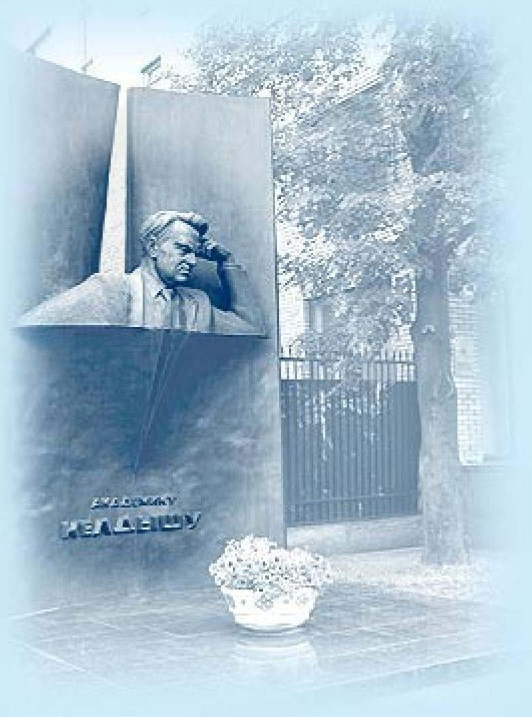
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



А.В.Колесниченко

Неаддитивная термодинамика: элементы теории и приложения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Колесниченко А.В. Неаддитивная термодинамика: элементы теории и приложения. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2024. 528 с.
doi: 10.20948/mono-2024-kolesn
URL: https://keldysh.ru/e-biblio/kolesn-2/

А.В. Колесниченко

Неаддитивная термодинамика

Элементы теории и приложения

ОРДЕНА ЛЕНИНА
им. М.В. КЕЛДЫША
РАН

А.В. Колесниченко

Неаддитивная термодинамика

Элементы теории и приложения

Предисловие
доктора физико-математических наук,
профессора Ю.Н. Орлова

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
Москва — 2024

УДК 536.7
ББК 22.253.3 22.317 318 24.54.26.51
К60

Колесниченко А.В.
Неаддитивная термодинамика: элементы теории и приложения. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2024. — 528 с.

В монографии изложены основные элементы неаддитивной статистической термодинамики, предназначенной для описания сложных (аномальных) систем, фактические свойства которых находятся вне области применения классической статистики Больцмана–Гиббса, в частности, из-за наличия в пределах системы дальнодействующего силового взаимодействия, эффектов памяти и больших корреляций отдельных частей, а также фрактального характера фазового пространства. При этом нарушается важнейшее термодинамическое свойство – аддитивность энтропии, которая для равновесных состояний в классическом случае является следствием локального взаимодействия между элементами системы. Подобные аномальные системы обнаруживают не экспоненциальные, а асимптотически степенные статистические распределения.

На основе принципа Джейнса максимума параметрических энтропий Тсаллиса, Реньи, Шарма-Миттал, Шарма-Танеджи-Миттал и Каниадакиса в книге развита синергетическая схема, представляющая процесс спонтанного (или вынужденного) перехода между состояниями сложной динамической системы. Приведены полученные в рамках неэкстенсивных термодинамик новые результаты автора, связанные, в частности, с моделированием различных физических и астрофизических систем и самогравитирующих объектов.

Книга, сочетающая строгость и одновременно доступность изложения, представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся конкретными и общими природными закономерностями и методами их изучения и постижения.

Рецензент академик Б.Н.Четверушкин

ISBN 978-5-98354-070-5

Предисловие научного редактора

Представляемая научному сообществу книга проф. А.В. Колесниченко по термодинамике неаддитивных (неэкстенсивных) сред восполняет определенный пробел в фундаментальной литературе по этой тематике. Происхождение неаддитивности и ее связь с термодинамикой рассматривается в книге с помощью понятия дефекта энтропии, то есть уменьшения энтропии системы, вызванного наличием дальнодействующих корреляций между ее отдельными элементами. В настоящее время свойства подобных систем, характеризующихся негауссовыми и негиббсовскими распределениями и проявляющиеся в аномальных физических процессах, исследуются весьма интенсивно за рубежом. Вместе с тем они носят, как правило, модельно-инструментальный характер, то есть в публикациях описывается математический аппарат, применяемый для вычисления тех или иных термодинамических функций в рамках определенных статистических моделей без обсуждения базовых принципов, лежащих в основе этих моделей. Однако область неаддитивной термодинамики в понятийном смысле весьма существенно затрагивает философские категории, чем и обусловлена незавершенность современных концептуальных подходов. Предлагаемая монография, наряду с подробными математическими доказательствами приведенных модифицированных термодинамических соотношений, содержит оригинальные авторские идеи о различных подходах к построению различных неаддитивных термодинамик (Тсаллиса, Реньи, Шарма-Миттал, Шарма-Танеджи-Миттал и Каниадакиса) и о их связи с моделями классической термодинамики. Это несомненное достоинство данной работы, стимулирующее исследовательскую мысль при построении обобщающих моделей и категорий, что в конечном итоге приводит к созданию более обоснованных теорий аномальных физических явлений.

Несмотря на достаточно большой исторический путь развития классической термодинамики, именно незавершенность ее концепции заставляет зачастую обращаться к исходным постулатам, чтобы попытаться провести необходимые обобщения. Полезно кратко напомнить основные проблемы, которые и сейчас не потеряли актуальности, чтобы более ясно выделить направления современных исследований и то, что побудило автора к написанию данной монографии.

В традиционном современном подходе, основывающемся на аксиоматике Каратеодори, предложенной в 1909 г., температура и энтропия не являются исходными понятиями. Они строятся из так называемых первых принципов, то есть из законов механики движения частиц, составляющих физическую систему. Обратная температура в этом подходе есть интегрирующий множитель, который переводит малое приращение количество теплоты в полный дифференциал функции, называемой энтропией. Эту теоретическую температуру необходимо как-то связать с эмпирической температурой. Эмпирическая температура является по предположению такой вещественной функцией $T(P)$ от параметров состояний P системы, которая для двух составляющих системы дает одно и то же значение $T(P_1) = T(P_2)$ тогда и только тогда, когда система находится в тепловом равновесии. Это, собственно, и есть определение термодинамического равновесия. Но оказалось, что наличие термометра, то есть условия выполнения принципа транзитивности, недостаточно для строгого обоснования существования эмпирической температуры. С другой стороны, просто наличие интегрирующего множителя не гарантирует монотонность изменения энтропии.

В 1928 г. Т.А. Афанасьевой-Эренфест было показано, что формулировки второго начала термодинамики Клаузиуса и Кельвина, в которых первичны понятия теплоты и температуры, не эквивалентны. Именно, для формулировки Кельвина требуется выполнение трех аксиом: об адиабатической недостижимости состояний с ненулевым приращением количества теплоты; о тепловом равновесии, возможном только при равных температурах; и об однозначности энтропии, интеграл от которой по замкнутому контуру всегда равен нулю. Для формулировки Клаузиуса необходимо добавить аксиому о положительности интегрирующего множителя.

В 1948 г. Каттанео показал, что если внутренняя энергия является непрерывной функцией всех своих аргументов P, то существует эмпирическая энтропия $S(P)$, под которой понимается вещественная функция со следующим свойством: состояние P_2 является адиабатически достижимым из состояния P_1 тогда и только тогда, когда $s(P_1) \le s(P_2)$. Существенность гипотезы о непрерывности была доказана в 1961 г. Ландсбергом. В 1968 г. Бойлин доказал, что существование эмпирической энтропии и локального интегрирующего множителя в теории Каратеодори достаточно для существования глобального интегрирующего множителя.

Параллельно аксиоматической теории разрабатывались кинетические подходы, призванные связать формальную термодинамику через параметры распределения Гиббса со статистической механикой систем многих частиц. Теория локально-равновесных состояний была построена Н.Н. Боголюбовым в 1946 г. Она основана на микроскопическом подходе к описанию неравновесных процессов, на иерархии функций распределения и времен релаксации и на последующем сокращении числа параметров, определяющих состояние системы. Однако надо отметить, что аддитивность функций состояния для двух термодинамических подсистем доказана, строго говоря, лишь в тривиальном случае идеального газа. Наряду с этим, Трусделл в 1965 году показал, что в рамках классической термодинамики соотношения вида $T^{-1} = (\partial S / \partial U)_V$, $PT^{-1} = (\partial S / \partial V)_U$ не могут быть применены к реологическим моделям, в которых уравнения состояния зависят от градиентов термодинамических параметров.

Таким образом, уже в середине прошлого века пришло понимание того, что даже если удастся согласовать термодинамическую аксиоматику, она не сможет быть применена ко многим реальным системам. Попытки учесть дальнодействующие потенциалы и поверхностные эффекты нашли отражение в создании более сложных кинетических уравнений, но на уровне аксиоматики к существенным продвижениям не привели. В то же время необходимость создания моделей для описания систем, параметры которых не аддитивны, привела к различным модификациям классических определений. Основной моделью является так называемая q- энтропия Тсаллиса (точнее энтропия Havrda/Charvát/Daróczy/Tsallis), предложенная им в 1988 г. Несмотря на определенную эвристику, в ряде математических аспектов эта модель оказалась чрезвычайно удобной. Она позволяет численно (то есть близко к эксперименту) моделировать многие аномальные системы с дальнодействующим силовым взаимодействием, а также термодинамику фрактальных сред. Как и для q- деформированных квантовых коммутационных соотношений между канонически сопряженными операторами, здесь также формулы переходят в классические при $q \to 1$.

В настоящей книге описывается как методология построения статической термодинамики неаддитивных систем, так и различные следствия и интерпретации получаемых соотношений. Прослеживающаяся на протяжении всего изложения связь новой теории и классических представлений позволяет читателю погрузиться в весьма причудливый мир неаддитивной термодинамики, а многочисленные подробно описанные приложения показывают практическую востребованность данного направления науки.

Доктор физ.-мат. наук, проф. Ю.Н. Орлов

Посвящается жене и другу Ольге

Предисловие автора

Эта книга посвящена изложению теоретических основ неэкстенсивной статистической термодинамике Тсаллиса, предназначенной, в первую очередь, для моделирования ряда сложных динамических систем в условиях, когда существенным является учет пространственного дальнодействия, длинной памяти и сильных корреляций между отдельными элементами системы, что приводит, в конечном итоге, к нарушению гипотезы полного хаоса фазового пространства состояний, и тем самым, к неаддитивности ее термодинамических характеристик, в частности, энтропии.

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана–Гиббса и классическая термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. Это связано, в частности, с тем, что в основе статистики Больцмана–Гиббса лежит постулат о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что фазовое пространство не содержит запрещенных состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к экспоненциальному распределению вероятности состояний системы (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных), или, в случае кинетической теории, к максвелловскому распределению скоростей. Кроме этого, в основе этих наук лежит фундаментальное предположение о малости радиуса взаимодействия между отдельными элементами системы по сравнению с размерами самой системы. Поскольку в большинстве обычных систем силы между отдельными частями короткодействующие, то каждая «молекула» чувствует лишь несколько ближайших соседей. Таким образом, аддитивность энтропии и других термодинамических параметров для равновесных или близких к равновесию систем является следствием локального взаимодействия между отдельными элементами системы.

Вместе с тем, существует широкий класс сложных систем, элементы которых взаимодействуют глобально, чему предшествует снижение симметрии системы, связанное с формированием коллективных мод интенсивных переменных. В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической термодинамики, известны многочисленные примеры подобных систем, поведение и свойства которых являются аномальными с точки зрения классической термодинамики. Примером таких аномальных систем в астрофизике являются астрофизические диски достаточно больших размеров, существенным признаком которых является несводимость всей системы к простой сумме частей. Как известно, сила гравитационного притяжения между любыми телами падает с расстоянием достаточно медленно, обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Поэтому в самогравитирующих астрофизических дисках каждая частица «чувствует» не только ближайших соседей, а всю совокупность остальных частиц). Другими словами, отдельные части дискового облака будут взаимодействовать не только на границе их соприкосновения, но и глобально всеми своими объемами. Именно по этой причине моделирование эволюции дискового вещества на основе классической энтропии Больцмана−Гиббса $S^{BG}=-k_B\int dz\, p\ln p$ не является в общем случае вполне адекватным. Это означает, что в самогравитирующих системах сильное гравитационное взаимодействие является причиной того, что дисковая система относится к числу сложных (аномальных) систем, для которых характерна слабая хаотизация фазового пространства, вследствие чего нарушается аддитивность ряда экстенсивных термодинамических параметров (в частности, энтропия в таких системах не будет аддитивной величиной) и традиционное экспоненциальное статистическое распределение вероятности состояний приобретает степенной характер.

Существуют и многие другие системы, которые не могут быть описаны в рамках классической статистики и термодинамики. К их числу относятся системы, которые помнят свое прошлое. Эффекты памяти также приводят к нарушению гипотезы молекулярного хаоса, поскольку движения отдельных частиц такой системы являются взаимообусловленными (т.е. сильно коррелированными). Существуют также системы, в которых имеются нелокальные корреляции, сильная взаимозависимость между всеми элементами системы. Это приводит к тому, что их не удается адекватно описать больцмановской статистикой и термодинамикой, так как последние базируются на предположении о молекулярном хаосе. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Таким образом, исследования в области статистической термодинамики неэкстенсивных систем приобрели в настоящее время значительный общетеоретический интерес в связи с проявлениями неэкстенсивных свойств во многих аномальных физических явлениях и важностью практических приложений. Диапазон применения разнообразных неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие.

Начало систематического изучения в этом направлении исследований связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой им впервые была введена параметрическая формула $S_q^T\left(p\right)=\frac{k_B}{q-1}\left(1-\int p^q dz\right)$ для статистической энтропии, предназначенная для описания поведения аномальных систем с сильным силовым взаимодействием и сильными корреляциями отдельных ее частей, а также с фрактальным характером фазового пространства. Важно, что эта формула для энтропии, во-первых, переходит в пределе слабой связи $(q\to 1)$ в каноническую формулу энтропии Больцмана–Гиббса, а во-вторых, являясь неаддитивной величиной, может промоделировать ситуацию неэкстенсивности. Энтропийный индекс q (параметр деформации) в определении энтропии $S_q^T\left(p\right)$ представляет собой вещественное число, принадлежащее области $q\in\mathcal{R}$ (часто это просто лишь подгоночный параметр). Форма энтропии Тсаллиса позволяет учитывать важную особенность поведения аномальных систем, связанную с вероятностью реализации распределения p: При $q>1$ в системе реализуются коллективные «эффективные» степени свободы и чем больше q, тем больше их вклад в организацию системы. Функция распределения вероятности p при больших значениях энергии убывает (при $q>1$), не экспоненциально быстро, а степенным образом, а при $q<1$ получается, что существует максимально возможная энергия, то есть, распределение p обрезается на некотором конкретном ее значении. Благодаря этому статистика Тсаллиса описывает события практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана−Гиббса.

Следует заметить, что неэкстенсивная статистика Тсаллиса представляет собой все же обобщение, а не альтернативу классической статистике Больцмана−Гиббса, поскольку она распространяет область применимости стандартной статистической теории на неэкстенсивные системы путем расширения математической формы ее энтропийного функционала.

В настоящее время теория неэкстенсивных систем существенно развивается в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять ее природу, возможности и ограничения (см. Библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется).

По мнению автора данной книги, существует несколько причин, по которым стоит больше узнать о статистике Тсаллиса и других неэкстенсивных энтропиях, связанной в первую очередь с теоретико-информационными методами исследования необратимости и самоорганизации. Во-первых, эти теории имеют широкий спектр важных приложений, связанных с термодинамикой и физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются негауссовыми и негиббсовыми распределениями. Область применения этих теорий постоянно расширяется и уже охватывает различные направления в науке, такие как квантовая механика и космология, специальная и общая теории относительности и релятивистская термодинамика, теория плазмы, теория турбулентности, нелинейная динамика и фракталы, геофизика, статистика и медицина и т.д. Во-вторых, предмет исследования представляет значительный общетеоретический интерес в связи с регулярным открытием новых аномальных явлений с неэкстенсивными свойствами. При этом возникают многочисленные математические проблемы неэкстенсивных термодинамик и статистических механик, требующие своего решения. В-третьих, различные статистические термодинамики неэкстенсивных систем все еще не нашли широкого распространения среди отечественных специалистов, которые по необъяснимым причинам не включились в процесс разработки этой новой области исследования со множеством интересных и нерешенных вопросов.

Общая структура данной книги включает в себя четырнадцать глав, причем автор попытался сделать главы книги по возможности независимыми друг от друга, хотя их, естественно, объединяет общая концептуальная направленность.

Содержание книги условно делится на две части. В первой части (главы 1-8) изложены основные методы построения статистических термодинамик различных неэкстенсивных систем.

В Главе 1 книги дается логическая схема изложения принципов неаддитивной (неэкстенсивной) статистики и термодинамики, основанная на параметрическом определении энтропии Тсаллиса. Принцип максимума энтропии используется для нахождения вероятностных равновесных q-распределений, которые при больших отклонениях случайной переменной от среднего значения обладают степенной асимптотикой, соответствующей эмпирически установленным закономерностям для широкого класса объектов, к которым неприменима классическая статистическая термодинамика. Проанализированы следствия ненормированного осреднения Курадо−Тсаллиса микроскопических физических величин в статистике Тсаллиса и его формальное и практическое значение для моделирования динамических q-систем, которое в последнее время в огромном количестве представлено в литературе. На основе информации различия Ратье−Каннаппана рассмотрены спонтанные переходы между состояниями системы и обобщенная *H*-теорема.

Глава 2 включает анализ следствий эскортного осреднения Тсаллиса−Мендеса−Пластино (ТМР) микроскопических динамических величин в неаддитивной термодинамике Тсаллиса и его формальное и практическое значение при моделировании различных q-систем, которое в последнее время в большом количестве представлено в научной литературе. Показано, что в зависимости от способа определения средних значений динамических величин, возможны различные варианты обобщенной равновесной статистической термодинамики и дан их сравнительный анализ. Найдены условия выполнения преобразования Лежандра при использовании понятия физической температуры. Проведено рассмотрение модифицированных термодинамических соотношений в статистике ТМР. Обсуждается метод оптимизированных множителей Лагранжа, позволяющий устранить некоторые проблемы неаддитивной термодинамики ТМР.

Глава 3 посвящена конструированию статистической термодинамики Реньи неэкстенсивных систем и разработке техники получения мультифрактальных размерностей), выполненной с учетом их взаимосвязи. Следует при этом отметить, что среди всех сложных аномальных систем особую важность имеют системы фрактальной природы. Идея описания фракталов на основе меры Хаусдорфа принадлежит Б. Мандельброту. Им были получены нетривиальные результаты и построена соответствующая математическая теория. При этом центральная роль в определении фрактальной размерности была отведена энтропии Реньи. Важным преимуществом неэкстенсивной статистической термодинамики Реньи является наличие степенной функции распределения вероятностей, появляющейся (при максимизации энтропии) вместо экспоненциальной функции распределения классической статистики Гиббса. Ее использование привело к значительному прогрессу, связанному с исследованиями ряда аномальных физико-химических и механических процессов. Вместе с тем, обобщенная термодинамика, основанная на энтропии Реньи, в отличие от термодинамики Тсаллиса, все еще не нашла достойного применения при феноменологическом моделировании ряда природных и космологических проблем. Предложенный в этой главе подход конструирования неэкстенсивной статистической термодинамики базируется на негиббсовом равновесном распределении состояний, полученном из условия экстремума энтропии Реньи при заданности осредненных динамических параметров, характеризующих аномальную систему, а также на осреднении этих параметров по эскортному (нормированному) распределению, удобному при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных сред. Здесь обсуждаются также различные варианты построения мер (разных порядков) фракталов и мультифракталов на основе энтропии и информации различия Реньи и основные неравенства для полученных размерностей.

В Главе 4 рассматривается энтропийный функционал Шарма-Миттал (ШМ) как форматор семейства классической и деформированных однопараметрических энтропий, состоящего из энтропий, Реньи, Тсаллиса, Ландсберга−Ведрала, Гаусса и Гиббса. Все эти энтропии связаны равенствами, представляющими чередования обычных ($\ln$ и $\exp$) и деформированных ($\ln_q$ и $\exp_q$) логарифмов и экспонент. Здесь показано, что энтропия ШМ подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем. Найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации двухпараметрической энтропии Шарма−Миттал при заданных ограничениях на осредненные значения параметров системы, полученные по нормированному эскортному распределению вероятностей. Построенная на базе энтропии ШМ двухпараметрическая термодинамика неэкстенсивных систем связана с обобщенными однопараметрическими термодинамиками, основанными на указанных выше деформированных энтропиях этого семейства. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых систем при их тепловом контакте, которое основано на так называемой физической температуре $T_{ph}(p)$, отличающейся от инверсии множителя Лагранжа β. Этот факт потребовал переопределения некоторых термодинамических соотношений, полученных ранее стандартным образом в рамках термодинамики ШМ. При этом, в качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт нахождения деформированных термодинамических соотношений, выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Наконец, на основе двухпараметрической информации различия ШМ сформулированы и доказаны теорема Гиббса и *H*-теорема об изменении этих мер при эволюции во времени. Полученные таким образом модифицированные термодинамические соотношения соответствуют различным выражениям однопараметрических энтропий из семейства ШМ, имеют общий вид и могут быть использованы при рассмотрении разнообразных термодинамических процессов (необратимости, устойчивости, фрактальности, самоорганизации и т.п.) в замкнутых и открытых хаотических неэкстенсивных системах.

В Главе 5 представлена логическая схема построения модифицированной статической термодинамики неэкстенсивных систем, основанной на каппа-энтропии Каниадакиса. Термодинамика Каниадакиса привлекает в последнее десятилетие все больший интерес, поскольку она обладает многими важными свойствами (принцип максимальной энтропии, термодинамическая устойчивость, устойчивость Леша, непрерывность и т. п.). Это позволяет быть этой термодинамике также одной из удачных обобщений классической термодинамики особенно в контексте специальной теории относительности, и полученных распределений, которые наблюдаются в различных физических, природных и искусственных системах. В этой главе представлена логическая схема построения модифицированной. Здесь показано, что каппа-энтропия подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых подсистем. Доказанная положительность энтропии совокупной системы указывает на существование силы притяжения между отдельными подсистемами, и это взаимодействие явно происходит от взаимодействия между их составными частями. Здесь найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации энтропии Каниадакиса при заданных ограничениях на усредненные значения параметров системы, полученные по нормированному распределению вероятностей. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру $T_{ph}(p)$ отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β. Этот факт потребовал переопределения ряда термодинамических соотношений, полученных ранее естественным путем в рамках термодинамики Каниадакиса. В качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт нахождения новых термодинамических соотношений были выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Путем применения обобщенной каппа- энтропии к аномальным системам, был получен набор макроскопических термодинамических соотношений для неэкстенсивных сред. Наконец, на основе, так называемой дивергенции Брегмана были сформулированы и доказаны H-теорема и теоремы Гиббса, описывающих хаотизацию макроскопической системы Каниадакиса при спонтанных переходах.

В последнее время двухпараметрическая (κ,ς)-статистика Шарма–Танеджа–Миттал (ШТМ) также привлекает все больший интерес, поскольку она обладает многими интересными свойствами (принцип максимальной энтропии, термодинамическая устойчивость, устойчивость Леша, непрерывность и т. п.). В связи с этим в Главе 6 дается логическая схема построения модифицированной термодинамики неэкстенсивных систем, основанная на энтропии ШТМ. Найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации энтропии (ШТМ) при заданных ограничениях на усредненные значения параметров системы, полученные по нормированному распределению вероятностей. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру, отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β. Путем применения обобщенной энтропии Клаузиуса к аномальной системе, был получен набор основных термодинамических соотношений. Наконец, на основе, так называемой дивергенции Брэгмана была сформулирована и доказана H-теорема, описывающая хаотизацию микроскопической системы при спонтанных переходах.

В главе 7 для описания квантово-механической неэкстенсивной системы использован формализм матрицы плотности, описывающий системы, квантовые состояния которых известны не полностью. Кроме этого, широко использован обычный формализм феноменологической термодинамики, причем правильность обоих основных начал термодинамики, вслед за фон Нейманом, подразумевается. С учетом этих предположений получена равновесная статистическая термодинамика квантовых неэкстенсивных систем и определены ее термодинамические свойства. Проведенное рассмотрение базируется на двух функционалах – квантовой параметрической энтропии Тсаллиса и обобщенной квантовой различающей информации Ратье-Каннаппана. Выполненный анализ квантовой системы основывается на степенном равновесном распределении матрицы плотности, полученном из условия абсолютного экстремума квантовой энтропии Тсаллиса при заданности средней энергии и среднего числа частиц для ансамбля квантовых систем, а также на осреднении наблюдаемых по эскортному распределению. В результате получено обобщение на квантовый случай нулевого закона термодинамики для двух независимых подсистем при их тепловом контакте и введена так называемая физическая температура. С привлечением обобщенного первого закона термодинамики и преобразования Лежандра найдены модифицированные термодинамические соотношения на основе введенной энтропии Клаузиуса, которые отличны от выведенных ранее традиционным для статистической механики способом. С использованием свойства выпуклости различающей информации Ратье-Каннаппана (обобщенной на квантовый случай) обсуждается второй закон термодинамики квантовых систем.

Наконец, в Главе 8 дается логическая схема построения модифицированной термодинамики для неэкстенсивных бозонных систем, основанная на модифицированных энтропии Бозе-газа и соответствующей дивергенции Брэгмана. Показано, что обобщенная энтропия бозонного газа подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых подсистем. Положительность энтропии совокупной системы указывает на существование силы притяжения между отдельными подсистемами, и это взаимодействие явно происходит от взаимодействия между составляющими их бозонными частицами. Найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации модифицированной энтропии Бозе-газа при заданных ограничениях на усредненные значения энергии и числа частиц q-системы, полученные по ненормированному распределению вероятностей Курадо-Тсаллиса. Используя модифицированное распределение Бозе–Эйнштейна, получены обобщенные выражения для термодинамического потенциала, полной и свободной энергии, энтропии, удельной теплоты, давления и удельной теплоемкости, а также дифференциальные термодинамические уравнения для бозонного газа. Обсуждаются обобщенные законы Планка, Рэлея–Джинса и Вина для фотонов, которые могут быть применимы к различным физическим задачам, в частности, к описанию космического черного излучения. На основе так называемой дивергенции Брегмана сформулированы и доказаны *H*-теорема и теорема Гиббса, описывающие хаотизацию макроскопической бозонной системы при спонтанных переходах.

В т о р а я   ч а с т ь книги (главы 9-15) содержит новые результаты автора по данной тематике, связанные в первую очередь с математическим обоснованием ряда свойств неэкстенсивных термодинамик, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения. Среди них одной из важных проблем является, в частности, обоснование в рамках механики Тсаллиса «знаменитых» соотношений взаимности Онзагера между коэффициентами линейных уравнений, выражающих феноменологические законы, которым подчиняются необратимые процессы. Здесь также приведены результаты моделирования различных аномальных физических систем в условиях, когда существенным процессом является проявление пространственного дальнодействия, в частности, для самогравитирующих объектов в астрофизике.

В Главе 9 дано обоснование в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса соотношений взаимности кинетических коэффициентов в феноменологических уравнениях затухания флуктуаций термодинамических параметров, характеризующих неэкстенсивную систему. Эти соотношения отражают на макроскопическом уровне инвариантность микроскопических уравнений движения относительно обращения времени. Также как в случае классической статистики Гиббса предложенный вывод опирается на теорию равновесных флуктуаций динамических переменных, характеризующих сложную систему, и на свойстве инвариантности флуктуаций относительно обращения времени. Кроме этого использовано предположение о том, что макроскопическая функция распределения q-флуктуаций в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса является обобщенным q-гауссианом. Принятие подобной формы для функции распределения определяет (как и в случае классической теории флуктуаций) класс переменных, к которому применим представленный подход.

В главе 10 использован подход Тсаллиса для получения в рамках квантовой неэкстенсивной статистической механики обобщённых соотношений для адмитанса и функции отклика, описывающих линейную реакцию квантово-механической системы на слабое внешнее механическое воздействие. Для описания квантовых систем использован формализм матрицы плотности $\hat{\rho}$, описывающий системы, квантовые состояния которых известны не полностью. Проведенное исследование в рамках квантовой неэкстенсивной термодинамики основывалось на каноническом (степенном) распределении модифицированной матрицы плотности $\hat{\sigma}_q \equiv \hat{\rho}^q / \mathbf{Tr}\hat{\rho}^q$, полученном из условия абсолютного экстремума квантовой параметрической энтропии Тсаллиса при заданной средней энергии частиц. Показано, что известные в классической квантовой статистике свойство симметрии для релаксационной функции при обращении времени, причинность и соотношения взаимности Онзагера для обобщённой восприимчивости остаются справедливыми и для неэкстенсивных систем, т.е.

они не связаны с фактической формой исходной матрицы плотности.

Имея в виду большое космологическое значение гравитационной неустойчивости в проблеме образования экзопланет, в данной книге рассмотрена неустойчивость Джинса на основе нетрадиционной статистики Тсаллиса, в рамках которой предлагается моделировать эволюцию протопланетных электропроводных дисков с фрактальной структурой и с учетом излучения. В главе 11 выведены дисперсионные уравнения, на основе которых выполнен анализ осесимметричных колебаний протопланетных дисков с фрактальной структурой фазового пространства при учете чернотельного q-излучения. Получен модифицированный критерий джинсовской гравитационной неустойчивости как для покоящейся бездиссипативной сферически однородной среды, состоящей из идеального q-газа и чернотельного q-излучения, так и для намагниченной плазмы, подверженной воздействию радиационного давления. Для самогравитирующего протопланетного диска найдены критические значения длин волн и масс, которые явно зависят от индекса деформации энтропии Тсаллиса, нецелой размерности пространства скоростей и коэффициента, характеризующего долю излучения в полном давлении смеси. Полученные параметрические критерии неустойчивости Джинса позволяют более свободно моделировать эволюцию разнообразных аномальных протопланетных газо-пылевых дисков.

В главе 12 на основе неэкстенсивной статистической механики Каниадакиса получено обобщение интегральной теоремы устойчивости Чандрасекара сферически симметричного распределения материи и черного излучения в протозвездном облаке, находящемся в состоянии гравитационного равновесия. Здесь кратко изложены, без математических деталей и выводов, те новые результаты статистической теории Каниадакиса, которые использованы для получения модифицированного интегрального критерия устойчивости Чандрасекара. Последний раздел главы посвящен выводу в рамках статистики Каниадакиса интегрального условия устойчивости для сферически симметричного распределения вещества и излучения в протозвездной туманности. Развитый здесь подход предназначен для конструирования целого ряда моделей космологических и космогонических неэкстенсивных сред (звезд, протозвездных туманностей, экзопланетных аккреционных дисков и др.), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью, дальнодействующего силового взаимодействия, а также неэкстенсивного чернотельного излучения.

В главе 13, исходя из формализма Верлинда, исследованы обобщенные космологические сценарии ускоренного расширения (сжатия) неэкстенстивной Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, которые возможны в рамках энтропийной космологии, основанной на модифицированной энтропийной мере Шарма–Миттал с показателем деформации, учитывающим сложную фрактальную структуру поверхности космологического горизонта. Использование двухпараметрической энтропии Шарма–Миттал, которая является родоначальником целого семейства однопараметрических энтропий, в частности однопараметрических энтропий Реньи и Тсаллиса, позволяет изучать различные сценарии динамической эволюции неэкстенсивной Вселенной по единообразной схеме. Выполненное в рамках негауссовой статистической теории исследование использует несколько неэкстенсивных энтропий (таких как энтропии Реньи, Тсаллиса-Кирто, Шарма–Миттал и Барроу), ассоциированные с поверхностью горизонта Вселенной из-за хранящейся там голографически информации. Эффект негауссовой статистики в космологическом контексте заключается в видоизменении управляющей энтропийной силы в уравнениях гравитационного поля Эйнштейна. В результате получен целый набор новых модифицированных уравнений Фридмана, в которых вместо космологической постоянной фигурируют управляющие силы, наличие которых приводит к различным сценариям эволюции Вселенной в зависимости от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания горизонта событий

В Главе 14 на основе обобщенного кинетического релятивистского уравнения Больцмана сконструирована неэкстенсивная релятивистская гидродинамика для диссипативной жидкости. Релятивистская термодинамика представлена здесь как теория поля. Линейные определяющие соотношения и коэффициенты переноса, такие как сдвиговая вязкость, объемная вязкость и теплопроводность, получены на основе линеаризованного интеграла столкновений, записанного в форме Бхатнагара-Гросса-Крука и оцениваются с использованием аппроксимации времени релаксации. Эти соотношения связывают диссипативные потоки с термодинамическими силами линейно с положительными коэффициентами переноса, зависящими от параметра деформации q через использованные в работе специальные термодинамические интегралы. На базе сконструированной в этой главе q-модифицированной релятивистской гидродинамики возможна разработка различных адекватных моделей в физике элементарных частиц, описывающих широкий круг явлений в космосе и в процессах производства высокоэнергетических частиц в эволюционирующей жидкости на современных ускорителях, особенно при ядро-ядерных столкновениях.

Наконец, в Главе 15 проанализирован важный аспект, связанный с выводом нелинейных степенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, коррелирующих с неэкстенсивной двухпараметрической энтропией Шарма–Миттал для неэкстенсивных систем. При этом получаемые диффузионные уравнения записаны таким образом, что их стационарные решения являются вероятностными распределениями, максимизирующими энтропию ШМ для неэкстенсивных систем. С целью получения точных решений нелинейных нестационарных одномерных уравнений ФПК, связанных с энтропиями Тсаллиса, Реньи и Шарма−Миттал, использован анзац-подход.

Таким образом, диапазон применения различных неэкстенсивных статистик и термодинамик в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие. При написании данной книги автор существенно опирался на известные монографии (Prigogine I., Defay, R. Chemical Thermodynamics. London-New York-Toronto. 1954; Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. М.: Мир, 1966; Зубарев Д.П**.** Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971; Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: Наука, 1990; Зарипов Р.Г. Информация различия и переходы беспорядок-порядок. Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 1999; Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн, 2002; Хакен Г. Информация и самоорганизация: макроскопический подход к сложным системам. М.: УРСС: ЛЕНАНД. 2014)..

Автор сознательно расширил список примеров неэкстенсивных систем, распространив его на строение и эволюцию Вселенной, на наблюдаемые особенности многочисленных звездно-галактических структур и формирование протозвездных аккреционных дисков, прекрасно осознавая при этом, что само понимание процесса эволюции в столь многогранных явлениях может быть субъективным и не разделяться другими исследователями природных и космологических сред. Таким образом, обсуждение комплекса вопросов о природе окружающего мира, предпринятое автором в этой книге, выходит далеко за рамки более узких проблем моделирования аномальных физических явлений, которым посвящена основная часть монографии. Ее цель - отразить общность концепции формирования высокоорганизованных неравновесных структур в природных и космологических средах и привлечь внимание исследователей к этой тематике.

Автор хорошо осознает, что далеко не все вопросы в той обширной проблематике, которой посвящена книга, ему удалось осветить с одинаковой степенью полноты. Это, в первую очередь, связано с тем, что, несмотря на определенные успехи, достигнутые за последние годы в изучении столь сложной области, как неэкстенсивные статистическая механика и термодинамика, многое все еще остается неясным, а возникающие математические трудности часто представляются непреодолимыми. В связи с этим, необходимы разработки новых оригинальных подходов, позволяющие эффективно моделировать подобные сложные системы.

Доктор физ.-мат. наук, проф. А.В. Колесниченко

Октябрь 2023 г.

ГЛАВА 1

Элементы формализма неаддитивной статистики Курадо-Тсаллиса. Информация различия Ратье-Каннаппана

В этой главе дается логическая схема изложения принципов неаддитивной (неэкстенсивной) статистики и термодинамики, основанная на параметрическом определении энтропии Тсаллиса. Принцип максимума энтропии используется для нахождения вероятностных равновесных q-распределений, которые при больших отклонениях случайной переменной от среднего значения обладают степенной асимптотикой, соответствующей эмпирически установленным закономерностям для широкого класса объектов, к которым неприменима классическая статистичесеая механика. Проанализированы следствия ненормированного осреднения Курадо-Тсаллиса микроскопических физических величин в статистике Тсаллиса и его формальное и практическое значение для моделирования динамических q-систем, которое в последнее время в огромном количестве представлено в литературе. На основе информации различия Ратье−Каннаппана рассмотрены спонтанные переходы между состояниями системы и обобщенная Н-теорема.

Введение

Статистическая энтропия Больцмана−Гиббса и связанная с ней классическая статистическая механика являются чрезвычайно полезным инструментарием при изучении широкого круга простых систем. Эти физические системы, для которых, безусловно, целесообразно использовать классическую статистику и разработанные на ее основе теории, можно условно охарактеризовать малым диапазоном пространственно-временных корреляций, марковостью случайных процессов (короткой памятью), аддитивностью шума, наличием интенсивного хаоса, эргодичностью динамических процессов, эвклидовостью геометрии фазового пространства, локальностью взаимодействия между элементами системы, линейностью (однородностью) уравнений Фоккера−Планка, гауссовостью вероятностных распределений. Такие системы хорошо описываются аддитивной энтропией Больцмана−Гиббса и, как правило, следуют экспоненциальному закону распределений.

Существует, однако, целый круг природных, искусственных и социальных систем, которые, в отличие от названных выше, характеризуются большой дальностью пространственно-временных корреляций, немарковостью процессов (длинной памятью), мультипликативностью шума, наличием слабого хаоса (исчезающий максимальный показатель Ляпунова), неэргодичностью динамических процессов, иерархичностью (обычно мультифрактальностью) геометрии фазового пространства, отдаленностью и глобальностью взаимодействий между элементаит системы, нелинейностью (неоднородностью) уравнений Фоккера−Планка, наличием асимптотически степенных статистических распределений. Довольно широкий класс этих сложных систем (хотя далеко не всех) адекватно описывается неаддитивной статистикой, основанной на параметрической *энтропии Тсаллиса*.

История вопроса. Исследования в области механики неэкстенсивных (неаддитивных) систем приобрели в последнее время значительный интерес в связи с проявлениями неаддитивных свойств (для независимых подсистем) в аномальных физических явлениях. Это объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений (см. Библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется). Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой им была введена параметрическая формула статистической q-энтропии

$$S_q^T(p) = \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int p^q d\mathbf{z}\right), \quad \int d\mathbf{z}\, p = 1, \ \ 0 \le p < \infty.$$

С использованием аксиом теории вероятностей (Хинчин,1953, 1956), в работе (Abe, 2000) было дано аксиоматическое обоснование и единственность энтропии Тсаллиса для дискретных систем. Хотя эта энтропия получила название энтропия Тсаллиса, в историческом плане появление выражения для q-энтропии можно проследить по более ранним работам (Harvda, Charvat, 1967; *Vaida*, 1968; Daroczy, 1970).

Выражение Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивной статистики, проводимых в настоящее время, являются нелогарифмические q-энтропии и информации различия Ратье-Каннаппана, зависящие от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающие неаддитивностью для независимых сложных систем. Для фрактальных систем это число связано с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных систем число q является мерой их неаддитивности.

Подробный анализ возможных типов неэкстенсивных статистик, основанных на различных обобщениях энтропии Тсаллиса, приводится, например, в работах (Landsberg, Tranah, 1980; Taneja, 1995). Предложенная ими классификация дает три энтропии:

- классическая энтропия Больцмана−Гиббса $S^{BG} = -k_B \int d\mathbf{z} p \ln p$,
- q-энтропия Тсаллиса $S_q^T(p) = \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int p^q d\mathbf{z}\right)$,
- энтропия Реньи $S_q^R = \frac{k_B}{1-q}\ln\left(d\mathbf{z}\int p^q\right)$ (Renyi, 1970),

которая играет центральную роль в определении фрактальной размерности аномальной среды (см. Mandelbrot, 1977, 1982). Важно отметить, что диапазон применения разнообразных неэкстенсивных статистик в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология, теория плазмы, квантовая механика и статистика, нелинейная динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие.

В настоящей главе представлена логическая схема статистической модели неаддитивных систем, основанная на понятии q-энтропии Тсаллиса. Как известно, большинство *простых систем*, находящихся в статистическом равновесии, следуют статистике Больцмана–Гиббса, для которой ключевыми являются следующие три положения:

(i) определение функционала энтропии $S^{BG} = -k_B \int d\mathbf{z} p \ln p$ (при условии $\int d\mathbf{z} p = 1$ и $E = \int d\mathbf{z} pH = const$ для канонического ансамбля);

(ii) экспоненциальная форма канонического распределения Гиббса

$$p = \mathrm{e}^{\{(F-H)/k_B T\}} = Z^{-1} \mathrm{e}^{\{-H/k_\mathrm{B} T\}}, \text{ где } Z = \int d\mathbf{z} \mathrm{e}^{\{-H/\mathrm{k_B} T\}};$$

(iii) связь с термодинамическими потенциалами, например,

$$F \equiv -k_B T \ln Z, \quad E = -k_B \partial \ln Z / \partial (T^{-1}).$$

Вместе с тем, многие сложные *аномальные системы* обнаруживают не экспоненциальные, а асимптотически *степенные статистические распределения (распределения Парето)*. Подобные степенные распределения типичны для систем, сложность которых обусловлена разделением полного статистического ансамбля на иерархическую последовательность подансамблей, соподчиненность которых и приводит к деформации статистических характеристик системы. При этом нарушается важнейшее термодинамическое свойство – аддитивность энтропии, которая для равновесных состояний в классическом случае является следствием локального взаимодействия между элементами системы. Это нарушение обусловлено еще и с тем, что составные части в неаддитивных системах взаимодействуют глобально, чему способствует снижение симметрии системы, связанное с формированием коллективных мод интенсивных переменных, т.е. с их «подчиненностью» некоторым коллективным «эффективным» степеням свободы. Из сказанного следует, что статистические распределения переменных, характеризующих системы достаточной сложности, не могут максимизировать классическую энтропию Больцмана–Гиббса. Кроме этого, в отличие от простых *эргодических* систем (т.е. систем, элементы которых с равной вероятностью посещают все разрешенные микроскопические состояния, соотнесенные с соответствующим макроскопическим стационарным состоянием), сложные системы в большинстве случаев не только неэргодичны, но и далеки от этого состояния в некоторой конечной области фазового пространства.

Таким образом, возникает вопрос: какую энтропийную форму можно использовать вместо энтропии Больцмана−Гиббса для систем, которые посещают фазовое пространство более сложным образом, чем предписано эргодичностью? В связи с этим в работах (Tsallis,1988, 2009; Tsallis и др.,1998) было предложено сохраняющее основную идею Больцмана обобщение (классической статистической механики) для систем достаточной сложности, характеризующее состояние сложных систем некоторой другой «нелогарифмической» энтропией, удовлетворяющей принципу максимума. Суть предложенного обобщения касается, прежде всего, переосмысления первого из указанных выше положений статистики Больцмана-Гиббса и связанно с введением новой формы энтропийного функционала, включающей так называемый показатель неаддитивности q. Именно, этот параметр характеризует целый класс различных статистик (термодинамик), соответствующих тем или иным статистически аномальным системам. Для фрактальных систем параметр q связан с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных − является мерой неаддитивности в свойстве псевдоаддитивности энтропии Тсаллиса (см. (1.17). Согласно гипотезе Тсаллиса именно параметр деформации q связан с некоторыми дополнительными степенями свободы, присущими сложным системам, и должен определяться *a posteriori*.

Теория неэкстенсивных систем, основанная на энтропии Тсаллиса, в настоящее время интенсивно развивается в основном зарубежными специалистами. Возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. В научной литературе доступны последовательные коллекции миниобзоров: (Tsallis, 1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; Kaniadakis и др., 2002, 2006; Sugiyama, 2004; Kaniadakis, Lissia, 2004**;** Gell-Mann, Tsallis, 2004; Swinney, Tsallis, 2004; Herrmann и др.,2004; Boon, Tsallis, 2005).

1.1. Основные определения, статистические характеристики и свойства энтропии Тсаллиса

В деформированной статистической механике для непрерывных величин при вероятностной нормировке

$$\int d\mathbf{z}\, p(\mathbf{r}) = 1, \quad 0 \le p < \infty \tag{1.1}$$

для *фазовой функции распределения* $p(\mathbf{r})$ (в общем случае эта функция может зависеть от времени t и от некоторого внешнего параметра a) энтропия Тсаллиса задается следующим функционалом

$$S_q(p) = \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int d\mathbf{z}\, p^q\right). \tag{1.2}$$

Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем фазовым пространством и безразмерный элемент 6*N*-мерного пространства записывается в современной форме $d\mathbf{z}_N = (2\pi\hbar)^{-r}\prod_i^N (d\mathbf{q}_i d\mathbf{p}_i)$, где $\hbar$– постоянная Планка, r – число степеней свободы. Энтропия Тсаллиса (1.2) может быть представлена также в следующих эквивалентных формах:

$$S_q(p) = -k_B \int d\mathbf{z}\, p^q \ln_q p = k_B \int d\mathbf{z}\, p \ln_q(p^{-1}) =$$

$$= k_B \langle \ln_q(p^{-1}) \rangle = -k_B \langle \ln_{2-q} p \rangle = -k_B \langle \ln_q p \rangle_q, \tag{1.3}$$

при написании которых использовано осреднение

$$\langle A\rangle_q = \int d\mathbf{z}\, p^q A(\mathbf{r}), \tag{1.4}$$

с ненормированным распределением p^q для любой микроскопической физической величины $A(\mathbf{r})$, свойственное *статистике Курадо-Тсаллиса* (Curado, Tsallis, 1991), а также, так называемый, «деформированный логарифм»

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \quad (x\in\mathcal{R}^+;\ q\in\mathcal{R}), \tag{1.5}$$

обладающий, как легко убедиться, следующими свойствами :

$$\ln_q\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln_{2-q} x,\ (x>0;\forall q);\quad \ln_q\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{1-q}}\ln_q x,\ (\forall x;\forall q). \tag{1.6}$$

Энтропийный индекс q (параметр деформации) в определении энтропии Тсаллиса (1.2) представляет собой вещественное число, принадлежащее области $q\in\mathcal{R}$. Такая деформация (в сравнении с классической статистикой) логарифмической функции в выражении для энтропии позволяет учитывать важную особенность поведения аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими взаимодействиями, когда вероятность реализации p больших значений состояний убывает (при $q>1$), не экспоненциально быстро, а степенным образом. Благодаря этому статистика Тсаллиса описывает события практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана−Гиббса.

Легко показать, что в пределе слабой связи энтропия Тсаллиса (1.2) переходит в каноническую формулу (1.7). Действительно, в пределе $q\to 1$ имеем: $p^{q-1} = \mathrm{e}^{\{(q-1)\ln p\}} \to\ 1+(q-1)\ln p$ и энтропия S_q сводится к

$$S(p) = \lim_{q\to 1} S_q(p) = -k_B\int d\mathbf{z}(\ln p)p = S_{BG}.$$

Приведем некоторые определения и вытекающие из них основные свойства неаддитивной статистики.

Определение 1.1. Физический статистический ансамбль неэкстенсивных вероятностных систем реализуется двумя множествами:

а) множеством всех его состояний, описываемых фазовой плотностью распределения вероятностей $p(\mathbf{r},a)$[1)];

б) множеством микроскопических физических величин $A_j = A_j(\mathbf{r})$

.

Определение 1.2. Взвешенное ненормированное среднее любой физической микроскопической величины $A(\mathbf{r})$ в состоянии с распределением $p(\mathbf{r})$ определяется (в *статистике Курадо−Тсаллиса*) соотношением (см. Havrda, Charvat,1967; Daroczy,1970; Curado, Tsallis,1991).

$$\langle A\rangle_q = \mathbf{E}_q\left[A(\mathbf{r})\right] \equiv \int d\mathbf{z} A(\mathbf{r}) p^q\,, \quad 0 < \int p\, d\mathbf{z} < \infty, \tag{1.7}$$

Определение 1.3. Флуктуация микроскопической величины $A(\mathbf{r})$ определяется выражением (Зарипов, 2004)

$$\Delta_q\left[A\right] = A(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_q\left[A(\mathbf{r})\right] p^{1-q}, \qquad \int d\mathbf{z}\, \Delta_q\left[A\right] p^q = 0\,. \tag{1.8}$$

Определение 1.4. Начальные и центральные моменты k-го порядка стохастической величины $A(\mathbf{r})$ равны

$$\alpha_{k,q} = \mathbf{E}_q\left[A^k\right] \equiv \int d\mathbf{z} A^k p^q\,, \tag{1.9}$$

$$\mu_{k,q} = \mathbf{E}_q\left[\left(\Delta_q[A]\right)^k\right] \equiv \int d\mathbf{z} \left(\Delta_q[A]\right)^k p^q\,. \tag{1.10}$$

При $k = 2$ получим q-дисперсию

[1)] Здесь и далее будем считать, что распределение удовлетворяет условию вероятностной нормировки (1.1).

$$\mu_{2,q} = \mathbf{D}_q\left[A(\mathbf{r})\right] \equiv \int d\mathbf{z}\left\{A(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_q\left[A(\mathbf{r})\right]p^{1-q}\right\}^2 p^q =$$

$$= \int d\mathbf{z}[A(\mathbf{r})]^2 p^q - 2\mathbf{E}_q\left[A(\mathbf{r})\right]\mathbf{E}\left[A(\mathbf{r})\right] + \left\{\mathbf{E}_q\left[A(\mathbf{r})\right]\right\}^2 \int d\mathbf{z} p^{2-q}. \quad (1.11)$$

Отметим, что в дискретном случае, при условии вероятностной нормировки $\sum_{i=1}^{W} p_i = 1$, нужно в приведенных формулах произвести замену $\int d\mathbf{z} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{W}$.

В связи с Опред. 1.1. осредненного значения микроскопической величины $A(\mathbf{r})$ уже сейчас отметим следующее: в неаддитивной статистике Тсаллиса возможно осреднение микроскопических физических величин по трем распределениям: p, p^q, $p^q / \int p^q d\mathbf{z}$ (см. Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf. br/biblio.htm). Первое осреднение соответствует статистике Тсаллиса (Tsallis,1988), второе (ненормированное) – статистике Курадо−Тсаллиса (Curado, Tsallis, 1991), наконец, третье – статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино (Tsallis и др., 1998). Эти способы осреднения, каждый из которых имеет, вообще говоря, свои преимущества и недостатки, определяют совершенно разные q-термодинамики, соответствующие тем или иным термодинамически аномальным системам. По этой причине вопрос об использовании того или иного способа осреднения в физических приложениях носит принципиальный характер, поскольку различия в определении средних значениях могут оказаться существенными при обработке экспериментальных данных. В связи с имеющимися значительными расхождениями в разных подходах, возникает вопрос об адекватности использования разнообразных q-величин, связанных с различными способами осреднения. Получаемые при этом существенные несоответствия могут быть, по мысли ряда авторов, благополучно устранены путем использования статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино, когда осреднение $\mathbf{E}_q\left[A\right] \equiv \int d\mathbf{z} A \mathscr{P}_q(\mathbf{r})$, производится по так называемому нормированному *эскортному распределению* вероятности

$\mathcal{P}_q(\mathbf{r}) \equiv p^q / \int d\mathbf{z} p^q$ (см, например, Tsallis и др., 1998; Tsallis, 1999; Martinez и др., 2000).

Однако существует и иная точка зрения (которой следует автор данной работы), согласно которой единственно правильным осреднением является осреднение Курадо−Тсаллиса $\mathbf{E}_q[A(\mathbf{r})] \equiv \int d\mathbf{z} A(\mathbf{r}) p^q$ с ненормированным распределением p^q (см. Daroczy, 1970; Зарипов, 2002, 2006). Она обуславливается, в частности, тем, что только это распределение не приводит к переопределению понятия температуры q-системы, которая в этой статистике является интенсивным параметром, а не функционалом, как при иных определениях взвешенного среднего (другие соображения в пользу осреднения Курадо−Тсаллиса приведены в разделе 1.4). Благодаря этому в теории сложных q-систем не нарушается структура Лежандра термодинамической схемы.

Рассмотрим теперь некоторые свойства, вытекающие из Опред. 1.2.

Ненормированность распределения Курадо-Тсаллиса. Для постоянной величины C имеем равенство

$$\mathbf{E}_q[C] = C \int p^q d\mathbf{z}. \tag{1.12}$$

Отсюда, при $C = 1$, следует что $\mathbf{E}_q[1] \equiv \langle 1 \rangle_q \equiv \int p^q d\mathbf{z} \neq 1$, что означает деформацию условия нормировки (1.1) с показателем q.

Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный и выпуклый функционал с максимумом (минимумом) при $q > 0$ $(q < 0)$.

$$S_q(p) > 0, \tag{1.13}$$

$$S_q(a_1 p_1 + a_2 p_2) \leq a_1 S_q(p_1) + a_2 S_q(p_2), \tag{1.14}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0, a_2 > 0$. Неравенство (1.8) есть неравенство Иенсена в теории выпуклых функций (Хартли и др., 1948).

