в общем случае к взаимному обмену массой, импульсом, моментом импульса и энергией. Хотя сочетание столкновительной фрагментации и электрического отталкивания частиц и налагает серьёзные ограничения на формирование и рост пыли в протопланетном диске (см. [59]), далее воздействие этих явлений на физические процессы в диске не принимается во внимание.

В дальнейшем для описания фрактальных сред будем использовать два ключевых понятия: $c_D(D_f, \mathbf{x}')$ – функция плотности разрешённых состояний¹¹⁾, описывающая, плотность упаковки разрешённых состояний в D -мерном евклидовом пространстве ($D=1, 2, 3$) (при этом выражение $c_D(D_f, \mathbf{x}') dV_D$ представляет собой число разрешённых мест в элементарном объёме dV_D); $\rho(\mathbf{x}', t)$ – функция распределения физических величин

¹¹⁾ Функция плотности разрешённых состояний определяет (с точностью до числового множителя) ядро интеграла дробного порядка, равного D_f . Существуют множество различных определений дробного интегрирования, ядра которых интерпретируются как плотности разрешённых состояний. Ниже используется дробное интегрирование по Риссу (см. [14]).

(таких как масса, числовая плотность и т.п.) на множестве разрешённых состояний в координатном пространстве в момент времени t . Здесь $\mathbf{x}' = \mathbf{x} / L_{hydr}$ – безразмерная координата. Вид и свойства функции $c_D(D_f, \mathbf{x}')$ определяются свойствами и симметриями фрактального распределения. Если предположить, что фрактальная среда обладает сферически симметричным распределением вещества в ней (что далее предполагается), то в этом случае можно использовать следующее выражение для плотности состояний

$$c_3(D_f, \mathbf{x}') = \frac{2^{3-D_f} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_f/2)} |\mathbf{x}'|^{D_f-3}, \quad \left(c_2(d, \mathbf{x}') = \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)} |\mathbf{x}'|^{d-2} \right),$$

являющееся ядром интеграла дробного порядка D_f [71] и задающее интегрирование Рисса с точностью до числового множителя [14]. В этом случае, например, объем шара W радиуса R фрактальной среды с массовой размерностью D_f , определяется формулой

$$V_{D_f}(W) = \int_W dV_{D_f} = \frac{2^{3-D_f} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_f/2)} \int_W |\mathbf{x}'|^{D_f-3} dV_3,$$

где $dV_{D_f} = c_3(D_f, \mathbf{x}') dV_3$. Используя сферические координаты, можно получить

$$V_{D_f}(W) = \frac{\pi 2^{5-D_f} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_f/2)} \int_W |\mathbf{x}'|^{D_f-1} d|\mathbf{x}'| = \frac{2^{5-D_f} \pi \Gamma(3/2)}{D_f \Gamma(D_f/2)} R^{D_f} \sim R^{D_f}, \quad (2.2.)$$

или

$$V_{D_f}(W) = \frac{\pi^{3/2-D_f/3} 2^{4-D_f-2D_f/3} 3^{D_f/3}}{D_f \Gamma(D_f/2)} (V_3(W))^{D_f/3},$$

где $V_3(W) = (4\pi/3)R^3$ и использованы формулы $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2)$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ для гамма-функции. Важно иметь в виду, что уравнения, которые связывают различные физические величины (например, массу, объём, момент инерции и т.п.), не зависят от числового множителя в функции $c_3(D_f, \mathbf{x}')$, однако зависимость от радиус-вектора \mathbf{x}' для этих уравнений существенна (см.[72]). Отметим также, что в случае иных симметрий среды с дробной размерностью, для функции плотности разрешённых состоя-

ний $c_D(D_f, \mathbf{x}')$ нужно использовать соответствующие выражения для ядер интегралов дробного порядка, отвечающих этой симметрии, т.е. фигурирующих в дробно-интегральной модели данной фрактальной среды. В частности, в случае распределения вещества с фрактальной размерностью, соответствующей симметрии параллелепипеда, нужно использовать плотность состояний по Риману-Лиувиллю [14].

Приведём теперь основные гидродинамические уравнения для моделирования несущей газовой фракции и пылевых ФК в случае изотермического ламинарного диска, вращающегося вокруг прото-Солнца с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z)$.

2.2. Уравнения сохранения масс фракций

Далее будем исходить из того, что кластеры k -го сорта ведут себя подобно макроскопическим частицам сферической формы, обладающим массой m_k^{cl} и радиусом R_{gk} , причём при лобовом соударении пары кластеров происходит с некоторой вероятностью их объединение в единый агрегат, состоящий из суммарного количества первичных мономеров обеих кластеров: $n_{0,k-i} + n_{0,i} = n_{0,k}$. При этом мы будем пренебрегать воздействием энергии удара на изменение внутренней структуры кластерных агрегатов (см. Ossenkohf, 1993). Тогда, уравнения сохранения масс газовой и дисперсных фракций с учетом «фазовых переходов» принимают вид [12]:

$$\frac{d}{dt} \rho_g + \rho_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{U}_g = 0, \quad \rho_g = \tilde{\rho}_g s, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D,k} \rho_k^{cl} + \rho_k^{cl} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^D \cdot \mathbf{U}_k = \sum_{j=1, j \neq k}^Q J_{jk} = m_k^{cl} \overset{\circ}{N}_k^{cl}, \quad \rho_k^{cl} = m_k^{cl} N_k^{cl}, \quad (2.4)$$

$(k, j = 2, \dots, Q; k \neq j).$

Здесь $(d/dt)_{D,k} \equiv \partial / \partial t + c(D_f, d, \mathbf{x}') \left(\mathbf{U}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)$ – обобщённая полная производная по времени;

$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^D \cdot \mathbf{U}_k \equiv c_3^{-1}(D_f, \mathbf{x}') \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (c_2(d, \mathbf{x}') \mathbf{U}_k) \right]$ – обобщённая

ная (на фрактальные среды) дивергенция; $c(D_f, d, \mathbf{x}') \equiv c_3^{-1}(D_f, \mathbf{x}')c_2(d, \mathbf{x}')$; $(\partial / \partial \mathbf{x})^D$ – обобщённый оператор набла; $J_{jk} = m_k^{cl} \psi_{j,k}$ – интенсивность обмена массами за счёт столкновений ФК, которая характеризуется общим числом соударений $\psi_{j,k} = \Phi_{j,k} N_k^{cl} N_j^{cl}$ в единице объёма дисковой системы; $\Phi_{j,k}$ – интенсивность скорости ассоциации кластеров k и j -сортов (ядро коагуляции); $\tilde{\rho}_g, \rho_g = \tilde{\rho}_g^s$ – соответственно истинная и приведённая массовая плотность газовой фазы; N_k^{cl} – полная скорость изменения числовой плотности N_k^{cl} кластеров k -го сорта за счёт процессов коагуляции, определяемая в общем случае уравнением Смолуховского

$$N_k^{cl} \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1; k>j}^{k-1} \Phi_{j,(k-j)} N_j^{cl} N_{(k-j)}^{cl} - N_k^{cl} \sum_{j=2}^Q \Phi_{k,j} N_j^{cl}, \quad (k = 1, 2, \dots, Q). \quad (2.5)$$

Рассмотрим элементарную схему подсчёта числа соударений $\psi_{j,k}$ между кластерами k -го и j -го сортов в единицу времени в единице объёма геометрического пространства. Если выделить один пробный кластер k -го сорта, то за единицу времени об него ударятся все кластеры j -го сорта, находящиеся в цилиндре радиуса $R_{gk} + R_{gj}$ с высотой $|\mathbf{w}_{kj}|$, объём которого $V_{j,k} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2 |\mathbf{w}_{kj}|$. Таким образом, число кластеров j -го сорта, столкнувшихся в единицу времени с одним кластером k -го сорта, будет равно $N_j^{cl} V_{j,k}$, а общее число соударений в единице объёма равно

$$\psi_{j,k} = N_k^{cl} N_j^{cl} V_{j,k} = \kappa^P \pi(R_{gk} + R_{gj})^2 |\mathbf{w}_{kj}| N_k^{cl} N_j^{cl}, \quad (2.6)$$

где коэффициент $\kappa^P \leq 1$ определяет долю соударений приведших к переходу частиц j -го сорта в k -фракцию. Из формулы (2.6) следует выражение для интенсивности скорости ассоциации кластеров k и j -сортов

$$\Phi_{k,j} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2 |\mathbf{w}_{kj}| \kappa^P \equiv \kappa^P \sigma_{k,j} |\mathbf{w}_{kj}|, \quad (2.7)$$

где $\sigma_{k,j} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2$ – сечение захвата.

2.3. Уравнения сохранения количества движения

Далее для простоты будем предполагать, что сопротивление газовой среды k -кластеру такое же, как и для сферической частицы с радиусом R_{gk} , соответствующей эффективному размеру кластера. Несущую газовую фазу будем описывать моделью вязкой жидкости. Тогда, уравнения движения несущей фазы и Q уравнений для разномасштабных ФК могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\rho_g \frac{d}{dt} \mathbf{U}_g = -s \nabla p_g + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_g \right) - \sum_{k=1}^Q \mathbf{F}_{k,g} - \rho_g \frac{GM_{\otimes}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad (2.8)$$

$$\rho_k^{cl} \left(\frac{d}{dt} \right)_{D,k} \mathbf{U}_k = -s_k^{cl} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^D p + \mathbf{F}_{g,k} - \sum_{j=1; j \neq k}^Q \left[J_{jk} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) + \mathbf{F}_{j,k} \right] - \rho_k^{cl} \frac{GM_{\otimes}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (2.9)$$

$$(k = 1, 2, \dots, Q; k \neq j).$$

Здесь $GM_{\otimes} \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 = \mathbf{g}$ – вектор ускорения гравитационной силы; $\mathbf{x} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} x_{\alpha}$ – центральный радиус-вектор; G и M_{\otimes} – гравитационная постоянная и масса протозвезды; $\mathbf{P}_g = \eta_g \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{U} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{U} \right)^{Tr} - \frac{2}{3} \mathbf{I} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{U} \right) \right\}$ –

тензор вязких напряжений, ν_g , $\eta_g = \rho_g \nu_g$ соответственно коэффициенты кинематической и сдвиговой вязкости для газа; $\mathbf{I} = \{ \delta_{\alpha\beta} \}$ – единичный тензор;

$$\mathbf{F}_{g,k} \cong -k_B T_g \frac{N_k^{cl}}{D_{g,k}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) \quad (2.10)$$

– сила взаимодействия между кластерами k -го сорта и несущей газовой фазой; k_B – постоянная Больцмана; $D_{g,k}$ – коэффициент бинарной диффузии кластеров k -го сорта в газе;

$$\mathbf{F}_{j,k} = m_k^{cl} \Psi_{j,k}(\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) = \Phi_{j,k} m_k^{cl} N_k^{cl} N_j^{cl} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) \quad (2.11)$$

– сила взаимодействия (за счёт столкновения) кластеров k -го и j -го сортов.

2.4. Диффузия пылевых кластеров в несущей среде

Перенос ФК в газопылевом диске определяется их взаимодействием с молекулами несущего газа и двигающимися вместе с ними мелкодисперсными пылевыми частицами, и это взаимодействие имеет разный характер в зависимости от радиуса гирации кластеров или массовой плотности ρ_g газа. В разреженной аэродисперсной среде, когда $\lambda \gg R_g$, где λ – длина свободного пробега частиц (атомов или молекул газа) в газе, сила торможения движущегося кластера возникает в результате однократных столкновений частиц газа с кластером, что соответствует кинетическому режиму переноса кластеров в несущей фазе. В плотном газе, когда $\lambda \ll R_g$, в каждый момент времени большое число частиц газа одновременно взаимодействует с кластером, и движение кластера соответствует диффузионному (гидродинамическому) режиму.

В случае кинетического режима движения коэффициент диффузии $D_{g,k}^{kin}$ малых кластеров в газе определяется формулой

$$D_{g,k}^{kin} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k_B T_g \mu_g}}{\rho_g} \frac{1}{R_{gk}^2} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{c_{gs}}{n_g} \frac{1}{R_{gk}^2}, \quad \lambda > R_{gk}, \quad (2.12)$$

а сила сопротивления несущей среды (2.11) описывается законом Эпштейна

$$\mathbf{F}_{g,k}^{kin} \cong -k_B T_g \frac{N_k^{cl}}{D_{g,k}^{kin}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) = -\frac{8\sqrt{2\pi}}{3} c_{gs} \rho_g R_{gk}^2 N_k^{cl} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g), \quad \lambda > R_{gk}. \quad (2.13)$$

Здесь $c_{gs} = \sqrt{k_B T_g / \mu_g}$ – изотермическая скорость звука в газе.

В другом предельном случае (при диффузионном режиме движения) коэффициент диффузии крупных кластеров в газе определяется формулой

$$D_{g,k}^{dif} = \frac{2k_B T_g}{\pi R_{gk}^2 \rho_g C_D(\text{Re}_{g,k}) |\mathbf{w}_{gk}|} = \frac{4k_B T_g}{\pi R_{gk} \eta_g \text{Re}_{g,k} C_D(\text{Re}_{g,k})}, \quad \lambda \ll R_{gk}, \quad (2.14)$$

где для коэффициента сдвиговой вязкости далее будем использовать первое приближение теории Чепмена-Энскога [21]

$$\eta_g = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\mu_g c_{sg}}{\sigma_g} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\rho_g \lambda c_{sg}}{3}. \quad (2.15)$$

Здесь $\sigma_g = \pi r_g^2$ ($= 1/\lambda n_g$) – газокинетическое сечение столкновения частиц в газе, $\sigma_g = 2 \times 10^{-15}$ см²; r_g – радиус взаимодействия молекул несущей фазы; C_D – эффективный коэффициент аэродинамического сопротивления кластера сорта k (сферы радиуса R_{gk}) относительно несущей фазы, который в общем случае достаточно сложным образом зависит от числа Рейнольдса $\text{Re}_{g,k} = 2R_{gk} |\mathbf{w}_{gk}| / v_g$. Далее будем использовать следующее представление для коэффициента C_D , получившее достаточно широкое распространение в астрофизической литературе:

$$C_D(\text{Re}_{g,k}) = \begin{cases} 24 \text{Re}_{g,k}^{-1} + 3.6 \text{Re}_{g,k}^{-0,313}, & \text{Re}_{g,k} \leq 500; \quad (\text{закон Стокса}) \\ 9.5 \times 10^{-5} \text{Re}_{g,k}^{1,397}, & 500 < \text{Re}_{g,k} \leq 1500; \\ 2.61, & \text{Re}_{g,k} > 1500. \end{cases}$$

Поскольку в данной модели не предполагается учитывать процесс дробления ФК при столкновениях, то вполне естественно предположить, что относительные скорости \mathbf{w}_{gk} их столкновения малы (столкновения кластеров с большими относительными скоростями сопровождаются, как известно, их разрушением). Тогда, при малых числах Рейнольдса, $C_D(\text{Re}_{g,k}) \cong 24 / \text{Re}_{g,k}$, коэффициент диффузии кластеров (при гидродинамическом режиме движения)

$$D_{g,k}^{dif} = \frac{k_B T_g}{6\pi R_{gk} \eta_g} = \left(\frac{k_B T_g \mu_0^{1/D_f}}{6\pi r_0 \eta_g} \right) (m_k^{cl})^{-1/D_f}, \quad \lambda \ll R_{gk}, \quad (2.16)$$

а соответствующая сила сопротивления $F_{g,k}^{\text{dif}}$ (2.11) задаётся законом Стокса

$$F_{g,k}^{\text{dif}} = 6\pi R_{gk} \eta_g N_k^{\text{cl}} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k) = \left(\frac{6\pi r_0 \eta_g}{\mu_0^{1/D}} \right) N_k^{\text{cl}} (m_k^{\text{cl}})^{1/D_f} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k). \quad (2.17)$$

Формулы (2.12) и (2.14) для коэффициентов диффузии кластеров в диффузионном и кинетическом режимах удобно объединить, используя для коэффициента диффузии кластеров в несущей фазе соотношение

$$D_{g,k} = D_{g,k}^{\text{dif}} + D_{g,k}^{\text{kin}} = \frac{k_B T_g}{6\pi \eta_g R_{gk}} \left(1 + \frac{15\pi}{32\sqrt{2}} \frac{\lambda}{R_{gk}} \right) \cong \frac{k_B T_g}{6\pi \eta_g R_{gk}} (1 + 1,5 \text{Kn}_k), \quad (2.18)$$

которое переходит в формулу (2.14) или (2.12) соответственно в пределе малых и больших чисел Кнудсена $\text{Kn}_k = \lambda / R_{gk}$ (здесь $\lambda = (\sigma_g n_g)^{-1}$ – длина свободного пробега частиц в газовой среде относительно столкновений друг с другом). Использование формулы (2.18) позволяет учитывать при моделировании эволюции протопланетного облака плавный переход от кинетического режима взаимодействия кластеров с несущим газом к диффузионному режиму по мере увеличения плотности частиц газа n_g или радиусов R_{gk} (масс) ФК при приближении к центральной плоскости диска, причем этот переход управляется параметром $n_g R_g$.

При написании формул (2.13) и (2.17) предполагалось, что числа Рейнольдса малы. Выясним, при каких максимальных размерах ФК это допущение справедливо. Рассмотрим в качестве примера квазистационарное свободное оседание ФК в газе к экваториальной плоскости диска под влиянием z -компоненты силы тяготения Солнца $g_z = \Omega_K^2 z$ (здесь $\Omega_K = \sqrt{GM_\odot / \varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость на экваториальной плоскости диска). При указанных условиях уравнение движение k -кластера (2.9) сводится к виду

$$6\pi R_{gk} \eta_g \mathbf{w}_{gk} \Big|_z = g_z m_k^{\text{cl}} = g_z \left(\frac{4\pi \rho_0}{3} r_0^{3-D_f} \right) R_{gk}^{D_f}. \quad (2.19)$$

Отсюда для скорости гравитационного оседания (вдоль оси z) одиночного ФК k -го сорта в неограниченном газопылевом диске будем иметь

$$\mathbf{w}_{\text{gk}} \Big|_z \equiv -U_{\text{kz}} = \Omega_{\text{K}}^2 z \left(\frac{2\rho_0}{9\eta_{\text{g}}} r_0^{3-D_f} \right) R_{\text{gk}}^{D_f-1} = \Omega_{\text{K}}^2 z \left(\frac{\mu_0}{6\pi r_0 \eta_{\text{g}}} \right)^{1/D_f} (m_{\text{k}}^{\text{cl}})^{1-1/D_f}. \quad (2.20)$$

Если число Рейнольдса определить формулой $\text{Re}_{\text{g,k}} = 2R_{\text{gk}} U_{\text{kz}} / v_{\text{g}}$, то условие на радиус гирации ФК, при выполнении которого число Рейнольдса мало ($\text{Re}_{\text{g,k}} \ll 1$) имеет вид

$$1 \gg \text{Re}_{\text{g,k}} = g_z \left(4\rho_0 r_0^{3-D_f} / 9\eta_{\text{g}}^2 \right) R_{\text{gk}}^{D_f},$$

откуда

$$R_{\text{gk}} \ll r_0^{1-3/D_f} \left(9\eta_{\text{g}}^2 / 4g_z \rho_{\text{g}} \rho_0 \right)^{1/D_f}. \quad (2.21)$$

Это неравенство позволяет оценить максимальный размер стоковских пылевых фрактальных кластеров. Из этой оценки (менее жёсткой по сравнению с оценкой $R \ll \left(9\eta_{\text{g}}^2 / 4g_z \rho_{\text{g}} \rho_0 \right)^{1/3}$ для компактных твёрдых тел) следует, в частности, что в гравитационном поле пушистые фрактальные агрегаты оседают значительно медленнее, чем компактные частицы той же массы.

Следует отметить, что в силу структурных особенностей кластеров сила сопротивления газовой среды более точно определяется рассеянием её частиц на первичных ядрах фрактальных агрегатов (см., например, [10]). Соответственно этому механизму рассеяния длина свободного пробега мономеров λ_f внутри кластера (при средней плотности числа мономеров входящих в кластер $\bar{n}_{0,\text{k}} = n_{0,\text{k}} / V_{\text{k}}^{\text{cl}} = 3R_{\text{gk}}^{D_f-3} / 4\pi r_0^{D_f}$) определяется соотношением

$$\lambda_f = 1 / \pi r_0^2 n_{0,\text{k}} = (4/3) R_{\text{gk}} \left(r_0 / R_{\text{gk}} \right)^{D_f-2}, \quad (2.22)$$

согласно которому для кластеров с фрактальной размерностью $D_f < 2$ выполняется условие $\lambda_f > R_{\text{gk}}$. Поскольку при таком способе описания условие применимости формулы Стокса для силы сопротивления движению фрактального агрегата имеет вид $\lambda \ll R_{\text{gk}}$ и $\lambda_f \ll R_{\text{gk}}$, то из формулы

(2.22) следует, что для фрактальных агрегатов с $D_f < 2$, это условие не выполняется, в силу чего формула Стокса для таких кластеров неприменима.

Итак, с учетом формул (2.12) и (2.18, уравнения движения (2.8) и (2.9) могут быть переписаны следующим образом

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_g}{\partial t} + \left(\mathbf{U}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{U}_g = \\ & = -\frac{s}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial \mathbf{x}} - \sum_{k=1}^Q \mathbf{G}(m_k^{cl}) \rho_k^{cl} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k) + v_g \Delta \mathbf{U}_g + \frac{1}{3} v_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{U}_g \right) - \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial t} + c(D_f, d, \mathbf{x}') \left(\mathbf{U}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{U}_k = \\ & = -\frac{s_k^{cl}}{\rho_k^{cl}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^D p - \mathbf{G}(m_k^{cl}) \rho_g (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) - m_k^{cl} \sum_{j=1, j \neq k}^Q \mathbf{K}_{k,j} \rho_j^{cl} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_j) - \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$(k = 1, \dots, Q; \quad k \neq j).$$

Здесь

$$\mathbf{K}_{k,j} = \Phi_{k,j} / m_k^{cl} m_j^{cl}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{G}(m_k^{cl}) = \begin{cases} \mathbf{G}^{kin} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{r_0^{D_f-3} c_{gs}}{\rho_0} \right) (R_{gk})^{2-D_f} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{r_0^2 c_{gs}}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{cl})^{(2-D_f)/D_f}, & \lambda > R_{gk}; \\ \mathbf{G}^{dif} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{3r_0^{D_f-3} \lambda c_{sg}}{2\rho_0} \right) R_{gk}^{1-D_f} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{r_0 \lambda c_{sg}}{(\mu_0)^{1/D_f}} \right) (m_k^{cl})^{(1/D_f)-1}, & \lambda < R_{gk}, \end{cases} \quad (2.26)$$

Система уравнений неразрывности в форме (2.3) и (2.4) и уравнений движения (2.23) и (2.24) для полей $\rho_g(\mathbf{x}, t)$, $\rho_k^{cl}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}_g(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)$ и $p_g(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)$, являющаяся обобщением уравнений гетерогенной механики на фрактальные жидкости, лежит в основе развиваемого подхода к

моделированию эволюции газа и пылевых фрактальных агрегатов в ламинарном изотермическом диске в общем случае произвольных скоростей столкновения кластеров.

3. Процессы кластеризации во фрактальной среде

3.1. Кинетическое уравнение коагуляции

Строгое решение задачи образования и эволюции фрактальных кластеров включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции распределения (спектра) кластеров по размерам (массам) в произвольный момент времени t в точке \mathbf{x} [13], т.е. совместное решение обобщённого нелинейного пространственно неоднородного кинетического уравнения коагуляции и гидродинамических уравнений для фрактальной среды.

В наиболее общем случае, включающем, в частности, моделирование изменения внутренней структуры ФК при столкновениях, кластеры удобно охарактеризовать некоторым набором параметров $\mathbf{Y} = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots\}$, в качестве которых могут быть использованы массы кластеров, либо их объёмы (что важно при описании пористых тел), а в случае коагуляции композитных частиц – массы отдельных примесей и т.п. (см., например, [59,62]). Будем далее считать, что дисковая система достаточно разрежена, так что слияние ФА происходит только за счёт парных столкновений, определяемых частотой соударений кластеров $\Phi(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j)$ с параметрами \mathbf{Y}_k и \mathbf{Y}_j в единице объёма среды. Кроме этого будем предполагать, что набор параметров для характеристики полученного в результате столкновения пылевого агрегата \mathbf{Y}_{k+j} полностью определяется параметрами сталкивающихся кластеров, т.е. $\mathbf{Y}_{k+j} = \mathbf{Y}_{k+j}(\mathbf{Y}_k; \mathbf{Y}_j)$. Тогда, эволюция функции распределения $f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t)$ ФА с параметрами \mathbf{Y}_k описывается следующим многомерным уравнением Смолуховского

$$\frac{\partial f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^D (f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t) \mathbf{U}_k) = -f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t) \int \Phi(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j) f(\mathbf{Y}_j, \mathbf{x}, t) d\mathbf{Y}_j +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint \Phi(\mathbf{Y}_j, \mathbf{Y}_m) f(\mathbf{Y}_j, \mathbf{x}, t) f(\mathbf{Y}_m, \mathbf{x}, t) \times \delta \left\{ \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{j+m}(\mathbf{Y}_j; \mathbf{Y}_m) \right\} d\mathbf{Y}_j d\mathbf{Y}_m, \quad (3.1)$$

являющимся обобщением на фрактальные среды пространственно неоднородной среды дискретного уравнения Смолуховского (2.5) для описания процесса коагуляции. Здесь $f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, t)$ – функция распределения (спектр) ФА по множеству параметров \mathbf{Y} , нормированная условием $\int f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{Y} = N^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t)$ (тогда величина $f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{Y}$ представляет собой число кластеров с параметрами от \mathbf{Y} до $\mathbf{Y} + d\mathbf{Y}$, находящихся в момент времени t в элементарном объёме в окрестности точки \mathbf{x}); $\Phi(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j) = \Phi(\mathbf{Y}_j, \mathbf{Y}_k)$ – ядро коагуляции (константа скорости ассоциации кластеров k и j -сортов), которое определяется как произведение сечения столкновения и относительной скорости сталкивающихся частиц; N^{cl} – полная числовая плотность ФК в единице объема космической среды. Для решения этого уравнения необходимо задать начальный спектр $f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{Y}, \mathbf{x})$ и граничные условия.

Согласно ряду исследований (см., например, [59,62]), достаточно большая энергия соударений может приводить к перестройке внутренней структуры фрактальных агрегатов, которые при этом будут сжиматься, и становиться относительно компактными. Однако подобное сжатие все ещё нуждается в подтверждении как теоретическими, так и экспериментальными исследованиями. Как уже было отмечено выше, вероятные дробления кластерных образований при их лобовых столкновениях с большими скоростями в данной модели не рассматриваются [73,74]. Если предположить, что множество \mathbf{Y} состоит только из одного параметра m^{cl} , то уравнение (3.1) в цилиндрической системе координат сведётся к следующему 2+1-мерному варианту уравнения Смолуховского

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(m^{\text{cl}})}{\partial t} + \frac{2^{D_f-2} \Gamma(D_f/2)}{\sqrt{\pi}} |\mathbf{x}|^{D_f-3} \left\{ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi f(m^{\text{cl}}) U_{\varpi}(m^{\text{cl}}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f(m^{\text{cl}}) U_z(m^{\text{cl}}) \right) \right\} = \\ = -f(m^{\text{cl}}) \int_0^{\infty} \Phi(m^{\text{cl}}, m_1^{\text{cl}}) f(m_1^{\text{cl}}) dm_1^{\text{cl}} + \frac{1}{2} \int_0^{m^{\text{cl}}} \Phi(m_1^{\text{cl}}; m^{\text{cl}} - m_1^{\text{cl}}) f(m_1^{\text{cl}}) f(m^{\text{cl}} - m_1^{\text{cl}}) dm_1^{\text{cl}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

в котором $|\mathbf{x}| = \sqrt{\varpi^2 + z^2}$ и для простоты принято, что $d = 2$. Здесь также учтён закон сохранения масс при столкновениях $m_{j+m}^{\text{cl}}(m_j^{\text{cl}}; m_k^{\text{cl}}) = m_j^{\text{cl}} + m_k^{\text{cl}}$.

3.2. Ядра коагуляции

Кинетика процессов коагуляции кластеров существенным образом зависит от конкретного вида ядра $\Phi_{k,j}$. Приведём некоторые упрощённые выражения $\Phi_{k,j}$ для практически важных механизмов коагуляции фрактальных кластеров¹²⁾. Рассмотрим две группы моделей образования кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей мы отнесём модели, связанные с прилипанием мономеров к кластеру, причём переход от кинетического режима к диффузионному связан с характером движения отдельного мономера. В этих моделях переход от одного режима к другому определяется не только радиусом действия поля отдельного кластера, но также и концентрацией сталкивающихся с ним мономеров. Ко второй группе моделей отнесём модели, описывающие рост ФА в результате ассоциации двух кластеров, причём переход от кинетического режима агрегации к диффузионному зависит от соотношения между длиной пробега отдельного кластера в аэродисперсной среде и средним расстоянием между пылевыми частицами.

Мономер-кластерная коагуляция. При низкой температуре, которую считаем здесь одинаковой для несущей мелкодисперсной смеси и пылевого фрактального кластера, испарением мономеров с поверхности кластера можно пренебречь, так что прилипание мономеров к поверхности класте-

¹²⁾ Важно иметь в виду, что поперечное сечение взаимодействия двух кластеров лишь приблизительно равно сумме квадратов радиусов гирации. Это справедливо, в частности, для кластеров типа RLCA, имеющих сравнительно компактную структуру. Но особенно это касается фрактальных кластеров ССА-модели, которые имеют чрезвычайно пушистую и открытую структуру (см. [68]). В работе [59] было предложено практически удобное соотношение между поперечным сечением и радиусом гирации для фрактальных агрегатов различных способов сборки и было показано, что безразмерное отношения поперечных сечений к квадратам радиуса гирации сильно эволюционирует для кластеров указанных типов, особенно на ранней ступени их роста в протопланетном диске. В связи с этим предложенные ниже соотношения для ядер коагуляции ФК следует рассматривать как первый шаг их аппроксимации.

ра ведёт к его росту.

Определим сначала константу скорости этого процесса в случае разреженной аэродисперсной среды, когда сила торможения движущегося кластера создаётся в результате однократных столкновений первичных мономеров с кластером, что соответствует кинетическому режиму переноса кластера в системе. В этом случае отдельный мономер может свободно достигнуть поверхности ближайшего к нему кластера без столкновений с другими мономерами. Для простоты будем считать, что каждый контакт мономера с поверхностью кластера приводит к его прилипанию. Кроме этого, рассматриваемая здесь модель столкновения мономера с кластером основана на допущении, что размер последнего значительно превышает радиус действия атомных сил. Тогда сечение столкновения мономера с кластером k -го сорта определяется формулой $\sigma_{1,k} = \pi R_{gk}^2$, с учетом которой константа скорости столкновения мономера с кластером может быть представлена в виде [19]

$$\Phi_{1,k}^{\text{kin}} = \langle w \pi R_{gk}^2 \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T_1}{\mu_{1k}}} \pi R_{gk}^2. \quad (3.3)$$

Здесь w – относительная скорость столкновения мономера и кластера, треугольные скобки означают усреднение по скоростям w на основе максвелловской функции распределения, $\mu_{1k} = \mu_0 m_k^{\text{cl}} / (\mu_0 + m_k^{\text{cl}}) \cong \mu_0$ – приведённая масса мономера и кластера, которая практически совпадает с массой мономера. Формулу (3.3) можно записать в следующих двух видах:

$$\Phi_{1,k}^{\text{kin}} \cong \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T_g}{\mu_0}} \pi R_{gk}^2 = \sqrt{\frac{8 k_B T_1}{\pi \mu_0}} \left(\frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{\text{cl}})^{2/D_f}. \quad (3.4)$$

С использованием (3.4) можно получить следующее выражение для величин J_{1k} в уравнениях (2.9), описывающих рост массы кластера k -го сорта за счёт прилипания к нему первичных мономеров

$$J_{1k} = \Phi_{1,k}^{\text{kin}} \rho_1 N_k^{\text{cl}} = \rho_1 N_k^{\text{cl}} \sqrt{\frac{8 k_B T_g}{\pi \mu_0}} \left(\frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{\text{cl}})^{2/D_f}, \quad (k = 2, \dots, Q). \quad (3.5)$$

В случае диффузионного характера прилипания мономеров к поверхности кластера можно использовать известную формулу Смолуховского

$$\Phi_{1,k}^{dif} = 4\pi D_{g1}^{dif} R_{gk} \quad (3.6)$$

и для константы скорости столкновения мономеров с кластером (здесь D_{g1}^{dif} – коэффициент диффузии мономеров в несущей газовой среде). Тогда, с учетом формулы

$$D_{g1}^{dif} = \frac{3\sqrt{\pi k_B T_g} \lambda_m}{8\sqrt{2\mu_g}} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_{gs} \lambda_m, \quad (3.7)$$

для коэффициента диффузии мономеров в газе, записанной в первом приближении теории Чепмена-Энскога [21], для константы скорости столкновения мономеров с кластером окончательно получим

$$\Phi_{1,k}^{dif} = \frac{3\pi^{3/2}}{2\sqrt{2}} c_{gs} \lambda_\mu R_{gk}. \quad (3.8)$$

(здесь λ_m – длина пробега мономеров в несущей газовой среде).

Заметим, что эффективность роста кластеров, за счёт столкновений с мономерами, в кинетическом и диффузионном режимах определяется соотношением

$$\frac{\Phi_{1,k}^{dif}}{\Phi_{1,k}^{kin}} = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \frac{\lambda_m}{R_{gk}}. \quad (3.9)$$

Кластер-кластерная коагуляция. Рассмотрим сначала случай, когда контакт между двумя кластерами связан с их свободным движением в дисковом пространстве, т.е. в пределе низкой концентрации мономеров в дисковой аэродисперсной среде. Будем считать, что при соприкосновении двух ФК они объединяются в один, который принимает сферическую форму и участвует в дальнейшем процессе эволюции. Сечение столкновения двух кластеров определяется формулой

$$\sigma_{kj} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2, \quad (3.10)$$

где R_{gk} и R_{gj} – радиусы гирации. В рамках модели твёрдых сфер это сечение отвечает ассоциации двух кластеров, так что константа их скорости объединения равна

$$\Phi_{k,j} = \left\langle w \pi (R_{gk} + R_{gj})^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi m_{kj}^{cl}}} \pi (R_{gk} + R_{gj})^2. \quad (3.11)$$

Здесь w – относительная скорость столкновения кластеров, треугольные скобки означают усреднение по скоростям кластеров на основе максвелловской функции распределения, $m_{kj}^{cl} = m_k^{cl} m_j^{cl} / (m_k^{cl} + m_j^{cl})$ – приведённая масса сталкивающихся кластеров. Формуле (3.11) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,j} &= \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi \mu_0}} \pi r_0^{D_f} \sqrt{\frac{R_{gk}^{D_f} + R_{gj}^{D_f}}{R_{gk}^{D_f} R_{gj}^{D_f}}} (R_{gk} + R_{gj})^2 = \\ &= \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi}} \frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \sqrt{\frac{m_k^{cl} + m_j^{cl}}{m_k^{cl} m_j^{cl}}} \left\{ (m_k^{cl})^{1/D_f} + (m_j^{cl})^{1/D_f} \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В случае броуновской коагуляции кластеров, находящихся в дисковой аэродисперсной среде с температурой T_g , их столкновения происходят в результате хаотического блуждания кластеров [26]. В диффузионном режиме роста ФК можно воспользоваться следующей формулой Смолуховского для скорости объединения двух кластеров

$$\Phi_{k,m} = 4\pi \kappa^P (D_{g,k}^{dif} + D_{g,m}^{dif}) (R_{gk} + R_{gm}), \quad (3.13)$$

где $D_{g,k}^{dif}$ и $D_{g,m}^{dif}$ – коэффициенты броуновской диффузии сталкивающихся кластеров в несущей газовой среде; R_{gk} и R_{gm} – их радиусы гирации; κ^P – вероятность слипания (коэффициент захвата) кластеров. Коэффициент диффузии $D_{g,k}^{dif}$ k -кластера, совершающего диффузионное движение в газе, определяется формулой (2.16), из которой, в частности, видно, что коэффициент диффузии кластеров уменьшается с увеличением их размеров, что приводит к тому, что малые кластеры исчезают значительно быстрее, чем успевают разрушиться более крупные [18]. Подставляя формулу (2.16) в (3.13), получим для константы $\Phi_{k,m}$ следующие представления

$$\Phi_{k,m} = \kappa^P \left(\frac{2k_B T_g}{3\eta_g} \right) \frac{(R_{gk} + R_{gm})^2}{R_{gk} R_{gm}} = \kappa^P \left(\frac{2k_B T_g}{3\eta_g} \right) \frac{\left\{ m_k^{cl} \right\}^{1/D_f} + \left\{ m_m^{cl} \right\}^{1/D_f} \right)^2}{(m_k^{cl} m_m^{cl})^{1/D_f}}. \quad (3.14)$$

Можно показать, что функция $\mathfrak{R} = (R_{gk} + R_{gm})^2 / 4R_{gk} R_{gm}$ слабо зависит от отношения радиусов сталкивающихся кластеров (например, при $R_{gk} = R_{gm}$, $\mathfrak{R} = 1$; при $R_{gk} = 9R_{gm}$, $\mathfrak{R} \cong 2,8$). Поэтому часто можно полагать, что броуновская константа скорости ассоциации двух кластеров в диффузионном режиме не зависит от размеров ассоциирующих кластеров, а следовательно, и от их масс, т.е.

$$\Phi_{k,m} \cong \kappa^P \frac{8k_B T_g}{3\eta_g} = \kappa^P \frac{2\sqrt{2\pi} c_{sg}}{n_g \lambda}. \quad (3.15)$$

Отметим, что поскольку при получении формул (3.7) и (3.14) была использована формула (2.16), то они справедливы при условии $\lambda \ll R_{gk}$, где λ – длина свободного пробега частиц в несущей газовой фазе.

Рассмотрим теперь случай гравитационной коагуляции ФК, когда в каждый момент времени большое число мономеров одновременно взаимодействуют с оседающими к экваториальной плоскости диска кластерами (движение последних носит диффузионный характер). Константу скорости процесса, в котором происходит контакт двух падающих в поле силы тяжести кластеров, определим в рамках модели твёрдых сфер. Пусть ФК k -го сорта, имеющие большую скорость оседания догоняют более мелкие кластеры размера R_{gj} , падающие более медленно. Поскольку, сечение столкновения двух кластеров в рамках модели твёрдых сфер равно $\sigma_{k,j} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2$, то коэффициент гравитационной коагуляции в поле притяжения аккреционного диска при условии, что вероятность слипания ФК при их соприкосновении равна κ^P , определяется соотношением

$$\Phi_{k,j} = \kappa^P \pi (R_{gk} + R_{gj})^2 U_{kz}. \quad (3.16)$$

В случае, когда радиус падающих кластеров много больше длины свободного пробега частиц аэродисперсной среды ($\lambda \ll R_g$), скорость

U_{kz} гравитационного оседания (вдоль оси z) одиночного k -кластера в неограниченном газопылевом диске определяется формулой

$$U_{kz} = -\Omega_K^2 z \left(\frac{2\rho_0}{9\eta_g} r_0^{3-D_f} \right) R_{gk}^{D_f-1}. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16), окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi_{k,j} &= \kappa^P \Omega_K^2 z \left(\frac{\mu_0}{6\eta_g r_0^{D_f}} \right) (R_{gk} + R_{gj})^2 \left(R_{gk}^{D_f-1} - R_{gj}^{D_f-1} \right) = \\ &= \kappa^P \Omega_K^2 z \left(\frac{r_0}{6\eta_g \mu_0^{1/D_f}} \right) \left\{ (m_k^{cl})^{1/D_f} + (m_j^{cl})^{1/D_f} \right\}^2 \left\{ (m_k^{cl})^{1-1/D_f} - (m_j^{cl})^{1-1/D_f} \right\}, \quad (3.18) \end{aligned}$$

где предполагается, что $k > j$.

В заключение этого раздела следует отметить, что процессы коагуляции частиц в аэродисперсной среде могут быть вызваны одновременным воздействием различных механизмов столкновения частиц в различных их сочетаниях. Поэтому применительно к протопланетному диску следует в общем случае проанализировать механизмы брауновской коагуляции заряженных частиц, турбулентно-брауновской коагуляции заряженных и нейтральных частиц, турбулентно-брауновской коагуляции заряженных частиц в гравитационном поле и т.п. Следует, однако, подчеркнуть, что расчёты всех этих коэффициентов коагуляции представляют сложную задачу и в общем случае данная проблема до настоящего времени не решена.