Закон сложения микроскопических физических величин. Пусть закон сложения двух микроскопических величин для невзаимодействующих систем выражается в виде суммы $A_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=A_1(\mathbf{r}_1)+A_2(\mathbf{r}_2)$. Тогда, согласно условию мультипликативности $p_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=p_1(\mathbf{r}_1)p_2(\mathbf{r}_2)$, получим для средних величин равенство:

$$\mathbf{E}_q[A_{12}]=\mathbf{E}_q[A_1]\int d\mathbf{z}\, p_2^q+\mathbf{E}_q[A_2]\int d\mathbf{z}\, p_1^q\,. \qquad (1.15)$$

Если предположить, что физические величины являются неаддитивными согласно закону $A_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=A_1(\mathbf{r}_1)+A_2(\mathbf{r}_2)-\varepsilon A_1(\mathbf{r}_1)A_2(\mathbf{r}_2)$ (здесь ε – постоянный множитель), то после осреднения имеем другое равенство

$$\mathbf{E}_q[A_{12}]=\mathbf{E}_q[A_1]\int d\mathbf{z}\, p_2^q+\mathbf{E}_q[A_2]\int d\mathbf{z}\, p_1^q-\varepsilon\mathbf{E}_q[A_1]\mathbf{E}_q[A_2] \qquad (1.15^*)$$

Таким образом, в статистике Курадо−Тсаллиса имеет место неаддитивность средних величин даже при $\varepsilon=0$ в законе сложения физических величин (1.15*).

Неаддитивность q-энтропии для независимых систем. Пусть состояние физической системы описывается совместным мультипликативным распределением $p_{12}=p_1p_2$ с $p_{12}=p_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$, $p_1=p_1(\mathbf{r}_1)$, $p_2=p_2(\mathbf{r}_2)$, которое может зависеть от времени, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ относятся к двум независимым q-системам. Тогда общая энтропия дается выражением

$$S_q(p_{12})=\frac{k_B}{q-1}\left(1-\iint p_{12}^q d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2\right), \qquad (1.16)$$

где условие нормировки

$$\iint p_{12} d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 = \int p_1 d\mathbf{z}_1 = \int p_2 d\mathbf{z}_2 = 1\,.$$

После подстановки распределения $p_{12} = p_1 p_2$ в (1.16), *получим свойство неаддитивности в статистике Тсаллиса для энтропии* двух независимых систем

$$S_q(p_{12}) = S_q(p_1) + S_q(p_2) + k_B^{-1}(1-q) S_q(p_1) S_q(p_2)\,, \tag{1.17}$$

где

$$S_q(p_1) = \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int p_1^q d\mathbf{z}_1\right), \quad S_q(p_2) = \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int p_2^q d\mathbf{z}_2\right).$$

Равенства для q-энтропии зависимых систем. В общем случае зависимых систем имеем соотношения для распределений

$$p_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = p_1(\mathbf{r}_1) p_{2|1}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = p_2(\mathbf{r}_2) p_{1|2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{1.18}$$

$$p_1(\mathbf{r}_1) = \int d\mathbf{r}_2\, p_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad p_2(\mathbf{r}_2) = \int d\mathbf{r}_1\, p_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{1.19}$$

Согласно основным аксиомам Хаврда, Чарват и Дароши (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970), обосновывавшим единственность энтропии Тсаллиса, имеет место следующее равенство для энтропий зависимых систем

$$S_q(p_{12}) = S_q(p_1) + S_q(p_2|p_1)\,. \tag{1.20}$$

Условная энтропия с распределением $p_{2|1}$ определяется выражением

$$S_q\left(p_{2|1}\right) = \frac{k_B}{q-1}\left[1 - \int d\mathbf{z}_2\, p_{2|1}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\right], \tag{1.21}$$

а ее среднее значение в формуле (1.20) равно

$$S_q(p_2|p_1) = \int d\mathbf{z}_1\, S_q\left(p_{2|1}\right) p_1^q\,. \tag{1.22}$$

Если $p_{2|1} = p_2$, то из (1.20) следует свойство псевдоаддитивности (1.17).

При реализации состояния с распределением p_2 получим энтропии

$$S_q(p_{12}) = S_q(p_2) + S_q(p_1|p_2), \tag{1.23}$$

где

$$S_q(p_1|p_2) = \int d\mathbf{z}_2\, S_q(p_{1|2}) p_2^q\,, \quad S_q(p_{1|2}) = \frac{k_B}{q-1}\left[1 - \int d\mathbf{z}_1\, p_{1|2}^q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right]$$

.

Приравнивая выражения (1.20) и (1.23) имеем равенство

$$S_q(p_1) + S_q(p_2|p_1) = S_q(p_2) + S_q(p_1|p_2), \tag{1.24}$$

которое по форме совпадает с соответствующим равенством классической статистики Больцмана–Гиббса.

Микроскопическая энтропия Тсаллиса. Флуктуации. Введем микроскопическую энтропию (Зарипов, 2001, 2004)

$$s_q(p) \equiv \frac{k_B}{1-q}\left(1 - p^{1-q}\right). \tag{1.25}$$

Тогда для ее осредненного значения S_q и флуктуации $\Delta_q[s_q]$ имеем

$$S_q(p) = \mathbf{E}_q\left[s_q(p)\right] \equiv \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int p^q d\mathbf{z}\right). \tag{1.26}$$

$$\Delta_q\left[s_q(p)\right] \equiv s_q(p) - S_q(p) p^{1-q}. \tag{1.27}$$

Используя (1.26) и (1.27), можно получить выражение для функции распределения в виде

$$p(\mathbf{r})=\frac{\left\{1-\varepsilon\Delta_q[s_q]\right\}^{1/(1-q)}}{\left[1+\varepsilon S_q)\right]^{1/(1-q)}}, \qquad (1.28)$$

записанном через макроскопическую энтропию системы и флуктуацию микроскопической энтропии (здесь введено обозначение $\varepsilon\equiv k_B^{-1}(1-q)$). При учете условия нормировки распределения $p(\mathbf{r})$, из (1.28) вытекает следующее соотношение для среднего значения q-энтропии S_q

$$\left[1+\varepsilon S_q\right]^{1/(1-q)}=\int d\mathbf{z}\left\{1-\varepsilon\Delta_q[s_q]\right\}^{1/(1-q)},$$

или

$$S_q=k_B\ln_q\int d\mathbf{z}\,\mathrm{e}_q^{\{-k_B^{-1}\Delta_q[s_q]\}}, \qquad (1.29)$$

позволяющие находить q-энтропию Тсаллиса по известному значению флуктуации $\Delta[s_q]$ микроскопической энтропии. При написании (1.29) использованы формулы (см. ниже):

$$\mathrm{e}_q^x\equiv[1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{и} \quad \mathrm{e}_q^{\ln_q x}=\ln_q\mathrm{e}_q^x=x$$

При $q=1$ из (1.28) и (1.29) следуют известные соотношения (1.15).

Соотношение для q-флуктуации произвольной величины. Для флуктуации микроскопической величины $A(\mathbf{r})$

$$\Delta_q[A]=A(\mathbf{r})-\mathbf{E}_q[A(\mathbf{r})]p^{1-q} \qquad (1.30)$$

справедлива формула:

$$\varepsilon\Delta_q[A]=1-\left\{\frac{1+\varepsilon\mathbf{E}_q[A]}{1+\varepsilon S_q(p)}\right\}\times\left\{1-\varepsilon\Delta_q\left[s_q(p)\right]\right\}-\varepsilon\left[s_q(p)-A\right], \qquad (1.31)$$

которая, при $A\equiv s_q(p)$, сводится к формуле (1.26).

Неравенства. Энтропия Тсаллиса удовлетворяет следующим неравенствам

$$S_q(p_{12}) \le S_q(p_1) + S_q(p_2), \quad S_q(p_2) \ge S_q(p_1|p_2);$$

$$S_q(p_1) \ge S_q(p_2|p_1), \quad (q \ge 1); \quad S_q(p) \le \frac{k_B}{q-1}\left[1 - \left(\int d\mathbf{z}\right)^{1-q}\right], \quad (q > 0)$$

;

$$S_q(p) \ge \frac{k_B}{q-1}\left[1 - \left(\int d\mathbf{z}\right)^{1-q}\right], \quad (q < 0); \quad S_q(p_1, p_2|p_3) \le S(p_1|p_2), \quad (q > 0)$$

;

$$S_q(p_1|p_2, p_3) \le S(p_1|p_3), \quad S_q(p_1|p_3) \le S_q(p_1|p_2) + S_q(p_2|p_1), \quad (q \ge 0);$$

$$\frac{S_q(p_1|p_3)}{S_q(p_1,p_3)} \le \frac{S_q(p_1|p_2)}{S_q(p_1,p_2)} + \frac{S_q(p_2|p_3)}{S_q(p_2,p_3)}, \quad (q \ge 1).$$

и другим, которые рассматриваются в обзорах (Taneja,1989,1995,2005).

1.2. Деформированное каноническое распределение Гиббса и термодинамические соотношения для неаддитивных систем

Равновесные состояния сложных q-систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Каноническое распределение Гиббса в статистике Курадо−Тсаллиса может быть определено, как и в классическом случае, из экстремума (максимума − при $q>1$ и минимума − при $q<1$) q-энтропии

$$S_q(p) = k_B \frac{1 - \int d\mathbf{z}\, p^q}{q-1} = -k_B \int d\mathbf{z}\, p^q \ln_q p \qquad (1.32)$$

при выполнении следующих дополнительных условий: сохранения нормировки (1.1) распределения вероятности $p(\mathbf{r})$ и при заданном значении средней энергии

$$E_q \equiv \langle H \rangle_q = \int d\mathbf{z} p^q H(\mathbf{r}) = const, \qquad (1.33)$$

где функция Гамильтона $H = H(\mathbf{r})$ определяется математической моделью изучаемых физических процессов в системе.

Экстремум энтропии. Следуя методу множителей Лагранжа, найдем безусловный экстремум лагранжиана:

$$\mathcal{L}(p) = -k_B \int d\mathbf{z}\, p^q \ln_q p - \beta \int d\mathbf{z}\, p^q H - k_B \lambda \int d\mathbf{z} p, \qquad (1.34)$$

где β и λ есть множители Лагранжа. В соответствии с теоремой Лагранжа вероятное распределение p, «экстремизирующие» энтропию Тсаллиса $S_q(p)$ при указанных ограничениях, определяются из условия

$$\delta\mathcal{L}(p) = -\frac{k_B q}{q-1} \int d\mathbf{z} p^{q-1} \delta p - q\beta \int d\mathbf{z} p^{q-1} H \delta p - k_B \lambda \int d\mathbf{z} \delta p = 0. \qquad (1.35)$$

Отсюда следует *деформированное каноническое распределение Гиббса* с параметрами q, β

$$p(\mathbf{r}, \beta) = Z_q^{-1}(\beta) \left[1 - k_B^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r}) \right]^{\frac{1}{1-q}}, \qquad (1.36)$$

где

$$Z_q(\beta) \equiv \int d\mathbf{z} \left[1 - k_B^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r}) \right]^{\frac{1}{1-q}} \qquad (1.37)$$

− обобщенный статистический интеграл, определяемый из условия нормировки (1.1); множитель Лагранжа β (обратная эффективная температура, $\beta = 1/T$) определяется из уравнения, получаемого подстановкой (1.36) в (1.33).

При условии $1-k_B^{-1}(1-q)\beta H>0$ и $q=1$ из (1.36) и (1.37) следует каноническое распределение Гиббса

$$p(\mathbf{r},T)=Z^{-1}(T)\mathrm{e}^{\left\{-\frac{H(\mathbf{r})}{k_B T}\right\}},\quad Z(T)\equiv\int d\mathbf{z}\,\mathrm{e}^{\left\{-\frac{H(\mathbf{r})}{k_B T}\right\}} \tag{1.38}$$

для аддитивных систем, находящихся в термостате с температурой $T=1/\beta$.

Экспонента Тсаллиса. Распределение (1.36) удобно представить в классической форме Больцмана

$$p(\mathbf{r},\beta)=Z_q^{-1}\left[1-k_B^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})\right]^{\frac{1}{1-q}}=Z_q^{-1}\,\mathrm{e}_q^{\left\{-\frac{\beta H(\mathbf{r})}{k_B}\right\}}, \tag{1.39}$$

выражая стоящую в (1.39) степенную функцию $[..]^{1/1-q}$ через деформированную экспоненту Тсаллиса (q-экспоненциальную функцию), которая определяется следующим образом

$$\mathrm{e}_q^x\equiv[1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}=\begin{cases}0, & если\; q<1\; и\; x<-1/1-q;\\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}_{,} & если\; q<1\; и\; x\geq-1/1-q;\\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}_{,} & если\; q>1\; и\; x<-1/1-q,\end{cases} \tag{1.40}$$

где выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+\equiv\max(y,0)$. Легко проверить, что в пределе $q\to1$ эта функция принимает стандартный вид:

$$\mathrm{e}_1^x\equiv\lim_{q\to1+0}\mathrm{e}_q^x=\lim_{q\to1-0}\mathrm{e}_q^x=\mathrm{e}^x\quad(\forall x), \tag{1.41}$$

Рассмотрим более детально приведенное выше определение функции e_q^x. Для $q<1$, экспонента Тсаллиса исчезает для $x\leq-1/(1-q)$, непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до ∞, когда x увеличивается от $-1/(1-q)$ до ∞. Для $q>1$, q-экспоненциальная функция непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до , когда x увеличивается от до , оставаясь расходящейся для.

Используя определения функций $\ln_q x$ и e_q^x, можно убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$e_q^{\ln_q x} = \ln_q e_q^x = x\,, \quad e_{2-q}^{-x} = 1/e_q^x, \quad e_{1+q}^x\, e_{1-q}^{-x} = 1, \quad (\forall x; \forall q), \tag{1.42}$$

$$(e_q^x)^a = e_{1-(1-q)/a}^{ax}, \quad (e_q^x)^q\, e_{(1/q)}^{-qx} = 1, \quad (\forall x; \forall q), \tag{1.43}$$

и соответственно для деформированного логарифма

$$-\ln_{2-q}(x^{-1}) = \ln_q x \quad (x > 0), \quad \ln_{1+q} x + \ln_{1-q}(x^{-1}) = 0 \quad (\forall x; \forall q), \tag{1.44}$$

$$\ln_q(x/y) = y^{q-1}\left(\ln_q x - \ln_q y\right) \quad (\forall (x,y); \forall q), \tag{1.45}$$

$$\ln_q(1/x) = -x^{q-1} \ln_q x \quad (\forall x; \forall q), \tag{1.46}$$

так же как

$$d e_q^x / dx = (e_q^x)^q \quad (\forall q), \quad d \ln_q x / dx = 1/x^q \quad (x > 0; \forall q). \tag{1.47}$$

Обобщённые термодинамические соотношения. Подставляя распределение (1.36) в (1.32), получим экстремальное значение q-энтропии Тсаллиса

$$S_q = \frac{k_B}{q-1}\left[1 - \int d\mathbf{z} \frac{Z_q^{1-q} p}{1 - k_B^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})}\right] =$$

$$= \beta\left[-\frac{k_B\left(1 - Z_q^{1-q}\right)}{\beta(1-q)} + \int d\mathbf{z} \frac{Z_q^{1-q} p H(\mathbf{r})}{1 - k_B^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})}\right] =$$

$$=\beta\left[\int d\mathbf{z}H(\mathbf{r})p^{q}+\frac{k_B\left(1-Z_q^{1-q}\right)}{\beta(q-1)}\right]=\beta\left[E_q+\frac{k_B\left(Z_q^{1-q}-1\right)}{\beta\,(1-q)}\right]=\beta(E_q-F_q)\,, \tag{1.48}$$

где

$$F_q(\beta)=-\left(\frac{k_B}{\beta}\right)\frac{Z_q^{1-q}-1}{1-q}\equiv-\left(\frac{k_B}{\beta}\right)\ln_q Z_q \tag{1.49}$$

– так называемая *деформированная свободная энергия Гельмгольца*, которая, как легко проверить, при $q=1$ совпадает со свободной энергией аддитивной системы $F=-k_B T\ln Z$. Заметим, что с учётом функции F_q равновесное распределение (1.36) может быть записано в эквивалентном виде

$$p(\mathbf{r},\beta)=\left\{\left[1-k_B^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})\right]/\left[1-k_B^{-1}(1-q)\beta F_q\right]\right\}^{1/(1-q)}=$$

$$=\mathrm{e}_q^{\{-\beta H(\mathbf{r})/k_B\}}/\,\mathrm{e}_q^{-\{\beta F_q/k_B\}}=\mathrm{e}_q^{\{-\beta H/k_B\}0\,_q\{-\beta F_q/k_B\}}\,, \tag{1.50}$$

где $\quad x0\,_q\,y\equiv\dfrac{x-y}{1+(1-q)\,y}\,,\quad (\,x0\,_1 y\equiv x-y\,,\quad x0\,_q 0\equiv x\,)\,.$

Из (1.48), с учётом (1.49), вытекают дифференциальные соотношения

$$\beta=\frac{\partial S_q}{\partial E_q}\,,\quad F_q=E_q-\frac{S_q}{\beta}=-\frac{k_B}{\beta}\ln_q Z_q,\quad E_q=-k_B\frac{\partial\ln_q Z_q}{\partial\beta}=\frac{\partial\beta F_q}{\partial\beta}\,, \tag{1.51}$$

$$C_q=-\beta\frac{\partial S_q}{\partial\beta}=-\beta^2\frac{\partial E_q}{\partial\beta}=-\beta^2\frac{\partial^2 F_q}{\partial\beta^2} \tag{1.51*}$$

эквивалентные соответствующим соотношениям классической термодинамики (здесь C_q – обобщённая теплоёмкость).

Вторая вариация функционала (1.34) имеет вид:

$$\delta^2 \mathcal{L} = -k_B q \left\{ \int d\mathbf{z} \left[1-(1-q)\beta H(\mathbf{r}) \right] p^{q-2} \delta^2 p \right\}. \tag{1.52}$$

Из (1.52) следует, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала, соответственно, при $q>0$ $\left(\delta^2 \mathcal{L}<0\right)$ и $q<0$ $\left(\delta^2 \mathcal{L}>0\right)$. Таким образом, распределение (1.44) максимизирует или минимизирует энтропию Тсаллиса.

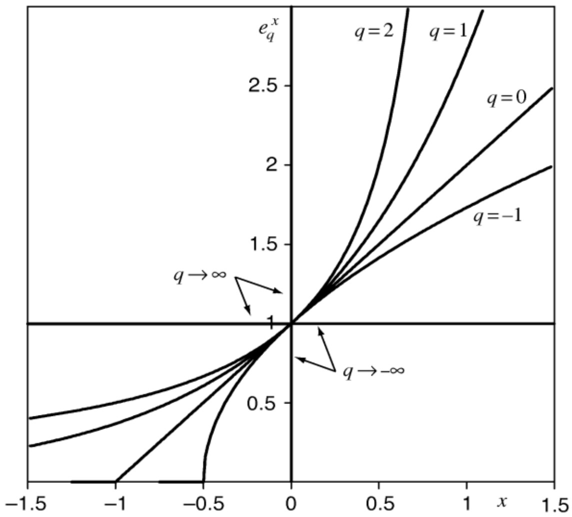


Рис.1.1. q - экспоненциальная функция $\exp_q x$ для типичных значений q. При $q>1$ она определена в интервале $(-\infty,(q-1)^{-1})$; она расходится, если $x \to (q-1)^{-1}$. При $q<1$ она определяется для $\forall x$, и обращается в нуль для всех $x<-(1-q)^{-1}$. В пределе $x\to 0$, $\exp_q x \sim 1+x$ $\forall q$ (Tsallis, 2009).

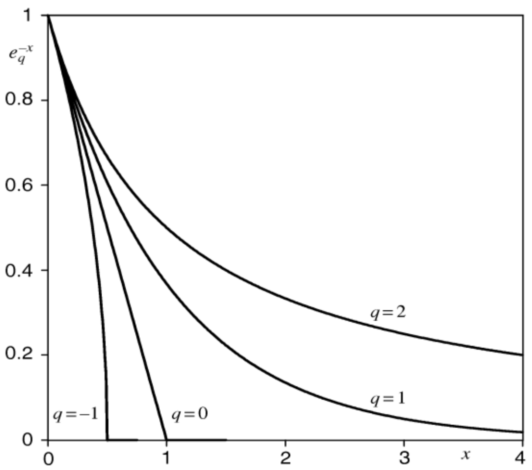


Рис.1.2. q - экспоненциальная функция $\exp_q(-x)$ для типичных значений q. При $q>1$ она обращается в нуль, как $[(q-1)x]^{-1/(q-1)}$ при $x\to\infty$. При $q<1$ она обращается в нуль при $x>(1-q)^{-1}$ (Tsallis, 2009).

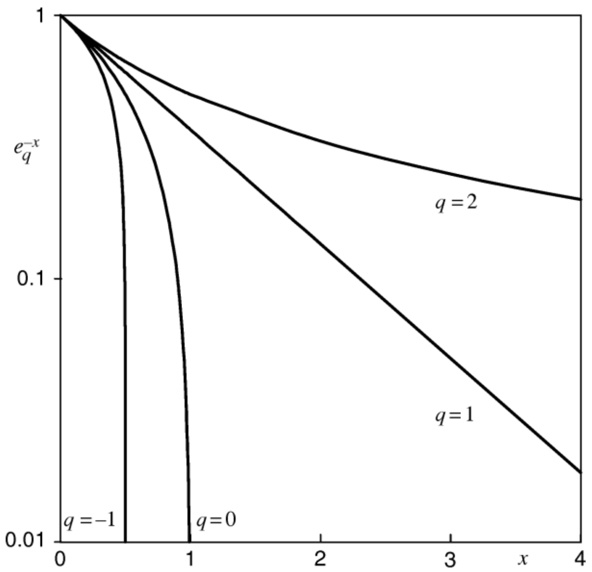


Рис.1.3. q - экспоненциальная функция $\exp_q(-x)$ для типичных значений q (в log линейном масштабе). Она выпуклая (вогнутая), если $q>1$ ($q<1$). При $q<1$ она имеет вертикальную асимптоту при $x=(1-q)^{-1}$ (Tsallis, 2009).

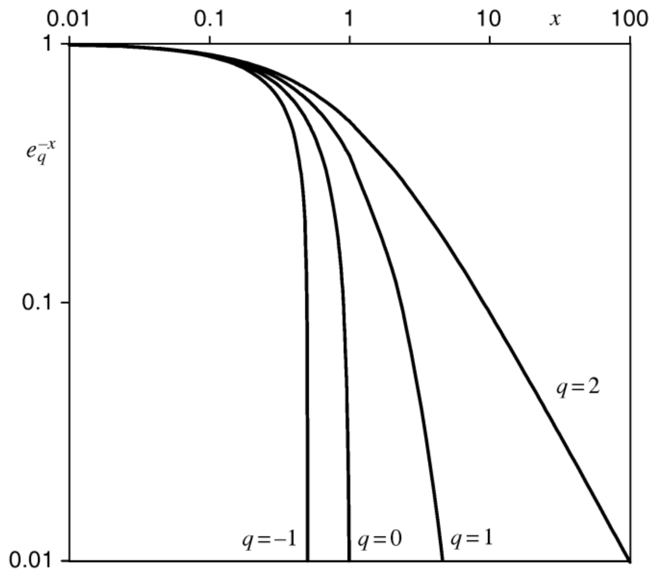


Рис.1.4. q - экспоненциальная функция $\exp_q(-x)$ для типичных значений q (в log- log масштабе) При $q>1$ она имеет асимптотический наклон равен $-1/(1-q)$ (Tsallis, 2009).

Равновесная микроскопическая q-энтропия и флуктуации. Рассмотрим связь между флуктуациями функции Гамильтона и микроскопической q-энтропией. Перепишем равновесное распределение (1.50)

$$p = \left\{ \left[1-\varepsilon(q)\beta H(\mathbf{r})\right] / \left[1-\varepsilon(q)\beta F_q\right] \right\}^{1/(1-q)} \tag{1.53}$$

в эквивалентном виде (здесь $\varepsilon(q) \equiv k_B^{-1}(1-q)$). С учётом термодинамического соотношения $S_q = \beta(E_q - F_q)$ получим

$$p = \left\{ \left[1-\varepsilon(q)\beta H(\mathbf{r})\right] / \left[1-\varepsilon(q)\beta E_q + \varepsilon(q) S_q\right] \right\}^{1/(1-q)}. \tag{1.54}$$

После возведения (1.53) и (1.54) в степень $(1-q)$, после простых преобразований легко получить следующие выражения для равновесной микроскопической q-энтропии и её флуктуаций

$$s_q(p) = \frac{\beta(H - E_q)}{1 - k_B^{-1}(1-q)F_q}, \tag{1.55}$$

$$s_q(p) - S_q(p)p^{1-q} = \beta\left(H - E_q p^{1-q}\right), \tag{1.56}$$

где

$$s_q(p) = \frac{k_B}{1-q}(1 - p^{1-q}) \tag{1.57}$$

– микроскопическая q-энтропия. При $q = 1$ равенство (1.56) даёт известную взаимосвязь (1.22) флуктуаций микроскопической энтропии Больцмана –Гиббса с флуктуациями функции Гамильтона

$$s(p) - \mathbf{E}[s] = \beta\left(H - \mathbf{E}[H]\right). \tag{1.58}$$

Здесь p есть классическое каноническое распределение Гиббса и $s(p) \equiv -k_B \ln p$.

Заметим, что флуктуации величин $s_q(p)$ и H в (1.56) совпадают с определением флуктуации произвольной физической величины $A(\mathbf{r})$

в неэкстенсивной статистической механике в виде

$$\Delta_q[A] = A - \mathbf{E}_q[A]p^{1-q}, \quad \mathbf{E}_q[A] \equiv \int d\mathbf{z} A p^q. \tag{1.59}$$

Соответственно, для флуктуации функции Гамильтона и микроскопической энтропии и имеем важные равенства

$$\mathbf{E}_q\left[\Delta_q H\right] = \int d\mathbf{z}\left\{H - \mathbf{E}_q[H]p^{1-q}\right\}p^q = 0,$$

$$\mathbf{E}_q\left[\Delta_q s_q(p)\right] = \int d\mathbf{z}\left\{s_q(p) - \mathbf{E}_q\left[s_q(p)\right]p^{1-q}\right\}p^q = 0. \qquad (1.60).$$

1.3. Большое каноническое распределение Гиббса и термодинамические соотношения в q-статистике

Рассмотрим теперь равновесное состояние неэкстенсивной многокомпонентной системы, обменивающейся с окружением энергией и частицами сорта k ($k = 1,2,\ldots,R$). Используя вариационный метод, находим соответствующее распределение. Для этого вычислим экстремум энтропии при заданных средней энергии

$$E_q = \sum_N \sum_{k=1}^{R} \int d\mathbf{z}_N \varepsilon_k(\mathbf{r}) N_k(\mathbf{r}) p^q = const, \tag{1.61}$$

среднего числа частиц k - го сорта

$$\langle N_k \rangle_q = \sum_N \int d\mathbf{z}_N\, p^q N_k(\mathbf{r}) = const \tag{1.62}$$

и при сохранении нормировки $\sum_N \int d\mathbf{z}_N\, p(\mathbf{r}) = 1$. Здесь; $N_k(\mathbf{r})$ – число частиц сорта k с энергией ε_k; $d\mathbf{z}_N \equiv \dfrac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \prod_{i=1}^{N} d\mathbf{q}_i d\mathbf{p}_i$.

Используя множители Лагранжа β, $\beta\mu_k$ (μ_k– величина, имеющая смысл химического потенциала частиц сорта α) и τ, находим безусловный экстремум функционала (удлинённой энтропии Тсаллиса)

$$\mathcal{L} = -k_B \int d\mathbf{z}\, p^q \ln_q p + \sum_N \left\{ \beta \sum_k^R \int d\mathbf{z} \varepsilon_k N_k p^q + \beta \mu_k \sum_k^R \int d\mathbf{z} N_k p^q - k_B \tau \int d\mathbf{z}\, p \right\}. \tag{1.63}$$

Из условия $\delta \mathcal{L} = 0$, получим уравнение $\left[\dfrac{k_B q}{1-q} - q\beta \sum_k^R N_k (\varepsilon_k - \mu_k) \right] p^{q-1} = k_B \tau$,

решение которого даёт следующее нормированное q-распределение (*большое каноническое q-распределение Гиббса*)

$$p(\mathbf{r}) = Z_q^{-1}(\beta, \{\mu_k\}) \left[1 - k_B^{-1}(1-q)\beta \sum_k^R N_k (\varepsilon_k - \mu_k) \right]^{1/(1-q)} =$$

$$= Z_q^{-1}(\beta, \{\mu_k\}) \mathrm{e}_q^{\left\{ -k_B^{-1}\beta \sum_k^R N_k(\mathbf{r})[\varepsilon_k(\mathbf{r}) - \mu_k] \right\}}. \tag{1.64}$$

Здесь

$$Z_q = \sum_N \int d\mathbf{z}_N\, \mathrm{e}_q^{\left\{ -k_B^{-1}\beta \sum_k^R N_k(\mathbf{r})[\varepsilon_k(\mathbf{r}) - \mu_k] \right\}} \tag{1.65}$$

– статистический интеграл. В пределе $q \to 1$ из (1.64) следует распределения (1.30) для обобщённого ансамбля Гиббса классической статистики

$$p(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{\left\{ -k_B^{-1}\beta \sum_k^R N_k(\mathbf{r})[\varepsilon_k(\mathbf{r}) - \mu_k] \right\}} \Big/ \int d\mathbf{z}\, \mathrm{e}^{\left\{ -k_B^{-1}\beta \sum_k^R N_k(\mathbf{r})[\varepsilon_k(\mathbf{r}) - \mu_k] \right\}}. \tag{1.66}$$

Следует отметить, что в классической статистике Максвелла–Больцмана перестановка одинаковых частиц дает одно и то же состояние и поэтому в случае неаддитивной статистики выражение (1.64) необходимо переписать в виде:

$$p(\mathbf{r})=\frac{\sum\limits_{n_1}\sum\limits_{n_2}\ldots\sum\limits_{n_r}\frac{1}{\prod\limits_{\alpha}^{r}n_\alpha!}\exp_q\left\{-k_B^{-1}\beta\sum\limits_{k}^{R}N_k(\mathbf{r})\left[\varepsilon_k(\mathbf{r})-\mu_k\right]\right\}}{\sum\limits_{n_1}\sum\limits_{n_2}\ldots\sum\limits_{n_r}\frac{1}{\prod\limits_{\alpha}^{r}n_\alpha!}\int d\mathbf{z}\exp_q\left\{-k_B^{-1}\beta\sum\limits_{k}^{R}N_k(\mathbf{r})\left[\varepsilon_k(\mathbf{r})-\mu_k\right]\right\}}. \quad (1.67)$$

Термодинамика многокомпонентной неаддитивной среды. Подстановка распределения (1.64) в (1.3) даёт экстремальное значение энтропии Тсаллиса

$$S_q=\beta\left(E_q-\sum_k^R\mu_k\langle N_k\rangle_q\right)+k_B\frac{Z_q^{1-q}-1}{1-q}. \quad (1.68)$$

Если ввести деформированный термодинамический потенциал

$$\Omega_q\equiv-\left(\frac{k_B}{\beta}\right)\frac{Z_q^{1-q}-1}{1-q}=-\left(\frac{k_B}{\beta}\right)\ln_q Z_q, \quad (1.69)$$

то выражения (1.64) и (1.68) можно представить в виде:

$$p(\mathbf{r},\beta,\{\mu_k\})=\mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta\sum\limits_k^R N_k(\varepsilon_k-\mu_k)\right\}}/\,\mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta\Omega\right\}}, \quad (1.70)$$

$$S_q=\beta\left(E_q-\sum_k^R\mu_k\langle N_k\rangle_q-\Omega_q\right). \quad (1.71)$$

При дифференцировании (1.71), можно получить все соотношения равновесной q-термодинамики для систем с переменным числом частиц

$$dS_q=\beta\left(dE_q-\sum_k^R\mu_k d\langle N_k\rangle_q\right), \quad (1.71)$$

$$\langle N_k\rangle_q=-\partial(\beta\Omega_q)/\partial\mu_k,\quad E_q-\sum_k^R\mu_k\langle N_k\rangle=\partial(\beta\Omega_q)/\partial\beta. \quad (1.72)$$

Подчеркнём, что все введённые выше понятия и соотношения обусловлены процедурой нахождения равновесного распределения на основе принципа Джейнса максимума параметрической энтропии Тсаллиса и сохраняют применимость для весьма широкого круга аномальных явлений, описываемых неаддитивной статистической механикой.

Наконец, исследуя вторую вариацию функционала (1.63), находим максимальность (минимальность) энтропии при $q > 0$ ($\delta^2 \mathcal{L} < 0$) и $q < 0$ ($\delta^2 \mathcal{L} > 0$).

Таким образом, вариационный принцип Джейнса максимума энтропии позволяет определять равновесные распределения и для q-систем. Причём экстремум рассматриваемых функционалов зависит от знака числа q.

1.4. Термодинамическое равновесие двух неаддитивных систем в статистике Курадо-Тсаллиса

Рассмотрим термодинамическое равновесие двух независимых q-систем с энтропиями $S_{q1} = S_q(p_1)$ и $S_{q2} = S_q(p_2)$, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S_q = S_q(p_{12})$ при $p_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = p_1(\mathbf{r}_1) p_2(\mathbf{r}_2)$ и энергии E_q. Согласно свойству неаддитивности (1.17) энтропий в статистике Тсаллиса для энтропии двух независимых систем, энтропию совокупной системы можно переписать в следующем виде

$$S_q = S_{q1}\left[1 + \varepsilon S_{q2}\right] + S_{q2}\left[1 + \varepsilon S_{q1}\right] - \varepsilon S_{q1} S_{q2}, \tag{1.73}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(q) \equiv k_B^{-1}(1 - q)$.

Для нахождения осреднённой энергии E_q совокупной q-системы воспользуемся распределением $p(\mathbf{r}) = \left\{\left[1 - \varepsilon\beta H(\mathbf{r})\right] / \left[1 - \varepsilon\beta F_q\right]\right\}^{1/(1-q)}$. При учёте условия мультипликативности $p_{12}(\beta H) = p_1(\beta H_1)\, p_2(\beta H_2)$, получим равенство для совокупного гамильтониана двух независимых систем

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = H_1(\mathbf{r}_1) + H_2(\mathbf{r}_2) - \varepsilon\beta H_1(\mathbf{r}_1) H_2(\mathbf{r}_2). \tag{1.74}$$

Аналогичное равенство имеет место и для свободных энергий

$$F_q = F_{q1} + F_{q2} - \varepsilon\,\beta F_{q1} F_{q2}. \tag{1.75}$$

Осреднение равенства (1.74) приводит к псевдоаддитивному закону для средей энергии двух независимых q-систем в статистике Курадо−Тсаллиса (ср. (1.15*))

$$E_q = E_{q1}(1+\varepsilon S_{q2}) + E_{q2}(1+\varepsilon S_{q1}) - \varepsilon E_{q1} E_{q2}. \tag{1.76}$$

Далее варьируем (1.73) и (1.76) и получим равенства

$$\delta S_q = 0 = \delta S_{q1}\left[1+\varepsilon S_{q2}\right] + \delta S_{q2}\left[1+\varepsilon S_{q1}\right], \tag{1.77}$$

$$\delta E_q = 0 = \delta E_{q1}(1-\varepsilon\beta F_{q2}) + \delta E_{q2}(1-\varepsilon\beta F_{q1}) + \varepsilon(E_{q1}\delta S_{q2} + E_{q2}\delta S_{q1}), \tag{1.78}$$

из которых вытекает условие

$$\frac{1}{1+\varepsilon S_{q1}} \frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}}\left[1-\varepsilon\left(\beta F_{q1} + E_{q1}\frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}}\right)\right] = \frac{1}{1+\varepsilon S_{q2}} \frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}}\left[1-\varepsilon\left(\beta F_{q2} + E_{q2}\frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}}\right)\right]. \tag{1.79}$$

Условие (1.79) удовлетворяется тождественно только при выполнении равенства

$$\frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}} \equiv \frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}} \equiv \beta, \tag{1.80}$$

означающего равенство температур двух независимых систем при их тепловом контакте (Зарипов, 2006). Параметр β является интенсивной величиной и играет роль обратной температуры $\beta \equiv 1/T$.

Если $q=1$, то (1.53) совпадает с каноническим распределением Гиббса $p=\mathrm{e}^{\{(F-H)/k_B T\}}$ и законы композиции рассматриваемых средних и микроскопических величин становятся аддитивными.

Аргумент в пользу использования осреднения Курадо–Тсаллиса. Начиная с работы (Tsallis и др.,1998), имеет место дискуссия по методу осреднения функции Гамильтона $H=H(\mathbf{r})$ и соответственно по закону композиции осреднённых энергий двух независимых q-систем. В основном предполагается аддитивность функции Гамильтона

$$H(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=H_1(\mathbf{r}_1)+H_2(\mathbf{r}_2)\,. \tag{1.81}$$

Тогда осреднение (1.81) нормированным *эскортным распределением Тсаллиса–Мендеса–Пластино*

$$\mathscr{P}(p)=p^q/\int d\mathbf{z}\,p^q$$

(см. Гл.3) приводит к следующему закону аддитивности осреднённых энергий:

$$E_q=E_{q1}+E_{q2},\quad E_q=\int d\mathbf{z}H\mathscr{P},\qquad E_{qi}=\int d\mathbf{z}H_i\mathscr{P},\ (i=1,2)\,. \tag{1.82}$$

Варьирование $\delta S_q=0$ и $\delta E_q=0$ для замкнутой общей системы с постоянными значениями энтропии и энергии приводит к равенству (1.77), а для осреднённых энергий (1.82) имеем равенство

$$\delta E_q=0=\delta E_{q1}+\delta E_{q2}\,. \tag{1.83}$$

В итоге, учитывая (1.77) и (1.83), получим соотношение

$$\frac{1}{1+k_B^{-1}(1-q)S_{q1}}\frac{\delta S_{q1}}{\delta E_{q1}}=\frac{1}{1+k_B^{-1}(1-q)S_{q2}}\frac{\delta S_{q2}}{\delta E_{q2}}, \tag{1.84}$$

из которого вытекает равенство так называемых физических температур

$$T_{ph}(p) \equiv \left[1 + k_B^{-1}(1-q)S_q\right]T, \qquad \delta S_q / \delta E_q = 1/T \tag{1.85}$$

для обеих независимых систем.

Такое переопределение эффективной температуры в статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино противоречит основным принципам термодинамики, где *абсолютная температура* T *является интенсивным параметром, а не функционалом* $T_{ph}(p)$. Поэтому для модели с мерой Тсаллиса единственно правильным осреднением, как было уже оговорено выше, является осреднение с ненормированным распределением p^q, которое собственно и использовалось при аксиоматическом обосновании нелогарифмической энтропии S_q в цитированных выше работах (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy,1970).

1.5. Физическая информация различия Ратье−Каннаппана

Наряду с энтропией Тсаллиса к наиболее существенным статистическим характеристикам сложной динамической q-системы относится *информация различия Ртье− Каннаппана* (Rathie, Kannappan, 1972), которая, являясь функционалом, определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $p(\mathbf{r},a)$ относительно состояния с распределением $u(\mathbf{r},a)$ [2)].

Предположим, что система переходит от состояния $p(\mathbf{r},a)$ к состоянию $u(\mathbf{r},a)$ и статистические наблюдения ведутся относительно состояния $p(\mathbf{r},a)$. В теории информации q-систем подобный переход по определению характеризует *информацию различия Ратье−Каннаппана*

$$I_q(p:u) = \frac{k_B}{1-q}\left(1 - \int d\mathbf{z} p^q u^{1-q}\right) =$$

[2)] При написании данного подраздела автор опирался на монографии (Зарипов, 2002; Tsallis, 2009).

$$=-k_B\int d\mathbf{z}p(\mathbf{r})\left[\ln_q\left(\frac{u(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})}\right)\right]=k_B\int d\mathbf{z}p(\mathbf{r})\frac{[p(\mathbf{r})/u(\mathbf{r})]^{q-1}-1}{q-1}, \quad (1.86)$$

которая характеризует меру статистической упорядоченности в состояниях системы с распределением $0<p(\mathbf{r},a)<\infty$ относительно состояния с распределением $0<u(\mathbf{r},a)<\infty$. В пределе $q\to 1$ из (1.86) вытекает информация различия Кульбака–Лейблера

$$I(p:u)=k_B\int d\mathbf{z}p\ln\left(\frac{p}{u}\right), \text{ где } \int d\mathbf{z}p(\mathbf{r},a)=\int d\mathbf{z}u(\mathbf{r},a)=1.$$

Наиболее важные свойства функционала (1.86) подробно рассмотрены в основополагающей работе (Rathie, Kannappan, 1972), а также в монографиях (Tsallis, 2009; Зарипов, 2010). Рассмотрим здесь лишь некоторые наиболее важные свойства информации различия (1.86).

Выпуклость. Информация различия есть вещественный, выпуклый и положительный (отрицательный) функционал с минимумом (максимумом) при $q>0$ $(q<0)$. Покажем это. Для числа $r>0$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{r^{q-1}-1}{q-1}&\geq 1-\frac{1}{r}, \quad \text{если}\, q>0,\\ &=1-\frac{1}{r}, \quad \text{если}\, q=0,\\ &\leq 1-\frac{1}{r}, \quad \text{если}\, q<0.\end{aligned}$$

Следовательно, например, для $q>0$ справедливо $\frac{[p/u]^{q-1}-1}{q-1}\geq 1-\frac{u}{p}$, отсюда вытекает, что

$$\int d\mathbf{z}p(\mathbf{r})\frac{[p(\mathbf{r})/u(\mathbf{r})]^{q-1}-1}{q-1}\geq\int d\mathbf{z}p(\mathbf{r})\left[1-\frac{u(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})}\right]=1-1=0.$$

Таким образом, справедливы следующие неравенства:

$$I_q(p:u) \geq 0, \quad (q>0); \quad I_q(p:u)=0 \quad (q=0); \quad I_q(p:u) \leq 0, \quad (q<0), \tag{1.87}$$

т.е. выражение (1.86) удовлетворяет такому же основному свойству, что и стандартная энтропия Кульбака–Лейблера, а потому может использоваться для тех же целей. Одако в данном случае у нас есть свобода выбора параметра q, что позволяет адекватно исследовать аномальную систему.

Справедливо также неравенство

$$I_q\left[(a_1p_1+a_2p_2):u\right] \leq a_1I_q(p_1:u)+a_2I_q(p_2:u), \tag{1.88}$$

где $a_1+a_2=1$ и $a_1>0, a_2>0$. При $p=u$ имеет место равенство $I_q(p:p)=0$. Таким образом информация различия является функцией Ляпунова.

Неаддитивность для независимых систем. Пусть состояние физической системы описывается нормированными совместными распределениями $p_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=p_1(\mathbf{r}_1)\,p_2(\mathbf{r}_2)$ и $u_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=u_1(\mathbf{r}_1)u_2(\mathbf{r}_2)$ при статистической независимости двух физических систем. Информации различия соавокупной и оьдельных систем определяются выражениями

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=\frac{k_B}{1-q}\left(1-\iint d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2\; p_{12}^q\; u_{12}^{1-q}\right),$$

$$I_q\left(p_1:u_1\right)=\frac{k_B}{1-q}\left(1-\int d\mathbf{z}_1\; p_1^q\; u_1^{1-q}\right),$$

$$I_q\left(p_2:u_2\right)=\frac{k_B}{1-q}\left(1-\int d\mathbf{z}_2\; p_2^q\; u_2^{1-q}\right), \tag{1.89}$$

где условия нормировки имеют вид

$$\iint d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 p_{12}=\int d\mathbf{z}_1 p_1=\int d\mathbf{z}_2 p_2=1, \quad \iint d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 u_{12}=\int d\mathbf{z}_1 u_1=\int d\mathbf{z}_2 u_2=1.$$

Отсюда для информации различия Ратье−Каннаппана имеем свойство псевдоаддитивности для независимых систем

$$I_q(p_{12}:u_{12}) = I_q(p_1:u_1) + I_q(p_2:u_2) - \varepsilon\, I_q(p_1:u_1)\, I_q(p_2:u_2), \qquad (1.90)$$

где параметр $\varepsilon \equiv \varepsilon(q) = k_B^{-1}(1-q)$ характеризует степень их неаддитивности. При $q=1$ из (1.90) следует аддитивность для информаций различия Кульбака–Лейблера модели с мерой Больцмана–Гиббса.

Микроскопическая информация различия. Флуктуация. Введём микроскопическую информацию различия

$$i_q(p:u) \equiv -\left[s_q(p) - s_q(u)\right] = \frac{k_B}{1-q}\left(p^{1-q} - u^{1-q}\right). \qquad (1.91)$$

Тогда флуктуация и среднее значение имеют вид

$$\Delta_q\left[i_q(p:u)\right] = i_q(p:u) - I_q(p:u)p^{1-q}, \qquad (1.92)$$

$$I_q(p:u) = \mathbf{E}_q\left[i_q(p:u)\right] = \frac{k_B}{1-q}\left(1 - \int d\mathbf{z} p^q u^{1-q}\right). \qquad (1.93)$$

Выразим информацию различия через флуктуацию микроскопической энтропии $\Delta_q\left[s_q(u)\right]$ и энтропию в общем виде. Для чего перепишем (1.91) следующим образом:

$$i_q(p:u) = -\left\{s_q(p) - S_q(u)u^{1-q}\right\} + \Delta_q\left[s_q(u)\right]. \qquad (1.94)$$

Осредняя (1.94), получим выражение

$$I_q(p:u) = \frac{-\left[S_q(p) - S_q(u)\right] + \int d\mathbf{z}\Delta_q\left[s_q(u)\right]p^q}{1 + k_B^{-1}(1-q)S_q(u)}, \qquad (1.95)$$

которое отличается от соответствующей формулы классической статистической теории аддитивных систем (см. Зарипов, 2001) дополнительным множителем, зависящим от энтропии конечного состояния системы $S_q(u)$.

Выражение для флуктуации микроскопической информации различия Ратье−Каннаппана имеет вид

$$\left[1+\varepsilon S_q\left(u\right)\right]^{-1}\Delta_q\left[i_q(p:u)\right]=-\left\{\Delta_q\left[s_q(p)\right]-\Delta_q\left[s_q(u)\right]\right\}-$$
$$-\int d\mathbf{z}\Delta_q\left[s_q(u)\right]p^q+\varepsilon I_q(p:u)\,S_q(u), \tag{1.96}$$

где в отличие от соответствующего выражения для аддитивной системы имеем дополнительное слагаемое в виде произведения информации различия $I_q(p:u)$ и энтропии $S_q(u)$ конечного состояния системы.

Отметим, что информация различия, записанная в виде (1.95), имеет общий вид и может быть использована при рассмотрении самоорганизации хаотических неэкстенсивных систем.

Неравенства. Информация различия Ратье–Каннаппана удовлетворяет неравенствам

$$I_q(p_{12}:u_{12})\le I_q(p_1:u_1)+I_q(p_2:u_2);\quad I_q(p:u)\ge I(p:u),\quad (q>0);$$
$$I_q(p:u)\le I(p:u),\quad (q<0);\quad I_q\left[p_1(w):u_1(w)\right]\le I_q(p:u). \tag{1.97}$$

Подробные сведения об этих и других неравенствах можно найти в обзорах (Taneja, 1989,2005).

Негэнтропийный принцип. Пусть среднее значение флуктуации микроскопической энтропии $s_q(u)$ при распределении p удовлетворяет равенству

$$\mathbf{E}_q\left\{\Delta_q\left[s_q(u)\right]\right\}=\int d\mathbf{z}\left[s_q(u)-S_q(u)p^{1-q}\right]p^q=$$
$$=\int d\mathbf{z}s_q(u)p^q-\int d\mathbf{z}s_q(u)u^q+\varepsilon S_q(u)I_q(p:u)=0, \tag{1.98}$$

что приводит, согласно (1.96), к значению информации различия

$$I_q(p:u) = -\frac{\left[S_q(p) - S_q(u)\right]}{1 + \varepsilon S_q(u)}. \qquad (1.99)$$

Выражение (1.99) также непосредственно вытекает из равенства (1.95).

Из (1.99) имеем соотношение:

$$S_q(p) = S_q(u) - I_q(p:u) - \varepsilon S_q(u) I_q(p:u), \qquad (1.100)$$

где информация различия с точностью до множителя представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и поэтому называется негэнтропией. Представим соотношение (1.100) также в следующем виде

$$\left[1 + \varepsilon S_q(p)\right] = \left[1 + \varepsilon S_q(u)\right]\left[1 - \varepsilon I_q(p:u)\right]. \qquad (1.101)$$

В общем случае выполняется негэнтропийный принцип Бриллюэна (1966)

$$S_q(p) - S_q(u) + I_q(p:u)\left[1 + \varepsilon S_q(u)\right] \geq 0, \quad \text{при } q > 0; \qquad (1.102)$$

$$S_q(p) - S_q(u) + I_q(p:u)\left[1 + \varepsilon S_q(u)\right] < 0, \quad \text{при } q < 0, \qquad (1.103)$$

где знак неравенства соответствует необратимым процессам, происходящим в физической системе. Информация различия представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и потому называется *негэнтропией Шредингера* (1947). Из (1.102) следует, что переход системы с энтропией $S_q(p)$ в состояние с большей энтропией происходит совместно с потерей информации различия $I_q(p:u)$ о структуре системы. Аналогично, переход от состояния $S_q(u)$ к состоянию с меньшей величиной $S_q(p)$ энтропии сопровождается увеличением информации различия. Таким образом, только увеличение различающей информации указывает на наличие процесса самоорганизации в открытой системе. Важно также иметь в виду, что такой вывод правомерен только для тех физических систем, для которых за начало отсчёта степени их хаотичности можно принять состояние теплового равновесия (Климонтович, 1990). Итак, при переходах системы между состояниями происходит взаимное изменение мер беспорядка и порядка.

1.6. Фундаментальное неравенство термодинамики физико-информационных процессов для q-систем

Пусть равновесная неаддитивная система находится в термостате с температурой $T_0 = 1/\beta_0$. Для определения равновесного вероятностного распределения находим безусловный экстремум лагранжиана (1.34). В результате получим известное нормированное равновесное распределение (1.36) для непрерывных величин:

$$p_0(\mathbf{r},\beta_0) = Z_q^{-1}(\beta_0)\left[1-\varepsilon\beta_0 H(\mathbf{r})\right]^{1/(1-q)}, \tag{1.104}$$

где

$$Z_q(\beta_0) \equiv \int d\mathbf{z}\left[1-\varepsilon(q)\beta_0 H(\mathbf{r})\right]^{1/(1-q)} \tag{1.105}$$

– статистический интеграл.

Используя распределения (1.104) для термостата можно найти соответствующую равовесную энтропию (см.(1.48))

$$S_{q0} = \frac{k_B}{q-1}\left(1-\int d\mathbf{z}\, p_0^q\right) = \beta_0\left(E_{q0} - F_{q0}\right), \tag{1.105}$$

энергию

$$E_{q0} = \int d\mathbf{z}\, H p_0^q \tag{1.106}$$

и свободную энергию

$$F_{q0} = -\frac{k_B}{\beta_0}\ln_q Z_q = -\frac{Z_q^{1-q}-1}{\varepsilon\beta_0} \quad \text{(откуда } Z_q^{1-q} = 1-\varepsilon\beta_0 F_{q0}\text{)} \quad (1.107)$$

q-системы, находящейся в равновесном состоянии. Если продифференцировать энтропию (1.105), то получим следующее обобщение на q-системы известных дифференциальных соотношений равновесной термодинамики в замкнутых системах:

$$dS_q = \beta_0\, dE_{q0}, \quad d\left(\beta_0 F_{q0}\right) = E_{q0}\, d\beta_0. \quad (1.108)$$

Рассмотрим теперь спонтанный переход между произвольным состоянием системы с распределением $p = p(\mathbf{r},t)$ и его равновесным состоянием с распределением $p_0 = p_0(\mathbf{r})$. Подставляя (1.104) в выражение (1.86) для информации различия Ратье–Каннаппана, в результате получим

$$I_q = I_q\left(p:p_0\right) = \frac{k_B}{1-q}\left(1-\int d\mathbf{z}\, p^q p_0^{1-q}\right) = \frac{k_B}{1-q}\left\{1-\int d\mathbf{z}\, p^q\left[1-\varepsilon\beta_0 H\right]Z_q^{q-1}\right\} =$$

$$= \frac{k_B}{1-q}\left[1 - Z^{q-1}\int d\mathbf{z}\, p^q + \varepsilon\beta_0\, Z^{q-1}E_q\right]. \quad (1.109)$$

Если использовать формулу $p_0 = \left\{\left[1-\varepsilon\beta_0 H(\mathbf{r})\right]/\left[1-\varepsilon\beta_0 F_{q0}\right]\right\}^{1/(1-q)}$ для равновесного распределения p_0, то можно получить следующее выражение для разности энтропий

$$S_q - S_{q0} = \frac{k_B}{q-1}\left(\int dz p_0^q - \int dz p^q\right) = \frac{k_B}{q-1}\left[1+\varepsilon\beta_0\left(E_{q0}-F_{q0}\right) - \int d\mathbf{z} p^q\right]. \quad (1.110)$$

С учётом (2.110), выражение (2.109) для информации различия легко преобразовать к виду

$$I_q\left(p:p_0\right)+\left(S_q-S_{q0}\right)Z_q^{\ q-1}=\frac{k_B}{1-q}\Big\{1-Z_q^{\ q-1}\int d\mathbf{z}p^q+\varepsilon\beta_0 Z_q^{\ q-1}E_q+$$

$$+Z_q^{\ q-1}\int d\mathbf{z}p^q-Z_q^{\ q-1}\Big[1+\varepsilon\beta_0\left(E_{q0}-F_{q0}\right)\Big]\Big\}=$$

$$=Z_q^{\ q-1}\beta_0\left(E_q-E_{q0}\right)+\frac{k_B}{1-q}\Big\{1+Z_q^{\ q-1}\left(\varepsilon\beta_0 F_{q0}-1\right)\Big\}. \qquad (1.111)$$

Наконец, с учётом формулы (1.107) для свободной энергии, выражение (1.111) для информации различия Ратье–Каннаппана принимает следующий окончательный вид для рассматриваемого случая:

$$I_q\left(p:p_0\right)=Z_q^{\ q-1}\left[-\left(S_q-S_{q0}\right)+\frac{1}{T_0}\left(E_q-E_{q0}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{q0}}\left[-\left(S_q-S_{q0}\right)+\frac{1}{T_0}\left(E_q-E_{q0}\right)\right] \qquad (1.112)$$

совпадающее с известным термодинамическим выражением для информации различия Кульбака–Лейблера для аддитивных систем только при $q=1$.