4. Стационарная модель эволюции протопланетного диска

Необходимые далее физические параметры и количественные характеристики солнечного протопланетного диска представлены в табл.2. Пылевые частицы, так же, как и газ, движутся со скоростью приблизительно равной кеплеровской скорости вращения $U_K = \varpi \Omega_K$, поскольку солнечная гравитация является доминирующей силой. Поэтому удобно переписать уравнения движения (2.23) и (2.24) в цилиндрической системе координат

(ϖ, ϕ, z) (с началом в центре прото-Солнца), вращающейся с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z) = \sqrt{GM_{\odot} / |\mathbf{x}|^3} \cong \Omega_K \left[1 - (3/4)z^2 / \varpi^2 \right]$, и вместо скоростей \mathbf{U}_k и \mathbf{U}_g использовать скорости $\mathbf{V}_k = \mathbf{U}_k - \varpi \Omega(\varpi, z) \mathbf{e}_{\phi}$ и $\mathbf{V}_g = \mathbf{U}_g - \varpi \Omega(\varpi, z) \mathbf{e}_{\phi}$. Тогда, оставляя члены только первого порядка малости и пренебрегая процессами фрагментации (т.е. полагая малыми относительные скорости столкновения кластеров), будем иметь (ср. [56])

$$\partial V_{g\varpi} / \partial t = - \sum_{k=1}^Q \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_k^{\text{cl}} (V_{g\varpi} - V_{k\varpi}) + 2\Omega_K V_{g\phi} - (1/\rho_g)(\partial p_g / \partial \varpi), \quad (4.1)$$

$$\partial V_{g\phi} / \partial t = - \sum_{k=1}^Q \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_k^{\text{cl}} (V_{g\phi} - V_{k\phi}) - (1/2)\Omega_K V_{g\varpi}, \quad (4.2)$$

$$\partial V_{gz} / \partial t = - \sum_{k=1}^Q \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_k^{\text{cl}} (V_{gz} - V_{kz}) - \Omega_K^2 z - (1/\rho_g)(\partial p_g / \partial z), \quad (4.3)$$

$$\partial V_{k\varpi} / \partial t = - \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_g (V_{k\varpi} - V_{g\varpi}) + 2\Omega_K V_{k\phi}, \quad (4.4)$$

$$\partial V_{k\phi} / \partial t = - \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_g (V_{k\phi} - V_{g\phi}) - (1/2)\Omega_K V_{k\varpi}, \quad (4.5)$$

$$\partial V_{kz} / \partial t = - \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_g (V_{kz} - V_{gz}) - \Omega_K^2 z. \quad (4.6)$$

В стационарном случае из уравнений (4.4) и (4.5), легко получить ϖ - и ϕ -компоненты скорости кластера k -го сорта в виде

$$V_{k\varpi}(m_k^{\text{cl}}) = \frac{1}{1+L^2} V_{g\varpi} + \frac{2L}{1+L^2} V_{g\phi}, \quad (4.7)$$

$$V_{k\phi}(m_k^{\text{cl}}) = - \frac{1}{2(1+L^2)} V_{g\varpi} + \frac{2}{2(1+L^2)} V_{g\phi}, \quad (4.8)$$

где $L(m_k^{\text{cl}}) = \Omega_K / \rho_g \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}})$. Подставляя соотношения (4.7) и (4.8) в (4.1) и (4.2), мы получим для ϖ - и ϕ -компонент скорости газа выражения

$$V_{g\varpi} = \frac{2X}{X^2 + (1+Y^2)^2} \eta U_K, \quad V_{g\varphi} = -\frac{(1+Y)}{X^2 + (1+Y^2)^2} \eta U_K. \quad (4.9)$$

Здесь

$$X = \sum_k \frac{L}{1+L^2} \frac{\rho_k^{cl}}{\rho_g}, \quad Y = \sum_k \frac{1}{1+L^2} \frac{\rho_k^{cl}}{\rho_g}, \quad \eta = -\frac{1}{2U_K^2} \frac{\varpi}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial \varpi}. \quad (4.10)$$

Вертикальная скорость газа V_{gz} всегда пренебрежимо мала по сравнению со скоростью оседания кластеров V_{kz} [56]. Следовательно, из уравнения (4.6) будем иметь

$$V_{gz} = 0, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} V_{kz}(m_k^{cl}) &= -\Omega_K^2 z \frac{1}{\mathfrak{G}(m_k^{cl}) \rho_g} = \\ &= -\Omega_K^2 z / \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{3r_0^{D_f-3} \rho_g \lambda c_{sg}}{2\rho_0} \right) R_{gk}^{1-D_f} = \Omega_K^2 z \left(\frac{\mu_0^{1/D_f}}{6\pi r_0 \eta_g} \right) (m_k^{cl})^{1-1/D_f}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

На первоначальном этапе моделирования эволюции диска далее может быть использована следующая дискретная форма уравнения (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{cl}(z, t)}{\partial t} + \frac{2^{D_f-2} \Gamma(D_f/2)}{\sqrt{\pi}} |z|^{D_f-3} \frac{\partial}{\partial z} \left(N_k^{cl}(z, t) U_{kz} \right) = -N_k^{cl}(z, t) \sum_{j=1}^Q \Phi_{k,j} N_j^{cl}(z, t) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{j,(k-j)} N_j^{cl}(z, t) N_{(k-j)}^{cl}(z, t), \quad (k = 1, 2, \dots, Q). \end{aligned} \quad (4.13)$$

При попытке объяснить рост пылевых агрегатов до метрового размера в протопланетном диске мы сталкиваемся с необходимостью преодолеть, по крайней мере, две трудности, вызванные, с одной стороны, быстрой потерей «строительного» материала, вследствие радиального дрейфа частиц, а с другой стороны – с фрагментацией крупных тел в результате разрушительных столкновений. К примеру, временной масштаб радиального дрейфа для тел метровых размеров на 1а.е. составляет $\sim 10^2$ лет, в течение которых эти тела дрейфуют во внутренние области диска и там испаряются. Поскольку скорость радиального дрейфа довольно сильно зависит от размера тел (например, скорость радиального дрейфа тел метрового разме-

ра на 1 а.е. в диске составляет ~ 50 м/с, а скорость дрейфа тел десяти метрового размера уже в 10 раз меньше), то предотвратить в какой-то степени дрейф пылевых агрегатов в зону испарения может относительно быстрый их рост. Тем не менее, общая эволюция диска включает в себя значительные потери материала частиц за счёт процесса испарения (в частности, в зоне «линии льда»), которому трудно помешать. Моделирование этого явления является одной из основных тем предпринятого нами исследования. Ещё одним препятствием роста твёрдых частиц является их фрагментация. В то время как низкие скорости столкновения частиц приводят к их слиянию, высокие скорости ударного взаимодействия приводят к дроблению. Например, для рыхлых объектов, столкновения со скоростью, превышающей на 4% скорость звука, приводят к разрушению. Именно по этой причине частицы примерно метрового размера, по-видимому, представляют верхний предел коагуляционного роста.

В силу многосложности процесса эволюции протопланетного диска наиболее удобно при его моделировании последовательно включать в рассмотрение различные механизмы, влияющие на возникновение, рост, разрушение и динамику пылевых агрегатов. В предпринятом нами исследовании предполагается реализовать 2 +1- мерную коагуляционную модель. Первое измерение связано с радиальной координатой диска, второе измерение связано с высотой над средней плоскостью и третья координата – масса пылевых частиц. Пыль может двигаться как вертикально, так и радиально из-за радиального дрейфа. Но, поскольку коагуляция (суб)-микронных частиц пыли, является начальным этапом формирования планетезималей в диске, то на первом шаге можно ограничиться рассмотрением брауновской и гравитационной коагуляции пылевых мономеров и фрактальных кластеров, находящихся в кинетическом и диффузионном режимах движения, что позволит достаточно аккуратно рассчитать процесс их вертикального оседания и определить максимальные размеры ФК в случае пренебрежения радиальным дрейфом и фрагментацией. Второй этап включает в себя радиальный дрейф пыли, когда частицам «разрешено» двигаться во внутренние области диска и исчезать в зоне испарения. Он позволяет выявить, при каких параметрах диска пылевые частицы смогут преодолеть дрейфовый барьер. Последний третий этап, включающий фрагментацию частиц, позволяет, вообще говоря, определить, в каких областях диска и при каких его параметрах возможно для пыли преодолеть и этот барьер (в данной работе этот феномен не учитывался).

Следует заметить, что частицы наиболее близкие к радиальному барьеру в наибольшей степени восприимчивы к режиму движения аэродисперсной смеси и к гравитационному эффекту пыли. Например, при наличии магнито-вращательной турбулентности в диске пылевые частицы могут быть захвачены в очень вытянутых вихрях газа, что может замедлить радиальный дрейф в два раза (Johansen и др. 2006;2009). При определённых условиях слой из твёрдых частиц сам по себе может стать гравитационно неустойчив (Johansen, Youdin, 2007), а в районах с высокой плотностью пыли, частицы сближаются благодаря их собственной гравитации и могут сформировать планетезимали за несколько оборотов (см. Johansen и др. 2007).

Таблица 2. Физические параметры и количественные характеристики Солнечного протопланетного диска ($\varpi = 1 \text{ a.e.}$)

Массовая плотность газа, $\rho_g = 2,4 \times 10^{-9} f_g (\varpi / 1 \text{ a.e.})^{-11/4}, \text{ г см}^{-3}$	$5,7 \times 10^{-9} \text{ г/см}^3$
Температура газа, $T_g = 2,8 \times 10^2 (\varpi / 1 \text{ a.e.})^{-1/2}, \text{ К}$	$225 \text{ }^\circ\text{К}$
Молекулярный вес молекул газа $\mu_g, \text{ г}$	$3,9 \times 10^{-24} \text{ г}$
Сечение столкновения частиц в газе $\sigma_g, \text{ см}^2$	$2 \times 10^{-15} \text{ см}^2$
Длина свободного пробега частиц в газе, $\lambda = 120 (\varpi / 5 \text{ a.e.})^{11/4}, \text{ см}$	$0,34 \text{ см}$
Изотермическая скорость звука, $c_{gs} = 6,7 \times 10^4 (\varpi / 5 \text{ a.e.})^{-1/4} \text{ см/с}$	$c_{gs} = 1,1 \times 10^5 \text{ см/с}$
Кеплеровская угловая скорость, $\Omega_K = 1,8 \times 10^{-8} (\varpi / 5 \text{ a.e.})^{-3/2}, \text{ рад/с}$	$3 \times 10^6 \text{ см/с}$
Газовая полутолщина диска, $Z_H = c_{gs} / \Omega_K, \text{ см}$	$5,1 \times 10^{11} \text{ см.}$
Пылевая полутолщина диска, см	$3,1 \times 10^8 \text{ см}$
Критическое число Рейнольдса, Re	180
Радиус мономера, $r_0, \text{ мкм}$	0,1 мкм

Массовая плотность материала первичных ядер, $\rho_0 = 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$, г/см ³	1,4 г/см ³
Масса мономера, μ_0 , г	$5,9 \times 10^{-15}$ г
Коэффициент сдвиговой вязкости для газа, $\eta = 1,8 \times 10^{-3} (\varpi / a.e.)^{1/2}$	$1,8 \times 10^{-3}$

Результаты численной реализации намеченной здесь программы исследований, предполагающей решение весовым методом Монте-Карло обобщённого уравнения Смолуховского (3.2) и обобщённых гидродинамических уравнений (4.1)-(4.6) для дисковой фрактальной среды будут представлены в последующих публикациях.

Заключение

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано в общем случае с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося протопланетного диска при учёте магнито- гидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно- временного распределения термогидродинамических параметров дисковой среды и их численных значений зависит агрегатное состояние основных компонентов дискового вещества, расположение фронтов конденсации- сублимации, и,

следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет. Важным ограничением в определении степени приближения подобного рода моделей к реальности служат космохимические данные, получаемые в результате прямого изучения внеземного вещества.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остаётся нерешённым. К ним, в первую очередь, относятся вопросы о ранних этапах эволюции Солнечной системы и причинах её уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звёзд. Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей такой динамической системы, в которой эволюция аэродисперсного протопланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца, к уплотнению пылегазового субдиска в окрестности экваториальной плоскости и его распаду (вследствие гравитационной неустойчивости) на многочисленные пылевые сгущения, к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агрегатов, служащих основой зародышей планетезималей. Таким образом, в связи с проблемой реконструирования эволюции протопланетного газопылевого облака, окружавшего прото-Солнце, на первый план выступает:

- построение численной модели формирования пылевого слоя (субдиска) в окрестности центральной плоскости прото-Солнца, изучение механизмов его уплощения в спокойном газе и при наличии турбулентности;
- моделирование механизмов развития гравитационной неустойчивости во вращающемся субдиске, когда плотность его вещества за счёт вертикального и радиального сжатия становится выше критического значения;
- образования и эволюции протопланетных пылевых сгущений для внутренней зоны диска и для его периферии;
- моделирование процессов аккумуляции твердотельных планетезималей;
- образование Земли и планет.

В данной главе рассматривается ранняя стадия образования планетной системы – стадия спокойного протопланетного газопылевого облака. При этом образование, рост и динамика пылевых сгущений играют решающую роль в понимании его эволюции. До последнего времени в большинстве

теоретических моделей агрегации пылевых частиц в диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые образования могут иметь весьма рыхлую (пушистую) структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность. Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с компактными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, может существенно измениться режим движения в газовой несущей среде, в частности, из-за значительного изменения силы трения. Поскольку эти процессы нельзя непосредственно наблюдать, то наше понимание этой первой фазы роста пылевых кластеров существенно зависит от предложенной теоретической модели. По нашему мнению, для адекватного моделирования эволюции пылевых агрегатов в диске и, в конечном счёте, механизма образования рыхлых прото-планетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства и внутреннюю структуру подобных пылевых агрегатов.

Здесь предложен новый оригинальный подход к моделированию гидродинамических и коагуляционных процессов в дисковой среде, рассматриваемой здесь как гетерогенный термодинамический комплекс, состоящий из двух взаимосвязанных подсистем, которые заполняют одновременно один и тот же объём евклидова пространства – газовой фазы солнечного состава (континуальная среда) и полидисперсной фазы пылевых образований (фрактальная среда с нецелой массовой размерностью). В свою очередь, полидисперсная фаза считается многоскоростной гетерогенной средой, состоящей из фракций пылевых фрактальных агрегатов и фракции первичных конденсированных мономеров. Поскольку в среде подобных пылевых образований существуют пустоты, которые не заполнены веществом, то она не может, в общем случае, описываться как традиционная сплошная среда. По этой причине предлагается рассматривать дисковую среду, как фрактальную среду, для описания которой необходимо, в общем случае, привлекать методы дробной динамики, использующей производные и интегралы дробных порядков. Уравнения с дробными производными оказались особенно эффективными для описания физических систем, обладающих такими свойствами, как степенная нелокальность, долговременная память (эредитарность) и фрактальность. Для моделирования дисковой фрактальной среды нами предлагается воспользоваться обобщёнными дифференциальными уравнениями гидродинамики, которые, являясь след-

ствием гидродинамической модели в дробно-интегральной форме, содержат производные только целого порядка, что существенно упрощает их применение.

Представленный подход посвящён математическим аспектам подобного гидродинамического моделирования протопланетного ламинарного диска, в котором в процессе его эволюции формируются и взаимодействуют друг с другом разномасштабные пылевые фрактальные агрегаты, служащие, в конечном счёте, основой зародышей рыхлых протопланетезималей. Поскольку строгое решение задачи образования и эволюции фрактальных кластеров включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции распределения (спектра) кластеров по размерам, т.е. решение обобщённого нелинейного пространственно-неоднородного кинетического уравнения Смолуховского, то в работе приведены практически важные аппроксимационные модели для ядер коагуляции фрактальных кластеров. При этом проанализированы две группы моделей образования кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей отнесены модели, обусловленные прилипанием мономеров к кластеру, причём проанализирован, связанный с характером движения отдельного мономера, переход от кинетического режима к диффузионному. Ко второй группе моделей отнесены модели, описывающие рост фрактальных агрегатов в результате ассоциации двух кластеров. Обсуждается стационарная модель эволюции дисковой фрактальной среды. При этом для получения достоверных результатов и их понимания потребовалось провести необходимые рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям. Таким образом, предпринятое здесь исследование открывает, по нашему мнению, перспективы существенно более полного и более приближенного к реальности моделирования коагуляционных и гидродинамических процессов в диске.

Литература

- [1] Витязев А.В., Печерникова Г.Н., Сафронов В.С. Планеты земной группы. Происхождение и ранняя эволюция. М.: Наука. 1990. 296 с.
- [2] Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды. М.: Наука. 1994. 348 с.
- [3] Емец Е.П., Новоселова А.Э., Полуэктов П.П. In situ- определение фрактальной размерности аэрозольных частиц// УФН.1994. Т.164. № 9. С. 959-966.

[4] **Колесниченко А.В.** О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности//Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.

[5] **Колесниченко А.В.** О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности//Астрон. вестн. 2005. Т. 39. № 3. С. 243-262.

[6] **Колесниченко А.В.** К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске // Астрон. вестник. 2011. Т. 45. № 3. С. 253-272.

[7] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

[8] **Кулак М.И.** Фрактальная механика материалов. Минск: Вышэйшая школа. 2002. 302 с.

[9] **Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н., Чернов А.А.** От прото- солнечного облака к планетной системе: Модель ранней эволюции газопылевого диска // Проблемы зарождения и эволюции биосферы /Ред. Галимов Э.М., М. URSS, 2008, С.223-273.

[10] **Михайлов Е.Ф., Власенко С.С.** Образование фрактальных структур в газовой фазе//УФН. 1995. Т.165. . № 3. С.263-283.

[11] **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Т.2. СПб.: Гидрометеиздат. 1996. 742 с.

[12] **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука. 1987. 464 с.

[13] **Пискунов В.Н.** Динамика аэрозолей. М.: Физматлит. 2010. 293 с.

[14] **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

[15] **Сафронов В.С.** О гравитационной неустойчивости в плоских вращающихся системах с осевой симметрией//ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С.53-56.

[16] **Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

[17] **Смирнов Б.М.** Фрактальные кластеры//УФН. 1986. Т.149. № 2. С. 177-219.

[18] **Смирнов Б.М.** Физика фрактальных кластеров. М. : Наука. 1991. 134 с.

[19] **Смирнов Б.М.** Процессы с участием кластеров и малых частиц в буферном газе//УФН. 2011. Т.181. № 7. С.713-745.

[20] **Учайкин В.В.** Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Ар-тишок». 2008. 512 с.

[21] **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов// М. :ИЛ. 1960. 510 с.

[22] **Adams F.C., Watkins R.** Vortices in circumstellar disks//*Astrophys. J.* 1995. V.451. P.314-327.

[23] **Barge P., Sommeria J.** Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices?// *Astron. and Astrophys.* 1995. V. 295. P. L1-L4.

[24] **Bertini I., Gutierrez P. J., and Sabolo W.** The influence of the monomer shape in the first stage of dust growth in the protoplanetary disk// *Astron. and Astrophys.* 2009. V. 504. P. 625–633.

[25] **Blum, J.** Grain growth and coagulation/ 2004. In *ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust*, ed. A. N.Witt, G. C.Clayton and B. T. Draine (San Francisco: ASP). P. 369.

[26] **Blum J., Wurm G., Kempf S., Henning Th.** The Brownian motion of dust in the solar nebula: an experimental approach to the problem of pre-planetary dust aggregation// *Icarus* 1996. V. 124. P.441-451.

[27] **Blum J., Wurm G.** The growth mechanisms of macroscopic bodies in protoplanetary disks// *Annual Review of Astronomy & Astrophysics.* 2008. V. 46. P. 21-56.

[28] **Brandenburg A., Hodgson L.S.** Turbulence effects in planetesimal formation// *Astron. Astrophys.* 1998.V. 330. P.1169-1174.

[29] **Chen Z.-Y., Meakin P., Deutch J. M.** Comment on «Hydrodynamic Behavior of Fractal Aggregates» // *Phys. Rev. Lett.* 1987. *Phys. Rev. Lett.* 198. 59. № 18. P. 2121.

[30] **Chavanis P.-H.** Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula//*arXiv:astro-ph/9912087.* 1999. V.16 P. 1-54.

[31] **Dominik C., Tielens A.G.G.M.** The physics of dust coagulation and the structure of dust aggregates in space// *Astrophys. J.* 1997. V.480. P.647-673.

[32] **Dubrulle B.** Differential rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula// *Icarus* 1993.V. 106. P.59–76.

[33] **Dubrulle B., Morfill G., Sterzik, M.** The dust subdisk in the protoplanetary nebula//*Icarus* 1995.V. 114. P. 237-246.

[34] **Johansen A., Klahr H., Henning T.** Gravoturbulent formation of planetesimals//*Astrophys. J.* 2006. V. 636. P.1121-1134.

[35] **Johansen A., Youdin A.** Protoplanetary disk turbulence driven by the streaming instability: nonlinear saturation and particle concentration// *Astrophys. J.* 2007. V. 662. P. 627-641.

[36] **Johansen A., Oishi J.S., MacLow M.M., Klahr H., Henning T., Youdin A.** Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks// *Nature* .2007.V.448. P.1022-1025.

- [37] **Johansen A., Youdin A., Klahr H.** Zonal flows and long-lived axisymmetric pressure bumps in magnetorotational turbulence// *Astrophys. J.* 2009. V.697. P.1269-1289.
- [38] **Jullien R.** A new model of cluster aggregation// *J.Phys.A.* 1986. V. 19. № 11. P. 2129-2136.
- [39] **Jullien R. M.** Transparency effects in cluster-cluster aggregation with linear trajectories // *J. Phys.* 1984. Ser. A. V. 17. P. L771-L776
- [40] **Goldrich P., Ward W.R.** The formation of planetesimals// *Astrophys. J.* 1973. V.183. № 3. P. 1051-1061.
- [41] **Heng K., Kenyon S. J.** Vortices as nurseries for planetesimal formation in protoplanetary discs// *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2010. V. 408. № 3. P. 1476-1493.
- [42] **Klahr H., Bodenheimer P.** Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability// *Astrophys. J.* 2003. V. 582. P. 869-892.
- [43] **Klahr H., Bodenheimer P.** Formation of giant planets by concurrent accretion of solids and gas inside an anticyclonic vortex// *Astrophys. J.* 2006. V. 639. P.432–440.
- [44] **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Fractional differential equations: An emergent field in applied and mathematical sciences//In: Factorization, Singular Operators and Related Problems Samko S., Lebre A. and Dos Santos A.F. (Eds.), Kluwer Acad. Publ. London. 2003. P. 151-173.
- [45] **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. -Elsevier. Amsterdam. 2006.
- [46] **Kolb M., Botet R., Jullien R.** Scaling of kinetically growing clusters// *Phys. Rev. Lett.* 1983. V.51. № 13. P. 1123-1126.
- [47] **Mandelbrot B.B.** The fractal geometry of nature/ /N.Y.: Freeman. 1982. 468 p.
- [48] **Matthews L.S., Land V., Hyde T.W.** Charging and coagulation of dust in protoplanetary plasma environments// *Astrophys. J.* 2012. V. 744. № 1 (arXiv:1104.5677. 19 p.).
- [49] **Meakin P.** Formation of fractal clusters and networks by irreversible diffusion-limited aggregation// *Phys. Rev. Lett.* 1983. V.51. № 13. P. 1119-1122.
- [50] **Meakin P.** Effects of cluster trajectories on cluster-cluster aggregation: A comparison of linear and Brownian trajectories in two- and three-dimensional simulations// *Phys. Rev.* 1984. V. 29. № 2. P. 997-999.
- [51] **Meakin P., Donn B., Mulholland G.** Collisions between point masses and fractal aggregates// *Langmuir.* 1989. V. 5. P. 510-518.
- [52] **Mizuno H., Markiewicz W.J., Volk H.J.** Grain growth in turbulent protoplanetary accretion disks// *Astron. Astrophys.* 1988.V.195. P.183-192.

[53] **Mizuno, H.** Grain growth in the turbulent accretion disk solar nebula// *Icarus*. 1989. V. 80. P.189-201.

[54] **Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C.** Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula// *Icarus*. 1981. V.45. P. 517-528.

[55] **Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K.** Accumulation of planetesimals in the solar nebula// *Icarus*. 1983. V.54. P. 361-376.

[56] **Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C.** Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// *Icarus*. 1986. V.67. P. 375-390.

[57] **Nakamoto T., Nakagawa Y.** Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks// *Astrophys. J.* 1994.V. 421. P. 640–651.

[58] **Okuzumi S.** Electric charging of dust aggregates and its effect on dust coagulation in protoplanetary disks// *Astrophys. J.* 2009. V. 698. P.1122-1135.

[59] **Okuzumi S., Tanaka H., Sakagami M.-A.** Numerical modeling of the coagulation and porosity evolution of dust aggregates// *ApJ*. 2009. V.707. P 1247-1264.

[60] **Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchi T., Sakagami M.-A.** Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution // *ApJ*. 2011. V. 731. P.95.

[61] **Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M.** Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters// *Astron. Astrophys.* 2007. V. 461. P. 215-236

[62] **Ossenkopf V.** Dust coagulation in dense molecular clouds: the formation of fluffy aggregates//*Astron. Astrophys.* 1993. V. 280. P. 617-646.

[63] **Perry J., Kimery J., Matthews L. S., Hyde T. W.** Effects of monomer shape on the formation of fractal aggregates under a power law distribution//43rd Lunar and Planetary Science Conference, held 2012 at The Woodlands, Texas. LPI. Contribution №. 1659. id.2615.

[64] **Roy N., Ray A.K.** Fractal features in accretion discs//*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2009. V.397. №3. P. 1374-1385.

[65] **Strichartz R.S.** Analysis on fractals// *Notices of the American Mathematical Society*. 1999. V. 46. №10. P. 1199-1208.

[66] **Sutherland D. N.** Comments on Vold's simulation of floc formation// *J. colloid and Interface Sci.* 1966. V. 22. P. 300-302.

[67] **Suyama T., Wada K., Tanaka H.** Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions//*Astroph. J.* 2008. V. 684. P.1310-1322.

[68] **Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S.** Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions//*arxiv:1205.1894v1 [astro-ph. EP]*. 2012. 28 P.

[69] **Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Provenzale A.** Forming planetesimals in vortices// *Icarus*. 1996. V.121. P.158-170.

[70] **Toomre A.** On the gravitational stability of a disk of stars// *Astrophys. J.* 1964. V.139. P. 1217-1238.

[71] **Tarasov V.E.** Fractional hydrodynamic equations for fractal media// *Annl. of Physics.* 2005. V. 318. №2. P. 286-307.

[72] **Tarasov V.E.** Fractional dynamics: Application of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media// Springer. Higher Education Press. 2010. 516 p.

[73] **Wada, K.; Tanaka, H.; Suyama, T.; Kimura, H.; Yamamoto, T.** Growth and disruption of dust aggregates by collisions// *Cosmic Dust - Near and Far ASP Conference Series*, V. 414, proceedings of a conference held 2008 in Heidelberg, Germany/ Edited by Henning T., Grün E., and Steinacker J./ San Francisco: Astron. Soc. Pacific. 2009. P.347.

[74] **Wada, K.; Tanaka, H.; Suyama, T.; Kimura, H.; Yamamoto, T.** Collisional growth conditions for dust aggregates// *Astrophys. J.* 2009. V.702. P.1490–1501.

[75] **Wada, K.; Tanaka, H.; Suyama, T.; Kimura, H.; Yamamoto, T.** Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions// *Astrophys. J.* 2008. V. 677. P.1296-1308.

[76] **Weidenschilling S.J.** Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula// *Icarus.* 1980. V.44. P. 172-189.

[77] **Wiltzius P.** Hydrodynamic behavior of fractal aggregates//*Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. № 7. P. 710-713.

[78] **Witten T.A., Sander L.M.** Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 1400-1403.

[79] **Vold M.J.** Computer simulation of floc formation in a colloidal suspension // *J. colloid and Interface Sci.* 1963. V. 18. P. 684-695.

[80] **Youdin A.N., Shu F.** Planetesimal formation by gravitational instability// *Astrophys. J.* 2002. V. 580. P. 494-505.

ГЛАВА 5

К теории инверсного энергетического каскада в спиральной турбулентности немагнитного астрофизического диска

В данной главе исследован вопрос о возможном влиянии гидродинамической спиральности, возникающей во вращающемся диске, на синергетическое структурирование космического вещества, а также на появление в нём эффекта отрицательной турбулентной вязкости. Показано, что длительное затухание турбулентности в диске может быть частично связано с отсутствием отражательной симметрии анизотропного поля турбулентных скоростей относительно его экваториальной плоскости. Показано, что отрицательная вязкость во вращающейся дисковой системе является, по-видимому, проявлением каскадных процессов в спиральной турбулентности, когда осуществляется инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным.

Введение

В последнее время весьма интенсивно исследуются разнообразные когерентные (диссипативные) структуры в турбулентной несжимаемой жидкости [1-6], которые оказывают сильное влияние на различные динамические характеристики течения. С фактической точки зрения наиболее богата подобными структурами развитая турбулентность в термодинамически открытой системе (в смысле Шредингера), когда при очень больших числах Рейнольдса нарушаются различные симметрии (пространственные переносы, сдвиги по времени, вращения, галилеевы и масштабные преобразования и др.), допускаемые уравнениями Навье-Стокса и краевыми условиями [7,8]. В этом случае в турбулентном течении самоорганизуются разнообразные пространственно-временные когерентные образования, такие как вихревые нити, спирали и клубки, турбулентные пятна, берстинги и т. п. Однако в тех случаях, когда поток свободен от внешнего принуждения (связанного, например, с крупномасштабным сдвигом скоро-

сти при вращении космического объекта), развитая турбулентность в пределе бесконечно больших чисел Рейнольдса имеет, как известно, тенденцию восстанавливать (в статистическом смысле) нарушенные симметрии вдали от границ течения [9]. В этой связи уместно заметить, что знаменитая аналитическая теория локальной турбулентности Колмогорова [10-12] по существу базируется на гипотезе восстановления разномасштабных нарушений однородности, изотропности и зеркальной симметричности турбулентного течения на малых масштабах $l \ll l_0$ (здесь l_0 – характерный масштаб крупных энергосодержащих вихрей). В рамках этой теории взаимодействие возмущения поля скоростей больших вихрей с мелкомасштабной турбулентностью носит характер затухания этого возмущения из-за турбулентной вязкости и передачи его кинетической энергии по каскаду вихрей различных пространственно-временных масштабов в область мелкомасштабных пульсаций. Собственно по этой причине существование долгоживущих вихревых структур с масштабом $l \gg l_0$ в «обычной» зеркально-симметричной турбулентности несжимаемой жидкости представляется маловероятным.

Вместе с тем, существует турбулентность, которая и при очень больших числах Рейнольдса не восстанавливает нарушенную отражательную симметрию (закон чётности) поля пульсационных скоростей в случае преобразования $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ координат. Примером такой турбулентности является пульсирующее поле скоростей в конвективной зоне астрофизического аккреционного диска: средние свойства этого поля не остаются инвариантными при зеркальном отражении в его экваториальной плоскости. Подобная турбулентность, как известно, называется *гиротропной* (или *спиральной*) и возникает под влиянием массовых сил с псевдовекторными свойствами (например, силы Кориолиса, магнитного поля и т.п.). В частности, реальная турбулентность во вращающемся солнечном протопланетном диске имеет спиральный характер [13-15]. Это связано с тем, что мелкомасштабное пульсационное поле скоростей \mathbf{u}' при наличии вращения дискового вещества с постоянной угловой скоростью Ω_0 (аксиальный вектор) и анизотропии, вызванной, например, воздействием поля силы тяжести \mathbf{g} (или поля интенсивности турбулентности, поля вертикального градиента температуры $\partial\theta/\partial\mathbf{x}$ (полярные векторы)), не обладает отражательной симметрией относительно экваториальной плоскости диска, т.е. относительно преобразования $z \rightarrow -z$. По этой причине, в диске генерируется, так называемая, плотность спиральности $\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ (скалярное произведение полярного вектора скорости \mathbf{u}' и аксиального вектора завихрённости $\boldsymbol{\omega}' = (\partial/\partial\mathbf{x}) \times \mathbf{u}'$), которая, в конечном счёте, и приводит к возникновению гиротропной турбулентности. Последнее означает, что в таком анизотропном мелкомасштабном пульсационном поле скоростей вихревые левовра-

щательные движения в совокупности могут быть более вероятными, чем правовращательные, или наоборот.

Впервые на важность влияния спиральности локализованных вихревых возмущений на эволюцию гидродинамической турбулентности обратил внимание Моффат [16], который и нашёл связанный с ней интегральный инвариант $h = \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ ¹³⁾ (осреднённая вихревая спиральность), являющейся мерой зацепленности силовых линий вихревого поля [15,17-19]. Средняя вихревая спиральность – псевдоскаляр, который не является положительно определённой величиной и меняет знак при переходе от левой к правой системе координат (или наоборот). Здесь уместно напомнить, что только благодаря введению в рассмотрение вихревой спиральности и так называемой перекрёстной магнитной спиральности $h^M = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{B}' \rangle$ для адекватного описания магнитогидродинамической турбулентности (не обладающей зеркальной симметрией) удалось объяснить важнейший механизм турбулентного динамо в астрофизике (так называемый α -эффект), отвечающий за генерацию и поддержание крупномасштабных магнитных полей $\langle \mathbf{B} \rangle$ планет, звёзд и галактик (см., например, [14,15,20-22]).

Важно также иметь в виду, что для однородного бездивергентного (соленоидального) поля пульсационных скоростей \mathbf{u}' , лишённая отражательной симметрии вихревая спиральность $h = \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ сохраняется в инерционной области (для которой вязкие эффекты диссипации энергии несущественны) энергетического спектра, т.е. в этой области существует ещё один (помимо турбулентной энергии $b \equiv \langle |\mathbf{u}'|^2 / 2 \rangle$) дополнительный невязкий (при $\nu \rightarrow 0$) инвариант [8]. Это обстоятельство приводит, вообще говоря, к полному изменению характера процесса передачи пульсационной кинетической энергии по каскаду вихрей Ричардсона-Колмогорова в спиральной трёхмерной турбулентности, поскольку теперь уже две величины b и h одновременно могут переноситься по спектру турбулентных пульсаций от одних масштабов к другим; при этом каскадный процесс переноса энергии по иерархии турбулентных вихрей определяется уже двумя параметрами – скоростью диссипации турбулентной энергии ε и скоростью диссипации вихревой спиральности ε_h . Другими словами, если энергия и спиральность вносятся в поток на некоторых промежуточных масштабах волновых чисел k , далёких от диссипативного масштаба k_ν и от масштаба энергоснабжения k_0 ($k_0 \ll k \ll k_\nu$), то обе величины ε и ε_h определяют процесс передачи энергии по спектру. По аналогии с двухмерной «обычной» зеркально симметричной турбулентностью, когда при свободной эво-

¹³⁾ В качестве операции осреднения далее используется статистико-математическое осреднение по ансамблю возможных реализаций случайных термо- и гидродинамических полей [9].

люции потока возможен инверсный каскадный перенос энергии от мелко-масштабных к крупномасштабным вихрям (сопровождающийся одновременным переносом энтропии $\Omega \equiv \langle |\omega'|^2 / 2 \rangle$ в сторону малых вихрей [9]), для гиротропной трёхмерной турбулентности также допустим режим, при котором реализуется обратный каскад турбулентной энергии [23,24]. При его реализации инварианты b и h переносятся по волновым числам к противоположным концам инерционного спектра: спиральность – к мелким масштабам, а турбулентная энергия – к более крупным масштабам [25-29], что позволяет перекачать часть энергии мелкомасштабной турбулентности в энергию крупномасштабных вихревых структур. Таким образом, спиральная турбулентность имеет дополнительный канал сброса пульсационной энергии, которым и оказывается механизм генерации мезомасштабных вихревых структур (обратный тому, что, как правило, имеет место в «обычной» турбулентности), приводящий к передаче части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов. По этой причине спиральная турбулентность может повышать устойчивость крупных энергетически ёмких турбулентных вихрей, увеличивая время их жизни [30-36]. Этот механизм естественно трактовать как вихревое динамо.

Другим специфическим проявлением спиральной турбулентности в трёхмерной гидродинамике является наличие эффекта отрицательной турбулентной вязкости ν^{turb} . В природе отрицательная вязкость обнаруживается в глобальных (крупномасштабных) циркуляциях вещества на Солнце, Юпитере, Сатурне, Венере (вероятно, также на Уране и Нептуне), в глобальных течениях в земной атмосфере и в океане [37-39]. Обычно для объяснения этого реально наблюдаемого эффекта, который, как известно, связан с инверсным энергетическим каскадом, принято привлекать теорию умозрительной¹⁴⁾ двумерной турбулентности, поскольку многие геофизические и астрофизические течения на сферических поверхностях космических тел могут быть исследованы в рамках квазидвухмерных гидродинамических уравнений, содержащих специальные дополнительные слагаемые, например, слагаемые с линейным трением в вязком погранслое [39-41]. По-видимому, подобный подход иногда допустим и при моделировании дисковой турбулентности, поскольку вращательным движениям космического вещества в тонких астрофизических дисках также присущи отдельные черты двумерной геометрии [42,43]. Однако при этом возникает чисто формальная проблема: следует ожидать чрезмерного накопления

¹⁴⁾ Напомним, что истинно двумерная турбулентность не реализуется в реальных течениях жидкости, поскольку механизм интенсификации вихревого поля за счёт растяжения вихревых трубок, лежащий в основе процесса переноса энергии к малым масштабам (с одновременным ростом завихрённости), имеет принципиально трёхмерную природу.

энергии в вихрях некоторых больших масштабов, лежащих между масштабом накачки и характерным размером системы. В двумерной модели дисковой турбулентности (турбулентности без чётко выраженных твёрдых границ) избавиться от указанного затруднения нелегко, поскольку в этом случае необходимо вводить в рассмотрение некую виртуальную длинноволновую диссипацию (вступая при этом на путь чисто произвольных допущений), приводящую, в конечном счёте, к отводу энергии из двумерных вихрей на энергосодержащих масштабах. Таким образом, без учёта законов симметрии реального (трёхмерного) турбулентного поля бывает не просто построить вполне адекватную математическую модель процессов эволюции космической газовой массы во вращающемся астрофизическом объекте.

Остановимся ещё на одной особенности спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске. Как уже отмечалось, спиральная турбулентность в электропроводящей космической жидкости благодаря α -эффекту генерирует и поддерживает крупномасштабные магнитные поля звёзд и планет. В работе [34] было показано, что, несмотря на формальную аналогию линейного уравнения индукции для магнитного поля \mathbf{B} и нелинейного уравнения для завихрённости $\boldsymbol{\omega} = (\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{u}$ в вязкой непроводящей жидкости, для однородной изотропной турбулентности при наличии только одной спиральности аналог подобного эффекта для завихрённости отсутствует. Тем не менее, спиральная турбулентность в астрофизических объектах, в которых существуют и другие факторы нарушения симметрии течения космического вещества (такие, например, как сила тяжести, градиент температуры и т.п.), часто способна действовать как генератор крупно- и мезомасштабного вихревого поля, усиливая и укрупняя вихри, и тем самым, порождая разнообразные когерентные вихревые структуры.

В связи со сказанным следует отметить, что теория возникновения крупномасштабных вихревых структур за счёт механизма вихревого динамо развивалась в работах [32-34,44-46] применительно к турбулентной атмосфере и океану. Особое внимание в этих работах было уделено спиральности, образующейся под воздействием силы Кориолиса на конвекцию. Авторами была изучена задача о конвекции подогреваемой снизу жидкости, находящейся в плоскопараллельном слое. Было показано, что закручивание возникающих над перегретой поверхностью океана конвективных ячеек и рост их размеров из-за эффекта вихревого динамо приводит к формированию в спиральной атмосфере одного крупного вихря, который может быть интерпретирован как тропический циклон, возникающий над перегретой поверхностью океана.

Вместе с тем, вопрос о возможном влиянии эффекта вихревого динамо на синергетическое структурирование вещества в астрофизических объек-

тах обсуждался в литературе крайне редко¹⁵⁾ (см., в частности, [13,42,47]). По этой причине в этой главе предлагается вернуться к рассмотрению данной проблемы, но уже с учётом результатов численных экспериментов, доказывающих реальное существование обратного энергетического каскада в трёхмерной спиральной турбулентности [26-29,48]. При этом основная идея сводится к следующему: поскольку в последнее время эффект инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности все более надёжно подтверждается в численных экспериментах, то включение в математическую модель эволюции астрофизического немагнитного диска механизма вихревого динамо, способствующего структурированию в нем космических газовых масс, приобретает всё более веское основание. Исходя из этих соображений, содержание этой главы можно рассматривать как теоретическую основу для численного моделирования широкого класса гидродинамических процессов в протопланетном немагнитном диске (оказавшем, в частности, Солнце на ранней стадии его существования), для которых специфика механики спиральной турбулентности играет существенную роль.