***H*-теорема в статистике Тсаллиса.** Сравним значения энтропий двух состояний системы с распределениями p^q и p_0^q при условии Гиббса, т.е. при одинаковости средних энергиях

$$\int d\mathbf{z}H(\mathbf{r})p^q=\int d\mathbf{z}H(\mathbf{r})p_0^q\,. \qquad (1.113)$$

С учётом условия $(Z_q)^{1-q}>0$ и свойства выпуклости (1.87) информации различия Ратье–Каннаппана, из (1.102) получим

$$I_q(p:p_0)Z_q^{\ 1-q}=-\Big[S_q(p)-S_q(p_0)\Big]>0,\quad \text{при } q>0;$$

$$I_q(p:p_0)Z_q^{1-q} = -\left[S_q(p) - S_q(p_0)\right] < 0, \quad \text{при } q<0. \tag{1.114}$$

Из неравенств (1.114) следует обобщённая теорема Гиббса:

(i) q - энтропия равновесного состояния максимальна $S_q(p_0) > S_q(p)$ при $q>0$;

(ii) q - энтропия равновесного состояния минимальна $S_q(p_0) < S_q(p)$ при $q<0$.

Из (1.114) также вытекает, что при увеличении энтропии $S_q(p) \to S_q(p_0)$ (при $q>0$), положительная мера информации различия уменьшается. При уменьшении энтропии $S_q(p) \to S_q(p_0)$ (при $q<0$), отрицательная мера информации (или *негинформация*) аналогично уменьшается. Таким образом, в этих двух случаях имеет место уменьшение статистической упорядоченности в микросостояниях неэкстенсивной системы.

Согласно свойству выпуклости, информация различия Ратье–Каннаппана является знакоопределенной функцией Ляпунова. Чтобы состояние полного равновесия было устойчивым необходимы следующие неравенства[3)]

$$\frac{dI_q}{dt}\left[(p:p_0)Z_q^{1-q}\right] = -\frac{d}{dt}\left[S_q(p) - S_q(p_0)\right] < 0 \quad \text{при } q>0,$$

$$\frac{dI_q}{dt}\left[(p:p_0)Z_q^{1-q}\right] = -\frac{d}{dt}\left[S_q(p) - S_q(p_0)\right] > 0 \quad \text{при } q<0. \tag{1.115}$$

В результате, при стремлении системы к равновесному состоянию во временной эволюции информация различия уменьшается. Это свидетельствует об уменьшении разупорядоченности микросостояний.

[3)] Напомним, что функцией Ляпунова для данной системы называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

Из (1.115) следует закон возрастания (убывания) энтропии Тсаллиса со временем в неаддитивной статистической механике (Зарипов, 2010)

$$dS_q(p)/dt > 0 \quad \text{при } q > 0; \quad dS_q(p)/dt < 0 \quad \text{при } q < 0, \qquad (1.116)$$

который справедлив при приближении к состоянию полного статистического равновесия (H-теорема Больцмана). Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы при спонтанных переходах.

Итак, в данной главе изложены некоторые элементы неэкстенсивной статистической механики и термодинамики Тсаллиса, предназначенной для описания сложных (аномальных) систем, фактические свойства которых находятся вне области применения классической статистики Больцмана−Гиббса, в частности, из-за наличия в пределах системы дальнодействующего силового взаимодействия, эффекта памяти и нелокальных корреляций, а также фрактальности геометрии фазового пространства. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия. Построение статистической механики и термодинамики сложных неэкстенсивных систем является важной проблемой как современной теоретической физики, так и смежных с ней наук. В настоящее время теория неэкстенсивных систем существенно развивается в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять её природу, возможности и ограничения.

Библиография

Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. М.: Мир, 1966. 272 с.

Зарипов Р.Г. Изменения энтропии и информации различия Тсаллиса в процессах самораспада и самоорганизации неэкстенсивных систем // Физика. 2001. №11. С.24–29. (Изв. высш. учебн. заведений). (Translation: Russian Physics Journal. 2001. Vol. 44. №11. P.1159–1164).

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах// Казань: Фэн. 2001. 251 с.

Зарипов Р.Г. Изменение информации различия при эволюции неэкстенсивных систем в пространстве управляющих параметров // Физика. 2004.№ 6. С. 67–73. (Изв. высш. учебн. заведений). (Translation: Russian Physics Journal. 2004. V. 47. №6. P.647–655).

Зарипов Р.Г. О термодинамическом равновесии неэкстенсивных систем//Журнал технической физики. 2006. Т.76. Вып. 11. С.1-5.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: Наука, 1990. 320 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? М.: ИЛ, 1947. 147 с.

Хартли Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.

Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1953. Т.8. № 3. с.3-20.

Хинчин А.Я. Об основных теоремах теории информации // УМН. 1956. Т.11. №.1(67). с.17-75.

Abe S. Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy // Phys. Lett A. 2000. V. 271. P.74-79.

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications”. Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001. ISBN 3-540-41208-5.

Boon J.P., Tsallis C. Eds. “Special issue overview Nonextensive statistical mechanics: new trends, new perspectives” // Europhys. News. 2005. V. 36. № 6. P. 183-186 (DOI 10.1051/epn:2005601.

Borland L., Plastino A.R., Tsallis C. Information gain within nonextensive thermostatistics// J. Math. Phys. 1998. V.39 P. 6490-6501; [Errata: Information gain within generalized thermostatistics' [J. Math. Phys. 39, 6490 (1998)] // J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 2196-2196.

Curado E.M.F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. A: Mathematical and General.1991. V.24. № 1. P. L69-72

Daroczy Z. Generalized information function // Inform. Control. 1970. V.16. P. 36–51.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. “Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications. Oxford University Press. 2004. 440 p.

Grigolini P., Tsallis C., West B.J. Eds., “Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics”// Chaos, Solitons and Fractals. 2001. 13, № 3. P. 367.

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V. 3. P.30–35.

Herrmann H.J., Barbosa M., Curado E.M.F. Eds. “Trends and perspectives in extensive and non-extensive statistical mechanics” // Physica A 2004. V.344, № 3/4. P. v-vi.

Hotta M., Joichi I. Composability and generalized entropy // Phys. Lett. A. 1999. V.261. P.302-309.

Kaniadakis G., Lissia M., Rapisarda A. Eds. “Non Extensive Thermodynamics and Physical Applications” // Physica A. 2001. V. 305. № 1/2 .

Kaniadakis G., Lissia M. Eds. “News and Expectations in Thermostatistics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340, № 1. P. xv-xix.

Kaniadakis G., Carbone A., Lissia M. Eds. “News, expectations and trends in statistical physics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1 P. xi-xi.

Landsberg P.T., Tranah D. Thermodynamics of non-extensive entropies I. // Collective Phenomena. 1980. V.3. P.73-80.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 365 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1981. 460 p.

Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis’entropy maximization procedure revisited //Physica A. 2000.V.286. P.489-501.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Rathie P.N., Kannappan Pl. A Directed-Divergence Function of Type β // Inform. and Contr. 1971. V.20. P.38–45.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1970. 573 p.

Sugiyama M. Eds. “Introduction to the topical issue: Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics”// Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V.16. № 3. P. 221.

Swinney H.L., Tsallis C. Eds. “Anomalous Distributions, Nonlinear Dynamics and Nonextensivity” // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2004. V.193. № 3. P.1-1.

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Advances in Electronics and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press, 1989. V.76. P.327–413.

Taneja I.J. New Developments in Generalized Information Measures. Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press, 1995. V.91. P.37–135.

Taneja I.J. On Symmetric and Nonsymmetric Divergence Measures and Their Generalisations. Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press, 2005. V.138. P.177–250.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.51. № 1/1. P.479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V.261. P.534–554.

Tsallis C. Generalized entropy-based criterion for consistent testing, Phys. Rev. E 1998. V. 58, 1442-1445.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V.29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Vaida I. Axiomy α-entropie zobecneneho pravdepodobnostniho schematy // Kybernetika. 1968. V.4. P.105-111. (in Czech).

ГЛАВА 2

Элементы формализма статистики Тсаллиса–Мендеса–Пластино. Метод оптимизированных множителей Лагранжа

В настоящей главе проанализированы следствия эскортного осреднения Тсаллиса–Мендеса–Пластино (ТМР) микроскопических динамических величин в неаддитивной статистике Тсаллиса и его формальное и практическое значение при моделировании различных q-систем, которое в последнее время в большом количестве представлено в научной литературе. Показано, что в зависимости от способа определения средних значений динамических величин, возможны различные варианты обобщённой равновесной статистической механики и дан их сравнительный анализ. Найдены условия выполнения преобразования Лежандра при использовании понятия физической температуры. Проведено рассмотрение модифицированных термодинамических соотношений в статистике ТМР. Обсуждается метод оптимизированных множителей Лагранжа, позволяющий устранить некоторые проблемы статистики ТМР.

Введение

Как было отмечено в Гл.1 в неаддитивной статистике Тсаллиса возможно осреднение физических величин по трём распределениям: p, p^q и $p^q/\int d\mathbf{z}p^q$. Первый вариант определения среднего значения был предложен в работе (Tsallis, 1988) и с тех пор использовался крайне редко. При отыскании равновесного распределения $p(\mathbf{r})$, он сводился к учёту, помимо обычного ограничения нормировки распределения, еще и ограничения, налагаемого на внутреннюю энергию q-системы, которая определялась соотношением $E_q^{(1)} = \int d\mathbf{z}H(\mathbf{r})p$. В этом случае с помощью обычной техники нахождения экстремума удлинённой энтропии Тсаллиса, можно получить следующее равновесное вероятностное распределение

$$p^{(1)}(\mathbf{r},\beta^*)=\frac{\left[1-k_B^{-1}(q-1)\beta^* H(\mathbf{r})\right]^{1/(q-1)}}{\int d\mathbf{z}\left[1-k_B^{-1}(q-1)\beta^* H(\mathbf{r})\right]^{1/(q-1)}}\,.$$

(здесь супериндекс (1) означает первый выбор). Несмотря на стандартный вид этого выражения, параметр β^* не является множителем Лагранжа, связанным с ограничением, накладываемым на среднюю энергию системы. Разумеется, распределение $p^{(1)}(\mathbf{r},\beta^*)$ сводится к классическому распределению Больцмана–Гиббса при $q\to 1$ и зависит от гамильтониана системы $H(\mathbf{r})$ не по экспоненте, а по степенному закону. Кстати, эти две важные особенности свойственны всем трём вариантам осреднения. Однако очень скоро стало очевидным, что подобный выбор определения среднего является неудовлетворительным при решении целого ряда математических задач, связанных с моделированием актуальных физических явлений в сложных q-системах, таких, например, как аномальная супердиффузия Леви (в этом случае второй момент, связанный с распределением Леви, расходится (Tsallis др.,1995)).

Второй вариант, впервые предложенный в работе (Curados, Tsallis,1991) и с тех пор интенсивно разрабатываемый (см. Библиографию/ http://tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm.), стал естественным выходом из существующих затруднений. В этом варианте ограничение на осреднённую энергию постулируется в виде $E_q^{(2)}=\int d\mathbf{z}H(\mathbf{r})p^q=const$. Тогда, процедура определения максимума энтропии Тсаллиса S_q приводит к следующему выражению для равновесного вероятностного распределения

$$p^{(2)}(\mathbf{r},\beta)=\mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta H(\mathbf{r})\right\}}/\int d\mathbf{z}\,\mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta H(\mathbf{r})\right\}},$$

которое совпадает, по внешнему виду, с результатом, полученным по первому выбору осреднения, за исключением того факта, что теперь величина $(1-q)$ играет ту роль, которую в первом варианте играла величина $(q-1)$ (т. е. $p_q^{(2)}(\beta)=p_{2-q}^{(1)}(\beta^*\to\beta)$), а параметр β, в отличие от β^*, является множителем Лагранжа, связанным с ограничением на среднюю энергию. Распределение $p^{(2)}$ учитывает отключение (*cut-off*) (т.е. обнуление вероятности для уровней энергии, достаточно высоких для получения отрицательного значения аргумента функции e_q^x (см. (1.40)) для всех значений $q<1$, в то время как для первого варианта это событие имеет место для $q>1$. Кроме этого, для распределения $p^{(2)}$ при всех значениях q остаётся справедливой структура Лежандра, свойственная термодинамике.

Важно подчеркнуть, что к настоящему времени в рамках второго варианта осреднения экстенсивных q-параметров в научной литературе получен целый ряд новых физических результатов и модифицировано большое число математических теорий (от H-теоремы до термодинамической устойчивости), известных в классической статистике. Эти достижения, успешно объясняющие различные аномалии в конкретных сложных системах, вероятно, и лежат в основе популярности данного формализма среди многих исследователей.

Вместе с тем, второй выбор осреднения приводит к трём нежелательным последствиям, которые, несомненно, являются необычными с точки зрения устоявшихся классических физических оснований (Plastino и др.,1998).

(i) Первое, не встречавшиеся прежде следствие, состоит в том, что полученные на основе распределения $p^{(2)}(\beta)$ термодинамические результаты зависят от выбора начала отчёта энергий. На практике это не является большой проблемой, поскольку довольно дружно авторы многочисленных публикаций выбирали за начало отсчёта энергии (наименьшее собственное значение гамильтониана) нулевую точку, что, несомненно, имеет смысл. Но, по большому счёту нужно согласиться с тем, что это следствие в некотором смысле вызывает беспокойство.

(ii) Второе необычное следствие состоит в том, что среднее значение константы отличается от самой константы, $\mathbf{E}_q^{(2)}[C] \equiv C\int d\mathbf{z}p^q \neq C$. Тот факт, что нормировка $\int d\mathbf{z}p^q \neq 1$ не равна единице, нелегко интерпретировать (если только мы не готовы принять, что энтропийная неаддитивность естественно должна приводить к потере нормы). Таким образом, несохранение нормы вызывает безусловное беспокойство.

(iii) Наконец, третье нежелательное следствие состоит в том, что для двух независимых двух систем, для которых справедливы условие мультипликативности $p_{12}^{(2)} = p_1^{(2)} p_2^{(2)}$ и $H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)$, справедливо следующее псевдоаддитивное выражение (см. (1.15) для осреднённых энергий (Tsallis,1994): $(E_q^{(2)})_{12} = E_{q1}^{(2)}(1+\varepsilon S_{q2}) + E_{q2}^{(2)}(1+\varepsilon S_{q1})$, где $\varepsilon = \varepsilon(q) \equiv k_B^{-1}(1-q)$). Другими словами, первый принцип классической термодинамики (сохранение энергии) не имеет место для макроскопических энергий, даже если он справедлив для микроскопических величин q-системы. Разумеется, можно возразить, что, если мы рассматриваем неаддитивную энтропию, почему нужно считать нежелательным то же самое для макроскопической энергии? Дело в том, что энтропия представляет собой информационную величину, тогда как энергия является механической величиной. Поскольку формализм неаддитивной статистики не меняет основ механики, то указанное обстоятельство противоречит аддитивности средней энергии.

В этой главе мы рассмотрим третий способ осреднения, позволяющий избежать (одновременно) тех нежелательных последствий, которые возникают в рамках второго варианта осреднения. Этот вариант для энергетического ограничения был предложен Пластино, Мендесом и Цаллисом в работе (Plastino и др.,1998; Tsallis, 2009).

2.1. Взвешенное среднее и статистические характеристики *q*-системы в статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино

В этом разделе мы ограничимся выводом функции распределения для обобщённого канонического ансамбля Гиббса (поскольку вывод вероятностных распределения для других ансамблей аналогичен). Пусть среднее значение произвольной физической величины $A(\mathbf{r},t)$

$$\langle\langle A\rangle\rangle_q \equiv \int d\mathbf{z} A(\mathbf{r})\mathscr{P} = c_q^{-1}\int d\mathbf{z} A(\mathbf{r}) p^q = c_q^{-1}\langle A\rangle_q \tag{2.1}$$

вычисляется с помощью *нормированного эскортного распределения*

$$\mathscr{P}(\mathbf{r}) = p^q / \int d\mathbf{z} p^q \equiv p^q / c_q, \quad \int d\mathbf{z} \mathscr{P}(p) = 1, \tag{2.2}$$

где, в силу определения (2.2) энтропии Тсаллиса S_q, функционал (коэффициент Тсаллиса)

$$c_q(p) \equiv \int d\mathbf{z} p^q = 1 + k_B^{-1}(1-q) S_q. \tag{2.2}$$

Заметим, что $\langle\langle 1 \rangle\rangle_q \equiv \int d\mathbf{z} \mathscr{P} = 1$, что полностью соответствует устоявшимся представлениям классической статистики.

Каноническое распределение. Найдём экстремум энтропии Тсаллиса S_q при сохранении нормировки и заданном значении средней энергии

$$E_q^{(3)} = \mathbf{E}_q^{(3)}\left[H(\mathbf{r})\right] \equiv \int d\mathbf{z} H(\mathbf{r}) \mathscr{P} = const, \quad \int d\mathbf{z} \mathscr{P}^{(q)}(p) = 1. \tag{2.4}$$

Согласно вариационному принципу, определим функционал

$$\mathscr{L} = \frac{k_B}{q-1}\left(1 - \int d\mathbf{z} p^q\right) - \beta \int d\mathbf{z} H \mathscr{P} - k_B \tau \int d\mathbf{z} \mathscr{P}, \tag{2.5}$$

где β и τ являются множителями Лагранжа. Тогда и из условия

$$\delta\mathscr{L} = -\frac{k_B q}{q-1}\int d\mathbf{z} p^{q-1} \delta p -$$

$$-\frac{q\beta}{c_q}\left[\int d\mathbf{z} H(\mathbf{r}) p^{q-1} \delta p - \frac{\int d\mathbf{z} H(\mathbf{r}) p^q}{c_q} \int d\mathbf{z}\, p^{q-1} \delta p\right] - k_B \tau \int d\mathbf{z} \delta p = 0 \tag{2.6}$$

получим равенство $\left[\frac{k_B q}{1-q} - \frac{q\beta}{c_q}\left(H(\mathbf{r}) - E_q^{(3)}\right)\right] p^{q-1} = k_B \tau$, из которого следует нормированное равновесное распределение Тсаллиса–Мендеса– Пластино (ТМП)

$$p^{(3)}(\mathbf{r}, \beta_q) = \tilde{Z}_q^{-1}\left\{1 - k_B^{-1}(1-q)\beta_q\left[H(\mathbf{r}) - E_q^{(3)}\right]\right\}^{1/(1-q)} =$$

$$= \tilde{Z}_q^{-1}\, \mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta_q\left[H(\mathbf{r}) - E_q^{(3)}\right]\right\}}, \tag{2.7}$$

где

$$\tilde{Z}_q \equiv Z_q^{(3)} = \int d\mathbf{z}\, \mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]\right\}} \tag{2.8}$$

– обобщённый статистический интеграл; параметр $\beta_q \equiv \beta / c_q = \beta / \int d\mathbf{z} p^q$ является (как будет показано ниже) обратной *физической температурой* системы, $T_{ph} \equiv 1/\beta_q$; β – множитель Лагранжа, который связан с ограничением на среднюю энергию (2.4) в неаддитивной статистической механике Тсаллиса.

При $1-\varepsilon(q)\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q\right]<0$ имеем $p=0$, а при $q=1$ из (2.7) и (2.8) получим классическое каноническое распределение Гиббса в виде

$$p(\mathbf{r},\beta) = \mathrm{e}^{\left\{-k_B^{-1}\beta\,\Delta[H(\mathbf{r})]\right\}} / \int d\mathbf{z} \mathrm{e}^{\left\{-k_B^{-1}\beta\,\Delta[H(\mathbf{r})]\right\}}, \tag{2.9}$$

где $\Delta\{H(\mathbf{r})\} = H(\mathbf{r}) - \mathbf{E}[H(\mathbf{r})]$ – флуктуация функции Гамильтона.

Хотя осреднение по эскортному распределению даёт физически наблюдаемые величины (например, внутренней энергии), статистика ТМП не имеет особых преимуществ в сравнении со статистикой Курадо–Тсаллиса, поскольку распределение вероятности $p(\mathbf{r})$ (2.7) неявно зависит от самого распределения (самозависимость), а функционал $\beta_q = \beta / c_q(p)$, фигурирующий в распределении (2.7) не является обратной температурой и не сохраняет структуру Лежандра термодинамически сложных систем.

Микроскопическая энтропия. Для энтропии Тсаллиса имеем

$$S_q^{(3)}(p) = \int d\mathbf{z}\, s_q^{(3)}(p)\mathscr{P} = \frac{k_B}{q-1}\left(1-\int d\mathbf{z} p^q\right). \tag{2.10}$$

Из (2.10) вытекает выражение для *микроскопической* q*– энтропии* при осреднении ТМП

$$s_q^{(3)}(p) = \frac{k_B}{1-q}\left(1-p^{1-q}\right)\int d\mathbf{z} p^q = \frac{k_B}{1-q}\left(1-p^{1-q}\right)c_q\,. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10) и (2.11), из распределения (2.7) после некоторых преобразований получим связь между флуктуациями микроскопической энтропии и функции Гамильтона

$$s_q^{(3)}(p) - S_q^{(3)}(p)\cdot c_q p^{1-q} = \beta\left(H - E_q^{(3)}\right). \qquad (2.12)$$

При $q=1$ из (2.12) следует известное соотношение (1.22)

$$\Delta[s] = s(p) - S = \beta\{H(\mathbf{r}) - E\} = \beta\,\Delta[H(\mathbf{r})],$$

дающее аналогичную связь в классическом случае.

Величина $\Delta_q H = \left(H - E_q^{(3)}\right)$ в (2.12) есть флуктуация функции Гамильтона при рассматриваемом варианте осреднения, а величина $s_q^{(3)} - \dfrac{p}{\mathcal{P}} S_q^{(3)}$ в равенстве (2.12) не равняется флуктуации микроскопической q-энтропии. *Это обстоятельство ещё раз показывает, что подход с вариантом осреднения по эскордному распределению $\mathcal{P}$ также несовершенен, т.е. не имеет особых преимуществ в сравнении с осреднением Курадо-Тсаллиса.*

Рассмотрим теперь два простых случая энтропийной оптимизации в рамках формализма статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино.

Пример 2.1. Пусть в дополнение к условию нормировки $\int\limits_0^\infty dx\, p(x) = 1$ распределения $p(x)$ фиксировано q-среднее значение переменной x

$$\langle\langle x\rangle\rangle_q = \int\limits_0^\infty dx\, x\,\mathcal{P}(x) = \mathrm{X}_q^{(1)},$$

где $\mathcal{P}^{(q)}(x) = [p(x)]^q \,/ \int\limits_0^\infty dx'[p(x')]^q$ − эскортное распределение. Теперь оптимизируем с этими ограничениями энтропию Тсаллиса S_q. Для нахождения оптимизирующего распределения найдём безусловный экстремум лагранжиана:

$$\mathcal{L}(p) = k_B \frac{\int\limits_0^\infty dx[p(x)]^q - 1}{1-q} - \alpha\int\limits_0^\infty dx\, p(x) - \beta_q^{(1)}\int\limits_0^\infty dx\, x\mathcal{P}^{(q)}(x)\ ,$$

где α и $\beta_q^{(1)}$ − множители Лагранжа. Из условия равенства нулю первой вариации функционала $\partial\mathcal{L}(p)/\partial p = 0$ следует оптимальное распределение, отвечающее экстремуму энтропии S_q

$$p(x) = \mathrm{e}_q^{-k_B^{-1}\beta_q^{(1)}\left(x - \mathrm{X}_q^{(1)}\right)} \Big/ \int_0^\infty dx' \mathrm{e}_q^{-k_B^{-1}\beta_q^{(1)}\left(x' - \mathrm{X}_q^{(1)}\right)} .$$

Для исключения множителя Лагранжа α использовано условие нормировки. Заметим, что тот факт, что параметр α можно исключить, представляет собой весьма замечательное математическое свойство.

Пример 2.2. Рассмотрим ещё один простой, но довольно частый случай, когда известно, что $\langle\langle x \rangle\rangle_q = 0$ и фиксировано q-среднее значение квадрата переменной x

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle_q = \int_0^\infty dx\, x^2\, \mathscr{P}(x) = \mathrm{X}_q^{(2)} > 0 .$$

Для того, чтобы использовать, как и прежде, метод Лагранжа для нахождения оптимизирующего распределения, запишем удлинённую энтропию в виде

$$\mathscr{L}(p) = k_B \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[p(x)\right]^q - 1}{1-q} - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x) - \beta_q^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 \mathscr{P}(x) .$$

Тогда, из условия равенства нулю первой вариации функционала $\mathscr{L}(p)$, получим

$$p(x) = \mathrm{e}_q^{-k_B^{-1}\beta_q^{(2)}\left(x^2 - \mathrm{X}_q^{(2)}\right)} \Big/ \int_0^\infty dx' \mathrm{e}_q^{-k_B^{-1}\beta_q^{(2)}\left(x'^2 - \mathrm{X}_q^{(2)}\right)} .$$

Таким образом, мы видим, что так же, как гауссианы в классической статистике (см. Примеры 1.1. и 1.2 в Гл. 1.) глубоко связаны с энтропией Больцмана-Гиббса S_{BG}, полученные распределения, так называемые q-гауссианы, связаны с энтропией Тсаллиса S_q.

Термодинамические соотношения. Для квазиравновесных энтропии, свободной энергии и обобщённого статистического интеграла имеем следующие выражения

$$S_q^{(3)}(p) = \frac{k_B}{q-1} \int d\mathbf{z} \left\{ 1 - \int d\mathbf{z} \frac{\tilde{Z}^{1-q} p}{1 - \varepsilon\beta_q \left[H(\mathbf{r}) - E_q^{(3)} \right]} \right\} =$$

$$=\frac{k_B}{q-1}\left\{1-\int d\mathbf{z}\tilde{Z}^{1-q}p\left(1+\frac{\varepsilon\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]}{1-\varepsilon\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]}\right)\right\}=$$

$$=\frac{k_B\left(1-\tilde{Z}^{1-q}\right)}{q-1}+\beta\int d\mathbf{z}\left\{\frac{\tilde{Z}^{1-q}p\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]/c_q}{1-\varepsilon\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]}\right\}=$$

$$=\frac{k_B\left(1-\tilde{Z}^{1-q}\right)}{q-1}+\beta\int d\mathbf{z}\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]\mathscr{P}^{(q)}=\frac{k_B\left(\tilde{Z}^{1-q}-1\right)}{1-q}, \tag{2.12}$$

$$F_q^{(3)}=E_q^{(3)}-\frac{1}{\beta}S_q=E_q^{(3)}-\frac{k_B\left(\tilde{Z}^{1-q}-1\right)}{\beta(1-q)}, \tag{2.14}$$

$$\tilde{Z}_q=\left(\int d\mathbf{z}p^q\right)^{1/(1-q)}. \tag{2.15}$$

Учитывая (2.12), можно переписать нормированное распределение ТМП (2.7) в следующем виде

$$p^{(3)}(\mathbf{r})=\left\{\frac{1-k_B^{-1}(1-q)\beta\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]/\int d\mathbf{z}p^q}{\int d\mathbf{z}p^q}\right\}^{1/(1-q)}=$$

$$=\left\{\frac{1-\varepsilon\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]}{1+\varepsilon S_q^{(3)}(p)}\right\}^{1/(1-q)}=\mathrm{e}_q^{\left\{-k_B^{-1}\beta_q\left[H(\mathbf{r})-E_q^{(3)}\right]\right\}}/\,\mathrm{e}_q^{\left\{k_B^{-1}S_q^{(3)}\right\}}. \tag{2.7*}$$

Дифференцируя (2.12), получим известные соотношения равновесной термодинамики

$$S_q=k_B\ln_q\tilde{Z}_q^{(3)},\qquad F_q^{(3)}=E_q^{(3)}-\beta^{-1}S_q^{(3)}=E_q^{(3)}-\beta^{-1}k_B\ln_q\tilde{Z}_q^{(3)},$$

$$\beta=\frac{\partial S_q^{(3)}}{\partial E_q^{(3)}}=k_B\frac{\partial\ln_q\tilde{Z}_q^{(3)}}{\partial E_q^{(3)}},\quad E_q^{(3)}=\frac{\partial(\beta F_q^{(3)})}{\partial\beta}. \tag{2.16}$$

Здесь важно подчеркнуть, что величина $\tilde{Z}_q^{(3)}$ определяется микроскопической энергией $H(\mathbf{r})$ относительно внутренней энергии $E_q^{(3)}$ системы (см.(2.8)). Если ввести новую величину $Z_q^{(3)}$, которая определяется микроскопической энергией $H(\mathbf{r})$ относительно нулевой точки,

$$\left(Z_q^{(3)}\right)^{1-q} = \left(\tilde{Z}_q^{(3)}\right)^{1-q} - (1-q)\beta E_q,$$

то соотношения равновесной термодинамики (2.16) принимают классическую форму

$$S_q = \beta\left(E_q^{(3)} - F_q^{(3)}\right), \quad dS_q = \beta dE_q^{(3)},$$

$$F_q^{(3)} = -\frac{k_B}{\beta}\ln_q Z_q^{(3)}, \quad E_q^{(3)} = \frac{\partial(\beta F_q^{(3)})}{\partial\beta}, \quad C_q = -\beta^2\frac{\partial E_q^{(3)}}{\partial\beta}. \tag{2.17}$$

Легко показать, что эскортное осреднение приводит, в отличие от статистики Курадо−Тсаллиса, к свойству аддитивности для осреднённой энергии совокупной системы (см. 1.82)

$$\left(E_q^{(3)}\right)_{1,2} = E_{q1}^{(3)} + E_{q2}^{(3)}. \tag{2.18}$$

Таким образом, третий вариант осреднения избавлен от перечисленных выше трёх проблем, которые характерны для осреднения Курадо−Тсаллиса. Кроме этого, вероятности, связанные с третьим выбором осреднения, совпадают с вероятностями, полученными со вторым, если мы используем так называемую физическую температуру $T_{ph} = \left[1 + k_B^{-1}(1-q)S_q\right]T$. Именно по этой причине все результаты Гл.1, которые не используют явную температурную зависимость изучаемого явления, остаются в силе.

2.2. Термодинамика Абе в статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино

Принимая во внимание тот факт, что обычная структура основных соотношений макроскопической термодинамики существенно зависит от предположения об аддитивности энтропии, крайне важно выяснить каким образом, в случае использования физической температуры T_{ph}, должны быть модифицированы эти соотношения в статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино.

Термодинамическое равновесие двух независимых систем Рассмотрим термодинамическое равновесие двух независимых систем с энтропиями $S_{q1} = S_q(p_1)$ и $S_{q2} = S_q(p_2)$, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянным значением энтропии $S_q(p_{12})$, при условии мультипликативности $p_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = p_1(\mathbf{r}_1) p_2(\mathbf{r}_2)$ и аддитивности микроскопической энергии $E_q^{(3)} = E_{q1}^{(3)} + E_{q2}^{(3)}$, где $E_{qi}^{(3)} = \int d\mathbf{z} H_i \mathscr{P}, (i = 1,2)$. Согласно свойству неаддитивности q-энтропии (2.17), общую энтропию системы можно переписать в следующем виде

$$S_q = S_{q1}\left[1 + \varepsilon S_{q2}\right] + S_{q2}\left[1 + \varepsilon S_{q1}\right] - \varepsilon S_{q1} S_{q2}, \tag{2.19}$$

где $\varepsilon \equiv k_B^{-1}(1-q)$. Варьирование δS_q и $\delta E_q^{(3)}$ для совокупной замкнутой системы с постоянными значениями энтропии S_q и энергии $E_q^{(3)}$ приводит к равенству $\delta S_q = 0 = \delta S_{q1}\left[1 + \varepsilon S_{q2}\right] + \delta S_{q2}\left[1 + \varepsilon S_{q1}\right]$ для энтропии, и равенству $\delta E_q^{(3)} = 0 = \delta E_{q1}^{(3)} + \delta E_{q2}^{(3)}$ для средней энергии. Объединяя их, в итоге получим уравнение

$$\frac{\delta S_{q1} / \delta E_{q1}^{(3)}}{1 + \varepsilon S_{q1}} = \frac{\delta S_{q2} / \delta E_{q2}^{(3)}}{1 + \varepsilon S_{q2}}, \tag{2.20}$$

или, с учётом (2.16),

$$\frac{\beta}{1 + \varepsilon S_{q1}} = \frac{\beta}{1 + \varepsilon S_{q2}} = \frac{\beta}{c_q} = \beta_q. \tag{2.21}$$

Отношение эквивалентности (2.21) определяет условие теплового равновесия двух q-систем и является обобщением *нулевого закона термодинамики* на неаддитивные системы. Оно показывает, что в отличие от классического случая $(q \to 1)$ физическая температура T_{ph} не является обратной величиной множителя Лагранжа, β^{-1}, но

$$T_{ph} = \frac{1}{\beta_q} \equiv \frac{c_q}{\beta} = \left(1 + \frac{1-q}{k_B} S_q\right) T = c_q T\,. \tag{2.22}$$

По поводу соотношения (2.22) сделаем следующее замечание. В большинстве неэкстенсивных систем важную роль играют большой дальностью корреляций длинномасштабные пространственно-временных корреляции в фазовом или геометрическом пространстве. Это означает, в частности, что существенное значение имеет та часть внутренней энергии системы, которая связана с силовым взаимодействием отдельных её частей, а именно потенциальная энергия. В классической статистике внутренняя энергия определяется, как правило, суммой кинетических энергий всех молекул совокупной системы. В такой системе «тепловой баланс» достигается в основном за счёт теплообмена между различными её частями, т.е. «тепло» связано с передачей кинетической энергии молекулами. Таким образом, в классической системе: показания термометра определяются теплом, которое он получает или теряет.

Очевидно, что физическая температура T_{ph} отвечает за «глобальный тепловой баланс» между различными частями системы и определение (2.21) соответствует *нулевому закону термодинамики*. Следует подчеркнуть, что глобальный энергетический баланс сильно отличается от упомянутого выше локального теплового баланса. Последний можно охарактеризовать общей температурой, измеряемой термометром, но любое измерение физической температуры T_{ph} нереально. Соотношение (2.21) показывает, что неизмеримость связана с коэффициентом Тсаллиса c_q, который, согласно определению (2.2), зависит от параметра q.

Таким образом, обобщённый нулевой закон q-термодинамики (2.21) показывает, что физическая температура в статистике Тсаллиса−Мендеса− Пластино отличается от инверсии множителя Лагранжа, β. Этот факт неизбежно приводит к модификации некоторых термодинамических соотношений для неаддитивных систем. В работе (Abe др., 2001; Abe, Okamoto, 2001), в качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения макроскопической термодинамики, выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. В этом случае термодинамические соотношения, (2.16) и (2.17), полученные в рамках статистического подхода, должны быть соответствующим образом видоизменены.

Деформированные термодинамические соотношения. Аналогично температуре T_{ph}, можно определить физическое давление P_{ph}, путём исследования механического равновесия двух независимых q-систем. В этом случае энтропия совокупной системы должна максимизироваться с фиксацией общего объёма $V = V_1 + V_2 = const$. В результате будем иметь

$$\frac{\delta S_{q1} / \delta V_1}{1 + \varepsilon S_{q1}} = \frac{\delta S_{q2} / \delta V_2}{1 + \varepsilon S_{q2}} = \frac{P_{ph}}{T_{ph}}, \qquad (2.22)$$

где P_{ph} − так называемое физическое давление, которое определяется соотношением

$$P_{ph} = \frac{T_{ph}}{1 + k_B^{-1}(1-q)S_q} \frac{\delta S_q}{\delta V} = \frac{T_{ph}}{c_q} \frac{\delta S_q}{\delta V}. \qquad (2.24)$$

Очевидно, что физическая температура и физическое давление, определённые выше обязательно должны привести к модификации определения термодинамической энтропии Клаузиуса.

Теперь рассмотрим структуру преобразования Лежандра. Уравнение (2.16) $\beta = \partial S_q / \partial E_q$ указывает на то, что β и E_q образуют пару переменных Лежандра. Это приводит к следующему определению свободной энергии Гельмгольца (*изохорно-изотермического потенциала*) :

$$F_q^{(3)}(\beta) = E_q^{(3)} - \beta^{-1} S_q^{(3)} = E_q^{(3)} - \beta^{-1} k_B \ln_q \tilde{Z}_q = E_q^{(3)} - k_B T \ln_q \left[c_q^{1/(1-q)} \right]. \qquad (2.25)$$

Это выражение, однако, неудовлетворительно с точки зрения деформированной термодинамики. Свободная энергия должна зависеть от T_{ph}, а не от переменной, β^{-1}.

В работе (Abe, 2000), которой мы далее воспользуемся, предлагается переопределить макроскопическую свободную энергию следующим образом:

$$F_q\,(T_{ph}) = E_q - k_B T_{ph} \ln\left[c_q^{1/(1-q)}\right], \tag{2.26}$$

которая отличается от соответствующего выражения в традиционной термодинамике (здесь и далее супериндекс (2) опущен). Используя соотношения (2.2), (2.16) и (2.22), можно убедиться, что величина F_q на самом деле является функцией T_{phys}. Дифференцируя функцию F_q, в результате получим

$$dF_q = dE_q - \left[\frac{k_B}{(1-q)}\ln c_q\right] dT_{ph} - \frac{T_{ph}}{c_q} dS_q. \tag{2.27}$$

Если теперь использовать первый закон термодинамики

$$d'Q_q = dE_q + P_{ph} dV, \tag{2.28}$$

где Q_q – количество теплоты, подводимое к термодинамической q-системе (или отводимое от неё), то (2.27) можно переписать в виде

$$dF_q = d'Q_q - P_{ph} dV - \left[\frac{k_B}{(1-q)}\ln c_q\right] dT_{ph} - \frac{T_{ph}}{c_q} dS_q. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что определение термодинамической энтропии Клаузиуса модифицируется для неаддитивных систем следующим образом:

$$dS_q = c_q d'Q_q \,/\, T_{ph}. \tag{2.30}$$

Введём теперь в рассмотрение следующие характеристические функции: обобщённую энтальпию $H_q = E_q + P_{ph}V$ и обобщённый термодинамический потенциал $G_q = F_q + P_{ph}V$. Заметим, что все характеристические функции обладают следующим свойством: *если из-*

вестна характеристическая функция, выраженная через соответствующие (свои для каждой характеристической функции) переменные, то из неё можно вычислить любую термодинамическую величину

В этом нетрудно убедиться. Из уравнений

$$dE_q = \frac{T_{ph}}{c_q} dS_q - P_{ph} dV \, , \tag{2.31}$$

$$dH_q = \frac{T_{ph}}{c_q} dS_q + V dP_{ph} \, , \tag{2.32}$$

$$dF_q = -\left[\frac{k_B}{(1-q)} \ln c_q \right] dT_{ph} - P_{ph} dV \, , \tag{2.33}$$

$$dG_q = -\left[\frac{k_B}{(1-q)} \ln c_q \right] dT_{ph} + V dP_{ph} \tag{2.34}$$

следуют обобщённые термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial E_q}{\partial V} \right)_{S_q} = \left(\frac{\partial F_q}{\partial V} \right)_{T_{ph}} = -P_{ph}, \quad \left(\frac{\partial E_q}{\partial S_q} \right)_V = \left(\frac{\partial H_q}{\partial S_q} \right)_{P_{ph}} = \frac{T_{ph}}{c_q} \, , \tag{2.35}$$

$$\left(\frac{\partial H_q}{\partial P_{ph}} \right)_{S_q} = \left(\frac{\partial G_q}{\partial P_{ph}} \right)_{T_{ph}} = V \, , \quad \left(\frac{\partial F_q}{\partial T_{ph}} \right)_V = \left(\frac{\partial G_q}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}} = -\frac{k_B}{(1-q)} \ln c_q \, . \tag{2.36}$$

Уравнение для теплоёмкостей. Как известно, в термодинамике теплоёмкость вещества в наиболее общем виде определяется следующим образом: $C_z = T\left(\partial S / \partial T\right)_z$. Здесь C_z – теплоёмкость в таком процессе, в котором сохраняется постоянным параметр z, где z – любые обобщённые координаты. Наиболее распространёнными являются изобарная теплоёмкость и изохорная теплоёмкость:

$$C_p = \frac{T_{ph}}{c_q} \left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}} \, , \quad C_V = \frac{T_{ph}}{c_q} \left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}} \right)_V \, . \tag{2.37}$$

Так как в соответствии с формулой $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z$ (справедливой для случая двух переменных, когда $y = y(x,z)$ и $u = u(x,z)$) имеем

$$\left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial S_q}{\partial H_q}\right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial H_q}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \text{ и } \left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_V = \left(\frac{\partial S_q}{\partial E_q}\right)_V \left(\frac{\partial E_q}{\partial T_{ph}}\right)_V, \quad (2.38)$$

а из (2.35) и (2.36) следует, что $\left(\frac{\partial S_q}{\partial H_q}\right)_{P_{ph}} = \frac{c_q}{T_{ph}}$, $\left(\frac{\partial S_q}{\partial E_q}\right)_V = \frac{c_q}{T_{ph}}$, то соотношения (2.37) можно записать в виде

$$C_p = \left(\partial H_q / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}}, \quad C_V = \left(\partial E_q / \partial T_{ph}\right)_V . \quad (2.39)$$

Уравнение, устанавливающее связь между теплоёмкостями C_p и C_V может быть получено следующим образом. В соответствии с соотношением (см. Сычев,1991))

$$\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)_n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_n + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)_n, \quad (2.40)$$

являющимся следствием выражения для полного дифференциала функции $z = z(x,y)$, можно записать (полагая $m = x$)

$$\left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_V + \left(\frac{\partial S_q}{\partial V}\right)_{T_{ph}} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} . \quad (2.41)$$

Отсюда, используя уравнение Максвелла $(\partial S_q/\partial V)_{T_{ph}} = (\partial P_{ph}/T_{ph})_V$, получим $C_p - C_V = \frac{T_{ph}}{c_q^2}\left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial T_{ph}}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}$. Это выражение можно представить в другом виде, если использовать *связку трёх производных* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$ (следствие соотношения (2.40) при $m = x$, $n = z$ (Сычев, 1991)), из которой следует

$$\left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial T_{ph}}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} . \qquad (2.42)$$

С учётом (2.42) связь между теплоёмкостями приобретает классический вид:

$$C_p - C_V = -\frac{T_{ph}}{c_q^2}\left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}^2 / \left(\frac{\partial V}{\partial P_{ph}}\right)_{T_{ph}} . \qquad (2.44)$$

Таким образом, стандартная форма термодинамических соотношений (2.25) и (2.44) для уравнения состояния и теплоёмкости, позволяет заключить, что они остаются инвариантными относительно неаддитивной модификации их классических аналогов. Подчеркнем важный факт, что температуры $T = 1/\beta$ и $T_{ph} = 1/\beta_q$ не зависят от выбора нуля энергий, и поэтому они допускают физическую интерпретацию. Заметим, что в дополнение к структуре Лежандра различные другие важные теоремы и свойства остаются q - инвариантными (см. Tsallis, 2009.

Модель классического газа. Рассмотрим теперь модель классического газа на основе неэкстенсивных термодинамических соотношений, полученных в предыдущем пункте. Для системы из N одинаковых частиц гамильтониан имеет вид $H(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}$. Используя равновесное распределение Тсаллиса−Мендеса−Пластино (2.7), получим

$$p(\{\mathbf{p}_i\},\beta) = \tilde{Z}_q^{-1}\left\{1 - k_B^{-1}(1-q)\frac{\beta}{c_q}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - E_q\right]\right\}^{1/(1-q)} , \qquad (2.45)$$

где

$$\tilde{Z}_q(\beta) = \sum_N \int d\mathbf{z}_N \left\{1 - k_B^{-1}(1-q)\frac{\beta}{c_q}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - E_q\right]\right\}^{1/(1-q)} , \qquad (2.46)$$

$$E_q = \frac{1}{c_q}\sum_N \int d\mathbf{z}_N [p(\beta)]^q \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}\right), \qquad (2.47)$$

$$c_q = \sum_N \int d\mathbf{z}_N p^q = \left(\tilde{Z}_q\right)^{1-q}, \quad \beta_q \equiv \beta / c_q = 1 / T_{ph}, \tag{2.48}$$

Далее мы ограничимся областью $0<q<1$. Подставляя распределение (2.45) в формулы (2.46)-(2.48), в результате вычислений получим (Abe,1999, 2000b)

$$\tilde{Z}_q(\beta) = \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left[\frac{2\pi k_B m}{(1-q)\beta_q}\right]^{\frac{3N}{2}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}+\frac{3N}{2}\right)} \left\{1+\frac{(1-q)\beta_q}{k_B}E_q\right\}^{\frac{1}{1-q}+\frac{3N}{2}}, \tag{2.49}$$

$$c_q = \frac{1}{\left[\tilde{Z}_q(\beta)\right]^q} \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left[\frac{2\pi k_B m}{(1-q)\beta_q}\right]^{\frac{3N}{2}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}+\frac{3N}{2}\right)} \left\{1+\frac{(1-q)\beta_q}{k_B}E_q\right\}^{\frac{q}{1-q}+\frac{3N}{2}}, \tag{2.50}$$

$$E_q = \frac{3Nk_B/2\beta}{\left[\tilde{Z}_q(\beta)\right]^q} \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left[\frac{2\pi k_B m}{(1-q)\beta_q}\right]^{\frac{3N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}+\frac{3N}{2}\right)} \left\{1+\frac{(1-q)\beta_q}{k_B}E_q\right\}^{\frac{1}{1-q}+\frac{3N}{2}}, \tag{2.51}$$

где $\Gamma(z)$ –гамма функция.

Используя (2.50) и свойство $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ перепишем (2.51) в виде

$$E_q = \frac{3Nk_B}{2\beta_q} \frac{1+k_B^{-1}(1-q)\beta_q E_q}{1+(1-q)\frac{3N}{2}}, \tag{2.51}$$

откуда следует классическое по форме соотношение для средней энергии системы

$$E_q = \frac{3}{2}\frac{Nk_B}{\beta_q} = \frac{3}{2}Nk_B T_{ph}. \tag{2.52}$$

Выражение (2.49) для $\tilde{Z}_q$, с учётом (2.50) и (2.52), можно переписать в виде

$$\tilde{Z}_q = \left[c_q\right]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}}\left[\frac{2\pi k_B m}{(1-q)\beta_q}\right]^{\frac{3N}{2}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}+\frac{3N}{2}\right)}\left\{1+\frac{3N}{2}(1-q)\right\}^{\frac{q}{1-q}+\frac{3N}{2}} \tag{2.53}$$

в полном согласии с выражением (2.15).

Используя формулу (2.29), определим изохорную теплоёмкость:

$$C_V = \left(\partial E_q / \partial T_{ph}\right)_V = \tfrac{3}{2} N k_B \ . \tag{2.54}$$

Согласно формулам (2.26),(2.52) и (2.52), обобщённую свободную энергию можно переписать следующим образом

$$F_q\,(T_{ph}) = \frac{3}{2} N k_B T_{ph} - k_B T_{ph} \ln \tilde{Z}_q . \tag{2.55}$$

Тогда, согласно (2.25), для физического давления имеем

$$P_{ph} = -\left(\frac{\partial F_q}{\partial V}\right)_{T_{ph}} = k_B T_{ph}\left(\frac{\partial \ln \tilde{Z}_q}{\partial V}\right)_{T_{ph}} . \tag{2.56}$$

Наконец, используя формулы (2.22), (2.49) и (2.52), получим уравнение состояния системы

$$P_{ph} = k_B T_{ph}\left(\partial \ln \tilde{Z}_q / \partial V\right)_{T_{ph}} = k_B T_{ph} N / V \, . \tag{2.57}$$

Таким образом, мы получили весьма нетривиальный вывод о том, что как теплоемкость, так и уравнение состояния классического газа в неэкстенсивной термодинамике Абе имеют ту же форму, что и в обычной статистической механике Гиббса.

2.3. Метод оптимизированных множителей Лагранжа

Правильно выбранный способ осреднения – это важный вопрос статистики Тсаллиса. Выше мы обсудили три различных метода осреднения. По мнению ряда исследователей, процедура осреднения ТМП имеет явные преимущества по сравнению с более ранними. В этом пункте мы рассмотрим новый подход к введению множителей Лагранжа, который значительно упрощает соответствующий анализ без потери лучших свойств формализма ТМП (см. Martınez и др., 2000; Abe, 2000d)

Сравнение выражений (1.34) и (2.5) для удлинённых энтропий Курадо-Тсаллиса и ТМП показывает, что появление избыточного множителя c_q в определении температуры $T_{ph} = c_q / \beta$ обусловлено наличием сомножителя ($1 / c_q$) во втором члене (2.5).

С другой стороны, при вычислении средних значений

$$\langle\langle A \rangle\rangle_q \equiv \int d\mathbf{z} A(\mathbf{r}) \mathscr{P} = \frac{1}{c_q} \int d\mathbf{z} A(\mathbf{r}) p^q = \frac{\langle A \rangle_q}{c_q}$$

микроскопических величин $A(\mathbf{r})$ следует использовать эскортную вероятность (2.1.), содержащую такой сомножитель. Противоречие указанных подходов снимается, если определить средние величины (2.1) (внутреннюю энергию) в альтернативной форме

$$\int d\mathbf{z} p^q \left[A(\mathbf{r}) - \langle\langle A \rangle\rangle_q \right] = 0. \quad (2.58)$$

Формула (2.58) является основой *метода оптимизированных множителей* Лагранжа, в рамках которого удлинённая энтропия Тсаллиса (2.5) принимает вид

$$\mathscr{L} = \frac{k_B}{q-1} \int d\mathbf{z} (p - p^q) - \alpha \int d\mathbf{z} p - \beta \int d\mathbf{z} p^q \left[H(\mathbf{r}) - \langle\langle H \rangle\rangle_q \right]. \quad (2.59)$$

Условие экстремума функционала (2.59) приводит к уравнению

$$\frac{k_B}{1-q} q p^{q-1} - \left\{ \frac{k_B}{1-q} + \alpha + \beta q p^{q-1} \left[H(\mathbf{r}) - \langle\langle H \rangle\rangle_q \right] \right\} = 0, \quad (2.60)$$

решение которого даёт

$$p = \left\{ \frac{1}{q} + \frac{1-q}{q k_B} \alpha \right\}^{-1/(1-q)} \left\{ 1 - \beta k_B^{-1} (1-q) \left[H(\mathbf{r}) - \langle\langle H \rangle\rangle_q \right] \right\}^{1/(1-q)}. \quad (2.61)$$

Определяя статистический вес и температуру выражениями

$$Z = \left(\frac{1}{q} \right)^{1/(1-q)} \left\{ 1 + k_B^{-1} (1-q) \alpha \right\}^{1/(1-q)} = q^{-1/(1-q)} \mathrm{e}_q^{k_B^{-1} \alpha}, \quad T = 1 / \beta, \quad (2.62)$$

приведем распределение (2.61 к каноническому виду

$$p = Z^{-1}\,\mathrm{e}_q^{-\left[H(\mathbf{r}) - \langle\langle H\rangle\rangle_q\right]/k_B T}. \tag{2.62}$$

Поскольку эскортная вероятность (2.2) нормирована по определению, а температура определена стандартным образом, то можно заключить, что метод оптимизированных множителей Лагранжа сохраняет структуру Лежандра статистической теории сложных систем. Кроме этого, при таком подходе устранён основной недостаток осреднения ТМП - самозависимость (self-reference) распределения. Таким образом, единственным недостатком этого метода остаётся неаддитивность энтропии Тсаллиса).

Библиография

Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики. М.: Высш. шк. 1991. 224 с.

Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1952. Т.8. № 2. с.2-20.

Хинчин А.Я. Об основных теоремах теории информации // УМН. 1956. Т.11. №.1(67). с.17-75.

Abe S. Correlation induced by Tsallis' nonextensivity // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.1999. V. 269. № 2. P 402-409.

Abe S. Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems // Eprint arXiv:cond-mat/0012115. 2000a. V.2. P.1-14.

Abe S. Erratum to: "Thermodynamic limit of a classical gas in nonextensive statistical mechanics: Negative specific heat and polytropism". [Phys. Lett. A 262 (1999) 424-429] // Phys. Lett. A , 2000b. V. 267, № 5-6, P. 456-457.

Abe S. Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy // Phys. Lett A. 2000c. V. 271. P.74-79.

Abe S., A problem with the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics. 2000d. arXiv:cond-mat/0006052.

Abe S., Martinez S, Pennini F., Plastino A. Nonextensive thermodynamic relations// Physics Letters A, 2001. V. 281. № 2-2, P. 126-120.

Abe S., Okamoto Y. Eds., "Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications". Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001. ISBN 2-540-41208-5.

Curado E.M.F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. A : Mathematical and General.1991. V.24. № 2. P. L69-72

Hotta M., Joichi I. Composability and generalized entropy // Phys. Lett. A. 1999. V.262. P.202-209.

Landsberg P.T., Tranah D. Thermodynamics of non-extensive entropies I. // Collective Phenomena. 1980. V.2. P.72-80.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 265 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982. 460 p.

Martınez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis' entropy maximization procedure revisited // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 286. № 2. P. 489-502.

Plastino A., Tsallis C., Mendes R.S. The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261, P.524-554

Rathie P.N., Kannappan Pl. A Directed-Divergence Function of Type β // Inform and Contr. 1972. V.20. P.28–45.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1970. 572 p.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P.479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive physics: a possible connection between generalized statistical mechanics and quantum groups // Phys. Lett. A. 1994. V. 195. P. 229-224.

Tsallis C., Levy S.V.F., Souza, André M.C.,Maynard R. Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in Nature // Ph.Rv.L. 1995. V.75. № 20. P.2589-2592.

Tsallis C. Introduction to nonextensive statistic mechanics. Approaching a complex world. New York: Springer.2009.282 p.

Vaida I. Axiomy α-entropie zobecneneho pravdepodobnostniho schematy // Kybernetika. 1968. V.4. P.105-111. (in Czech).

ГЛАВА 3

Разработка на основе меры Реньи равновесной термодинамики и техники фрактального анализа неэкстенсивных систем

В данной главе сконструирована равновесная статистическая термодинамика неэкстенсивных систем и определены её свойства на основе параметрических энтропии и различающей информации Реньи. Показано, что в микроканоническом ансамбле статистика Реньи эквивалентна статистике Больцмана–Гиббса. Выяснено, что временная эволюция замкнутой стохастической системы к равновесному состоянию зависит от знака параметра q*, являющегося мерой неэкстенсивности статистической механики Реньи. Обсуждаются различные варианты построения размерностей разных порядков для фракталов и мультифракалов и проанализированы их особенности.*

Введение

Исследования в области механики неэкстенсивных (неаддитивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса в связи с проявлениями неаддитивных свойств в аномальных физических явлениях. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой автором была введена параметрическая формула статистической q-энтропии

$$S_q^T(p) = \frac{k}{q-1}\left(1 - \sum_i^N p_i^q\right), \quad \sum_i^N p_i = 1,$$

зависящая от некоторого действительного числа q (параметра деформации) и обладающая неаддитивностью для совокупности независимых сложных систем. Теория неэкстенсивных систем, основанная на энтропии Тсаллиса, в настоящее время интенсивно развивается, к сожалению, в основном зарубежными специалистами. В научной литературе доступны систематизированные собрания обзоров, дающие последовательное изложение многочисленных новых результатов, полученных в ходе изучения неэкстенсивных свойств в аномальных физических явлениях (см., например, Tsallis, 1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; Kaniadakis и др., 2002, 2006; Sugiyama, 2004; Kaniadakis, Lissia, 2004**;** Gell-Mann, Tsallis, 2004; Swinney, Tsallis, 2004; Boon, Tsallis, 2005).

Определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивной статистики, проводимых в настоящее время, являются многочисленные (более 30) нелогарифмические энтропии и соответствующие им различающие информации (меры порядка и беспорядка). В работах (Landsberg, Tranah, 1980; Taneja,1989, 1995;т Зарипов, 2010) дана классификация возможных типов статистик, основанных как на классической энтропии Больцмана−Гиббса, так и на различных обобщениях энтропии Тсаллиса. В частности, это статистики основанные на:

- классической энтропии Больцмана−Гиббса

$$S^{BG}(p) = -k\sum_i^N p_i \ln p_i \,,$$

- энтропии Тсаллиса

$$S_q^T(p) = \frac{k}{q-1}\left(1 - \sum_i^N p_i^q\right),$$

- энтропии Лансберга−Ведрала

$$S_q^{LV}(p) = \frac{k}{q-1}\left[\left(\sum_i^N p_i^q\right)^{-1} - 1\right],$$

- энтропии Реньи

$$S_q^R(p) = \frac{k}{1-q}\ln\left(\sum_i^N p_i^q\right),$$

(играющей центральную роль в определении фрактальной размерности) и на соответствующих им однопараметрических различающих информациях, а именно на:

- информации различия Кульбака−Лейблера

$$K^{KL}(p:f) = k\sum_i^N \left(\ln \frac{p_i}{f_i} \right) p_i ,$$

- информации различия Ратье−Канаппана

$$K_q^{RK}(p:f) = \frac{k}{q-1}\left(1 - \sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}\right),$$

- информации различия Лансберга−Ведрала

$$K_q^{LV}(p:f) = \frac{k}{q-1}\left[1 - \left(\sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}\right)^{-1}\right],$$

- информации различия Реньи

$$K_q^{R}(p:f) = \frac{k}{q-1}\ln \sum_i^N p_i^q f_i^{1-q} \ .$$

Поскольку приведенные выше параметризованные энтропии сами по себе являются очень информативными понятиями, количественно характеризующими состояние сложных систем, то результаты работ (Реньи,1961,1970; Тсаллиса,1988, 2001; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989, 1995; Landsberg, Vedral, 1998; Landsberg 1999; Frank, Plastino, 2002; Зарипов, 2006) явились значительным шагом в развитии теоретико-информационного подхода и при разработке принципов неэкстенсивной статистической механики и равновесной термодинамики открытых систем (см., в частности, Lenzi и др., 2000; Рудой, 2003; Zaripov, 2005; Parvan, Biro, 2005; Башкиров, 2006; Колесниченко, Четверушкин, 2014; Колесниченко, 2013, 2016, 2018 a,b; Kolesnichenko, Marov, 2014). При этом важно отметить, что диапазон применения этих и многих других неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, теория плазмы, квантовая механика и статистика, нелинейная динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие (Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989, 1995; Landsberg, Vedral, 1998; Landsberg 1999; Frank, Plastino, 2002; Зарипов, 2006).

Среди всех сложных систем особую важность имеют системы фрактальной природы. Идея исследования фракталов на основе меры Хаусдорфа принадлежит Б. Мандельброту (Mandelbrot, 1975, 1977, 1982; Мандельброт, 2002). Им были получены нетривиальные результаты и построена соответствующая математическая теория. При этом центральная роль в определении фрактальной размерности была отведена энтропии Реньи (Renyi,1961,1970). В настоящее время интерес к изучению свойств фрактальных множеств на основе энтропии Реньи продолжает расти (см. Johal, Rai, 2000; Tsallis, 1995). Обзор уже полученных важных результатов можно найти, в частности, в работах (Шредер, 2001; Божокин, Паршин, 2001; Tsallis, 2002).

Справедливости ради, следует отметить исключительную роль А. Реньи и в становлении неэкстенсивной статистической механики, который в работах (1961,1970), в отличие от классической статистики и теории информации, основанных на энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона, впервые ввёл в рассмотрение параметрическую q-энтропию и соответствующую ей различающую информацию[4)]. Тем самым, А. Реньи предложил ясную формулу связи между энтропией и континуумом мультифрактальных размерностей, указав достаточно универсальный путь к решению проблемы фрактальной параметризации (см. Mandelbrot, 1974, 1975, 1977, 1982; Beck, Schlögl, 1993; Grass- berger,1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984; Halsey и др.,1986; Hentschel, Procaccia,1983; Федер,1991; Смирнов, 1991; Beck, Schlogl, 1993; Кроновер, 2000; Шредер, 2001; Божокин, Паршин, 2001; Мандельброт, 2002; Потапов, 2005; Зарипов, 2002, 2010; Jizba, Arimitsu, 2004; Чумак, 2012). В дальнейшем функционалы Реньи сыграли важнейшую роль не только в физике фракталов и в теории информации, но и в различных областях статистической механики, описывающих динамические свойства нелинейных сложных систем. Последнее связано с тем, что между теорией фракталов, опирающейся на геометрию и теорию размерности, с одной стороны, и теорией хаоса, являющейся развитием теории динамических систем, существует тесная связь.

Важным преимуществом неэкстенсивной статистики Реньи является наличие степенной функции распределения вероятностей, появляющейся (при максимизации энтропии) вместо экспоненциальной функции распределения классической статистики Гиббса. Её использование привело к значительному прогрессу, связанному с исследо-

---

[4)] Эти меры Реньи при преобразуются в традиционную энтропию Больцмана – Гиббса и информацию различия Кульбака–Лейблера ваниями ряда аномальных физических процессов, например, в ядерной физике (Nagy, Romera, 2009), в теории черных дыр (Bialas, Czyz, 2008), при изучении фрактальных и мультифрактальных систем в космологии (Peebles, 1980; Mandelbrot, 1977, 1982; Колесниченко 2016), при производстве частиц высоких энергий (Kropivnitskaya, Rostovtsev, 2003) и т.п.

Вместе с тем, обобщённая термодинамика, основанная на энтропии Реньи, в отличие от термодинамики Тсаллиса (см., например, Kolesnichenko, Marov, 2014; Колесниченко, 2013, 2016, 2018a,b,c), всё ещё не нашла достойного применения при феноменологическом моделировании ряда космогонических явлений. Так, например, при моделировании формирования протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке с учётом фрактальных представлений о свойствах пылевых кластеров в космической аэродисперсной среде, в работах (Kolesnichenko, Marov, 2013; Колесниченко, Маров, 2014) была использована гидродинамическая модель для фрактальной среды (Tarasov, 2005, 2010), для которой существуют точки и области, не заполненные её частицами. Гидродинамическое моделирование подобной среды, обладающей нецелой фрактальной размерностью, было проведено в рамках дробно-интегральной модели (её дифференциальной формы), использующей для учёта фрактальности дробные интегралы, порядок которых определяется массовой размерностью фрактальных пылевых кластеров. К сожалению, универсальные законы термодинамики, основанной на энтропии Реньи (как меры хаоса) и взаимодополняющие её методы фрактального анализа, обосновывающие технику построения дробных мер (мер структурной упорядоченности) фракталов для сложных нелинейных систем, не были привлечены к замыканию обобщённых гидродинамических уравнений Навье−Стокса для фрактальных сред. Это объясняется тем, что, на тот момент времени, эти на первый взгляд столь противоположные научные направления, совокупно описывающие процессы эволюции фрактальных сред, не были разработаны в достаточно близком соотнесении между собой.

В связи с этим обстоятельством, данная работа посвящена конструированию (на основе параметрических энтропии и различающей информации Реньи) статистической термодинамики неэкстенсивных систем и разработке техники получения мультифрактальных размерностей (с определением их свойств), выполненных с учетом их взаимосвязи. Этот подход базируется на негиббсовом равновесном распределении состояний, полученном из условия экстремума энтропии Реньи при заданности осреднённых динамических параметров, характеризующих аномальную систему, а также на осреднении этих параметров по эскортному (нормированному) распределению, удобному при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных сред. Полученные при этом основные термодинамические соотношения аналогичны соотношениям классической статистической термодинамики для замкнутых и открытых систем. Обсуждаются различные варианты построения мер (разных порядков) фракталов и мультифракталов на основе энтропии и информации различия Реньи и основные неравенства для полученных размерностей. На базе двухпараметрической различающей информации рассмотрен перспективный подход к моделированию мультифрактальных мер с двумя характерными масштабами длины.

При написании данной статьи автор существенно опирался на работы (Кульбак,1967; Beck, Schlogl, 1993; Abe; 2000; Шредер,2001; Tsallis, 2001; Зарипов,2002, 2010). В этом ряду особое место занимают исследования Р.Г. Зарипова, в которых впервые в мировой научной литературе было проведено совместное теоретико-информационное рассмотрение динамических и информационных процессов в сложных системах, а также широко представлены различные информационные стороны происходящих в них процессов необратимости, самораспада и самоорганизации.

3.1. Некоторые статистические характеристики энтропии и информации различия Реньи

При аксиоматическом подходе теории вероятностей (Хинчин,1953; Фадеев,1956), для объекта (системы, процесса), который имеет дискретные случайные состояния, в работах (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Rathie, Kannappan, 1972) на базе основополагающих работ (Renyi,1961, 1970) даётся строгий вывод следующих функционалов: однопараметрической q-энтропии $S_q^R(p)$ Реньи для дискретного распределения вероятностей $p_i \geq 0$ [5)]

$$S_q^R(p) = \begin{cases} \dfrac{k}{1-q} \ln \sum_i^N p_i^q, & q \neq 1; \\ -k \sum_i^N p_i \ln p_i, & q = 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

и различающей информации Реньи (меры информации в состоянии с распределением $0 < p < \infty$ относительно состояния с распределением $0 < f < \infty$)

$$K_q^R(p:f) = \begin{cases} \dfrac{k}{q-1} \ln \sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}, & q \neq 1; \\ k \sum_i^N \left(\ln \dfrac{p_i}{f_i} \right) p_i, & q = 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

которые зависят от действительного параметра q, изменяющегося в допустимых пределах (сразу заметим, что в случае фрактальной системы параметр q связан с её фрактальной размерностью (см. Федер, 1991)). Здесь k – постоянная Больцмана, N – число возможных состояний статистического объекта; $p = \{p_1, \ldots, p_N\}$ и $f = \{f_1, \ldots, f_N\}$ – распределения вероятностей, удовлетворяющие условию вероятностной нормировки $\sum_i^N p_i = 1$ и $\sum_i^N f_i = 1$. Свойства этих функций были строго обоснованы в работах (Mandelbrot,1974; Hentschel, Procaccia, 1983).

Покажем, что в пределе слабой связи $q \to 1$ энтропия Реньи $S_q^R(p)$ совпадает с энтропией Больцмана–Гиббса–Шеннона $S_1^R = S(p) \equiv -k \sum_i^N p_i \ln p_i$ (см. Зубарев, 1971), а функционал $K_q^R(p:f)$ совпадает с различающей информацией Кульбака–Лейблера $K_1^R(p:f) = K^{KL}(p:f)$ (см. Kullback, Leibler, 1951; Кульбак, 1967). Действительно, разложение суммы $\Gamma_q(p) \equiv \sum_i^N p_i^q$ по параметру $\varepsilon \equiv q-1$

[5)] В отличие от принятых в теории информации функционалов, в данной работе используются энтропия и различающая информация Реньи статистической физики, имеющие размерность постоянной Больцмана.

показывает, что при $\varepsilon \to 0$ имеет место следующее приближенное равенство

$$\Gamma_q(p) \equiv \sum_i^N p_i^q = \sum_i^N p_i^{1+\varepsilon} = \sum_i^N p_i \exp(\varepsilon \ln p_i) \approx$$

$$\approx \sum_i^N p_i (1 + \varepsilon \ln p_i) = 1 + \varepsilon \sum_i^N p_i \ln p_i \,.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S_{\varepsilon+1}^R(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\frac{k}{\varepsilon} \ln\left(1 + \varepsilon \sum_i^N p_i \ln p_i\right) \right\} \approx -k \sum_i^N p_i \ln p_i = S_1^R(p) \equiv S(p)\,.$$

Аналогичное доказательство легко провести и для различающей информации Реньи

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_{\varepsilon+1}^R(p{:}f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{k}{\varepsilon} \ln\left[1 + \varepsilon \sum_i^N p_i \ln\left(\frac{p_i}{f_i}\right)\right] \right\} \approx$$

$$\approx k \sum_i^N p_i \ln\left(\frac{p_i}{f_i}\right) = K^{KL}(p{:}f)\,.$$

Пусть рассматриваемая статистическая система с мерой Реньи реализуется двумя множествами: множеством всех состояний системы, описываемых распределением вероятностей $p = \{p_1,\dots,p_N\}$, и множеством случайных параметров $A(p) = \{A_1,\dots,A_N\}$, характеризующих систему. Будем далее считать, что средневзвешенное каждой случайной величины A в состоянии с распределением p определяется по формуле[6)]

[6)] В связи с определением средневзвешенного значения случайной величины отметим следующее: в неэкстенсивной статистике Реньи возможны три способа осреднения по распределениям: p_i, p_i^q, $\mathcal{P}$ (см. Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf. br/biblio.htm). Эти способы осреднения, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки, определяют совершенно разные -термодинамики, соответствующие тем или иным статистически аномальным системам. По этой причине выбор осреднения в физических приложениях носит принципиальный характер, поскольку он оказывается существенным при обработке экспериментальных данных (см.Tsallis и др., 1998; Tsallis, 1999; Martinez и др., 2000; Parvan, Biro, 2005; Башкиров,2006).

$$\langle A\rangle_q = \sum_i^N A_i \mathscr{P}_i(q) = \Gamma_q^{-1}(p)\sum_i^N A_i\, p_i^q\,, \tag{3.3}$$

где

$$\Gamma_q(p) \equiv \sum_i^N p_i^q = \exp\left\{k^{-1}(1-q)S_q^R\right\} \tag{3.4}$$

– так называемая обобщённая статистическая сумма; $\mathscr{P}_i(q) = p_i^q / \Gamma_q(p)$ – эскортное (нормированное) распределение (см. Abe, 2000), которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Заметим, что при $p_i \equiv 1$ из (3.3) следует привычное определение среднего арифметического $\langle A\rangle_q = N^{-1}\sum_i^N A_i$. Легко показать, что распределения p_i и $\mathscr{P}_i$ могут быть записаны в следующих эквивалентных формах

$$p_i = \mathscr{P}_i^{1/q}\left[\Gamma_q(p)\right]^{1/q} = \mathscr{P}_i^{1/q} / \sum_i^N \mathscr{P}_i^{1/q}\,, \quad \mathscr{P}_i(q) = p_i^q \exp\left\{k^{-1}(q-1)S_q^R(p)\right\},$$

$$S_q^R(\mathscr{P}) = -\frac{k}{1-q}\ln\left\{\sum_i^N \mathscr{P}_i^{1/q}\right\}^q, \quad k\ln\Gamma_q(p) = (q-1)S_q^R(p).$$

Приведём теперь необходимые для дальнейшего и наиболее важные свойства функционалов (3.1) и (3.2), подробно рассмотренных в основополагающих работах (Реньи, 1961, 1970; Kullback, Leibler, 1951; Кульбак, 1967), а также в монографиях (Beck, Schlogl, 1993; Зарипов, 2002).

3.2. Основные свойства энтропии Реньи

Положительность и выпуклость. Энтропия Реньи является вещественным, неотрицательным и выпуклым функционалом с максимумом (минимумом) при $q>0$ $(q<0)$, т.е. для произвольных распределений p_1 и p_2 имеем следующие неравенства (Харди и др., 1948):

$$S_q^R(p) \geq 0, \quad S_q^R\left(a_1 p^{(1)} + a_2 p^{(2)}\right) \leq a_1 S_q^R(p^{(1)}) + a_2 S_q^R(p^{(2)})\,, \tag{3.5}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и энтропии $S_q^R(p^{(n)}) = \frac{k}{1-q} \ln \sum_i^N \left[p_i^{(n)} \right]^q$, с нормированными распределениями $\sum_i^N p_i^{(n)} = 1$, ($n = 1,2$).

Покажем, что $S_q^R(p) \ge 0$. Пусть $\alpha > 1$ и $\beta < 1$. Поскольку $0 < p_i \le 1$, то справедливо $\sum_i p_i^{\alpha} \le \sum_i p_i \le \sum_i p_i^{\beta}$, или $\ln \sum_i p_i^{\alpha} \le 0 \le \ln \sum_i p_i^{\beta}$; отсюда следует, что $S_{\alpha}^R \ge 0$ при $\alpha > 1$ и $S_{\beta}^R \ge 0$ при $\beta < 1$, т.е. $S_q^R(p) \ge 0$, $\forall q \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

Аддитивность для независимых объектов. Для суммарного случайного объекта (с энтропией $S_q^R\left(p^{(12)}\right) = \frac{k}{1-q} \ln \left(\sum_{i,j}^N p_{ij}^q \right)$ и нормированным распределением $\sum_{i,j}^N p_{ij} = 1$), описываемого совместным мультипликативным распределением вероятностей $p_{ij} = p_i p_j$, где p_i и p_j относятся к разным независимым объектам, справедливо свойство аддитивности для энтропий

$$S_q^R\left(p^{(12)}\right) = S_q^R(p^{(1)}) + S_q^R(p^{(2)}), \tag{3.6}$$

где энтропии $S_q^R\left(p^{(n)}\right) \equiv \frac{k}{1-q} \ln \Gamma_q \left(p^{(n)}\right)$, ($n = 1,2$), с соответствующими нормированными распределениями.

Энтропия равновероятного состояния. Согласно Джейнсу (Jaynes, 1963), равновесные вероятностные распределения Гиббса для стохастической системы могут быть выведены из условия экстремума её энтропии при дополнительных условиях нормировки вероятностного распределения и заданности средневзвешенных значений некоторых случайных параметров $A = \{A_1, \ldots, A_N\}$, характеризующих систему. Этот вариационный метод оказался особенно полезным как в классической статистике (Зубарев, 1971), так и в неэкстенсивной статистической механике (см. Tsallis, 1999; Зарипов, 2002).

Рассмотрим здесь экстремум энтропии Реньи $S_q^R(p)$ только при сохранении нормировки распределения p. Для этого вычислим безусловный экстремум функционала $\mathcal{L}(p) \equiv \dfrac{k}{1-q} \ln \sum_i^N p_i^q - \alpha \sum_i^N p_i$, где α есть множитель Лагранжа. Из равенства $\delta\mathcal{L} = 0$, получим $p_i = const$. Из условия нормировки следует равновероятное распределение $p_i = 1/N$. Таким образом, экстремальное значение энтропии Реньи $S_q^R(p) = S(p) = k \ln N$ не зависит от параметра экстенсивности q и совпадает с соответствующим значением энтропии Больцмана–Гиббса–Шеннона. Для второй вариации удлинённой энтропии Реньи $\mathcal{L}(p)$ имеет место неравенство $\delta^2\mathcal{L} > 0$ при $q < 0$ (или $\delta^2\mathcal{L} < 0$ при $q > 0$), что и доказывает утверждение о максимуме (минимуме) энтропии $S_q^R(p)$.

Неравенства. Получим теперь некоторые важные для дальнейших целей неравенства, которым удовлетворяет энтропия Реньи. При использовании приведённых выше определений классической энтропии Больцмана–Гиббса–Шеннона S и различающей информации Кульбака– Лейблера K^{KL}, легко получить соотношения:

$$S(\mathcal{P}) \equiv -k \sum_i^N \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i = -kq \sum_i^N \mathcal{P}_i \ln p_i - (1-q) S_q^R, \tag{3.7}$$

$$K^{KL}(\mathcal{P}:p) \equiv k \sum_i^N \mathcal{P}_i \ln\left(\frac{\mathcal{P}_i}{p_i}\right) = k(q-1) \sum_i^N \mathcal{P}_i \ln p_i - (1-q) S_q^R, \tag{3.8}$$

$$K^{KL}(p:\mathcal{P}) \equiv k \sum_i^N p_i \ln\left(\frac{p_i}{\mathcal{P}_i}\right) = -(1-q) S(p) + (1-q) S_q^R, \tag{3.9}$$

которые позволяют получить следующие равенства (справедливые для переходов между состояниями с распределениями $\mathcal{P}$ и p):

$$\frac{q}{q-1} K^{KL}(\mathcal{P}:p) = -\left[S(\mathcal{P}) - S_q^R(p) \right], \tag{3.10*}$$

$$\frac{1}{q-1} K^{KL}(p:\mathcal{P}) = -\left[S_q^R(p) - S(p) \right], \tag{3.10**}$$

$$\frac{q}{q-1} K^{KL}(\mathcal{P}:p) + \frac{1}{q-1} K^{KL}(p:\mathcal{P}) = -\left[S(\mathcal{P}) - S(p) \right]. \tag{3.10***}$$

Учитывая теперь условие $K^{KL} \geq 0$ выпуклости для информации различия Кульбака−Лейблера (см., например, Зарипов, 2002), из соотношений (3.10) получим неравенства

$$S(\mathscr{P}) > S_q^R(p) > S(p), \tag{3.11}$$

справедливые в области $0<q<1$. При $q>1$ знаки в (3.11) меняются на противоположные

$$S(\mathscr{P}) < S_q^R(p) < S(p). \tag{3.12}$$

Соответственно, в области $q<0$ справедливы неравенства

$$S_q^R(p) > S(\mathscr{P}) \quad \text{и} \quad S_q^R(p) > S(p). \tag{3.13}$$

Используем теперь неравенство (теорема №16 в монографии (Харди и др., 1948))

$$\left(\sum p_i a_i^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum p_i a_i^{r'}\right)^{1/r'},\ r' > r, \tag{3.14}$$

справедливое для произвольных $r, r' \in \mathbb{R},\ r, r' \neq 0,\ a_i > 0,\ p_i \geq 0,\ \sum p_i = 1.$ Полагая в (3.14) $a_i = p_i,\ r = q-1,\ r' = q'-1$, получим

$$\left(\sum p_i^q\right)^{1/(q-1)} \leq \left(\sum p_i^{q'}\right)^{1/(q'-1)}, \text{ или } \frac{\ln Z_q(p_i)}{q-1} \leq \frac{\ln Z_{q'}(p_i)}{q'-1},\ (q' > q),$$

что равносильно следующему фундаментальному неравенству для энтропии Реньи:

$$S_{q'}^R \geq S_q^R,\ \ (q' > q). \tag{3.15}$$

Предположим теперь, что $q' > q$ и что q' и q имеют один и тот же знак, и примем во внимание стандартные неравенства (теорема № 27 в монографии (Харди и др., 1948))

$$\left(\sum a_i\right)^r \geq \sum a_i^r,\ (r \geq 1); \quad \left(\sum a_i\right)^r \leq \sum a_i^r,\ (0 \leq r \leq 1), \tag{3.16}$$

справедливые для произвольных значений $a_i > 0$ и положительных $r \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы отсюда получить ещё одно важное неравенство для энтропии Реньи, положим $a_i = p_i^q$, $r = q'/q$. Пусть теперь $q' > q > 0$, тогда $r > 1$ и из (3.16) следует

$$\left(\sum p_i^q\right)^{q'/q} \ge \sum p_i^{q'},\ (q' > q > 0). \qquad (3.16^*)$$

Если $0 > q' > q$, то имеем $0 \le r = q'/q < 1$ и, следовательно,

$$\left(\sum p_i^q\right)^{q'/q} \le \sum p_i^{q'},\ (0 > q' > q). \qquad (3.16^{**})$$

Если возвести неравенства (3.16*) и (3.16**) в степень $1/q'$, то для обоих случаев справедливо неравенство

$$\left(\sum p_i^q\right)^{1/q} \ge \left(\sum p_i^{q'}\right)^{1/q'},\quad (q' > q,\ q'q > 0). \qquad (3.16^{***})$$

Наконец, с учётом (3.16***) и формулы $\ln \Gamma_q(p) = \ln \sum_i^N p_i^q = k^{-1}(1-q) S_q^R$, окончательно получим (применяемое далее) неравенство для энтропии Реньи

$$\frac{(1-q)}{q} S_q^R \ge \frac{(1-q')}{q'} S_{q'}^R,\quad (q' > q,\ q'q > 0). \qquad (3.17)$$

Помимо полученных выше неравенств для энтропии Реньи, справедливы также следующие неравенства:

$$S_q^R(p) \le k \ln N,\quad (q > 0);\quad S_q^R(p) \ge k \ln N,\quad (q < 0), \qquad (3.18)$$

$$S_q^R\left(p^{(12)}\right) \le S(p^{(1)}) + S(p^{(2)}), \qquad (3.19)$$

$$S_q^R\left(p^{(12)}\right) \ge S_q^R(p^{(1)}),\quad S_q^R\left(p^{(12)}\right) \ge S_q^R(p^{(2)}), \qquad (3.20)$$

а также и некоторые другие, которые можно найти, например, в работах (Beck, 1990; Beck, Schlögl, 1993; Зарипов, 2002).

Основные свойства различающей информации Реньи. Наряду с энтропией Реньи (3.1), информация различия Реньи (3.2)

$$K_q^R(p:f) \equiv \frac{k}{q-1} \ln \sum_i^N p_i^q f_i^{1-q} = \frac{k}{q-1} \ln \sum_i^N p_i \left(p_i / f_i\right)^{q-1}$$

также относятся к наиболее существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической q-системы. Являясь функционалом, она характеризует переход системы от состояния p в состояние f, когда статистические наблюдения ведутся относительно состояния p.

Рассмотрим здесь некоторые наиболее важные свойства информации различия Реньи (см., например, Beck, Schlögl,1993; Tsallis, 2001, 2009; Зарипов, 2002).

Выпуклость. Различающая информация есть вещественный, выпуклый и положительный (или отрицательный) функционал с минимумом (максимумом) при $q>0$ $(q<0)$. Покажем это. Для действительного числа $r>0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{r^{q-1}-1}{q-1} &\geq 1-1/r, \quad \text{если}\, q>0, \\ &= 1-1/r, \quad \text{если}\, q=0, \\ &\leq 1-1/r, \quad \text{если}\, q<0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Поэтому, например, для $q<0$ справедливо $\left(pf^{-1}\right)^{q-1} \geq q+(1-q)\left(f\,p^{-1}\right)$. Отсюда следует, что

$$K_q^R(p{:}f)=\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i\left(p_i/f_i\right)^{q-1} \leq \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i\left\{q+(1-q)\left(p_i/f_i\right)\right\}=0,$$

т.е. имеют место следующие неравенства

$$K_q^R(p{:}f)\leq 0, \quad (q<0); \quad K_q^R(p{:}f)\geq 0, \quad (q>0). \tag{3.22}$$

Заметим, что поскольку при $p=f$ имеет место равенство $K_q^R(p:p)=0$, то различающая информация Реньи является функцией Ляпунова[7].

Справедливо также неравенство

---

[7] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$K_q^R\left[(a_1p_1+a_2p_2):f\right]\le a_1K_q^R\left(p_1:f\right)+a_2K_q^R\left(p_2:f\right), \qquad (3.23)$$

где $a_1+a_2=1$ и $a_1>0$, $a_2>0$.

Аддитивность для двух независимых объектов. Пусть состояние суммарного случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p^{(12)}$ и $f^{(12)}$. Тогда различающая информация совокупной и отдельных систем определяются выражениями

$$K_q^R\left(p^{(12)}:f^{(12)}\right)=\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_{i,j}^N p_{ij}^q f_{i,j}^{1-q}, \qquad (3.24)$$

$$K_q^R\left(p^{(1)}:f^{(1)}\right)=\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_i^N p_i^q f_i^{1-q}, \quad K_q^R\left(p^{(2)}:u^{(2)}\right)=\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_j^N p_j^q u_j^{1-q}. \qquad (3.25)$$

В случае статистической независимости состояний имеет место условие мультипликативности $p_{ij}=p_ip_j$ и $f_{ij}=f_if_j$. Отсюда, при использовании (3.24) и (3.25), легко получить равенство

$$K_q^R\left(p^{(12)}:f^{(12)}\right)=K_q^R\left(p^{(1)}:f^{(1)}\right)+K_q^R\left(p^{(2)}:f^{(2)}\right), \qquad (3.26)$$

означающее аддитивность информации различия Реньи для суммарного случайного объекта. При $q=1$ из (3.26) следует свойство аддитивности для информации различия Кульбака–Лейблера $K^{KL}(p:f)$ с мерой Больцмана–Гиббса–Шеннона (см. Beck, Schlogl,1993).

Следствие различающей информации Реньи с равновероятным распределением для $f=\left\{f_1,f_2,\dots,f_N\right\}$. Покажем, что энтропия Реньи $S_q^R(p)$ произвольного состояния p меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния системы при $q>0$ $(q<0)$. Подставляя распределение $f_i=1/N$ в (3.21), получим

$$K_q^R(p_1:f_1)=\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_i^N p_i^q N^{q-1}=-\left(S_q^R-k\ln N\right). \qquad (3.27)$$

Используя (3.27) и условия выпуклости (3.22) функционала K_q^R, получим неравенства (3.18), означающие, что энтропия Реньи меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ ($q<0$).

Неравенства. Для различающей информации Реньи справедливы также следующие неравенства:

$$K_q^R\left(p^{(12)}:f^{(12)}\right)\leq K_q^R\left(p^{(1)}:f^{(1)}\right)+K_q^R\left(p^{(2)}:f^{(2)}\right), \tag{3.28}$$

$$K_q^R(p:f)>K^{KL}(\mathscr{P}:f),\quad K_q^R(p:f)>K^{KL}(p:f),\quad (q<0), \tag{3.29}$$

$$K^{KL}(\mathscr{P}:f)<K_q^R(p:f)<K^{KL}(p:f),\quad (q>1), \tag{3.30}$$

$$K^{KL}(\mathscr{P}:f)>K_q^R(p:f)>K^{KL}(p:f),\quad (0<q<1). \tag{3.31}$$

Мера неточности. Наряду с информацией различия (3.2), функционал

$$H_q(p:f)=S_q^R(p)+K_q^R(p:f)=\frac{k}{1-q}\ln\left[\sum_i^N p_i^q \,/\sum_i^N p_i\,\left(p_i\,/\,f_i\right)^{q-1}\right] \tag{3.32}$$

также относятся к существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической q-системы. Используемый далее, этот функционал, являющийся мерой статистической неточности определения одного состояния случайного объекта относительно другого и определяемый суммой энтропии и информации различия, впервые был введён в теорию информации в работе (Nath, 1975). Различающая информация $K_q^R(p:f)$, представляющая собой отрицательный вклад в меру неточности, является, таким образом, информацией о снятой мере неточности. При $p=f$ функционал (33) совпадает с энтропией Реньи, то есть $H_q(p:p)=S_q^R(p)$.

3.3. Экстремум энтропии Реньи и негиббсовое распределение. Термодинамические соотношения

Пусть случайными объектами неэкстенсивной системы являются рассматриваемые в статистической физике дискретные частицы с энергией H_i. Рассмотрим равновесное состояние системы. Далее будем использовать нормированное эскортное распределение $\mathcal{P}_i(q)$, поскольку осреднение с ним приводит к аддитивности средних энергий E_q (см. формулу (3.46)). Для определения равновесного распределения найдем безусловный экстремум энтропии Реньи $S_q^R(p)$ при сохранении нормировки и заданности средней энергии частиц

$$E_q = \sum_i^N \mathcal{P}_i(q) H_i\,, \quad \sum_i^N p_i = 1\,. \tag{3.33}$$

Согласно вариационному принципу Джейнса, определим функционал

$$\mathcal{L}(p) \equiv \frac{k}{1-q} \ln \sum_i^N p_i^q - \beta \sum_i^N H_i \mathcal{P}_i - k\lambda \sum_i^N p_i\,, \tag{3.34}$$

где параметры β и λ являются множителями Лагранжа. Тогда, из условия

$$\delta\mathcal{L} = \frac{kq}{1-q} \Gamma_q^{-1} \sum_i^N p_i^{q-1} \delta p_i - \beta q \Gamma_q^{-1} \sum_i^N p_i^{q-1} \left(H_i - E_q\right) \delta p_i - k\lambda \sum_i^N \delta p_i = 0$$

получим равенство

$$\Gamma_q^{-1} p_i^{q-1} \left[1 - k^{-1}(1-q)\beta\left(H_i - E_q\right)\right] = \frac{(1-q)\lambda}{q}\,, \tag{3.35}$$

из которого следует значение $\lambda = q/(1-q)$ и негиббсовое равновесное распределение с параметром β

$$p_{i0}(\beta) = \frac{1}{Z_q} \left\{1 - k^{-1}\beta(1-q)\Delta\left[H_i\right]\right\}^{1/(1-q)}. \tag{3.36}$$

Здесь

$$\Gamma_q(p) \equiv \sum_i^N p_i^q\,, \tag{3.37}$$

$$Z_q(\beta) = \Gamma_q^{1/(1-q)} = \sum_i^N \left\{1 - k^{-1}\beta(1-q)\Delta\left[H_i\right]\right\}^{1/(1-q)} > 0 \tag{3.38}$$

– статистический интеграл; $\beta = 1/T$ – обратная температура (изменяющаяся в пределах допустимых значений); $\Delta\left[H_i\right] \equiv (H_i - E_{q0})$ – флуктуация энергии частиц. Таким образом, распределение вероятностей состояния статистического ансамбля неэкстенсивных систем с мерой Реньи, которые находятся в тепловом равновесии с внешней средой (термостатом) и могут обмениваться с ней энергией при постоянном объёме и постоянном числе частиц, соответствует обобщённому каноническому ансамблю Гиббса (3.36).

Равновесное распределение (3.36) можно переписать в виде

$$p_{i0}(\beta_0)=\left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta[H_i]}{\Gamma_q(\beta_0)}\right]^{\frac{1}{1-q}}=\frac{\exp_q\{-\Delta[H_i]/kT_0\}}{\exp\left(S_{q0}^R/k\right)}. \qquad (3.39)$$

Если $q=1$, то из (3.39) следует равновесное каноническое распределение Гиббса: $p_{i0}=\exp\{-[H_i-E_0+T_0S_0]/kT_0\}$ классической статистики Больцмана–Гиббса, где $S_0(p_0)=k\ln\sum_i^N\exp\{-\Delta[H_i]/kT_0\}$ (см., например, Зубарев, 1971).

Обобщённые термодинамические соотношения. Подстановка распределения (3.36) в (3.1) даёт следующее экстремальное значение энтропии Реньи при равновесном распределении p_{i0}

$$S_{q0}^R\equiv S_q^R(p_0)=\frac{k}{1-q}\ln\left(\sum_i^N p_{i0}^q\right)=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\sum_i^N p_{i0}\frac{\Gamma_q(\beta_0)}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta[H_i]}\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\sum_i^N\Gamma_q(\beta_0)p_{i0}\left[1+\frac{k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta[H_i]}{1-k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta[H_i]}\right]\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\Gamma_q(\beta_0)+\sum_i^N p_{i0}\frac{\Gamma_q(\beta_0)k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta[H_i]}{1-k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta[H_i]}\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\Gamma_q(\beta_0)+k^{-1}(1-q)\beta_0\sum_i^N\Delta[H_i]p_{i0}^q\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\Gamma_q(\beta_0)=k\ln Z_q(\beta_0). \qquad (3.40)$$

Тогда свободная энергия F_q для равновесной неэкстенсивной системы в термостате с температурой $T=1/\beta$ и статистический интеграл задаются соотношениями (далее индекс «0» будем опускать).

$$S_q^R = k\ln Z_q(T),\quad F_q = E_q - TS_q^R = E_q - kT\ln Z_q, \tag{3.41}$$

$$E_q = \sum_i^N \mathscr{P}_i(q) H_i = \frac{1}{\Gamma_q(T)} \sum_i^N p_i^q H_i, \tag{3.42}$$

$$Z_q(T) = \left[\Gamma_q(T)\right]^{1/(1-q)} = \left(\sum_i^N p_i^q\right)^{1/(1-q)}. \tag{3.43}$$

При дифференцировании энтропии Реньи для равновесного состояния, заданной выражением (3.40), получим следующие соотношения

$$\frac{\partial S_q^R}{\partial E_q^R} = \frac{1}{T},\quad E_q = F_q - T\frac{\partial (F_q)}{\partial T},\quad \frac{\partial E_q}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 F_q}{\partial T} = C_{qv}, \tag{3.44}$$

аналогичные соотношениям классической равновесной статистической термодинамики замкнутых систем.

Термодинамическое равновесие. Рассмотрим термодинамическое равновесие двух независимых q-систем с энтропиями $S_{q1}^R = S_q^R\left(p^{(1)}\right)$ и $S_{q2}^R = S_q^R\left(p^{(2)}\right)$, представляющих собой общую замкнутую систему с энтропией $S_q^R = S_q^R\left(p^{(12)}\right)$ при $p^{(12)} = p^{(1)}p^{(2)}$ и энергии E_{q12}. Согласно свойству аддитивности (3.6) энтропии Реньи (3.1), для энтропии суммарной системы имеем $S_{q12}^R = S_{q1}^R + S_{q2}^R$.

Для нахождения осреднённой энергии E_{q12}^R суммарной системы воспользуемся распределением (3.36). Тогда, используя условие мультипликативности $p_{12} = p_1 p_2$, будем иметь

$$\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta\Delta_{12}[H_i]\right\}}{\exp\left\{k^{-1}(S_{q1}^R + S_{q2}^R)\right\}} = \frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta\Delta_1[H_i]\right\}}{\exp\left(k^{-1}S_{q1}^R\right)} \times \frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta\Delta_2[H_i]\right\}}{\exp\left(k^{-1}S_{q2}^R\right)},$$

откуда, с учетом формулы $\exp_q(x)\exp_q(y)=\exp_q(x+y+(1-q)xy)$ (см.Tsallis, 2009), получим

$$\Delta_{12}[H_i]=\Delta_1[H_i]+\Delta_2[H_i]-(1-q)k^{-1}\beta\Delta_1[H_i]\Delta_2[H_i]. \qquad (3.45)$$

В этом соотношении необходимо использовать условие аддитивности осредненных энергий

$$E_{q12}=E_{q1}+E_{q2}, \qquad (3.46)$$

поскольку без этого предположения осредненные величины будут зависеть от микроскопических величин, что является неприемлемым (см., например, Zaripov, 2005). Тогда из (3.46) для микроскопических энергий получим следующее условие квазиаддитивности микроскопических энергий

$$H_{i12}=H_{i1}+H_{i2}-(1-q)k^{-1}\beta\Delta_1[H_i]\Delta_2[H_i]. \qquad (3.47)$$

Заметим, что именно наличие этого равенства является той причиной, благодаря которой статистику на мере Реньи относят к неэкстенсивной статистической механике.

При варьировании соотношений (3.6) и (3.46) получатся следующие равенства $\delta S^R_{q12}=\delta S^R_{q1}+\delta S^R_{q2}$, $\delta E_{q12}=\delta E_{q1}+\delta E_{q2}$, из которых следует

$$\delta S^R_{q1}/\delta E_{q1}=\delta S^R_{q2}/\delta E_{q2}=\beta \qquad (3.48)$$

– равенство температур для двух независимых систем при их тепловом контакте. Таким образом, параметр β действительно является интенсивной величиной и играет роль обратной температуры $\beta\equiv 1/T$ в термодинамике Реньи.

***H*-теорема в статистике Реньи**. Рассмотрим теперь замкнутую систему, для которой распределение p_i является произвольным, а распределение p_{i0} – равновесным

$$p_{i0}=\left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta[H_i]}{\Gamma_q(p_0)}\right]^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (3.49)$$

Тогда спонтанный переход между этими состояниями описывается следующей различающей информацией Реньи (см. Zaripov, 2005)

$$K_q^R(p:p_0)=\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q p_{i0}^{1-q}=\frac{k}{q-1}\ln\left\{\Gamma_q(p)\sum_i^N \mathcal{P}_i(q)p_{i0}^{1-q}\right\}=$$

$$=\frac{k}{q-1}\ln\Gamma_q(p)+\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N \mathcal{P}_i(q)\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta\left[H_i\right]}{\Gamma_q(p_0)}=$$

$$=-\left[S_q^R(p)-S_q^R(p_0)\right]+\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N \mathcal{P}_i(q)\left\{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta\left[H_i\right]\right\}=$$

$$=-\left(S_q^R-S_{q0}^R\right)+\frac{k}{q-1}\ln\left\{1-\frac{(1-q)}{kT_0}(E_q-E_{q0})\right\} \qquad (3.50)$$

с равенством $K_q^R(p:p_0)=0$ при распределении $p_i=p_{i0}$.

Если $q=1$, то из (3.50) следует известное выражение для информации различия Кульбака–Лейблера неэкстенсивной статистической механики (см. Зарипов, 2002; Колесниченко 2018c)

$$K^{KL}(p:p_0)=-(S-S_0)+T_0^{-1}(E-E_0)\geq 0, \qquad (3.51)$$

характеризующее степень отклонения хаотической системы от полного равновесия.

При выполнении условия Гиббса $E_q=E_{q0}$ (см. Климонтович,1990) и с учётом свойства (3.22) знакоопределенности информации различия $K_q^R(p:p_0)$ из (3.51) следуют два неравенства

$$K_q^R(p:p_0)=-(S_q^R-S_{q0}^R)>0 \ \text{ при } q>0, \qquad (3.52)$$

$$K_q^R(p:p_0)=-(S_q^R-S_{q0}^R)<0 \ \text{ при } q<0, \qquad (3.52^*)$$

которые обобщают теорему Гиббса на неэкстенсивную статистику Реньи. Согласно этой теореме, для замкнутой системы энтропия Реньи $S_q^R=S_{q0}^R-K_q^R(p:p_0)$ возрастает (убывает) до экстремального её значения S_{q0}^R при $q>0$ $(q<0)$ одновременно с уменьшением (увеличением) положительной (отрицательной) информации $K_q^R(p:p_0)$. Таким образом, различающая информация представлена здесь в виде отрицательного вклада в текущую энтропию Реньи S_q^R и потому может быть названа негэнтропией (Шредингер, 1947).

Поскольку информация различия Реньи является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того чтобы состояние равновесия S_{q0} было устойчивым, необходимо выполнение следующих неравенств

$$\frac{dK_q^R}{dt}=-\frac{d\left(S_q^R-S_{q0}^R\right)}{dt}<0 \quad \text{при } q>0; \quad \frac{dK_q^R}{dt}=-\frac{d\left(S_q^R-S_{q0}^R\right)}{dt}>0 \quad \text{при } q<0. \qquad (3.53)$$

Из соотношений (3.54) следует неравенство для энтропии Реньи: $dS_q/dt>0$ при $q>0$ и $dS_q/dt<0$ при $q<0$, которые выражают H-теорему для рассматриваемой стохастической q-системы: при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия Реньи замкнутой системы возрастает (убывает) до экстремального ее значения S_{q0}^R при $q>0$ $(q<0)$.

Рассмотрим теперь открытые системы, находящиеся в окружении с температурой T_0. Согласно равенству (3.50) они характеризуются физической различающей информацией Реньи

$$K_q^R(p:f_0)=\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_i^N p_i^q f_{i0}^{1-q}=-\left(S_q^R-S_{q0}^R\right)+\frac{k}{q-1}\ln\left\{1-\frac{(1-q)}{kT_0}\left(E_q-E_{q0}\right)\right\} \qquad (3.50^*)$$

при распределении (3.49)

$$f_{i0}=\left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta\left[H_i\right]}{\Gamma_q(f_0)}\right]^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (3.49^*)$$

Дифференцируя (3.50*) по времени, получим следующее соотношение для открытых неэкстенсивных q-систем с мерой Реньи

$$dK_q^R \geq -dS_q^R + \frac{dE_q}{T_0\left[1-(1-q)k^{-1}\beta_0(E_q - E_{q0})\right]}, \tag{3.54}$$

которое отличается от обобщённого соотношения Гиббса термодинамики аддитивных информационно-физических процессов $dK^{KL} \geq -dS + dE/T_0$ (см. формулу (3.41) в работе (Колесниченко, 2018c)) наличием разности средних энергий частиц в этих сопряжённых системах. Знак равенства имеет место для обратимых процессов, а неравенства – для необратимых.

Покажем теперь, что между неэкстенсивной термодинамикой Реньи сложных стохастических систем, с одной стороны, и теорией фракталов, опирающейся на геометрию и статистику, существует тесная взаимосвязь.

3.4. Определения фрактала и фрактальной размерности

Фракталы появляются во множестве физических приложений (см. Mandelbrot, 1977). Фрактальные объекты в пространстве или фрактальные процессы во времени являются самоподобными (или самоафинными) и обнаруживают скейлинговое поведение на разных пространственно-временных масштабах. В частности, их широко используют в космологии (см., например, Bialas, Czyz, 2008; Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014; Kolesnichenko, 2016), космогонии звёздных и планетных систем (см. Пиблс, 1983; Мандельброт, 2002; Колесниченко, Маров, 2014), в физике Солнца (Могилевский, 2001), а также для понимания динамического поведения хаотических систем (Lorenz, 1963), когда фракталами являются все «странные» аттракторы, связанные с непрерывными потоками (см. Ruelle, Takens, 1971; Малинецкий, Потапов, 1988). Основной характеристикой фрактала является его размерность.

Регулярный фрактал. **Мера Хаусдорфа–Безиковича**. Напомним теперь некоторые точные определения. Регулярными фракталами называют геометрические объекты в евклидовом пространстве (с мерой d), которые обладают свойством самоподобия[8)] (т.е. неизменно-

[8)] Самоподобие характерно лишь для *регулярных фракталов*, способ построения которых имеет детерминированный характер. Однако, если в алгоритм их создания входит элемент случайности (как, например, во мности основных геометрических особенностей при изменении масштаба) и имеют дробную метрическую меру (в смысле Минковского или Хаусдорфа) либо меру, отличную от топологической. При этом мера (размерность) регулярного фрактала определяется следующим образом. Предположим, что для полного покрытия фрактала d-мерными гипершарами[9)] радиуса Δ необходимо не менее чем $N(\Delta)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых Δ величина $N(\Delta)$ меняется с Δ по степенному закону $N(\Delta) \sim 1/\Delta^{D_H}$, то показатель скейлинга D_H называется хаусдорфовой или фрактальной мерой этого объекта. Это определение может быть представлено в виде (Hausdorff, 1919; Btsicovitch,1934)

$$D_H = -\lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln N(\Delta)}{\ln \Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln N(\Delta)}{\ln(1/\Delta)}. \tag{3.55}$$

В качестве примера вычислим фрактальную размерность *канторового множества*, схема построения которого приведена на Рис.3.1.

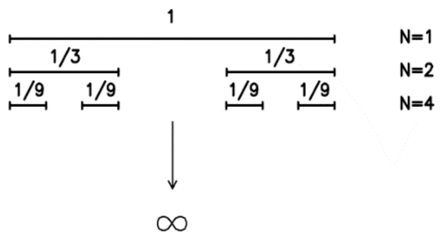


Рис.3.1.Канторовское множество.

Начнём с отрезка единичной длины. На первом шаге построения фрактала заменим его двумя отрезками с длинами $1/3$, примыкающими соответственно к его левому и правому концам. Очевидно, что на n-м шаге рекуррентного построения имеется 2^n отрезков генератора длиной $1/3^n$ каждый.

Предел $\Delta \to 0$ соответствует пределу $n \to \infty$. Поэтому фрактальная размерность равна

гих процессах диффузионного роста кластеров), то возникают так называемые случайные фракталы, для которых свойство самоподобия справедливо только после осреднения по всем статистическим реализациям объекта.

[9)] Под "шаром" в зависимости от задачи следует понимать также же и куб, и квадрат, и просто отрезок прямой.

$$D_H = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3^n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Размерность Хаусдорфа D_H, рассчитанная с использованием формулы (3.55) для некоторых известных фрактальных множеств, приведена в табл.1. (Шредер, 2001; Мандельброт 2002).

Таблица 3.1

Фрактальное множество	D_H
Канторовское множество)	0,63
Триадная кривая Коха	1,26
Кривая Мандельброта-Гивена	1,89
Салфетка Серпинского	1,58
Ковер Серпинского	1,89
Кривая Госпера	1,13
Универсальная кривая Менгера	2,73

Более сложные объекты – мультифракталы – являются суперпозицией нескольких регулярных фракталов различных размерностей и имеют более сложные свойства, чем непосредственно монофракталы (см. Mandelbrot, 1977, 1982; Шредер,2001; Божокин, Паршин, 2001).

3.5. Континуум мультифрактальных размерностей Реньи

Мультифракталы. Обобщенная фрактальная размерность. К мультифракталам относятся неоднородные фрактальные объекты, для характеристики которых недостаточно одной размерности Хаусдорфа D_H, а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно. Причина этого заключается в том, что в отличие от регулярных фракталов (геометрически подобных объектов) мультифракталы (точнее их фрагменты), наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D_H, являются статистически подобными копиями целого, т.е. обладают некоторым набором статистических свойств. Для характеристики таких структур вводятся в рассмотрение различные информационные размерности, которые чувствительны к неоднородностям подобных множеств (Grassberger, Procaccia, 1983; Бадии, Полити, 1988). Одним из наиболее содержательных описаний фрактальных размерностей служат обобщённые размерности Реньи $D(q)$,разных порядков.

Пусть часть пространства $\mathcal{G}$, занятая фрактальным объектом покрыта равными (гипер) кубическими ячейками с ребром $\Delta > 0$ и объёмом Δ^d. Обозначим через $n_i(\Delta)$ число точек (элементов системы), в гиперкубе с номером $i = 1,2,\ldots,N(\Delta)$, где $N(\Delta)$ – полное число элементов выбранного Δ-покрытия. Тогда вероятность, характеризующая относительную заселенность ячейки i, равна $p_i(\Delta) = n_i(\Delta) / \sum_i^{N(\Delta)} n_i$. Ясно, что $\sum_i^{N(\Delta)} p_i^q = 1$. Реньи в работе (Renyi,1961) ввел энтропию $S_q^R = \dfrac{k}{1-q} \ln \sum_i^{N(\Delta)} p_i^q$, как q-момент меры Δ-покрытия. Рассмотрим обобщённую статистическую сумму

$$\Gamma(q,\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta), \tag{56}$$

которая характеризуется показателем степени q, принимающим любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$. Тогда, спектр обобщенных фрактальных размерностей $D(q)$, характеризующих распределение вероятностей $p_i(\Delta)$ в области $\mathcal{G}$, определяется соотношением (Hentschel, Procaccia,1983)

$$D(q) \equiv \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \Gamma(q,\Delta)}{\ln \Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{(q-1)\ln\Delta} \ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta) =$$

$$= -\frac{1}{k} \lim_{\Delta\to 0} \frac{S_q^R(p)}{\ln\Delta} = \frac{1}{q-1}\tau(q), \tag{3.57}$$

где

$$\tau = \tau(q) = -\lim_{\Delta\to 0} \left\{ \frac{1}{\ln\Delta} \ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta) \right\}, \quad \tau(q) = (q-1)D(q). \tag{3.58}$$

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется некоторой нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $\Gamma(q,\Delta)$ при $\Delta \to 0$: $\Gamma(q,\Delta) \approx \Delta^{\tau(q)}$.