1. Осреднённые гидродинамические уравнения для описания астрофизической турбулентности

Рассмотрим астрофизическую турбулентность при наличии стратификации жидкости и вращения изучаемого космического объекта. Далее для простоты будем считать, что жидкость несжимаема (это означает, что мы исключаем из рассмотрения некоторые явления, связанные с понятием скорости звука), а допустимые небольшие вариации плотности обусловлены исключительно изменчивостью температуры. Тогда, в соответствии с *приближением Буссинеска*, непостоянство плотности проявляется только в виде архимедовой силы, входящей в уравнение движения. При описании реального течения в виде суммы средней $\langle f \rangle(\mathbf{x}, t)$ и пульсационной f' составляющих гидродинамических полей $f(\mathbf{x}, t)$, осреднённые гидродинамические уравнения для турбулентной жидкости, записанные в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω_0 , имеют вид¹⁶⁾

¹⁵⁾ Заметим, что за последние десять лет выполнено огромное число работ, посвящённых моделированию эволюции гиротропной МГД-турбулентности в астрофизических дисках.

¹⁶⁾ Следует отметить, что уравнение притока тепла (1.3) записано здесь для случая развитой турбулентности, когда в структуре пульсационного поля устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором турбулентная энергия b приблизительно сохраняется как во времени, так и в пространстве [49].

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{D\langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle P \rangle - 2\mathbf{\Omega}_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle + \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R} - \alpha_\theta (\langle \theta \rangle - \theta_0) \mathbf{g}, \quad (1.2)$$

$$\frac{D\langle \theta \rangle}{Dt} \cong -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_\theta^{turb} + \kappa_\theta \Delta \langle \theta \rangle + \Phi_D. \quad (1.3)$$

Здесь $D/Dt = \partial/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \partial/\partial \mathbf{x}$ – индивидуальная производная по времени для осреднённого континуума; $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\langle p \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)$ – соответственно осреднённые поля скорости, давления и температуры; \mathbf{g} – сила тяжести на единицу массы жидкости (далее будем считать, что вектор \mathbf{g} направлен вниз, а ось z – вверх, так что $\mathbf{g} = -\mathbf{i}_z g$; \mathbf{i}_z – вертикальный орт); $\rho_0(z)$, $\theta_0(z)$ – значения плотности и температуры в покоящейся стратифицированной по направлению силы тяжести среде, удовлетворяющие уравнению гидростатики $\partial p_0 / \partial z = \rho_0 g$ и уравнению состояния $p_0 = p_0(\rho_0, \theta_0)$; ν , $\kappa_\theta = \lambda_\theta / \langle \rho \rangle c_p$ – соответственно молекулярные коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности; α_θ – коэффициент термического расширения (для идеального газа $\alpha_\theta = 1/\theta$); $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv -\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$, $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle$ – одноточечные корреляционные моменты второго порядка, имеющие соответственно смысл сдвиговых турбулентных напряжений (тензор Рейнольдса) и турбулентного потока тепла; $\Phi_D = c_p^{-1} \mathbf{R} : \partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x}$ – так называемая «диссипативная» функция.

1.1. Определяющие соотношения для локально изотропной турбулентности

Статистические характеристики и трансформационные свойства пульсирующих мелкомасштабных полей \mathbf{u}' и θ' играют, как известно, ключевую роль в проблеме замыкания известной цепочки моментных уравнений в турбулентности (в частности, уравнений для средних моментов низкого порядка), поскольку именно они обуславливают характер определяющих соотношений, связывающих турбулентные потоки количества движения $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ и температуры $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x}, t)$ с крупномасштабными полями $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$ и $\langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)$, определяя, к тому же, и саму структуру турбулентных коэффици-

ентов переноса. Напомним, что мелкомасштабное турбулентное поле является изотропным, когда любая характеризующая её статистическая величина инвариантна относительно поворотов системы отсчёта. Если, кроме этого, все осреднённые характеристики инвариантны при отражении $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ в произвольной плоскости, то турбулентное поле является зеркально-симметричным. Далее мы будем различать эти два вида симметрии.

Часто для реальной, достаточно развитой астрофизической турбулентности, подверженной слабому воздействию массовых сил с псевдовекторными свойствами, вполне допустимым приближением является классическая модель локально изотропной (однородной, изотропной и зеркально-симметричной) турбулентности, позволяющая в ряде случаев правдоподобно описывать и крупномасштабную (например, спиральную) структуру турбулентного течения в каком-либо космическом объекте, например, в Галактике [50]. Согласно концепции Колмогорова [10,11] в пределе больших чисел Рейнольдса $\mathbf{Re} \gg 1$ (здесь $\mathbf{Re} \equiv u_0 l_0 / \nu$, $u_0 = \sqrt{\langle |\mathbf{u}'|^2 \rangle}$ – характеристическая скорость пульсационного поля скорости) мелкомасштабное турбулентное поле гидродинамических параметров является локально изотропным, т.е. инвариантным относительно любых параллельных переносов, вращений и зеркальных отражений. В этом традиционном случае часто можно ограничиться следующими градиентными соотношениями для симметричного тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ и вектора турбулентного переноса тепла $\mathbf{q}_\theta^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv -\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle = -\frac{2}{3} b \mathbf{I} + 2v^{\text{turb}} \mathbf{S}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{q}_\theta^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle = -\kappa_\theta^{\text{turb}} \left(\partial \langle \theta \rangle / \partial \mathbf{x} - (\partial \langle \theta \rangle / \partial \mathbf{x})_{ad} \right), \quad (1.5)$$

$$v^{\text{turb}} = C_b b^2 / \varepsilon, \quad C_b = 0.09, \quad (\kappa_\theta^{\text{turb}} = v^{\text{turb}} / \sigma_\theta, \quad \sigma_\theta = 0.7 - 1).$$

Здесь $b \equiv \langle |\mathbf{u}'|^2 \rangle / 2$ – турбулентная энергия; ε – диссипация турбулентной энергии (величина, характеризующая скорость превращения турбулентной энергии b в тепловую энергию по мере того, как мелкие вихри $\boldsymbol{\omega}' = (\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{u}'$ деформируются под действием вязких напряжений);

$$(\mathbf{S})_{jk} = \frac{1}{2} \left(\partial \langle u_k \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_k \right)$$

– симметричный тензор деформации среднего поля скорости; v^{turb} , $\kappa_\theta^{\text{turb}} = \lambda_\theta^{\text{turb}} / \langle \rho \rangle c_p$ – соответственно турбулентные коэффициенты вязкости и температуропроводности; $(\partial \langle \theta \rangle / \partial \mathbf{x})_{ad}$ – адиабатический градиент сред-

ней температуры (для идеального газа $(\partial\langle\theta\rangle/\partial\mathbf{x})_{ad} = \mathbf{g}/c_p = -\mathbf{i}_z g/c_p$); \mathbf{I} – единичный тензор Кронекера, $(\mathbf{I})_{jk} = \delta_{jk}$. Для расширения области применения определяющих соотношений (1.4)-(1.5) на более реалистичный случай отсутствия внутреннего равновесия между полем мелкомасштабной турбулентности и полем осреднённых параметров течения, в астрофизической литературе нередко используется один из вариантов полуэмпирической модели Прандтля–Колмогорова, например, « $b-\varepsilon$ » модель.

Для жидкости со свойствами Буссинеска уравнение переноса для кинетической энергии турбулентных пульсаций b принимает вид

$$\frac{Db}{Dt} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_b^{turb} = \mathbf{R} : \frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} - \alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^{turb} \cdot \mathbf{g} - \varepsilon, \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{J}_b^{turb} \equiv \left\langle \left(|\mathbf{u}'|^2 / 2 + p' \right) \mathbf{u}' - \nu \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left(|\mathbf{u}'|^2 / 2 \right) \right\rangle = - \left(\nu + \frac{\nu^{turb}}{\sigma_b} \right) \frac{\partial b}{\partial\mathbf{x}} \quad (\sigma_b = 0.6) \quad (1.7)$$

– диффузионный поток энергии b , связанный с различными механизмами её турбулентного переноса в координатном пространстве; величина $-\alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^{turb} \cdot \mathbf{g}$, определяемая в рассматриваемом случае формулой

$$-\alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^{turb} \cdot \mathbf{g} = \frac{\nu^{turb}}{\sigma_\theta} \frac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle} \cdot \left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) \cong - \frac{\nu^{turb}}{\sigma_\theta} \frac{g}{\langle\theta\rangle} \left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right), \quad (1.8)$$

описывает генерацию энергии b , обусловленную неоднородным распределением температуры в стратифицированной в поле силы тяжести космических газовых масс.

Заметим, что для самоподдерживающегося турбулентного поля скорость диссипации ε должна иметь тот же порядок величины, что и скорость генерации турбулентности сдвиговым потоком

$$\mathbf{R} : \frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} = \nu^{turb} \frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} : \frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}}.$$

Уравнение (1.6) удобно представить в виде

$$\frac{Db}{Dt} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\nu^{turb}}{\sigma_b} \frac{\partial b}{\partial\mathbf{x}} \right) = \nu^{turb} \left(\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} : \frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial\mathbf{x}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sigma_\theta} \mathbf{Ri} \right) - \varepsilon, \quad (1.6^*)$$

где

$$v^{turb} = C_b b^2 / \varepsilon; \quad \mathbf{Ri} \equiv \frac{\mathbf{g}}{\langle \theta \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) / \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

– градиентное число Ричардсона, учитывающее влияние термической стратификации среды на эволюцию турбулентности. Из (1.6*) следует, что если число Ричардсона меньше его критического значения, $\mathbf{Ri} < \mathbf{Ri}_{cr} = \sigma_\theta$, то турбулентная энергия генерируется сдвигом скорости; когда $\mathbf{Ri} \rightarrow \sigma_\theta$, то соответствующая сумма членов в уравнении баланса турбулентной энергии обращается в нуль, а это означает, что турбулентное движение не поддерживается. Если $\mathbf{Ri} > 0$ (архимедова сила является возвращающей, стратификация гидростатически устойчива), то турбулентность тратит энергию на работу против архимедовой силы и потому развивается относительно слабо. При $\mathbf{Ri} < 0$ сила Архимеда, которая в этом случае является ускоряющей (стратификация неустойчива) всегда служит дополнительным источником энергии турбулентной конвекции.

Второе необходимое для замыкания системы (1.1)-(1.5) уравнение, а именно – уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии

$$\varepsilon \equiv v \langle (\partial u'_k / \partial x_j)^2 \rangle = v \langle |\boldsymbol{\omega}'|^2 \rangle = 2v \Omega,$$

в приближении Буссинеска принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} &\equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\varepsilon \langle \mathbf{u} \rangle) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_\varepsilon^{turb} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{b} \left(\mathbf{R} : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^{turb} \cdot \mathbf{g} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{b}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\mathbf{J}_\varepsilon^{turb} \equiv \left\langle v \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} : \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}' + 2v \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial p'}{\partial \mathbf{x}} - v \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} |\boldsymbol{\omega}'|^2 \right\rangle = - \left(v + \frac{v^{turb}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.10)$$

– диффузионный турбулентный поток скорости диссипации ε , связанный с различными механизмами её турбулентного переноса в координатном пространстве \mathbf{x} ; $C_{\varepsilon 1} = 1.43$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_b = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.13$ – универсальные константы.

Решение системы уравнений (1.1)-(1.3), (1.6) и (1.9) зависит от начальных и граничных условий, налагаемых на величины $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)$, $b(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$. Необходимость в формулировании этих условий возникает в связи с постановкой конкретных модельных задач, касающихся-

ся, например, проблемы воссоздания эволюции немагнитного астрофизического диска. Простейшими граничными условиями для системы (1.1)-(1.3) в этом случае оказываются так называемые свободные граничные условия)

$$\langle u_z \rangle(\mathbf{x}, t)|_{\pm h} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \langle u_x \rangle(\mathbf{x}, t) \right|_{\pm h} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \langle u_y \rangle(\mathbf{x}, t) \right|_{\pm h} = 0, \quad \langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)|_{\pm h} = 0, \quad (1.11)$$

где $\pm h$ – верхняя и нижняя граница диска.

Из приведённых замыкающих соотношений видно, что коэффициенты ν^{turb} и $\kappa_{\theta}^{turb} = \lambda_{\theta}^{turb} / \langle \rho \rangle c_p$, являясь функциями осреднённых параметров состояния среды, зависят также от статистических характеристик мелкомасштабного поля пульсационных скоростей \mathbf{u}' , таких, как $b(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$. Коэффициенты турбулентной вязкости ν^{turb} и теплопроводности λ_{θ}^{turb} обычно считаются положительными величинами. Однако, как же упоминалось выше, для двумерного течения было показано, что турбулентная вязкость может быть отрицательной величиной [39,41]. В этой связи важно иметь в виду, что в отличие от молекулярных коэффициентов вязкости ν и теплопроводности λ_{θ} (характеризующих физические свойства жидкости), положительность которых имеет глубокое обоснование в термодинамике необратимых процессов [51], положительность турбулентных коэффициентов переноса (характеризующих статистические свойства турбулентного движения) не имеет термодинамического доказательства.

В работе автора [52], посвящённой термодинамическому моделированию процессов переноса в турбулизованной жидкости, было показано, что в подсистеме вихревого хаоса, отвечающей мелкомасштабным пульсациям структурных параметров (стохастический компонент турбулентного течения), по мере развития турбулентности устанавливается квазистационарный режим между отбором энергии у “внешней среды” (связанной с осреднённым турбулентным движением) и потерей энергии из-за диссипативных процессов в самом вихревом континууме, при котором производство энтропии хаоса компенсируется её оттоком в подсистему осреднённого движения. Другими словами, для поддержания такого квазистационарного состояния внутри открытой подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от “внешней среды”. Именно эта поступающая в подсистему мелкомасштабных вихрей негэнтропия расходуется на возникновение и последующую эволюцию в ней мезомасштабных пространственно-временных вихревых структур. Подобное явление относится ко всё ещё недостаточно изученной тенденции турбулентного течения самоорганизовываться при больших числах Рейнольдса в крупно-и мезомасштабные когерентные вихревые образования [53].

Своеобразие термодинамического подхода к выводу замыкающих соотношений в турбулизованной жидкости состоит в том, что исключение одной термодинамической силы X_k (или части сил) может изменить всю матрицу онзагеровских феноменологических коэффициентов L_{kj} . С учётом этого обстоятельства становится необязательным обычное требование положительной определённости каждого отдельного слагаемого в выражении для полного производства энтропии

$$\sigma_S = \sum_{k,j} L_{kj} X_k X_j > 0$$

в системе. Вследствие этого, суперпозиция различных термодинамических потоков в системе может приводить, в общем случае, к отрицательным значениям некоторых диагональных элементов матрицы феноменологических коэффициентов L_{kj} , и тем самым к отрицательным значениям отдельных коэффициентов турбулентного обмена.

В работе [49] в рамках термодинамического подхода была показана возможность отрицательных значений коэффициента турбулентной вязкости ($v^{turb} < 0$) для некоторых трёхмерных течений, которая для развитой гиротропной турбулентности может реализоваться благодаря воздействию вихревого динамо, когда мелкомасштабная турбулентность усиливает и укрупняет вихри, порождая крупные вихревые образования.

В заключение этого пункта заметим, что функции Φ_D , с учётом соотношения Прандтля (1.4), можно придать следующий вид

$$\Phi_D = \frac{1}{c_p} \mathbf{R} : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} = 2 \frac{v^{turb}}{c_p} \mathbf{S} : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} = \frac{v^{turb}}{2c_p} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right)^2.$$

Из этого соотношения следует, что если $v^{turb} < 0$, то функция Φ_D также будет отрицательной, т.е. в этом случае турбулентная энергия мелкомасштабных пульсаций [см. (1.6)] уже «не диссипирует», а наоборот, расходуется на генерирование крупно- и мезомасштабных когерентных вихревых структур. Следовательно, при наличии отрицательной турбулентной вязкости осреднённое течение (в том числе крупномасштабные вихревые образования) получает кинетическую энергию от мелкомасштабных вихревых движений

$$D(\langle \mathbf{u} \rangle^2 / 2) / Dt = -\mathbf{R} : (\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x}) + \dots;$$

при этом сами хаотические вихревые движения либо постепенно ослабевают (см. (1.6)), либо поддерживаются за счёт локального притока тепла в систему, связанного с некоторыми другими внутренними процессами [37], например, регулярным преобразованием «химического» тепла в кинетиче-

скую энергию мелкомасштабных возмущений. В частности, для влажной гиротропной атмосферы мелкомасштабная турбулентность может поддерживаться за счёт скрытых потоков тепла при конденсации водяного пара [54].

Итак, в случае зеркально-симметричной турбулентности определяющие соотношения (1.4) и (1.5), совместно с уравнениями (1.6) и (1.9) полностью замыкают гидродинамические уравнения (1.1)-(1.3) для осреднённых полей скорости $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$ и температуры $\langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)$. Однако практика моделирования показала, что подобный подход, не учитывающий возможности образования разномасштабных когерентных вихревых структур, оказывающих сильное влияние на динамику течения космического вещества, имеет узкую область применения при анализе процессов турбулентного переноса в немагнитном астрофизическом диске.

2. Зеркально-несимметричная турбулентность в диске

При существовании зеркальной симметрии мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ вихревая спиральность h (в случае преобразования $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ координат) должна оставаться, с одной стороны, неизменной, поскольку все статистические свойства этого поля не меняются при зеркальном отражении, но с другой стороны она должна изменить знак, поскольку h – псевдоскаляр. Поэтому для зеркально-симметричной турбулентности $h = 0$. Таким образом, величина $h \neq 0$, связанная с топологической структурой сложного поля завихрённости, является фундаментальной мерой «отсутствия отражательной симметрии» в турбулентности. При этом следует иметь в виду, что поле $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ с отличной от нуля средней спиральностью, представляющее из себя анизотропный континуум, образованный совокупностью произвольно ориентированных мелкомасштабных вихрей (в котором, однако, правовращательные вихревые структуры более вероятны, чем левовращательные или наоборот), может не проявлять зеркальную симметрию только лишь по отношению к одной плоскости.

Примером такого поля является турбулентное поле пульсационных скоростей во вращающейся конвективной зоне солнечного протопланетного диска, когда возможно генерирование спиральности под воздействием кориолисовой силы $2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle$ и стратификации массовой плотности в поле силы тяжести \mathbf{g} . Средние свойства такого поля не остаются инвариантными при отражениях в центральной плоскости диска, $z \rightarrow -z$. Важно иметь в виду, что для спиральной турбулентности определяющие соотношения (1.4) и (1.5) уже не вполне пригодны и нуждаются в определённой моди-

фикации, учитывающей вероятную анизотропию поля мелкомасштабной турбулентности (см., например, [14,49,57-60]). Более того, в случае спиральной турбулентности закон парности (симметричности) тензора Рейнольдса \mathbf{R} может нарушаться на макроуровне¹⁷⁾, $R_{ij} \neq R_{ji}$ [6,55,60-63]. Прежде чем привести возможный вариант такого рода обобщённых реологических соотношений для турбулентных потоков $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x},t)$, рассмотрим ключевое при моделировании процессов переноса в гиротропной турбулентности эволюционное уравнение для осреднённой вихревой спиральности h .

2.1. Уравнение переноса для вихревой спиральности

Вывод уравнения для вихревой спиральности $h(\mathbf{x},t) \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ приведён в работе автора [64]. В предположении, что система координат вращается вокруг фиксированной в пространстве оси Oz с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$, это уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{Dh}{Dt} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \mathbf{J}_h^{turb} - \mathbf{v} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right\} + \\ + \mathbf{R} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \left(\mathbf{G}^\omega - \frac{\partial b}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle - \alpha_\theta \mathbf{g} \cdot \langle \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\omega}' \rangle - \varepsilon_h, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0$ – так называемый абсолютный вихрь;

$$\mathbf{J}_h^{turb} \equiv \left\langle (\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}') \mathbf{u}' - \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}'|^2 - p'/\rho_0 \right) \boldsymbol{\omega}' \right\rangle = -C_{h1} \frac{b^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}, \quad (C_{h1} \cong 0.16) \quad (2.2)$$

– диффузионный поток спиральности h , связанный с различными механизмами её турбулентного переноса в координатном пространстве;

¹⁷⁾ При пространственном осреднении гидродинамических уравнений для мгновенного движения, исключающем рейнольдсовский постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования, получается осреднённое уравнение движения с несимметричным тензором Рейнольдса $R_{ij} \equiv Q_{ij}(\mathbf{x},0,t,0)$, где $Q_{ij}(\mathbf{x},\xi,t,\tau) = \langle u'_i(\mathbf{x},t) u'_j(\mathbf{x} + \xi, t + \tau) \rangle$ – несимметричный корреляционный тензор второго порядка [55]. Заметим, также, что ещё Рейнольдс в своей оригинальной публикации [56], осредняя поля скоростей по объёму и отнеся различные средние значения к центру масс этого объёма, полагал компоненты турбулентных напряжений R_{ij} и R_{ji} различными.

$$\varepsilon_h \equiv 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} \right\rangle = C_{h2} \frac{\varepsilon}{b} h, \quad (C_{h2} \cong 1) \quad (2.3)$$

– скорость диссипации спиральности в турбулентном потоке;

$$\mathbf{G}^{\omega}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle \quad (2.4)$$

– турбулентная сила вихревого динамо (аналог турбулентной электродвижущей силы $\mathbf{G} \equiv c^{-1} \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}$ в законе Ома для средних электромагнитных полей [6,14,15], которая, при учёте тождества

$$\mathbf{a} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} |\mathbf{a}|^2 - \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{a},$$

может быть преобразован к виду

$$\mathbf{G}^{\omega} \equiv \left\langle \mathbf{u}' \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{u}' \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \frac{1}{2} |\mathbf{u}'|^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle = \frac{\partial b}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

С учётом этого соотношения уравнению (2.1) можно придать вид

$$\frac{Dh}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \mathbf{J}_h^{turb} - \nu \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right\} + \mathbf{R} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R} \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle - \alpha_{\theta} \mathbf{g} \cdot \langle \theta' \boldsymbol{\omega}' \rangle - \varepsilon_h, \quad (2.6)$$

из которого, в частности, следует, что спиральность h генерируется в отражательно-несимметричной турбулентности благодаря вращению, неоднородности температуры и интенсивности турбулентных пульсаций.

Для развитой турбулентности, когда в потоке устанавливается локально-стационарное состояние поля спиральности, из уравнения (2.6), в предположении пространственной однородности крупномасштабного осреднённого течения $\langle \mathbf{u} \rangle$, можно найти явную алгебраическую связь спиральности h с угловой скоростью вращения астрофизического диска, неоднородностью его температуры (плотности) и интенсивности турбулентных пульсаций. Действительно, в этом случае, при использовании тождественного преобразования

$$\mathbf{R} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R} \right) \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{R} \cdot \langle \boldsymbol{\omega} \rangle) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R} \right) \cdot (\langle \boldsymbol{\omega} \rangle + \boldsymbol{\Omega}_0),$$

уравнение (2.6) можно преобразовать к виду

$$0 = -2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R} \right) \cdot (\langle \boldsymbol{\omega} \rangle + \boldsymbol{\Omega}_0) - \alpha_{\theta} \mathbf{g} \cdot \langle \theta' \boldsymbol{\omega}' \rangle - \varepsilon_h. \quad (2.7)$$

Отсюда, с учётом определяющего уравнения (1.4) для тензора Рейнольдса (в предположении пространственной однородности осреднённого течения $\langle \mathbf{u} \rangle$) и справедливости приближенного соотношения

$$\langle \theta' \omega' \rangle \cong \frac{h}{b} \mathbf{q}_\theta^{turb}, \quad (2.8)$$

получим искомое соотношение:

$$h \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \omega' \rangle = -\frac{\frac{2}{3} \Omega_0 \cdot (\partial b / \partial \mathbf{x})^2}{\alpha_\theta \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}_\theta^{turb} + C_{h2} \varepsilon} \cong \frac{\frac{2}{3} \Omega_0 \cdot (\partial b / \partial \mathbf{x})^2}{\frac{v^{turb}}{\sigma_\theta} \frac{\mathbf{g}}{\langle \theta \rangle} \cdot \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) - C_{h2} \varepsilon}. \quad (2.9)$$

Таким образом, тепловая турбулентная конвекция в вертикальном направлении аккреционного диска на некоторых расстояниях от протозвезды в областях между его экваториальной плоскостью и «верхней» поверхностью с большей вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям, поскольку поднимающееся вещество будет расширяться и вращаться под действием сил Кориолиса, приводя, таким образом, к левовинтовому спиральному движению. При этом опускающееся вещество будет сжиматься, и под действием этих сил будет вращаться в противоположном направлении, опять-таки совершая левовинтовое движение. Напротив, в «нижней» части диска будет преобладать правовинтовые спиральные движения. Баланс левовинтовых и правовинтовых винтовых движений возможен только в окрестности экваториальной плоскости диска при отсутствии градиента $(\partial b / \partial \mathbf{x})$ интенсивности турбулентности, т.е. уже на самых поздних этапах эволюции аккреционного диска.

2.2. Определяющие законы для зеркально-несимметричной турбулентности

Проблема замыкания для зеркально-несимметричной турбулентности оказывается более сложной, чем в традиционном изотропном случае [14], поскольку в модифицированных уравнениях (1.4)-(1.5) для тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv -\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$ и вектора турбулентного переноса тепла $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle$ появляется целый ряд дополнительных членов, обусловленных теми векторными полями, благодаря которым возникает анизотропия мелкомасштабного турбулентного поля. В частности, при моделировании дисковой спиральной турбулентности в структуре феноменологических коэффициентов следует учитывать возможную анизотропию поля мелкомасштабной турбулентности, обусловленную действием кориолисовой и гравитационной сил \mathbf{g} .

Чтобы не усложнять изложение, рассмотрим здесь относительно простую модификацию определяющих соотношений (1.4)-(1.5), отвечающую

пространственной изотропии коэффициентов турбулентного переноса. Более общие определяющие соотношения для спиральных турбулентных течений, в частности, с тензорными феноменологическими коэффициентами, можно найти, например, в работах [57,58,65]. Ограничимся также случаем простых алгебраических моделей замыкания, когда в определяющих соотношениях достаточно учитывать пространственные производные только первого порядка. Тогда в линейном приближении, относительно направления анизотропии (неоднородности) мелкомасштабного турбулентного поля, характеризуемого вектором \mathbf{g} или $(\partial h / \partial \mathbf{x})$, возможна следующая модификация градиентных соотношений (1.4)-(1.5) (см., например, [45,57,58,63-65]):

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{R})_{ij} = & -\frac{2}{3}b \delta_{ij} + 2v^{turb} S_{ij} - v_h^{turb} \left\{ \langle \omega_{ai} \rangle \frac{\partial h}{\partial x_j} + \langle \omega_{aj} \rangle \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left(\langle \omega_a \rangle \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta_{ij} \right\} - \\
 & - C_s v_h^{turb} \left\{ \varepsilon_{ilm} S_{jm} + \varepsilon_{jlm} S_{im} \right\} \frac{\partial h}{\partial x_l} - v_\theta^{turb} \left(q_{qi}^{turb} g_j + q_{qj}^{turb} g_i - \frac{2}{3} (\mathbf{q}_\theta^{turb} \cdot \mathbf{g}) \delta_{ij} \right), \quad (2.10) \\
 q_{\theta i}^{turb} = & -\kappa_\theta^{turb} \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} - \frac{g_i}{c_p} \right) + \kappa_{\theta 1}^{turb} S_{ij} \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} - \frac{g_j}{c_p} \right) + \\
 & + \kappa_{\theta 2}^{turb} \varepsilon_{ijk} \langle \omega_{aj} \rangle \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} + \frac{g_k}{c_p} \right). \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Здесь ε_{ijk} – единичный антисимметричный тензор Леви-Чивита;

$$v^{turb} = C_b \frac{b^2}{\varepsilon}, \quad v_h^{turb} = C_{v1} \frac{b^4}{\varepsilon^3}, \quad v_\theta^{turb} = C_{v2} \alpha_\theta \frac{b^3}{\varepsilon^2}, \quad C_b = 0.09, \quad C_{v1} \approx 0.5, \quad (2.12)$$

$$\kappa_\theta^{turb} = \frac{v^{turb}}{\sigma_\theta}, \quad \kappa_{\theta s}^{turb} = C_{\theta s} \frac{b^3}{\varepsilon^2} \quad (s=1,2),$$

$$\sigma_\theta = 0.7 - 1, \quad C_{\theta s} - const, \quad C_s = 1 \quad (2.13)$$

– скалярные феноменологические коэффициенты. Третий и четвертый члены в соотношении (2.10) описывают влияние интегральной спиральности на симметричную часть тензора напряжений, т.е. влияние двух возможных направлений винтовых движений.

2.3. Вращательная вязкость

Заметим, что в последнее время вновь возродился интерес к асимметричной турбулентности¹⁸⁾, обусловленный существенными достижениями в области проблемы пространственного осреднения различных уравнений движения в механике сплошных сред, включая, например, течения жидкости в пористых средах, течение взвесенесущих потоков и т.п. Так, в ряде работ (см., например, [55, 66-68]) было показано, что при более аккуратном пространственном осреднении гидродинамических уравнений (исключая традиционный рейнольдсовский постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования), с целью описания движений малых элементов жидкости в макромасштабе, получаются уравнения движения с несимметричным тензором Рейнольдса $R_{ik} \neq R_{ki}$. Эти уравнения содержат, в частности, составляющие с вращательной вязкостью, связанные с антисимметричной частью $R_{ij}^a \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji})$ турбулентного тензора напряжений R_{ik} . В работе автора [69] было показано, что в отличие от ламинарного течения в спиральной турбулентности, когда течение утрачивает симметрию при отражении, закон парности $R_{ij} = R_{ji}$ турбулентных напряжений, соответствующих такому течению, может нарушаться¹⁹⁾. При этом, роль статистической характеристики мелкомасштабного поля скорости \mathbf{u}' , способной обеспечить появление этого эффекта, может выполнять лишённая отражательной симметрии вихревая спиральность.

С учётом асимметричности тензора турбулентных напряжений Рейнольдса для тензора R_{ik} было получено представление

$$R_{ik} \equiv -\langle u'_i u'_k \rangle = R_{ik}^s + R_{ik}^a, \quad (2.14)$$

где симметричная часть $R_{ik}^s \equiv \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki})$ задаётся формулой (2.10), а для антисимметричной части справедливо соотношение

$$R_{ij}^a \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = -v_{rot}^{turb} \varepsilon_{ijk} (\langle \omega_k \rangle - m_k / J), \quad (2.15)$$

отвечающее в немагнитной спиральной турбулентности новому диссипативному процессу. Здесь m_k , $J \cong (l_0)^2$ – соответственно эффективные собственный момент импульса и момент инерции турбулентных вихрей; v_{rot}^{turb} – вращательная турбулентная вязкость, которая, являясь функцией осред-

¹⁸⁾ Асимметричная гидромеханика братьев Ф. и Е. Коссера давно получила широкое признание, например, в теории жидких кристаллов и теории жидкого гелия.

¹⁹⁾ Это мнение противоречит концепции Моффата [20], который сохранил симметрию тензора турбулентных напряжений.

нённых параметров состояния среды, зависят также от статистических характеристик мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$, в частности, от завихрённости $(\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{u}'$, характеризующей вихревую “анизотропию” турбулентного течения на микроуровне; при этом коэффициент ν_{rot}^{turb} является псевдоскаляром, поскольку тензор $\varepsilon_{ijk} \langle \omega_{ak} \rangle$ – псевдотензор второго порядка. По этой причине вращательная вязкость ν_{rot}^{turb} , может быть отличной от нуля только тогда, когда само поле пульсационных скоростей не является статистически инвариантным относительно преобразования чётности, в частности, когда спиральность $h \neq 0$. Действительно, в случае турбулентности с зеркальной симметрией, коэффициент ν_{rot}^{turb} не изменяется при выполнении преобразования отражения, но, с другой стороны, коэффициент ν_{rot}^{turb} должен изменить свой знак, поскольку он является псевдоскаляром. Отсюда следует, что для изотропной и зеркально-симметричной турбулентности коэффициент $\nu_{rot}^{turb} = 0$.

По поводу соотношения (2.15) следует заметить следующее. Как известно, согласно классической теореме Нётер каждому топологическому свойству динамической системы соответствует свой закон сохранения. В работе [45] было показано, что появление дополнительных топологических особенностей течения в спиральной турбулентности обязано закону сохранения момента импульса турбулентных вихрей (молей). Однако этот закон нетривиален лишь при антисимметричности тензора напряжений Рейнольдса. Таким образом, для замыкания соотношения (2.15) необходимо дополнительно привлекать к рассмотрению (как и в асимметричной гидромеханике Коссера [68]) закон сохранения собственного момента импульса турбулентных вихрей m_k , который добавляет в полную систему осреднённых гидродинамических уравнений для спиральной турбулентности собственный спин турбулентного вихря (см., например, [55,67,68]).

Следует отметить, что соотношение (2.15), содержащее члены с вращательной турбулентной вязкостью ν_{rot}^{turb} , является одним из вариантов так называемого Λ – эффекта [70] в спиральной турбулентности немагнитной жидкости, поскольку именно спиральность является той специфической характеристикой анизотропного турбулентного поля, на которой базируются физические модели Λ – эффекта. Этот эффект, представляющий собой аналог α - эффекта в МГД– турбулентности, описывает, в конечном счёте, механизм генерации мезомасштабных вихрей полем гиротропной турбулентности, в более общем случае ассиметричной турбулентности – механизм генерации крупномасштабных вихрей полем завихрённости среднего движения при взаимодействии его с собственными моментами им-

пульса m_k турбулентных молей – сопряжёнными переменными завихренности [55,71].

2.4. Уравнение диффузии осреднённого вихря

Введём теперь в рассмотрение одно из основных для адекватного описания спиральной турбулентности уравнение, а именно – эволюционное уравнение распределения осреднённого вихря $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle(\mathbf{x}, t)$ при произвольном непрерывном движении жидкости. Уравнение диффузии завихренности $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$ в рассматриваемом здесь приближении Буссинеска может быть получено путём применения операции ротора к уравнению движения (1.2) для средней скорости; в результате будем иметь [64]

$$\frac{D}{Dt} \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle = \left(\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{g} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\rho_0} \right) + \nu \Delta \langle \boldsymbol{\omega} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{G}^\omega. \quad (2.16)$$

Это уравнение совместно с уравнением Пуассона для давления

$$\Delta \left(\langle P \rangle + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \boldsymbol{\omega} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\rho_0} \right) \quad (2.17)$$

(результат взятия дивергенции от (1.2)), составляют систему двух уравнений полностью эквивалентную уравнению движения (1.2). Поскольку распределение завихренности $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$ в потоке часто является локальным (даже в тех случаях, когда поля $\langle \mathbf{u} \rangle$ и $(\partial P / \partial \mathbf{x})$ распространяются на все пространство), то моделирование осреднённого движения турбулизованной жидкости при помощи поля завихренности $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$ во многих случаях может оказаться более экономным, чем при помощи осреднённого поля скорости $\langle \mathbf{u} \rangle$.

Из тождества $\mathbf{G}^\omega(\mathbf{x}, t) \equiv (\partial b / \partial \mathbf{x}) + (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}$ следует, что вихревое динамо $(\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{G}^\omega$ отлично от нуля лишь в том случае, когда статистические свойства поля скорости \mathbf{u}' зависят от координат (иными словами поле $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ является пространственно неоднородным). Такая неоднородность может быть вызвана, в частности, с неоднородностью деформирующего действия крупномасштабного поля скоростей $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$. Если использовать для тензора $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ традиционное градиентное представление (1.4), то $(\partial / \partial \mathbf{x}) \times \mathbf{G}^\omega = \nu^{turb} \Delta \langle \boldsymbol{\omega} \rangle$. Таким образом, в этом случае изотропная отражательно-симметричная (в статистическом смысле) турбулентность может вызывать только турбулентную диффузию осреднённой завихренности

$\langle \boldsymbol{\omega} \rangle(\mathbf{x}, t)$, которая, как правило, много эффективней молекулярной. Вместе с тем, возникающая в сильно вращающихся астрофизических объектах спиральная турбулентность способна действовать и как генератор крупномасштабного вихревого поля $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$ (в случае когда $(\partial/\partial \mathbf{x}) \times \mathbf{G}^{\omega} = (\partial/\partial \mathbf{x}) \times (\partial/\partial \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}) \neq v^{turb} \Delta \langle \boldsymbol{\omega} \rangle$, или когда $v^{turb} < 0$) обеспечивая при надлежащем определении тензора сдвиговых турбулентных напряжений [см. (2.10) и (2.15)] его экспоненциальный рост. Другими словами, спиральная турбулентность через механизм вихревого динамо

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{G}^{\omega} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R} \right) \right)_p = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \varepsilon_{pki} R_{ij} = v^{turb} \Delta \langle \boldsymbol{\omega} \rangle_p -$$

$$-\frac{1}{2} v_h^{turb} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \varepsilon_{pki} \left\{ \langle \boldsymbol{\omega}_{ai} \rangle \frac{\partial h}{\partial x_j} + \langle \boldsymbol{\omega}_{aj} \rangle \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left(\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta_{ij} \right\} \quad (2.18)$$

может усиливать и укрупнять вихри, порождая когерентные вихревые структуры во вращающемся газе [32-34,44-46]. Более того, механизмом вихревого динамо в спиральной турбулентности, когда в результате реализации обратного энергетического каскада генерируются и поддерживаются крупно- и мезомасштабные вихревые образования, осуществляется и их энергетическая подпитка. Таким образом, вследствие перераспределения турбулентной энергии, вихревое динамо в дисковой турбулентности может породить иерархическую систему плотно упакованных пакетов энергетически ёмких вихрей (определённого размера и, в общем случае, с фрактальным распределением массовой плотности [49]), приводящую, в конечном счёте, к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами космического вещества (в общем случае гетерогенного), в результате чего возможно самопроизвольное образование и рост газопылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями диска, существенная модификация спектра колебаний и т.п. Естественно, на заключительной фазе процесса образования крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет решающая роль должна принадлежать силе самогравитации [72].

3. Спектральные законы в спиральной турбулентности

Предположим, что некоторый источник пульсационной кинетической энергии на масштабе возбуждения турбулентности $k_0 = 1/l_0$ (вдали от

диссипативного масштаба) в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил в сильно вращающемся дисковом веществе сгенерировал также отличную от нуля вихревую спиральность h . Тогда, в частном случае пространственно однородной турбулентности, свободное вырождение турбулентного движения жидкости, согласно уравнениям (1.6) и (2.1), происходит по законам

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\varepsilon \equiv -\nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle = \nu \langle |\boldsymbol{\omega}'|^2 \rangle, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\varepsilon_h = -2\nu \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что в невязком пределе $\nu \rightarrow 0$, в отсутствии диссипации и накачки движения (во всей инерционной области $k_0 \ll k \ll k_\nu = 1/l_\nu$, разделяющей зоны генерации и диссипации турбулентной энергии в пространстве волновых чисел k ; здесь $l_\nu = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ – колмогоровский диссипативный масштаб) спиральность $h(\mathbf{x}, t)$ пульсационного поля скоростей, подобно турбулентной энергии $b(\mathbf{x}, t)$, является сохраняющейся величиной²⁰⁾. Заметим, что сохранение спиральности в каскадном процессе означает также сохранение структуры «узловатости» (т.е. общего числа зацеплений вихревых трубок друг с другом при гладкой деформации течения и условия сохранения циркуляции скорости) вихревого поля²¹⁾, которая остаётся неизменной в каскадном процессе в инерционной области, но уничтожается вязкостью на масштабах l_ν .

²⁰⁾ Важно отметить, что диссипативный масштаб для спиральности l_h не совпадает, вообще говоря, с колмогоровским масштабом l_ν , но отношение этих двух масштабов $l_\nu / l_h \approx \nu^{9/28}$ стремится при больших числах Рейнольдса (малая вязкость) к нулю. Это означает, что в мелкомасштабную часть спектра спиральность не доходит [73].

²¹⁾ Напомним, что когда отдельная вихревая нить C_j , прежде чем замкнуться, обвивается вокруг себя, то на ней появляется узел. Вихревая спиральность как раз и определяет число заузленных и зацепленных вихревых трубок в объёме, занятом жидкостью: $h = \sum_{ij} 2\alpha_{ij} \Gamma_i \Gamma_j$; здесь α_{ij} – коэффициенты зацепления вихревых нитей – положительные или отрицательные целые числа, связанные с числом витков одной нити C_i вокруг другой C_j ; Γ_j – циркуляция отдельной вихревой нити [18,19]. Таким образом, при генерировании вихревой спиральности появляются крупномасштабные зацепления вихревых линий рассматриваемого турбулентного течения.

Свободная эволюция трёхмерной изотропной турбулентности несжимаемой жидкости сопровождается, как известно, каскадным переносом турбулентной энергии $b \equiv \langle |\mathbf{u}'|^2 / 2 \rangle = \int b(k) dk$ к малым масштабам. Скорость диссипации ε турбулентной энергии, считавшаяся в первоначальной теории Колмогорова [11] универсальной константой, характеризует в этом случае также и поток кинетической энергии b , который переносится каскадным образом без потерь вдоль последовательно возрастающих волновых чисел $k_n \gg k_{n-1}$ (уменьшающихся масштабов длины, $l_n = 1 / k_n$) внутри инерционного интервала до тех пор, пока не достигает диссипативного масштаба l_v . Так как в инерционном интервале изотропная спектральная плотность энергии $b(k)$ статистически не связана с источником энергии, ограниченным волновым числом k_0 , то она в пространстве волновых чисел описывается классической формулой Колмогорова

$$b(k) = K_b \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (k_0 \ll k \ll (\varepsilon / \nu^3)^{1/4}), \quad (3.3)$$

которая может быть получена из соображений размерности. Здесь $K_b = 1.44 \pm 0.06$ – безразмерная постоянная константа Колмогорова.

По аналогии с энергетическим спектром $b(k)$ можно ввести в рассмотрение спектральную плотность спиральности $h(k)$ таким образом, что

$$h(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = \int h(k) dk.$$

Если в двумерном случае спектральные плотности энергии $b(k)$ и энтропии $\Omega(k)$ связаны соотношением $\Omega(k) \propto k^2 b(k)$, то для спектральной плотности спиральности существует только ограничение сверху [24]

$$|h(k)| \leq 2k b(k) \quad (3.4)$$

и известные аргументы [9], приводящие к выводу о существовании двух инерционных интервалов как в двумерной турбулентности, в этом случае не работают. Неравенство (33) позволяет, однако, реализоваться двум сценариям поведения спиральности в трёхмерном гиротропном турбулентном потоке [23]. Во-первых, возможен режим, при котором имеет место одновременный прямой каскад обеих сохраняемых величин $b(\mathbf{x}, t)$ и $h(\mathbf{x}, t)$ к малым масштабам. Во-вторых, в отдельных случаях, по аналогии с двумерной турбулентностью, реализуется каскад этих величин к противоположным концам инерционного интервала, причём прямой каскад спиральности $h(\mathbf{x}, t)$ к мелким масштабам сопровождается синхронным обратным каскадом энергии $b(\mathbf{x}, t)$ к крупным масштабам, т.е. противоположно тому, что происходит в «обычном» турбулентном потоке. Какой сценарий осу-

ществляется для данного турбулентного течения, зависит от интегральных свойств системы, а также от граничных и начальных условий.

3.1. Каскад энергии при отсутствии вращения

Рассмотрим вначале классическую феноменологию Колмогорова [10,11], распространённую на спирально-энергетический каскад в отсутствии вращения. Первый сценарий предполагает пассивное поведение спиральности в турбулентном потоке [73]. Это означает, что реализуется обычный колмогоровский каскад энергии $b(k)$ к малым масштабам с законом (3.3). Пусть скорость генерирования спиральности на волновых числах $\approx k_0$ равна ε_h . Поскольку спиральность порождается одновременно с энергией, то, очевидно, она ограничена неравенством вида $|\varepsilon_h| \leq k_0 \varepsilon$. Если спиральность инжектируется с максимальной скоростью, то $|\varepsilon_h| \approx k_0 \varepsilon \approx u_0^3 / l_0^2$. Так как спектр $h(k)$ должен быть пропорционален ε_h (в силу псевдоскалярного характера обеих величин), и единственными дополнительными параметрами, определяющими $h(k)$ в инерционной области $k_0 \ll k \ll k_v$, могут быть ε и k , то из соображений размерности следует оценка

$$h(k) \cong C_h \varepsilon_h \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}, \quad b(k) = K_b \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.5)$$

т.е. спектральные функции $b(k)$ и $h(k)$ зависят от k одинаковым образом [20]. Здесь C_h – универсальная постоянная, аналогичная колмогоровской постоянной C_b . Итак, в рассматриваемом сценарии спиральность переносится по всему инерционному масштабу как пассивная примесь, а диссипация энергии и спиральности происходит на одних и тех же масштабах [74].

При этом следует иметь в виду, что если рассматриваемом потоке жидкости реализуется режим генерирования почти максимальной спиральности для каждого значения волнового числа, то суммарный перенос кинетической энергии к более высоким волновым числам будет значительно ослаблен, а потому процесс затухания турбулентности будет существенно растянут во времени [30,75]. Для рассматриваемого здесь случая дисковой турбулентности отсюда можно сделать следующий важный вывод: относительно длительное существование турбулентности во вращающемся астрофизическом диске (в частности, в солнечном аккреционном

диске) с полным основанием может быть приписано её гиротропному характеру.

Во втором возможном сценарии обычно используется гипотеза о том, что энергетический спектр $b(k)$ может зависеть только от волнового числа k и постоянного во всем инерционном интервале спектрального потока энергии ε (вносимой в поток на макромасштабе $l_0 = 1/k_0$). Спектральная функция спиральности $h(k)$ определяется при этом процессом переноса спиральности от источника, действующего на волновых числах k_0 , к вязкому стоку на волновых числах k_v и далее. Соображения размерности приводят в этом случае к следующим спектральным законам для энергии и спиральности

$$b(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad h(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-2/3}. \quad (3.6)$$

Фактически, возможность такого двойного каскада энергии и спиральности в развитой гиротропной турбулентности была предсказана ещё в работе [23]. Используя феноменологические соображения, эти авторы (см. также [76]), по аналогии с двумерной турбулентностью, полагали, что возможен чистый каскад спиральности к большим волновым числам (с нулевым энергетическим потоком), наряду с обратным энергетическим каскадом к низким волновым числам (без потока спиральности).

Следует, однако, отметить, что выполненные почти незамедлительно численные эксперименты не убедили в правдоподобности подобной идеи обратного каскада [30,77]. Вместе с тем, в более поздних работах [78] существование двойного каскада кинетической энергии и спиральности в трёхмерной турбулентности было надёжно подтверждено при прямом численном моделировании спиральной турбулентности, в частности, в рамках LES – теории (*large-eddy simulation*) [24].

Наряду с этим, в работах [79,80] была высказана продуктивная гипотеза о спиральной природе трёхмерных когерентных вихревых образований, возникающих в некоторых случаях в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса. Согласно ей, в турбулентном потоке возможно существование некоторых локальных областей с ненулевой спиральностью ($h \neq 0$), в которых, из-за возможного в диссипативном интервале волновых чисел подавления спиральностью процесса рассеяния мелкомасштабной кинетической энергии (см. выше), диссипация турбулентной энергии будет происходить менее активно, чем в неспиральных областях. В результате, в трёхмерном потоке возможно возникновение совокупности когерентных спиральных структур, разделённых неспиральными («обычными») диссипативными вихревыми образованиями (возможно с фрактальной размерностью), которые могут взаимодействовать друг с другом, видоизменяясь и объединяясь. Данная гипотеза нашла непосредственное подтверждение в численном эксперименте при компьютерном моделировании эволюции по-

тока вихрей Тейлора–Грина (см., например, [81])²²⁾. В конечном счёте, это пример того, как мелкомасштабные турбулентные движения в спиральной турбулентности на основе обратного спирального каскада могут приводить к появлению мезомасштабных вихревых структур, в частности, смерчей, тайфунов, тропических циклонов и других мощных спиральных вихрей в атмосфере [82].

3.2. Каскад энергии при учёте вращения

Поскольку спиральность во вращающихся астрофизических дисках обязана своим появлением кориолисовой силе, то источники гиротропности имеются во всех масштабах, в том числе и в инерционном масштабе, что, естественно должно оказывать влияние на механизм энергетического каскада. Поэтому важно рассмотреть специфику прямого и обратного каскада при наличии вращения [26,27,48].

Можно предположить, что спектры турбулентной энергии и спиральности имеют следующий общий вид

$$b(k) \cong C_b \varepsilon^a \varepsilon_H^b |\Omega|^f k^{-e}, \quad h(k) \cong C_H \varepsilon^c \varepsilon_H^d |\Omega|^g k^{-h}. \quad (3.7)$$

Такой вид этих функций, принимающий во внимание энергию, спиральность и вращение, охватывает все исследованные в литературе случаи; фигурирующие в (3.5) восемь спектральных индексов могут быть определены из анализа размерностей и феноменологии явления. Результаты подобного анализа суммированы в табличном виде в работе [25]. В частном случае, когда $e = h = 5/3$, $a = 2/3$, $b = 0$, $c = -1/3$, $d = 1$, $f = g = 0$, из (3.7) следует классическая феноменология Колмогорова (3.3), (3.5), распространённая на объединённый каскад с энергетической спиральностью.

В отличие от стандартной трёхмерной турбулентности без вращения, когда энергия передаётся по каскаду к мелким масштабам, или двумерного случая с инверсным каскадом, в присутствии спиральности наблюдается как прямой, так и обратный каскад. В частности, в работах [27-29,47,48,85,86] исследована турбулентность, которая наблюдалась в лаборатории, в атмосферных потоках и исследовалась при прямом численном моделировании. Рассмотренный в них феноменологический подход, основанный на каскаде спиральности к мелким масштабам, приводит к различным спектральным индексам. Например, в работах [47,85] был изучен связанный с инерционными волнами энергетический каскад. В этом случае спектры турбулентной энергии и спиральности имеют вид

²²⁾ Заметим, что существуют, однако, и другие численные расчёты турбулентного течения изотропной неоднородной жидкости, в которых не наблюдается такого рода корреляции между локальной спиральностью и рассеянием мелкомасштабной кинетической энергии [83,84].

$$b(k) = C_b \varepsilon^{1/2} |\Omega|^{1/2} k^{-2}, \quad h(k) = C_h \varepsilon_h \varepsilon^{-1/2} |\Omega|^{1/2} k^{-2}. \quad (3.8)$$

В работах [27-29] исследовано влияние спиральности на каскад энергии с помощью прямого численного моделирования вращающейся турбулентности при значениях числа Россби 0.02. Полученные при этом результаты свидетельствуют о том, что присутствие спиральности играет важную роль в динамике турбулентного течения. Так было показано, что в атмосфере Земли, когда существует взаимодействие турбулентных вихрей с инерционными волнами, при небольших значениях числа Россби осуществляется каскад энергии к большим масштабам; спиральность при этом передаётся по каскаду к малым масштабам. В связи со сказанным отметим ещё раз, что в рамках спиральной турбулентности, допускающей возможность реализации обратного энергетического каскада Ричардсона-Колмогорова, возможно не только прогнозировать зарождение относительно устойчивых и энергетически ёмких крупно- и мезомасштабных когерентных вихревых структур, но и объяснить эффект отрицательной вязкости в трёхмерной турбулентности.

Заключение

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты. Математическое моделирование является, по существу, единственным методом, позволяющим реконструировать соответствующие процессы с учётом ограничений, накладываемых доступными наблюдательными данными эволюции околозвёздных дисков на разных стадиях. Сценарий такой эволюции в общем случае включает в себя аккрецию на диск протозвёздного вещества и его температурное фракционирование, последовательное образование фаз в гетерогенной системе солнечного состава при её охлаждении, сжатие и уплотнение диска вплоть до возникновения гравитационной неустойчивости пылевого субдиска, обра-

зующегося в экваториальной плоскости, образование первичных пылевых кластеров, служащих основой зародышей планет. Очевидно, столь сложный характер процессов требует, прежде всего, разработки адекватной теоретической основы, на базе которой строятся упомянутые модели.

Автором в работе [49] была предпринята попытка разработки нового подхода с использованием методов стохастической термодинамики, многокомпонентной гидродинамики и механики гетерогенных сред, позволяющая учесть динамические процессы взаимодействия турбулентного газа и пыли, процессы коагуляции частиц, возникновение когерентных упорядоченностей на фоне хаотических движений в крупномасштабных турбулентных струях, а также влияние гидродинамической спиральности на эволюцию турбулентности в аккреционном диске. Этот подход даёт возможность проследить несколько важных этапов образования газопылевого диска вокруг молодого Солнца, проходящего стадию Т Тельца, его дальнейшую динамическую, термическую и космохимическую эволюцию, включающую этапы конденсации и уплотнения вещества, вплоть до образования пылевых кластеров, служащих зародышами при формировании планетезималей, и в дальнейшем планетных тел. К сожалению, современная вычислительная математика все ещё не позволяет провести в полном объёме комплексный численный анализ крупномасштабных процессов в протопланетном диске, отвечающий этим теоретическим разработкам. По этой причине в настоящее время численные модели последовательных этапов эволюции протопланетного аккреционного диска строятся с использованием целого ряда упрощений.

Целью изложенного здесь подхода является разработка модели трёхмерного турбулентного движения вращающейся жидкости, максимально приближенной к реальности и отвечающей различным динамическим условиям как природных, так и в космических средах, в частности в астрофизических немагнитных дисках. По мере все более надёжного подтверждения в численных экспериментах концепции обратного каскада энергии в спиральной турбулентности, включение в математическую модель диска этого эффекта, существенно влияющего на его структуру и динамику, приобретает, по нашему мнению, все более веское основание. Здесь было показано, что ключевой статистической характеристикой трёхмерной зеркально-неинвариантной дисковой турбулентности, которая способна обеспечить в нём появление инверсного каскада энергии, может служить вихревая спиральность, возникающая благодаря быстрому вращению неустойчиво стратифицированной космической среды и воздействию ряда других факторов нарушения симметрии течения вещества, такие, например, как архимедова сила и сила гравитации. Показано также, что известный эффект отрицательной вязкости в трёхмерной спиральной турбулентности диска может быть обязан своему появлению инверсному каскаду переноса мелкомасштабной кинетической энергии от малых вихрей к

более крупным. Обсуждается концепция возможной энергетической подпитки мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса механизмом вихревого динамо, когда спиральная турбулентность, в результате реализации обратного энергетического каскада, генерирует и поддерживает крупномасштабные вихревые поля. Вследствие такого перераспределения турбулентной энергии, инверсный каскад может породить иерархическую компактную систему уплотнённых энергетически ёмких вихрей (определённого размера и с фрактальным распределением массовой плотности), приводящую, в конечном счёте, к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами космического вещества (в общем случае гетерогенного) в аккреционном диске. В результате, возможно самопроизвольное образование и рост газо-пылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями диска, существенная модификация спектра колебаний и т.п. Естественно, на заключительной фазе процесса образования крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет решающая роль должна принадлежать силе самогравитации [72]. Исходя из приведённых соображений, изложенный в этой главе материал можно рассматривать как теоретическую основу для численного моделирования широкого класса явлений в астрофизических немагнитных дисках, в которых механика спиральной турбулентности играет определяющую роль.

В заключение процитирую слова выдающегося российского механика акад. Л.И. Седова: *«Существенный прогресс в науке, как правило, связан с все более полным и детальным проникновением в сущность макроскопических эффектов, проявляющихся на грани существующих методов наблюдений и измерений....Нередко учёт малых эффектов, едва уловимых на первоначальной стадии исследования, впоследствии, при более глубоком проникновении в сущность природы явлений и при расширении поля приложений становится основой возникновения прогресса»* [87].

Литература

- [1] **Brown G. L., Roshko A.** On density effects and large structures in turbulent mixing layers// J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775-816.
- [2] **Crow S.C., Champagne F.H.** Orderly structures in jet turbulence//J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547-591.
- [3] **Рабинович М.И. Сущик М.М.** Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости//УФН.1990. Т. 160. Вып. 1. С. 1-64.
- [4] **Климонтович Ю.Л.** Введение в физику открытых систем. М.: ТОО «Янус-К». 2002. 284 с.

[5] **Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л.** Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: МФТИ. 2002. 267 с.

[6] **Колесниченко А.В. Маров М.Я.** Термодинамическая модель МГД-турбулентности и некоторые ее приложения к аккреционным дискам// Астрон. вестник. 2008. Т.42. № 3. С. 1-50.

[7] **Ван Дайк М.** Альбом движений жидкости и газа. М.: Мир. 1986.

[8] **Фриш У.** Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998. 343 с.

[9] **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидродинамика. СПб: Гидрометеоиздат. Т.2. 1996. 742 с.

[10] **Колмогоров А.Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса// Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299-303.

[11] **Колмогоров А.Н.** Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // *Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961/* На рус. и фр. яз. Paris. 1962. P. 447-458.

[12] **Обухов А.М.** О распределении энергии в спектре турбулентного потока// Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1941. Т.5. № 4. С. 453-466.

[13] **Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.** Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука. 1980. 352 с.

[14] **Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.** Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М. : Мир. 1984. 315 с.

[15] **Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.** Магнитные поля в астрофизике. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований. 2006. 386 с.

[16] **Moffatt Н.К.** The degree of knottedness of tangled vortex lines// *J. Fluid Mech.* 1969. V.35. P.117-129.

[17] **Steenbeck М., Krause F., Radler К.-Н.** A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces// *Z. Naturforsch.* 1966. V. 21a. P. 369-376.

[18] **Сэффмэн Ф. Дж.** Динамика вихрей. М.: Научный Мир. 2000. 375 с.

[19] **Арнольд В.И., Хесин Б.А.** Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО. 2007. 392 с.

[20] **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 339 с.

[21] **Паркер Е.** Космические магнитные поля: их образование и проявления. Ч.2. М.: Мир. 1982. 479 с.

[22] **Brandenburg A., Dobler W., Subramanian K.** Magnetic helicity in stellar dynamos: new numerical experiments // *Astronomische Nachrichten*. 2002. V. 323. P. 99-122.

[23] **Brissaud A., Frisch U., Leorat J., Lesieur M., Mazure A.** Helicity cascade in fully developed turbulence // *Phys. Fluids*. 1973. V.16. P. 1366-1367.

[24] **Lesieur M.** *Turbulence in Fluids* (4th edition). Springer. 2008. 558 p.

[25] **Pouquet A., Mininni P. D.** The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics. 2009. 18 p. // submitted to *Phys. Fluids*, see also <http://arXiv.org/abs/0910.4522> vl.[physics.flu-dyn]. 2009.

[26] **Mininni P. D., Alexakis A., Pouquet A.** Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers // *Phys. Fluids*. 2009. V. 21. P. 015108.

[27] **Mininni P. D., Pouquet A.** Helicity cascades in rotating turbulence // *Phys. Rev.* 2009a. E 79. P. 026304.

[28] **Mininni P.D., Pouquet A.** Rotating helical turbulence. Part I. Global evolution and spectral behavior // Submitted to *Phys. Rev. E*. 2009b, see also arXiv: 0909.1272. 2009. P. 1-9.

[29] **Mininni P.D., Pouquet A.** Helical rotating turbulence. Part II. Intermittency, scale invariance and structures // Submitted to *Phys. Rev. E*. 2009c, see also arXiv: 0909.1275. 2009. P. 1-11.

[30] **Kraichnan R.H.** Helical turbulence and absolute equilibrium // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 59. P. 745-752.

[31] **Kraichnan R.H.** Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence // *J. Fluid. Mech.* 1976a. V.77. P. 753-774.

[32] **Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В.** Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // *ЖЭТФ*. 1983b Т.85. вып. 6(12). С. 1979-1987.

[33] **Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.** Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // *ЖЭТФ*. 1988. Т.94. вып. 2. С. 144-153.

[34] **Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Шукуров А.М.** Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере // *Доклады АН СССР*. 1983a. Т. 273. № 3. С. 549-552.

[35] **Moiseev S.S., Chkhetiani O.G.** The helical scaling of turbulence // *JETP*, 1996. V.110. № 7. P. 357-371.

[36] **Branover H., Moiseev S.S., Golbraikh E., Eidelman A.** *Turbulence and Structures: Chaos, Fluctuations, and Helical Self-Organization in Nature and Laboratory* // San Diego: Academic Press. 1999. 270 p.

[37] **Старр В.** Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир. 1971. 259 с.

[38] **Монин А.С., Полубаринова-Кочина П.Я., Хлебников В.И.** Космология, гидродинамика, турбулентность: А.А. Фридман и развитие его научного наследия. М.: Наука. 1989. 326 с.

[39] **Vergassola M., Gama S., Frisch U.** Proving the existence of negative isotropic eddy viscosity. P. 321-327// In.: NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos. Eds. M.R.E. Proctor, P.C. Mathews, A.M. Rucklidge. Cambridge University Press. Cambridge. 1993.

[40] **Sivashinsky G.I., Frenkel A.L.** On negative eddy viscosity under conditions of isotropy// Phys. Fluids. 1992. V. A4. P. 1608-1610.

[41] **Gama S., Vergassola M., Frisch U.** Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics// J. Fluid. Mech. 1994. V. 260. P. 95-126.

[42] **Bodenheimer P.** Angular momentum evolution of young stars and disks// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1995. V. 33. P. 199-238.

[43] **Klahr H.H., Bodenheimer P.** Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability// Astrophys. J. 2003. V. 582. P. 869-892.

[44] **Березин Ю.А., Жуков В.П.** Конвективная неустойчивость в среде со спиральной турбулентностью// Изв. РАН. МЖГ. 1990. № 6. С. 61-66.

[45] **Березин Ю.А., Трофимов В.М.** Генерация крупномасштабных вихрей под действием неравновесной турбулентности//Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 47-55.

[46] **Левина Г.В.** Параметризация спиральной турбулентности в численных моделях интенсивных атмосферных вихрей// Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 400-404.

[47] **Dubrulle B., Valdetaro L.** Consequences of rotation in energetics of accretion disks// Astron. Astrophys. 1992. V. 263. P. 387-400.

[48] **Smith L. M., Chasnov J., Waleffe F.** Crossover from two- to three-dimensional turbulence// Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 2467-2470.

[49] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Турбулентность и самоорганизация: Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

[50] **Lin C.C., Shu F.H.-S.** Density wave theory of spiral structure// Astrophysics and General Relativity. 1968. V.2. P. 236-329.

[51] **де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

[52] **Колесниченко А.В.** Синергетический подход к описанию развитой турбулентности//Астрон. вестник. 2002. Т.36. № 2. С.121-139.

[53] **Пригожин И., Стенгерс И.** Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 310 с.

[54] **Хапаев А.А.** Генерация вихревых структур в атмосфере под действием спиральной турбулентности конвективного происхождения// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. Т. 38. № 3. С. 331-336.

[55] **Николаевский В.Н.** Пространственное осреднение и теория турбулентности// Вихри и волны. М.: Мир. 1984. С. 266-335.

[56] **Reynolds O.** On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion// Phil. Trans. Royal Soc. London A . 1894. V. 186. P. 123-161.

[57]. **Rüdiger G.** Reynolds stresses and differential rotation. I - On recent calculations of zonal fluxes in slowly rotating stars// Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 1980a. V. 16. P. 239-261.

[58] **Rüdiger G.** On negative eddy viscosity in MHD turbulence//Magneic Hydrodynamics (Riga) 1980b. N. 1. P. 3-14.

[59] **Rüdiger G.** On turbulent heat transport in rotating convective zones//Astron. Nachr. 1982. V. 303. P. 293-303.

[60] **Berezin Yu., Trofimov V.M.** A model of non-equilibrium turbulence with an asymmetric stress. Application to the problems of thermal convection// Continuum Mech. Thermodynamics. 1995. V. 7. P. 415-437.

[61] **Krause F, Rüdiger G.** On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence// Astron Nachr. 1974a. V. 295. H.2. P. 93-99.

[62] **Krause F, Rüdiger G.** On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. II. Two- dimensional turbulence and the problem of negative viscosity// Astron Nachr. 1974b. V. 295. H.4. P. 185-193.

[63] **Rüdiger G.** On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. III. Two- dimensional turbulence and the problem of differential rotation// Astron Nachr. 1974. V. 295. H.5. P. 229-235.

[64] **Колесниченко А.В.** К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске//Астрон. вестник. 2011. Т.45. № 3. С.253-272.

[65] **Yoshizava A.** Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields//Phys. Fluids. 1990. V. B2 (7). P.1589-1600.

[66] **Ferrari C.** On the differential equations of turbulent flow// В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука. 1972. 336 с.

[67] **Николаевский В.Н.** Тензор напряжений и метод осреднения в механике сплошных сред//ПММ. 1975. Т.39. вып. 1. С. 374-379.

[68] **Nikolaevskiy V.N.** Angular Momentum in Geophysical Turbulence. Published by Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands. 2003. 243 p.

[69] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Роль гидродинамической спиральности в эволюции протопланетного турбулентного диска// Математическое моделирование. 2007. Т. 20. № 10. С. 99-125.

[70] **Kichatinov L.L., Rüdiger G.** Λ -effect and differential rotation in stellar convection zones//Astron. Astrophys. 1993. V. 276. P. 96-102.

[71] **Heinloo J.** Setup of turbulence mechanics accounting for a preferred orientation of eddy rotation // Concepts of Physics. 2008. V.5. № 2. P. 205-218.

[72] **Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н.** От протосолнечного облака к планетной системе: Модель ранней эволюции газопылевого диска. С. 223-275// Коллективная монография «Проблемы зарождения и эволюции БИОСФЕРЫ» /Под. Ред. Э.М. Галимова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008. 552 с.

[73] **Ditlevsen P., Giuliani P.** Dissipation in helical turbulence// Phys. Fluids. 2001. V.13. P. 3508-3509.

[74] **Chen Q., Chen S., Eyink G.** The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence//Physics of Fluids. 2003. V.15. № 2. P. 361-374.

[75] **Andre J.D., Lesieur M.** Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence; influence of helicity// J. Fluid Mech. 1977a. V. 81. P. 187-208.

[76]. **Moffatt H.K., Tsinober A.** Helicity in laminar and turbulent flow// Ann. Rev. of Fluid Mech. 1992. V. 24. P. 281-312.

[77] **Andre J.C., Lesieur M.** Influence of helicity on high Reynolds number isotropic turbulence// J. Fluid Mech. 1977b. V. 81. P. 187-207.

[78] **Borue J., Orszag S.A.** Spectra in helical three-dimensional isotropic turbulence// Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 7005-7009.

[79] **Tsinober A., Levitch E.** On the helical nature of three-dimensional coherent structures in turbulent flows// Phys. Letters. 1983. V. 99 A. P. 321-324.

[80] **Moffatt H.K.** Geophysical and astrophysical turbulence/ In Advances in turbulence. G. Comte-Bellot and J. Mathieu eds. Springer-Verlag. 1986. P. 228-244.

[81] **Shtilman L., Levich E., Orszag S.A., Pelz R.B., Tsinober A.** On the role of helicity in complex fluid flows// Phys. Let. 1985. V. 113 A. P. 32-37.

[82] **Kerr B. W., Darkow G. L.** Storm-relative winds and helicity in the tornadic thunderstorm environment// Weath. and Forecast. 1996. V. 11. P. 489-496.

[83] **Rogers M.M., Moin P.** The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows// J. Fluid Mech. 1987a. V. 176 . P. 33-66.

[84] **Rogers M.M., Moin P.** Helicity fluctuations in incompressible turbulent flows// Phys. Fluids. 1987b. V. 30. P. 2662-2671.

[85] **Zhou Y.** A phenomenological treatment of rotating turbulence// Phys. Fluids. 1995. V. 7. P. 2092-2099.

[86] **Smith L. M., Waleffe F.** Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence// Phys. Fluids. 1999. V.11. P. 1608-1622.

[87] **Седов Л.И.** Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. М.: Наука. 1973. 118 с.

ГЛАВА 6

Синергетический подход к конструированию модели структурированной турбулентности

Целью данной главы является введение читателя в курс быстро развивающейся в настоящее время стохастико-термодинамической теории необратимых процессов на примере моделирования структурированной турбулентности. Здесь рассмотрен синергетический подход к разработке феноменологической модели предельно развитой турбулентности в сжимаемой однородной жидкости с учётом происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов. Включение в модель набора случайных переменных в качестве внутренних параметров подсистемы турбулентного хаоса, связанных с её микроструктурой, позволяет в этом случае вывести термодинамическими методами кинетические уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) в конфигурационном пространстве. Стабилизация подсистемы хаоса вблизи очередного стационарно-неравновесного состояния в конфигурационном пространстве отвечает переходу турбулентной системы в новое состояние, адекватное возникновению сложных пространственно-временных КС в турбулентном потоке.

Введение

До недавнего времени турбулентность, являющаяся без преувеличения самым распространённым видом движения жидкости и газа в природе, традиционно представлялась в виде мелкозернистого флуктуирующего континуума в состоянии полного стохастического хаоса. Однако допустить и иная точка зрения на турбулентность, высказанная явно впервые, по-видимому, Пригожиным [1]. Согласно новому взгляду на турбулентность, реальное турбулентное течение жидкости является процессом менее случайным и макроскопически более организованным, нежели это кажется с первого взгляда, причём переход от ламинарного течения к турбулентному является процессом самоорганизации, при котором часть энергии турбу-

лентного хаоса, отвечающего мелкомасштабным флуктуациям термодинамических параметров среды, переходит в макроскопически организованное движение вихревых когерентных структур (КС). Это обстоятельство повышает внутреннюю упорядоченность турбулентной гидродинамической системы по сравнению с молекулярным хаосом (ламинарным движением жидкости). В частности, каскадный процесс дробления вихрей, имеющий место в полностью развитой турбулентности, также может быть интерпретирован как неограниченная последовательность процессов самоорганизации. При этом множество пространственно-временных масштабов, на которых разыгрывается такого рода процесс, отвечает когерентному поведению огромного числа частиц, выражающемуся в образовании относительно устойчивых мезомасштабных супермолекулярных структур (когда молекулы участвуют в коллективных, согласованных, взаимосвязанных движениях, отвечающих разномасштабным вихрям, непрерывно распределённым в реальном потоке жидкости). Такое изменение взгляда на турбулентность отчётливо выражено в следующем высказывании Пригожина *«Кто бы мог предсказать тридцать лет назад, что неравновесность приводит к самоорганизации в том виде, в каком мы наблюдаем её в гидродинамических неустойчивостях типа ячеек Бенара»* [2].

Как теперь стало ясно, наличие относительно крупных когерентных вихревых образований (турбулентных нитей, колец, вихревых спиралей и т.п.), случайно распределённых в пространстве и во времени, является характерной чертой многих, если не всех, развитых турбулентных течений [3-5]. Согласно последним представлениям (см., например, [6]) гидродинамическая турбулентность, принадлежащая к числу наиболее сложных динамических явлений, связана, в частности, с возникновением и развитием огромного числа организованных диссипативных вихревых структур различного пространственно-временного масштаба при определённых режимах течения жидкости в существенно неравновесной открытой системе. К примеру, процессы самоорганизации на фоне хаотического пульсационного движения космического вещества являются, по-видимому, немаловажным механизмом, формирующим специфические черты астро- и геофизических объектов на разных стадиях их эволюции, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звёзд из диффузной среды газопылевых облаков, образование протопланетных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, формирование газовых оболочек планет и комет (атмосфер), разномасштабные течения в атмосферах и околопланетной плазме и т.д.

В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными (основательный обзор соответствующих публикаций приведён, например, в монографии [7], *когерентная вихревая структура может быть определена как связанная, жидкая масса с завихрённостью, скоррелированной по фазе (т.е. когерентной) во всей области координатного про-*

странства, занимаемой структурой. В последнее десятилетие благодаря прогрессивному развитию техники визуального наблюдения турбулентных течений жидкости было открыто большое число разнообразных КС и достоверно установлены их топологические характеристики. В качестве примеров могут быть названы такие из них, как «вихревые нити», «вихри Тейлора», «турбулентные пятна», «вихревые клубки», «шпилькообразные вихри», «берстинги», «вихревые спирали», «стрики», «структуры Брауна–Томаса», «грибовидные вихри» и т.п. Частота появления той, или иной структуры зависит от типа течения (пограничный слой, слой смешения, струя и т.п.), геометрии и режима движения турбулентной жидкости. Подобного типа вихревые образования, как правило, локализованы в пространстве, не перекрываются (поэтому их часто можно рассматривать как сосредоточенные объекты – кластеры) и имеют длины пробега много больше, чем их собственные размеры. По определению, характерным размером КС является наибольший пространственный масштаб l , на котором существует когерентная завихрённость; новейшие результаты показывают, что l может быть значительно меньше, чем характерный гидродинамический масштаб течения L , но больше, чем колмогоровский масштаб η , т.е. лежать в инерционном интервале масштабов, $\eta < l \ll L$. Вследствие взаимодействия индивидуальных КС (например, в случае двух простых вихрей – по закону Био–Савара), носящего, в общем случае, существенно нелинейный характер, происходит их объединение или распад, т.е. появление новой одиночной структуры (например, спирального вихря) или смежных подобных структур (колец, клубков и т.п.), которые могут быть связаны посредством жгутов – областей низкой когерентной завихрённости. В дальнейшем мы будем исходить из того, что мезомасштабные пространственно-временные КС случайны по всем параметрам, используемым для их описания.

К сожалению, прямое численное моделирование развитых турбулентных движений на основе точных (мгновенных) гидродинамических уравнений сопряжено, как правило, с большими математическими трудностями, а создание завершённой теории структурированной турбулентности вряд ли возможно на данном этапе развития гидромеханики из-за чрезвычайной сложности механизмов возникновения, взаимодействия и эволюции разномасштабных вихревых образований. Собственно, по этой причине требуется разработка новых модельных подходов (в том числе и феноменологических) к описанию полностью развитой турбулентности, введения дополнительных внутренних параметров среды (характеризующих мелкомасштабные структуры течения), установления для их вычисления универсальных закономерностей и особых соотношений, дополняющих уже известные уравнения типа законов сохранения массы, энергии, количества движения и т.п. Разумеется, что такое полуэмпирическое моделиро-

вание структурированной турбулентности, несмотря на неизбежную в этом случае идеализацию описания реального течения жидкости, должно, тем не менее, отображать в главных чертах важнейшие гидродинамические эффекты при минимуме необходимых вычислительных усилий. Следовательно, для построения адекватной модели «высокоорганизованного» турбулентного течения необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению наряду с мелкозернистым флуктуирующим полем термогидродинамических параметров течения (подобный подход был рассмотрен в Гл.2), также и относительно крупные диссипативные когерентные образования. Причём, они должны приниматься во внимание, как на стадии моделирования процесса вовлечения окружающей ещё не завихрённой жидкости в турбулентное движение, так и при описании полностью развитых процессов турбулентного переноса массы, импульса и тепла. Другими словами, любая эффективная континуальная модель турбулентности не может быть сконструирована без явного включения в её состав пространственно-временных когерентных структур и описания их какими-то внутренними параметрами состояния пульсационного течения. Согласно Фришу [8], подобного рода регулярные вихревые образования являются в известном смысле «сухожилиями» турбулентности. Следовательно, только на пути моделирования турбулентности с учётом её внутренней структуризации открываются подлинные возможности эффективного преодоления тех механических и математических проблем, с которыми связаны перспективные постановки и численные реализации разнообразных турбулентных задач, в частности, в области астрофизики и космогонии [9,10].

В силу выше сказанного становится понятно, почему феномен структурированной турбулентности предоставляет исследователям богатый информационный материал для разработки новых идей, касающихся соотношения порядка и хаоса в турбулентных течениях жидкости, простоты и сложности в поведении открытых флуктуирующих гидродинамических систем, которые могут без специфического воздействия извне путём самоорганизации формировать вихревые пространственно-временные структуры, т.е. осуществлять вдали от локального термодинамического равновесия “порядок через флуктуации”. К сожалению, нужно отметить, что хотя со времени понимания синергетической природы турбулентности, как процесса самоорганизации, прошло уже более тридцати лет, однако до настоящего времени представления о возникающих в потоке диссипативных когерентных образованиях не материализовались в разработки таких модельных подходов, которые направлены на создание практических (инженерных) методов расчёта турбулентности, основанных, как правило, на уравнениях гидродинамического типа. Вместе с тем, расширение формализма неравновесной термодинамики на среды с возбуждёнными внутренними степенями свободы макромолекул (которые возможно описать дополнительными параметрами, характеризующими внутреннюю микро-

структуру среды) позволяет, по-видимому, распространить этот подход и на моделирование каскадного процесса переноса кинетической энергии вихрями разного размера, образующихся в результате их последовательного дробления в развитом турбулентном потоке.

Таким образом, цель данной главы состоит в том, чтобы, при использовании методов расширенной необратимой термодинамики с внутренними переменными [11,12] и статистической термодинамики необратимых процессов [13,14], столь хорошо зарекомендовавших себя в последнее время при изучении широкого класса физических проблем, попытаться феноменологически построить гидродинамическую модель стационарно-неравновесной турбулентности с учётом происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов, которые приводят к образованию разных неравновесных диссипативных вихревых структур вдали от термодинамического равновесия [15]. Другими словами, мы попытаемся феноменологически получить замкнутую систему осреднённых гидродинамических уравнений, самосогласованно описывающих как разнообразные процессы турбулентного переноса, так и процессы самоорганизации. При подобном подходе вихревые КС, относящиеся к сильно локализованными областями мелкомасштабного движения подсистемы турбулентного хаоса, следует принимать во внимание, как на стадии турбулизации ламинарного потока, происходящей в результате развития иерархии неустойчивостей какого-либо вида (например, неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в свободных сдвиговых течениях – в слоях смешения, в струях, в следе и т.п., или неустойчивости Тейлора–Гертлера в подслое турбулентного пограничного слоя, где возможно появление продольных вихрей в пристеночных слоях), так и на стадии развитой турбулентности при наличии всевозможных резонансных ситуаций, связанных, например, с синхронизацией мелкомасштабной завихрённости в потоке сильно турбулизованной жидкости. Под синхронизацией регулярных и хаотических (стохастических) колебаний здесь и далее понимается установление некоторых соотношений между характерными частотами и фазами автоколебательных систем в результате их взаимовлияния.

1. Феноменологическое конструирование модели стационарно-неравновесной турбулентности

Как известно, реализуемая при конечном, но достаточно большом числе Рейнольдса, развитая турбулентность характеризуется заполненными спектрами Фурье (как временными, так и пространственными), что свидетельствует о существовании многомасштабной структуры поля термодинамических параметров. Собственно *многомасштабность течения жидкости, когда возбуждено огромное число степеней свободы, и*

является ключевым признаком развитой турбулентности. Поэтому любой модельный подход к описанию полностью развитой турбулентности, по сути, представляет собой тот или иной способ ограничения степеней свободы.

При феноменологическом конструировании модели структурированной турбулентности (направленной на описание «регулярных» полей гидротермодинамических параметров), движущуюся пульсирующую жидкость далее будем представлять в виде термогидродинамического комплекса, состоящего из двух взаимосвязанных континуумов (подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объём координатного пространства непрерывно – подсистемы осреднённого движения и подсистемы турбулентного пространственно-временного хаоса [10,15,16]. Континуум осреднённого движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений жидкости, предназначен в основном для изучения эволюции осреднённых полей термогидродинамических параметров (включая описание крупных вихревых образований). Подсистема турбулентного хаоса (турбулентная «надструктура») состоит, в свою очередь, из двух составляющих (фаз): собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихрённой жидкости, и внедрённой в такое почти однородное (мелкозернистое) пульсирующее поле термогидродинамических параметров когерентной составляющей, обладающей в общем случае топологией фрактального множества и связанной с мезомасштабными вихревыми структурами в турбулентном потоке жидкости. При этом, в термодинамическое описание подсистемы турбулентного хаоса будем включать набор внутренних координат, отвечающих, в конечном счёте, возбуждённым макроскопическим степеням свободы турбулизованной жидкости. Это даёт возможность использовать при моделировании процессов турбулентного переноса и кинетики в полном континууме обобщённую теорию Онзагера [см. Гл.1], описывающую, в рассматриваемом случае, не только линейную релаксацию осреднённых значений экстенсивных термодинамических параметров к их стационарным значениям, но и особенности поведения турбулентных флуктуаций в окрестности стационарно-неравновесных состояний хаоса [14]. Применение известного расширения формализма неравновесной термодинамики на системы с внутренними степенями свободы [17] позволяет получить кинетические уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для функций распределения характеристических параметров мелкомасштабной турбулентности и на их основе смоделировать каскадный процесс Ричардсона-Колмогорова.