Легко показать, что если $D(q) = D = const$, то данный фрактальный объект представляет собой регулярный монофрактал. Действительно, в случае регулярного фрактала во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество элементов $n_i(\Delta)=N/N(\Delta)$, то есть фрактал является однородным. Тогда очевидно, что относительные населенности всех ячеек, $p_i(\Delta)=1/N(\Delta)$, тоже одинаковы, и обобщенная статистическая сумма (56) принимает вид $\Gamma(q,\Delta)=N^{1-q}(\Delta)$. Поскольку, согласно определению фрактальной размерности D, число занятых ячеек при достаточно малом Δ равно $N(\Delta)\approx\Delta^{-D}$, то $\Gamma(q,\Delta)=\Delta^{(q-1)D}\approx\Delta^{\tau(q)}$. Отсюда следует, что в случае обычного фрактала функция $\tau(q)=(q-1)D$, т. е. является линейной. Тогда все обобщенные фрактальные размерности $D(q)=D$ совпадают при всех значениях q.

Наиболее широкое распространение получили три совершенно разные меры фрактала: хаусдорфова размерность $D_H\equiv D(q\to 0)$, информационная размерность $D(q\to 1)$ и корреляционная размерность $D(q\to 2)$ (Grassberger, 1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984).

Фрактальная и информационная размерности. При $q=0$ из выражения (3.56) следует, что $\Gamma(0,\Delta)=N(\Delta)$. С другой стороны, в этого случая имеем $\Gamma(0,\Delta)\approx\Delta^{\tau(0)}=\Delta^{D(0)}$. Из сопоставления этих равенств следует, что $N(\Delta)\approx\Delta^{D(0)}$. Это означает, что величина $D(0)$, представляющая собой обычную хаусдорфову размерность D_H множества $\mathcal{G}$, является наиболее грубой характеристикой мультифрактала и не несет информации о его статистических свойствах.

При $q=1$, в силу условия нормировки вероятности p_i, статистическая сумма равна $\Gamma(1,\Delta)=1$, а $\tau(1)=0$. Таким образом, мы имеем неопределенность в выражении (3.57) для $D(1)$, которая раскрывается с помощью очевидного равенства

$$D(1)=\lim_{q\to 1}\left\{\frac{1}{q-1}\lim_{\Delta\to 0}\left[\ln\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i^q(\Delta)/\ln\Delta\right]\right\}=$$

$$=\lim_{q\to 1}\left\{\frac{1}{q-1}\lim_{\Delta\to 0}\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\,\exp[(q-1)]\ln p_i\right)/\ln\Delta\right]\right\}=$$

$$=\lim_{q\to 1}\left\{\frac{1}{q-1}\lim_{\Delta\to 0}\frac{\ln 1+(q-1)\sum\limits_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\ln p_i}{\ln\Delta}\right\}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\ln\Delta}\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\ln p_i\,. \qquad (3.59)$$

В результате величина обобщенной фрактальной размерности $D(1)$ связана с энтропией Больцмана–Гиббса[10)] $S(p)=-k\sum\limits_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\ln p_i$ соотношением

$$D(1)=-\frac{1}{k}\lim_{\Delta\to 0}\frac{S(\Delta)}{\ln\Delta}. \qquad (3.60)$$

Таким образом, поскольку $S\approx\Delta^{-kD(1)}$, то величина $D(1)$ характеризует информацию, необходимую для определения местоположения элемента фрактального объекта в некоторой ячейке. В связи с этим обобщенную фрактальную размерность $D(1)$ часто называют *информационной размерностью*. Она показывает, как информация, необходимая для определения местоположения элемента фрактала, возрастает при стремлении размера ячейки в к нулю.

Корреляционная размерность. Важную роль в различных приложениях играет так называемая корреляционная размерность, которая следует из (3.57) при $q=2$

$$D(2)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N(\Delta)}p_i^2(\Delta)}{\ln\Delta}\approx\lim_{\Delta\to 0}\frac{\ln I(\Delta)}{\ln\Delta}, \qquad (3.61)$$

где $I(\Delta)=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum\limits_{i,j=1;i\neq j}^{N}\theta\left(\Delta-\left|\mathbf{\Delta}_i-\mathbf{\Delta}_j\right|\right)$ – корреляционный интеграл, в котором суммирование проводится по всем парам точек фрактального множества с радиус-векторами $\mathbf{\Delta}_i$ и $\mathbf{\Delta}_j$; $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, $\theta(x)=1$, если $x\geq 0$ и $\theta(x)=0$, если $x<0$. Сумма в выражении $I(\Delta)$ определяет относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше Δ. Поэтому, поделённая на чис-

---

[10)]Энтропия Больцмана–Гиббса является мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении .

ло N^2, она определяет вероятность того, что две наугад взятые точки разделены расстоянием, меньшим, чем Δ. Эту же вероятность можно определить и по-другому. Величина p_i представляет собой вероятность попадания точки в i-ю ячейку с размером r. Следовательно, величина p_i^2 представляет собой вероятность попадания в эту ячейку двух точек. Суммируя p_i^2 по всем занятым ячейкам, мы получаем вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества $\mathcal{G}$ лежат внутри одной ячейки с размером Δ. Следовательно, расстояние между этими точками будет меньше или порядка Δ. Таким образом, с точностью до численных коэффициентов, принимая во внимание равенство (61), получаем $I(\Delta) \approx \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^2(\Delta) = \Delta^{D(2)}$.Таким образом, обобщенная размерность $D(2)$ определяет зависимость корреляционного интеграла $I(\Delta)$ от Δ в пределе $\Delta \to 0$. Именно по этой причине величину $D(2)$ в литературе называют корреляционной размерностью (Шустер, 1988; Grassberger, Procaccia, 1983, 1984; Moon, Li, 1985).

Заметим, что при q =3,4,… имеют место обобщённые размерности, связанные с корреляционными интегралами I-триплетов, квадруплетов и т.д. точек на фрактальном множестве.

Свойства размерностей Реньи. Из свойств энтропии Реньи, приведенных в разд. 3.1, следует, что для размерностей фракталов Реньи (3.57) выполняются следующие неравенства:

Во-первых, размерность $D(q)$, согласно свойству неотрицательности (3.5) энтропии Реньи, удовлетворяет неравенству

$$D(q) = -\frac{1}{k} \lim_{\Delta \to 0} \left\{ \frac{1}{\ln \Delta} S_q^R(p) \right\} \geq 0. \tag{3.62}$$

Во-вторых, размерности Реньи, согласно свойству (3.15) для S_q^R и определению (3.57), подчиняются неравенству (Mandelbrot, 1974)

$$D(q') \leq D(q) \quad \text{если} \quad q' > q, \tag{3.63}$$

из которого следует, что обобщённая фрактальная размерность $D(q)$ всегда монотонно убывает (или в крайнем случае остается постоянной) с ростом q. Знак равенства имеет место, например, для однородных фракталов, в которых вероятность p_i удовлетворяет закону подобия $p_i \approx \Delta^D$, где D – любая размерность. Максимальное значения $D_{max} = D(-\infty)$ величина $D(q)$ достигает при $q \to -\infty$, а минимальное значение $D_{min} = D(\infty)$ при $q \to +\infty$.

В-третьих, вследствие свойства (3.17) для энтропии Реньи, имеют место общие неравенства

$$\frac{(q'-1)}{q'} D(q') \geq \frac{(q-1)}{q} D(q), \quad \text{если} \quad q' > q,\, q'q > 0, \tag{3.64}$$

$$(q'-1)D(q') \geq (q-1)D(q), \quad \text{если} \quad q' > q > 0. \tag{3.65}$$

В случае, когда $q' \to +\infty$ и $q > 1$, из (3.64) вытекает неравенство

$$D(q) \leq \frac{q}{(q-1)} D(\infty), \quad \text{если} \quad q > 1; \tag{3.66}$$

аналогично, когда $q \to -\infty$ и $q < 0$, для размерности $D(q)$ справедливо

$$D(q) \geq \frac{q}{q-1} D(-\infty) \quad \text{если} \quad q < 0. \tag{3.67}$$

Полезными частными случаями выражений (3.63) и (3.64) являются неравенства

$$\tfrac{1}{2} D(2) \leq D(\infty) \leq D(2) \quad \text{и} \quad D(-1) \leq D(-\infty) \leq 2D(-1), \tag{3.68}$$

позволяющие оценить предельные размерности $D(\pm\infty)$ через $D(2)$ и $D(-1)$. Численно намного легче вычислить низкие q-размерности, чем большие q-размерности, поэтому неравенства (3.68) используются для проверки числовых результатов.

Наконец, согласно неравенству (3.62) информационная $D(1)$ и корреляционная $D(2)$ размерности мультифрактала ограничивают хаусдорфову размерность D_H снизу, т.е.

$$D(2) \leq D(1) \leq D_H = D(0). \tag{3.69}$$

Мультифракталы с двумя характерными масштабами длины. В качестве примера рассмотрим неоднородное канторовское множество, где причиной неоднородности является наличие нескольких пространственных масштабов, при том, что все вероятности p_i совпадают. Пусть в начале процедуры (нулевой шаг) у нас имеется множество с мерой 1 и размером 1 (например, единичный отрезок, по которому как-то распределены *N* точек нашего фрактального множества. На первом шаге заменим его двумя отрезками с длинами $l_1 = 1/4$ и $l_2 = 1/2$, примыкающими соответственно к его левому и правому концам. Обоим отрезкам припишем одинаковую меру p = 1/2. Затем повторим ту же процедуру с каждым из этих

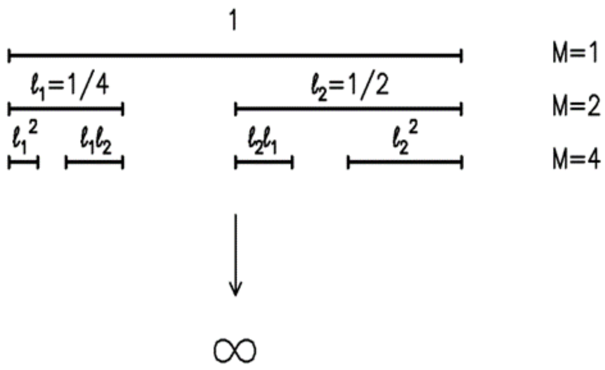


Рис 3.2. Неоднородное канторовское множество с двумя характерными масштабами длины l_1=1/4, l_2 =1/2 и $p_1 = p_2 = 1/2$.

двух отрезков. В результате получится уже 4 отрезка с длинами $(l_1)_2$, $l_1 l_2$, $l_2 l_1$ и $(l_2)_2$ и одинаковыми мерами, равными 1/3. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим в конце концов неоднородное канторовское множество, т. е. мультифрактал. Первые шаги этого процесса изображены ниже на Рис.3.2. Чтобы определить спектр обобщенных фрактальных размерностей в этом случае, необходимо видоизменить соотношение (3.58), определяющее функцию $\tau(q)$, так как теперь мультифрактал характеризуется не одним масштабом, а многими.

Введём более общее определение фрактальной размерности $D(q)$. Предположим, что множество S (мультифрактальный объект) покрыто счётным числом N непересекающихся подмножеств S_i (гиперкубов) с диаметрами $\Delta_i < \Delta$ $(\Delta > 0)$. Допустим теперь, что подмножества S_i имеют размерность $(-\tau)$. Пусть вероятность того, что элемент множества S находится в S_i есть p_i. Тогда в теории мультифракталов вводится, так называемая, обобщённая статистическая сумма (Halsey и др., 1986)

$$\Gamma\left(q,\tau,\{S_i\},\Delta\right)=\sum_{i=1}^{N=N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau}\,, \tag{3.70}$$

являющаяся обобщением соотношения (3.56) на случай различных масштабов $\Delta_i \neq \Delta$. Обобщением размерности Хаусдорфа на случай мультифракталов является величина

$$\Gamma\left(q,\tau\right)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau}=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i\left(\frac{p_i}{\Delta_i^{D(q)}}\right)^{q-1}. \tag{3.71}$$

Для каждого q существует одно значение $\tau=\tau(q)$, и мера (3.71) имеет конечное значение (порядка единицы) при достаточно большом N лишь в случае выполнения условия $\tau(q)=(q-1)D(q)$ (см. Halsey и др., 1986). Тогда обобщенная размерность Реньи, вводимая соотношением

$$D(q)=\frac{\tau(q)}{q-1}\geq 0, \tag{3.72}$$

при $\tau=0$ имеет значение $D(q)=0$, а при $q=0$ и $\tau(0)=1$ совпадает с размерностью Хаусдорфа $D_H=D(0)=-\tau$. В итоге (3.72) представляет собой обобщённую D_0–мерную размернось Хаусдорфа множества

$$\Gamma\left(0,1\right)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{N(\Delta)} \Delta_i^{D(0)}. \tag{3.73}$$

Расчет мультифрактальных спектров размерностей. Следует заметить, что формула (3.57) мало пригодна для практических расчётов размерностей мультифракталов в силу ряда трудностей, связанных с предельным переходом к бесконечно малым объёмам $\Delta\to 0$. Однако задача создания алгоритма для определения фрактальной размерности Реньи существенно упрощается, если наложить некоторые ограничения на процедуру выбора иерархии покрытий (Meisel и др.,1992). Точные формулировки этого метода определения фрактальных размерностей − метода подсчёта ячеек, покрывающих фрактальное множество, − можно найти, например, в работах (Малинецкий, Потапов, 1988, 2018; Ершов, Потапов, 1995; Meisel и др.,1992; Шредер, 2001). Размерность фрактальных сред может быть эмпирически получена методом поклеточного счёта (box-counting method). Простой и быстрый алгоритм для оценки корреляционной размерности аттракторов динамической системы предложен в работе (Grassberger, Procaccia, 1983).

Покажем теперь, что между приведенными здесь мультифрактальными мерами и двухпараметрической информацией различия существует глубокая связь (Зарипов, 2010).

3.6. Двухпараметрическая различающая информация и мультифрактальные меры

Вывод двухпараметрической информации различия. С целью получения двухпараметрического аналога различающей информации Реньи $K_q^R(p{:}f)$ найдём минимум информации Кульбака–Лейблера

$$K^{KL}(u:p) \equiv k\sum_i^N u_i \ln\left(u_i / p_i\right) \tag{3.74}$$

при условии сохранения нормировки $\sum_i^N u_i = 1$ и двух мер статистической неточности (3.32)

$$H(u:p) \equiv \sum_i^N u_i \ln p_i, \quad H(u:f) \equiv \sum_i^N u_i \ln f_i, \tag{3.75}$$

а также заданности распределений $p = \{p_1, \ldots, p_N\}$ и $f = \{f_1, \ldots, f_N\}$.

Согласно вариационному принципу Джейнса, найдём безусловный экстремум функционала

$$\mathcal{L}(u) = k\sum_i^N p_i \ln\left(\frac{u_i}{p_i}\right) + k(1-q)\sum_i^N u_i \ln p_i - k\tau\sum_i^N u_i \ln f_i + k(\alpha-1)\sum_i^N u_i, \tag{3.76}$$

где $(1-q)$, τ, $(\alpha-1)$ – неопределённые множители Лагранжа. Варьируя $\mathcal{L}(u)$ по распределению u и используя равенство

$$\delta\mathcal{L} = k\sum_i^N \delta u_i \left[\ln\left(\frac{u_i}{p_i}\right) + (1-q)\ln p_i + \tau \ln f_i + \alpha\right] = 0, \tag{3.77}$$

получим искомое распределение

$$u_i = p_i \exp\left[-(1-q)\ln p_i - \tau \ln f_i - \alpha\right], \tag{3.78}$$

которое после нормировки принимает вид

$$u_i = p_i^q f_i^{-\tau} / \Gamma_{q\tau}(p,f). \tag{3.79}$$

Здесь введены обобщённая статистическая сумма

$$\Gamma_{q\tau}(p,f) \equiv \sum_i^N p_i^q f_i^{-\tau} = \sum_i^N p_i \left(p_i / f_i^{D(q)}\right)^{q-1} \tag{3.80}$$

и величина $D(q) = \tau/(q-1)$, в которой действительные числа q и τ меняются в пределах допустимых значений.

Подставляя распределение (3.79) в выражения для информаций различия Кульбака, получим следующие соотношения (Зарипов, 2002):

$$K^{KL}(u:p) = k\sum_i^N u_i \left(\ln \frac{u_i}{p_i}\right) = k(q-1)\sum_i^N u_i \left(\ln \frac{p_i}{f_i^{D(q)}}\right) - k \ln \Gamma_{q\tau}, \tag{3.81}$$

$$K^{KL}(p:u) = k\sum_i^N p_i \left(\ln \frac{p_i}{u_i}\right) = k(q-1)\sum_i^N p_i \left(\ln \frac{p_i}{f_i^{D(q)}}\right) + k \ln \Gamma_{q\tau}, \tag{3.82}$$

из которых после простых преобразований следуют равенства

$$\frac{q}{q-1} K^{KL}(u:p) = K_{D_q}(u:f) - K_{q,\tau}(p:f), \tag{3.83}$$

$$\frac{1}{q-1} K^{KL}(p:u) = K_{q,\tau}(p:f) - K_{D_q}(p:f). \tag{3.84}$$

В выражениях (3.83)–(3.84) введены специфические различающие информации

$$K_{D_q}(u:f) = k\sum_i^N u_i \ln\left(u_i / f_i^{D_q}\right) \quad \text{и} \quad K_{D_q}(p:f) = k\sum_i^N p_i \ln\left(p_i / f_i^{D_q}\right), \tag{3.85}$$

а также искомый двухпараметрический аналог информации различия Реньи

$$K_{q\tau}(p{:}\,f)=\frac{k}{q-1}\ln\Gamma_{q\tau}=\frac{k}{q-1}\ln\left(\sum_i^N p_i^q f_i^{-\tau}\right)=$$

$$=\frac{k}{q-1}\ln\left\{\sum_i^N p_i\left(p_i\,/\,f_i^{D(q)}\right)^{q-1}\right\}. \qquad (3.86)$$

Заметим, что при $D(q)=1$ функционалы (3.85) и (3.86) совпадают с различающими информациями Кульбака–Лейблера и Реньи:

$$K_1(u:f)=K^{KL}(u:f)\equiv k\sum_i^N u_i\ln\left(u_i\,/\,f_i\right) \qquad (3.87)$$

$$K_{q,1}\left(p:f\right)=K_q^R\left(p:f\right)\equiv\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}\,. \qquad (3.88)$$

Основные свойства двухпараметрической информации различия можно найти в монографии Зарипова (2010). В частности, там показано, что величина $K_{q\tau}(p{:}f)$ является выпуклым аддитивным функционалом для независимых объектов,

$$K_{q,\tau}\left(p_{12}:f_{12}\right)=K_{q,\tau}\left(p_1:f_1\right)+K_{q,\tau}\left(p_2:f_2\right), \qquad (3.89)$$

который при $D(q)=(q-1)^{-1}\tau(q)>1$ и $q>0$ ($D(q)<1$ и $q<0$) принимает положительные (отрицательные) значения. В равновероятном состоянии с $f_i=1/N$ формула (3.86) принимает вид

$$K_{q,\tau}\left(p{:}\,f\right)=\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q f_i^{D_q(1-q)}=S_N-S_q\left(p\right), \qquad (3.90)$$

из которого следует, что энтропия Реньи меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния $S_N=kD_q\ln N$ при $q>0$ ($q<0$).

Связь с мультифрактальными размерностями. Покажем теперь, что полученные здесь результаты позволяют по-новому переосмыслить и интерпретировать сведения о мультифрактальных спектрах размерностей, приведенные в разд. 3.4

Во-первых, из формул (3.71) и (3.80) следует, что обобщённая размерность Хаусдорфа $\Gamma\left(q,\tau\right)$ связана с обобщённой статистической суммой $\Gamma_{q\tau}(p,f)$, записанной при $f_i\equiv\Delta_i/\Delta$, следующим соотношением

$$\Gamma(q,\tau) \equiv \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-\tau} \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q \left(\frac{\Delta_i}{\Delta}\right)^{-\tau} = \lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-\tau} \Gamma_{q\tau}(p, \Delta_i/\Delta)\,. \qquad (3.91)$$

Во-вторых, в случае равновозможного распределения $f_i = 1/\Delta$ из (3.86) вытекает соотношение:

$$K_{q\tau}(p:f) = \frac{k}{q-1} \ln \Delta^{\tau}\left(\sum_i^N p_i^q\right) = \frac{k\tau}{q-1} \ln\Delta \; - S_q^R(p)\,. \qquad (3.92)$$

Тогда так называемая информационная размерность мультифракталов, определяемая соотношением (Halsey и др. 1986)

$$D_K = \frac{1}{k} \lim_{\Delta\to 0} \frac{K_{q\tau}(p:f)}{\ln\Delta}, \qquad (3.93)$$

принимает, при учёте формул (3.91) и (3.57), вид

$$D_K = \frac{\tau}{q-1} - \frac{1}{k} \lim_{\Delta\to 0} \frac{S_q^R(p)}{\ln\Delta} = D(q) + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta)}{(q-1)\ln\Delta} = D(q) + D^{HP}\,.$$

(3.94)

Здесь второе слагаемое совпадает с размерностью мультифракталов D^{HP}, впервые введённой в рассмотрение в работе (Hentschel, Procaccia, 1983).

При $f_i \equiv \Delta_i/\Delta$ имеет место обобщение формулы (3.94)

$$D_K = D(q) + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau}}{(q-1)\ln\Delta} = D(q) + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln \Gamma\left(q,\tau,\{S_i\},\Delta\right)}{(q-1)\ln\Delta}, \qquad (3.95)$$

где статистическая сумма $\Gamma\left(q,\tau,\{S_i\},\Delta\right)$ определяется формулой (3.70).

В заключение этой главы отметим, что развитый здесь подход позволяет, в частности, с единых позиций моделировать (на основе системы обобщённых гидродинамических уравнений с производными дробного порядка и замыкающих её термодинамических соотношений для фрактальных сред) сложные космологические и космогонические среды (от галактик и газопылевых астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур (фракталов) с нецелой топологической размерностью, степенная пространственная нелокальность силовых взаимодействий, а также эридитальность и немарковость эволюционных процессов.

Библиография

Башкиров А.Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем // Теор. и мат. физика. 2006. Т.149. №2. С. 299–317.

Бадии Р., Полити А. Численное исследование неоднородных фракталов // В сб. «Фракталы в физике»/ Пер. с анг., Под ред. Я.Г. Синая и И.М. Халатникова. - М.: Мир. 1988. С. 632-637.

Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. Москва - Ижевск, РХД. 2001.128 с.

Ершов С.В., Потапов А.Б. Размерность реконструкции аттракторов и упорядочение ближайших СОСЕДЕЙ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 1995. № 8.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Тригонометрические энтропии в термодинамике неэкстенсивных систем // Физика. 2006. № 6. С.60-66. (Изв. высш. учебн. заведений). (Translation: Russian Physics Journal. 2006. V. 49. № 6. P. 633–641).

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. - М.: Наука, 1971. 416 с.

Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. - М.: Наука, 1990. 320 с.

Колесниченко А.В., Четверушкин Б.Н. Вывод гидродинамических и квазигидродинамических уравнений для автотранспортных систем на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013. № 8. 32 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018а. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. Модификация фундаментального уравнения Гиббса классической термодинамики на основе различающей информации Кульбака-Лейблера // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018c. № 36. 32 с.

Колесниченко А. В. Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013, № 33. 23 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 75. 44 с.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астро-физических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах.- М.: Лостмаркет. 2000. 352 с.

Кульбак С. Теория информации и статистика. - М.: Наука. 1967. 408 с.

Малинецкий Г.Г., Потапов А.В. О вычислении размерности странных аттракторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28. № 7. С. 1021–1037; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1988. V. 28. № 3. P. 39–49.

Малинецкий Г.Г., Потапов А.В. Нелинейная динамика и хаос. Основные понятия. Сер. Синергетика: от прошлого к будущему. - М.: URSS. 2018. 240 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

Могилевский Э.И. Фракталы на Солнце. - М.: Физматлит. 2001. 152 с.

Пиблс Ф. Дж. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. - М.: Мир. 1983. 408 с.

Потапов А.А. Фракталы в радиотехнике и радиолокации: Топология выборки. - М.: Университетская книга. 2002. 848 с.

Потапов А.Б. Программы вычисления корреляционного показателя и оценки обобщенной энтропии по временному ряду // М.: Изд. ИПМ АН СССР. 1991. Препринт № 27. 31 с.

Рудой Ю.Г. Обобщенная информационная энтропия и неканоническое распределение в равновесной статистической механике // Теор. и мат. физика. 2003. Т. 135. №1. С. 3–53.

Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров. - М.: Наука. 1991.136 с.

Фадеев Д.К. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы // Усп. мат. Наук. 1956. Т.11. Вып.1 (67). С. 227-231.

Федер Е. Фракталы. - М.: Мир. 1991. 260 с.

Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: Ин.-Лит. 1948. 456 с.

Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1953. Т. 8. вып. 3. С. 3-20.

Чумак О.В. Энтропии и фракталы в анализе данных. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2012.168 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? - М.: Ин. Лит. 1947. 147 с.

Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая; пер. с англ. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 527 с.

Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир. 1988. 240 с.

Abe S. Remark on the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics // Physics Letters A. 2000. V. 275. № 3. P. 250-253.

Beck C Upper and lower bounds on the Renyi dimensions and the uniformity of multifractals // Physica D. 1990. V. 41. P. 67-78.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 286 p.

Besicovitch A.S. On the Sum of Digits of Real Numbers Represented in the Dyadic System // Math. Annal. 1933. B.110. № 3. S. 321-330.

Bialas A., Czyz W. Renyi entropies of a black hole from Hawking radiation // EPL (Europhysics Letters). 2008. V. 83. № 6. P. 60009.

Daroczy Z. Generalized information function // Inform. Control. 1970. V.16. P. 36-51.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543–549.

Grassberger P. On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J. Statist. Phys. 1981. V. 26. № 1. P. 173-179.

Grassberger P. Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures // Physics Letters A. 1985. V. 107. № 3. P. 101-105.

Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors // Phys. Review letters. 1983. V. 50. № 5. P. 346-349.

Grassberger P., Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 13. № 1-2. P. 34-53.

Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141–1151.

Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass // Math. Annal. 1919. B. 79. S. 157-179.

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30-35.

Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 8. № 3. P. 435-443.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Ltctures. 1963. V. 3. P.160.

Jizba P., Arimitsu T. Observability of Renyi's entropy // Physical Review E. 2003. V. 69. № 2. id. 026128.

Johal R.S., Rai R. Nonextensive thermodynamic formalism for chaotic dynamical systems // Physica A. 2000. V. 282. P. 525-535.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics **//** Solar System Research. 2013. V. 48. № 5. P 354–365.

Kropivnitskaya A.,Rostovtsev A. R'enyi statistics in high energy particle production // 2003. /eprint arXiv:hep-ph/0309287.

Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. P. 79-86.

Landsberg P.T. Entropies Galove! // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 46–49.

Landsberg P.T., Tranah D. Thermodynamics of non-extensive entropies I // Collective Phenomena. 1980. V. 3. P. 73-80.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211–216.

Lenzi E. K., Mendes R. S., Silva L. R. Statistical mechanics based on Renyi entropy // Physica. A. 2000. V. 280. P. 337-345.

Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. № 2. P.130-148.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid. Mech. 1973. V. 62. P. 331-358.

Mandelbrot B.B. Les Objects Fractals. Forms, Hazard et Dimension. Paris: Flammarion. 1975. 195 p.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 365 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982. 460 p.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid Mech.1973. V. 62. P. 331-358

Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis'entropy maximization procedure revisited // Physica A. 2000. V. 286. P. 489-502.

Meisel L., Johnson M., Cote P.J. Box-counting multifractal analysis // Phys. Rev. A 45. 1992. P. 6989-6996.

Moon F.C., Li G.-X. The fractal dimension of the two-well potential strange attractors // Physica D. 1985. V. 17. № 1. P. 99-108.

Nagy Á., Romera E. Maximum Rényi entropy principle and the generalized Thomas-Fermi model // Physics Letters A. 2009. V. 373. № 8-9. P. 844-846.

Nath P. On Measures of Error in Information // J. Math. Sci. 1968. V. 3. P. 1-16.

Nath P. On Coding Theorem Connected with Rényi's Entropy // Inform. and Contr. 1975. V. 29. P. 234-242.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / http:// tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Parvan A. S., Biro T. S. Thermodynamical limit in non-extensive Renyi statistics // Physics Letters A. 2005. V. 340. № 5-6. P. 375-387.

Peebles P.J.E.The Large-Scale Structure of the Universe. – Princeton: Princeton University Press.1980. 435 p.

Rathie P.N., Kannappan Pl. A Directed-Divergence Function of Type β // Inform. and Contr. 1972. V. 20. P. 38-45.

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1961. P. 547-561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence//Communications in Mathematical Physics. 1971. V. 20. № 3. P. 167-192.

Sharma B.D., Mittal D.P. New Nonadditive Measures of Relative Information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V.2. P.122–133.

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Adv. Elect. and Elect. Physics, Ed. P.W. Hawkes. 1989. V. 76. P. 327-413.

Taneja I.J. New Developments in Generalized Information Measures // Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics. Ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1995. V. 91. P. 37-135.

Tarasov V.E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media // Annls of Physics. 2005. V. 318. № 2. P. 286-307.

Tarasov V.E. Fractional dynamics: Applicationsof fractional calculus to dynamics of particles, fields and media // Springer. Higher Education Press. 2010. 516 p.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1/2. P. 479–487.

Tsallis C. Nonextensive thermostatistics and fractal // Fractals. 1995. V. 3. P. 541-553.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1-35.

Tsallis C. Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics: Historical Backgroud and Present Status // Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, ed. S. Abe and Y.Okamoto, Series Lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: 2001. Springer-Verlag. P. 3-99.

Tsallis C. Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 13. P. 371-391.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534–553.

Zaripov R. Evolution of the Entropy and Renyi Difference Information during Self-Organization of Open Additive Systems // Russian Physics Journal. 2005. V. 48. № 3. P. 267-273.

ГЛАВА 4

Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма–Миттал как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем

Исследованы свойства семейства обобщенных энтропий, заданного мерой Шарма–Миттал, которое включает энтропию Тсаллиса, энтропию Реньи, энтропию Ландсберга–Ведрала, энтропию Гаусса и классическую энтропию Больцмана–Гиббса–Шеннона. Построена на базе статистики Шарма–Миттал двухпараметрическая термодинамика неэкстенсивных систем и показана ее взаимосвязь с обобщенными однопараметрическими термодинамиками, основанными на названных деформированных энтропиях семейства. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру, отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β*. На основании этого и с учетом обобщенного первого закона термодинамики и преобразования Лежандра дано переопределение термодинамических соотношений, полученных в рамках статистики Шарма–Миттал. Наконец, на основе двухпараметрической информации различия Шарма–Миттал сформулированы и доказаны теорема Гиббса и H-теорема об изменении этих мер при эволюции во времени*

Введение

Статистическая энтропия Больцмана–Гиббса–Шеннона и основанная на ней классическая статистическая механика является чрезвычайно полезным инструментарием при изучении широкого круга простых физических систем. Эти системы, для которых, безусловно, целесообразно использовать классическую статистику и разработанные на ее основе теории, можно условно охарактеризовать малым диапазоном пространственно-временных корреляций, эвклидовостью геометрии фазового пространства, марковостью случайных процессов, локальностью силового взаимодействия между элементами системы, эргодичностью динамических процессов и т.п. Такие системы хорошо описываются энтропией Больцмана−Гиббса−Шеннона и, как правило, следуют экспоненциальному закону вероятностных распределений.

Существует, однако, целый круг сложных систем (природных, искусственных и социальных), которые, в отличие от простых, характеризуются большой дальностью пространственно-временных корреляций, глобальностью силовых взаимодействий между элементами системы, иерархичностью (обычно мультифрактальностью) геометрии фазового пространства, немарковостью процессов (длинной памятью), неэргодичностью динамических процессов, наличием асимптотически степенных вероятностных распределений. Довольно широкий класс подобных систем (хотя далеко не всех) адекватно описывается неэкстенсивной (неаддитивной) статистической механикой, основанной, в частности, на параметрических энтропиях Тсаллиса (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988) и Реньи (Renyi, 1961, 1970), которые сохраняют гносеологическую структуру (логическую схему построения) классической статистики (см., например, Curado, Tsallis, 1991;Beck, Schlogl,1993**;** Borges, Roditi, 1998; Tsallis и др., 1998; Naudts, 2004; Tsallis, 2009; Plastino and Plastino, 1997; Tirnakli, Torres, 2000; Lenzi, Mendes, 2001; Abe, 2001; Wada,. Scarfone, 2005; Scarfone, Wada, 2007; Hanel и др., 2009). Важным преимуществом неэкстенсивных статистик по сравнению с классической статистикой Гиббса является асимптотический степенной закон распределения вероятностей (проявляющийся при максимизации соответствующих параметрических энтропий), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса.

Неэкстенсивная статистика Тсаллиса успешно применяется ко многим системам, начиная от нелинейных диффузионных уравнений (Plastino и др., 2000), обобщенных кинетических уравнений (Boghosian, 1999; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), систем Фоккера-Планка (Frank, Daffertshofer, 2001b), H-теоремы Больцмана (Mariz, 1992; Ramshaw, 1993a,b; Shiino, 1998; Frank, Daffertshofer, 2001a), удельной теплоемкости гармонического осциллятора (Ito, Tsallis, 1989), квантовой статистики (Büyükkılıç и др., 1995), до изучения космических систем с дальним силовым взаимодействием (Chavanis, Delfini, 2009; Колесниченко, 2016), межзвездной турбулентности (Esquivel, Lazarian, 2010), эволюции астрофизических дисков (Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014), скорости солнечного звука (Du, 2006), релаксации спинового стекла (Pickup и др., 2009), городской транспортной системы (Kolesnichenko, 2014), биофизики, экономики, нейрофизики и многое другое.

Энтропия Реньи с успехом используется не только в физике фракталов и в теории информации (см. Mandelbrot, 1974, 1975, 1977, 1982; Beck, Schlögl, 1993; Grassberger,1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984; Halsey и др.,1986; Hentschel, Procaccia,1983; Beck, Schlogl, 1993; Мандельброт, 2002; Зарипов, 2002, 2010; Jizba, Arimitsu, 2004; Bialas, Czyz, 2008), но и в различных областях статистической механики, связанных с динамическим поведением сложных хаотических систем. Последнее связано с тем, что между теорией фракталов, опирающейся на геометрию и теорию размерности, с одной стороны, и теорией хаоса существует глубокая связь. Использование статистики Реньи привело к значительному прогрессу в исследованиях ряда аномальных физических явлений, в частности, в ядерной физике (Nagy, Romera, 2009), в теории черных дыр (Bialas, Czyz, 2008), при изучении фрактальных и мультифрактальных систем в космологии (Peebles, 1980; Mandelbrot, 1977, 1982; Колесниченко 2016, 2018c), в квантовой статистике (Aptekarev и др., 2012a,b, 2016) и т.д.

Одновременно, наличие степенного закона в неэкстенсивной статистике позволило сконструировать неаддитивные термодинамики, в частности, на основе энтропии Тсаллиса (см. Beck, SchloEgl,1993; Tsallis, 1999, 2002, 2009; Колесниченко, 2018a,b) и энтропии Реньи (Zaripov, 2005; Parvan, Biro, 2005; Зарипов, 2010).

Несколько позднее в статистическую механику был введен новый функционал энтропии − двухпараметрическая энтропия Шарма−Миттал (SM) (Sharma, Mittal, 1975), которая, в частности, обобщает энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона, Реньи и Тсаллиса, посредством манипулирования двумя параметрами, тем самым рассматривая эти энтропии как некоторые предельные однопараметрические случаи (Frank, Plastino, 2002; Scarfone, Wada, 2005; Scarfone, 2006; Akturk и др., 2007, 2008). Свойства энтропии Шарма-Миттал были тщательно исследованы рядом авторов (см., например, Frank, Daffertshofer, 2000; Masi, 2005; Scarfone, 2006; Lenzi, Scarfone, 2012; Kaniadakis идр., 2005; Nielsen, Nock, 2012**).** Многие неэкстенсивные однопараметрические энтропии, введенные в литературе в рамках обобщенной статистической механики, относятся к SM и, таким образом, часто могут изучаться по единообразной схеме. Среди них, упомянутые выше энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона, Реньи и Тсаллиса, а также энтропия Ландсберга−Ведрала (Landberg, Vedral, 1998), Гауссова энтропия (Frank, Plastino, 2002) и некоторые другие.

Энтропия Шарма−Миттал, введенная первоначально в теории информации, в работе (Frank, Plastino, 2002) была использована для построения обобщенной термостатистики. В работе (Frank, Daffertshofer, 2000) были даны точные решения нестационарных уравнений Фоккера−Планка, связанных с энтропиями Реньи и Шармы−Миттал. В работах (Fa, Lenzi, 2004; Scarfone, 2006) для получения обобщенных термодинамических соотношений на базе энтропии SM учитывалась гипотеза мультипликативности вероятностного распределения совместной вероятности двух независимых систем. Следует отметить, что осреднение физических величин во всех этих работах было проведено нормированном эскортным распределением $f_j = p_j / \sum_j p_j{}^q$.

Целью данной главы является построение обобщенных неэкстенсивных термодинамик, соответствующих однопараметрическим энтропиям, принадлежащим к семейству Шарма-Миттал. При этом также используются осредненные значения параметров системы, полученные по нормированному эскортному распределению, которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Однако в отличие от ряда известных работ (см., например, Czachor, Naudts, 2002; Scarfone, 2006; Kaniadakis и др., 2005), в которых подобные исследования по термостатике проведены с привлечением двукратно деформированных экспоненты и логарифма (введенных первоначально в теории информации Шарма и Миттал в 1975 г.), особенность данной работы состоит в том, что проведено построение обобщенных неэкстенсивных термодинамик с помощью более простых и хорошо изученных однократно деформированных функций − логарифма и экспонента Тсаллиса.

4.1. Однопараметрические типы энтропий семейства Шарма−Миттал

Введенная Шарма и Миттал (1975) двухпараметрическая энтропийная мера случайной величины $p=\{p_j\}$ определяется формулой

$$S_{q,r}^{SM}(p):=k\frac{1-(\sum_j {p_j}^q)^{(r-1)/(q-1)}}{r-1}, \tag{4.1}$$

где $r,q>0$, $r\neq1\neq q$, $r\neq q$. В выражении (4.1) $p=\{p_j\}_{j=1,\dots,\mathrm{W}}$ - дискретная функция распределения, а W обозначает количество доступных в системе микросостояний; k − постоянная Больцмана.

Энтропийная мера (4.1) включает как классическую, так и деформированные однопараметрические энтропии, в частности:

- энтропию Больцмана−Гиббса−Шеннона

$$S_{q\to1,r\to1}^{SM}=S^{BGS}(p):=-k\sum_j p_j \ln p_j; \tag{4.2}$$

- энтропию Реньи (Renyi, 1961, 1970)

$$S_{q,r\to1}^{SM}=S_q^R(p):=\frac{k}{(1-q)}\ln(\sum_j {p_j}^q), \quad q>0,\ q\neq1; \tag{4.3}$$

- энтропию Тсаллиса (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988)

$$S_{q,q}^{SM}=S_q^{Ts}(p):=k\frac{1-\sum_j {p_j}^q}{(q-1)}); \tag{4.4}$$

- энтропию Ландсберга –Ведрала (Landberg, Vedral, 1998)

$$S_{q,2-q}^{SM}=S_q^{LV}:=k\frac{1-(\sum_j {p_j}^q)^{-1}}{(1-q)}; \tag{4.5}$$

- энтропию Гаусса (Frank, Plastino, 2002)

$$S_{q\to 1,r}^{SM} = S_r^G := k\frac{1-\left\{\exp(r-1)\sum_j p_j \ln p_j\right\}}{(r-1)}, \quad q>0,\ q\neq 1. \tag{4.6}$$

Экспонента Тсаллиса и деформированный логарифм. Далее мы будем широко использовать так называемые деформированные функции, в частности, деформированный логарифм $\ln_q(x)$ и деформированную экспоненциальную функцию (экспоненту Тсаллиса) $\exp_q(x)$, которые определяются следующим образом (см. Tsallis, 2007, 2009):

$$\ln_q(x) := \frac{x^{1-q}-1}{1-q}, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad q\in\mathbb{R}, \tag{4.7}$$

$$\exp_q(x) := [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} = \begin{cases} 0, & \textit{если}\ q<1\ \textit{и}\ x<-1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \textit{если}\ q<1\ \textit{и}\ x\geq -1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \textit{если}\ q>1\ \textit{и}\ x<-1/1-q, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $x\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$; выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y,0)$.

Легко проверить, что в пределе $q\to 1$ деформированные функции принимают стандартный вид:

$$\ln_1(x) = \lim_{q\to 1}\ln_q(x) = \ln(x) \quad (\forall x),$$

$$\exp_1(x) = \lim_{q\to 1+0}\exp_q(x) = \lim_{q\to 1-0}\exp_q(x) = \exp(x) \quad (\forall x), \tag{4.9}$$

а так же, что

$$\exp_q[\ln_q(x)] = \ln_q[\exp_q(x)] = x, \quad \forall x;\forall q. \tag{4.10}$$

Можно также убедиться, что для деформированной экспоненты справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{\exp_q(x)} = \exp_{2-q}(-x), \quad [\exp_q(x)]^a = \exp_{1-(1-q)/a}(ax), \quad \frac{d}{dx}e_q^x = (e_q^x)^q$$

$(\forall q)$,

$$\exp_q(x)\cdot\exp_q(y)=\exp_q[x+y+(1-q)xy] \quad (\forall x;\forall q). \tag{4.11}$$

Соответственно для деформированного логарифма $\ln_q(x)$ имеем:

$$\ln_q\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y^{1-q}}\left(\ln_q x-\ln_q y\right),\quad \ln_q\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^{1-q}}\ln_q x,\ (\forall(x,y);\forall q)$$

$$-\ln_{2-q}(1/x)=\ln_q(x),\quad (x>0;\forall q),\quad \frac{d}{dx}\ln_q x=\frac{1}{x^q}\quad (x>0;\forall q).$$

$$\ln_q(xy)=\ln_q(x)+\ln_q(y)+(1-q)\ln_q(x)\ln_q(y)\quad (\forall(x,y);\forall q). \tag{4.12}$$

Эти соотношения будут также широко использоваться далее.

Энтропийный функционал Шарма–Миттал, как родоначальник семейства однопараметрических энтропий. Продемонстрируем теперь, что определяющие формулы для энтропий (4.1)-(4.6) связаны равенствами, представляющими чередования обычных ($\ln$, $\exp$) и деформированных ($\ln_q$, $\exp_q$) логарифмов и экспонент, заданных формулами (4.7) и (4.8).

Используя обозначение

$$c_q := \sum_j p_j^{\,q} \equiv \langle 1\rangle_q \tag{4.13}$$

для так называемой обобщенной статистической суммы, перепишем выражения (4.3) и (4.4) для энтропий Реньи и Тсаллиса в виде

$$S_q^R=\frac{k}{1-q}\ln\left[\sum_j p_j^{\,q}\right]=\frac{k}{1-q}\ln c_q, \tag{4.14}$$

$$S_q^{Ts}=k\frac{\left[\left(\sum_j p_j^{\,q}\right)^{1/(1-q)}\right]^{(1-q)}-1}{1-q}=k\ln_q\left[c_q^{\frac{1}{1-q}}\right]. \tag{4.15}$$

Сопоставление этих выражений дает связь

$$c_q^{1/(1-q)}=\exp(k^{-1}S_q^R)=\exp_q(k^{-1}S_q^{Ts}), \tag{4.16}$$

из которой следуют связующие эти энтропии равенства

$$S_q^R(p)=k\ln\left\{\exp_q\left[k^{-1}S_q^{Ts}(p)\right]\right\},\quad S_q^{Ts}(p)=k\ln_q\left\{\exp\left[k^{-1}S_q^R(p)\right]\right\}. \tag{4.17}$$

Формула (4.16) позволяет также получить равенства, связывающие энтропии Шарма–Миттал и Ландсберга–Ведрала с энтропиями Тсаллиса и Реньи:

$$S_{q,r}^{SM}(p)=k\frac{\left[(\sum_j p_j{}^q)^{1/(1-q)}\right]^{(1-r)}-1}{1-r}=k\ln_r\left[c_q^{\frac{1}{1-q}}\right]=$$

$$=k\ln_r\exp_q[k^{-1}S_q^{Ts}(p)]=k\ln_r\left\{\exp[k^{-1}S_q^R(p)]\right\}, \tag{4.18}$$

$$S_q^{LV}(p)=-k\frac{\left[(\sum_j p_j{}^q)^{1/(q-1)}\right]^{1-q}-1}{1-q}=$$

$$=-k\ln_q\left[c_q^{\frac{1}{q-1}}\right]=-k\ln_q\left\{\exp[-k^{-1}S_q^R(p)]\right\}. \tag{4.19}$$

Таким образом, q-деформированный логарифм и экспонента Тсаллиса позволяют записать все перечисленные меры в компактной форме (16)-(19). Кроме этого, лаконичные соотношения (4.17)-(4.19) для энтропий облегчают нахождение предельных значений функционалов (4.1)-(4.6), по сравнению с их записью в явном виде. В частности, при использовании формулы (4.18) и соотношений (4.9*), легко найти следующие пределы:

$$S_{q,r\to q}^{SM}(p)=k\ln_{r\to q}\exp_q[k^{-1}S_q^{Ts}(p)]=S_q^{Ts}(p), \tag{4.20}$$

$$S_{q,r\to 1}^{SM}(p)=k\ln_{r\to 1}\left\{\exp[k^{-1}S_q^R(p)]\right\}=S_q^R(p). \tag{4.21}$$

Поскольку при $q\to 1$ имеем $p_j{}^{q-1}=\exp\left\{(q-1)\ln p_j\right\}\to 1+(q-1)\ln p_j$, то предельное значение энтропии Тсаллиса $\lim\limits_{q\to 1} S_q^{Ts}(p)$ сводится к энтропии Больцмана–Гиббса–Шеннона S^{BGS}. Действительно, при $q\to 1$ имеем:

$$S^{Ts}_{q\to 1}(p) = \lim_{q\to 1}\frac{k}{q-1}\sum\nolimits_j p_j(1-p_j^{\,q-1}) = -k\sum\nolimits_j p_j \ln p_j) = S^{BGS}(p). \quad (4.22)$$

Аналогично можно получить следующие предельные значения:

$$S^{R}_{q\to 1}(p) = k\lim_{q\to 1}\frac{\ln[\sum_j p_j p_j^{\,q-1}]}{1-q} = k\lim_{q\to 1}\frac{\ln[\sum_j p_j(1+(q-1)\ln p_j]}{1-q} =$$

$$= k\lim_{q\to 1}\frac{\ln[1+(q-1)\sum_j p_j \ln p_j]}{1-q} \simeq -k\sum\nolimits_j p_j \ln p_j) = S^{BGS}(p), \quad (4.23)$$

$$S^{LV}_{q\to 1}(p) = -k\lim_{q\to 1}\left\{\ln_q \exp[-k^{-1}S^{R}_q(p)]\right\} = S^{BGS}(p). \quad (4.24)$$

Наконец, используя соотношения (4.18) и (4.23), получим формулу для определения энтропии Гаусса

$$S^{SM}_{q\to 1,r}(p) = k\lim_{q\to 1}\ln_r\left\{\exp[k^{-1}S^{R}_q(p)]\right\} = k\ln_r \exp(k^{-1}S^{BGS}) =$$

$$= k\frac{1-\exp\left\{(r-1)\sum_j p_j \ln p_j\right\}}{(r-1)} = S^{G}_r(p). \quad (4.25)$$

Псевдоаддитивность энтропии Шарма−Миттал для независимых систем. Покажем, что подобно энтропии Тсаллиса, энтропия Шарма−Миттал подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых системы. Пусть общая система характеризуется нормированным распределением вероятностей микросостояний $p_{12} = \{p_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,\mathrm{W}}$ и энтропией Шарма−Миттал

$$S^{SM}_{q,r}(p_{12}) = k\ln_r\left\{\exp_q\left[k^{-1}S^{Ts}_q(p_{12})\right]\right\}. \quad (4.26)$$

Для двух независимых систем справедливо мультипликативное распределение $p_{12} = p_1 p_2$, где $p_1 = \{p_i\}_{i=1,\ldots,\mathrm{W}}$ и $p_2 = \{p_j\}_{j=1,\ldots,\mathrm{W}}$ относятся соответственно, к первой и второй системе. Подставляя распределение $p_{12} = p_1 p_2$ в (4.26) и учитывая формулы (4.10), (4.12) и (4.18), получим равенство

$$S_{q,r}^{SM}(p_{12}) = k\ln_r\left\{\exp_q \frac{1}{k}\left[S_q^{Ts}(p_1)+S_q^{Ts}(p_2)+(1-q)S_q^{Ts}(p_1)S_q^{Ts}(p_2)\right]\right\}=$$

$$=k\ln_r\left\{\exp_q\left[\frac{1}{k}S_q^{Ts}(p_1)\right]\cdot\exp_q\left[\frac{1}{k}S_q^{Ts}(p_2)\right]\right\}=k\ln_r\left\{\exp_q\left[\frac{1}{k}S_q^{Ts}(p_1)\right]\right\}+$$

$$+k(1-r)\ln_r\left\{\exp_q\left[\frac{1}{k}S_q^{Ts}(p_1)\right]\right\}\left\{\exp_q\left[\frac{1}{k}S_q^{Ts}(p_2)\right]\right\}+k\ln_r\left\{\exp_q\left[\frac{1}{k}S_q^{Ts}(p_2)\right]\right\}=$$

$$=S_{q,r}^{SM}(p_1)+S_{q,r}^{SM}(p_2)+\frac{1}{k}(1-r)S_{q,r}^{SM}(p_1)S_{q,r}^{SM}(p_2), \qquad (4.27)$$

из которого следует свойство псевоаддитивности энтропии Шарма−Миттал для двух независимых систем. Параметр r в (4.27) определяет степень неаддитивности энтропий из семейства Шарма−Миттал. Из этого выражения видно, что только для энтропий Реньи $(r=1)$ и Больцмана−Гиббса−Шеннона $(r,q=1)$ выполняется закон аддитивности.

4.2. Экстремум энтропии Шарма−Миттал и негиббсовое равновесное распределение

Пусть рассматриваемая статистическая система с мерой Шарма−Миттал реализуется двумя множествами: множеством всех состояний системы, описываемых распределением вероятностей $p=\{p_1,\ldots,p_W\}$, и множеством параметров $T(p)=\{T_1,\ldots,T_W\}$, характеризующих систему. Будем далее считать, что средневзвешенное каждой случайной величины T в состоянии с распределением p определяется по формуле (Scarfone, 2006; Frank, Plastino, 2002; Aktürk и др.,2007; Зарипов, 2010).

$$\langle T\rangle_q := \sum\nolimits_j T_j f_j(q) = c_q^{-1}\sum\nolimits_j T_j\, p_j^q\,, \qquad (4.28)$$

где

$$f_j(q) := p_j^q / \sum\nolimits_i p_i^q = p_j^q / c_q \qquad (4.29)$$

− эскортное (нормированное) распределение (см. Abe, 2000), которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Легко показать, что распределения p_i и

f_i могут быть записаны в следующих эквивалентных формах

$$p_i = f_i^{1/q}\left[c_q(p)\right]^{1/q} = f_i^{1/q} / \sum_j f_j^{1/q},$$

$$f_i(q) = p_i^q \exp\left\{k^{-1}(q-1)S_q^R(p)\right\},$$

Для определения равновесного распределения системы найдем безусловный экстремум энтропии Шарма–Миттал

$$S_{q,r}^{SM}(p) = \frac{k}{r-1}\left(1 - c_q^{(r-1)/(q-1)}\right) = k\ln_r\left[c_q^{1/(q-1)}\right] \tag{4.30}$$

при заданности среднего значения E_q энергии системы и сохранении нормировки распределения p

$$E_q := \sum_j \varepsilon_j f_j = const, \ \sum_j p_j = 1.$$

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), для нахождения вероятного распределения необходимо вычислить безусловный экстремум функционала

$$\mathcal{L}(p) := k\ln_r\left[\sum_j p_j^q\right]^{1/(q-1)} - \beta\sum_j \varepsilon_j p_j^q / \sum_j p_j^q - k\alpha\sum_j p_j, \tag{4.31}$$

где параметры β и α являются неопределенными множителями Лагранжа. Из условия равенства нулю первой вариации функционала $\delta\mathcal{L}$, получим равенство

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta p_j} = \frac{kq}{1-q} p_j^{q-1} c_q^{\frac{r-q}{q-1}} - q\frac{\beta}{c_q} p_j^{q-1}(\varepsilon_j - E_q) - k\alpha = 0,$$

из которого следует

$$\tilde{p}_j^{q-1}\left[1 - k^{-1}(1-q)\frac{\beta}{\Gamma_{q,r}}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right] = \Gamma_{q,r}^{-1}\left(\frac{1-q}{q}\alpha\right) \tag{4.32}$$

Здесь введена величина $\Gamma_{q,r}$, определяемая соотношением

$$\Gamma_{q,r} := \tilde{c}_q^{\frac{r-1}{q-1}}. \tag{4.33}$$

Заметим, что для энтропии Тсаллиса $\Gamma_{q,r=q} = c_q$; для энтропии Реньи $\Gamma_{q,1} = 1$; для энтропии Ландсберга–Ведрала $\Gamma_{q,r=2-q} = 1/c_q$.