Следует отметить, что, принятое здесь разделение реального течения пульсирующей жидкости на воображаемые – осреднённое и пульсирующее, зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной обла-

сти, для которой установлены средние значения локальных физических переменных, являющихся непрерывными функциями координат x и времени t , т.е. имеет, до некоторой степени, условный характер. Гидродинамический масштаб осреднённого движения Λ (масштаб наблюдения по Обухову [18] или шаг разрешения разностной сетки), лежащий в инерционном интервале $\eta < \Lambda \ll L$ и определяемый размером $dx \sim \Lambda^3$ области осреднения G , будем полагать далее таким, чтобы подсистема турбулентного хаоса содержала всю совокупность мезомасштабных КС, размер которых меньше области осреднения, $l < \Lambda$. Здесь $\eta = (\nu^3 / \varepsilon_b)^{1/4}$ – колмогоровский масштаб длины, который характеризует влияние вязкой диссипации на структуру мелкомасштабной турбулентности; L – внешний, или интегральный масштаб турбулентности, характеризующий механизм её возникновения; ε_b – ключевая характеристика каскадного процесса дробления вихрей Ричардсона–Колмогорова, представляющая собой среднюю скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы жидкости в единицу времени и одновременно (в квазиравновесных условиях) равная скорости передачи кинетической энергии пульсационного движения по иерархии вихрей. Согласно существующим оценкам, для того чтобы осреднённый поток содержал основную долю (80% или 90%) полной энергии турбулизованного течения нужно, чтобы масштаб осреднения Λ был в десять-двадцать раз меньше интегрального масштаба турбулентности L . Заметим, что используемая специфика «двухфазности» турбулентного хаоса проявляется в дополнительном турбулентном переносе импульса и энергии вихревыми когерентными образованиями, что приводит к некоторой модификации известных моделей замыкания (определяющих соотношений), а также к необходимости уточнения эффективных (с учётом присутствия в потоке КС) коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности.

1.1. Осреднённая система уравнений гидродинамики для однокомпонентной сжимаемой жидкости.

Далее мы будем следовать классическому подходу к феноменологии полностью развитой турбулентности, который основывается на идее Рейнольдса об осреднении мгновенных уравнений движения жидкости для пульсирующих термогидродинамических параметров по пространству и/или времени, или посредством другой эквивалентной процедуры, например, посредством принятой в статистической гидродинамике теоретико-вероятностной процедуре осреднения по ансамблю статистически подобных гидродинамических систем, находящихся в одинаковых внешних условиях [19]. При учёте обычного для статистической физики предположения об эргодичности системы, когда можно отождествить временное

(пространственное) среднее значение любой физической переменной с её теоретико-вероятностным средним значением, указанные осреднения отфильтровывают те моды движения, масштаб которых меньше пространственно-временного интервала осреднения. Эти мелкомасштабные пульсационные движения, исключённые в процессе осреднения, вносят, по предположению, вклад в турбулентное движение среды, определяемое пульсациями гидродинамических параметров по отношению к соответствующим осреднённым значениям. Собственно именно это мелкомасштабное турбулентное движение моделируется далее подсистемой турбулентного хаоса.

Система точных гидродинамических уравнений масштаба среднего движения для однокомпонентной сжимаемой жидкости, полученная путём теоретико-вероятностного осреднения справедливых в микромасштабе соответствующих мгновенных уравнений гидродинамики, имеет вид

$$\bar{\rho} \frac{d\langle v \rangle}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle, \quad (\langle v \rangle = 1/\bar{\rho}), \quad (1.1)$$

$$\bar{\rho} \frac{d\langle \mathbf{u} \rangle}{dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{R}) + \bar{\rho} \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{d\langle E \rangle}{dt} = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^{turb} - \overline{p' \mathbf{u}''}) - \bar{p} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \bar{\boldsymbol{\tau}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} - \\ & - \overline{p' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} + \mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} \mathbf{R} \langle T \rangle. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t)$, $E(\mathbf{x}, t)$ – соответственно мгновенные значения скорости, давления, удельного объёма и удельной внутренней энергии жидкой частицы; $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ – молекулярный тензор вязких напряжений и молекулярный поток тепла; $d(..)/dt \equiv \partial(..)/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \partial(..)/\partial \mathbf{x}$ – полная производная по времени относительно осреднённого поля скоростей; $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ – внешняя сила, действующая на единицу массы; $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \rho \mathbf{u} / \bar{\rho}$ – осреднённая по Фавру гидродинамическая скорость среды; $\mathbf{J}_v^{turb}(\mathbf{x}, t) = -\overline{\rho' \mathbf{u}''} / \bar{\rho}$, $\mathbf{q}^{turb}(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{\rho(e + p/\rho) \mathbf{u}''}$ – соответственно турбулентные потоки удельного объёма и тепла; $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv -\overline{\rho \langle \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' \rangle}$ – тензор рейнольдсовых напряжений; $\langle \varepsilon_b \rangle(\mathbf{x}, t) = \overline{\boldsymbol{\tau} : (\partial \mathbf{u}'' / \partial \mathbf{x})} / \bar{\rho}$ – средневзвешенное значение удельной скорости диссипации турбулентной кинетической энер-

гии в тепло под влиянием молекулярной вязкости; $\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)$ – осреднённый тензор вязких напряжений; R – газовая постоянная.

Из системы уравнений (1.1)-(1.4) видно, что осреднённое движение турбулизованной однородной жидкости характеризуется: во-первых, осреднёнными молекулярными термодинамическими потоками $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)$ и $\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)$, для которых необходимы соответствующие определяющие соотношения (их вывод для турбулизованной среды в рамках термодинамического подхода приведён в работе [20]; и, во-вторых, неопределёнными корреляционными моментами второго порядка $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{q}^{turb}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{J}_v^{turb}(\mathbf{x}, t)$, представляющими собой так называемые турбулентные потоки характеристик среды, связанные с пульсациями термогидродинамических параметров. Корреляционные члены, включающие пульсации давления, а также среднemasсовое значение вязкой диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle$ также необходимо определить. При феноменологическом построении модели развитой турбулентности, установление определяющих (конститутивных) соотношений, замыкающих систему (1.2)-(1.4), может быть проведено теми же методом, как и в ламинарном случае [см. Гл.1], т.е. в соответствии с термодинамическими правилами континуальной механики методом Онзагера, в основу которого, однако, далее будет положено дополнительное представление о том, что соответствующие термодинамические силы ответственны также и за линейную релаксацию флуктуирующих характеристик турбулизованного хаоса к его устойчивому стационарно-неравновесному состоянию [14].

1.2. Термодинамика структурированной турбулентности

Таким образом, задача заключается в том, чтобы предложить концепцию, которая позволила бы выйти за пределы классического формализма необратимой термодинамики, рассмотренного в Гл.2. Эта цель может быть достигнута благодаря расширению пространства независимых базисных переменных путём введения в рассмотрение внутренних координат, определяющих микроструктуру подсистемы турбулентного хаоса. Последующий шаг связан с нахождением эволюционных уравнений для этих дополнительных параметров состояния.

В рамках полной модели структурированной турбулентности система уравнений (1.2)-(1.4) предназначена для исследования пространственно-временной эволюции осреднённых полей гидродинамических величин, включая также разнообразные крупные вихревые образования. В соответствии с принятой здесь точкой зрения Пригожина на гидродинамическую турбулентность, как на течение макроскопически высокоорганизованное, подсистему турбулентного (вихревого) хаоса будем рассматривать далее, как континуум с определённой внутренней микроструктурой. Более того,

будем считать, что вихревой континуум состоит из двух составляющих: собственно турбулентного хаоса (так называемой, некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихрённой жидкости, и, внедрённой в такое почти однородное пульсирующее поле гидродинамических параметров, когерентной составляющей – ансамбля мезомасштабных вихревых структур (многомолекулярных образований), образом которых в фазовом пространстве эквивалентной динамической системы являются классические аттракторы (например, предельные циклы), или странные аттракторы (с фрактальной структурой). Каждая из двух указанных подсистем в отдельности является термодинамически открытой, т.е. способной обмениваться с сопредельной подсистемой энергией и энтропией (но не веществом). Поля гидродинамических скоростей для подсистем осреднённого движения и турбулентного хаоса далее будем считать совпадающими, поскольку в процессе реального турбулентного движения жидкости не происходит разделения соответствующих лагранжевых объёмов (эффекта диффузии) – подсистема турбулентного хаоса не имеет макроскопической гидродинамической скорости относительно подсистемы осреднённого движения. Отметим, что в литературе известен и другой подход к моделированию структурированной турбулентности, связанный, в частности, с тройным разложением мгновенного движения жидкости на осреднённое движение, когерентные и некогерентные пульсации. Основой такого рода моделей служат уравнения гидродинамики, в которых проведено двойное осреднение – по времени и по специально выбранному ансамблю, характеризующимся какими-либо специфическими для КС признаками. Однако подобная процедура не свободна от многих противоречий [7].

Подчеркнём ещё раз, что принятое здесь искусственное разделение реального турбулентного течения жидкости на воображаемые осреднённое и хаотическое (вихревое, пульсирующее), является лишь удобным способом наглядного описания явления, т.е. носит, в известной степени, модельный характер. Для каждой из двух означенных подсистем для любого элементарного объёма $d\mathbf{x}$ среды определим локальные «крупнозернистые» термодинамические параметры (являющиеся непрерывными функциями координат \mathbf{x} и времени t), такие как плотность, давление, температура, внутренняя энергия, энтропия и т.д.²³⁾ Кроме этого, подсистему турбулентного хаоса будем дополнительно охарактеризовывать ещё и некоторым числом внутренних координат, связанных, в конечном счёте, с её микроструктурой [смотри ниже]. Сразу отметим, что обобщённая темпера-

²³⁾ В этой связи уместно напомнить следующее: согласно Онзагеру [22]), для описания турбулентного хаоса, в котором разномасштабные вихри хорошо перемешаны, могут быть использованы методы статистической механики, а стало быть, применимы и методы статистической термодинамики необратимых процессов.

тура и энтропия подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемые в качестве первичных концепций, не имеют точной физической интерпретации и вводятся в рассмотрение только для обеспечения связности теории [12].

Сверх этого будем считать, что обобщённые термодинамические параметры состояния, характеризующие стационарно-неравновесную вихревую структуру турбулентного хаоса, связаны обычными для локально-равновесной термодинамики соотношениями типа тождеств Гиббса, Гиббса–Дюгема и т.п., которые служат исключительно в качестве ограничения на форму полученных определяющих (материальных) соотношений. Другими словами, будем считать, что подобного рода тождества остаются справедливыми и вдали от локального термодинамического равновесия подсистемы хаоса, если, хаос находится, однако, в устойчивом стационарно-неравновесном состоянии, которое и будет выбрано нами в качестве состояния отсчёта. Данное основополагающее допущение, является своего рода новым постулатом (см. [17], на котором и будет основываться термодинамический подход к модельному описанию полностью развитой турбулентности. В связи с этим следует также отметить, что поскольку энергия турбулентных движений благодаря молекулярной вязкости непрерывно рассеивается, то ситуация, при которой достигается локальное статистически равновесное состояние подсистемы турбулентного хаоса, в принципе оказывается невозможной. Однако для стационарного течения турбулизованной жидкости в случае, когда вязкая диссипация энергии за большое время в среднем компенсируется энергией от внешнего источника, стационарно-неравновесные процессы переноса в подсистеме турбулентного хаоса вполне допустимы и, по их физической сути, не очень отличаются от локально равновесных процессов в какой-либо диссипативной системе.

При построении модели турбулентности мы будем использовать ещё одну ключевую концепцию теории Колмогорова [21], согласно которой, в пределе очень больших чисел Рейнольдса $Re = Lu_0 / \nu$ и Пекле $Pe = L_T u_{T0} / \chi$, отвечающих крупномасштабным движениям в потоке, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осреднённого течения, случайный характер дробления вихрей (или макроструктурных неоднородностей температуры) и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что статистический режим турбулентных флуктуаций в границах небольшой пространственно-временной области осреднения G мгновенных значений гидродинамических параметров, является почти локально изотропным – однородным, изотропным и квазистационарным, т.е. изменяющимся в зависимости лишь от управляющих параметров, и, прежде всего, от числа Рейнольдса Re (которое определяет, в конечном счёте, число каскадов в иерархии вихрей различных порядков). Важно при этом подчеркнуть, что полной локальной изотропии из-за наличия мезомасштабных вихревых образований, естественно, быть не

может. Здесь u_0 и u_{T0} – типичные изменения средней скорости на расстояниях соответственно $\sim L$ и L_T ; χ, ν – коэффициенты молекулярной теплопроводности и кинематической вязкости; L_T – расстояние, на котором заметно меняется средняя температура. Далее будем для простоты полагать, что число Прандтля $Pr = \nu / \chi$ имеет порядок единицы и $L \approx L_T$; в этом случае границы инерционного и конвективного интервалов, в которых существенны эффекты молекулярной вязкости и молекулярной теплопроводности, можно считать совпадающими.

Используем теперь методы расширенной необратимой термодинамики [12] и неравновесной статистической термодинамики [14] для получения определяющих (замыкающих) соотношений для термодинамических потоков и сил, которые с достаточной для практических целей эффективностью описывают различные процессы турбулентного переноса в координатном пространстве и процессы самоорганизации в фазовом пространстве.

Термодинамика подсистемы осреднённого движения. Начнём с анализа балансовых уравнений для осреднённой энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ турбулизованной однородной жидкости. Теоретико-вероятностное осреднение справедливого по предположению для микродвижений тождества Гиббса

$$T\delta S = \delta E - p\delta v,$$

где $T(\mathbf{x}, t)$ и $S(\mathbf{x}, t)$ – соответственно мгновенные значения абсолютной температуры и удельной энтропии в жидкой частице, приводит к фундаментальному тождеству Гиббса для подсистемы осреднённого движения [см. Гл.1]. Это тождество, записанное вдоль осреднённой траектории движения центра масс физически элементарного объёма $d\mathbf{x}$, принимает вид

$$\frac{D\langle S \rangle}{Dt} = \frac{1}{\langle T \rangle} \frac{D\langle E \rangle}{Dt} + \frac{p}{\langle T \rangle} \frac{D\langle v \rangle}{Dt}. \quad (1.5)$$

Тождеству (1.5) можно придать форму уравнения локального баланса осреднённой энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ системы, если исключить из него субстанциональные производные по времени от параметров $\langle E \rangle(\mathbf{x}, t)$ и $\langle v \rangle(\mathbf{x}, t)$ с помощью уравнений (1.1) и (1.4); в результате получим:

$$\bar{\rho} \frac{d\langle S \rangle}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}^\Sigma}{\langle T \rangle} \right) = \sigma_{\langle S \rangle} \equiv \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}, \quad (1.6)$$

где положительная величина

$$\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{\langle T \rangle} \left(-\mathbf{q}^\Sigma \cdot \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \bar{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} \right) \quad (1.7)$$

определяет скорость локального производства осреднённой энтропии $\langle S \rangle$ жидкости, обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы осреднённого движения, а величина

$$\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{\langle T \rangle} \left(p' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right) + \mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle \right) \equiv \frac{\mathfrak{Z}}{\langle T \rangle} \quad (1.8)$$

отражает обмен энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осреднённого движения. Здесь $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) \equiv (\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x})^s =$

$\frac{1}{2} \left[\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x} + (\partial \langle \mathbf{u} \rangle / \partial \mathbf{x})^{transp} \right]$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$, $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ – соответственно осреднённый тензор вязких напряжений, тензор скоростей деформации для осреднённого континуума и их части с нулевым следом, определяемые соотношениями:

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}} \equiv \bar{\mathbf{D}} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{D}} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = \bar{\mathbf{D}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) \mathbf{I}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{3} (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = \bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\pi} \mathbf{I};$$

$\bar{\pi}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{3} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{I}$ – вязкое осреднённое давление;

Положительная величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}$ определяет скорость локального производства осреднённой энтропии системы $\langle S \rangle$, обусловленного диссипативными процессами переноса внутри подсистемы осреднённого движения жидкости; величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{Z} / \langle T \rangle$ (сток или приток энтропии) отражает, как это будет видно из дальнейшего, обмен энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осреднённого движения. Важно отметить, что величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ может быть разной по знаку в зависимости от конкретного режима турбулентного движения среды. Действительно, скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon_b(\mathbf{x}, t)$ всегда является положительной величиной. Однако скорость перехода энергии $\overline{p'(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}''}$ (представляющая собой работу, совершаемую над турбулентными вихрями за единицу времени в единице объёма окружающей средой, как следствие существования пульсаций давления и расширения, или сжатия турбулентных вихрей может быть разной по знаку. Величина $\mathbf{J}_{(v)}^{turb} \cdot (\partial \bar{p} / \partial \mathbf{x})$ является положительной в случае мелкомасштабной турбулентности, однако для крупно- и мезомасштабных вихрей она может быть как положительной, так и отрицательной [10]. Таким образом, из уравнения (1.6) следует, что в

общем случае осреднённая энтропия турбулизованной среды $\langle S \rangle$ может, как возрастать, так и уменьшаться. Подобное обстоятельство является характерной чертой любых термодинамически открытых систем.

Это означает, что во внешне замкнутой турбулентной системе, моделируемой двумя континуумами, имеет место некоторая внутренняя незамкнутость. Она возникает благодаря тому, что осреднённое движение турбулизованной жидкости описывается только одним из двух континуумов. В то же время каждый физически бесконечно малый элемент объёма $dx \sim \Lambda^3$ (где Λ – масштаб осреднения) среды считается всё-таки настолько большим, чтобы в модели можно было учесть дополнительную информацию о характере пульсационного движения (турбулентной надструктуры) на масштабах меньших или равных размеру «математической точки». Отсюда, в частности, следует, что одной только осреднённой энтропии $\langle S \rangle$ системы явно не достаточно для адекватного описания всех особенностей структурированной турбулентности, поскольку эта величина не связана с какими-либо параметрами, характеризующими внутреннюю структуру и термодинамику подсистемы турбулентного хаоса и, в частности, с таким ключевым параметром теории, как энергия турбулентности

$$\langle b \rangle(\mathbf{x}, t) = \overline{\rho(\mathbf{u}'')^2} / 2\bar{\rho}. \quad (1.9)$$

По этой причине для макроскопического описания структурированной турбулентности и, в частности, каскадного процесса переноса турбулентной энергии вихрями разного масштаба (вниз по интервалу размеров), будем использовать далее известное обобщение формализма термодинамики необратимых процессов на среды с внутренней структурой, вводя для этой цели обобщённые экстенсивные термодинамические параметры (внутреннюю энергию $E_{turb}(\mathbf{x}, t)$, обобщённые химические потенциалы $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ и т.п.) подсистемы турбулентного хаоса, связанные с пульсационным движением жидкости [23], а также так называемые внутренние координаты $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, отвечающие микроструктуре подсистемы. Другими словами, мы поступим аналогично тому, как это давно делается в неравновесной термодинамике, например, с целью учёта различного рода превращений во внутренних степенях свободы молекул, в частности, учёта ориентации полярных молекул относительно внешнего электрического поля (как известно, это можно сделать, вводя внутреннюю координату $\delta\mathbf{q} = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^{ss})$ – угол между направлениями поля и диполем), когда используется формализм обобщённого химического потенциала, равного стандартному химическому потенциалу и полевому члену, зависящему от внутренней координаты $\mathbf{q}(t)$ [17].

2. Термодинамический вывод уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова

2.1. Внутренние координаты турбулентного хаоса

Итак, при моделировании стохастической системы, отвечающей подсистеме турбулентного хаоса, будем использовать формализм обобщённой статистической термодинамики [13,14], предполагающий изучение статистического ансамбля макроскопически одинаковых подсистем хаоса с одними и теми же обобщёнными экстенсивными параметрами состояния типа осреднённого удельного объёма $v(\mathbf{x},t)$, внутренней энергии $E_{turb}(\mathbf{x},t)$ и энтропии $S_{turb}(\mathbf{x},t)$ хаоса, а также некоторой бесконечной последовательностью внутренних переменных $n(\mathbf{q},\mathbf{x},t)$. Внутренние переменные $n(\mathbf{q},\mathbf{x},t)$ могут представлять собой концентрации мелкомасштабных вихрей (их число в единице объёма) или температурных неоднородностей в состояниях, характеризуемых заданными значениями параметров \mathbf{q} – внутренних координат, определяющих микроструктуру системы. При этом будем предполагать, что структурные вихревые образования хаоса каким-то образом локализованы, как в координатном пространстве \mathbf{x} , так и в пространстве конфигураций \mathbf{q} . Внутренние координаты $q_k(\mathbf{x},t)$ ($k=1,\dots,n$) – некоторые характеристики ансамбля вихревого (или температурного) хаоса, отвечающие мелкомасштабным турбулентным пульсациям, являются, в общем случае, случайными (стохастическими) переменными, флуктуирующими относительно своих средних (стационарных) значений q_k^{st} . Именно они служат мерой различий в любом множестве термодинамически тождественных подсистем вихревого ансамбля. Учёт флуктуаций внутренних координат, описывающих состояние хаоса при чисто динамическом моделировании уточняет его статистическое описание и приводит к более адекватному отражению реальности.

К числу стохастических внутренних координат, описывающих макроскопическое состояние турбулентного хаоса, могут быть отнесены непрерывно изменяющиеся локальные случайные параметры, адекватно характеризующих эволюцию завихрённой жидкости, включая и пространственно-временную эволюцию различных мезомасштабных когерентных образований. Таким образом, часть внутренних координат q_k может относиться к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть – охарактеризовывать индивидуальные КС. В частности, в качестве стохастических координат $q_k(\mathbf{x},t)$ могут быть выбраны следующие положительно определённые величины (или их логарифмы): кинетическая

энергия вихрей, $b = |\mathbf{u}''|^2 / 2$; скорость диссипации турбулентной энергии в тепло, $\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} (\partial u_i'' / \partial x_j + \partial u_j'' / \partial x_i)^2$; скалярная диссипация температурных неоднородностей, $\varepsilon_T = \chi \sum_j (\partial T'' / \partial x_j)^2$; скорость смешения до молекулярного уровня (не влияющего на динамику течения) вещества с концентрацией $\theta(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_\theta = \chi \sum_j (\partial \theta'' / \partial x_j)^2$ (заметим, что величина ε_θ определяет меру неоднородности концентрационного поля, исчезающей в единицу времени за счёт молекулярной диффузии $D \approx \chi$); энтропия системы (в случае двумерной турбулентности); средние завихренности поля пульсаций скорости, относящиеся к мезомасштабным вихревым образованиям k -го типа (фундаментальные величины для характеристики КС), и т.п.

Использование внутренних координат в качестве дополнительных макроскопических параметров турбулентного хаоса, позволяет, как мы увидим далее, термодинамически получить (при учёте центрального для данного подхода постулата Пригожина, касающегося направления протекания необратимых процессов в любом локальном объёме пространства внутренних координат [17]) эволюционные уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова в пространстве конфигураций \mathbf{q} . Эти кинетические уравнения, предназначенные для определения временной эволюции функции плотности распределения вероятностей различных стохастических мелко-масштабных характеристик турбулентности, позволяют проанализировать также и условия перехода из одного устойчивого стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса в другое, вызванные, в конечном счёте, последовательной потерей устойчивости течения жидкости при изменении управляющих режимом турбулентного движения в целом параметров.

Отметим, что чисто классический (т.е. без введения внутренних стохастических координат) термодинамический подход к моделированию турбулентности, который был использован нами в Гл.2 для подсистемы турбулентного хаоса, в случае структурированного вихревого континуума представляется не вполне адекватным, поскольку любые две реализации ансамбля (множества подсистем хаоса с одинаковым набором экстенсивных термодинамических параметров состояния) будут при его применении тождественными во всех отношениях, что не отвечает реальному положению вещей. Причиной этому являются турбулентные флуктуации внутренних координат состояния хаоса, которые и служат, в конечном счёте, мерой различий в любом ансамбле термодинамически тождественных подсистем хаоса. Собственно эти, не подавляемые в сильно неравновесных условиях, турбулентные флуктуации, а напротив, усиливающиеся при определённых обстоятельствах внутренними необратимыми процессами

внутри вихревой подсистемы в так называемых точках бифуркации (в которых подсистема «может выбрать» между различными состояниями), и приводят к разнообразным механическим проявлениям реального турбулизованного течения. В частности, подсистема турбулентного хаоса, находящаяся в некотором устойчивом стационарном состоянии (вдали от локального термодинамического равновесия), при определённых значениях управляющих параметров может сместиться к новому стационарному состоянию с нейтральной устойчивостью (связанному с, так называемой, критической точкой потери устойчивости), и вслед за тем скачкообразно перейти в некоторое другое асимптотически устойчивое стационарное состояние, отвечающее той или иной форме надмолекулярного когерентного поведения большого числа частиц (например, осцилляциям разномасштабных вихрей). Напомним ещё раз, что согласно Пригожину [2], подобная способность осуществлять порядок через флуктуации является фундаментальным свойством любых открытых сильно неравновесных термодинамических систем. Таким образом, из-за постоянно происходящих турбулентных пульсаций любое квазистационарное состояние турбулентного хаоса удобно представлять себе, как состояние не одной отдельной подсистемы, а целого физического ансамбля подсистем. Именно по этой причине и возникает необходимость в уточнении термодинамического описания турбулентного течения с тем, чтобы можно было бы учесть эффекты стохастичности моделирующего его вихревого континуума [15].

В соответствии с развиваемым здесь стохастико-термодинамическим подходом, будем далее предполагать, что для полного статистического описания случайного векторного процесса $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ в вихревом континууме (т.е. набора структурных мелкомасштабных характеристик хаоса $q_k(\mathbf{x}, t)$, которые часто удобно собрать в один вектор-столбец \mathbf{q} в n -мерном пространстве конфигураций) достаточно знать одноточечную плотность вероятности $W_1(\mathbf{q}, t)$ и совместную двухточечную плотность распределения вероятности $W_2(\mathbf{q}_0, t_0; \mathbf{q}, t)$. Как известно, случайные процессы, полностью описываемые только этими двумя функциями распределения, являются марковскими процессами. Можно сказать, что это кардинальное предположение определяет класс случайных процессов (турбулентных флуктуаций), к которому применима анализируемая здесь стохастико-термодинамическая модель развитой турбулентности. Далее будем также использовать двухточечную плотность условной вероятности, $P_2(\mathbf{q}_0, t_0; \mathbf{q}, t)$, которая позволяет найти вероятное значение параметра \mathbf{q} в момент времени t , если в момент времени t_0 , с вероятностью равной единице, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. Эти плотности вероятности будем употреблять для получения средних значений различных функций $f(\mathbf{q}(t))$ от случайного вектора состояния $\mathbf{q}(t)$: в

частности, формула $\overline{f(\mathbf{q}(t))} = \int f(\mathbf{q}(t))W_1(\mathbf{q},t)d\mathbf{q}$ определяет безусловное среднее величины $f(\mathbf{q}(t))$, а формула $\overline{f(\mathbf{q}(t))}^0 = \int f(\mathbf{q})P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q}$ вводит среднее значение $f(\mathbf{q}(t))$ в момент времени t при условии, что $f(\mathbf{q}(t_0)) = f(\mathbf{q}_0)$ (условное среднее). Связь между средними значениями по условному подансамблю $\overline{f(\mathbf{q}(t))}^0$ и по всему физическому ансамблю $\overline{f(\mathbf{q}(t))}$ неявно содержится в соотношении

$$P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) = W_2(\mathbf{q}_0,t_0;\mathbf{q},t) / W_1(\mathbf{q}_0,t_0)$$

которое, собственно, и определяет, так называемую, функцию вероятности перехода P_2 .

Кроме этого, ограничим наше рассмотрение, так называемым стационарным физическим ансамблем турбулентного хаоса, состоящим из адекватных в указанном выше смысле подсистем, поддерживаемых непрерывно действующими внешними источниками турбулентности в таком состоянии, при котором случайные переменные $\mathbf{q}(t)$ являются инвариантными относительно сдвига по оси времени, т.е. $\mathbf{q}(t_p + \tau) = \mathbf{q}(t_p)$ при всех p и τ . Ясно, что в этом случае одновременная плотность вероятности $W_1(\mathbf{q})$ не будет зависеть от времени, а плотности совместных вероятностей будут обусловлены лишь разностью $t - t_0$, например, $P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t) = P_2(\mathbf{q}_0,0|\mathbf{q},t - t_0)$. Имея это в виду, будем ниже опускать в выражениях для W_2 и с начальный момент времени и записывать их сокращено: $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ и т.п. Отметим также, что в рассматриваемом нами случае положительная функция P_2 обладает следующими свойствами [14]:

$$\int P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q} = 1, \quad \int W_1(\mathbf{q}_0)P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q}_0 = W_1(\mathbf{q}), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) = W_1(\mathbf{q}), \quad (2.1)$$

причём последнее соотношение означает, что для стационарных процессов условная плотность асимптотически со временем перестает зависеть от начального условия.

2.2. Основное кинетическое уравнение

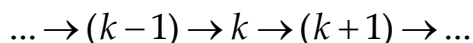
Напомним, что ключевое положение теории Колмогорова [21] возникновения мелкомасштабной турбулентности состоит в том, что процессы возбуждения вихревых образований, их нелинейных взаимодействий, а также процессы вязкой диссипации турбулентной энергии строго разнесе-

ны в пространстве волновых чисел, когда приток энергии в турбулентный поток происходит вблизи волнового числа k_L , соответствующего макромасштабу турбулентности L , а диссипация энергии становится эффективной вблизи волнового числа k_η (где η – микромасштаб турбулентности, называемый часто масштабом Колмогорова). Другими словами, присутствие инерционного интервала ($k_L \ll k \ll k_\eta$) является характерным признаком развитой турбулентности. При этом процесс передачи энергии от крупномасштабных турбулентных вихрей к малым вихрям, может быть наглядно представлен как каскадный процесс их дробления (заметим, что впервые идею каскада энергии выдвинул Л. Ричардсон в 1922 году).

Для дальнейших целей нам понадобится так называемое *основное кинетическое уравнение* для скорости изменения числа вихревых молей $n(\mathbf{q})$ в каскадном процессе взаимодействия турбулентных движений разного масштаба, или для функции $P_2(\mathbf{q}, t) \equiv n(\mathbf{q}) / n_\Sigma$, которая имеет смысл (условной) плотности вероятности обнаружить систему в интервале $(\mathbf{q}, \mathbf{q} + d\mathbf{q})$ в момент времени t , если в начальный момент (при $t = 0$) она с вероятностью, равной единице, находилась в состоянии \mathbf{q}^{st} . Здесь $n_\Sigma(\mathbf{x}, t)$ – полное число вихревых образований с признаком \mathbf{q} в объёме $d\mathbf{x}$.

При выводе уравнения для скорости изменения числа вихревых молей $n(\mathbf{q})$ в каскадном процессе взаимодействия турбулентных движений разного масштаба будем считать, что механизм каскадного дробления вихрей, связанный с переходом кинетической энергии от крупных вихрей к всё более мелким, таков, что среда “сохраняет память” лишь только о последнем переходе (марковский процесс). Тогда в случае, если концентрация вихрей $n(\mathbf{q}_i)$ в состоянии \mathbf{q}_i может быть изменена только в результате перехода их из соседних состояний \mathbf{q}_{k-1} (распада больших вихрей с признаками \mathbf{q}_{i-1} на меньшие вихри с признаками \mathbf{q}_i) или в соседние состояния \mathbf{q}_{i+1} (принцип локальности взаимодействия), имеем $\partial n / \partial t + (J_i - J_{i-1}) = 0$ где J_i – скорость перехода $i \rightarrow i + 1$, а J_{i-1} – скорость перехода $(i - 1) \rightarrow i$. Поскольку распределение завихренности в реальном потоке турбулентной жидкости является непрерывным (в случае развитой турбулентности имеется, как известно, континуум возбуждённых степеней свободы [(см., например, [24]), то будем далее считать, что подобный процесс перекачки кинетической энергии осреднённого движения по каскаду Ричардсона–Колмогорова вниз может быть адекватно описан в рамках изменения случайных параметров \mathbf{q} , принимающих непрерывные значения. Это соответствует, в частности, такому каскадному процессу разрушения больших и образования мелких вихрей, при котором в единичном акте взаимо-

действия происходят только бесконечно малые изменения величин \mathbf{q} , тогда как конечные изменения возникают благодаря кумулятивному действию большого числа вихревых взаимодействий. На языке химии подобный процесс может рассматриваться как ряд последовательных (консективных) химических реакций, выражаемых схемой:



Заметим, что в общем случае принцип детального равновесия может нарушаться для термодинамических систем, далёких от полного теплового равновесия; это справедливо, в частности, и для стационарно-неравновесного каскадного процесса образования вихревых структур. Следовательно, для реального каскадного процесса уравнение для скорости изменения концентрации турбулентных вихрей $n(\mathbf{q}, t)$ должно быть переписано в форме стандартного уравнения неразрывности

$$\partial n(\mathbf{q}, t) / \partial t = -(\partial / \partial \mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, t)$$

в пространстве конфигураций. Здесь $\mathbf{J}(\mathbf{q}, t)$ – вихревой поток в инерционном интервале, отвечающий числу “вихревых молей”, которые в единицу времени переходят из состояния \mathbf{q} в состояние $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$. В более общем случае, когда концентрация турбулентных вихрей зависит и от пространственной координаты \mathbf{x} , кинетическое уравнение для скорости изменения числа $n(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ может быть записано в форме уравнения неразрывности (как в координатном пространстве \mathbf{x} , так и в пространстве внутренних координат \mathbf{q})

$$\frac{\partial n(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \{n(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) \langle \mathbf{u} \rangle\} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

или, с учётом (1.1), в виде

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{n(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\bar{\rho}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t).$$

Здесь $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ – подлежащий определению термодинамический поток в пространстве внутренних координат \mathbf{q} .

2.3. Термодинамика подсистемы структурированного хаоса

Таким образом, процесс передачи турбулентной энергии по каскаду вихрей в случае развитой турбулентности можно рассматривать как своего рода химические превращения с соответствующим химическим потенциа-

лом $\mu_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ для внутренних степеней свободы \mathbf{q} и химическим средством де Донде

$$\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) = -(\partial \mu_{turb} / \partial \mathbf{q}),$$

которое можно трактовать, как движущую силу каскадного процесса, отвечающую протеканию одного эквивалента $n(\mathbf{q}) \rightarrow n(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q})$ процесса дробления вихрей. Заметим, что понятие химического потенциала отличается большая общность: оно применимо почти к любой модели сплошной среды, если для неё возможно введение тем или иным способом понятия термодинамической температуры (не являющейся в общем случае абсолютной температурой среды).

Распространяя формализм химического потенциала на стационарно-неравновесный турбулентный хаос, будем определять интенсивные термодинамические параметры, такие как обобщённая температура $T_{turb}(\mathbf{x}, t)$ и давление $p_{turb}(\mathbf{x}, t)$ турбулизации (которые никак не связаны с молекулярной температурой и давлением лежащего в основе течения), а также турбулентный химический потенциал $\mu_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ для внутренних степеней свободы \mathbf{q} , из фундаментального соотношения Гиббса для обобщённой энтропии (заданной *a priori* в виде характеристической функции

$$S_{turb}(\mathbf{x}, t) = S_{turb}(E_{turb}(\mathbf{x}, t), \langle v \rangle(\mathbf{x}, t), n(\mathbf{q}) / \bar{\rho}) \quad (2.3)$$

(см., например, [25]) с помощью следующих соотношений

$$\frac{1}{T_{turb}} = \left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial E_{turb}} \right)_{\langle v \rangle, n/\bar{\rho}}, \quad \frac{p_{turb}}{T_{turb}} = \left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial (1/\bar{\rho})} \right)_{E_{turb}, n/\bar{\rho}},$$

$$\frac{\mu_{turb}(\mathbf{q})}{T_{turb}} = - \left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial (n(\mathbf{q})/\bar{\rho})} \right)_{E_{turb}, 1/\bar{\rho}} \quad (2.4)$$

Химический потенциал $\mu_{turb}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы определяется в общем случае, как функциональная производная. Используемая здесь энтропия турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ содержит по предположению все термодинамические сведения о подсистеме стационарно-неравновесного турбулентного хаоса, т.е. связана с устойчивостью, флуктуациями и динамическими изменениями в квазистационарном состоянии точно так же, как равновесная энтропия какой-либо термодинамической системы в локально равновесном состоянии [14]. Одна из замечательных особенностей энтропии $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ состоит и в том, что многие статистические свойства турбулентного хаоса в квазистационарных состояниях могут быть выведены из

этой величины. В частности, различные алгебраические соотношения для интенсивных переменных $E_{turb}(\mathbf{x}, t)$, $T_{turb}(\mathbf{x}, t)$, $p_{turb}(\mathbf{x}, t)$ и $\mu_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$, которые могут быть получены обычным для термодинамики способом из соотношения (2.4), допустимо интерпретировать как специфические «уравнения состояния» для подсистемы турбулентного хаоса

Важно ясно себе представлять, что применимость понятий температуры и энтропии турбулизации не ограничивается только теми ситуациями, которые возникают вблизи состояния локального термодинамического равновесия подсистемы турбулентного хаоса. Напротив, эти величины вводятся в рассмотрение как раз с целью термодинамического описания хаоса в стационарно-неравновесных состояниях. Ещё раз отметим, что обобщённая энтропия турбулентности $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ в этом подходе, в отличие от локальной равновесной энтропии подсистемы осреднённого движения $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$, остаётся, вообще говоря, неопределённой величиной, относительно которой не существует никаких экспериментальных или теоретических (основанных на знании физики турбулентного хаоса) методов для установления её функциональной истинной зависимости от параметров состояния. Эта величина вводится в теорию исключительно с целью обеспечения её связности, а явный вид функционального уравнения (2.3) постулируется в зависимости от целей модели.

Дифференциальная форма фундаментального соотношения Гиббса для энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объёма $d\mathbf{x}$, принимает следующий вид [26]

$$\frac{DS_{turb}}{Dt} = \frac{1}{T_{turb}} \frac{DE_{turb}}{Dt} + \frac{p_{turb}}{T_{turb}} \frac{D\langle v \rangle}{Dt} - \frac{1}{T_{turb}} \int_{\mathbf{q}} \mu_{turb}(\mathbf{q}) \frac{D}{Dt} (n(\mathbf{q}) / \bar{\rho}) d\mathbf{q}. \quad (2.5)$$

Будем далее отождествлять внутреннюю энергию хаоса E_{turb} с энергией турбулентности [15]

$$E_{turb} = \langle b \rangle + const = \overline{\rho(\mathbf{u}'')^2} / 2\bar{\rho} + const, \quad (2.6)$$

и полагать, что подсистема турбулентного хаоса в термодинамическом смысле является идеальным классическим газом (с тремя степенями свободы, по которым энергия распределена равномерно) – это ключевые гипотезы рассматриваемого здесь подхода. Тогда, в частности, можно написать следующие уравнения состояния

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\langle b \rangle &= \frac{3}{2} R\bar{\rho} T_{turb}, \quad p_{turb} = R\bar{\rho} T_{turb}, \\ \mu_{turb}(\mathbf{q}, T_{turb}) &= k_B T_{turb} \ln n(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{q}, T_{turb}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $R(= n_{\Sigma} k_B / \bar{\rho})$ – «газовая постоянная» для вихревого континуума; k_B – постоянная Больцмана; $n_{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \int n(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{q}$ – полное число вихревых образований в единичном объёме конфигурационного пространства; $\Phi(\mathbf{q}, T_{turb})$ – так называемая потенциальная энергия по внутренней координате \mathbf{q} , зависящая в общем случае и от температуры турбулизации T_{turb} .

Отметим сразу, что в некоторых случаях можно исключить из выражения (2.7) потенциальную энергию $\Phi(\mathbf{q}, T_{turb})$, используя для этой цели заданное *a priori* равновесное распределение $P_2^{st}(\mathbf{q})$ внутренних координат \mathbf{q} , соответствующее какому-либо асимптотически устойчивому стационарному состоянию турбулентного хаоса. Ранее уже отмечалось, что поскольку энергия турбулентных движений благодаря вязкости непрерывно рассеивается, то ситуация, при которой достигается статистически равновесное состояние, оказывается невозможной. Стационарное же состояние в отличие от равновесного обычно является диссипативным. Действительно, из курса термодинамики известно [26], что по мере перехода какого-либо химически активного молекулярного континуума к устойчивому стационарному (но достаточно близкому к равновесному) состоянию, характеризующему минимальным производством энтропии, уменьшается также и величина самой энтропии. По аналогии с молекулярными химическими реагирующими системами, для случая стационарного состояния подсистемы турбулентного хаоса, когда внутренние координаты \mathbf{q} могут флуктуировать около некоторого устойчивого стационарного значения \mathbf{q}^{st} при определённых (для данного элементарного объёма $d\mathbf{x}$) внутренней энергии E_{turb} и удельном объёме $\langle v \rangle$, энтропия турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ также должна быть минимальной среди всех других состояний с теми же значениями E_{turb} и $\langle v \rangle$. Таким образом, справедливо условие

$$\delta S_{turb} = -\frac{1}{\bar{\rho} T_{turb}} \int_{\mathbf{q}} \mu_{turb}(\mathbf{q}) \delta n(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

где $\delta n(\mathbf{q}) = n(\mathbf{q}) - n(\mathbf{q}^{st})$. Поскольку полное число вихревых молей n_{Σ} постоянно, имеем также $\int \delta n(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0$. Из этих двух условий следует, что для

устойчивого стационарного состояния турбулентного хаоса химический потенциал $\mu_{turb}(\mathbf{q})$ по внутренним координатам, не зависит от вектора состояния \mathbf{q} ($\mu_{turb}^{st} = const$). С использованием этого факта, можно получить выражение

$$\mu_{turb}(\mathbf{q}, t) = k_B T_{turb} \ln \left\{ n(\mathbf{q}) / n(\mathbf{q}^{st}) \right\} + \mu_{turb}^{st}, \quad (2.8)$$

позволяющее определить химический потенциал по заранее известному стационарному распределению $n(\mathbf{q}^{st})$ признака \mathbf{q} . Соотношение (2.8) может быть переписано в виде

$$\mu_{turb}(\mathbf{q}, t) = k_B T_{turb} \ln \left\{ \frac{P_2(\mathbf{q}_0 | \mathbf{q}, t)}{W_1^{st}(\mathbf{q})} \right\} + \mu_{turb}^{st}, \quad (2.9)$$

являющемся обобщением известной формулы Эйнштейна (для статистически равновесного состояния) на квазистационарные состояния в конфигурационном пространстве $W_1^{(j)}(\mathbf{q})$; при написании формулы (2.9) использовано следующее выражение

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, T_{turb}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, T_{turb}) = k_B T_{turb} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \ln W_1^{st}(\mathbf{q}) \quad (2.10)$$

для силы трения (в пространстве конфигураций \mathbf{q}), порождённой потенциальным полем $\Phi(\mathbf{q}, T_{turb})$. Функция

$$W_1^{st}(\mathbf{q}) = \text{const} \exp \left\{ -\frac{\Phi(\mathbf{q}, T_{turb})}{k_B T_{turb}} \right\}$$

определяет (максимальную) вероятность устойчивого стационарного состояния \mathbf{q}^{st} , когда флуктуирующие внутренние координаты \mathbf{q} остаются неизменными, а функция $\Phi(\mathbf{q}, T_{turb})$ играет роль термодинамического потенциала для стационарного состояния.

Напомним, что в равновесной термодинамике не делается различия между двумя концепциями равновесия – равновесным состоянием, отвечающим максимальной энтропии, и равновесным распределением по возможным состояниям, которые физически почти эквиваленты (см., например, [11]). Аналогичная ситуация справедлива и для стационарных состояний в термодинамике неравновесных процессов [14]. Это связано с тем, что асимптотические плотности распределения вероятности состояний сосредоточены в чрезвычайно узкой области и в термодинамическом пределе эти гауссовские величины переходят в дельта-функции, сосредоточенные в \mathbf{q}^{st} .

Используя уравнение (2.2), преобразуем тождество Гиббса (2.5), путём интегрирования по частям и в предположении, что поток $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ об-

ращается в нуль на обеих границах \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 области определения переменной \mathbf{q} (следствие условия $\int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \delta n(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0$), к виду

$$\frac{DS_{turb}}{Dt} = \frac{1}{T_{turb}} \frac{DE_{turb}}{Dt} + \frac{p_{turb}}{T_{turb}} \frac{D\langle v \rangle}{Dt} - \frac{1}{T_{turb}} \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mu_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q}. \quad (2.11)$$

Последний член этого соотношения

$$\left(\frac{D}{Dt} \right)_i S_{turb}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{q}} \sigma_{\mathbf{q}}(S_{turb}) d\mathbf{q} = - \frac{1}{T_{turb}} \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mu_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \geq 0 \quad (2.12)$$

описывает суммарный рост энтропии турбулизации S_{turb} , обусловленный необратимыми процессами возникновения разнообразных вихревых структур, характеризующихся полным набором внутренних координат \mathbf{q} . Из (2.12) видно, что локальное производство пульсационной энтропии $\sigma_{\mathbf{q}}(S_{turb})$, отвечающее каждой части пространства внутренней координаты \mathbf{q} , имеет обычную термодинамическую форму

$$\sigma_{\mathbf{q}}(S_{turb}) = - \frac{1}{T_{turb}} \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mu_{turb}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{T_{turb}} \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$$

где

$$\mathbf{A}_{turb} = - \frac{\partial \mu_{turb}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{k_B T_{turb}}{n} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{k_B T_{turb}}{n} \exp\left(\frac{\Phi}{k_B T_{turb}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \exp\left(\frac{\mu_{turb}}{k_B T_{turb}} \right) \quad (2.13)$$

– обобщённое химическое сродство де-Донде для конфигурации \mathbf{q} (функция состояния подсистемы турбулентного хаоса), записанное здесь с учётом соотношения (2.7) для обобщённого химического потенциала $\mu_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$.

Уравнение переноса для энтропии турбулизации. Получим теперь уравнение переноса для энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$, применяя тот же образ действий, который привёл к уравнению (1.6). Исключим для этого из (2.11) субстанциональные производные от удельного объёма $\langle v \rangle(\mathbf{x}, t)$ и турбулентной энергии $\langle b \rangle(\mathbf{x}, t)$ ($\equiv E_{turb}$), дифференциальное уравнение для которой имеет вид [см. (2.18) в Гл.2]

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle b \rangle = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_{\langle b \rangle}^{turb} + \mathbf{R} : \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} + p' \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} - \mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle.$$

В результате будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S_{turb}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \bar{\rho} S_{turb} \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{J}_{(S_{turb})} \right\} = \sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma_{(S_{turb})}^{(i)} + \sigma_{(S_{turb})}^{(e)} \quad (2.14)$$

где

$$\mathbf{J}_{(S_{turb})}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{T_{turb}} \left\{ \overline{\rho (|\mathbf{u}''| / 2 + p' / \rho) \mathbf{u}''} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}'' \right\} = \frac{1}{T_{turb}} \mathbf{J}_{\langle b \rangle}^{turb} \quad (2.15)$$

$$\sigma_{(S_{turb})}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{T_{turb}} \left\{ \overline{p' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}'' \right)} - \mathbf{J}_v^{turb} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{x}} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle \right\} \equiv - \frac{\mathfrak{S}_{E,b}}{T_{turb}} \quad (2.16)$$

$$0 \leq \sigma_{(S_{turb})}^{(i)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T_{turb}} \left\{ - \mathbf{J}_{\langle b \rangle}^{turb} \cdot \frac{\partial \ln T_{turb}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{R} : \overset{0}{\mathbf{D}} + \bar{\rho} \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \right\} \quad (2.17)$$

Величины $\sigma_{(S_{turb})}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ и $\sigma_{(S_{turb})}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ имеют смысл, соответственно, локального производства и стока энтропии $S_{turb}(\mathbf{x}, t)$ подсистемы турбулентного хаоса. Отметим, что работа турбулентных напряжений $\mathbf{R} : \overset{0}{\mathbf{D}}$ приводит к росту энтропии хаоса, в то время как вязкая диссипация $\langle \varepsilon_b \rangle > 0$ уменьшает энтропию турбулизации S_{turb} .

Суммарная энтропия подсистем осреднённого движения и вихревого хаоса. Складывая выражения (1.6) и (2.14), получим уравнение баланса для суммарной энтропии $S_{\Sigma} = \langle S \rangle + S_{turb}$ турбулентной жидкостной системы

$$\bar{\rho} \frac{DS_{\Sigma}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{J}_{\langle b \rangle}^{turb}}{T_{turb}} + \frac{\left(\mathbf{q}^{\Sigma} - \sum_{\alpha=1}^N \langle \mu_{\alpha} \rangle \mathbf{J}_{\alpha}^{\Sigma} \right)}{\langle T \rangle} \right\} = \sigma_{\Sigma}, \quad (2.18)$$

где

$$0 \leq \sigma_{\Sigma} \equiv \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{S_{turb}}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle, S_{turb}} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{S_{turb}}^{(i)} + \frac{T_{turb} - \langle T \rangle}{\langle T \rangle T_{turb}} \mathfrak{S}_{E, \langle b \rangle} \quad (2.19)$$

– локальное производство энтропии, связанное с необратимыми процессами внутри суммарного турбулизованного континуума. Величина σ_Σ , записанная с учётом формул (1.7), (1.8) и (2.16), (2.17) имеет структуру билинейной формы

$$0 \leq \sigma_\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -\tilde{\mathbf{q}}^\Sigma \cdot \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \bar{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \overset{0}{\bar{\tau}} : \overset{0}{\mathbf{D}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T_{turb}} \left\{ -\mathbf{J}_{\langle b \rangle}^{turb} \cdot \frac{\partial \ln T_{turb}}{\partial \mathbf{x}} + \overset{0}{\mathbf{R}} : \overset{0}{\mathbf{D}} + \bar{\rho} \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \right\} + \mathfrak{S}_{E,b} \left(\frac{T_{turb} - \langle T \rangle}{T_{turb} \langle T \rangle} \right) \right\}. \quad (2.20)$$

Согласно основному постулату нелинейной термодинамики неравновесных процессов, в случае пребывания системы вблизи относительно устойчивого квазистационарного состояния, термодинамические потоки можно представить в виде линейных функций от сопряжённых макроскопических сил [14]. Важно при этом подчеркнуть, что матрица феноменологических коэффициентов для случая турбулентного жидкостного континуума будет зависеть не только от осреднённых параметров состояния системы (т.е. от осреднённых температуры, плотности и т.п.), но и от характеристик турбулентной надструктуры, т.е. от параметров типа ε_b , $\langle b \rangle$ и т.п. Подобная ситуация, когда имеет место функциональная зависимость феноменологических коэффициентов от термодинамических потоков (например, от скорости диссипации ε_b , которая в стационарном случае представляет собой также и поток энергии по каскаду вихрей), является, как известно, типичной для самоорганизующихся систем [27,28]. Это обстоятельство может привести в общем случае к тому, что отдельные слагаемые в сумме σ_Σ не будут положительно определёнными величинами, хотя вся сумма всегда больше или равна нулю, $\sigma_\Sigma \geq 0$. Тогда суперпозиция различных потоков в принципе может приводить к отрицательным значениям отдельных диагональных элементов матрицы феноменологических коэффициентов, чем, вероятно, и объясняется эффект отрицательной вязкости, в некоторых турбулентных течениях.

Как видно из выражения (2.20), в общем случае спектр возможных перекрёстных эффектов для турбулентного режима течения расширяется по сравнению с ламинарным режимом. Так, например, возникновение суммарного потока тепла \mathbf{q}^Σ в турбулентном континууме возможно под влиянием не только сопряжённой с ним термодинамической силы $\partial \ln \langle T \rangle / \partial \mathbf{x}$, но и под воздействием силы $\partial \ln T_{turb} / \partial \mathbf{x}$, сопряжённой с потоком $\mathbf{J}_{\langle b \rangle}^{turb}$ (описывающим “диффузионный” перенос турбулентной кинетической энергии).

тической энергии). Однако в настоящее время отсутствуют надёжные экспериментальные данные, количественно описывающие перекрёстные эффекты подобного рода. Кроме этого, обычно вклад любых перекрёстных эффектов в общую скорость какого-либо процесса на порядок меньше по сравнению с прямыми эффектами [11]. Учитывая это обстоятельство, будем далее пользоваться требованием положительности интенсивностей σ_{Σ} , $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}$, $\sigma_{S_{turb}}^{(i)}$ независимо друг от друга, а также, без специальных оговорок, будем опускать ряд перекрёстных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

Закончим настоящий раздел следующим замечанием. Последнее слагаемое в правой части (2.20), описывающее производство энтропии внутри суммарного континуума за счёт необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осреднённого движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно.

$$\sigma_{\langle S \rangle, S_{turb}} = \mathfrak{J}_{E,b} \left(\frac{T_{turb} - \langle T \rangle}{T_{turb} \langle T \rangle} \right) \geq 0. \quad (2.21)$$

Поэтому, “направление” термодинамического потока $\mathfrak{J}_{E,b}(\mathbf{x}, t)$ определяется знаком функции состояния $X_{\mathfrak{J}} = (1/\langle T \rangle - 1/T_{turb})$, которую следует рассматривать как сопряжённую термодинамическую силу (макроскопическую причину), вызывающую поток $\mathfrak{J}_{E,b}(\mathbf{x}, t)$ энтропии. Известно [2], что подобный обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является неперемным условием структурированного коллективного поведения, т.е. может быть источником самоорганизации в одной из них

2.3. Термодинамический вывод уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова.

Стационарно-неравновесное состояние турбулентного поля. Поскольку турбулентность сопровождается диссипацией кинетической энергии, то для поддержания её квазистационарного режима (когда накачка и диссипация энергии взаимно почти уравниваются) необходим постоянно действующий внешний источник. Этим источником энергии может быть, например, проволочная решётка, установленная перпендикулярно к вынужденному течению жидкости, производящая турбулентность; стационарные граничные условия, вызывающие крупномасштабный сдвиг скорости течения или термоконвективную крупномасштабную неустойчивость и т.п. Мощность подобного источника должна быть такой, чтобы скомпенсировать расход турбулентной энергии, рассеиваемой за счёт молекулярной вязкости. Для квазистационарного режима турбулентности практически вся расходуемая энергия без сколько-нибудь существенных (но, вооб-

ще говоря, имеющих место быть) потерь будет передаваться через инерционный интервал от энергетического к вязкому интервалу, где и происходит её диссипация в тепло. При этом, процесс передачи энергии от крупномасштабных к малым вихрям, может быть наглядно представлен как случайный каскадный процесс Ричардсона–Колмогорова дробления турбулентных вихрей.

В развиваемом здесь модельном подходе предполагается, что квазистационарному режиму турбулентности отвечает непрерывный процесс передачи энергии от подсистемы осреднённого движения жидкости к подсистеме турбулентного хаоса. Очевидно, что тогда в вихревом континууме, связанном с мелкомасштабной турбулентностью, устанавливается такой стационарно-неравновесный режим между притоком энергии от “внешнего источника” (обязанного осреднённому течению жидкости) и её диссипацией (из-за необратимых процессов внутри самой подсистемы турбулентного хаоса), при котором $dS_{turb} / dt \cong 0$ [26]. Заметим попутно, что для открытой подсистемы турбулентного хаоса квазистационарное состояние, в котором производство энтропии минимально, является аттрактором, в то время как для турбулентной системы в целом аттрактором служит состояние, соответствующее максимуму суммарной энтропии. Условие $dS_{turb} / dt \cong 0$ означает, что производство $\sigma_{(S_{turb})}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ энтропии турбулизации S_{turb} в такой степени компенсируется её оттоком $\sigma_{(S_{turb})}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$, что суммарное возникновение энтропии S_{turb} почти отсутствует

$$\sigma_{(S_{turb})}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{(S_{turb})}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{(S_{turb})}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \cong 0.$$

При этом следует также иметь в виду, что величина потока энтропии турбулизации в стационарном случае является постоянной, $(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_{S_{turb}} \approx 0$.

Так как $\sigma_{(S_{turb})}^{(i)} > 0$, то справедливо неравенство $0 > \sigma_{(S_{turb})}^{(e)} \cong -\sigma_{(S_{turb})}^{(i)}$, т.е. подсистема турбулентного хаоса должна экспортировать энтропию во “внешнюю среду” (отдавать её подсистеме осреднённого движения), чтобы скомпенсировать производство энтропии за счёт необратимых внутренних процессов внутри себя. Другими словами для поддержания стационарно-неравновесного состояния внутри подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от “внешней среды”,

$$\sigma_{S_{turb}}^e \equiv -\mathfrak{J}_{E,b} / T_{turb} = -\langle T \rangle \sigma_{\langle S \rangle}^e / T_{turb} < 0$$

Как известно, такого рода условие является достаточным для возникновения диссипативных когерентных образований в вихревом континууме [1,2]. Действительно, поскольку в стационарно-неравновесном состоянии

хаоса величина оттока энтропии из подсистемы осреднённого движения положительна ($0 < \sigma_S^e \equiv -\mathfrak{Z}_{E,b} / \langle T \rangle$), то скорость $\mathfrak{Z}_{E,b}$ обмена энтропией (теплом) между осреднённым и турбулентным движениями также положительна, $\mathfrak{Z}_{E,b} \geq 0$. Но тогда из неравенства (2.21) следует, что температура турбулизации T_{turb} выше осреднённой температуры турбулизованной жидкости больше ($\langle T \rangle$), что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации диссипативной системы. В соответствии с этим принципом, возникновение когерентных структур (в нашем случае возникновение разномасштабных когерентных вихревых образований в подсистеме турбулентного хаоса) при отводе тепла из системы, т.е. при переходе к более низким температурам, является универсальным свойством материи [29].

Градиентные соотношения для структурированной турбулентности. Итак, поступающая в подсистему турбулентного хаоса негэнтропия расходуется на поддержание и совершенствование её внутренней структуры. Но тогда справедливо соотношение $0 \leq \sigma_{\langle S \rangle}^e = -T_{turb} \sigma_{S_{turb}}^e / \langle T \rangle \cong T_{turb} \sigma_{S_{turb}}^i / \langle T \rangle$, и уравнение баланса (1.6) для осреднённой энтропии $\langle S \rangle$ турбулизованной жидкостной системы принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{D\langle S \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}^\Sigma}{\langle T \rangle} \right) = \sigma_{\langle S \rangle}^i + \sigma_{\langle S \rangle}^e \cong \sigma_{\langle S \rangle}^i + \frac{T_{turb}}{\langle T \rangle} \sigma_{S_{turb}}^i \cong \sigma_\Sigma \quad (2.22)$$

где для локального рассеяния энергии $\langle T \rangle \sigma_\Sigma$ справедливо выражение

$$\langle T \rangle \sigma_\Sigma \equiv -\mathbf{q}^\Sigma \cdot \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{R} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} + \bar{\rho} \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \geq 0, \quad (2.23)$$

Здесь $\mathbf{q}^\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{q}^{turb} - \overline{p' \mathbf{u}''}$ – суммарный поток тепла в подсистеме осреднённого движения для режима развитой турбулентности. Исходя из (2.23), можно записать в линейном приближении и при использовании *принципа Кюри-Пригожина* (согласно которому связь между тензорами различного ранга в локально изотропной среде невозможна [11]), следующие градиентные соотношения для турбулентных потоков и сопряжённых им термодинамических сил

$$\mathbf{q}^\Sigma(\mathbf{x}, t) = -\lambda^{turb} \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = -\frac{2}{3}\bar{\rho}\langle b \rangle \mathbf{I} + \bar{\rho}v^{turb} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{x}} \right)^{transp} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right) \mathbf{I} \right\}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = \int_{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{x}, t) d\tilde{\mathbf{q}}, \quad (2.26)$$

соответствующие режиму стационарного состояния турбулентного поля. Заметим, что условие линейности не настолько сильно, чтобы лишить рассматриваемый случай практического значения.

Оценивая состояние проблемы замыкания осреднённых гидродинамических уравнений в целом, следует признать, что в настоящее время почти все полуэмпирические модели турбулентности в той или иной степени основаны на градиентных соотношениях [см. Гл.2]. Феноменологические коэффициенты (коэффициенты турбулентного обмена) $\lambda^{turb}(\mathbf{x}, t)$, $v^{turb}(\mathbf{x}, t)$ в этих соотношениях являются скалярными величинами, поскольку сильная турбулентность, является, как было подчёркнуто выше, локально однородной и изотропной. Эти величины, в отличие от коэффициентов молекулярного обмена, не являются материальными константами. Это обстоятельство связано с тем, что в турбулентном континууме разнообразные процессы переноса (вещества, импульса и энергии) из одной области системы в другую, определяются коллективными движениями молекул (вихревыми образованиями), и, следовательно, должны зависеть от параметров интенсивности турбулентности, в частности, от параметров $\langle \varepsilon_b \rangle$ и $\langle b \rangle$. Так, например, в инерциальном интервале масштабов вихрей ($\eta < k < L_1$), коэффициент турбулентной вязкости $v^{turb}(\mathbf{x}, t)$, отвечающий эмпирическому “закону четырёх третей” Ричардсона-Обухова (этот закон следует, в частности, из соображений теории размерности и подобия) имеет вид: $v^{turb} \sim \langle \varepsilon_b \rangle^{1/3} L_1^{4/3} \sim \langle e \rangle^2 / \langle \varepsilon_b \rangle$

Таким образом, при моделировании стационарно-неоднородной турбулентности в тех приложениях, когда важны процессы диссипации энергии в системе, необходимо привлекать к рассмотрению уравнение переноса тепла для осреднённого движения в виде (2.22); это уравнение должно быть дополнено линейными определяющими соотношениями (2.24)-(2.26).

Принцип Пригожина. Согласно формуле (2.26), феноменологическое соотношение для термодинамического потока $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ в пространстве внутренних координат \mathbf{q} и соответствующего “мгновенного” сродства $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ имеет в общем случае интегральный вид. Вслед за Пригожиным [17], будем теперь считать, что в каждой части внутреннего координатного

пространства \mathbf{q} необратимые процессы идут в таком направлении, что происходит только положительное приращение энтропии. Это означает, что положительным будет не только интеграл (2.12), но и величина

$$T_{turb} \sigma_{\mathbf{q}}(S_{turb}) = \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (2.27)$$

представляющая собой рассеяние энергии на единицу объёма конфигурационного пространства \mathbf{q} . Тогда определяющее соотношение, связывающее поток $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ и сродство $\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ состояния \mathbf{q} (соответствующее протеканию одного эквивалента процесса распада вихрей), есть просто

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{L}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}, t) = -\mathbf{L}_{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mu_{turb}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{L}_{\mathbf{q}} \cdot \left(\frac{k_B T_{turb}}{n(\mathbf{q}, t)} \frac{\partial n(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (2.28)$$

Здесь $\mathbf{L}_{\mathbf{q}}$ – положительно определённая локальная матрица коэффициентов переноса, удовлетворяющая соотношению взаимности Онзагера-Каземира $\mathbf{L}^{transp} = \mathbf{L}$; $n(\mathbf{q}, t)$ – числа вихревых молей в каскадном процессе взаимодействия турбулентных движений разного масштаба.

Соотношение (2.8), рассматриваемое совместно с (5.1.13), позволяет получить следующие эволюционные уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (в так называемой кинетической форме [30]) в пространстве стохастической переменной \mathbf{q} для функций распределения различных статистических характеристик мелкомасштабной турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)) = \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left\{ -\mathbf{K}(\mathbf{q}) P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь поток вероятности $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{dr} + \mathbf{J}_{dif}$ складывается из дрейфовой и диффузионной составляющих:

$$\mathbf{J}_{dr} = \mathbf{K} P_2, \quad \mathbf{J}_{dif} = -\frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \mathbf{q}},$$

где введены следующие обозначения для вектора дрейфа \mathbf{K} и матрицы обобщённых коэффициентов диффузии \mathbf{D} в пространстве стохастической переменной \mathbf{q}

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) \equiv \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{D} = \varepsilon^2 \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \equiv 2\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}). \quad (2.30)$$

Функция $P_2(\mathbf{q}, t) = n / n_\Sigma$ имеет смысл (условной) плотности вероятности обнаружить систему в интервале $((\mathbf{q}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}))$ в момент времени t , если в начальный момент (при $t = 0$) она с вероятностью, равной единице, находилась в состоянии \mathbf{q}^{st} . Параметр $\varepsilon \equiv \sqrt{k_B T_{turb}} = \sqrt{\rho(\mathbf{u}'')^2 / 3\bar{\rho}}$ характеризует суммарную интенсивность воздействия внутреннего шума подсистемы турбулентного хаоса (порождённого его “тепловой” структурой) на случайный процесс $\mathbf{q}(t)$. При написании (2.29) параметр подвижности $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{L}(\mathbf{q})/n(\mathbf{q})$ по внутренней координате \mathbf{q} считался здесь не зависящим в первом приближении от плотности $n(\mathbf{q})$. Следует отметить, что в общем случае матрица \mathbf{K} не образует, вообще говоря, вектор, если не ограничиваться при моделировании только линейными преобразованиями координат.

Наряду с кинетической формой записи уравнения ФПК в виде (2.29), в литературе используются и другие представления этого уравнения. Из них наибольшую популярность имеют представления Ито и Стратоновича. Представления Ито и Стратоновича основаны на разной трактовке, так называемых, стохастических интегралов [31], возникающих при решении соответствующих нелинейных стохастических уравнений Ланжевена. Эти представления, хотя и основываются на одинаковых по форме стохастических уравнениях, но приводят к отличным по форме уравнениям ФПК:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\langle \mathbf{u} \rangle P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left\{ -(\mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{H}(\mathbf{q})) P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot (\mathbf{Q}(\mathbf{q}) P_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)) \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \equiv \lambda \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ – «фиктивная сила», зависящая от выбора исчисления. При значениях $\lambda = 0, 1/2, 1$ в (2.31) получаются соответственно уравнения ФПК в форме Ито, Стратоновича и Климонтовича.

Отметим, что если реакция подсистемы турбулентного хаоса на воздействие внешней среды (подсистемы осреднённого движения) не зависит от её внутреннего состояния, задаваемого стохастической переменной \mathbf{q} , то и величина коэффициента диффузии не меняется с координатой \mathbf{q} (т.е. $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = const$). Тогда можно считать, что стохастическая система обладает аддитивным шумом, который в нашем случае сводится просто к интенсивности $\varepsilon^2 = k_B T_{turb}$ внутреннего шума подсистемы турбулентного хаоса.

Фиктивная сила $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ для систем подобного типа тождественно равна нулю, т.е. они совершенно нечувствительны к выбору исчисления. Другими словами, все три формы уравнения ФПК принимают для них один и тот же простейший вид (2.29). Однако в общем случае возможна обратная связь между внутренними состояниями \mathbf{q} стохастической подсистемы хаоса и подсистемой осреднённого движения. Оказывается, что не только внешние флуктуации (связанные, например, с теми степенями свободы турбулентного поля, которые не описываются выделенными координатами \mathbf{q}) влияют на стохастическую подсистему турбулентного хаоса, но и последняя оказывает обратное воздействие на их интенсивность. Применительно к рассматриваемому случаю это означает, что коэффициент диффузии приобретает зависимость от случайной координаты \mathbf{q} , т.е. внешние флуктуации имеют мультипликативный характер. При наличии мультипликативного шума, когда $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \neq const$, простейшая форма уравнения ФПК (2.29) имеет место только в представлении Климонтовича ($\lambda = 1$).

Таким образом, для систем с мультипликативным шумом возникает проблема выбора исчисления, поскольку сила, входящая в уравнения ФПК определяется неоднозначным образом. В исчислении Ито она сводится к реальной силе, действующей на выделенную степень свободы. При переходе к исчислению Стратоновича возникает добавка, пропорциональная производной от эффективного коэффициента диффузии. В кинетическом представлении Климонтовича величина этой добавки удваивается. Важно, что она существенным образом влияет на поведение стохастической системы, в результате чего представляется актуальным вопрос о физической природе указанной добавки и выборе исчисления.

3. Примеры уравнений ФПК, описывающих эволюцию пульсирующих характеристик турбулентного хаоса

Покажем теперь (на простых примерах), что пригожинский принцип (2.27) может служить основой для получения уравнений ФПК (эволюционных уравнений в частных производных) в пространстве стохастической переменной \mathbf{q} для функций распределения различных стохастических характеристик мелкомасштабной турбулентности, если относительно последних заранее приняты соответствующие гипотезы распределения в стационарно-неравновесном состоянии. Следует, однако, иметь в виду, что почти всегда подобного рода гипотезы не вполне строги и являются сильной идеализацией, связанной с упрощением реального турбулентного движения в естественных условиях [32].

3.1. Эволюция вихрей в пространстве пульсирующих скоростей

Применим сначала принцип (2.27) к выводу кинетического уравнения, описывающего изменение во времени функции плотности вероятности распределения вихревых скоростей $P_2(u''\mathbf{x}, t) (\equiv n(u'', \mathbf{x}, t) / n_\Sigma$ n – (здесь $n(u'', \mathbf{x}, t)$ – числовая плотность турбулентных вихрей; n_Σ – полное число вихревых молей. Эта функция рассматривается далее, как внутренняя переменная подсистемы турбулентного хаоса, а пульсирующая скорость u'' – как внутренняя координата q . Известно, что функция распределения вероятностей пульсирующей скорости не является универсальной в случае развитой турбулентности, поскольку она зависит от механизма, порождающего турбулентное поле. Тем не менее, следуя Миллионщикову [33], используем далее гипотезу о нормальном распределении пульсирующих скоростей (для локально изотропного турбулентного поля) в стационарном случае

$$W_1(u'') \equiv n^{stat}(u'') / n_\Sigma = (\beta / \sqrt{\pi}) \cdot \exp(-\beta^2 u''^2). \quad (3.1)$$

Подобное распределение Миллионщиков применил в теории турбулентности для специальных целей, которые здесь мы обсуждать не будем. Заметим только, что есть много примеров, когда функция распределения скорости приближённо оказывается гауссовской, например, в турбулентности, порождаемой решётками в аэродинамических трубах, или для турбулентности в атмосферном пограничном слое [8,34]. Для рассматриваемой здесь подсистемы турбулентного хаоса постоянную β в (3.1) можно связать с температурой турбулизации T_{turb} точно таким же способом, как это делается в кинетической теории газов [35]. Используя (2.6) и (3.1), легко найти, что $\beta^2 = (2RT_{turb})^{-1}$, откуда для функции $n^{stat}(u'')$ получим другое эквивалентное выражение

$$n^{stat}(u'') = n_\Sigma \left(\frac{1}{2\pi RT_{turb}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u''^2}{2RT_{turb}} \right) = const \cdot \exp\left(-\frac{u''^2}{2RT_{turb}} \right) \quad (3.2)$$

Подставляя это распределение в (2.8), получим следующее представление химического потенциала $\mu_{turb}(u'', \mathbf{x}, t)$ для конфигурации u'' :

$$\mu_{turb}(u'', \mathbf{x}, t) = \frac{k_B}{R} \frac{u''^2}{2} + k_B T_{turb}(\mathbf{x}, t) \ln[n(u'', \mathbf{x}, t)] + const. \quad (3.3)$$

С учётом этой формулы, феноменологическое соотношение (2.28) для потока вероятности $J(u'', \mathbf{x}, t)$ принимает вид

$$J(u'') = -\frac{\bar{\rho}}{n_{\Sigma}} L_{u''} \left(u'' + \frac{RT_{turb}}{n(u'')} \frac{\partial n(u'')}{\partial u''} \right) = -\alpha \left(u'' n(u'') + RT_{turb} \frac{\partial n(u'')}{\partial u''} \right), \quad (3.4)$$

где $R (= n_{\Sigma} k_B / \bar{\rho})$. Здесь введён коэффициент $\alpha \equiv k_B L_{u''} / R n(u'')$, который может быть интерпретирован, как “подвижность” в пространстве внутренней координаты u'' на единицу объёма; в первом приближении этот коэффициент не зависит от $n(u'')$ и по предположению от величины u'' . При подстановке (3.4) в (2.29), получим искомое кинетическое уравнение ФПК для функции плотности условной вероятности скорости u'' :

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (P_2 \langle \mathbf{u} \rangle (\mathbf{q}, t)) - \alpha \frac{\partial}{\partial u''} \left(u'' P_2 + RT_{turb}(\mathbf{q}, t) \frac{\partial P_2}{\partial u''} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Это динамическое уравнение, дополненное начальным условием $P_2 = \delta(u'' - 0)$ (справа стоит δ -функция, сосредоточенная в точке 0), описывает временную эволюцию функции плотности распределения вероятности P_2 пульсирующей скорости u'' , в частности, для затухающей (так называемой вырождающейся) турбулентности. Следует отметить, что величина $K \equiv -\alpha u''$ (коэффициент трения в соответствующем уравнении Ланжевена) играет роль коэффициента дрейфа в стандартной записи уравнения ФПК, а величина

$$D \equiv 2L_{u''} k_B T_{turb} / n(u'') = 2\alpha RT_{turb} = \alpha \beta^{-2}$$

имеет смысл коэффициента диффузии.

Нормальное распределение (3.1), являющееся стационарным решением одномерного по параметру u'' уравнения ФПК (3.5), можно принять за начальное статистическое состояние поля пульсирующих скоростей для целого класса различных движений вырождающейся турбулентности. Тогда нестационарное решение этого уравнения удаётся построить в аналитически замкнутом виде:

$$P_2(u'', \mathbf{x}, t) = \{ \pi a(\mathbf{x}, t) \}^{-1/2} \exp \left\{ -[u'' - b(\mathbf{x}, t)]^2 / a(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{\alpha} \{ 1 - \exp(-2\alpha t) \} + a_0 \exp(-2\alpha t), \quad b(\mathbf{x}, t) = b_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha t); \quad (3.7)$$

$a_0(\mathbf{x})$ и $b_0(\mathbf{q})$ – начальные условия. Это решение позволяет рассчитать различные n -точечные моменты (корреляционные функции) m -го порядка, описывающие статистическую связь между случайными скоростями в раз-

личных точках пространства-времени. В частности, для величин $\overline{u''^0}(\mathbf{x}, t)$ (условная средняя скорость ансамбля вихрей в момент времени t) и $\overline{u''(\mathbf{x}, t)u''(\mathbf{x}, t_1)}$ (двух временная одноточечная корреляционная функция) имеем:

$$\overline{u''^0}(\mathbf{x}, t) = \int u'' P_2(0|u'', t) du'' = b_0(\mathbf{r}) \exp(-\alpha t), \quad (3.8)$$

откуда $b(\mathbf{x}, t) \equiv \overline{u''^0}(\mathbf{x}, t)$;

$$\begin{aligned} \overline{u''(\mathbf{x}, t)u''_1(\mathbf{x}, t_1)} &= \int u'' du'' \int u''_1 du''_1 W_2(u'', t; u''_1, t_1) = \\ &= \overline{u''^2}(\mathbf{r}, t) \exp\{-\alpha|t - t_1|\} = \frac{1}{2} \frac{D}{\alpha} \exp\{-\alpha|t - t_1|\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где среднее берётся по стохастическому процессу (см., например, [27]). Здесь $W_2(u'', t; u''_1, t_1)$ – совместная плотность вероятности, которая в силу марковости процесса зарождения новых мод пульсационного движения (дробления вихревых образований) представляется в виде произведения плотности вероятности в момент t_1 , $W_1(u''_1, t_1)$, и условной вероятности $P_2(u'', t | u''_1, t_1)$ (сводящейся в момент $t = t_1$ к δ -функции

$$\delta(u'' - u''_1)): W_2(u'', t; u''_1, t_1) = W_1(u''_1, t_1) P_2(u'', t | u''_1, t_1).$$

Так как $D = 2\alpha \text{RT}_{turb} = \frac{4}{3}\alpha \langle b \rangle$, то из (3.9) следует, во-первых, верное соотношение

$$\overline{u''^2}(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{3} \langle b \rangle \cong \frac{1}{3} \overline{|\mathbf{u}''|^2},$$

согласующееся с предположением о локальной изотропности вихревого поля скоростей в случае развитой турбулентности, и, во вторых, эффективная формула для одной из наиболее важных корреляционных величин в теории статистической турбулентности

$$\overline{u''(\mathbf{x}, t)u''(\mathbf{x}, t_1)} = \frac{2}{3} \langle b \rangle \exp(-\alpha|t - t_1|), \quad (3.10)$$

которая определяет быстроту “забывания своего прошлого” пульсационной скоростью (согласно этой формуле это происходит за время порядка $t \cong 1/\alpha$).

Решение (3.6) при нулевых значениях параметров a_0 и b_0 принимает следующий вид

$$P_2(u'', t) = \left\{ 2\pi RT_{turb} [1 - \exp(-2\alpha t)] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{u''^2}{2RT_{turb} [1 - \exp(-2\alpha t)]} \right\}, \quad (3.11)$$

позволяющий проследить временную эволюцию функции распределения условной вероятности для пульсирующей скорости, в случае если при стационарном режиме турбулентности распределение по скоростям было гауссовским.

Следует иметь в виду, что выбор пульсирующей скорости u'' в качестве подходящей характеристики турбулентных вихрей (внутренней координаты подсистемы турбулентного хаоса), в общем случае не оправдывает себя, поскольку гауссовское распределение вероятностей пульсирующей скорости u'' не подтвердилась с достаточной степенью надёжности ни экспериментально (было установлено, например, что за решёткой отклонение от нормальности значительно возрастёт с ростом числа Рейнольдса Re), ни теоретически (как известно, для этого распределения классические законы турбулентности “двух и пяти третей” нарушаются). Ранее мы уже указывали, что наиболее приемлемыми характеристиками мелкомасштабной турбулентности на роль внутренней координаты являются неотрицательные макроскопические переменные – чётные функции скоростей, типа скорости диссипации турбулентной энергии и т.п. (см., например, [32]). Подобные случайные характеристики, согласно гипотезе Колмогорова, асимптотически удовлетворяют логарифмически нормальному распределению вероятностей. Это объясняется тем, что процесс последовательного дробления вихревых образований подобен процессу коагуляции твёрдых частиц (а последний приводит, как известно, к логнормальному распределению частиц по размерам). В монографии [36] было проанализировано уравнение ФПК, описывающее временную эволюцию функции распределения вероятностей для скорости диссипации турбулентной энергии в соответствующем конфигурационном пространстве.

3.2. Термодинамическое рассмотрение каскадного процесса, соответствующего гипотезам подобия Колмогорова

Применим теперь пригожинский принцип (2.27) к выводу кинетического уравнения, описывающего временную эволюцию функции распределения вихрей в пространстве кинетической энергии. Будем описывать каскадный процесс Ричардсона–Колмогорова (крупные вихри → мелкие вихри → теплота), используя аналогию с процессом последовательных химических реакций. В этом случае исходное кинетическое уравнение (2.2) для функции распределения $P(0|q; \mathbf{q}, t)$ турбулентных вихрей в пространстве пульсирующей энергии ($q = \rho |\mathbf{u}''|^2 / 2$) принимает вид

$$\frac{\partial P_2(0|q; \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (P_2(0|q; \mathbf{x}, t) \langle \mathbf{u} \rangle) = \frac{\partial}{\partial q} (P_2(0|q; \mathbf{x}, t) \varepsilon(q, \mathbf{x}, t)), \quad (3.12)$$

где

$$\varepsilon(q, \mathbf{x}, t) \equiv -J(q, \mathbf{x}, t) / n(q, \mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

– скорость реакции перехода из состояния q в состояние $q + dq$, отвечающая потоку вероятности $J(q)$ в состоянии q ; n – концентрации турбулентных вихрей. Другими словами соотношение (3.12) определяет параметр $\varepsilon(q, \mathbf{x}, t)$, который в рассматриваемом случае можно интерпретировать, как скорость передачи кинетической энергии $\rho |\mathbf{u}''|^2 / 2$ по иерархии турбулентных вихрей вдоль координаты q ; одновременно эта величина определяет и значение диссипации кинетической энергии в вихрях сорта q . Действительно, уравнение для первого момента

$$\int q P_2(0|q; t) dq = \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2 / 2} = \bar{\rho} \langle b \rangle,$$

получаемое из (3.12) в результате интегрирования по частям (и в предположении, что на границах области интегрирования поток $J(q, \mathbf{x}, t)$ равен нулю, принимает классический вид (см., например, [24])

$$\bar{\rho} \frac{D \langle b \rangle}{Dt} \cong - \int \varepsilon(q, \mathbf{x}, t) P_2(0|q; \mathbf{x}, t) dq = - \overline{\varepsilon(\mathbf{x}, t)} \cong - \bar{\rho} \langle \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (3.14)$$

(здесь условное среднее берётся по стохастическому процессу q), в котором параметр $\langle \varepsilon \rangle$ определяет среднюю скорость диссипации турбулентной энергии в точке (\mathbf{x}, t) . Именно по этой причине и возможна интерпретация величины $\varepsilon(q)$, как скорости диссипации энергии в вихрях сорта q (в точке $q = \rho |\mathbf{u}''|^2 / 2$ конфигурационного пространства). Но тогда, для той части энергии рассеяния $\langle T \rangle \sigma_\Sigma$ [см. (2.23)], которая обусловлена передачей турбулентной энергии по каскаду, имеем

$$(\langle T \rangle \sigma_\Sigma)^{Ch} \equiv - \bar{\rho} \int_q \varepsilon(q, \mathbf{x}, t) n(q, \mathbf{r}, t) A_{turb}(q, \mathbf{x}, t) dq \geq 0. \quad (3.15)$$

Отсюда следует локальное феноменологическое уравнение пригожинского типа:

$$\varepsilon(q, \mathbf{x}, t) = L_q A_{turb}(q, \mathbf{x}, t) / n(q, \mathbf{x}, t) = -\alpha' A_{turb}(q, \mathbf{x}, t), \quad (3.16)$$

в котором

$$A_{turb}(q) = -k_B T_{turb} \frac{\partial \ln n(q)}{\partial q} + f(q) \quad (3.17)$$

– химическое сродство процесса дробления вихрей (функция состояния подсистемы турбулентного хаоса); $f(q) = -\partial\Phi / \partial q$ – так называемая сила трения; $\alpha' = -L_q / n(q)$ – коэффициент подвижности, который по предположению не зависит от q .