Поскольку множители Лагранжа β и α имеют произвольные значения то, полагая

$$\alpha \equiv \frac{q}{1-q}\left(\sum_j \tilde{p}_j^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}} = \frac{q\Gamma_{q,r}}{1-q}, \tag{4.34}$$

запишем (4.32) в виде негиббсового равновесного распределения с параметром $\beta_{q,r}$

$$\tilde{p}_j(\beta_{q,r}) = \frac{1}{Z_{SM}}\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right]_+^{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= \frac{1}{Z_{SM}}\exp_q\left[-k^{-1}\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right], \tag{4.35}$$

где

$$Z_{SM} = \left[\sum_j \tilde{p}_j^q\right]^{1/(1-q)} = \tilde{c}_q^{\,1/(1-q)} =$$

$$= \sum_j\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right]_+^{\frac{1}{1-q}} = \sum_j \exp_q\left[-k^{-1}\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right] \tag{4.36}$$

– статистический интеграл, определяемый из условия нормировки (4.31); параметр $\beta_{q,r} \equiv \beta / \Gamma_{q,r}$ является обратной физической температурой в статистике Шарма–Миттал (см. ниже); здесь и далее знак «тильды» у параметров системы означает их вычисление для равновесного распределения вероятностей $\tilde{p}_j$.

При условии $r = q$ из (4.35) следует выражение для равновесного распределения $\tilde{p}_j$ в статистике Тсаллиса

$$\tilde{p}_j(\beta_q) = \frac{1}{Z_{Ts}}\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta_q(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right]_+^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{Z_{Ts}}\exp_q\left[-\frac{\beta_q(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)}{k}\right], \tag{4.37}$$

где

$$Z_{Ts}(\beta_q)=\sum_j\left[1-k^{-1}(1-q)\beta_q(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)\right]_+^{\frac{1}{1-q}}=\sum_j \exp_q\left[--\frac{\beta_q(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)}{k})\right] \tag{4.38}$$

– статистический интеграл в статистике Тсаллиса; параметр $\beta_q \equiv \beta/\tilde{c}_q$ является обратной физической температурой системы, $T_{ph} \equiv 1/\beta_q$; β – множитель Лагранжа, который связан с ограничением на среднюю энергию в неэкстенсивной статистической механике. При $1-k^{-1}(1-q)\beta_q(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)<0$ имеем $\tilde{p}_j=0$, а при $q=1$ из (4.37) и (4.38) следует классическое каноническое распределение Гиббса

$$\tilde{p}_j(\beta)=\exp\left\{-k^{-1}\beta(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)\right\}/\sum_j \exp\left\{-k^{-1}\beta(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)\right\}. \tag{4.39}$$

В случае, когда $r=1$ из (4.35) следует равновесное распределение в статистике Реньи

$$\tilde{p}_j=\frac{1}{Z_R}\left[1-k^{-1}\beta(1-q)(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)\right]_+^{\frac{1}{1-q}}=\frac{1}{Z_R}\exp_q\left[-k^{-1}\beta(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)\right]. \tag{4.40}$$

Здесь

$$Z_R(\beta)=\tilde{c}_q^{1/(1-q)}=\sum_j\left[1-k^{-1}\beta(1-q)(\varepsilon_j-\tilde{E}_q)\right]_+^{\frac{1}{1-q}}>0 \tag{4.41}$$

– статистический интеграл; $\beta=1/T$ – обратная температура (изменяющаяся в пределах допустимых значений). Таким образом, распределение вероятностей состояния статистического ансамбля неэкстенсивных систем с мерой Реньи, которые находятся в тепловом равновесии с внешней средой (термостатом) и могут обмениваться с ней энергией при постоянном объеме и постоянном числе частиц, соответствует обобщенному каноническому ансамблю Гиббса (40).

4.3. Термодинамические соотношения обобщенной равновесной термодинамики

Приступим теперь к основной цели данной главы – конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике Шарма–Миттал. Поскольку соотношение (4.18) справедливо и для равновесного распределения $\tilde{p}_j$, то для экстремального значения энтропии Шарма−Миттал имеем

$$S_{q,r}^{SM} = k\frac{\tilde{c}_q^{(1-r)/(1-q)} - 1}{1-r} = k\frac{Z_{SM}^{1-r} - 1}{1-r} = k\ln_r Z_{SM}, \qquad (4.42)$$

а для квазиравновесной деформированной свободной энергии Гельмгольца $F_{q,r}$ и обобщенного статистического интеграла Z_{SM} имеем следующие выражения

$$\tilde{F}_{q,r} := \tilde{E}_q - \frac{1}{\beta}\tilde{S}_{q,r}^{SM} = \tilde{E}_q - \frac{1}{\beta}k\ln_r Z_{SM}, \quad Z_{SM} = \left[\sum\nolimits_j p_0^q\right]^{1/(1-q)}. \qquad (4.43)$$

Учитывая (4.36) и (4.42), можно переписать равновесное нормированное распределение (4.35) в следующем виде

$$\tilde{p}_j(\beta_{q,r}) = \left\{\frac{1 - \omega(q)\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)}{\tilde{c}_q}\right\}^{1/(1-q)} =$$

$$= \frac{\left\{1 - \omega(q)\,\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right\}^{1/(1-q)}}{\left\{1 + \omega(r)\,\tilde{S}_{q,r}^{SM}\right\}^{1/(1-r)}} = \frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right\}}{\exp_r\left\{k^{-1}\tilde{S}_{q,r}^{SM}\right\}}. \qquad (4.44)$$

Здесь введены широко используемые далее обозначения:

$$\omega(r) := k^{-1}(1-r), \quad \omega(q) := k^{-1}(1-q).$$

Учитывая соотношения (4.33) и (4.36), можно переписать выражение для статистического интеграла Z_{SM} в следующем виде

$$Z_{SM}(\beta) = \sum\nolimits_j \exp_q\left[-Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}\beta(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right]. \qquad (4.45)$$

Дифференцируя (4.45) по β с учетом формулы (4.10), получим

$$\frac{\partial}{\partial\beta}Z_{SM} = -\sum\nolimits_j\left\{\exp_q\left[-Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}\beta(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\right]\right\}^q \times$$

$$\times\left\{Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q) + k^{-1}\beta(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)\frac{\partial Z_{SM}^{(r-1)}}{\partial\beta} - Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}\beta\frac{\partial\tilde{E}_q}{\partial\beta}\right\} =$$

$$=-Z_{SM}^{(r-1)}Z_{SM}^{q}\sum\nolimits_{j}\tilde{p}_{j}^{q}\left\{\frac{\varepsilon_{j}-E_{q}}{k}+\beta\frac{\varepsilon_{j}-\tilde{E}_{q}}{k}\frac{\partial\ln Z_{SM}^{(r-1)}}{\partial\beta}-\frac{\beta}{k}\frac{\partial\tilde{E}_{q}}{\partial\beta}\right\}=$$

$$=Z_{SM}^{q}Z_{SM}^{(r-1)}\tilde{c}_{q}k^{-1}\beta\frac{\partial E_{q}}{\partial\beta}=Z_{SM}^{r}k^{-1}\beta\frac{\partial E_{q}}{\partial\beta} \tag{4.46}$$

С учетом формулы (4.11) для дифференцирования деформированного логарифма (4.11), из (4.46) следует

$$\frac{\partial\ln_{r}Z_{SM}}{\partial\beta}=Z_{SM}^{-r}\frac{\partial Z_{SM}}{\partial\beta}=k^{-1}\beta\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\beta}. \tag{4.47}$$

С другой стороны, используя выражение (4.42) и (.945), получим

$$\tilde{S}_{q,r}^{SM}=\ln_{r}\left\{\sum\nolimits_{j}\exp_{q}\left[-Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}\beta(\varepsilon_{j}-\tilde{E}_{q})\right]\right\}, \tag{4.48}$$

Откуда

$$\frac{\partial\tilde{S}_{q,r}^{SM}}{\partial\tilde{E}_{q}}=k\frac{\partial\ln_{r}Z_{SM}}{\partial\tilde{E}_{q}}=$$

$$=\frac{k}{Z_{SM}^{r}}Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}\beta\sum\nolimits_{j}\left(\exp_{q}\left[-Z_{SM}^{(r-1)}k^{-1}\beta(\varepsilon_{j}-\tilde{E}_{q})\right]\right)^{q}=\beta\tilde{c}_{q}Z_{SM}^{q-1}=\beta. \tag{4.49}$$

Таким образом, для равновесной термодинамики, построенной на базе энтропии Шарма−Миттал, можно написать (опуская знак «тильды») следующие соотношения

$$S_{q,r}^{SM}=k\ln_{r}Z_{SM}, \quad F_{q,r}=E_{q}-\frac{1}{\beta}S_{q,r}^{SM}=E_{q}-\frac{1}{\beta}k\ln_{r}Z_{SM},$$

$$\beta=\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial E_{q}}=k\frac{\partial\ln_{r}Z_{SM}}{\partial E_{q}}, \quad E_{q}=\frac{\partial(\beta F_{q,r})}{\partial\beta}, \quad \beta\frac{\partial E_{q}}{\partial\beta}=k\frac{\partial\ln_{r}Z_{SM}}{\partial\beta}. \tag{4.50}$$

Здесь важно подчеркнуть, что величина Z_{SM} определяется микроскопической энергией ε_j относительно внутренней энергии E_q системы (см.(4.36)). Если ввести новую величину $\ddot{Z}_{SM}$, которая определяется микроскопической энергией ε_j относительно нулевой точки,

$$\ln_{r}\ddot{Z}_{SM}=\ln_{r}Z_{SM}-k^{-1}\beta E_{q}, \tag{4.51}$$

то соотношения равновесной термодинамики (4.50) принимают почти классическую форму

$$S_{q,r}^{SM}=\beta\left(E_q-F_{q,r}\right),\quad dS_{q,r}^{SM}=\beta dE_q,$$

$$F_{q,r}=-(k/\beta)\ln_q\vec{\tilde{Z}}_{SM},\quad E_q=\partial(\beta F_{q,r})/\partial\beta,\quad C_q=-\beta^2\partial E_q/\partial\beta. \tag{4.52}$$

4.4. Термодинамическое равновесие двух независимых систем с энтропией Шарма−Миттал

Рассмотрим тепловое равновесие двух независимых q-систем с энтропиями $S_{q,r}^{SM}(p_1)$ и $S_{q,r}^{SM}(p_2)$, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S_{SM}^{12}\equiv S_{SM}(p_{12})$ при $p_{12}=p_1p_2$ и суммарной энергии $E_q(p_{12})$. Согласно свойству неаддитивности (4.27) энтропий в статистике Шарма−Миттал , энтропию совокупной системы можно переписать в следующем виде:

$$S_{q,r}^{SM}(p_{12})=S_{q,r}^{SM}(p_1)\left[1+\omega(r)S_{q,r}^{SM}(p_2)\right]+S_{q,r}^{SM}(p_2)\left[1+\omega(r)S_{q,r}^{SM}(p_1)\right]-$$
$$-\omega(r)S_{q,r}^{SM}(p_1)S_{q,r}^{SM}(p_2). \tag{4.53}$$

Для нахождения осредненной энергии $E_q(p_{12})$ совокупной q-системы воспользуемся равновесным распределением (4.44)

$$p_j=\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta_{q,r}\Delta[\varepsilon_j]\right\}}{\exp_r\left\{k^{-1}S_{q,r}^{SM}\right\}}. \tag{4.54}$$

где $\Delta[\varepsilon_j]:=(\varepsilon_j-E_q)$ – флуктуация энергии частиц. При учете условия мультипликативности $p_{12}=p_1p_2$ и формулы (4.10) будем иметь

$$\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta_{q,r}\Delta_{12}[\varepsilon_j]\right\}}{\exp_r\left\{k^{-1}S_{q,r}^{SM}(p_{12})\right\}}=\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta_{q,r}\Delta_1[\varepsilon_j]\right\}}{\exp_r\left\{k^{-1}S_{q,r}^{SM}(p_1)\right\}}\cdot\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta_{q,r}\Delta_2[\varepsilon_j]\right\}}{\exp_r\left\{k^{-1}S_{q,r}^{SM}(p_2)\right\}}=$$
$$=\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta_{q,r}\left(\Delta_1[\varepsilon_j]+\Delta_2[\varepsilon_j]+\omega(q)\Delta_1[\varepsilon_j]\cdot\Delta_2[\varepsilon_j]\right)\right\}}{\exp_r\left\{k^{-1}\left(S_{q,r}^{SM}(p_1)+S_{q,r}^{SM}(p_2)+\omega(r)S_{q,r}^{SM}(p_1)\cdot S_{q,r}^{SM}(p_2)\right)\right\}}. \tag{4.55}$$

Поскольку знаменатели в правой и левой частях соотношения (55) одинаковы, то можно заключить, что

$$\Delta_{12}[\varepsilon_j] = \Delta_1[\varepsilon_j] + \Delta_2[\varepsilon_j] + \omega(q)\Delta_1[\varepsilon_j] \cdot \Delta_2[\varepsilon_j]. \tag{4.56}$$

В этом соотношении необходимо использовать условие аддитивности осредненных энергий

$$E_q^{12} = E_q^1 + E_q^2, \tag{4.57}$$

поскольку без этого предположения осредненные величины системы будут зависеть от микроскопических величин, что является неприемлемым (см., например, Zaripov, 2005). Тогда из (4.56) для микроскопических энергий получим следующее условие квазиаддитивности микроскопических энергий

$$\varepsilon_{i12} = \varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2} - \omega(q)\beta\Delta_1\left[\varepsilon_i\right]\Delta_2\left[\varepsilon_i\right]. \tag{4.58}$$

Отметим, что именно наличие этого равенства является, в частности, той причиной, благодаря которой статистику на мере Реньи относят к неэкстенсивной статистической механике.

Варьирование соотношений (4.53) и (4.57) для совокупной замкнутой системы с постоянными значениями энтропии $S_{q,r}^{SM}(p_{12})$ и энергии E_q^{12} приводит к равенству

$$\delta S_{q,r}^{SM}(p_{12}) = 0 = \delta S_{q,r}^{SM}(p_1)\left[1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}(p_2)\right] + \delta S_{q,r}^{SM}(p_2)\left[1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}(p_1)\right]$$

для энтропии и равенству $\delta E_q^{12} = 0 = \delta E_q^1 + \delta E_q^2$ для средней энергии. Объединяя их, в итоге получим уравнение

$$\frac{\delta S_{q,r}^{SM}(p_1)/\delta E_q^1}{1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}(p_1)} = \frac{\delta S_{q,r}^{SM}(p_2)/\delta E_q^2}{1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}(p_2)}, \tag{4.59}$$

из которого, при учете (4.33), (4.42) и (4.50), вытекает условие

$$\frac{\beta}{1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}(p_1)} = \frac{\beta}{1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}(p_2)} = \frac{\beta}{\Gamma_{q,r}} \equiv \beta_{q,r}, \tag{4.60}$$

означающее равенство физических температур $\beta_{q,r}$ двух независимых q-систем при их тепловом контакте. Отношение эквивалентности (4.60) является обобщением нулевого закона термодинамики на неэкстенсивные системы, описываемые статистикой Шарма–Миттал. Оно показывает, что в отличие от классического случая $(q,r \to 1)$ физическая температура T_{ph} не является обратной величиной множителя Лагранжа, β^{-1}, но

$$T_{ph} = \frac{1}{\beta_{q,r}} \equiv \frac{\Gamma_{q,r}}{\beta} = \left(1 + \omega(r) S_{q,r}^{SM}\right) T = \Gamma_{q,r} T \, . \tag{4.61}$$

Важно иметь в виду, что такое переопределение эффективной температуры в статистике Шарма−Миттал противоречит основным принципам классической термодинамики, где абсолютная температура T является интенсивным параметром, а не функционалом $T_{ph}(p)$. В связи с этим, сделаем следующее общее замечание. В большинстве неэкстенсивных систем важную роль играют длинно-масштабные пространственно-временные корреляции в фазовом или геометрическом пространстве. Это означает, в частности, что существенное значение имеет та часть внутренней энергии системы, которая связана с силовым взаимодействием отдаленных друг от друга ее частей, а именно потенциальная энергия. В классической статистике внутренняя энергия определяется, как правило, суммой кинетических энергий всех молекул совокупной системы. В такой системе «тепловой баланс» достигается в основном за счет локального теплообмена между близко расположенными ее частями, т.е. «тепло» связано с передачей кинетической энергии молекулами.

Поскольку физическая температура T_{ph} отвечает за «глобальный тепловой баланс» между различными частями системы, то ее энергетический баланс будет сильно отличаться от локального теплового баланса. Локальный баланс, как известно, можно охарактеризовать абсолютной обратной температурой $\beta = 1/T$, измеряемой термометром. Однако любое измерение физической температуры T_{ph} нереально, что связано с наличием коэффициента $\Gamma_{q,r}$, зависящего, согласно (4.33), от параметров деформации q и r системы.

Таким образом, обобщенный нулевой закон статистической термодинамики (4.60) показывает, что физическая температура в статистике Шарма−Миттал отличается от инверсии множителя Лагранжа β. Этот факт неизбежно должен приводить к переопределению некоторых термодинамических соотношений (4.50) и (4.52), полученных в рамках статистики Шарма−Миттал. В работе (Abe и др., 2001; Abe, Okamoto, 2001), в качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения модифицированной макроскопической термодинамики Тсаллиса, выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Далее мы также воспользуемся этим подходом для переопределения соответствующим образом полученные выше термодинамических соотношений.

4.5. Деформированные термодинамические соотношения

Прежде всего введем, по аналогии с физической температурой T_{ph}, физическое давление p_{qh}, путем рассмотрения механического равновесия двух независимых q-систем, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S^{SM}_{q,r}(p_{12})$ и объема $V_{12}=V_1+V_2=const$. В этом случае энтропия совокупной системы должна максимизироваться с фиксацией общего объема. В результате будем иметь

$$\frac{\delta S^{SM}_{q,r}(p_1)/\delta V_1}{1+\omega(r)S^{SM}_{q,r}(p_1)}=\frac{\delta S^{SM}_{q,r}(p_2)/\delta V_2}{1+\omega(r)S^{SM}_{q,r}(p_2)}=\frac{p_{ph}}{T_{ph}}, \tag{4.62}$$

где p_{ph} − так называемое физическое давление, которое определяется соотношением

$$p_{ph}:=\frac{T_{ph}}{1+\omega(r)S^{SM}_{q,r}}\frac{\delta S^{SM}_{q,r}}{\delta V}=\frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}}\frac{\delta S^{SM}_{q,r}}{\delta V}. \tag{4.63}$$

Очевидно, что введенные таким способом физические температура и давление, должны привести к модификации определения термодинамической энтропии Клаузиуса.

Чтобы показать это, рассмотрим структуру преобразования Лежандра. Уравнение (4.50) $\beta=\partial S^{SM}_{q,r}/\partial E_q$ указывает на то, что параметры β и E_q образуют пару переменных Лежандра. Это приводит к следующему определению свободной энергии Гельмгольца (изохорно-изотермического потенциала) (см.(4.43) и (4.50)):

$$F_{q,r} = E_q - TS_{q,r}^{SM} = E_q - kT\ln_r Z_{SM} = E_q - kT\ln_r\left[c_q^{1/(1-q)}\right]. \tag{4.64}$$

Это выражение, однако, неудовлетворительно с точки зрения деформированной термодинамики. Свободная энергия должна зависеть от T_{ph}, а не от переменной $T = \beta^{-1}$.

По аналогии с подходом (Abe, 2000-a), переопределим макроскопическую свободную энергию (4.64) следующим образом:

$$F_{q,r}(T_{ph}) = E_q - kT_{ph}\ln\left[c_q^{1/(1-q)}\right], \tag{4.65}$$

что отличается от соответствующего выражения в традиционной термодинамике. Используя соотношения (4.42), (4.33) и (4.61), можно убедиться, что переопределенная таким образом свободная энергия $F_{q,r}$ является функцией T_{ph}. Дифференцируя функцию $F_{q,r}$, в результате получим

$$dF_{q,r} = dE_q - \left[\frac{k}{1-q}\ln c_q\right]dT_{ph} - \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}}dS_{q,r}^{SM}. \tag{4.66}$$

Если теперь использовать первый закон термодинамики

$$d'Q_q = dE_q + p_{ph}dV, \tag{4.67}$$

где Q_q – количество теплоты, подводимое к термодинамической q-системе (или отводимое от нее), то (4.66) можно переписать в виде

$$dF_{q,r} = d'Q_q - p_{ph}dV - \left[\frac{k}{1-q}\ln c_q\right]dT_{ph} - \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}}dS_{q,r}^{SM}. \tag{4.68}$$

Отсюда следует, что определение термодинамической энтропии Клаузиуса модифицируется для неаддитивных систем следующим образом:

$$dS_{q,r}^{SM} = \Gamma_{q,r}d'Q_q / T_{ph}. \tag{4.69}$$

Введем теперь в рассмотрение следующие характеристические функции: обобщенную энтальпию $H_q = E_q + p_{ph}V$ и обобщенный термодинамический потенциал $G_{q,r} = F_{q,r} + p_{ph}V$. Заметим, что характеристические функции обладают следующим свойством: если известна характеристическая функция, выраженная через соответствующие (свои для каждой функции) переменные, то из нее можно вычислить любую термодинамическую величину.

В этом нетрудно убедиться. Из уравнений

$$dE_q = \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}} dS_{q,r}^{SM} - p_{ph} dV , \quad dH_q = \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}} dS_{q,r}^{SM} + V dP_{ph} , \tag{4.70}$$

$$dF_q = -\left[\frac{k}{(1-q)} \ln c_q \right] dT_{ph} - p_{ph} dV , \quad dG_{q,r} = -\left[\frac{k}{(1-q)} \ln c_q \right] dT_{ph} + V dp_{ph} \tag{4.71}$$

следуют обобщенные термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial E_q}{\partial V} \right)_{S_{q,r}^{SM}} = \left(\frac{\partial F_{q,r}}{\partial V} \right)_{T_{ph}} = -p_{ph} , \quad \left(\frac{\partial E_q}{\partial S_{q,r}^{SM}} \right)_V = \left(\frac{\partial H_q}{\partial S_{q,r}^{SM}} \right)_{P_{ph}} = \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}} , \tag{4.72}$$

$$\left(\frac{\partial H_q}{\partial p_{ph}} \right)_{S_{q,r}^{SM}} = \left(\frac{\partial G_{q,r}}{\partial p_{ph}} \right)_{T_{ph}} = V , \quad \left(\frac{\partial F_{q,r}}{\partial T_{ph}} \right)_V = \left(\frac{\partial G_{q,r}}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}} = -\frac{k}{(1-q)} \ln c_q . \tag{4.73}$$

Уравнение для теплоемкостей. Как известно, в классической термодинамике теплоемкость вещества в наиболее общем виде определяется следующим образом: $C_z = T\left(\partial S / \partial T\right)_z$. Здесь C_z – теплоемкость в таком процессе, в котором сохраняется постоянным параметр Z, где Z – любые обобщенные координаты. Наиболее распространенными являются изобарная теплоемкость и изохорная теплоемкость:

$$C_p = \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}} \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial T_{ph}} \right)_{p_{ph}} , \quad C_V = \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}} \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial T_{ph}} \right)_V . \tag{4.74}$$

Так как в соответствии с формулой $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_z \left(\frac{\partial u)}{\partial x} \right)_z$ (справедливой для случая двух переменных, когда $y = y(x,z)$ и $u = u(x,z)$) имеем

$$\left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial T_{ph}}\right)_{p_{ph}} = \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial H_q}\right)_{p_{ph}} \left(\frac{\partial H_q}{\partial T_{ph}}\right)_{p_{ph}} \text{ и } \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial T_{ph}}\right)_V = \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial E_q}\right)_V \left(\frac{\partial E_q}{\partial T_{ph}}\right)_V, \tag{4.75}$$

а из (4.72) и (4.73) следует, что $\left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial H_q}\right)_{p_{ph}} = \frac{\Gamma_{q,r}}{T_{ph}}$, $\left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial E_q}\right)_V = \frac{\Gamma_{q,r}}{T_{ph}}$, то соотношения (4.74) можно записать в виде

$$C_p = \left(\partial H_q / \partial T_{ph}\right)_{p_{ph}}, \quad C_V = \left(\partial E_q / \partial T_{ph}\right)_V. \tag{4.76}$$

Уравнение, устанавливающее связь между теплоемкостями C_p и C_V, может быть получено следующим образом. В соответствии с соотношением (см. Сычев, 1991)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)_n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_n + \left(\frac{\partial z)}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)_n, \tag{4.77}$$

являющимся следствием выражения для полного дифференциала функции $z = z(x, y)$, можно записать (полагая $m = x$)

$$\left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial T_{ph}}\right)_V + \left(\frac{\partial S_{q,r}^{SM}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}. \tag{4.78}$$

Отсюда, используя уравнение Максвелла $(\partial S_{q,r}^{SM}/\partial V)_{T_{ph}} = (\partial p_{ph}/T_{ph})_V$, получим

$$C_p - C_V = \frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}^2} \left(\frac{\partial p_{ph}}{\partial T_{ph}}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}. \tag{4.79}$$

Это выражение может быть представлено в другом виде, если использовать связку трех производных $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$ (следствие соотношения (77) при $m = x$, $n = z$ (Сычев, 1991), из которой следует

$$\left(\frac{\partial p_{ph}}{\partial T_{ph}}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{p_{ph}} \left(\frac{\partial p_{ph}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} . \tag{4.80}$$

С учетом (80) связь между теплоемкостями приобретает классический вид:

$$C_p - C_V = -\frac{T_{ph}}{\Gamma_{q,r}^2}\left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}^2 \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial p_{ph}}\right)_{T_{ph}} . \tag{4.81}$$

Таким образом, стандартная форма термодинамических соотношений (4.72), (4.73) и (4.81) в термодинамике Шарма−Миттал позволяет заключить, что они остаются инвариантными относительно неаддитивной модификации их классических аналогов. Подчеркнем важный факт, что температуры $T = 1/\beta$ и $T_{ph} = 1/\beta_{q,r}$ не зависят от выбора нуля энергий, и поэтому они допускают физическую интерпретацию. Заметим, что в дополнение к структуре Лежандра различные другие важные теоремы и свойства остаются q- инвариантными (см. Tsallis, 2009).

4.6. Двухпараметрическая информация различия Шарма−Миттал. Обобщенная H-теорема

Наряду с энтропией $S_{q,r}^{SM}$, информация различия Шарма-Миттал

$$K_{q,r}^{SM}(p:u) \equiv -\frac{k}{1-r}\left[\left(\sum_j p_j^q u_j^{1-q}\right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right] = -k\ln_r\left(\sum_j p_j^q u_j^{1-q}\right)^{\frac{1}{1-q}} \tag{4.82}$$

также относятся к наиболее существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической q-системы. Являясь функционалом, она характеризует переход системы от состояния p в состояние u, когда статистические наблюдения ведутся относительно состояния p.

Заметим, что при $r \to 1$ величина $K_{q,r}^{SM}$ переходит в различающую информацию Реньи

$$K_{q,r=1}^{SM}(p:u) = K_q^R(p:u) := \frac{k}{q-1}\ln\sum_j p_j^q u_j^{1-q} ,$$

а при $q=r$ величина $K_{q,r}^{SM}$ переходит в различающую информацию Ратье-Каннаппана

$$K_{q,q}^{SM}(p:u)=K_q^{RK}(p:u):=\frac{k}{1-q}\left[1-\sum_j p_j^q u_j^{1-q}\right]=-k\ln_q\left(\sum_j p_j^q u_j^{1-q}\right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

Выпуклость. Различающая информация $K_{q,r}^{SM}(p:u)$ является вещественным, выпуклым и положительным (или отрицательным) функционалом с минимумом (максимумом) в зависимости от сочетания знаков параметров деформации r и q. Покажем это. Для некоторого действительного числа $n>0$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{n^{q-1}-1}{q-1}&\geq 1-\frac{1}{n}, \quad \text{если}\, q>0,\\ &=1-\frac{1}{n}, \quad \text{если}\, q=0,\\ &\leq 1-\frac{1}{n}, \quad \text{если}\, q<0.\end{aligned} \tag{4.83}$$

Поэтому, например, для $q<0$ справедливо неравенство

$$\left(p_j/u_j\right)^{q-1}\geq q+(1-q)(u_j/p_j),$$

при использовании которого получаем

$$K_{q,r}^{SM}=\frac{k}{r-1}\left\{\left[\sum_j p_j\left(\frac{p_j}{u_j}\right)^{q-1}\right]^{\frac{r-1}{q-1}}-1\right\}\leq\frac{k}{r-1}\left\{\left[\sum_j p_j\left(q+(1-q)\frac{u_j}{p_j}\right)\right]^{\frac{r-1}{q-1}}-1\right\}=0$$

, (4.84)

если $r<1$. Легко проверить, что имеют место следующие неравенства

$$K_{q,r}^{SM}(p:u)\leq 0, \text{ если } q<0, r<1, \text{ или } q>0, r>1;$$

$$K_{q,r}^{SM}(p:u)\geq 0, \text{ если } q<0, r>1, \text{ или } q>0, r<1\,. \tag{4.85}$$

В частном случае, когда $r\to 1$, из неравенств (4.85) вытекают следующие неравенства для различающей информации Реньи $K_q^R(p:u)$:

$$K_q^R(p:u) \le 0, \quad (q<0); \quad K_q^R(p:u) \ge 0, \quad (q>0). \tag{4.86}$$

Важно отметить, что поскольку при $u = p$ имеет место равенство $K_{q,r}^{SM}(p:p) = 0$, то различающая информация Шарма–Миттал является функцией Ляпунова[11].

Для различающей информации Ратье-Каннаппана $K_q^{RK}(p:u)$ из (4.85) следует

$$K_q^{RK}(p:u) \ge 0, \ (q>0); \quad K_q^{RK}(p:u) = 0, \ (q=0); \quad K_q^{RK}(p:u) \le 0, \ (q<0), \tag{4.87}$$

т.е. выражение (4.87) удовлетворяет такому же основному свойству, что и энтропия Кульбака−Лейблера классической статистики, а потому может использоваться для тех же целей. Однако в данном случае имеется свобода выбора параметра q, что позволяет исследовать неэкстенсивные системы.

Обобщенная H-теорема в статистике Шарма-Миттал. Рассмотрим теперь замкнутую систему, для которой распределение p_j является произвольным, а распределение $u_j = \tilde{p}_j$ – равновесным (см. (4.44))

$$u_j = \tilde{p}_j = \left\{ \frac{1 - \omega(q)\beta_{q,r}(\varepsilon_j - \tilde{E}_q)}{\tilde{c}_q} \right\}^{\frac{1}{1-q}}. \tag{4.88}$$

При использовании соотношений (4.8), (4.11), (4.30), (4.33) и (4.36) легко показать, что спонтанный переход между этими состояниями описывается следующей различающей информацией Шарма-Миттал

[11] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p}) \equiv \frac{k}{1-r}\left[1-\left(\sum_j p_j^q \tilde{p}_j^{1-q}\right)^{\frac{1-r}{1-q}}\right]=$$

$$=-\frac{k}{1-r}\left[\left(\frac{c_q}{\tilde{c}_q}\right)^{\frac{1-r}{1-q}}\left(1-\omega(q)\tilde{\beta}_{q,r}(E_q-\tilde{E}_q)\right)^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right]=$$

$$=-k\ln_r\left\{\frac{c_q^{\frac{1}{1-q}}\exp_q\left[-k^{-1}\tilde{\beta}_{q,r}(E_q-\tilde{E}_q)\right]}{\tilde{c}_q^{\frac{1}{1-q}}}\right\}=$$

$$=-k\frac{1}{\tilde{c}_q}\ln_r\left\{c_q^{\frac{1}{1-q}}\exp_q\left[-k^{-1}\tilde{\beta}_{q,r}(E_q-\tilde{E}_q)\right]\right\}+\frac{k}{\tilde{c}_q}\ln_r\tilde{c}_q^{\frac{1}{1-q}}=$$

$$=Z^{q-1}_{SM}\left\{-\left(S^{SM}_{q,r}-\tilde{S}^{SM}_{q,r}\right)-kc_q\ln_r\exp_q\left[-k^{-1}\tilde{\beta}_{q,r}(E_q-\tilde{E}_q)\right]\right\} \quad (4.89)$$

с равенством $K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p})=0$ при распределении $p_j=\tilde{p}_j$.

Если $q,r\to 1$, то из (4.89) вытекает известное выражение для информации различия Кульбака–Лейблера $K^{KL}(p,u):=k\sum_j p_j\ln(p_j/u_j)$ классической статистической механики для случая спонтанного перехода системы от произвольного состояния с распределением p к состоянию с каноническим распределением Гиббса $\tilde{p}_j=Z^{-1}\exp(-k^{-1}\beta\varepsilon_j)$ (см. Зарипов, 2002; Колесниченко 2018c)

$$K^{KL}(p:\tilde{p})=-\left(S^{BGS}-\tilde{S}^{BGS}\right)+\beta(E_q-\tilde{E}_q)\geq 0 \quad (4.90)$$

характеризующее степень отклонения хаотической системы от полного равновесия.

При выполнении условия Гиббса $E_q=\tilde{E}_q$ (см. Климонтович,1990) и с учетом свойства (4.85) знакоопределенности информации различия $K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p})$ из (4.89) следуют два неравенства:

$$K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p})Z_{SM}^{1-q}=-\left(S^{SM}_{q,r}-\tilde{S}^{SM}_{q,r}\right)>0, \text{ если } q>0,\ r<1, \text{ или } q<0, r>1; \quad (4.91)$$

$$K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p})Z^{1-q}_{SM} = -\left(S^{SM}_{q,r} - \tilde{S}^{SM}_{q,r}\right) < 0, \text{ если } q<0,\, r<1, \text{ или } q>0,\, r>1. \tag{4.92}$$

которые обобщают теорему Гиббса на неэкстенсивную статистику Шарма−Миттал. Согласно этой теореме, для замкнутой системы энтропия Реньи $S^{SM}_{q,r} == \tilde{S}^{SM}_{q,r} - \tilde{c}_q K^{SM}_q(p:\tilde{p})$ возрастает (убывает) до экстремального ее значения $\tilde{S}^{SM}_{q,r}$ при $q>0$ $(q<0)$ одновременно с уменьшением (увеличением) положительной (отрицательной) информации $K^{SM}_q(p:\tilde{p})$. Таким образом, различающая информация представлена здесь в виде отрицательного вклада в текущую энтропию Шарма−Миттал и потому может быть названа негэнтропией (Шредингер, 1947).

Поскольку информация различия Шарма−Миттал является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того чтобы состояние равновесия $\tilde{S}^{SM}_{q,r}$ было устойчивым, необходимо выполнение следующих неравенств

$$\frac{d}{dt}\left[K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p})Z^{1-q}_{SM}\right] = -\frac{d\left(S^{SM}_{q,r} - \tilde{S}^{SM}_{q,r}\right)}{dt} < 0, \text{ если } q>0,\, r<1;\; q<0, r>1; \tag{4.93}$$

$$\frac{d}{dt}\left[K^{SM}_{q,r}(p:\tilde{p})Z^{1-q}_{SM}\right] = -\frac{d\left(S^{SM}_{q,r} - \tilde{S}^{SM}_{q,r}\right)}{dt} > 0, \text{ если } q<0,\, r<1;\; q>0, r>1. \tag{4.94}$$

Из этих соотношений следует неравенство для энтропии Шарма−Миттал:

$$dS^{SM}_{q,r}\,/\,dt > 0 \quad \text{при } q<0, r>1, \text{ или } q>0,\, r<1, \tag{4.95}$$

$$dS^{SM}_{q,r}\,/\,dt < 0 \quad \text{при } q<0,\, r<1, \text{ или } q>0,\, r>1), \tag{4.96}$$

которые выражают H-теорему для стохастической q-системы, описываемой энтропией Шарма−Миттал: при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия замкнутой системы может как возрастать до экстремального ее значения $\tilde{S}^{SM}_{q,r}$, так и убывать в зависимости от выбора численных значений параметров неэкстенсивности q и r.

В заключение заметим, что в этой главе дается логическая схема построения деформированных термодинамик неэкстенсивных систем, основанная на многопараметрической энтропии Шарма–Миттал. В отличие от ряда известных работ (см., например, Czachor, Naudts, 2002; Scarfone, 2006; Kaniadakis и др., 2005), в которых подобные исследования по термодинамике ШМ проведены с привлечением двукратно деформированных экспоненты и логарифма (введенных первоначально в теории информации Шарма и Миттал в 1975 г.), особенность предпринятого здесь подхода состоит в том, что проведено построение обобщенных неэкстенсивных термодинамик с помощью более простых и хорошо изученных однократно деформированных функций– логарифма и экспонента Тсаллиса.

Библиография

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. - М.: Наука, 1990. 320 с.

Колесниченко А. В. Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013, № 34. 23 с.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астро-физических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса–Мендеса–Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 24. 28 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики. М.: Высш. шк. 1991. 224 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? - М.: Ин. Лит. 1947. 147 с.

Abe S. Remark on the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics // Physics Letters A. 2000. V. 275. № 4. P. 250-254.

Abe S. Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems // Eprint arXiv:cond-mat/0012115. 2000a. V.4. P.1-14.

Abe S. Heat and entropy in nonextensive thermodynamics: transmutation from Tsallis theory to Rényi-entropy-based theory // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001. V. 300. № 4. P. 417-424.

Abe S., Okamoto Y. Eds., "Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications". Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001. ISBN 3-540-41208-5.

Aktürk E., Bagci G. B., Sever R. Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? // 2007. Eprint arXiv: cond-mat/0703277.

Aktürk O., Aktürk E., Tomak M. Can Sobolev Inequality Be Written for Sharma-Mittal Entropy? // Intern. J. Theor.l Phys. 2008. V. 47. № 12, P. 3310-3320.

Aptekarev A. I., Dehesa J. S., Sanchez-Moreno P., Tulyakov D. N. Asymptotics of L_p-norms of Hermite polynomials and Renyi entropy of Rydberg oscillator states // Contemp. Math. 2012a. V. 578. P. 19-24.

Aptekarev A. I., Dehesa J. S., Sanchez-Moreno P., Tulyakov D. N. Rényi entropy of the infinite well potential in momentum space and Dirichlet-like trigonometric functionals // J Math. Chem. 2012b. № 50. P. 1079-1090.

Aptekarev A. I.,, Tulyakov D. N., Toranzo I. V., Dehesa J. S. Renyi entropies of the highly-excited states of multidimensional harmonic oscillators by use of strong Laguerre asymptotics // Eur. Phys. J. B. 2016. V. 84. P. 85-97.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1994. 286 p.

Bialas A., Czyz W. Renyi entropies of a black hole from Hawking radiation // EPL (Europhysics Letters). 2008. V. 84. № 6. P. 60009 (Peebles, 1980;

Büyükkılıç F.,Demirhan D., Güleç A. A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases // Phys. Lett. A 1995. V. 197. № 4. P. 209-220.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics// Bras. J. Phys. 1994. V. 24. № 1. P. 91-107.

Borges E., Roditi I. A family of nonextensive entropies // Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P.399-402.

Chavanis P.H., Delfini L. Dynamical stability of systems with long-range interactions: application of the Nyquist method to the HMF model // Eur. Phys. J. B. 2004. V. 64. № 4. P. 389-424.

Curado E. M. F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. A : Mathematical and General.1991. V. 24. № 2. P. L69-72

Czachor M., Naudts J. Thermostatistics based on Kolmogorov-Nagumo averages: unifying framework for extensive and nonextensive generalizations //Phys. Lett. A. 2002. V. 298. № 5-6. P 369 -374.

Daroczy Z. Generalized information functions // Inf. Control. 1970. V. 16. № 1. P. 36–51.

Du J. Test of nonextensive statistical mechanics by solar sound speeds // Europhys. Lett. 2006. V. 75. № 6. P. 861-867.

Esquivel A., Lazarian A. Tsallis Statistics as a Tool for Studying Interstellar Turbulence // Astrophys. J. 2010. V. 710. № 1. P. 125-132.

Fa K.S.,. Lenzi E.K Thermostatistical aspects of generalized entropies // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V.20. № 2. P 227 -.234.

Frank T. D., Daffertshofer A. Exact time-dependent solutions of the Renyi Fokker-Planck equation and the Fokker-Planck equations related to the entropies proposed by Sharma and Mittal // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 285, № 4. P. 351-366.

Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalized thermostatistics // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2001b. V. 292. № 1. P. 392-410.

Frank T.D., Daffertshofer A. *H*-theorem for nonlinear Fokker-Planck equations related to generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001a. V. 295. № 4. P. 455-474.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543–544.

Grassberger P. On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J. Statist. Phys. 1981. V. 26. № 1. P. 173-174.

Grassberger P. Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures // Physics Letters A. 1985. V. 107. № 4. P. 101-105.

Grassberger P., Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach **//** Physica D: Nonlinear Phenomena. 1984. V. 14. № 1-2. P. 34-54.

Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 1141–1151.

Hanel R., Thurner S., Tsallis C. Limit distributions of scale-invariant probabilistic models of correlated random variables with the *q*-Gaussian as an explicit example // Eur. J. Phys. B. 2004. V. 72. № 2. P. 263-268.

Havrda J., Charvat F. Quantiication method of classiication processes. Concept of structural α-entropy // Kybernetika. 1967. V. 4. P. 30–35.

Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1984. V. 8. № 4. P. 435-444.

Ito N., Tsallis C. Specific heat of the harmonic oscillator within generalized equilibrium statistics // Nuovo Cimento D. 1984. V. 11. № 6. P. 907-911.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1964. V.4. P.160.

Jizba P., Arimitsu T. Observability of Renyi's entropy // Physical Review E. 2004. V. 64. № 2. id. 026128

Kaniadakis G., Scarfone A. A new one parameter deformation of the exponential function // Physica A. 2002. V. 305. P. 69-75.

Kaniadakis G., Lissia M., Scarfone A. M. Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics // Physical Review E, 2005. V. 71. №4. id. 046128.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P 354–365.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V.6. № 6 P. 587-597.

Kolesnichenko A. V., Chetverushkin B. N. Kinetic derivation of a quasihydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. V. 28. P.547-576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2014. V. 47. № 2. P. 80-98.

Landberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-217.

Lenzi E.K., Mendes R.S. Collisionless Boltzmann equation for systems obeying Tsallis distribution // Eur. J. Phys. B. 2001. V. 21. № 4. P. 401-406.

Lenzi E. K., Scarfone A. M. Extensive-like and intensive-like thermodynamical variables in generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2012. V. 391. № 8. P. 2543-2555.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid. Mech. 1974. V.62. P. 331-358.

Mandelbrot B.*B*. Les Objects Fractals. Forms, Hazard et Dimension. Paris: Flammarion. 1975. 195 p.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 365 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982. 460 p.

Mariz A.M. On the irreversible nature of the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1992. V. 165. № 5-6. P. 409-411.

Masi M. A step beyond Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 2005. V. 338. P. 3–5.

Nagy Á., Romera E. Maximum Rényi entropy principle and the generalized Thomas-Fermi model // Physics Letters A. 2004. V. 374. № 8-4. P. 844-846.

Naudts J. Continuity of a class of entropies and relative entropies // Rev. Math.Phys. 2004. V.16. P. 809822; Errata. Rev. Math. Phys. V.21, P. 947-948.

Nielsen F., Nock R. A closed-form expression for the Sharma-Mittal entropy of exponential families // J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. 2012. V. 45. № 3, id. 032004.

Parvan A. S., Biro T. S. Thermodynamical limit in non-extensive Renyi statistics // Physics Letters A. 2005. V. 340. № 5-6. P. 375-387.

Pickup R.M., Cywinski R., Pappas C., Farago B., Fouquet P. Generalized Spin-Glass Relaxation // Phys. Rev. Lett. 2004. V.102. № 4. id. 097202.

Plastino A., Plastino A.R. On the universality of thermodynamics' Legendre transform structure // Phys. Lett. A . 1997. V. 226. № 5. P. 257-264.

Plastino A.R., Casas M., Plastino A. A nonextensive maximum entropy approach to a family of nonlinear reaction-diffusion equations // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 280. № 4. P. 289-304.

Ramshaw J.D. H-theorems for the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1993a. V. 175. № 3-4. P. 169-170.

Ramshaw J.D. Irreversibility and generalized entropies // Phys. Lett. A. 1993b. V. 175. . № 3-4. P. 171-172.

Renyi A. On measures of entropy and information // In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. University California Press. Berkeley. 1961. V. 1. P. 547–561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Scarfone A. M. Thermal and mechanical equilibrium among weakly interacting systems in generalized thermostatistics framework // Physics Letters A. 2006.V. 355. № 4-5. P. 404-412.

Scarfone A. M. Legendre structure of the thermostatistics theory based on the Sharma Taneja Mittal entropy //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2006. V. 365. № 1. P. 63-70.

Scarfone A. M., Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72. . № 2. id. 026124.

Scarfone A. M., Wada T. Equivalence among different formalisms in the Tsallis entropy framework // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. V. 384. № 2. P. 305-317.

Sharma B.D., Mittal D.P*.* New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. & Syst. Sci. 1975. V.*2* P. 122–134.

Shiino M*.* *H*-theorem with generalized relative entropies and the Tsallis statis Tics // J. Phys. Soc. Jpn. 1998. V.67. № 11. P. 3658-3660.

Tirnakli U., Torres D.F*.* Exact and approximate results of non-extensive quantum statistics // Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. № 4. P. 691-698.

Tsallis C., Mendes R., Plastino A. The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P.543-554.

Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487.

Tsallis C. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian Journal of Physics. 1994. V. 24. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Historical background and present status // In: S. Abe and Y. Okamoto (Eds.), Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications. Series Lecture Notes in Physics. Springer. Heidelberg. 2001. 277 p.

Tsallis C. Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 371-391.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2004. 382 p.

Wada T., Scarfone A.M*.* A non self-referential expression of Tsallis' probability distribution function // Eur. J. Phys. B. 2005. V. 47. № 4. P. 557-561.

Zaripov R. Evolution of the Entropy and Renyi Difference Information during Self-Organization of Open Additive Systems // Russian Physics Journal. 2005. V. 48. № 4. P. 267-274.

ГЛАВА 5

Построение формализма статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса

В рамках неэкстенсивной статистики Каниадакиса, основанной на параметрической каппа-энтропии, показано, как можно получить деформированную термодинамику сложных аномальных систем и определить ее свойства. Приведены основные математические свойства к-логарифма и к-экспоненты, а также другие связанные с ними функции, возникающие при разработке статистической механики Каниадакиса. В результате получено обобщение на неэкстенсивный случай нулевого закона термодинамики для двух независимых подсистем при их тепловом контакте и введена так называемая физическая температура, отличная от инверсии множителя Лагранжа β*. С привлечением обобщенного первого закона термодинамики и преобразования Лежандра и на основе введенной энтропии Клаузиуса получены новые термодинамические соотношения, которые отличны от выведенных ранее традиционным для неэкстенсивной статистики способом соотношений, неудовлетворительных с точки зрения макроскопической термодинамики. На основе свойства выпуклости дивергенции Бергмана изучены спонтанные переходы между стационарными состояниями сложной* κ*-системы и доказаны теорема Гиббса и H-теорема Больцмана.*

Введение

Как уже было отмечено в предыдущих главах статистическая механика Больцмана–Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры сложных (аномальных) систем, которым присущи эффекты сильного дальнодействия, нелокальные корреляции между отдельными элементами системы (помнящей свое прошлое), фрактальный характер фазового пространства, немарковское поведение. Сложная пространственно-временная структура подобных аномальных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Исследования в области механики неаддитивных (неэкстенсивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса, что объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой была введена формула статистической q-энтропии

$$S_q^{Ts}(p) := \frac{k_B}{q-1}\int\left(p - p^q\right)d\Gamma,$$

зависящая от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающая неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Теория неэкстенсивных систем, основанная на энтропии Тсаллиса, в настоящее время интенсивно развивается, к сожалению, в основном зарубежными специалистами. В научной литературе доступны систематизированные собрания обзоров, дающие последовательное изложение многочисленных новых результатов, полученных в ходе изучения неэкстенсивных свойств в аномальных физических явлениях (см. библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. cat.cbpf.br/ biblio.htm, которая постоянно обновляется).

Определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивных статистик, проводимых в настоящее время, являются многочисленные нелогарифмические энтропии, введенные, например, в работах (Renyi, 1961, 1970; Tsallis,1988, 2001; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989, 1995; Abe, 1997; Landsberg, Vedral, 1998; Papa, 1998; Borges, Roditi, 1998; Landsberg 1999; Frank, Plastino, 2002; Kaniadakis, 2009; Зарипов, 2002, 2010; Колесниченко, 2018a-d; 2019a-c; Колесниченко, Маров, 2019). При этом каждая неэкстенсивная статистика имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой сложных систем, вероятностные свойства которых определяются не гиббсовым (не гауссовым), а асимптотическим степенным законом распределения вероятностей (проявляющимся при максимизации соответствующих параметрических энтропий), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса. Диапазон применения разнообразных неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, теория плазмы, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие. Среди всех деформированных энтропий неэкстенсивных систем особый интерес представляет энтропия Каниадакиса

$$S_{\kappa}(p) := -\frac{k_B}{2\kappa}\int\left(p^{\kappa+1} - p^{1-\kappa}\right)d\Gamma,$$

введенная впервые в работах (Kaniadakis, 2001a,b; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Основанная на κ-энтропия неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру обычной статистической механики и пригодна для описания очень большого класса экспериментально наблюдаемых явлений в физике низких и высоких энергий, а также в естественных, экономических и социальных науках. В частности, деформированная энтропия Каниадакиса естественно возникает в рамках специальной теории относительности Эйнштейна (Kaniadakis, 2002a, 2005). При этом параметр деформации κ зависит от скорость света c и уменьшается до нуля при $c \to \infty$, восстанавливая таким образом обычную статистическую механику и термодинамику. Статистика Каниадакиса возникает в различных прикладных областях. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с космическими эффектами (Kaniadakis, Scarfone 2002; Abreu и др., 2016; Livadiotis, 2018) (в частности, с звездной астрофизикой (Carvalho и др., 2008, 2009; Soares, Silva, 2011)), с кварк-глюонной плазмой (Teweldeberhan и др., 2003), с газокинетическиими моделями, описывающими взаимодействие атомов и фотонов (Rossani, Scarfone, 2004), с квантовой механикой (Kaniadakis, 2002b). Другие приложения касаются динамических систем (Coraddu и др.,2006; Tonelli и др., 2006; Celikoglu, Tirnakli, 2006), фрактальных систем (Olemskoi и др., 2008), теории поля (Olemskoi и др., 2010), теории случайных матриц (Abul-Magd, 2007, 2009; Abul-Magd, Abdel-Mageed, 2012), теории игр (Topsoe, 2004), теории информации (Wada, Suyari, 2007) и т. п. Кроме того, κ - статистика особенно пригодна для описания экономических систем, например, при построении различных финансовых моделей (Rajaonarison и др., 2005), в частности, для изучения распределения личных доходов (Clementi и др., 2007, 2011, 2012).

Данная глава посвящена конструированию на основе параметрической κ-энтропии статистической термодинамики неэкстенсивных систем. Проведенное исследование базируется на свойствах негиббсового канонического к-распределения, полученного из принципа Джейнса (Jaynes,1963) максимума к-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы, и вероятностной нормировке для функции к-распределения. Показано, что все важные термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия могут быть выражены с использованием только равновесной функции к-распределения. Полученные при этом термодинамические равенства для обобщенного канонического ансамбля Гиббса аналогичны классическим равенствам статистической термодинамики для замкнутых и открытых систем. Кроме этого, показано, что сохраняются принцип максимума равновесной энтропии, лежандрова структура теории, термодинамическая устойчивость, теорема Гиббса и *H*- теорема и т. д. обычной статистической механики Больцмана−Гиббса при приближении параметра деформации κ к нулю. Таким образом, в работе с единых позиций изложен круг вопросов, связанных с конструированием деформированной термодинамики на основе κ-энтропии Каниадакиса и дивергенции Бергмана для сложных аномальных систем.

5.1. Основные определения, статистические характеристики и свойства энтропии Каниадакиса

В деформированной статистической механике Каниадакиса для непрерывных аномальных систем при вероятностной нормировке

$$\int p(\mathbf{r})d\Gamma = 1, \quad 0 \le p(\mathbf{r}) < \infty \tag{5.1}$$

для плотности вероятности распределения систем $p(\mathbf{r})$ в фазовом пространстве $\mathbf{r} := \{\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_N;\ \mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_N\}$ статистического ансамбля («представляющего» макроскопическое состояние рассматриваемой системы) деформированная κ-энтропия задается следующим функционалом (Kaniadakis, 2001a,b, 2002a,b)

$$S_\kappa(p) := -k_B \int p(\mathbf{r}) \frac{p^{\kappa}(\mathbf{r}) - p^{-\kappa}(\mathbf{r})}{2\kappa} d\Gamma = -k_B \int \frac{p^{\kappa+1}(\mathbf{r}) - p^{1-\kappa}(\mathbf{r})}{2\kappa} d\Gamma. \quad (5.2)$$

Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем $6N$-мерным фазовым пространством, причем безразмерный элемент фазового пространства $d\Gamma$ записывается в форме $d\Gamma := \left\{N! h^{3N}\right\}^{-1} d\mathbf{r}$, где $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка; $k_{\mathcal{B}}$ – постоянная Больцмана. Энтропийный индекс κ (параметр деформации) в определении κ-энтропии (5.2) представляет собой вещественное число, принадлежащее области $|\kappa| < 1$. Такая деформация логарифмической функции в выражении для энтропии (по сравнению с энтропией Больцмана–Гиббса $S_{BG}(p) := -k_B \int p \ln(p) d\Gamma$) позволяет учитывать важную особенность поведения многих аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими силовыми взаимодействиями, когда вероятность реализации $p(\mathbf{r})$ малых значений параметров состояния убывает (при $p \to 0^+$) не экспоненциально быстро, а степенным образом (закон Парето). Благодаря этому статистика Каниадакиса описывает события, практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана–Гиббса.

Легко показать, что в пределе слабой связи $\kappa \to 0$ κ-энтропия (5.2) переходит в каноническую формулу $S_{\mathcal{BG}}$ классической статистики Гиббса. Действительно, в пределе $\kappa \to 0$ имеем: $p^{\pm\kappa} = e^{\pm\kappa \ln p} \to 1 \pm \kappa \ln p$, и энтропия S_κ сводится к

$$S_{\kappa\to 0}(p) = \lim_{\kappa\to 0} \left\{ -k_B \int p \frac{p^{\kappa} - p^{-\kappa}}{2\kappa} d\Gamma \right\} = -k_B \int p \ln p \, d\Gamma = S_{BG}.$$

Энтропия (5.2) может быть представлена также в следующих эквивалентных формах:

$$S_{\{\kappa\}}(p) := -k_B \int p \ln_{\{\kappa\}} p \, d\Gamma = -k_B \langle \ln_{\{\kappa\}} p \rangle_{\{\kappa\}}, \tag{5.3}$$

при написании которых использован так называемый, «деформированный логарифм» (Kaniadakis, 2013)

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) := \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa} \equiv \frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa \ln x) \quad (\forall x > 0), \tag{5.4}$$

а также способ получения среднего значения для любой динамической переменой $\mathcal{A}_j(\mathbf{r})$, а именно

$$\langle \mathcal{A}_j \rangle_{\{\kappa\}} := \int p(\mathbf{r}) \mathcal{A}_j(\mathbf{r}) d\Gamma, \tag{5.5}$$

где принята нормировка (5.1).

Отметим, что в дискретном случае, при условии вероятностной нормировки $\sum_{i=1}^{W} p_i = 1$, нужно в приведенных формулах произвести замену $\int d\Gamma \leftrightarrow \sum_{i=1}^{W}$, где $p := \left\{p_j\right\}_{j=1,2,\ldots,W}$ – дискретная функция распределения, а W обозначает количество доступных в системе микросостояний.

Свойства функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$. Как известно, в классической статистической механике особую роль играет логарифм функции распределения со знаком минус $-\ln(p)$, поскольку эта величина связана с энтропией системы. В 1990-х гг. Каниадакис предложил определение деформированного логарифма (5.4), в котором параметр деформации κ принадлежит интервалу $(-1,1)$, давая в пределе $\kappa \to 0$ обычный логарифм $\ln(x)$. Рассмотрим здесь некоторые наиболее важные свойства деформированного логарифма, которые будут использованы далее.

Легко убедиться, что функция $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ обладает следующими свойствами (см., например, Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis. 2013):

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) = \ln_{\{-\kappa\}}(x), \tag{5.6}$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(x^{\lambda}) = \lambda \ln_{\{\lambda\kappa\}}(x), \quad \ln_{\{\kappa\}}(1/x) = -\ln_{\{\kappa\}}(x), \tag{5.7}$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(0^{+}) = -\infty, \quad \ln_{\{\kappa\}}(1) = 0, \quad \ln_{\{\kappa\}}(+\infty) = +\infty. \tag{5.8}$$

$$\frac{d}{dx}\ln_{\{\kappa\}}(x) = \frac{1}{x}u_{\{\kappa\}}(x), \quad \frac{d}{dx}\left\{x\ln_{\{\kappa\}}(x)\right\} = \lambda\ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \ln_{\{\kappa\}}(x) + u_{\{\kappa\}}(x)$$

.

(5.9)

Имеют место также следующие свойства вогнутости функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln_{\{\kappa\}}(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\ln_{\{\kappa\}}(x) < 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\left[x\ln_{\{\kappa\}}(x)\right] > 0, \tag{5.10}$$

а также ее асимптотическое поведение деформированного логарифма по степенному закону:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{|2\kappa|}x^{-|\kappa|}, \quad \ln_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{|2\kappa|}x^{|\kappa|}. \tag{5.11}$$

Тейлоровское разложение функции $\ln_{\{\kappa\}}(1+x)$ сходится в случае, если $-1 < x \le 1$; тогда имеем:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\kappa)(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \tag{5.12}$$

где $b_n(-\kappa) = b_n(\kappa)$, $b_1(\kappa) = 1$, $b_n(0) = 1$; при $n > 1$ коэффициенты $b_n(\kappa)$ определяются соотношением:

$$b_n(\kappa) = \frac{1}{2}(1-\kappa)\left(1-\frac{\kappa}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa}{n-1}\right) + \frac{1}{2}(1+\kappa)\left(1+\frac{\kappa}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\kappa}{n-1}\right)$$

.

Первые три члена разложения (12) принимают вид:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x - \frac{x^2}{2} + \left(1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\frac{x^3}{3}. \tag{5.13}$$

На Рис. 5.1 представлена определенная соотношением (5.5) функция $\ln_{\{\kappa\}}(x)$, для трех различных значений параметра деформации κ. Непрерывная кривая, соответствующая $\kappa = 0$, является обычной логарифмической функцией $\ln(x)$.

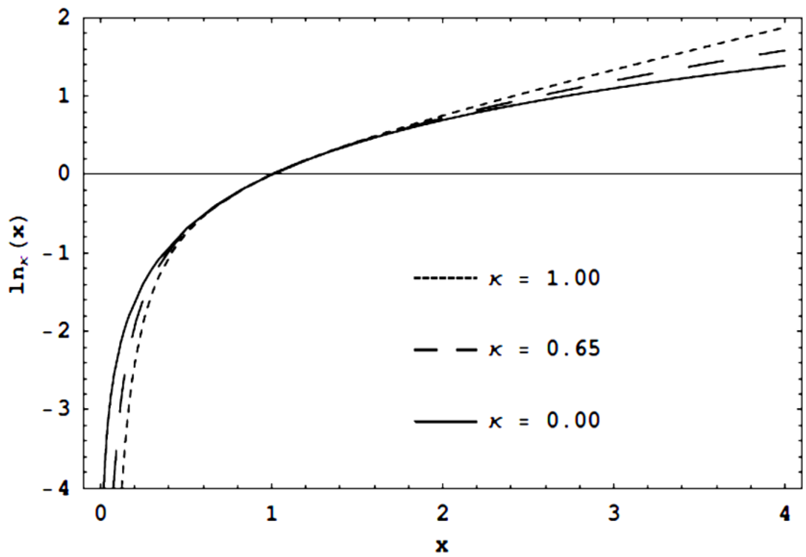


Рис. 5.1. Изменение вида логарифма Каниадакиса $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ при изменении параметра деформации κ .

Первые три члена разложения (5.12) принимают вид:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x-\frac{x^2}{2}+\left(1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\frac{x^3}{3}. \qquad (5.13)$$

Для деформированного логарифма $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x)=\frac{1}{2}\int_{1/x}^{x}\frac{1}{t^{1+\kappa}}dt\,. \qquad (5.14)$$

Наконец, если ввести так называемые к-сумму и к-произведение - обобщенную сумму и обобщенное произведение статистики Каниадакиса (Scarfone, 2015, 2017)

$$x\overset{\kappa}{\oplus}y:=x\sqrt{1+\kappa^2y^2}+y\sqrt{1+\kappa^2x^2}\ , \quad (x,y\in\mathbb{R} \text{ и } |\kappa|\le 1),$$

$$x\underset{\kappa}{\otimes}y:=\left(\kappa\ln_{\{\kappa\}}x+\kappa\ln_{\{\kappa\}}y+\sqrt{1+(\kappa\ln_{\{\kappa\}}x+\kappa\ln_{\{\kappa\}}y)^2}\right)^{1/\kappa}, \qquad (5.15)$$

то можно получить еще два важных свойства:

$$\ln_{\{\kappa\}}(xy)=\ln_{\{\kappa\}}(x)\overset{\kappa}{\oplus}\ln_{\{\kappa\}}(y)=\ln_{\{\kappa\}}(x)u_{\{\kappa\}}(y)+\ln_{\{\kappa\}}(y)u_{\{\kappa\}}(x)=$$

$$=\ln_{\{\kappa\}}(x)\sqrt{1+\kappa^2\ln_{\kappa}^2(y)}+\ln_{\{\kappa\}}(y)\sqrt{1+\kappa^2\ln_{\kappa}^2(x)},$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(x)+\ln_{\{\kappa\}}(y)=\ln_{\{\kappa\}}\left(x\underset{\kappa}{\otimes}y\right). \tag{5.16}$$

Функция $u_{\{\kappa\}}(x)$ В соотношениях (5.9) и (5.16), а также везде далее фигурирует важная в статистике Каниадакиса функция (Scarfone, 20015, 2017)

$$u_{\{\kappa\}}(x):=\frac{x^{\kappa}+x^{-\kappa}}{2}=\sqrt{1+\kappa^2\ln_{\{\kappa\}}^2(x)}\equiv\cosh(\kappa\ln(x)), \tag{5.17}$$

которая обладает следующими свойствами (см., например, Scarfone, Wada, 2005, 2014):

$$u_{\{\kappa\}}(x)=u_{\{-\kappa\}}(x),\quad u_{\{\kappa\}}(x)=u_{\{\kappa\}}(1/x),\quad u_{\{\kappa\}}(\alpha)=\frac{1}{\lambda},\quad \ln_{\{\kappa\}}(\alpha)=-\frac{1}{\lambda}. \tag{5.18}$$

Здесь введены обозначения

$$\lambda:=\sqrt{1-\kappa^2},\quad \alpha:=\left[(1-\kappa)/(1+\kappa)\right]^{1/2\kappa}. \tag{5.19}$$

При учете свойств (5.18), а также преобразования

$$u_{\{\kappa\}}(x)=\frac{x^{\kappa}+x^{-\kappa}}{2}=\frac{x^{\kappa}-x^{-\kappa}}{2\kappa}-\frac{(1-\kappa)x^{\kappa}-(1+\kappa)x^{-\kappa}}{2\kappa}=$$

$$=\ln_{\{\kappa\}}(x)-\sqrt{1-\kappa^2}\ln_{\{\kappa\}}\left\{x\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^{1/2\kappa}\right\}, \tag{5.20}$$

легко получить следующие выражения:

$$u_{\{\kappa\}}(x)=x^{\kappa}-\kappa\ln_{\{\kappa\}}(x)=\ln_{\{\kappa\}}(x)-\lambda\ln_{\{\kappa\}}(\alpha x)=$$

$$=-\ln_{\{\kappa\}}(x)-\lambda\ln_{\{\kappa\}}(\alpha/x), \tag{5.21}$$

$$u_{\{\kappa\}}(xy)=u_{\{\kappa\}}(x)u_{\{\kappa\}}(y)+\kappa^2\ln_{\{\kappa\}}(x)\ln_{\{\kappa\}}(y). \tag{5.22}$$

С учетом свойства (5.21), закон аддитивности (5.16) деформированного κ-логарифма может быть переписан следующим образом:

$$\ln_{\{\kappa\}}(xy)=2\ln_{\{\kappa\}}(x)\ln_{\{\kappa\}}(y)-$$

$$-\lambda\left\{\ln_{\{\kappa\}}(y)\ln_{\{\kappa\}}\left(\alpha x\right)+\ln_{\{\kappa\}}(x)\ln_{\{\kappa\}}\left(\alpha y\right)\right\}. \qquad (5.23)$$

Легко видеть, что в пределе $\kappa \to 0$ это свойство κ-логарифма сводится к стандартному закону аддитивности обычного логарифма $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.

Наконец, можно убедиться в том, что имеют место следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{d}{dx}u_{\{\kappa\}}(x)=\kappa^2\frac{\ln_{\{\kappa\}}(x)}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\left\{xu_{\{\kappa\}}(x)\right\}=\lambda u_{\{\kappa\}}\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\ln_{\{\kappa\}}(x)+u_{\{\kappa\}}(x). \qquad (5.24)$$

Неаддитивность κ-энтропии для независимых систем. Покажем теперь, что подобно энтропии Тсаллиса (см., например, Колесниченко, 2018 a,b; 2019c), энтропия Каниадакиса подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем.

Рассмотрим совокупную физическую κ-систему, состояние которой описывается совместным мультипликативным распределением $p^{(12)}:=p^{(1)}\cdot p^{(2)}$, где $p^{(12)}:=p^{(12)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$, $p^{(1)}:=p^{(1)}(\mathbf{r}_1)$, $p^{(2)}:=p^{(2)}(\mathbf{r}_2)$.

Распределение $p^{(12)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ может зависеть также и от времени, а «точки» $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ относятся к двум статистически независимым κ-системам. Тогда полная энтропия системы задается выражением

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}}:=-k_B\iint p^{(12)}\ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})d\Gamma_1 d\Gamma_2, \qquad (5.25)$$

где выполняются условия нормировки

$$\iint p^{(12)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)d\Gamma_1 d\Gamma_2=\int p^{(1)}(\mathbf{r}_1)d\Gamma_1=\int p^{(2)}(\mathbf{r}_2)d\Gamma_2=1.$$

После подстановки мультипликативного распределения $p^{(12)}=p^{(1)}\cdot p^{(2)}$ в формулу (5.25) получим (при учете (5.22)) следующее свойство неаддитивности совокупной энтропии в статистике Каниадакиса для двух независимых систем:

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}}=S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(2)})+S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(1)}). \qquad (5.26)$$

В этом соотношении фигурирует чрезвычайно важная в κ-статистике функция:

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p) := \langle u_{\{\kappa\}}(p)\rangle_{\kappa} = \int p\ u_{\{\kappa\}}(p)d\Gamma = \int p\sqrt{1+\kappa^2\ln^2_{\{\kappa\}}(p)}d\Gamma. \qquad (5.27)$$

Проверим свойство квазиаддитивности (5.26) совокупной энтропии:

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}} \equiv -k_B\iint p^{(12)}\ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})d\Gamma_1 d\Gamma_2 = -k_B\left\langle \ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})\right\rangle_{\{\kappa\}} =$$

$$= -k_B\left\langle \ln_{\kappa}(p^{(1)}p^{(2)})\right\rangle_{\{\kappa\}} = -k_B\left\langle \ln_{\{\kappa\}}(p^{(1)})u_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + \ln_{\{\kappa\}}(p^{(2)})u_{\{\kappa\}}(p(1))\right\rangle_{\{\kappa\}} =$$

$$= -k_B\iint p^{(1)}\cdot p^{(2)}\left\{\ln_{\{\kappa\}}(p^{(1)})u_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + \ln_{\{\kappa\}}(p^{(2)})u_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\right\}d\Gamma_1 d\Gamma_2 =$$

$$= S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(1)}). \qquad (5.28)$$

В случае если $\kappa \to 0$, то $u_{\{0\}}(p) = 1$ и $\mathcal{I}_{\{0\}}(p) = 1$, так что из (5.26) следует аддитивное правило для энтропии Больцмана–Гиббса.

Отметим, что с учетом соотношения (5.21) функцию $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p)$ можно переписать также в виде

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p) = \langle \ln_{\kappa}(p)\rangle - \lambda\langle \ln_{\kappa}(\alpha p)\rangle = \frac{1}{k_B}\left[-\lambda\alpha S_{\{\kappa\}}(p/\alpha) + S_{\{\kappa\}}(p)\right]. \qquad (5.29)$$

Тогда для совокупной энтропии Каниадакиса двух независимых систем получим еще одно представление:

$$k_{\mathrm{B}}S^{(12)}_{\{\kappa\}} = S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\left\{\lambda S_{\{\kappa\}}(\alpha p^{(2)}) - S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\right\} +$$

$$+ S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\left\{\lambda S_{\{\kappa\}}(\alpha p^{(1)}) - S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\right\}. \qquad (5.30)$$

5.2. Каноническое распределение Гиббса в деформированной κ-стататистике

Основные свойства экспоненты Каниадакиса $\exp_{\{\kappa\}}(x)$. Далее нам понадобится так называемая экспонента Каниадакиса. Для определения функции, обратной деформированному логарифму (2), введем переменную $x \equiv \ln_{\{\kappa\}}(y)$, что приводит к алгебраическому уравнению $z^2 - 2x\kappa z - 1 = 0$ для неизвестной $z \equiv y^{\kappa}$. Его решение $z = \kappa x \pm \sqrt{1+(\kappa x)^2}$ дает выражение $y = \left\{\kappa x \pm \sqrt{1+(\kappa x)^2}\right\}^{1/\kappa}$. Функция y обратная деформированному логарифму $x = \ln_{\{\kappa\}}(y)$, представляет собой, так называемую, экспоненту Каниадакиса:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) := \left(\sqrt{1+(\kappa x)^2} + \kappa x\right)^{1/\kappa} \equiv \exp\left(\frac{1}{\kappa}\operatorname{arcsinh}\kappa x\right) \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \qquad (5.31)$$

На Рис.5.2 представлена определенная соотношением (5.31) функция $\exp_{\{\kappa\}}(x)$, для пяти различных значений параметра деформации κ. Непрерывная кривая, соответствующая $\kappa = 0$, является обычной экспоненциальной функцией $\exp(x)$.

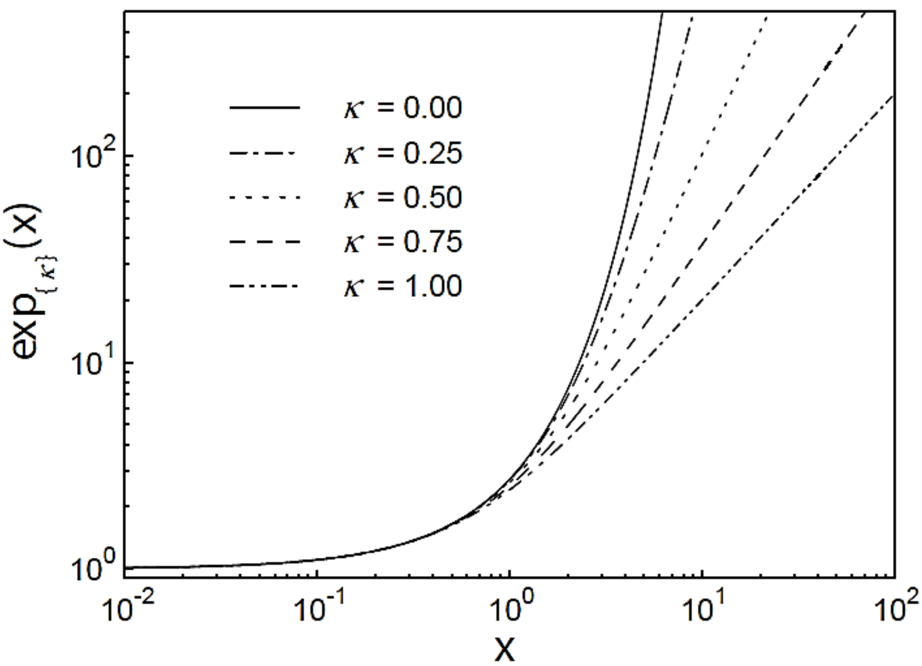


Рис. 5.2. График в логарифмическом масштабе κ-экспоненты для различных значений параметра κ. Кривая с $\kappa = 0$ соответствует стандартной экспоненте.

Из определения (5.31) экспоненты Каниадакиса вытекают следующие свойства (Scarfone, 2015, 2017):

$$\exp_{\{0\}}(x) = \lim_{\kappa\to 0}\exp_{\{\kappa\}}(x) = \exp(x), \quad \exp_{\{\kappa\}}(0) = 1,$$
$$\exp_{\{-\kappa\}}(x) = \exp_{\{\kappa\}}(x),$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(-\infty) = 0^+, \quad \exp_{\{\kappa\}}(+\infty) = +\infty, \quad \ln_{\{\kappa\}}\exp_{\{\kappa\}}(x) = \exp_{\{\kappa\}}\ln_{\{\kappa\}}(x) = x,$$

$$u_{\{\kappa\}}\left\{\exp_{\{\kappa\}}(x)\right\} = \sqrt{1+\kappa^2 x^2}, \quad \exp_{\{\kappa\}}(x)\exp_{\{\kappa\}}(-x) = 1. \qquad (5.32)$$

Последнее свойство (32) проявляется как частный случай более общего соотношения:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\exp_{\{\kappa\}}(y) = \exp_{\{\kappa\}}\left\{x\sqrt{1+(\kappa y)^2} + y\sqrt{1+(\kappa x)^2}\right\} \equiv \exp_{\{\kappa\}}\left(x \overset{\kappa}{\oplus} y\right), \qquad (5.32^*)$$

Кроме того, функция $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ обладает следующими свойствами:

$$(\exp_{\{\kappa\}}(x))^r = \exp_{\{\kappa/r\}}(rx) \qquad (5.33)$$

(с $r \in \mathbb{R}$, которое в пределе $\kappa \to 0$ воспроизводит известное свойство обыкновенной экспоненты),

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\exp_{\{\kappa\}}(y) = \exp_{\{\kappa\}}(x \overset{\kappa}{\oplus} y) = \exp_{\{\kappa\}}\left\{x\sqrt{1+\kappa^2 y^2} + y\sqrt{1+\kappa^2 x^2}\right\},$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x+y) = \exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{\kappa}{\otimes} \exp_{\{\kappa\}}(y). \qquad (5.34)$$

Из (18) следует следующее правило дифференцирования экспоненты Каниадакиса:

$$\frac{d}{dx}\exp_{\{\kappa\}}(x) = \frac{\exp_{\{\kappa\}}(x)}{u_{\{\kappa\}}\left\{\exp_{\{\kappa\}}(x)\right\}} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2 x^2}}\exp_{\{\kappa\}}(x). \qquad (5.35)$$

Имеет место следующее свойство выпуклости:

$$d^2\left[\exp_{\{\kappa\}}(x)\right]/dx^2 > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa^2 < 1. \qquad (5.36)$$

Несомненно, одним из наиболее интересных свойств функции $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ является ее асимптотическое поведение по степенному закону:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \left|2\kappa x\right|^{\pm 1/|\kappa|}, \qquad (5.37)$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -|2\kappa|^{-1} x^{-|\kappa|}, \quad \exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} |2\kappa|^{-1} x^{|\kappa|}. \tag{5.38}$$

Разложение Тейлора экспоненты $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ имеет следующий вид (Kaniadakis, 2002a):

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\kappa) \frac{x^n}{n!}, \quad \kappa^2 x^2 < 1, \tag{5.39}$$

где $\xi_0(\kappa) = \xi_1(\kappa) = \xi_2(\kappa) = 1$, $\xi_n(\kappa) = \prod_{j=1}^{n-1} \left[1 - (2j - n)\kappa\right]$. Заметим, что первые три члена в разложении Тейлора функции $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ точно такие, как и для обыкновенной экспоненты:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to 0}{\sim} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + (1-\kappa^2)\frac{x^3}{3!}. \tag{5.39*}$$

Экспоненту $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ можно также записать как бесконечное произведение обычных экспонент (Kaniadakis, 2013):

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \exp(c_n \kappa^{2n} x^{2n+1}), \quad c_n := \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2}. \tag{5.40}$$

Наконец, для κ-экспоненты справедливы следующие интегральные соотношения (см., например, Kaniadakis. 2005):

$$\exp_{\{\kappa\}}(-x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa s} J_{1/\kappa}\left(\frac{s}{\kappa}\right) \exp(-sx)\,ds, \quad \mathrm{Re}\, x \ge 0, \tag{5.41}$$

$$M_{\{\kappa\}}(r) := \int_0^{\infty} x^{r-1} \exp_{\{\kappa\}}(-x)\,dx = \frac{|2\kappa|^{-r}}{1+|\kappa| r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma(r), \tag{5.42}$$

где $0 < r < 1/|\kappa|$; $J_\nu(s)$ – функция Бесселя, $\Gamma(x)$ – Гамма- функция. Из (5.42) легко получить выражение

$$M_{\{\kappa\}}(r+2) = \frac{r(r+1)}{1-\kappa^2 (r+2)^2} \cdot M_{\{\kappa\}}(r).$$

Деформированное каноническое распределение . Равновесные состояния сложных κ-систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Каноническое распределение Гиббса в статистике Каниадакиса может быть получено, как и в классическом случае, из экстремума κ-энтропии (5.4) при выполнении следующих дополнительных условий: заданности средней энергии системы

$$\mathcal{E}_{\{\kappa\}} := \langle \mathcal{H} \rangle_{\{\kappa\}} = \int p(\mathbf{r})\mathcal{H}(\mathbf{r})d\Gamma = const \tag{5.43}$$

и сохранения вероятностной нормировки (5.1) распределения $p(\mathbf{r})$. Здесь $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{r})$ – функция Гамильтона, которая определяется математической моделью изучаемых физических процессов в системе. Заметим, что в общем случае эта функция может зависеть от ряда внешних параметров $a_1, a_2, \dots a_s$, макроскопически характеризующих состояние статистического равновесия рассматриваемого ансамбля аномальных динамических систем, $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\mathbf{r}, \{a_j\})$ (Зубарев, 1971).

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963) определим функционал

$$\mathcal{L}(p) := -k_B \int p(\mathbf{r}) \ln_\kappa p(\mathbf{r}) d\Gamma - \beta \int p(\mathbf{r})\mathcal{H}(\mathbf{r})d\Gamma - k_B\gamma \int p(\mathbf{r})d\Gamma \tag{5.44}$$

и найдем его безусловный экстремум. Здесь β и γ суть множители Лагранжа. В соответствии с теоремой Лагранжа вероятностное распределение $p(\mathbf{r})$, «экстремизирующее» κ-энтропию $S_\kappa(p)$ при указанных ограничениях, определяется из условия:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(p)}{\delta p} = -k_B \int \left[\ln_{\{\kappa\}}\left(p(\mathbf{r})\right) + u_{\{\kappa\}}\left(p(\mathbf{r})\right) \right] d\Gamma - \beta \int \mathcal{H}(\mathbf{r}) d\Gamma - k_B \gamma \int d\Gamma = 0 . \tag{5.45}$$

При написании (5.45) использовано соотношение (5.9). Из (5.35), с учетом (5.19), (5.21) и (5.33), следует уравнение

$$\ln_{\{\kappa\}}\left(\alpha / p(\mathbf{r})\right) - \frac{1}{\lambda}\left[\gamma + \frac{\beta}{k_B}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right] = 0, \quad \lambda := \sqrt{1-\kappa^2},$$

$$\alpha = \exp_{\{\kappa\}}(-1/\lambda), \tag{5.46}$$

решение которого дает следующее нормированное κ-распределение $p^{eq}(\mathbf{r})$ в состоянии статистического равновесия системы (каноническое распределение Гиббса в статистике Каниадакиса)

$$p^{eq}(\mathbf{r},\beta) = \alpha / \exp_{\{\kappa\}}\left\{\frac{1}{\lambda}\left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right)\right\} = \alpha \exp_{\{\kappa\}}\left\{-\frac{1}{\lambda}\left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right)\right\}.$$

(5.47)

В пределе $\kappa \to 0$ равновесное κ-распределения (5.47) сводится к каноническому распределению Гиббса классической статистики.

Отметим, что с учетом свойств (5.16) и (5.34) распределению (5.47) можно придать следующий вид (Scarfone, Wada, 2006, 2014):

$$p^{eq}(\mathbf{r}) = \exp_{\{\kappa\}}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\exp_{\{\kappa\}}\left(-\frac{\mathcal{X}(\mathbf{r})}{\lambda}\right) := \exp_{\{\kappa\}}\left[-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\overset{\kappa}{\oplus}\left(-\frac{\mathcal{X}(\mathbf{r})}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= \exp_{\{\kappa\}}\left[-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mathcal{X}(\mathbf{r})}{\lambda} + \sqrt{1+\kappa^2\frac{\mathcal{X}^2(\mathbf{r})}{\lambda^2}}\right)\right] = \exp_{\{\kappa\}}\left[-u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathcal{X})\right) - \mathcal{X}\right], \tag{5.48*}$$

где в силу (5.22) и (5.48) имеем

$$u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathbf{r})\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\kappa^2}{\lambda}\mathcal{X}(\mathbf{r}) + \sqrt{1+\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\mathcal{X}^2(\mathbf{r})}\right), \quad \mathcal{X}(\mathbf{r}) := \gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\mathbf{r}).$$

Заметим, что хвост распределения (5.48) описывается степенной асимптотикой (это так называемый закон Парето), определяемой в силу (5.37) выражением $p^{eq} \underset{\mathcal{X}\to\infty}{\sim} \left|\frac{2\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\mathcal{X}\right|^{1/\kappa}$, которое существенно отличается от экспоненциальной асимптотики, характеризующей классическое распределение Больцмана– Гиббса.

Найдем теперь вторую вариацию функционала (5.44). В результате получим

$$\delta^2 \mathcal{L}(p) = -k_B \int \frac{1}{p}\left[\kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}(p) + u_{\{\kappa\}}(p)\right]\delta p^2\, d\Gamma = -k_B \kappa^2 \int \left[\kappa + \frac{p^{2\kappa}+1}{p^{2\kappa}-1}\right]\delta p^2\, d\Gamma$$

.

Легко убедиться в том, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала, соответственно, при $0<\kappa<1$ $(\delta^2\mathcal{L}<0)$ и $-1<\kappa<0$ $(\delta^2\mathcal{L}>0)$. Таким образом, распределение (5.48) максимизирует или минимизирует энтропию Каниадакиса.

В заключение этого подраздела заметим, что в неэкстенсивной статистической кинетике, также как и в классической кинетике имеет место термодинамическая эквивалентность статистических ансамблей. Все ансамбли статистической механики определяются заданием внешних условий, в которых находятся системы, их составляющие. Например, канонический ансамбль Гиббса определяется постоянством числа частиц, объема и контактом с термостатом, большой канонический ансамбль Гиббса − постоянством объема, контактом с термостатом и резервуаром частиц, изобарически-изотермический ансамбль − постоянством числа частиц, давления и контактом с термостатом. Вместе с тем, при выборе ансамбля часто руководствуются удобством вычислений, а не условиями, в которых находится система, поскольку было показано, что вычисленные с их помощью термодинамические функции мало отличаются между собой и совпадают в термодинамическом пределе (см., Зубарев, 1971)

5.3. Термодинамические соотношения

Приступим теперь к основной цели данной работы – конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике Каниадакиса. Используя распределение (5.48*), получим следующее выражение:

$$\ln_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathbf{r})\right) + u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathbf{r})\right) + \gamma + k_B \mathcal{H}(\mathbf{r}) = 0\,. \qquad (5.49)$$

(заметим, что это выражение может быть получено также путем преобразования свойства (5.16), в котором $x := p^{eq}(\mathbf{r})$ и $y := 1/\alpha$, если использовать при этом формулы (5.7), (5.19) и (5.48)).

Усредняя выражение (5.49) с помощью равновесного распределения $p^{eq}(\mathbf{r})$ и учитывая определения (5.27) и (5.43), в результате получим экстремальное значение энтропии Каниадакиса (Scarfone, Wada, 2006)

$$S^{eq}_{\{\kappa\}} = k_B(\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}} + \gamma) + \beta\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}. \tag{5.50}$$

При сравнении κ-энтропии (5.50) с ее классической версией (к→0, $\mathcal{I}^{eq}_{\{0\}}=1$), естественно определить аналог $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ статистического интеграла $\mathcal{Z}$ соотношением (см., например, Tsallis и др., 1998):

$$k_B \ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}) := k_B(\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}} + \gamma) + \beta\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}. \tag{5.51}$$

Далее везде будем опускать индекс "eq" у термодинамических параметров, когда это не вызывает двусмысленности. Тогда по аналогии с классической статистикой Больцмана−Гиббса выражение (5.50) принимает вид:

$$S^{eq}_{\{\kappa\}} := k_{\mathcal{B}} \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} =, \tag{5.52}$$

откуда следует, что $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}} = \left(\kappa S^{eq}_{\{\kappa\}}/k_B + \sqrt{1 + \kappa S^{eq}_{\{\kappa\}}/k_B}\right)^{1/\kappa}$.

Продифференцируем теперь логарифм $\ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ по множителю Лагранжа β. Используя определение (5.27) функции $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}$, а также соотношения (5.9), (5.21) и (5.49), в результате получим

$$\frac{d}{d\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathbf{Z}_{\{\kappa\}}) = \frac{\beta}{k_B}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_B} + \frac{d}{d\beta}\int u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathbf{r})\right)p^{eq}(\mathbf{r})d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_B}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_B} + \int\left\{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\frac{dp^{eq}}{d\beta} + p^{eq}\frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{d\beta}\right\}d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_B}\frac{\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_B} + \int\left\{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\frac{dp^{eq}}{d\beta} - p^{eq}\frac{d}{d\beta}\left(\gamma + \frac{\beta}{k_B}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right) - u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\frac{dp^{eq}}{d\beta}\right\}d\Gamma =$$

$$=\frac{\beta}{k_B}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta}+\frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_B}-\int p^{eq}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\beta}{k_B}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right)d\Gamma=\frac{\beta}{k_B}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta}\ . \tag{5.53}$$

Следовательно, для усредненной энергии системы будем иметь

$$\beta\frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta}=k_B\frac{d}{d\beta}\ln_{\{\kappa\}}\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{5.54}$$

Если продифференцировать экстремальную κ-энтропию $S_{\{\kappa\}}(p^{eq})$ по $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ и учесть соотношения (5.9), (5.21) и (5.47), то в результате получим известное дифференциальное соотношение равновесной термодинамики:

$$\frac{dS_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}=-k_B\int\frac{d\left[p^{eq}(\mathbf{r})\ln_{\{\kappa\}}p^{eq}(\mathbf{r})\right]}{dp^{eq}(\mathbf{r})}\frac{dp^{eq}(\mathbf{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma=$$

$$=-k_B\int\frac{d\left[\ln_{\{\kappa\}}p^{eq}(\mathbf{r})+u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathbf{r})\right)\right]}{dp^{eq(\mathbf{r})}}\frac{dp^{eq}(\mathbf{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma=$$

$$=-k_B\lambda\int\ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{p^{eq}(\mathbf{r})}{\alpha}\right)\frac{dp^{eq}(\mathbf{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma=k_B\lambda\int\left(\frac{\gamma+\beta k_B^{-1}\mathcal{H}(\mathbf{r})}{\lambda}\right)\frac{dp^{eq}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma=\beta. \tag{5.55}$$

Здесь использованы условия $\int dp^{eq}d\Gamma=0$ и $\int\mathcal{H}(\mathbf{r})\,dp^{eq}(\mathbf{r})d\Gamma=d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$.

Определим теперь деформированную свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$ выражением

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}}:=\mathcal{E}_{\{\kappa\}}-\frac{k_B}{\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}), \tag{5.56}$$

которое при $\kappa\to 0$ совпадает со свободной энергией в классической статистике $\mathcal{F}:=\mathcal{E}-\frac{k_B}{\beta}\ln\mathcal{Z}$. Тогда из формул (5.52), (5.54) и (5.56) вытекают следующие дифференциальные термостатические соотношения деформированной статистики Каниадакиса для средних величин:

$$S_{\{\kappa\}}=k_B\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}})=,\quad \mathcal{F}_{\{\kappa\}}\equiv\mathcal{E}_{\{\kappa\}}-\frac{1}{\beta}S_{\{\kappa\}}=\mathcal{E}_{\{\kappa\}}-\frac{k_B}{\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}),$$

$$\beta = \frac{dS_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} = k_{\mathcal{B}} \frac{d\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}, \quad \beta \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta} = k_{\mathcal{B}} \frac{d}{d\beta} \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}},$$

$$\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \frac{d(\beta \mathcal{F}_{\{\kappa\}})}{d\beta}. \tag{5.57}$$

Усреднение микроскопических динамических величин. Здесь важно подчеркнуть, что величина $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ определяется относительно внутренней энергии $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ системы (см. (5.51)). Иногда удобнее использовать другое определение этой величины, задаваемое выражением (Scarfone, Wada, 2006)

$$\ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}} := \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}}^{-1} \beta \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma, \tag{5.51*}$$

которое не зависят от выбора нуля энергии и при условии $\kappa \to 0$ обращается в хорошо известную формулу для классического статистического интеграла $\mathcal{Z}$, связаного с множителем Лагранжа γ соотношением $\ln \mathcal{Z} = 1 + \gamma$. В этом случае, уравнения равновесной термодинамики (5.50) принимают почти классическую форму

$$S_{\{\kappa\}} = \beta\left(\mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}\right), \quad dS_{\{\kappa\}} = \beta d\mathcal{E}_{\{\kappa\}},$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}} = -\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}, \quad \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \frac{d(\beta \ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}})}{d\beta}, \quad C_{\{\kappa\}} = -\beta^2 \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta}. \tag{5.58}$$

С помощью деформированного канонического распределения Гиббса (5.47) можно вычислить также среднее значение любой динамической переменной $\mathcal{A}_j(\mathbf{r})$. Дифференцируя для этого логарифм статистического интеграла $\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$ по микроскопической энергии $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{r})$ и учитывая (5.49), в результате получим:

$$\frac{d}{d\mathcal{H}} \ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}} = \frac{d}{d\mathcal{H}}\left(\mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma\right) = \frac{d\gamma}{d\mathcal{H}} + \int \frac{d}{dp^{eq}}\left[p^{eq} u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\right] \frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}} d\Gamma =$$

$$= \frac{d\gamma}{d\mathcal{H}} + \int \left(u_{\{\kappa\}}(p^{eq}) + p^{eq} \frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{dp^{eq}} \right) \frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}} d\Gamma =$$

$$=\frac{d\gamma}{d\mathcal{H}}+\int\left(-p^{eq}\frac{d}{dp^{eq}}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right)\right)\frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}}d\Gamma=$$

$$=\frac{d\gamma}{d\mathcal{H}}+\int\left(-p^{eq}\frac{d}{d\mathcal{H}}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right)\right)d\Gamma=-\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}p^{eq}. \qquad (5.59)$$

При написании соотношения (5.59) нами было использовано преобразование

$$\frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{dp^{eq}}=-\frac{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{p^{eq}}-\frac{d}{dp^{eq}}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\mathbf{r})\right), \qquad (5.60)$$

полученное с учетом соотношения (5.49) и формулы

$$d(\ln_{\{\kappa\}}x)/dx=x^{-1}u_{\{\kappa\}}x.$$

Таким образом, зная κ-свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_{\kappa}$ (5.58), можно вычислить равновесную функцию распределения

$$p^{eq}(\mathbf{r})=-\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\frac{d}{d\mathcal{H}}\ln_{\{\kappa\}}\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}=\frac{d\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{H}}. \qquad (5.61)$$

Отсюда следует, что усредненные значения микроскопических динамических переменных $\mathcal{A}_j(\mathbf{r})$ могут быть найдены при использовании функций $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$, или $\mathcal{F}_{\kappa}$:

$$\langle\mathcal{A}_j\rangle_{\kappa}\equiv\int p^{eq}(\mathbf{r})\mathcal{A}_j(\mathbf{r})d\Gamma=$$

$$=-\frac{k_B}{\beta}\int\mathcal{A}_j(\mathbf{r})\frac{d}{d\mathcal{H}}\ln_{\{\kappa\}}\left(\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}\right)d\Gamma=\int\mathcal{A}_j(\mathbf{r})\frac{d\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{F}}_{\kappa}}{d\mathcal{H}}d\Gamma. \qquad (5.62)$$

Выше было отмечено, что для системы, которая находится в состоянии статистического квазиравновесия функция Гамильтона $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mathbf{r},\{a_j\})$ может зависеть от ряда внешних параметров $a_1,a_2,\ldots a_s$, которые можно рассматривать как обобщенные координаты системы. Определим теперь обобщенные силы $\mathcal{A}_j(\mathbf{r})$ по аналогии с классической статистикой соотношениями (см., например, Зубарев, 1971)

$$\mathcal{A}_j(\mathbf{r})=-d\mathcal{H}(\mathbf{r},\{a_j\})/d\,a_j. \qquad (5.63)$$

Тогда, наблюдаемые значения обобщенных сил $\mathcal{A}_j(\mathbf{r})$, равные среднему значению по равновесному статистическому ансамблю, могут быть вычислены следующим образом:

$$\langle \mathcal{A}_j \rangle_\kappa = \int \mathcal{A}_j(\mathbf{r}) p^{eq}(\mathbf{r}) d\Gamma = -\int \frac{d\mathcal{H}(\mathbf{r},\{a_j\})}{d a_j} p^{eq}(\mathbf{r}) d\Gamma =$$

$$= \frac{k_B}{\beta} \int \frac{d\mathcal{H}}{da_j} \frac{d \ln_{\{\kappa\}} \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{H}} d\Gamma = k_B \int \frac{d \ln_{\{\kappa\}} \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}}{da_j} d\Gamma = -\frac{d\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{F}}_\kappa}{da_j}. \tag{5.64}$$

5.4. Условие равновесия и закон композиции энергии для систем с энтропией Каниадакиса

Нахождение условия термодинамического равновесия двух независимых систем требует привлечения законов композиции для энтропий и энергий. В статистической термодинамике Больцмана–Гиббса эти законы имеют свойство аддитивности. Для неэкстенсивных κ-систем важным является свойство псевдоаддитивности энтропий, которое в данной работе не распространяется на энергии. Это приводит к равенству так называемых физических температур для двух независимых κ-систем, при сохранении усреднения физических величин нормированным распределением (см.(5.5)).

Начиная с работы (Tsallis и др.,1998), имеет место дискуссия по методу усреднения функции Гамильтона $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{r})$ и, соответственно, по закону композиции осредненных энергий двух независимых κ-систем. В основном предполагается аддитивность функции Гамильтона

$$\mathcal{H}^{(12)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{r}_1) + \mathcal{H}^{(2)}(\mathbf{r}_2), \tag{5.65}$$

которой мы здесь воспользуемся. Тогда усреднение (5.65) нормированным κ-распределением Каниадакиса приводит к следующему закону аддитивности усредненных энергий:

$$\mathcal{E}_\kappa^{(12)} = \mathcal{E}_\kappa^{(1)} + \mathcal{E}_\kappa^{(2)}, \tag{5.66}$$

где

$$\mathcal{E}_\kappa^{(12)} = \iint p^{eq}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H}^{(12)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\Gamma_1 d\Gamma_2,$$

$$\mathcal{E}_{\kappa}^{(1)}=\int p^{eq}(\mathbf{r}_1)\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{r}_1)d\Gamma_2 \quad \mathcal{E}_{\kappa}^{(2)}=\int p^{eq}(\mathbf{r}_2)\mathcal{H}^{(2)}(\mathbf{r}_2)d\Gamma_2.$$

Варьирование условия (5.66) аддитивности усредненной энергии $\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}$ и условия квазиаддитивности (5.28) совокупной энтропии $S_{\{\kappa\}}^{(12)}$ (записанного в виде $S_{\{\kappa\}}^{(12)}=S_{\{\kappa\}}^{(1)}\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}+S_{\{\kappa\}}^{(2)}\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}$) равновесной замкнутой системы с постоянными значениями энергии $\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}=const$ и энтропии $S_{\{\kappa\}}^{(12)}=const$ приводит к равенствам:

$$\delta\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}=\delta\mathcal{E}_{\kappa}^{(1)}+\delta\mathcal{E}_{\kappa}^{(2)}=0, \tag{5.67}$$

$$\delta S_{\{\kappa\}}^{(12)}=\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}+S_{\{\kappa\}}^{(1)}\delta\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}+\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}+S_{\{\kappa\}}^{(2)}\delta\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}=0. \tag{5.68}$$

В итоге, учитывая формулу (5.50) для экстремального значения энтропии Каниадакиса, записанную для равновесного состояния κ-системы (при использовании (5.57)), в виде

$$S_{\{\kappa\}}^{(r)}=k_B(\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(r)}+\gamma_r)+\frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}}\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}, \quad (r=1,2), \tag{5.69}$$

получим условие

$$\frac{1}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}}\frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(1)}}=\frac{1}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}}\frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(2)}}, \text{ где } \frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}}=\beta^{(r)}, \ (r=1,2). \tag{5.70}$$

Это условие удовлетворяется тождественно только при равенстве так называемых физических температур

$$T_{ph}:=\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}T, \text{ где } \frac{\delta S_{\{\kappa\}}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}=\beta\equiv\frac{1}{T}, \tag{5.71}$$

двух независимых κ-систем при их тепловом контакте. Отношение эквивалентности (5.71) является обобщением нулевого закона термодинамики на неэкстенсивные системы, описываемые статистикой Каниадакиса. Оно показывает, что в отличие от классического случая физическая температура T_{ph} не является обратной величиной множителя Лагранжа, β^{-1}, но определяется соотношением $T_{ph}(p)\equiv\mathcal{I}_{\{\kappa\}}/\beta$. Если $\kappa=0$, то $T_{ph}\equiv T$ и законы композиции всех средних и микроскопических величин становятся аддитивными. Подчеркнем важный факт, что температуры $T=1/\beta$ и $T_{ph}\equiv\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}/\beta$ не зависят от выбора нуля энергий, и поэтому они допускают физическую интерпретацию. Вместе с тем, переопределение эффективной температуры в κ-статистике противоречит основным принципам классической термодинамики, где абсолютная температура T является интенсивным параметром, а не функционалом $T_{ph}(p)$.

В связи с этим сделаем следующее общее замечание. В большинстве неэкстенсивных систем важную роль играют длинномасштабные пространственно-временные корреляции в фазовом или геометрическом пространстве. Это означает, в частности, что существенное значение имеет та часть внутренней энергии системы, которая связана с силовым взаимодействием отдаленных друг от друга ее частей, а именно потенциальная энергия. В классической статистике внутренняя энергия определяется, как правило, суммой кинетических энергий всех молекул совокупной системы. В такой системе «тепловой баланс» достигается в основном за счет локального теплообмена между близко расположенными ее частями, т.е. «тепло» связано с передачей кинетической энергии молекулами. Поскольку физическая температура T_{ph} отвечает за «глобальный тепловой баланс» между различными частями системы, то ее энергетический баланс будет сильно отличаться от локального теплового баланса. Локальный тепловой баланс, как известно, можно охарактеризовать абсолютной обратной температурой $\beta=1/T$, измеряемой термометром. Однако любое измерение физической температуры T_{ph} нереально, что связано с наличием коэффициента, $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}$ зависящего, согласно (5.27), от параметра деформации κ системы:

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}=\int p^{eq}\sqrt{1+\kappa^2\ln_{\{\kappa\}}^2(p^{eq})}d\Gamma .$$

Этот факт неизбежно должен приводить к модификации полученных выше термодинамических соотношений (5.57) и (5.58), включая определение термодинамической энтропии Клаузиуса. В работе (Abe и др., 2001; Abe, Okamoto, 2001), в качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения модифицированной макроскопической термодинамики Тсаллиса, выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Далее мы также воспользуемся этим подходом при разработке макроскопической термодинамики в рамках статистики Каниадакиса на основе энтропии Клаузиуса.

5.5. Деформированные термодинамические соотношения

Покажем теперь, как сконструировать неэкстенсивную макроскопическую термодинамику на основе энтропии Клаузиуса с использованием результатов микроскопической неаддитивной статистики. Для этой цели введем прежде всего, по аналогии с физической температурой T_{ph}, физическое давление P_{qh} путем рассмотрения механического равновесия двух независимых κ-систем, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S_{\{\kappa\}}^{(12)} = const$ и объема $V^{(12)} = V^{(1)} + V^{(2)} = const$. В этом случае энтропия совокупной системы должна экстремизироваться с фиксацией общего объема. В результате получим

$$\frac{1}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}} \frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}}{\delta V^{(1)}} = \frac{1}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}} \frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}}{\delta V^{(2)}} = \frac{P_{ph}}{T_{ph}}, \tag{5.72}$$

где P_{ph} − так называемое физическое давление, которое определяется соотношением

$$P_{ph} := \frac{T_{ph}}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}} \frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{eq}}{\delta V}. \tag{5.73}$$

С учетом введенных таким способом физических температуры и давления определим макроскопическую энтропию Клаузиуса. Рассмотрим для этого структуру преобразования Лежандра. Уравнение (5.55) $\beta = dS_{\{\kappa\}} / d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ указывает на то, что параметры β и $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ образуют пару переменных Лежандра. Это приводит к следующему определению свободной энергии Гельмгольца (изохорно-изотермического потенциала) (см.(5.57)):

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}}(T) := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - TS_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} T \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{5.74}$$

Это определение, однако, неудовлетворительно с точки зрения деформированной термодинамики. Свободная энергия должна зависеть от физической температуры T_{ph}, а не от переменной $T := 1/\beta$.

По аналогии с подходом, предложенном в работе (Abe, 2000) при модификации первого закона термодинамики в статистике Тсаллиса, переопределим макроскопическую κ-свободную энергию (5.74) следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}}(T_{ph}) := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} T_{ph} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}, \tag{5.75}$$

что отличается от соответствующего выражения в традиционной термодинамике. Используя соотношения (5.51), (5.52) и (5.71), можно убедиться, что переопределенная таким образом свободная энергия $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$ является функцией T_{ph}. Дифференцируя функцию $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$, в результате получим

$$d\mathcal{F}_{\{\kappa\}} = d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - T_{ph} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}}. \tag{5.76}$$

При написании (76) использовано выражение

$$d \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} = \frac{1}{k_{\mathcal{B}}} \frac{1}{u_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}})} dS_{\{\kappa\}} = \frac{w_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} dS_{\{\kappa\}}, \tag{5.77}$$

полученное с учетом соотношений (5.9), (5.21) и (5.52). Здесь для весовой функции введено следующее обозначение $w_{\{\kappa\}} := 1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\kappa S^{eq}_{\{\kappa\}} / k_{\mathcal{B}}\right)^2}$.

Если теперь использовать первый закон термодинамики

$$d'Q_{\{\kappa\}} = d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} + P_{ph} dV, \tag{5.78}$$

где $Q_{\{\kappa\}}$ – количество теплоты, подводимое к термодинамической κ-системе (или отводимое от нее), то (76) можно переписать в виде

$$d\mathcal{F}_{\{\kappa\}} = d'Q_{\{\kappa\}} - P_{ph} dV - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - T_{ph} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}} \tag{5.79}$$

Отсюда следует, переопределение термодинамической энтропии Клаузиуса для неаддитивных систем:

$$d\tilde{S}_{\{\kappa\}} = d'Q_{\{\kappa\}} / w_{\{\kappa\}} T_{ph}. \tag{5.80}$$

Введем теперь следующие характеристические функции: обобщенную энтальпию $H_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} + P_{ph}V$ и обобщенный термодинамический потенциал $G_{\{\kappa\}} = \mathcal{F}_{\{\kappa\}} + P_{ph}V$. Напомним, что все характеристические функции обладают следующим свойством: если известна характеристическая функция, выраженная через соответствующие (свои для каждой функции) переменные, то с ее помощью можно вычислить любую термодинамическую величину. В этом нетрудно убедиться из уравнений

$$d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = T_{ph}w_{\{\kappa\}}d\tilde{S}_{\{\kappa\}} - P_{ph}dV, \tag{5.81}$$

$$dH_{\{\kappa\}} = T_{ph}w_{\{\kappa\}}d\tilde{S}_{\{\kappa\}} + VdP_{ph}, \tag{5.82}$$

$$d\mathcal{F}_{\{\kappa\}} = -k_{\mathcal{B}}\ln\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}dT_{ph} - P_{ph}dV, \tag{5.83}$$

$$dG_{\{\kappa\}} = -k_{\mathcal{B}}\ln\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}dT_{ph} + P_{ph}dV, \tag{5.84}$$

из которых следуют обобщенные термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial V}\right)_{\tilde{S}_{\{\kappa\}}} = \left(\frac{\partial\mathcal{F}_{\{\kappa\}}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} = -P_{ph}, \quad \left(\frac{\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial S_{\{\kappa\}}}\right)_{V} = \left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial S_{\{\kappa\}}}\right)_{P_{ph}} = T_{ph}w_{\{\kappa\}}, \tag{5.85}$$

$$\left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial P_{ph}}\right)_{\tilde{S}_{\{\kappa\}}} = \left(\frac{\partial G_{\{\kappa\}}}{\partial P_{ph}}\right)_{T_{ph}} = V, \quad \left(\frac{\partial\mathcal{F}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V} = \left(\frac{\partial\mathcal{G}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = k_{\mathcal{B}}\ln\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{5.86}$$

Уравнение для теплоемкостей. Как известно, в классической термодинамике теплоемкость вещества в наиболее общем виде определяется следующим образом: $C_z := T\left(\partial S / \partial T\right)_z$. Здесь C_z – теплоемкость в таком процессе, в котором сохраняется постоянным параметр Z, где Z – любые обобщенные координаты. Наиболее распространенными являются изобарная теплоемкость и изохорная теплоемкость, которые в нашем случае определим соотношениями:

$$C_p := T_{ph}w_{\{\kappa\}}\left(\frac{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}, \quad C_V := T_{ph}w_{\{\kappa\}}\left(\frac{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}. \tag{5.87}$$

Так как в соответствии с формулой $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z \left(\frac{\partial u)}{\partial x}\right)_z$ (справедливой для случая двух переменных, когда $y = y(x,z)$ и $u = u(x,z)$) имеем

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial H_{\{\text{к}\}}}\right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial H_{\{\text{к}\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial T_{ph}}\right)_V = \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial \mathcal{E}_{\{\text{к}\}}}\right)_V \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\{\text{к}\}}}{\partial T_{ph}}\right)_V , \tag{5.88}$$

а из (5.85) и (5.86) следует, что $\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial H_{\{\text{к}\}}}\right)_{P_{ph}} = \frac{1}{w_{\{\text{к}\}} T_{ph}}$, $\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial \mathcal{E}_{\{\text{к}\}}}\right)_V = \frac{1}{w_{\{\text{к}\}} T_{ph}}$, то соотношения (5.87) можно записать в виде

$$C_p = \left(\partial H_{\{\text{к}\}} / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}}, \quad C_V = \left(\partial \mathcal{E}_{\{\text{к}\}} / \partial T_{ph}\right)_V . \tag{5.89}$$

Уравнение, устанавливающее связь между теплоемкостями C_p и C_V, может быть получено следующим образом. В соответствии с соотношением (см. Сычев, 1991)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)_n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_n + \left(\frac{\partial z)}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)_n , \tag{5.90}$$

являющимся следствием выражения для полного дифференциала функции $z = z(x,y)$, можно получить (полагая в (5.90) $m = x$) уравнение

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial T_{ph}}\right)_V + \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\text{к}\}}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} . \tag{5.91}$$

Отсюда, при использовании уравнения Максвелла

$$(\partial S_{\{\text{к}\}} / \partial V)_{T_{ph}} = (\partial P_{ph} / T_{ph})_V ,$$

следует

$$C_p - C_V = w_{\{\kappa\}}^2 T_{ph} \left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial T_{ph}} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}} . \tag{5.92}$$

Это выражение может быть представлено и в другом виде, если использовать так называемую «*связку трех производных»*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1$$

(следствие соотношения (5.90) при $m = x,\ n = z$), из которой следует

$$\left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial T_{ph}} \right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial V} \right)_{T_{ph}} . \tag{5.93}$$

С учетом этого соотношения связь между теплоемкостями приобретает почти классический вид:

$$C_p - C_V = -w_{\{\kappa\}}^2 T_{ph} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}}^2 \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial P_{ph}} \right)_{T_{ph}} . \tag{5.94}$$

Таким образом, применяя обобщенную энтропию Клаузиуса к сложной неэкстенсивной системе, мы получили основной набор неэкстенсивных термодинамических соотношений. Полученная стандартная форма соотношений (5.85), (5.86) и (5.94) в термодинамике Каниадакиса позволяет заключить, что они остаются инвариантными относительно неаддитивной модификации их классических аналогов. Заметим, что в дополнение к структуре Лежандра различные другие важные теоремы и свойства остаются κ-инвариантными (см. Tsallis, 2009). К сожалению, при таком подходе весовой коэффициент энтропии $w_{\{\kappa\}}$, связывающий микроскопические и макроскопические величины, никогда не может быть исключен из неэкстенсивной макроскопической термодинамики.