В том случае, когда в турбулизованной среде устанавливается такой стационарно-неравновесный режим течения, при котором скорость передачи энергии по каскаду постоянна, $\varepsilon(q, \mathbf{x}, t) \cong \langle \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rangle$ (это предположение, принятое в первоначальной формулировке известных гипотез Колмогорова [21], то неравенство (3.15) принимает вид

$$\langle T \rangle \sigma_\Sigma = -\bar{\rho} \langle \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rangle A_{turb}^{gl}(\mathbf{x}, t) \geq 0. \quad (3.18)$$

Здесь

$$A_{turb}^{gl} \equiv \int_q n(q) A_{turb}(q) dq = n_\Sigma \overline{A_{turb}} \quad (3.19)$$

– так называемое глобальное сродство процесса образования турбулентных структур, которое с учётом (3.17) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \overline{A_{turb}}(\mathbf{x}, t) &= -k_B T_{turb} \int_q \frac{\partial P_2(0|q; t)}{\partial q} dq + \int_q P_2(0|q; t) f(q) dq = \\ &= -k_B T_{turb} [P_2(q_{L_1}) - P_2(q_\eta)] + \overline{f(\mathbf{x}, t)} \cong \overline{f(\mathbf{x}, t)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

поскольку на границах области интегрирования P_2 обращается в нуль (здесь η – локальное значение колмогоровского микромасштаба; n_Σ – полное число вихревых молей). Таким образом, производство σ_Σ осреднённой энтропии в подобном стационарном процессе имеет вид произведения общей скорости передачи энергии по каскаду $\langle \varepsilon \rangle$ и суммарного сродства A_{turb}^{gl} , относящегося ко всему каскадному процессу дробления крупных вихрей на мелкие в целом. В этом случае справедливо линейное феноменологическое соотношение

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rangle = -\alpha' A_{turb}^{gl}(\mathbf{x}, t) \quad (3.21)$$

в полном соответствии с результатами необратимой термодинамики для последовательных (консекутивных) химических реакций (см., например, [26]).

С другой стороны, можно принять более реальное условие

$$J(q, \mathbf{x}, t) \cong J(\mathbf{x}) \equiv -n_{\Sigma}(\mathbf{x}) \langle \varepsilon \rangle (\mathbf{x})$$

квазистационарности термодинамического потока кинетической энергии $J(q, \mathbf{x}, t)$ по каскаду вихрей, т.е. независимости потока J на различных масштабах движения от параметра $q = \rho |\mathbf{u}''|^2 / 2$. Это предположение, рассматриваемое совместно с линейным соотношением (3.16), приводит к более общей, чем (3.21), нелинейной связи между величиной ε и химическим средством

$$\tilde{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_q A(q) dq = \mu(q_{L_1}, \mathbf{x}) - \mu(q_{\eta}, \mathbf{x}) \quad (3.22)$$

для каскадного процесса в целом. Нелинейное определяющее соотношение для величины $\langle \varepsilon \rangle$ легко может быть получено при использовании формулы (2.13) для “локального средства” $A_{turb}(q, \mathbf{x}, t)$; в результате для скорости химической реакции получим:

$$\langle \varepsilon \rangle \cong \gamma \left[1 - \exp(-\tilde{A} / k_B T_{turb}) \right], \quad (3.23)$$

где

$$\gamma = \frac{\left(\alpha' \frac{k_B T_{turb}}{n_{\Sigma}} \right) \exp\left(\frac{\mu(q_{\eta})}{k_B T_{turb}} \right)}{\int_{q_{\eta}}^{q_{L_1}} \exp\left(\frac{\Phi(q)}{k_B T_{turb}} \right) dq}. \quad (3.24)$$

Таким образом, глубокая аналогия, существующая между консеквативными химическими реакциями ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow$ и т.д.) и каскадным процессом Ричардсона-Колмогорова дробления вихрей с соответствующими химическим потенциалом и химическим средством, позволяет провести методами расширенной необратимой термодинамики макроскопическое описание структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытой системе. Использование двух интерпретаций параметра Колмогорова ε , как величины, описывающей скорость диссипации энергии в тепло, и одновременно в стационарно– равновесном случае являющейся скоростью передачи турбулентной энергии по каскаду вихрей, позволило получить при термодинамическом моделировании структурированной турбулентности определяющие соотношения для ключевой характеристики турбулентного поля – скорости диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon \rangle$. Напомним, что в теории Колмогорова [21] эта величина является постоянной и носит название параметр Колмогорова. Соотношения (3.21) и (3.22), замыкающие систему осреднённых гидродинамических уравне-

ний, делают термодинамический подход к моделированию развитой турбулентности в известной степени самодостаточным.

При последующей конкретизации в задачах численного моделирования разнообразных астро- и геофизических явлений, развитый выше синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности очевидно должен получить своё дальнейшее уточнение и развитие [37].

Заключение

Представление турбулизованного континуума в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух взаимно открытых подсистем – подсистемы осреднённого движения и подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемого, в свою очередь, как ансамбль вихрей различных пространственно-временных масштабов, позволило получить методами термодинамики с внутренними переменными определяющие соотношения для турбулентных потоков и сил в подсистеме турбулентного хаоса, находящейся в неравновесно-стационарном состоянии. Введение в рассмотрение ряда дополнительных (случайных) параметров среды, характеризующих возбуждённые макроскопические степени свободы сильно турбулизованного континуума, дало возможность, при использовании постулата Пригожина, получить кинетические уравнения ФПК для функций распределения мелкомасштабных характеристик турбулентности и термодинамически описать колмогоровский каскадный процесс. Вместе с тем, более глубокое понимание феноменологии каскада Колмогорова, возможно лишь на пути учёта большого числа статистически коррелированных стохастических процессов \mathbf{q} , всесторонне характеризующих вихревые пространственно-временные образования. Проведённый здесь упрощённый термодинамический анализ квазистационарной турбулентности и построенная на его основе идеализированная макроскопическая модель, позволяют, тем не менее, расширить наши представления о свойствах открытых диссипативных гидродинамических систем, являющихся объектом изучения одного из важнейших и быстро развивающихся направлений нелинейной динамики, включающего в себя эволюцию хаотических движений и формирование упорядоченных диссипативных структур.

Отметим также, что двойственный характер необратимых процессов, приводящих к беспорядку вблизи равновесия и к упорядоченности вдали от равновесия, наглядно проявляется и при анализе современных проблем турбулентности макромира во всем разнообразии пространственно-временных масштабов, отвечающих, в частности, происхождению и эволюции Вселенной, звёздной и планетной космогонии, а также процессам в

газовых оболочках небесных тел и формированию экосистем, в которых возможны каскады пространственно-временных конфигураций.

Литература

- [1] **Пригожин И., Стенгерс И.** Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: прогресс, 1986. 310 с.
- [2] **Пригожин И., Стенгерс И.** Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа "Прогресс", 1994. 240 с.
- [3] **Crow S.C., Champagne F.H.** Orderly structures in jet turbulence//J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547-591.
- [4] **Brown G. L., Roshko A.** On density effects and large structures in turbulent mixing layers// J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775-816.
- [5] Рабинович М.И. Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости//УФН.1990. Т. 160. Вып. 1. С. 1-64.
- [6] **Климонтович Ю.Л.** Введение в физику открытых систем. М.: ТОО «Янус-К». 2002. 284 с.
- [7] **Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л.** Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: МФТИ. 2002. 267 с.
- [8] **Фриш У.** Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998. 343 с.
- [9] **Седов Л.И.** О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред. - В кн.: Размышления о науке и об ученых. М.: Наука, 1980. С.173-197.
- [10] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Турбулентность многокомпонентных сред. М.: Наука, 1999. 336 с.
- [11] **де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с
- [12] **Жоу Д., Касас-Баскес Ч., Лебон Дж.** Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований 2006.-528 с.
- [13] **Стратонович Р.Л.** Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985. 478 с.
- [14] **Кайзер Дж.** Статистическая термодинамика неравновесных процессов. М.: Мир, 1990. 607 с.
- [15] **Эбелинг В.** Образование структур при необратимых процессах: Введение в теорию диссипативных структур. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2004. 255 с.
- [16] **Колесниченко А.В.** Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учёте флуктуаций диссипации энергии//Астрон. Вестник. 2004. Т.38. № 2. С. 144-170.
- [17] **Пригожин И.** Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Иностран. Лит. 1960. 160 с.
- [18] **Obukhov A.M.** Some specific features of atmospheric turbulence// J. Fluid Mech. 1962. V.13 Pt. 1. P.77-81.

- [19] **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Т.1. С-Пб: Гидрометеиздат, 1992. 694 с.
- [20] **Колесниченко А.В.** Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред// Проблемы современной механики (к юбилею Л.И. Седова)/ Ред. Григорян С.С. М.: МГУ, 1998. С. 52-74.
- [21] **Колмогоров А.Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299-303.
- [22] **Onsager L.** Statistical hydrodynamics// Nuovo Cimento (Supplement). 1949. V.6. P.279-287.
- [23] **Blackadar A.K.** Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system//J. Meteorology. 1955. V. 12. P. 165-175.
- [24] **Ландау Л.Д., Лифшиц В.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
- [25] **Мюнстер А.** Химическая термодинамика. М.: Едиториал УСССР, 2002. 295 с.
- [26] **Пригожин И. Кондепуди Д.** Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002, 461с.
- [27] **Хакен Г.** Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.
- [28] **Хакен Г.** Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М. : Мир. 1991. 240 с.
- [29] **Эбелинг В., Энгель А, Файстель Р.** Физика процессов эволюции. Синергетический подход. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 386 с.
- [30] **Климонтович Ю.Л.** Статистическая теория открытых систем. М.: ТОО «Янус». 1995. 624 с.
- [31] **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. М. «Сов. Радио». 1977. 488 с.
- [32] **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Т.2. С-Пб: Гидрометеиздат, 1996. 742 с.
- [33] **Миллионщиков М.Д.** К теории однородной и изотропной турбулентности//Изв.АН СССР. Сер.геогр. и геофиз. 1941. Т.5. № 4-5. С. 433-446.
- [34] **Бэтчелор Дж.** Теория однородной турбулентности. М.: Ин. лит., 1955. 197 с.
- [35] **Ферцигер Дж., Капер Г.** Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир. 1976. 554 с.
- [36] **Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.** Mechanics of turbulence of multi-component gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers, 2001. 375 p.
- [37] **Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.** Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer New York Heidelberg Dordrecht London.2013. 657p.

ГЛАВА 7

Модификация в рамках неаддитивной термодинамики критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков

В отличие от ряда классических исследований, в которых критерии гравитационной неустойчивости астрофизических дисков выводятся в рамках традиционной гидродинамики или кинетики, в этой главе предлагается рассматривать совокупность рыхлых газо-пылевых кластеров аккреционного протопланетного диска, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды, в фазовом пространстве скоростей которой существуют точки и области, не заполненные её составляющими. В рамках формализма неаддитивной статистики (термодинамики) Тсаллиса, предназначенной для описания поведения аномальных систем – систем с сильным гравитационным взаимодействием отдельных её частей и фрактальным характером фазового пространства, на основе модифицированных гидродинамических уравнений Навье-Стокса (так называемых уравнений q -гидродинамики) получены при учёте диссипативных эффектов линеаризованные уравнения колебаний твёрдотельно вращающегося диска и дан вывод дисперсионного уравнения в ВКБ-приближении. Проведён анализ осесимметричных колебаний астрофизического дифференциально вращающегося газопылевого космического объекта и получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинса и Тумре для дисков с фрактальной структурой.

Введение

Проблема образования планет в системе солнечно- подобного диска напрямую связана с ранней стадией его формирования и эволюции. По современным представлениям планеты возникают после потери гравитаци-

онной устойчивости субдиском, образованным в результате дифференциального вращения газопылевого вещества протопланетного облака по орбите вокруг звезды и процессов аккреции при оседании его пылевой составляющей к экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска. При сильном уплощении пылевой составляющей образовавшегося субдиска, когда плотность вещества в слое достигает некоторого критического значения, субдиск становится гравитационно неустойчивым и распадается на многочисленные пылевые сгущения (см., например, [2-7]). В областях с высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агломератов [8], служащих основой зародышей изначально рыхлых (*fluffy*) протопланетезималей, из которых происходит образование твёрдотельных планетезималей с большой начальной массой, а затем, на заключительной стадии процесса эволюции вещества диска, путём объединения планетезималей происходит формирование планет. К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, получении данных наблюдений околозвёздных аккреционных дисков, открытии экзопланет, совершенствовании методов математического моделирования, астрофизики все ещё далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария (см. обзор [9]).

По-видимому, прогресс в объяснении известной изошрённости фактической реализации приведённого сценария может быть достигнут на пути расширения арсенала теоретических подходов к моделированию различных объектов космогонии, в частности, эволюции астрофизических аккреционных дисков. Далее мы рассмотрим один из таких подходов, связанный с более адекватным моделированием сильного гравитационного взаимодействия между отдельными частями дисковой среды, которое проявляется специфическим образом в результате длительного процесса эволюции [10-13]. Как теперь стало понятно, астрофизические диски относятся в общем случае к числу, так называемых, аномальных (сложных) систем, признаком которых является несводимость экстенсивных параметров системы к простой аддитивной сумме характеристик отдельных её частей [14]. Именно сильное гравитационное взаимодействие является причиной термодинамической неаддитивности (неэкстенсивности) дисковой среды, когда, например, её энтропия не является аддитивной величиной. По этой причине моделирование эволюции дискового вещества на основе классической термодинамики и статистики Гиббса–Больцмана не является в общем случае вполне адекватным²⁴). Другими словами, дисковая среда отно-

²⁴) Важно ясно себе представлять, что в основе статистики Больцмана–Гиббса (см., например, [35]) лежит предположение о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что фа-

сится к числу систем, для которых характерна слабая хаотизация фазового пространства, когда традиционное экспоненциально быстрое перемешивание приобретает степенной характер. В результате процесс самоорганизации системы может протекать спонтанным образом; при этом достаточно малого внешнего (или внутреннего) воздействия, чтобы коренным образом изменить поведение системы (подобное поведение известно как самоорганизуемая критичность [15]). Статистическая теория сложных систем, обладающих произвольным фазовым пространством (пространством скоростей с иерархической структурой), в настоящее время наиболее полно развита для самоподобных систем, когда разброс вероятности скоростей имеет одинаковую форму на разных масштабах. Такой теорией (которой мы далее воспользуемся) является активно развиваемая в последнее время неэкстенсивная статистика (термодинамика) Тсаллиса [16-18], предназначенная для описания поведения подобных аномальных систем – систем с сильным силовым взаимодействием и сильными корреляциями отдельных её частей, а также фрактальным характером фазового пространства.

Другая немаловажная корректировка моделей ранней эволюции протопланетного диска может быть связана с более углублённым пониманием тех реальных процессов, которые сопровождают объединение пылевых частиц субмикронного и микронного размеров при взаимных столкновениях в твёрдотельные агрегаты [19-22]. В связи с этим важно отметить, что до последнего времени в большинстве разработанных космогонических моделей протопланетного диска изначально принималась компактная структура растущих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, подобные пылевые образования могут иметь весьма пушистую структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность [23-30]. Для таких ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с плотными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь путь эволюции в исходной газопылевой среде, т.е. путь от пылевых частиц через пушистые агрегаты к компактным планетезималиям [31,32]. Вполне очевидно, что для адекватного описания эволюции подобных астрофизических протопланетных дисков и, в конечном счёте, механизма образования прото- планетезималей в них, необходимо, вообще говоря, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства дисковых сред. При таком подходе, моделирование эволюции дисков, фазовое пространство которых обладает

зовое пространство не содержит запрещённых состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к экспоненциальному распределению вероятности состояний Больцмана–Гиббса (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных – внутренней энергии, энтропии и т.п.), или, в случае кинетической теории, к максвелловскому распределению скоростей.

нецелой (фрактальной) размерностью D_f , должно проводиться в рамках обобщённых гидродинамических уравнений, которые являются в общем случае следствием модели среды в дробно-интегральной форме [33,34].

В связи с этим, далее мы будем рассматривать вещество астрофизического диска, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды²⁵⁾, в фазовом пространстве скоростей которой существуют области, не заполненные её составляющими. В рамках формализма деформированной статистики Тсаллиса в Гл.8 были получены обобщённые гидродинамические уравнения Навье–Стокса для термодинамически аномальных сред [1], которыми мы и воспользуемся для анализа гравитационной неустойчивости самогравитирующих космических объектов. В качестве примера в данной главе получены модифицированные варианты критериев Джинса и Тумре для фрактальных астрофизических дисков для случая, когда можно пренебречь влиянием всех факторов, кроме самогравитации и теплового (случайного) движения частиц. Показано, что критические значения длины возмущающей волны явно зависят от энтропийного индекса q и параметра фрактальной размерности D_f фазового пространства скоростей, которые, являясь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных.

1. Элементы формализма деформированной статистики Курадо-Тсаллиса

Хотя основы статистической теории неаддитивных систем были заложены К. Тсаллисом ещё в 1988 году и последующие многочисленные исследования зарубежными авторами динамического поведения термодинамически аномальных систем представляют значительный общетеоретический и практический интерес, в отечественной литературе этот раздел статистической механики и термодинамики пока не нашёл широкого распространения. Вместе с тем, возникают многочисленные новые физические проблемы статистической теории сложных систем (см., например, [36]), требующие своего решения²⁶⁾. Среди них важным, по нашему мне-

²⁵⁾ Фрактальными средами являются среды с нецелой массовой размерностью (являющейся физическим аналогом размерности Хаусдорфа, не требующей, однако, перехода к пределу бесконечно малых диаметров покрывающих множеств).

²⁶⁾ Заинтересованных читателей можно отослать к сайту <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>, на котором находится полная, весьма обширная и постоянно обновляющаяся библиография по данной проблеме.

нию, является гидродинамический и термодинамический подход к моделированию самогравитирующих космических систем, когда соответствующее фазовое пространство скоростей обладает фрактальной структурой. В связи со сказанным автор считает уместным повторить некоторые ключевые понятия статистики (термодинамики) Тсаллиса, которые используются далее при конструировании энтропийной модели фрактального астрофизического диска.

1.1. Энтропия Тсаллиса

Деформированная статистическая механика сложных систем, подобно статистике простых физических систем, имеет дело с вероятностными закономерностями, характеризующими систему большого числа «частиц» (ведущих себя случайным образом объектов, обладающих внутренней энергией) и проявляющимися в «термодинамически» равновесных и неравновесных состояниях. Наиболее важное проявление подобных закономерностей в системе дискретных частиц состоит в их распределении по различным состояниям i , которые характеризуются дискретным распределением f_i . Тсаллис в работе [16] предложил для сложных статистических систем обобщить классическую формулу Больцмана–Гиббса–Шеннона для энтропии

$$S_B = -k_B \sum_{i=1}^W f_i \ln f_i, \quad (1.1)$$

(где k_B – постоянная Больцмана; W – статистический вес, определяющий число дискретных состояний i) определением

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \sum_{i=1}^W f_i (1 - f_i^{q-1}), \quad \left(\sum_{i=1}^W f_i = 1 \right), \quad (1.2)$$

где энтропийный индекс (параметр деформации) q представляет собой вещественное число, принадлежащее интервалу $(0, \infty]$. Такая деформация логарифмической функции энтропии позволяет объяснить важную особенность поведения сложных систем (термодинамически аномальных систем с дальнедействующими взаимодействиями), когда вероятность реализации больших значений энергии состояний убывает (при $q > 1$), не экспоненциально быстро, а степенным образом²⁷⁾. Благодаря этому статистика Тсал-

²⁷⁾ Например, для полностью развитой турбулентности спектральное распределение энергии, отвечающее «закону пяти третей» $E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, спадает при больших волновых числах k по степенному закону. По этой причине применение статистики Тсаллиса к этому распределению оказалось вполне успешным [37,38]).

лиса может описывать события практически недостижимые в простых системах. Легко показать, что в пределе слабой связи ($q \rightarrow 1$) энтропия Тсаллиса (1.2) переходит в стандартную формулу Больцмана–Гиббса–Шеннона. Действительно, в пределе $q \rightarrow 1$ имеем: $f_i^{q-1} \equiv \exp\{(q-1)\ln f_i\} \rightarrow 1 + (q-1)\ln f_i$, и энтропия S_q сводится к форме

$$S_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{k_B}{q-1} \sum_{i=1}^W f_i (1 - f_i^{q-1}) = -k_B \sum_{i=1}^W f_i \ln f_i = S_B. \quad (1.3)$$

Характерной особенностью q -энтропии является её неаддитивный характер

$$S_q(A \cup B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k_B} S_q(A) S_q(B), \quad (1.4)$$

где A и B – две независимые подсистемы, для которых полная вероятность составной системы $A \cup B$ подчиняется условию

$$p_{ij}(A \cup B) = p_i(A) p_j(B).$$

Его подстановка в формулу $\sum_i f_i^q = 1 + S_q(1-q)/k_B$ даёт связь (1.4). Таким образом, параметр q – это мера неаддитивности системы, характеризующая целый класс различных термодинамик, соответствующих тем или иным термодинамически аномальным системам. Согласно гипотезе Тсаллиса этот параметр характеризует некоторые дополнительные степени свободы, присущие сложным системам, и должен определяться в каждом конкретном случае. Величина q ничем не ограничена и может принимать значения от нуля до бесконечности, однако некоторые ограничения (как мы увидим далее) могут возникнуть в той или иной конкретной задаче; случаи $q < 1$, $q = 1$ и $q > 1$ соответственно соотносятся с супераддитивностью, аддитивностью и субаддитивностью системы.

Взвешенное среднее значение $E_q(\phi) \equiv \langle \phi \rangle_q$ (по различным вероятностям реализации статистических состояний i) дискретной случайной физической величины ϕ_i в статистике Курадо–Тсаллиса [17], которой мы далее воспользуемся, определяется формулой

$$\langle \phi \rangle_q = \sum_{i=1}^W \phi_i f_i^q, \quad (1.5)$$

которая при $q = 1$ отвечает стандартному определению среднего значения.

Заметим, что q -энтропия может быть представлена в «классической форме»

$$S_q = -k_B \sum_{i=1}^W f_i^q \ln_q f_i, \quad (1.6)$$

если использовать так называемый деформированный логарифм

$$\ln_q x \equiv (x^{1-q} - 1) / (1 - q), \quad (\ln_1 x = \ln x), \quad (1.7)$$

обратная функция к которому представляет собой «экспоненту» Тсаллиса

$$\exp_q x \equiv [1 + (1 - q)x]_+^{1/(1-q)}, \quad (\exp_1 x = \exp x); \quad (1.8)$$

(здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y, 0)$; при этом имеет место равенство $\exp_q(\ln_q x) = \ln_q(\exp_q x) = x$). Тогда энтропия Тсаллиса S_q , будучи мерой беспорядка сложной статистической системы, представляет среднее по статистическому ансамблю микроскопической q -энтропии $s_q(f_i)$, определяемой выражением $s_q(f_i) = k_B(1 - f_i^{q-1})/(1 - q) = -k_B \ln_q f_i$:

$$S_q \equiv \langle s_q(f_i) \rangle_q = \sum_{i=1}^W f_i^q s_q(f_i) = -k_B \sum_{i=1}^W f_i^q \ln_q f_i = -k_B \langle \ln_q f_i \rangle_q. \quad (1.9)$$

1.2. Принцип максимума энтропии

Используем далее наиболее простой способ определения равновесной функции распределения f_i для сложной системы, основанный на теории информации. Проиллюстрируем его на физической дискретной системе, элементы которой обладают запасом внутренней энергии. Равновесная функция распределения для дискретных физических систем в статистике Тсаллиса может быть определена, как и в классическом случае, из экстремума (максимума – при $q > 1$ и минимума – при $q < 1$) q -энтропии системы при выполнении дополнительных условий: постоянства нормировки $\sum_i f_i = 1$ и постоянства энергии системы $E_q = \langle \varepsilon_i \rangle_q \equiv \sum_i f_i^q \varepsilon_i = const$ (здесь ε_i – энергия i -го состояния). Следуя методу множителей Лагранжа, найдём абсолютный экстремум лагранжиана

$$L_q(f, \alpha) \equiv -k_B \langle \ln_q f_i \rangle_q + \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^W f_i - 1 \right) + \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^W f_i^q \varepsilon_i - E_q \right). \quad (1.10)$$

Тогда дифференцирование L_q по f_i приводит к следующему обобщённому равновесному распределению Больцмана

$$f_i^{(eq)} = Z_q^{-1} \left[1 + (1-q) \frac{\varepsilon_i}{k_B T} \right]^{1/(1-q)} \equiv Z_q^{-1} \exp_q \left\{ -\frac{\varepsilon_i}{k_B T} \right\}. \quad (1.11)$$

Здесь

$$Z_q \equiv \left(\frac{1}{q} - \frac{1-q}{k_B q} \alpha_1 \right)^{1/(1-q)} = \sum_{i=1}^W \exp_q \left\{ -\frac{\varepsilon_i}{k_B T} \right\} \quad \text{и} \quad T \equiv \frac{1}{\alpha_2} \quad (1.12)$$

– соответственно обобщённая статистическая сумма, определяемая из условия нормировки (1.2), и модуль распределения, играющий роль температуры, определяющей интенсивность беспорядочного движения элементов системы; постоянные лагранжеры множители α_1 и α_2 определяются из уравнений (1.11).

При условии $1 - (1-q)\varepsilon_i / k_B T > 0$ и $q = 1$ из (1.11) и (1.12) следует каноническое распределение Гиббса

$$p_i^{(eq)} = Z^{-1}(T) \exp \left\{ -\varepsilon_i / k_B T \right\}, \quad Z(T) = \sum_{i=1}^W \exp \left\{ -\varepsilon_i / k_B T \right\}$$

для аддитивных систем, находящихся в термостате с абсолютной температурой T . Легко видеть, что поведение распределения (1.11) при больших значениях энергии ε_i отличается от канонического: в частности, при $q > 1$ имеет место степенное (закон Парето, $p_i^{(eq)} = C\varepsilon_i^{-\tau}$), а не экспоненциальное падение в ростом энергии. Переход от экспоненциального распределения к степенному обеспечивается деформированием логарифмической и экспоненциальной функции согласно равенствам (1.7) и (1.8).

1.3. Обобщённое распределение Максвелла

Возникновение различных пространственных структур (в частности планетных колец) в астрофизических дисках связано с коллективными процессами, которые, как правило, изучаются в рамках гидродинамической модели, где сталкивающиеся частицы (например, полностью рыхлые неупругие шары метрового размера) описываются также как и обычный молекулярный газ. При этом учитывается гравитационное поле таких «частиц», которое играет первостепенную роль в процессах разрушения крупных тел и движения мелких обломков. Учитывая сказанное, далее будем рассматривать аномальную дисковую систему с непрерывным распределе-

нием «частиц» $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ по пространству скоростей и физическому пространству. Элемент объёма фазового пространства диска (с нецелой, в общем случае, фрактальной размерностью D_f) далее будем обозначать через $d\mathbf{z} \equiv d\mathbf{x}d\mathbf{c}$. Будем считать, что когда области интегрирования специально не указываются, используемые интегралы охватывают всю рассматриваемую геометрическую область и все пространство скоростей соответственно. Энтропия Тсаллиса в этом случае определяется выражением [17]

$$S_q = k_B \frac{1 - \int [f(\mathbf{z})]^q d\mathbf{z}}{q - 1}, \quad \left(\int f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 1 \right), \quad (1.13)$$

где интегрирование производится по всему фазовому (в общем случае фрактальному) объёму. Используя обозначение

$$\langle \phi^k \rangle_q \equiv \int \phi^k(\mathbf{z}) [f(\mathbf{z})]^q d\mathbf{z} \quad (1.14)$$

для средней величины какого-либо параметра системы $\phi^k(\mathbf{z})$, найдём равновесное распределение для функции $f(\mathbf{z})$, исходя из изложенного выше принципа экстремума q -энтропии (1.13) при выполнении дополнительных условий (законов сохранения)

$$\langle \phi^k \rangle_q = const, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

(здесь индекс k относится к набору макроскопических величин, полностью характеризующих состояние макроскопической системы). В результате получим

$$f^{(eq)}(\mathbf{z}) = \left[q - k_B^{-1} q(1-q) \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi^k(\mathbf{z}) \right]^{1/(1-q)} \equiv q^{1/(1-q)} \exp_q \left\{ -k_B^{-1} \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi^k(\mathbf{z}) \right\}, \quad (1.15)$$

где постоянные множители Лагранжа α_k определяются из уравнений

$$\langle \phi^k \rangle_q \equiv \int \phi^k(\mathbf{z}) \left[q - k_B^{-1} q(1-q) \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi^k(\mathbf{z}) \right]^{\frac{q}{1-q}} d\mathbf{z} = const, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad 1.16$$

Предполагая, что нет внешних сил, могущих приводить к нарушению равновесия, и считая, что при равновесии распределение частиц среды пространственно однородно, рассмотрим, к каким следствиям приводит принцип экстремума q -энтропии в такой макроскопической системе. Имея далее в виду постоянство средней массовой плотности

$$\rho_q \equiv \int m[f(\mathbf{z})]^q d\mathbf{z} / \left(\int d\mathbf{x} \right),$$

средней (на единицу массы) гидродинамической скорости

$$\mathbf{u}_q \equiv \int m\mathbf{c}[f(\mathbf{z})]^q d\mathbf{z} / \left(\rho_q \int d\mathbf{x} \right)$$

и средней (на единицу массы) кинетической энергии

$$\varepsilon_q = \int (mc^2 / 2)[f(\mathbf{z})]^q d\mathbf{z} / \left(\rho_q \int d\mathbf{x} \right)$$

(здесь m – масса одной частицы рассматриваемого класса объектов; $\rho_q V = M_q$ – полная масса дисковой системы; $V = \int d\mathbf{x}$ – геометрический объём дисковой системы), распределение (1.15) запишем в виде

$$f^{(eq)}(\mathbf{c}) = q^{1/(1-q)} \exp_q \left[-k_B^{-1} \left(m\alpha_1 + m\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + mc^2\alpha_3 \right) \right],$$

где α_k – постоянные множители. Отсюда следует равновесное q -распределение частиц сложной системы

$$f^{(eq)}(\mathbf{c}) = Z(q) \exp_q \left(-\frac{m}{2k_B T_q} |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 \right), \quad (1.17)$$

где вместо постоянных α_k введены комбинации лагранжевых множителей:

$$Z(q) \equiv (q\alpha_3 T_q)^{1/(1-q)}, \quad T_q \equiv \frac{1}{\alpha_3} \left[1 - k_B^{-1} m(1-q) \left(\alpha_1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2^2}{2\alpha_3} \right) \right], \quad \mathbf{u} \equiv -\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\alpha_3}. \quad (1.18)$$

Для нахождения параметров $Z(q)$, T_q и \mathbf{u} необходимо вычислить следующие три интеграла на фрактале в пространстве мгновенных скоростей с нецелой размерностью D_f :

$$\begin{pmatrix} \rho_q = const \\ \rho_q \mathbf{u}_q = const \\ \rho_q \varepsilon_q = const \end{pmatrix} = mZ^q \int d^{D_f} \mathbf{c} \left[1 - (1-q) \frac{m}{2k_B T_q} |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 \right]^{q/(1-q)} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{c} \\ c^2 / 2 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Вводя обозначения:

$$\mathbf{w} \equiv \sqrt{m / 2k_B |\theta|} (\mathbf{c} - \mathbf{u}), \quad \theta \equiv T_q / (q - 1), \quad \text{sgn } \theta = \begin{cases} 1, & \theta > 0 \\ 0, & \theta = 0 \\ -1, & \theta < 0 \end{cases}, \quad (1.20)$$

перепишем сначала интегралы (1.19) в виде

$$\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q \mathbf{u}_q \\ \rho_q \varepsilon_q \end{pmatrix} = m Z^q \left(\frac{2k_B |\theta|}{m} \right)^{\frac{D_f}{2}} \int d^{D_f} \mathbf{w} \left[1 + w^2 \text{sgn } \theta \right]^{\frac{q}{1-q}} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} + \mathbf{w} \sqrt{2k_B |\theta| / m} \\ |\mathbf{u}|^2 / 2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \sqrt{2k_B |\theta| / m} + (2k_B |\theta| / m) w^2 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

По поводу интегрирования по \mathbf{w} в пространстве скоростей с нецелой фрактальной размерностью D_f заметим следующее: известно, что если фрактальная область интегрирования по \mathbf{w} сферически симметрична (что, как правило, можно предположить [33]), то D_f -мерное интегрирование сводится к обычному интегрированию в соответствии с формулой [39]

$$\int f(\mathbf{w}) d^{D_f} \mathbf{w} = \frac{2\pi^{D_f/2}}{\Gamma(D_f/2)} \int_0^\infty f(\mathbf{w}) |\mathbf{w}|^{D_f-1} d|\mathbf{w}| = \frac{\pi^{D_f/2}}{\Gamma(D_f/2)} \int_0^\infty f(x) x^{D_f/2-1} dx. \quad (1.22)$$

Здесь $x \equiv w^2$; $\Gamma(x)$ – гамма функция. С учётом (1.22) интегралы (1.21) принимают вид:

$$\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q \mathbf{u}_q \\ \rho_q \varepsilon_q \end{pmatrix} = \frac{m Z^q}{\Gamma(D_f/2)} \left(\frac{2\pi k_B}{m |\Theta|} \right)^{D_f/2} \int dx x^{D_f/2-1} (1 + \text{sgn } \Theta x)^{q/(1-q)} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \\ |\mathbf{u}|^2 / 2 + k_B x / m |\Theta| \end{pmatrix},$$

где пределы интегрирования определяются в зависимости от значения функции $\text{sgn } \theta$: если $\text{sgn } \theta = 1$, то – подынтегральная функция определена для $0 \leq x < \infty$; если $\text{sgn } \theta = -1$, то подынтегральная функция определена только для $0 \leq x \leq 1$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q \mathbf{u}_q \\ \rho_q \varepsilon_q \end{pmatrix} &= \frac{mZ^q}{\Gamma(D_f/2)} \left(\frac{2\pi k_B |\theta|}{m} \right)^{D_f/2} \begin{cases} \int_0^\infty dx x^{\frac{D_f}{2}-1} (1+x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \\ |\mathbf{u}|^2/2 + \frac{k_B |\theta|}{m} x \end{pmatrix}, & \text{sgn } \theta = +1; \\ \int_0^1 dx x^{\frac{D_f}{2}-1} (1-x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \\ |\mathbf{u}|^2/2 + \frac{k_B |\theta|}{m} x \end{pmatrix}, & \text{sgn } \theta = -1; \end{cases} = \\
&= mZ^q \left(\frac{2\pi k_B T_q}{m} \right)^{D_f/2} \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{q}{q-1} - \frac{D_f}{2})}{|q-1|^{D_f/2} \Gamma(\frac{-q}{q-1})} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \\ |\mathbf{u}|^2/2 + \frac{D_f k_B T_q/2m}{1-(q-1)\frac{D_f}{2}} \end{pmatrix}, & \text{когда } q > 1; \\ \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{|q-1|^{D_f/2} \Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{D_f}{2})} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \\ |\mathbf{u}|^2/2 + \frac{D_f k_B T_q/2m}{1-(q-1)\frac{D_f}{2}} \end{pmatrix}, & \text{когда } q < 1. \end{cases} \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Первое соотношение (1.23) позволяет выразить обобщённый статистический интеграл $Z(q)$ через среднюю массовую плотность системы ρ_q :

$$Z(q) \equiv \left\{ q \left[1 - (1-q) \frac{m}{k_B} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_3} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-q}} = \left\{ \frac{\rho_q}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_q} \right)^{\frac{D_f}{2}} \zeta(q, D_f) \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (1.24)$$

где множитель

$$\zeta(q, D_f) \equiv \begin{cases} \frac{|q-1|^{D_f/2} \Gamma[q/(q-1)]}{\Gamma[q/(q-1) - D_f/2]}, & \text{когда } q > 1; \\ \frac{|q-1|^{D_f/2} \Gamma[1/(1-q) + D_f/2]}{\Gamma[1/(1-q)]}, & \text{когда } q < 1. \end{cases} \quad (1.25)$$

Второе соотношение (1.23) связывает параметр \mathbf{u} со средней гидродинамической скоростью системы

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{u}, \quad (1.26)$$

а третье соотношение, сводящееся к виду

$$\varepsilon_q \equiv \left| \mathbf{u}_q \right|^2 / 2 + \varepsilon_q^{int} = \left| \mathbf{u}_q \right|^2 / 2 + \frac{D_f k_B T_q}{2m} \left[1 + (1-q) D_f / 2 \right]^{-1}, \quad (1.27)$$

(где $\varepsilon^{int} \equiv \frac{D_f k_B T_q}{2m} \left[1 + (1-q) D_f / 2 \right]^{-1} = \frac{D_f k_B T}{2m}$ – «обычная» внутренняя энергия на единицу массы системы), связывает определённой формулой (1.18) параметр T_q с «термодинамической» температурой T системы:

$$T_q = T \left[1 - (q-1) D_f / 2 \right]. \quad (1.28)$$

Поскольку определение температуры в неаддитивной статистике достаточно произвольно, то далее мы будем интерпретировать параметр T_q как обобщённую «температуру». Эта температура, в корне отличаясь от термодинамически определённой величины, характеризует интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) объектов сложной системы. Заметим, что если мы хотим сохранить обычные представления об обобщённой температуре T_q , то тогда выражение (1.28) накладывает жёсткое ограничение на величину q : поскольку в этом случае $1 - D_f(q-1)/2 > 0$, и, следовательно, энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $q < 1 + 2/D_f$.

Итак, распределение функции $f(\mathbf{c})$ по скоростям для глобального равновесия сложной однородной дисковой системы (1.17) принимает следующий вид обобщённого распределения Максвелла:

$$f_q^{(eq)}(\mathbf{c}, \rho_q, T_q, \mathbf{u}_q) = \zeta(q, D_f) \frac{\rho_q}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_q} \right)^{D_f/2} \exp_q \left(- \frac{m}{2k_B T_q} \left| \mathbf{c} - \mathbf{u}_q \right|^2 \right). \quad (1.29)$$

Заметим, что параметры ρ_q , T_q и \mathbf{u}_q в этом выражении постоянны, т.е. не зависят от пространственной координаты \mathbf{x} и времени t .

2. Исходные уравнения q -гидродинамики

Энтропия Тсаллиса (1.13) влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики (см. [1]). Будем далее предполагать, что для любых неоднородных систем, находящихся в термодинамическом равновесии,

обобщённая локальная функция распределения по скоростям имеет *локально-максвелловский* вид $f_q^{(0)}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t)$, т.е. такую же функциональную форму (1.29), как и для случая глобального равновесия сложной системы, но с гидродинамическими параметрами $n_q(\mathbf{x}, t)$, $T_q(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u}_q(\mathbf{x}, t)$, зависящими от координаты \mathbf{x} и времени t :

$$f_q^{(0)}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t) = \zeta(q, D_f) n_q \left(\frac{m}{2\pi k_B T_q} \right)^{D_f/2} \exp_q \left(-\frac{m}{2k_B T_q} |\mathbf{c} - \mathbf{u}_q|^2 \right), \quad (2.1)$$

где $T_q(\mathbf{x}, t) = m \left[2\varepsilon_q(\mathbf{x}, t) - |\mathbf{u}_q(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \left[1 + (1-q) \frac{D_f}{2} \right] / D_f k_B n_q(\mathbf{x}, t)$;

$n_q(\mathbf{x}, t) = \rho_q(\mathbf{x}, t) / m$ – локальная плотность числа частиц. Возможность введения локально-равновесного распределения связана с тем, что существуют в общем случае два масштаба времени релаксации, различного порядка величин [40]: время релаксации τ_r для установления статистического равновесия в системе, зависящее от её полного объёма $V = \int d\mathbf{x}$, и другое, значительно меньшее время релаксации $\tau \ll \tau_r$, которое определяет время установления равновесия в макроскопически малом (но содержащем большое число элементов) объёме системы и не зависит от полного объёма системы. Локально-равновесное состояние устанавливается сначала за время τ в малых объёмах, а затем медленно стремится к распределению (1.29), с характерным временем τ_r . Для того чтобы вновь введённые параметры $n_q(\mathbf{x}, t)$, $T_q(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u}_q(\mathbf{x}, t)$ действительно имели смысл локальной числовой плотности, обобщённой температуры и средней массовой скорости, они должны подчиняться следующим стандартным условиям:

$$\begin{pmatrix} n_q(\mathbf{x}, t) \\ n_q \mathbf{u}_q(\mathbf{x}, t) \\ n_q \varepsilon_q(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \int d^{D_f} \mathbf{c} [f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t)]^q \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{c} \\ |\mathbf{c}|^2 / 2 \end{pmatrix} = \int d^{D_f} \mathbf{c} [f^{(0)}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t)]^q \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{c} \\ |\mathbf{c}|^2 / 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Кинетическое конструирование гидродинамической системы уравнений для сложной системы проведено в работе [1] методом моментов на основе модифицированного кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Phi_q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \right) [f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)]^q = -\frac{1}{\tau} \left\{ [f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)]^q - [f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)]^q \right\} \equiv \mathfrak{I}(f^q), \quad (2.3)$$

в котором $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\partial \Phi_q / \partial \mathbf{x}$ – не зависящая от скорости внешняя сила (на единицу массы); $\Phi_q(\mathbf{x}) \equiv -G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [f(\mathbf{x}')]^q d\mathbf{x}'$ – гравитационный потенциал (астрофизического диска), удовлетворяющий уравнению Пуассона $\Delta \Phi_q(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho_q(\mathbf{x})$; G – гравитационная постоянная; τ – положительный параметр, который интерпретируется далее как характерное время релаксации функции распределения f к локально-максвелловскому распределению $f^{(0)}$, определяемому формулой (2.1); $\mathfrak{I}(f^q)$ – интеграл столкновений в БГК– приближении. Заметим, что параметр сглаживания τ (связанный с максвелловским временем релаксации) совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в системе.

В результате была получена система моментных уравнений q -гидродинамики, которая в приближении второго порядка имеет следующий вид (далее энтропийный индекс q у всех гидродинамических величин, за исключением температуры T_q , опущен):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.5)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon^{int}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \varepsilon^{int} + p \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\tau} : \text{grad } \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\varepsilon^{int}(\mathbf{x}, t) = \frac{D_f p}{2 \rho} = \frac{D_f k_B T_q}{2m} \left[1 + (1-q) D_f / 2 \right]^{-1}, \quad (\varepsilon_q^{int} = \varepsilon_q - |\mathbf{u}_q|^2 / 2) \quad (2.8)$$

– внутренняя энергия (на единицу массы) рассматриваемой аномальной системы;

$$\tau_{ik}(\mathbf{x}, t) = \mu \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) \right\} + \mu_\theta \delta_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) \quad (2.9)$$

– тензор вязких напряжений в q -гидродинамике;

$$\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \tau p \equiv \tau \frac{k_B \rho}{m} T_q [1 + (1 - q) D_f / 2]^{-1} \quad (2.10)$$

– коэффициент сдвиговой вязкости;

$$\mu_\theta(\mathbf{x}, t) = \tau \frac{2(D_f - 3)}{3D_f} p = \tau \frac{2(D_f - 3)}{3D_f [1 + (1 - q) D_f / 2]} \frac{k_B \rho}{m} T_q \quad (2.11)$$

– коэффициент объёмной вязкости;

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -\lambda \frac{\partial T_q}{\partial \mathbf{x}} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.12)$$

– вектор потока тепла в q -гидродинамике;

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \frac{(1 - q)m}{k_B \rho} \lambda(\mathbf{x}, t); \quad (2.13)$$

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = \tau \frac{k_B}{m} \left(\frac{2 + D_f}{2 + (1 - q)(2 + D_f)} \right) p = \tau \frac{k_B}{m} \frac{1}{[1 + (1 - q) \frac{D_f}{2}]} \left(\frac{k_B n_q T_q}{\frac{2}{2 + D_f} + (1 - q)} \right) \quad (2.14)$$

– коэффициент теплопроводности.

Далее систему обобщённых гидродинамических уравнений Навье–Стокса для фрактальной среды (2.4)-(2.7), рассматриваемую совместно с уравнением состояния

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{k_B}{m[1 + (1 - q) D_f / 2]} \rho T_q = \frac{2}{D_f} \rho \varepsilon^{int} \quad (2.15)$$

для гидростатического давления в аномальной системе (аналог – закона состояния в кинетической теории совершенных газов), положим в основу получения линеаризованных уравнений для колебаний дифференциально вращающегося астрофизического диска при наличии эффектов диссипации. На основе этих уравнений в качестве примера проведём упрощённый анализ осесимметричных колебаний дифференциально вращающегося

диска и получим модифицированные критерии гравитационной неустойчивости фрактальной дисковой среды, обобщающие известные результаты Джинса и Тумре, полученные для осесимметричных возмущений радиально неоднородного диска. Заметим ещё раз, что в рассматриваемой здесь модели фрактального диска имеются свободные параметры, которые в каждом конкретном случае должны определяться эмпирическим путём из экспериментальных астрофизических данных.

3. Исследование устойчивости самогравитирующих дисковых систем

3.1. Постановка задачи

В рамках уравнений q -гидродинамики поставим задачу изучения дисперсных свойств осесимметричных возмущений в плоскости тонкого радиально неоднородного астрофизического диска (предполагается, что толщина диска $2h$ везде мала по сравнению с радиальной координатой ϖ). Далее будем следовать традиционному подходу при исследовании устойчивости самогравитирующих дисковых систем, используя двумерные (зависящие от координат в плоскости диска) функции, такие как поверхностная плотность, двумерное поле скоростей, гравитационный потенциал в плоскости диска и т.д. Для этой цели используем проинтегрированные по z -координате (направленной вдоль оси вращения диска) уравнения (2.4)-(2.8) q -гидродинамики. Следует отметить, что система получаемых при этом двумерных уравнений оказывается близка по виду к ранее использовавшимся в астрофизике уравнениям (см., например, [41-43]). Однако имеются и существенные отличия, связанные с наличием в q -уравнениях эффективных коэффициентов переноса и присутствием в них свободных параметров q и D_f .

Ограничимся далее рассмотрением только осесимметричных движений дисковой среды, когда азимутальная скорость имеет вид $u_\varphi = \Omega\varpi$, где $\Omega(\varpi)$ — угловая скорость вращения диска вокруг оси Oz . Тогда, в невращающейся системе отсчёта, проинтегрированные по z -координате уравнения (2.4)-(2.7) q -гидродинамики в цилиндрических координатах (ϖ, φ, z) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \sigma u_\varpi) = 0, \quad (3.1)$$

$$\sigma \left(\frac{Du_{\varpi}}{Dt} - \frac{u_{\varphi}^2}{\varpi} \right) = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi} - \frac{k_B}{m[1+(1-q)D_f/2]} \frac{\partial(\sigma T_q)}{\partial \varpi} +$$

$$+ \frac{4\mu}{3} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \varpi u_{\varpi}}{\partial \varpi} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial \mu}{\partial \varpi} \left(\frac{\partial u_{\varpi}}{\partial \varpi} - \frac{u_{\varpi}}{2\varpi} \right), \quad (3.2)$$

$$\sigma \left(\frac{Du_{\varphi}}{Dt} + \frac{u_{\varpi} u_{\varphi}}{\varpi} \right) = \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi^3 \mu \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varpi} \right), \quad (3.3)$$

$$\sigma \left(\frac{D\varepsilon_q^{int}}{Dt} + \frac{2\varepsilon_q^{int}}{D_f} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \varpi u_{\varpi}}{\partial \varpi} \right) = \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\lambda \varpi \frac{\partial T_q}{\partial \varpi} \right) - \frac{2}{D_f} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\zeta \varpi \frac{\partial \varepsilon_q^{int}}{\partial \varpi} \right) +$$

$$\mu \left(\varpi \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varpi} \right)^2 + \frac{4}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial u_{\varpi}}{\partial \varpi} \right)^2 + \left(\frac{u_{\varpi}}{\varpi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\varpi}}{\partial \varpi} \right) \frac{u_{\varpi}}{\varpi} \right]. \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi} \right) = 4\pi G \sigma. \quad (3.5)$$

Здесь $D/Dt = \partial/\partial t + u_{\varpi}(\partial/\partial \varpi)$ – оператор субстанциональной производной; u_{ϖ}, u_{φ} – радиальная и азимутальная компоненты скорости дискового вещества;

$$\sigma = 2 \int_0^h \rho dz, \quad p = \frac{k_B}{m[1+(1-q)D_f/2]} \sigma T_q \quad (3.6)$$

– поверхностная плотность и плоское давление в гравитирующем диске; h – полутолщина тонкого диска.

3.2. Линеаризованные уравнения для колебаний вязкого астрофизического диска с фрактальной структурой

Рассмотрим теперь релаксацию возмущённого состояния космической дисковой системы, слабо отличающегося от стационарного состояния (заметим, что стационарное значение какой-либо гидродинамической величины может равняться нулю, как, например, в случае радиальной компоненты скорости). Пусть величины σ^0 , \mathbf{u}^0 , T_q^0 и Φ^0 описывают некоторое стационарное решение системы (3.1)-(3.4). Для изучения динамики малых возмущений линеаризируем систему (3.1)-(3.4). Для этого представим вхо-

дящие в эту систему переменные в виде суммы равновесных и возмущённых величин

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^1, \quad T_q = T_q^0 + T_q^1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1, \quad \Phi = \Phi^0 + \Phi^1,$$

где σ^1 , \mathbf{u}^1 , Φ^1 , T_q^1 – суть малые возмущения гидродинамических параметров, слабо нарушающие невозмущённое состояние. Если при этом окажется, что с течением времени возмущения убывают и основное состояние восстанавливается, то можно говорить об устойчивости основного решения относительно малых возмущений. Отщепляя уравнения динамического равновесия между центробежной и гравитационной силами (с учётом давления), а также пренебрегая нелинейными членами (квадратичными по амплитуде) и всеми пространственными производными от стационарных величин (температуры, коэффициентов переноса) по сравнению с производными от возмущённых величин, получим следующую систему линеаризованных уравнений q - гидродинамики для колебаний вязкого твёрдо- вращающегося диска (когда $\partial\Omega / \partial\varpi = 0$):

$$\frac{\partial\sigma^1}{\partial\varpi} + \frac{\sigma^0 u_\varpi^1}{\varpi} + \sigma^0 \frac{\partial u_\varpi^1}{\partial\varpi} = 0, \quad (3.6)$$

$$\sigma^0 \left(\frac{\partial u_\varpi^1}{\partial t} - \frac{2u_\varphi^0 u_\varphi^1}{\varpi} \right) = -\sigma^0 \frac{\partial\Phi^1}{\partial\varpi} - a_q^2 \frac{\partial\sigma^1}{\partial\varpi} - \frac{k_B}{m[1+(1-q)D_f/2]} \sigma^0 \frac{\partial T_q^1}{\partial\varpi} + \frac{4\mu^0}{3} \frac{\partial^2 u_\varpi^1}{\partial\varpi^2}, \quad (3.7)$$

$$\sigma^0 \left(\frac{\partial u_\varphi^1}{\partial t} + u_\varpi^1 \frac{\partial u_\varphi^0}{\partial\varpi} + \frac{u_\varpi^1 u_\varphi^0}{\varpi} \right) = \mu^0 \frac{\partial^2 u_\varphi^1}{\partial\varpi^2}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_B}{m[1+(1-q)D_f/2]} \sigma^0 \left[\frac{D_f}{2} \left(\frac{\partial T_q^0}{\partial t} + \frac{\partial T_q^1}{\partial t} \right) + T_q^0 \frac{\partial u_\varpi^1}{\partial\varpi} \right] &= \lambda^0 \frac{\partial^2 T_q^1}{\partial\varpi^2} + \\ &+ \mu^0 \left[\frac{\partial}{\partial\varpi} \left(\frac{u_\varphi^0}{\varpi} \right) + \frac{\partial u_\varphi^1}{\partial\varpi} + \frac{u_\varphi^1}{\varpi} \right]^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\partial\hat{\Phi} / \partial\varpi = -i2\pi G\hat{\sigma}. \quad (3.10)$$

Здесь

$$a_q \equiv \left(\partial p / \partial \sigma \right)_{T_q} = \sqrt{(k_B/m)T_q / [1+(1-q)D_f/2]} \quad (3.11)$$

– изотермическая скорость звука во фрактальной плоской среде. Уравнения (3.6)-(3.10) описывают развитие малых адиабатических возмущений во фрактальной среде на фоне основного решения в пространстве и времени. Эти уравнения являются линейными и однородными уравнениями в частных производных, следовательно, к ним применим метод нормальных колебаний (*метод мод*). Далее мы используем следующие выражения для возмущений:

$$\sigma = \sigma^0 + \hat{\sigma} \exp(-i\omega t + ik\varpi), \quad u_{\varpi} = \hat{u}_{\varpi} \exp(-i\omega t + ik\varpi),$$

$$u_{\varphi} = \Omega\varpi + \hat{u}_{\varphi} \exp(-i\omega t + ik\varpi), \quad T_q = T_q^0 + \hat{T}_q^0 \exp(-i\omega t + ik\varpi),$$

которые описывают монохроматические волны с угловой частотой ω и длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ (k – волновое число). Здесь Ω – угловая скорость вращения диска вокруг оси Oz ; стационарные величины отмечены нуликом, а амплитуды возмущённых величин (Фурье-коэффициенты) – знаком « \wedge ». Величины ω и λ могут быть комплексными. Ясно, что в случае $\omega^2 > 0$ имеет место устойчивость (если частота ω – действительное число, то это означает, что волна без изменений распространяется по диску – система устойчива); в случае $\omega^2 = 0$ имеет место нейтральность; для случая

$$\omega^2 < 0 \quad \begin{cases} \text{Im } \omega > 0 & \text{– сверхустойчивость,} \\ \text{Im } \omega < 0 & \text{– неустойчивость.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Предполагая адиабатичность основного решения, подставим соотношения (3.11) в (3.6)-(3.10). В результате, с учётом неравенств $\sigma^1 \ll \sigma^0$, $k\varpi \gg 1$, получим следующую систему уравнений для Фурье-коэффициентов:

$$-i\omega\hat{\sigma} + i\sigma^0 k\hat{u}_{\varpi} = 0, \quad (3.13)$$

$$\sigma^0 (i\omega\hat{u}_{\varpi} + 2\hat{u}_{\varphi}\Omega) = -i(2\pi G\sigma^0 - ka_q^2)\hat{\sigma} +$$

$$+ ik \frac{k_B}{m[1 + (1-q)D_f/2]} \sigma^0 \hat{T}_q + \frac{4\mu}{3} k^2 \hat{u}_{\varpi}, \quad (3.14)$$

$$-i\omega\hat{u}_{\varphi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\hat{u}_{\varpi} = -\frac{\mu^0}{\sigma^0} k^2 \hat{u}_{\varphi}. \quad (3.15)$$

$$\frac{k_B}{m[1 + (1-q)D_f/2]} ik \left[-\frac{D_f}{2} \hat{T}_q + T_q^0 \hat{u}_{\varpi} \right] = -\lambda^0 k^2 \hat{T}_q. \quad (3.16)$$

Здесь $\kappa^2 = (2\Omega)^2 \left(1 + \frac{\varpi}{2\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} \right)$, κ – так называемая эпициклическая частота,

для кеплеровского диска $\kappa^2 = \Omega^2$; для твёрдотельного вращения $\kappa = 2\Omega$. Система (3.13)-(3.16) получена здесь в так называемом в ВКБ-приближении (приближении Венцеля-Крамерса-Бриллюэна), когда длина волны предполагается меньше характерных масштабов изменения стационарных параметров диска. Именно это приближение позволило нам использовать следующие неравенства: $k^2 \hat{A} \gg k \hat{A} / \varpi \gg \hat{A} / \varpi^2$, $k\varpi \gg 1$ и опустить соответствующие малые члены.

Дисперсионное уравнение. Приравнявая нулю определитель системы алгебраических уравнений (3.13)-(3.16), можно получить полное дисперсионное уравнение четвёртого порядка по ω , описывающее линейные колебания дифференциально- вращающегося диска с учётом влияния давления и эффектов диссипации на гравитационные возмущения.

Вместе с тем следует отметить, что при нахождении критерия гравитационной устойчивости астрофизического диска и определении спектра колебаний в его плоскости учёт диссипативных членов в первом приближении часто несущественен (см., например, [44]). Однако в тех случаях, когда возмущения в плоскости диска обладают отрицательной энергией (что приводит к диссипативной неустойчивости даже в гравитационно- устойчивом диске [43, 45]), учёт диссипативных членов может оказаться существенным. Кроме этого, в рамках диссипативной модели может быть исследовано влияние мелкомасштабной турбулентности на устойчивость диска с турбулентной вязкостью [46].

Таким образом, далее мы будем пренебрегать диссипативными эффектами, отсылая заинтересованного читателя к монографии [43], в которой подробно рассматривается физика многочисленных неустойчивостей астрофизических дисков в классической постановке. В этом случае из системы уравнений (3.13)-(3.16) вытекает следующее дисперсионное уравнение линейных колебаний самогравитирующего вращающегося диска с давлением:

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{2}{D_f} \right) k^2 a_q^2 - 2\pi G \sigma^0 k + 4\Omega^2 \left(1 + \frac{\varpi}{2\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} \right), \quad (3.17)$$

где $a_q = \sqrt{(k_B/m) T_q / [1 + (1-q) D_f / 2]}$. Исследуем это уравнение, выделяя из него отдельные ветки колебаний.

Критерий неустойчивости Джинса для фрактальной среды. В случае, когда самогравитация гораздо больше членов с вращением и давлением,

соответствующее дисперсионное уравнение для однородной среды ($\sigma^0 = \text{const}$) принимает простой вид

$$\omega^2 = a_q^2 k^2 - 4\pi G \sigma^0 k, \quad 0 < q < 1 + \frac{2}{D_f}. \quad (3.18)$$

Для устойчивых волн с действительными частотами имеем $\omega^2 > 0$, тогда как при $\omega^2 = a_q^2 k^2 - 4\pi G \sigma^0 k < 0$ наступает неустойчивость Джинса. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны

$$\lambda_{crit} = 2\pi / k_{crit}, \quad \lambda_{crit} = \sqrt{\pi a_q^2 / G \sigma^0} = \sqrt{\frac{2\pi k_B T_q}{m G \sigma^0 [2 + (1-q) D_f]}}. \quad (3.19)$$

Здесь величина λ_{crit} — это размер мельчайших «капель» среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Чем меньше размер капли, тем больше k , и для них, согласно (3.18), $\omega^2 > 0$. В этом случае частота является действительной величиной и, следовательно, плотность таких возмущений сохраняется конечной — такие возмущения устойчивы. С другой стороны, большие капли соответствуют случаю $\omega^2 < 0$, тогда плотность экспоненциально растёт со временем. Такие волны неустойчивы; коэффициент $i\omega$ соответствует темпу роста возмущений плотности, и мы видим, что $i\omega$ тем больше, чем меньше k . В пределе $k \rightarrow 0$, т.е. $\lambda \rightarrow \infty$, тогда темп роста равен $|\omega_\infty| = 2\sqrt{\pi G \sigma^0}$.

В литературе величину $\lambda_{crit}/2$ называют длиной Джинса, поскольку именно эта величина соответствует размеру области сжатия, тогда как полная длина λ_{crit} содержит как сжатие, так и разрежение. В этом случае возможен другой вариант формулы (3.19)

$$\lambda_{crit} / 2 = \sqrt{\frac{\pi k_B T_q}{4m G \sigma^0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{[1 + (1-q) D_f / 2]}} = \lambda_J [1 + (1-q) D_f / 2]^{-1/2}. \quad (3.20)$$

В результате модифицированный в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса критерий неустойчивости Джинса для фрактальной среды будет выглядеть следующим образом: длина λ_q неустойчивой моды должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_q > \lambda_J [1 + (1-q) D_f / 2]^{-1/2} \equiv \Xi \lambda_J, \quad 0 < q < 1 + \frac{2}{D_f} \quad (3.21)$$

где фактор $\Xi \equiv [1 + (1 - q)D_f / 2]^{-1/2}$ в пределе слабой связи ($q \rightarrow 1$) равен $\Xi = 1$; в случае когда $0 < q < 1$, фактор $\Xi < 1$; если $1 < q < 1 + 2/D_f$, фактор $\Xi > 1$. Заметим, что в случае трёхмерного фазового пространства ($D_f = 3$) фактор $\Xi \equiv \sqrt{2 / (5 - 3q)}$. Следовательно, если энтропийный индекс q лежит в интервале $0 < q < 1$, то наименьший размер «капель» фрактального субдиска, которые могут удерживаться вместе их собственным гравитационным притяжением, уменьшается по сравнению с «обычной» длиной Джинса, $\lambda_q > \Xi \lambda_J (< \lambda_J)$; если $1 < q < 1 + 2/D_f$, то из формулы (3.21) следует, что $\lambda_q > \Xi \lambda_J (> \lambda_J)$, т.е. для того чтобы капля была в состоянии преодолеть гравитационное притяжением фрактального субдиска, её наименьший размер должен быть больше по сравнению с размером в «обычной» дисковой среде. Заметим, что стандартная длина волны Джинса восстанавливается в предельном случае $q = 1$. Таким образом, учёт фрактальности среды может в зависимости от значения индекса деформации приводить как к возрастанию критической длины волны по сравнению с критической длиной Джинса, так и к её убыванию.

Связанная с λ_q критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром λ_q) определяется соотношением

$$M_{crit} = \frac{4\pi}{3} \rho^0 (\lambda_q / 2)^3 = M_J \Xi^3 = M_J \left\{ 1 / [1 + (1 - q)D_f / 2] \right\}^{3/2}, \quad (3.22)$$

где $M_J = \frac{\pi}{6} \rho^0 \lambda_J^3$ – критическая масса Джинса. Точно так же мы видим, что при $0 < q < 1$ (когда фактор $\Xi < 1$) и при $1 < q < 1 + 2/D_f$ (когда фактор $\Xi > 1$) критическая масса фрактальной среды уменьшается (увеличивается) на коэффициент $\left\{ 1 / [1 + (1 - q)D_f / 2] \right\}^{3/2}$. Заметим, что возмущения с массой, превышающей критическую массу Джинса M_{crit} могут расти, формируя гравитационно ограниченные пылевые структуры, в то время как возмущения с массой меньше M_{crit} не растут и ведут себя как акустические волны.

Критерий неустойчивости Тумре для фрактального диска. Учёт вращения трансформирует плоский слой в собственно диск и делает устойчивыми крупномасштабные (длинноволновые, $L \approx 1/k$) осесимметричные возмущения. Если в дисперсионном уравнении (3.17) пренебречь хаотическим (тепловым или турбулентным) движением ($a_q = 0$), то усло-

вие неустойчивости диска $\omega^2 \leq 0$ приводит к следующему ограничению на длину волны:

$$L \leq \pi G \sigma^0 / \kappa^2 \approx \pi G \sigma^0 / 2 \Omega^2. \quad (3.23)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае классическое неравенство (3.23) (но с несколько другим численным коэффициентом) справедливо и для диска с фрактальным распределением скоростей. Хорошо известно, что вращение препятствует гравитационной неустойчивости диска, если его размеры больше определённого предела, тогда как тепловые (или турбулентные) движения приводят к устойчивости для тел с размерами меньше некоторого предела [2,3].

Из соотношения (3.17) отчётливо видна связь дисперсионного уравнения для этого случая с критерием гравитационной неустойчивости Джинса. Отличие заключается в присутствии членов, описывающих вращение, Ω, κ . Уравнение (3.12) удобно записать в безразмерном виде:

$$v_g^2 = Q_g K^2 - 2K + 1, \quad (3.24)$$

где $K = k / k_0$, $k_0 \equiv \kappa^2 / \pi G \sigma^0$, $v_g = \omega / \kappa$ – безразмерная частота джинсовых колебаний;

$$Q_g = \left(1 + \frac{2}{D_f}\right) \frac{k_0^2 a_q^2}{\kappa^2} = \left(1 + \frac{2}{D_f}\right) \frac{a_q^2 \kappa^2}{(\pi G \sigma^0)^2} = \frac{\kappa^2}{(\pi G \sigma^0)^2} \left(\frac{2(2 + D_f)}{D_f(2 + D_f - q D_f)} \right) \frac{k_B T_q}{m} \quad (3.25)$$

– модифицированное число устойчивости Гумре для вращающегося диска.

Решение уравнения (3.24) есть

$$K_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4Q_g(1 - v_g^2)}}{2Q_g}. \quad (3.26)$$

Отсюда видно, что параметр K будет действительной величиной при условии

$$v_g^2 \geq 1 - 1/Q_g.$$

Если

$$\begin{aligned} Q_g &= \left(1 + \frac{2}{D_f}\right) \frac{k_0^2 a_q^2}{\kappa^2} = \left(1 + \frac{2}{D_f}\right) \frac{a_q^2 \kappa^2}{(\pi G \sigma^0)^2} = \\ &= \frac{4\Omega^2}{(\pi G \sigma^0)^2} \left(\frac{2(2 + D_f)}{D_f(2 + D_f - q D_f)} \right) \frac{k_B T_q}{m} < Q_{cr} \approx 1, \end{aligned} \quad (3.27)$$

то, согласно Тумре, диск будет неустойчивым по отношению к радиальным возмущениям. Если $Q_g \geq 1$, то малые возмущения будут усиливаться до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние. При $Q_g = 1$ уравнение (3.25) имеет два корня $K = 1 \pm v_g$, которые соответствуют двум различным модам возмущающей волны: длинноволновая мода, $\lambda / \lambda_0 = 1 / 1 - v_g$; коротковолновая мода, $\lambda / \lambda_0 = 1 / 1 + v_g$ (здесь $\lambda_0 = 2\pi / k_0 = 2\pi^2 G \sigma^0 / \kappa^2 \approx \pi^2 G \sigma^0 / 2\Omega^2$ – длина волны, которая соответствует радиальной протяжённости «капель»).

Рассмотрим теперь диск, устойчивый для всех L относительно возмущений с большими длинами волн (из-за вращения) и относительно возмущений с меньшими длинами волн (из-за хаотических (тепловых) скоростей молекул газа). Неустойчивость такого диска называется граничной. Условия $v_g^2 = 0$, $dv_g^2 / dK = 0$ – определяют границу устойчивости (эта ветвь собственных возмущений описывает безразличное равновесие), при

$$K = 1, \quad Q_g = 1 = (1 + 2 / D_f) k_0^2 a_q^2 \kappa^{-2}, \quad (3.28)$$

диск находится на границе устойчивости (здесь $a_q = \sqrt{\frac{k_B}{m[1 + (1 - q)\frac{D_f}{2}]} T_q}$).

Заметим, что в присутствии диссипации на этой ветви могут развиваться неустойчивости, приводящие к экспоненциальному росту возмущений, имеющих отрицательную энергию [44,47].

Итак, для фрактальных самогравитирующих космических объектов критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса q и фрактальной размерности D_f фазового пространства скоростей, что позволяет при исследовании разнообразных динамических структур в астрофизических дисках, порождённых уникальными неустойчивостями, более обоснованно моделировать реально сложившуюся в природе ситуацию.

Заключение

Для адекватного моделирования роста пылевых агрегатов на ранней стадии эволюции протопланетного газопылевого облака – стадии образования рыхлых прото-планетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства дисковой среды [31,32,34]. В данной главе в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса и связанных с ней обобщённых гидродинамических уравнений Навье–Стокса для фрактальной среды обсуждаются критерии гравитационной неустойчивости Джинса

и Тумре, играющие, как известно, фундаментальную роль во всей расширяющейся Вселенной [48]. В случае пренебрежения влиянием всех факторов, кроме самогравитации и теплового (турбулентного) движения частиц, получены модифицированные формулы критериев Джинса и Тумре для фрактальных самогравитирующих космических объектов. Рассмотренный здесь подход к анализу гравитационной неустойчивости в плоскости астрофизических дисков в рамках статистики Тсаллиса легко может быть распространён на разнообразные ситуации, наиболее адекватно соответствующие природным космическим объектам [43], например, при исследовании динамики возмущений в неоднородных и не изотропных дисковых фрактальных средах, при исследовании гравитационных возмущений в плоскости диска с учётом диссипативных эффектов, при исследовании собственных частот колебаний в вертикально неоднородном диске с учётом магнитного поля и т.п.

Литература

- [1] **Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N.** Kinetic derivation of a quasi-hydrodynamic system of equations on the base of nonextensive statistics. *RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling)*. 2013. V. 28. № 6. P. 547-576.
- [2] **Toomre A.** On the gravitational stability of a disk of stars// *Astrophys. J.* 1964. V.139. P. 1217-1238.
- [3] **Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.
- [4] **Goldrich P., Ward W.R.** The formation of planetesimals// *Astrophys. J.* 1973. V.183. № 3. P. 1051-1061.
- [5] **Nakamoto T., Nakagawa Y.** Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks// *Astrophys. J.* 1994. V. 421. P. 640-651.
- [6] **Guilera O. M., de El'ia G. C., Brunini A., Santamar'ia P. J.** The role of planetesimal fragmentation on giant planet formation// arXiv:1401.7738v1 [astro-ph.EP]. 2014. 15 p.
- [7] **Turner N. J., Fromang S., Gammie C., Klahr H., Lesur G., Wardle M., Bai X-N.** Transport and Accretion in Planet-Forming Disks// arXiv:1401.7306v1 [astro-ph.EP]. 2014. 24 p.
- [8] **Dominik C., Blum J., Cuzzi J., Wurm G.** Growth of dust as the initial step toward planet formation// *Protostars and Planets V*- Arizona Press, AZ, 2007.
- [9] **Wolf S., Malbet F., Alexander R., Berger J.-Ph., Creech-Eakman M., Duchêne G., Dutrey A., Mordasini C., Pantin E., Pont F., Pott J.-U., Tatulli E., Testi L.** Circumstellar disks and planets Science cases for next-generation optical/infrared long base line Interferometers// arXiv:1203.6271v1 [astro-ph.IM] 2012. 83 p.
- [10] **Lima J.A. S.; Silva R.; Santos J.** Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory// *Astronomy and Astrophysics*. 2002. V.396. P. 309-313.

[11] **Sakagami M., Taruya A.** Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatics//Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V.16. № 3. P. 279-292.

[12] **Nobuyoshi K, Shigeo K; Takahiro K.** Nonequilibrium process of self-gravitating N-body systems and quasi-equilibrium structure using normalized q-expectation values for Tsallis' generalized entropy// Journal of Physics: Conference Series. 2010. V. 201. № 1. P. 012009.

[13] **de Freitas D.B., de Medeiros J.R.** Nonextensivity in the solar neighborhood// Europhysics Letters. 2012. V. 97. № 1. P. 19001.

[14] **Олемской А.И.** Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория. М.: КРАСАНД. 2009. 384 с.

[15] **Бак П.** Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности//М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2014. 276 с.

[16] **Tsallis C.** Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics// J. Stat. Phys. 1988. V.52. P. 479-487.

[17] **Curado E.M.F., Tsallis C.** Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. 1991. A 24. P. L69-72.

[18] **Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R.** The role of constraints within generalized Nonextensive statistics// Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

[19] **Weidenschilling S.J.** Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula// Icarus. 1980. V.44. P. 172-189.

[20] **Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C.** Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula// Icarus. 1981. V.45. P. 517-528.

[21] **Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K.** Accumulation of planetesimals in the solar nebula// Icarus. 1983. V.54. P. 361-376.

[22] **Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C.** Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// Icarus. 1986. V.67. P. 375-390.

[23] **Blum J.** Grain growth and coagulation/ 2004. In ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust, ed. A. N.Witt, G. C. Clayton and B. T. Draine (San Francisco: ASP). P. 369.

[24] **Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M.** Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters// Astron. Astrophys. 2007. V. 461. P. 215-236.

[25] **Suyama T., Wada K., Tanaka H.** Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions// Astroph. J. 2008. V. 684. P. 1310-1322.

[26] **Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S.** Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions// arxiv:1205.1894v1 [astro-ph. EP]. 2012. 28 p.

[27] **Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T.** Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions// Astrophys. J. 2008. V. 677. P.1296-1308.

[28] **Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T.** Collisional growth conditions for dust aggregates// Astrophys. J. 2009. V.702. P.1490-1501.

[29] **Okuzumi S., Tanaka H., Sakagami M.-A.** Numerical modeling of the coagulation and porosity evolution of dust aggregates// ApJ. 2009. V. 707. P 1247-1264.

- [30] **Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchi T., Sakagami M.-A.** Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution // *ApJ*. 2011. V. 731. P. 95.
- [31] **Kataoka A., Tanaka H., Okuzumi S., Wada, K.** Static compression of porous dust aggregates// *Protostars and Planets VI*. Heidelberg. 2013a. Poster #2B0929 (см. также arXiv: <http://arxiv.org/abs/1307.7984>).
- [32] **Kataoka A., Tanaka H., Okuzumi S., Wada K.** Fluffy dust forms icy planetesimals by static compression// *Astronomy & Astrophysics*. 2013b.V. 557. id.L4. 4 p. (см. также arXiv: <http://arxiv.org/abs/1307.7984>).
- [33] **Tarasov V.E.** Fractional Dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Berlin: Springer. 2010. 567 p.
- [34] **Колесниченко А.В., Маров М.Я.** К моделированию процесса агрегации пылевых фрактальных кластеров в протопланетном ламинарном диске//*Астрон. Вестник*. 2013. Т. 47. №. 2. С. 92-111.
- [35] **Леонтович М.А.** Введение в термодинамику. Статистическая физика// Наука.1983. 416 с.
- [36] **Колесниченко А.В.** К построению энтропийной транспортной модели на основе формализма неэкстенсивной статистики // *Математическое моделирование*. 2014. Т. 26. № 4. См. также «Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 33. 23 с.».
- [37] **Boghosian B.M.** Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional turbulence using Tsallis statistics// *Phys. Rev.* 1996. V. E 53. P. 4754.
- [38] **Arimitsu T., Arimitsu N.** Analysis of turbulence by statistics based on generalized Entropies// *Physica*. 2001. V. A 295. P. 177.
- [39] **Boghosian B.M.** Navier-Stokes Equations for Generalized Thermostatistics//*Bras. J. Phys.* 1999. V. 29. №1. P. 91-107.
- [40] **Bogolyubov N.N.** Problems of a dynamical theory in statistical physics//*Moscow: Gostekhizdat*. 1946. 122 p.
- [41] **Морозов А.Г.** Диссипативные эффекты в газовых подсистемах плоских галактик//*АЖ*. 1982. Е.59. С.864-869.
- [42] **Морозов А.Г.** Локальный критерий устойчивости газовых подсистем плоских галактик// *АЖ*. 1985. Е.62. С. 209-217.
- [43] **Фридман А.М., Хоперсков А.В.** Физика галактических дисков. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2011. 640 с.
- [44] **Горькавый Н.Н., Фридман А.М.** Физика планетных колец. М. Наука. 1994. 348 с.
- [45] **Fridman A. M., Polyachenko V. L.** Physics of gravitating system. N.Y. Springer-Verlag. 1984 V.1. 468 P. V.2. 358 p.
- [46] **Морозов А.Г., Торгашин Ю.М., Фридман А.М.** Турбулентная вязкость гравитирующего газового диска//*Письма в АЖ*. 1985. Т.11. С. 231-238.
- [47] **Fridman A.M., Gor'kavyi N.N.** Physics of Planetary Rings/ New York: Springer. 1999.
- [48] **Peebles P. J. E.** Principles of Physical Cosmology//*Princeton U. Press, Princeton*. 1993.

Заключение

Целью данной монографии является конструирование моделей природных и космических сред с усложнёнными физико-химическими характеристиками, при описании которых следует учитывать турбулентный (и ламинарный) характер движения, сжимаемость многокомпонентного потока, переменность теплофизических свойств, наличие процессов тепло- и массопереноса, химических реакций и излучения, а также воздействие гравитационных и электромагнитных сил. Используемый в книге при разработке феноменологических моделей турбулентности Онзагеровский формализм классической неравновесной термодинамики (КНТ) позволяет получить наиболее общую структуру замыкающих градиентных соотношений, как для тензора рейнольдсовых напряжений, так и для всевозможных турбулентных потоков.

В связи с применением метода Онзагера–Казимира для вывода замыкающих соотношений для турбулизованной среды важно иметь в виду следующее: фундаментальным предположением, на котором основан формализм КНТ, является предположение о *локальном состоянии равновесия*. Оно подразумевает, что локальные и мгновенные соотношения между механическими и тепловыми свойствами любой турбулентной подсистемы вне состояния равновесия являются теми же самыми соотношениями, которые свойственны однородной системе в состоянии равновесия. В частности, энтропия вне состояния равновесия зависит от тех же переменных состояния, которые определены для состояния локального термодинамического равновесия. Собственно по этой причине градиентная гипотеза в теории турбулентности (уже как результат последовательного применения формализма КНТ) абсолютно не решает проблемы замыкания в тех весьма важных для астрофизических приложений случаях, когда существенно воздействие на пространственно-временное распределение параметров состояния среды механизмов конвекции, диффузии, возникновения, перераспределения и диссипации турбулентных характеристик поля пульсирующих параметров. Как известно, для подобного рода турбулентных течений коэффициенты турбулентного переноса вообще нельзя определить адекватным способом. Таким образом, при термодинамическом подходе к моделированию турбулентности, предположение о локальном состоянии равновесия является часто слишком ограничительным. Оно состоятельно лишь при рассмотрении линейных или стационарных определяющих соотношений между турбулентными потоками и соответствующими термодинамическими силами (в случае, когда процессы переноса происходят бесконечно медленно). Вместе с тем, в общем, неравновесном случае должны, по-видимому, существовать дополнительные скрытые переменные состояния (не фигурирующие в описании турбулизованной системы в состоянии «локального равновесия»), которые могут влиять на вид замыкающих со-

отношений, описывающих такого рода неравновесные ситуации.

Таким образом, возникает потребность в рассмотрении других подходов к проблеме замыкания, например, подходов основанных на методах расширенной неравновесной термодинамики (РНТ), выходящей за пределы гипотезы о локальном равновесии за счёт расширения числа базисных независимых переменных при рассмотрении неравновесных состояний системы и за счёт модификации таких концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление или химический потенциал. Эта теория вводит в рассмотрение в качестве дополнительных независимых переменных диссипативные термодинамические потоки, фигурирующие в уравнениях баланса массы, импульса и энергии. Это, в частности, тензор напряжений (минус его гидростатическая часть), тепловой поток (полный поток энергии минус потоки, связанные с адвекцией и механической энергией) и т.п. Использование в качестве независимых переменных этих диссипативных потоков позволяет получить при исследовании высокочастотных явлений (к которым относится, в частности, и гидродинамическая турбулентность), весьма удовлетворительные, с практической точки зрения, результаты, которые не могут быть получены при использовании КНТ. Отметим, что одной из побудительных причин для разработки расширенной необратимой термодинамики было разрешение следующего кардинального вопроса: вызывает ли возникшее возмущение мгновенный отклик во всех точках рассматриваемой физической системы? Формализм РНТ предназначен как раз для описания явлений с относительно длительным временем релаксации и большой длинной корреляций, а также высокочастотных и коротковолновых явлений. Формализм РНТ позволяет разработать методику получения, как определяющих материальных уравнений для классических переменных, задаваемых обычными законами баланса, так и для нахождения соответствующих эволюционных уравнений (совместимых со вторым законом термодинамики) для диссипативных потоков, описывающих реакцию системы на воздействие высокочастотных (коротковолновых) возмущений.

В качестве перспективы будущих исследований, автору представляется весьма заманчивым распространить область применения неравновесной термодинамики на важные для астрофизики случаи исследования эрдитарных явлений (т.е. явлений с памятью), нелокальных и нелинейных эффектов. Такой подход возможен как раз на основе РНТ, которая позволяет получать кинетические конститутивные соотношения, например, дифференциальные уравнения, связывающие между собой, например, тензор рейнгольдсовых напряжений и тензор скоростей деформации в турбулентной жидкости и т.п.