5.6. Дивергенция Бергмана. Обобщенная *H*-теорема

Порожденная энтропией $S_{\{\kappa\}}$ дивергенция Брегмана (см. Bregman, 1967; Cichocki, Amari, 2010)

$$D_{\{\kappa\}}\left[p\!:\!p_0\right] := S_{\{\kappa\}}(p_0(\mathbf{r})) - S_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r})) +$$

$$+\lambda k_{\mathcal{B}} \int \left(p_0(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r})\right) \ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{p_0(\mathbf{r})}{\alpha}\right) d\Gamma \geq 0 \qquad (5.95)$$

относится к наиболее существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической κ-системы Каниадакиса (Scarfone, 2018). Являясь функционалом, она определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $p(\mathbf{r})$ относительно состояния с распределением $p_0(\mathbf{r})$. Выражение (5.95) представляет собой функционал для двух нормированных распределений

$$\int p(\mathbf{r}) d\Gamma = \int p_0(\mathbf{r}) d\Gamma = 1 .$$

Различные свойства дивергенции Брегмана можно найти в работе (Cichocki, Amari, 2010). Здесь же мы отметим, что величина $D_{\{\kappa\}}(p\!:\!p_0)$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Легко видеть, что при $\kappa \to 0$ эта величина переходит в различающую информацию Кульбака–Лейблера (см. Кульбак, 1967; Зарипов, 2010)

$$D_{\{\kappa\}\to 0}(p\!:\!p_0) \Rightarrow K(p\!:\!p_0) := k_{\mathcal{B}} \iint p(\mathbf{r}) \ln\left(\frac{p(\mathbf{r})}{p_0(\mathbf{r})}\right) d\Gamma . \qquad (5.96)$$

Кроме этого, поскольку при $p = p_0$ имеет место равенство $D_{\{\kappa\}}(p\!:\!p) = 0$, то дивергенция Брегмана является функцией Ляпунова[12)].

Принцип максимум энтропии равновесного распределения. Пусть распределение $p_0(\mathbf{r})$ является равновесным, для которого справедливо представление (5.47): $p_0(\mathbf{r}) = \alpha \exp_{\{\kappa\}}\left\{-\mathcal{X}(\mathbf{r})/\lambda\right\}$, а распределение $p(\mathbf{r})$ соответствует произвольному состоянию системы.

[12)] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

Кроме этого, будем полагать, что для обоих представлений справедливо соотношение (так называемое, условие Гиббса, $\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{eq}$):

$$\int p_0(\mathbf{r})\mathcal{X}(\mathbf{r})d\Gamma = \int p(\mathbf{r})\mathcal{X}(\mathbf{r})d\Gamma, \quad \text{где} \quad \mathcal{X}(\mathbf{r}) := \gamma + \frac{\beta}{k_B}\mathcal{H}(\mathbf{r}). \tag{5.97}$$

Покажем, что в этом случае справедливо следующее равенство

$$\int (p_0(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r}))\ln_{\{\kappa\}}(p_0(\mathbf{r}))d\Gamma = \int (p(\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}))u_{\{\kappa\}}(p_0(\mathbf{r}))d\Gamma. \tag{5.98}$$

Действительно, поскольку в силу (5.21) и (5.47), мы имеем

$$u_{\{\kappa\}}(p_0) = -\ln_{\{\kappa\}}(p_0) - \lambda \ln_{\{\kappa\}}(\alpha / p_0) = -\ln_{\{\kappa\}}(p_0) - \mathcal{X}, \tag{5.99}$$

то отсюда, при учете (5.97), следует соотношение (5.98).

Из определения дивергенции Брегмана (5.95) при учете тождества (5.97) и справедливости принятых выше предположений, следует соотношение

$$S_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r})) = S_{\{\kappa\}}(p_0(\mathbf{r})) - D_{\{\kappa\}}[p : p_0] + k_B \int (p_0(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r}))\mathcal{X} d\Gamma =$$

$$= S_{\{\kappa\}}^{eq}(p_0(\mathbf{r})) - D_{\{\kappa\}}[p : p_0], \tag{5.100}$$

где информация различия представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и называется негэнтропией. Понятие негэнтропии, т.е. изменения энтропии с обратным знаком, было предложено Э. Шредингером (1947). В общем случае выполняется негэнтропийный принцип Бриллюэна (1960)

$$D_{\{\kappa\}}[p : p_0] + S_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r})) - S_{\{\kappa\}}^{eq}(p_0(\mathbf{r})) \geq 0, \tag{5.101}$$

где знак неравенства соответствует необратимым процессам в замкнутой системе. Из неравенства (100) следует, что энтропия равновесного состояния больше, чем энтропия произвольного состояния, $S_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r})) \leq S_{\{\kappa\}}^{eq}$.

Теорема Гиббса и *H*-теорема. Как известно, открытая система представляет собой часть большой замкнутой системы и находится с внешним окружением в неравновесном контакте. В окружении отсутствуют неравновесные явления и можно считать, что она находится в равновесном состоянии с распределением $p_0(\mathbf{r})$. Сравнивая значения энтропий при условии Гиббса (5.97), получим из (5.100) теорему Гиббса в виде неравенства

$$D_{\{\kappa\}}[p:p_0] = -\left[S_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r}),t) + S_{\{\kappa\}}(p_0(\mathbf{r}))\right] \geq 0\,. \tag{5.102}$$

Таким образом, увеличение энтропии системы до ее максимального значения в равновесии происходит совместно с потерей информации различия, то есть имеет место совместное увеличение статистической разупорядочпнности и уменьшение статистической упорядоченности микросостояний неэкстенсивной системы.

Поскольку согласно свойству выпуклости (Cichocki, Amari, 2010) дивергенции Брегмана $D_{\{\kappa\}}[p:p_0]$ является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того, чтобы состояние полного равновесия $p_0(\mathbf{r})$ было устойчивым, необходимо выполнение следующего неравенства

$$\frac{d}{dt}D_{\{\kappa\}}[p:p_0] = -\frac{d}{dt}\left[S_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r}),t) - S^{eq}_{\{\kappa\}}(p_0(\mathbf{r}))\right] \leq 0\,. \qquad (5.103$$

Таким образом, при стремлении κ-системы к равновесному состоянию во временной эволюции информация различия уменьшается. Из (5.102) следует H-теорема для открытых неравновесных неэкстенсивных κ-систем (неравенство для энтропии Каниадакиса)

$$dS_{\{\kappa\}}(p(\mathbf{r}),t)/dt > 0\,, \tag{5.104}$$

которое справедливо при приближении к состоянию полного статистического равновесия. Эта теорема утверждает, что κ-энтропия системы непрерывно растет в направлении равновесия, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения. Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы Каниадакиса при спонтанных переходах. Важно при этом отметить, что тот факт, что к-энтропия квазиаддитивна, и энтропия совокупной системы больше, чем сумма энтропий отдельных подсистем, указывает на то, что совокупная система термодинамически более стабильна (Landsberg, Vedral, 1998).

В последнее десятилетие к-статистика Каниадакиса привлекает все больший интерес, поскольку она обладает многими интересными свойствами (принцип максимальной энтропии, термодинамическая устойчивость, устойчивость Леша, непрерывность и т. п.). Это позволяет быть этой статистике одной из самых удачных обобщений статистической механики Больцмана-Гиббса особенно в контексте специальной теории относительности, и полученных распределений, которые наблюдаются в различных физических, природных и искусственных системах. Развитый в этой главе подход позволяет моделировать, в частности, сложные космологические и космогонические среды (от галактик и астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью (фракталов), дальнодействующего силового взаимодействия, а также эридитальности и немарковости эволюционных процессов (Kolesnichenko, 2020).

Библиография

Бриллюэн Л. Наука и теория информации // М.: ИЛ 1960.392 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах // Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика // М.: Наука, 1971. 416 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо−Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального агализ для неэкстенсивнх систем на основе энтропии и различающей информации Реньи // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018c. № 60. 44 с.

Колесниченко А. В. К построению термодинамики квантовых неэкстенсивных систем в рамках статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019a, № 16. 44 с.

Колесниченко А. В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма-Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018d, № 104. 35 с.

Колесниченко А.В. К обоснованию в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса соотношений взаимности Онзагера для кинетических коэффициентов. Mathematica Montisnigri. 2019b. Vol XLIV, pp. 41-59.

Колесниченко А. В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения // М.: ЛЕНАНД. 2019c -360 с.

Kolesnichenko A. V., Marov M. Ya. Thermodynamics of Rényi as an indispensable support basis for evolution modeling protoplanetary gas and dust disk with fractal structure // Solar System Research. 2019. V. 53. № 6. pp. 436–455.

Кульбак С. Теория информации и статистика // М.: Наука. 1967. 408 с.

Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики // М.: Высш. школа. 1991. 224 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? // М.: ИЛ. 1947. 147 с.

Abe S. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics // Physics Letters A. 1997. V.224. P. 326-330.

Abe S .Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems // Eprint arXiv:cond-mat/0012115. 2000. V.3. P. 1-14.

Abe S., Martinez S., Pennini F., Plastino A. Nonextensive thermodynamic relations // Physics Letters A. 2001. V.281. № 2-3. P.126-130.

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications”. Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Abreu E. M. C., Ananias Neto J., Barboza E. M., Nunes R. C. Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe // Physica A, 2016. V. 441. P. 141-150.

Abul-Magd A.Y. Nonextensive random-matrix theory based on Kaniadakis entropy // Phys. Lett. A. 2007. V. 361. P. 450-454.

Abul-Magd A.Y. Nonextensive and superstatistical generalizations of random-matrix theory // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. P. 39-48.

Abul-Magd A.Y., Abdel-Mageed M. Kappa-deformed random-matrix theory based on Kaniadakis statistics // Mod. Phys. Lett. B. 2012, V. 26. P. 1250059.

Borges E.P., Roditi I. A family of nonextensive entropies // Physics Letters A 1998. V.246. P.399-402.

Bregman L. M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming // USSR computational mathematics and mathematical physics, 1967. V. 7. № 3. P. 200-217.

Carvalho J. C., Silva R., do Nascimento J. D. Jr., De Medeiros J. R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades // Europhys. Lett. 2008. V. 84. № 5. P. 59001 (pp.5).

Carvalho J. C., do Nascimento J. D. Jr., Silva R., De Medeiros J. R. Non-Gaussian Statistics and Stellar Rotational Velocities of Main-Sequence Field Stars// Astrophys. Journ. Lett. 2009. V.696. P. L48-L51

Celikoglu A., Tirnakli U. Sensitivity function and entropy increase rates for z-logistic map family at the edge of chaos // Physica A. 2006. V.372. P. 238-242.

Cichocki A., Amari S. Families of Alpha- Beta- and Gamma- Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities // Entropy. 2010. V. 12. P. 1532-1568.

Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. κ-generalized statistics in personal income distribution // Eur. Phys. J. B. 2007. V. 57. P. 187-193.

Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. A model of personal income distribution with application to Italian data //. Empirical Econ. 2011. V. 39. P. 559-591.

Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. A new model of income distribution: The _-generalized distribution // J. Econ. 2012. V. 105. P. 63-91.

Coraddu M., Lissia M., Tonelli R. Statistical descriptions of nonlinear systems at the onset of chaos // Physica A. 2006. V. 365. P. 252-257.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543-549.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Ltctures. 1963. V. 3. P.160

Kaniadakis, G. Non-linear kinetics underlying generalized statistics // Physica A 2001a, V.296. P. 405-425.

Kaniadakis, G. H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics // Phys. Lett. A. 2001b, V. 288. P. 283-291.

Kaniadakis G. Statistical origin of quantum mechanics // Physica A. 2002b. V. 307 P. 172-184.

Kaniadakis, G. Statistical mechanics in the context of special relativity // Phys. Rev. E 2002a, V. 66. P. 056125.

Kaniadakis, G. Statistical mechanics in the context of special relativity II // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 036108.

Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. № 1. P. 3-13.

Kaniadakis G. Theoretical Foundations and Mathematical Formalism of the Power-Law Tailed Statistical Distributions // Entropy. 2013. V.15. P. 3983-4010

Kaniadakis G., Quarati P., Scarfone A. M. Kinetical foundations of nonconventional statistics // Physica A. 2002. V. 305 P. 76- 83.

Kaniadakis G., Scarfone A.M. A new one-parameter deformation of the exponential function // Physica A. 2002. V. 305. P. 69-75.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. № 2. P. 137-149.

Landsberg P.T. Entropies Galove! // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 46-49.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Livadiotis G. Kappa Distributions: Statistical Physics and Thermodynamics of Space and Astrophysical Plasmas /Selected Papers from the 7th International Conference on New Frontiers in Physics -ICNFP 2018) // Universe. 2018. V 4. № 144. P. 1-19.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization: Modeling Astrophysical Objects // Published by Springer-Verlag New York Inc., United States, 2015. 657s.

Olemskoi A.I., Kharchenko V.O., Borisyuk V.N. Multifractal spectrum of phase space related to generalized thermostatistics // Physica A. 2008. V. 387. P. 1895-1906.

Olemskoi A.I., Borisyuk V.N., Shuda I.A. Statistical field theories deformed within different calculi //. Eur. Phys. J. B. 2010. V. 77. P. 219-231.

Papa A.R R. On one-parameter-dependent generalizations of Boltzmann–Gibbs statistical mechanics // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V.31. P.5271-5276.

Rajaonarison D., Bolduc D., Jayet H. The K-deformed multinomial logit model // Economics Letters, Elsevier. 2005. V. 86. № 1. P.13-20.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1970. 573 p.

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1961. P. 547-561.

Rossani A., Scarfone, A. M. Generalized kinetic equations for a system of interacting atoms and photons: theory and simulations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2004. V. 37. № 18. P. 4955-4975.

Scarfone A. M. On the κ-Deformed Cyclic Functions and the Generalized Fourier Series in the Framework of the κ-Algebra // Entropy. 2015. V. 17. P. 2812-2833.

Scarfone A. M. κ-Deformed Fourier Transform // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. V. 480. P. 63-78

Scarfone A. M. A Maximal Entropy Distribution Derivation of the Sharma-Taneja-Mittal Entropic Form // Open Systems & Information Dynamics. 2018. V. 25, №. 1. P. 1850002-1−1850002-11.

Scarfone A. M.,Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy // Physical Review E, 2005. V. 72. № 2, P. 026123

Scarfone A. M., Wada T. Canonical partition function for anomalous systems described by the κ-entropy // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2006. V.162. P. 45 -52.

Scarfone A. M., Wada T. Legendre structure of κ-thermostatistics revisited in the framework of information geometry // J. Phys. A. 2014. V. 47, P. 275002 (17 pp).

Sharma B.D., Mittal D.P. New Nonadditive Measures of Relative Information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V. 2. P.122-133.

Soares B. B. Silva J. R. P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context // Europhys. Lett. 2011. V. 96. P.19001 (pp.6)

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Advances in Electronics and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press, 1989. V.76. P. 327–413.

Taneja I.J. New Developments in Generalized Information Measures. Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press, 1995. V. 91. P. 37-135

Teweldeberhan A.M., Miller H.G., Tegen R. κ-Deformed statistics and the formation of a quark-gluon plasma // Int. J. Mod. Phys. E, 2003. V.12. P. 669-673.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1-2. P.479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics: Historical Backgroud and Present Status // Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, ed. S. Abe and Y.Okamoto, Series Lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: 2001. Springer-Verlag. P. 3-99.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

Tonelli R., Mezzorani G., Meloni F., Lissia M., Coraddu M. Entropy production and Pesin identity at the onset of chaos // Prog. Theor. Phys. 2006. V. 115 P. 23-29.

Topsoe F. Entropy and equilibrium via games of complexity // Physica A. 2004. V. 340. P. 11-31.

Wada T., Suyari H. A two-parameter generalization of Shannon-Khinchin axioms and the uniqueness teorem // Phys. Lett. A. 2007. V. 368. P. 199-205.

ГЛАВА 6

Двухпараметрическая энтропия Шарма–Танеджа–Миттал как основа семейства равновесных термодинамик неэкстенсивных систем

В рамках статистической механики, основанной на двухпараметрической энтропии Шарма–Танеджа–Миттал, показано, как можно получить равновесную термодинамику неэкстенсивной системы и определить ее особенности. Приведены основные математические свойства двукратно деформированных логарифма и экспоненты, а также других связанных с ними функций, которые необходимы при конструировании неэкстенсивной термостатики. Получено обобщение на неэкстенсивный случай нулевого закона термодинамики и введена так называемая физическая температура, отличная от инверсии множителя Лагранжа β. *На основе макроскопической энтропии Клаузиуса, с привлечением обобщенного первого закона термодинамики и преобразования Лежандра получены новые термодинамические уравнения для неэкстенсивных систем, удовлетворительные с точки зрения макроскопической термодинамики. Кроме того, с учетом свойства выпуклости дивергенции Брэгмана показано, что для* (κ,ς)*-систем сохраняется принцип максимума равновесной энтропии Шарма–Танеджа–Миттал, лежандрова структура теории и* H*-теорема, описывающая хаотизацию системы при спонтанных переходах.*

Введение

Исследования в области статистической механики и термодинамики неэкстенсивных (неаддитивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса, что объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой был введен энтропийный функционал $S_q^T(p) := \left[1 - \int p^q \, d\Gamma\right] / (q-1)$, зависящий от параметра деформации q и обладающий неаддитивностью для совокупности независимых систем. Характерной чертой таких q-систем является асимптотический степенной закон распределения вероятностей, который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Больцмана−Гиббса. В научной литературе доступны многочисленные обзоры новых результатов, полученных в ходе изучения аномальных физических явлений в рамках стататистики Тсаллиса (см., например, библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. -cat.cbpf.br/ -biblio.htm, которая постоянно обновляется).

Вместе с тем определение однопараметрической энтропии Тсаллиса (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988) не является единственным примером деформированной энтропии (см. Beck, 2009)[13]. Фундаментом исследований в области неэкстенсивной статистической механики, проводимых в настоящее время, являются многочисленные нелогарифмические энтропии, в частности, однопараметрическая энтропия Реньи $S_q^R(p) := \ln\left(\int p^q\right) / (1-q)$ (Renyi, 1961, 1970), двухпараметрическая энтропия Шарма−Миттал $S_{qr}^{SM} := \left[1 - \left(\int p^q d\Gamma\right)^{(r-1)/(q-1)}\right] / (r-1)$ (Sharma, Mittal, 1975,1977), однопараметрическая каппа-энтропия Каниадакиса $S_\kappa(p) := -\left[\int\left(p^{\kappa+1} - p^{1-\kappa}\right) d\Gamma\right] / 2\kappa$ (Kaniadakis, 2001, 2002, 2005), однопараметрическая энтропия Ландсберга–Ведрала $S_q^{LV} := \left[1 - \left(\int p^q d\Gamma\right)^{-1}\right] / (1-q)$ (Landberg, Vedral, 1998), однопараметрическая энтропия Гаусса $S_r^G := \left[1 - \left(\exp(r-1) \int p \ln(p) d\Gamma\right)\right] / (r-1)$ (Frank, Plastino, 2002), однопараметрическая энтропия Абэ

---

13) В монографии (Зарипов, 2010) на основе групповых свойств параметрических мер дана их общая классификация и получены новые глубокие результаты в применении к равновесной термодинамике неэкстенсивных систем.

$S_{q_A} := -\left[\int\left(p^{q_A} - p^{q_A^{-1}}\right)d\Gamma\right] / (q_A - q_A^{-1})$(Abe, 1997; Beck, 2009; Canturk и др., 2018), двухпараметрическая энтропия (Шарма−Танеджа−Миттал $S_{\kappa,\varsigma}(p) := -\left[\int p^{1+\varsigma}(p^{\kappa} - p^{-\kappa})d\Gamma\right] / 2\kappa$ (Kaniadakis и др., 2005; Scarfone, 2006) и многие другие. Диапазон применения разнообразных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, теория плазмы, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие.

При этом важно подчеркнуть, что среди всех деформированных энтропий особый интерес представляют двухпараметрические энтропии, в частности энтропии Шарма−Миттал и Шарма−Танеджа−Миттал (ШТМ), поскольку они, позволяя получить путем манипулирования двумя параметрами деформации различные однопараметрические энтропии, являются тем самым прародителями целого семейства неэкстенсивных статистических механик неэкстенсивных систем. В частности, из энтропийного функционала Шарма−Миттал следует аддитивная энтропия Больцмана−Гиббса−Шеннона, энтропия Тсаллиса, энтропия Реньи, энтропия Ландсберга–Ведрала, энтропия Гаусса. Энтропийный функционал Шарма−Танеджа−Миттал включает в себя энтропию Тсаллиса, энтропию Абэ и энтропию Каниадакиса (см. Колесниченко, 2018). Таким образом, многие неэкстенсивные однопараметрические энтропии могут изучаться по единообразной схеме.

В связи со сказанным основанная на энтропии (ШТМ) неэкстенсивная статистическая механика, сохраняющая математическую и гносеологическую структуру классической статистической механики и - пригодная для описания очень большого класса экспериментально наблюдаемых явлений в естественных, экономических и социальных науках, заслуживает особого внимания.

В этой главе изложен круг вопросов, связанный с конструированием деформированной равновесной термодинамики на основе двухпараметрической энтропии (ШТМ) и дивергенции Брэгмана для аномальных неэкстенсивных систем. Проведенное исследование базируется на свойствах негиббсового канонического (κ,ς)-распределения, полученного из принципа Джейнса (Jaynes,1963) максимума (κ,ς)-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы и нормировке вероятностного распределения. Показано, что все важные термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия могут быть выражены с использованием только равновесного распределения. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру, отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β. Именно этот факт с неизбежностью требует модификации полученных из микроскопических статистико-механических соображений уравнений термостатики на основе макроскопической энтропии Клаузиуса. На ее основе и с учетом первого закона термодинамики и преобразования Лежандра построена макроскопическая равновесная термодинамика неэкстенсивных систем. Кроме этого, с использованием свойства выпуклости дивергенции Брэгмана изучены спонтанные переходы между стационарными состояниями сложной (κ,ς)-системы и доказаны теорема Гиббса и *H*-теорема Больцмана.

6.1. Основные определения и статистические свойства энтропии Шарма−Танеджа−Миттал

В деформированной двухпараметрической статистической механике Шарма−Танеджа−Миттал для непрерывных величин аномальных (κ,ς)-систем при вероятностной нормировке

$$\int p(\mathbf{r})\,d\Gamma = 1\,, \qquad (0 \le p(\mathbf{r}) < \infty) \tag{6.1}$$

для плотности распределения $p(\mathbf{r})$ состояния системы в вероятностном фазовом пространстве $\mathbf{r} := \{\mathbf{q}_1,\ldots\mathbf{q}_N;\mathbf{p}_1,\ldots\mathbf{p}_N\}$ физического статистического ансамбля Гиббса (описывающего микроскопическое состояние рассматриваемой системы) безразмерная (κ,ς)-энтропия задается следующим функционалом (Kaniadakis и др., 2005; Scarfone, 2006)

$$S_{\kappa,\varsigma}(p) := -\int p^{1+\varsigma}(\mathbf{r})\frac{p^{\kappa}(\mathbf{r}) - p^{-\kappa}(\mathbf{r})}{2\kappa}d\Gamma\,. \tag{6.2}$$

Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем $6N$-мерным фазовым пространством, причем безразмерный элемент фазового пространства $d\Gamma$ записывается в современной форме $d\Gamma := \left\{ N! h^{3N} \right\}^{-1} d\mathbf{r}$, где $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка; энтропийные индексы κ и ς (параметры деформации) суть вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам $|\kappa| < 1$ и $\varsigma > 0$; в общем случае распределение $p(\mathbf{r}, t, \theta)$ может зависеть от времени t и от некоторого параметра θ. Энтропия (2) обобщает распределения Тсаллиса и Каниадакиса посредством манипулирования двумя параметрами деформации κ и ς, тем самым определяя эти энтропии как некоторые предельные однопараметрические случаи (см., например, Колесниченко, 2019, 2020).

Энтропия (2) может быть записана также в следующих эквивалентных формах:

$$S_{\kappa,\varsigma}(p) := -\int p(\mathbf{r}) \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right] d\Gamma = -\left\langle \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right] \right\rangle, \tag{6.3}$$

при написании которых использован так называемый «деформированный» логарифм Шарма−Миттал (Sharma, Mittal, 1975, 1977)

$$\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}(x) := \frac{x^{\varsigma+\kappa} - x^{\varsigma-\kappa}}{2\kappa} \equiv \frac{x^{\varsigma}}{\kappa} \sinh(\kappa \ln x) \quad (\forall x > 0), \tag{6.4}$$

а также способ получения среднего значения для каждой физической величины $\mathcal{T}_j(\mathbf{r})$, характеризующей микросостояние системы, а именно

$$\mathbf{E}(\mathcal{T}) = \langle \mathcal{T}_j(\mathbf{r}) \rangle := \int p(\mathbf{r}) \mathcal{T}_j(\mathbf{r}) d\Gamma, \tag{6.5}$$

где принята нормировка (6.1). Такая деформация логарифмической функции в выражении для энтропии (по сравнению с классической энтропией Больцмана−Гиббса $S_{\mathcal{BG}}(p) := -k_{\mathcal{B}} \int p \ln(p) d\Gamma$) позволяет учитывать важную особенность поведения многих аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими силовыми взаимодействиями, когда вероятность реализации $p(\mathbf{r})$ малых значений параметров состояния убывает (при $p(\mathbf{r}) \to 0^{+}$) не экспоненциально быстро, а степенным образом (закон Парето). Благодаря этому статистика (ШТМ) описывает события, практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана–Гиббса (см. Scarfone, 2010).

Если $\varsigma = \pm|\kappa| = (q-1)/2$, то из определения (6.2) следует энтропия Тсаллиса $S_{\kappa,\varsigma}(p) \to S_{2-q} := \int \frac{p^{2-q}(\mathbf{r}) \ - p(\mathbf{r})}{q-1} d\Gamma$ (Tsallis, 1988, 2009), а при $\varsigma = 0$ –энтропия Каниадакиса $S_{\kappa} := \int \frac{p^{\kappa+1}(\mathbf{r}) - p^{-\kappa+1}(\mathbf{r})}{2\kappa} d\Gamma$ (Kaniadakis, 2001, 2002, 2005), на основе которых строятся соответствующие статистические термодинамики

Легко показать, что в пределе слабой связи ($\varsigma \to 0$ и $\kappa \to 0$) энтропия $S_{\kappa,\varsigma}$ переходит в классическую формулу $S_{\mathcal{BG}}$ статистики Гиббса. Действительно, при $\kappa \to 0$ имеем: $p^{\pm|\kappa|} = \mathrm{e}^{\pm|\kappa|\ln p} \to 1 \pm |\kappa| \ln p$, и энтропия $S_{\kappa,\varsigma}$ сводится к

$$S_{\{\kappa\to 0,\varsigma=0\}} = \lim_{\kappa\to 0}\left\{-\int p(\mathbf{r})\frac{p(\mathbf{r})^{\kappa} - p(\mathbf{r})^{-\kappa}}{2\kappa} d\Gamma\right\} = S_{\mathcal{BG}} := -\int p(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) d\Gamma .$$

Функция $\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}(x)$. Приведем теперь некоторые наиболее важные свойства деформированного логарифма $\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}(x)$, которые широко используются в различных приложениях (см., например, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др. 2005):

$$\ln_{0,0}(x) = \ln(x), \quad \ln_{\kappa,\varsigma}(1) = 0,, \quad \ln_{0,\varsigma}(x) = x^{\varsigma}\ln(x). \tag{6.6}$$

$$\ln_{\kappa,\varsigma}(x) = \ln_{-\kappa,\varsigma}(x), \quad \ln_{\kappa,\varsigma}(x) = -\ln_{\kappa,-\varsigma}(1/x), \quad (\kappa,\varsigma) \in \mathcal{R}, \tag{6.7}$$

$$a\ln_{\kappa,\varsigma}(x) = \ln_{\kappa/a,\varsigma/a}(x^{a}), \tag{6.8}$$

$$\ln_{\kappa,\varsigma}(xy) = u_{\kappa,\varsigma}(x)\ln_{\kappa,\varsigma}(y) + u_{\kappa,\varsigma}(y)\ln_{\kappa,\varsigma}(x) =$$

$$= x^{\varsigma+\kappa}\ln_{\kappa,\varsigma}(y) + y^{\varsigma+\kappa}\ln_{\kappa,\varsigma}(x) - 2\kappa\ln_{\kappa,\varsigma}(x)\ln_{\kappa,\varsigma}(y). \tag{6.9}$$

Имеют место неравенства, характеризующие вогнутость функции $\ln_{\kappa,\varsigma}(x)$:

$$\frac{d\ln_{\kappa,\varsigma}(x)}{dx}>0,\ -|\kappa|\le\varsigma\le|\kappa|;\quad \frac{d^2\ln_{\kappa,\varsigma}(x)}{dx^2}<0,\ -|\kappa|\le\varsigma\le\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-|\kappa|\right|, \tag{6.10}$$

а также асимптотические соотношения, описывающие поведение деформированного логарифма по степенному закону:

$$\ln_{\kappa,\varsigma}(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{2|\kappa|}x^{-|\kappa|+\varsigma},\quad \ln_{\kappa,\varsigma}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2|\kappa|}x^{|\kappa|+\varsigma}. \tag{6.11}$$

Для $\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}(x)$ справедливы интегральные выражения:

$$\int_0^1 \ln_{\kappa,\varsigma}(x)^{\pm 1}\,dx=\mp\frac{1}{(1\pm\varsigma)^2-\kappa^2},\ 1\pm\varsigma>|\kappa|. \tag{6.12}$$

Если использовать преобразование

$$u_{\kappa,\varsigma}(x):=\frac{1}{2}\left(x^{\varsigma+\kappa}+x^{\varsigma-\kappa}\right)=-(1+\varsigma)\ln_{\kappa,\varsigma}(x)+\lambda\ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{x}{\alpha}\right), \tag{6.13}$$

где

$$\lambda:=\frac{(1+\varsigma-\kappa)^{(\varsigma+\kappa)/2\kappa}}{(1+\varsigma+\kappa)^{(\varsigma-\kappa)/2\kappa}},\quad \alpha:=\left(\frac{1+\varsigma-\kappa}{1+\varsigma+\kappa}\right)^{1/2\kappa}, \tag{6.14}$$

– симметричные относительно перехода $\kappa\leftrightarrow-\kappa$ параметры, для которых справедливы формулы $(1+\varsigma\pm\kappa)=\lambda\alpha^{-\varsigma\mp\kappa}$ и $\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\lambda}$, то можно соотношение (6.9) переписать в следующем виде:

$$\ln_{\kappa,\varsigma}(xy)=-2(1+\varsigma)\ln_{\kappa,\varsigma}(y)\ln_{\kappa,\varsigma}(x)+$$

$$+\lambda\ln_{\kappa,\varsigma}(x)\ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{y}{\alpha}\right)+\lambda\ln_{\kappa,\varsigma}(y)\ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{6.9*}$$

Наконец, имеет место уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[x\ln_{\kappa,\varsigma}(x)\right]=\lambda\ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{6.15}$$

Функция $u_{\kappa,\varsigma}(x)$. В соотношении (6.9) фигурирует важная в статистике (ШТМ) сопряженная с логарифмом (6.4) функция (см. Scarfone, 2006; Scarfone, Wada, 2014)

$$u_{\kappa,\varsigma}(x) := x^{\varsigma} \frac{x^{\kappa} + x^{-\kappa}}{2} = x^{\varsigma} \cosh(\kappa \ln(x)), \quad (\kappa,\varsigma) \in \mathcal{R}, \tag{6.16}$$

которая, как легко проверить, обладает следующими свойствами:

$$u_{\kappa,\varsigma}(x) = u_{-\kappa,\varsigma}(x), \quad u_{\kappa,\varsigma}(x) = u_{\kappa,-\varsigma}(1/x), \quad u_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1+\varsigma}{\lambda}. \tag{6.17}$$

С учетом (6.13) и (6.14) легко получить следующие соотношения:

$$u_{\kappa,\varsigma}(x) = x^{\varsigma+\kappa} - \kappa \ln_{\kappa,\varsigma}(x) = -(1+\varsigma)\ln_{\kappa,\varsigma}(x) + \lambda \ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{x}{\alpha}\right), \tag{6.18}$$

$$u_{\kappa,\varsigma}(xy) = u_{\kappa,\varsigma}(x) u_{\kappa,\varsigma}(y) + \kappa^2 \ln_{\kappa,\varsigma}(x) \ln_{\kappa,\varsigma}(y), \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x u_{\kappa,\varsigma}(x)\right] = (1+\varsigma) u_{\kappa,\varsigma}(x) + \kappa^2 \ln_{\kappa,\varsigma}(x) = \lambda u_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{6.20}$$

Неаддитивность (κ,ς)-энтропии для независимых систем. Покажем теперь, что подобно энтропии Тсаллиса (см., например, Колесниченко, 2019), энтропия Шарма−Танеджа−Миттал подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем.

Рассмотрим для этого совокупную физическую (κ,ς)-систему, состоящую из двух подсистем, состояние которой описывается совместным мультипликативным распределением $p^{(1,2)}(\mathbf{r}) := p^{(1)}(\mathbf{r}) \cdot p^{(2)}(\mathbf{r})$, для которого выполняются условия нормировки

$$\iint p^{(1,2)}(\mathbf{r}) d\Gamma_1 d\Gamma_2 = \int p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Gamma_1 = \int p^{(2)}(\mathbf{r}) d\Gamma_2 = 1$$

(здесь индексы (1) и (2) относятся к двум статистически независимым (κ,ς)-системам).

После подстановки распределения $p^{(1,2)}(\mathbf{r})$ в формулу (3) получим (при учете (9)) следующее свойство псевдоаддитивности совокупной энтропии в статистике (ШТМ) для двух независимых (κ,ς)-подсистем:

$$S_{\kappa,\varsigma}(1,2) := -\iint p^{(1)}(\mathbf{r}) p^{(2)}(\mathbf{r}) \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p^{(1)}(\mathbf{r}) p^{(2)}(\mathbf{r})\right] d\Gamma_1 d\Gamma_2 =$$

$$= \iint p^{(1)}(\mathbf{r}) p^{(2)}(\mathbf{r}) \Big\{ \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p^{(1)}(\mathbf{r}) \right] u_{\kappa,\varsigma}\left[p^{(2)}(\mathbf{r}) \right] +$$

$$+ \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p^{(2)}(\mathbf{r}) \right] u_{\kappa,\varsigma}\left[p^{(1)}(\mathbf{r}) \right] \Big\} d\Gamma_1 d\Gamma_2 = S_{\kappa,\varsigma}(1) \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2) + S_{\kappa,\varsigma}(2) \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1) . \tag{6.21}$$

В равенстве (6.21) фигурирует чрезвычайно важная в (κ,ς)-статистике функция:

$$\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(p) := \int p(\mathbf{r}) u_{\kappa,\varsigma}[p(\mathbf{r})] d\Gamma = -(1+\varsigma) \Big\langle \ln_{\kappa,\varsigma}(p) \Big\rangle + \lambda \Big\langle \ln_{\kappa,\varsigma}(p/\alpha) \Big\rangle . \tag{6.22}$$

В случае если $(\kappa,\varsigma) \to 0$, то $u_{\{0\}}(p) = 1$ и $\mathcal{I}_{\{0,0\}}(p) = \int p(\mathbf{r}) d\Gamma = 1$, так что из условия псевдоаддитивности (6.21) следует аддитивное правило для энтропии $S_{\mathcal{BG}}$ Больцмана–Гиббса.

Отметим, что с учетом соотношения (6.19) и в случае мультипликативности распределения $p^{(1,2)}$ функцию $\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1,2)$ можно представить в виде:

$$\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1,2) = \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1) \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2) + \kappa^2 S_{\kappa,\varsigma}(1) S_{\kappa,\varsigma}(2) . \tag{6.23}$$

6.2. Экстремум (κ,ς)–энтропии и равновесные состояния

Рассмотрим сначала некоторые свойства так называемой «деформированной» экспоненты Каниадакиса.

(κ,ς)-экспонента. Поскольку (κ,ς)-логарифм является строго возрастающей функцией при $\kappa,\varsigma \in \mathcal{R}$, то он имеет обратную функцию, которая называется обратной экспонентой Каниадакиса $\exp_{\kappa,\varsigma}(x)$. Некоторые свойства этой экспоненты, вытекающие из соответствующих аналитических свойств деформированного логарифма (см. Kaniadakis и др., 2004), имеют вид:

$$\ln_{\kappa,\varsigma}\Big[\exp_{\kappa,\varsigma}(x) \Big] = \exp_{\kappa,\varsigma}\Big[\ln_{\kappa,\varsigma}(x) \Big] = x , \tag{6.24}$$

$$\exp_{\kappa,\varsigma}\left(-\frac{1}{2|\kappa|} \right) = 0^+ , \ \textit{когда}\ \varsigma = |\kappa| ; \ \exp_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{1}{2|\kappa|} \right) = +\infty , \ \textit{когда}\ \varsigma = -|\kappa| , \tag{6.25}$$

$$\exp_{\kappa,\varsigma}(0)=1;\quad \exp_{\kappa,\varsigma}(-\infty)=0^{+},\quad \varsigma<|\kappa|;\quad \exp_{\kappa,\varsigma}(+\infty)=+\infty,\quad \varsigma>-|\kappa|, \tag{6.26}$$

$$\exp_{\kappa,\varsigma}(x)\exp_{\kappa,-\varsigma}(-x)=1;\quad \left[\exp_{\kappa,\varsigma}(x)\right]^{a}=\exp_{\kappa/a,\varsigma/a}(ax). \tag{6.27}$$

Кроме того, функция $\exp_{\kappa,\varsigma}(x)$ обладает свойством выпуклости:

$$\frac{d}{dx}\exp_{\kappa,\varsigma}(x)>0,\quad \frac{d^2}{dx^2}\exp_{\kappa,\varsigma}(x)>0,\quad x\in\mathbb{R},\quad \kappa^2<1. \tag{6.28}$$

Несомненно, одним из наиболее интересных свойств деформированной экспоненты $\exp_{\kappa,\varsigma}(x)$ является ее представление степенной асимптотикой на бесконечности:

$$\exp_{\kappa,\varsigma}(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}|2\kappa x|^{1/(\varsigma\pm|\kappa|)}. \tag{6.29}$$

Наконец, для (κ,ς)-экспоненты справедливы следующие интегральные соотношения (см., например, Kaniadakis. 2005):

$$\int_{-\infty}^{0}\exp_{\kappa,\varsigma}(x)dx=\frac{1}{(1+\varsigma)^2-\kappa^2},\quad \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\exp_{\{\kappa,\varsigma\}}(-x)}=\frac{1}{(1-\varsigma)^2-\kappa^2}. \tag{6.30}$$

Микроканоноческое равновесное распределение. Равновесные состояния сложных систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Рассмотрим (κ,ς)-систему, находящуюся в термостате. Модифицированное распределение Гиббса в статистике (ШТМ) может быть получено, как и в классическом случае, из экстремума (κ,ς)-энтропии (3) при выполнении следующих дополнительных условий: заданности средней энергии системы

$$\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}:=\int\varepsilon(\mathbf{r})p(\mathbf{r})d\Gamma=const \tag{6.31}$$

и сохранения вероятностной нормировки (6.1) распределения $p(\mathbf{r})$. Здесь $\varepsilon(\mathbf{r})$ – внутренняя энергия $\mathbf{r}$-го состояния системы, которая определяется математической моделью изучаемых физических процессов.

Используя стандартную в статистической механике и теории информации методологию Джейнса (Jaynes, 1963) получения равновесного распределения из вариационного принципа, введем функционал

$$\mathcal{L}(p) := -\int p(\mathbf{r}) \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right] d\Gamma + \beta\mu \int p(\mathbf{r}) d\Gamma - \beta \int \varepsilon(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) d\Gamma \qquad (6.32)$$

и найдем его безусловный экстремум. Здесь β и $\beta\mu$ суть множители Лагранжа; μ − «химический потенциал». В соответствии с теоремой Лагранжа вероятностное распределение $p^{ext}(\mathbf{r})$, «экстремизирующее» (κ,ς)-энтропию $S_{\kappa,\varsigma}(p)$ при указанных ограничениях, определяется из условия:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(p)}{\delta p} = -(1+\varsigma) \ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right] - u_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right] - \beta\left[\varepsilon(\mathbf{r}) - \mu\right] = 0 . \qquad (6.33)$$

Отсюда, с учетом (6.14) и (6.19), следует (Wada, Scarfone, 2010):

$$\lambda \ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{p(\mathbf{r})}{\alpha}\right) = -\beta\left[\varepsilon(\mathbf{r}) - \mu\right], \qquad (34)$$

где $\lambda = \dfrac{(1+\varsigma-\kappa)^{\frac{\varsigma+\kappa}{2\kappa}}}{(1+\varsigma+\kappa)^{\frac{\varsigma-\kappa}{2\kappa}}}$, $\alpha = \left(\dfrac{1+\varsigma-\kappa}{1+\varsigma+\kappa}\right)^{\frac{1}{2\kappa}}$, или

$$p^{ext}(\mathbf{r},\beta) = \alpha \exp_{\kappa,\varsigma}\left\{-\frac{\beta}{\lambda}\left[\varepsilon(\mathbf{r}) - \mu\right]\right\}, \quad \left(\textit{здесь}\ \alpha = \exp_{\kappa,-\varsigma}(-1/\lambda)\right) \qquad (6.35)$$

− нормированное (κ,ς)-распределение в состоянии статистического равновесия системы (микроканоническое распределение Больцмана−Гиббса в статистике (ШТМ)). В пределе $\kappa,\varsigma \to 0$ (κ,ς)-распределения (6.35) сводzтся к микроканоническому распределению Гиббса классической статистики (Зубарев, 1971).

Заметим, что хвост распределения (6.35) описывается степенной асимптотикой (это так называемый закон Парето), определяемой в силу (6.29) выражением

$$p^{ext}(\mathbf{r}) \underset{z\to\pm\infty}{\sim} \left|2\kappa \frac{z}{\lambda}\right|^{1/(\varsigma\pm|\kappa|)}, \quad (\textit{где} \quad z = z(\mathbf{r}) := \beta\left[\varepsilon(\mathbf{r}) - \mu\right], \qquad (6.36)$$

которое существенно отличается от экспоненциальной асимптотики, характеризующей стандартное распределение Больцмана−Гиббса.

Найдем теперь вторую вариацию функционала (6.44). В результате получим

$$\delta^2\mathcal{L}(p) = -\frac{1}{p(\mathbf{r})}\left\{(\varsigma+\varsigma^2+\kappa^2)\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}\left[p(\mathbf{r})\right]+2\varsigma u_{\{\kappa,\varsigma\}}\left[p(\mathbf{r})\right]\right\}<0\,.$$

Отсюда следует, что экстремум соответствует максимуму функционала $\mathcal{L}$,т.е. распределение (35) максимизирует (κ,ς)- энтропию.

6.3. Уравнения статистической термодинамики для неэкстенсивных (κ,ς) -систем

Приступим теперь к одной из основных целей данной работы – конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике (ШТМ). Используя распределение (6.35), получим следующее выражение:

$$(1+\varsigma)\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p^{est}(\mathbf{r})\right]+u_{\kappa,\varsigma}\left[p^{est}(\mathbf{r})\right]+\beta\left[\varepsilon(\mathbf{r})-\mu\right]=0\,. \quad (6.37)$$

Усредняя (6.37) с помощью равновесного распределения $p^{est}(\mathbf{r})$ и учитывая определения (6.22) и (6.31), в результате получим экстремальное значение (κ,ς)-энтропии

$$S_{\kappa,\varsigma}^{ext} = \frac{1}{1+\varsigma}\left[\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}^{ext}+\beta\left(\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{ext}-\mu\right)\right]. \quad (6.38)$$

Далее индекс "est" у термодинамических параметров будем опускать.

Дифференцируя выражение (6.3) по внутренней энергии $\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}$ и учитываяя (15) и (35), в результате получаем

$$\frac{dS_{\kappa,\varsigma}}{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}} = -\int\frac{d}{dp(\mathbf{r})}\left\{p(\mathbf{r})\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right]\right\}\frac{dp(\mathbf{r})}{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}d\Gamma =$$

$$= -\lambda\int\ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{p(\mathbf{r})}{\alpha}\right)\frac{dp(\mathbf{r})}{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}d\Gamma = \int\beta\left[\varepsilon(\mathbf{r})-\mu\right]\frac{dp(\mathbf{r})}{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}d\Gamma\,. \quad (6.39)$$

С учетом (6.1) и (6.31) это равенство сводится к обобщению определения обратной температуры:

$$dS_{\kappa,\varsigma}/d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} = \beta := T^{-1}\,. \quad (6.40)$$

Первый вариант определения статистической суммы. Если определить (κ,ς)-аналог классической статистической суммы Z соотношением (Wada, Scarfone, 2010)

$$Z_{\kappa,\varsigma} := \exp_{\kappa,\varsigma}\left[\frac{1}{1+\varsigma}\left(\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}^{ext} - \beta(\varsigma\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{ext} + \mu)\right)\right], \tag{6.41}$$

то его комбинирование с выражением (6.38) для (κ,ς)-энтропии приводит к основному термодинамическому тождеству

$$S_{\kappa,\varsigma} = \ln_{\kappa,\varsigma}(Z_{\kappa,\varsigma}) + \beta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} = \beta\left(\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - \mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}\right), \tag{6.42}$$

где свободная энергия определена равенством

$$\beta\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma} := -\ln_{\kappa,\varsigma}(Z_{\kappa,\varsigma}). \tag{6.43}$$

Продифференцируем теперь логарифм $\ln_{\kappa,\varsigma}(Z_{\kappa,\varsigma})$ по параметру β. Используя определение (6.27) функции $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}$, а также соотношения (6.9), (6.21) и (6.49), в результате будем иметь

$$\frac{d}{d\beta}\ln_{\kappa,\varsigma}(Z_{\kappa,\varsigma}) = \frac{1}{1+\varsigma}\left(\frac{d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta} - \frac{d(\beta\mu)}{d\beta} - \varsigma\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - \varsigma\beta\frac{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\varsigma}\left(\frac{d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta} - \frac{d(\beta\mu)}{d\beta} - \varsigma\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - \varsigma\beta\frac{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta}\right), \tag{6.44}$$

где производная $d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}/d\beta$, полученная с учетом формулы (20), равна:

$$\frac{d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta} = \int\frac{d}{dp}\left[pu_{\kappa,\varsigma}(p)\right]\frac{dp}{d\beta}d\Gamma = \lambda\int u_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{p(z)}{\alpha}\right)\frac{dp(z)}{d\beta}d\Gamma. \tag{6.45}$$

Далее мы воспользуемся выражением

$$\lambda u_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{p(z)}{\alpha}\right)dp(z) = \varsigma z dp(z) - p(z)dz, \quad \text{где } z = z(\mathbf{r}) := \beta\left[\varepsilon(\mathbf{r}) - \mu\right], \tag{6.46}$$

которое следует из следующих соотношений:

- соотношения (20), записанного в виде:

$$\lambda u_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{p(z)}{\alpha}\right)dp(z)=\left\{(1+\varsigma)u_{\kappa,\varsigma}\left[p(z)\right]+\kappa^2\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(z)\right]\right\}dp(z);$$

• дифференциала от соотношения (37), преобразованного к виду:

$$\left[(1+\varsigma)u_{\{\kappa,\varsigma\}}\left[p(z)\right]+\kappa^2\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(z)\right]\right]dp=$$

$$=-\left[(1+\varsigma)\varsigma\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(z)\right]+\varsigma u_{\{\kappa,\varsigma\}}\left[p(z)\right]\right]dp(z)-p(z)dz;$$

• соотношения (37), записанного следующим образом:

$$\varsigma z=-(1+\varsigma)\varsigma\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p(z)\right]-\varsigma u_{\{\kappa,\varsigma\}}\left[p(z)\right].$$

С учетом формул (6.45) и (6.46) будем иметь

$$\frac{d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta}=\varsigma\int z\frac{dp(z)}{d\beta}d\Gamma-\int p(z)\frac{dz}{d\beta}d\Gamma=$$

$$\varsigma\frac{d}{d\beta}\left[\int z\,p(z)d\Gamma\right]-(1+\varsigma)\int p(z)\frac{dz}{d\beta}d\Gamma=$$

$$=\varsigma\frac{d}{d\beta}\left[\beta\left(\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}-\mu\right)\right]-(1+\varsigma)\left(\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}-\frac{d(\beta\mu)}{d\beta}\right)=\varsigma\beta\frac{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta}-\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}+\frac{d(\beta\mu)}{d\beta}. \quad (6.47)$$

Объединяя теперь (6.44) и (6.47), получим важное термодинамическое соотношение

$$d\ln_{\kappa,\varsigma}(\mathrm{Z}_{\kappa,\varsigma})/d\beta=-\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}\,. \quad (6.48)$$

Комбинирование выражений (6.43) и (6.48) приводит к связи

$$\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}=d\left(\beta\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}\right)/d\beta \quad (6.49)$$

между свободной и внутренней энергией. Кроме этого, из (6.40) и (6.42), путем дифференцирования $\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}$ по температуре можно получить $\{\kappa,\varsigma\}$-энтропию

$$S_{\kappa,\varsigma}=-d\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}/d(1/\beta), \quad (6.50)$$

сопряженную температуре $T=1/\beta$, которая определяется равенством (6.40).

Таким образом, выведенные выше на основе двухпараметрической энтропии (ШТМ) уравнения статистической (κ,ς)-термодинамики принимают следующую форму:

$$\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma} = -\frac{1}{\beta}\ln_{\kappa,\varsigma}(Z_{\kappa,\varsigma}),\;\; \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} = \frac{d(\beta\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma})}{d\beta},\;\; dS_{\kappa,\varsigma} = \beta d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma},$$

$$S_{\kappa,\varsigma} = \beta\left(\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - \mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}\right),\;\; \mathcal{S}_{\kappa,\varsigma} = -\frac{d(\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma})}{d(1/\beta)},\;\; C_{\kappa,\varsigma} = -\beta^2\frac{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{d\beta}. \tag{6.51}$$

Усреднение микроскопических случайных величин. С помощью деформированного канонического распределения Гиббса (6.35) можно также вычислить среднее значение любой физической величины $\mathcal{T}_j(\mathbf{r})$, характеризующей микросостояние системы. Дифференцируя для этого логарифм статистического интеграла $Z_{\{\kappa,\varsigma\}}$ по микроскопической энергии $\varepsilon(\mathbf{r})$ и считая при этом, что $\beta \simeq const$ в течение длительного периода времени, в результате получим:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\ln_{\kappa,\varsigma}(\mathrm{Z}_{\kappa,\varsigma}) = \frac{1}{1+\varsigma}\left(\frac{d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{d\varepsilon} - \beta\frac{d\mu}{d\varepsilon} - \varsigma\beta\frac{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{d\varepsilon}\right). \tag{6.52}$$

Повторим теперь процедуру вывода соотношения (6.47) и для расчета производной от функции $\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}$ по $\varepsilon(\mathbf{r})$; тогда будем иметь:

$$\frac{d\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{d\varepsilon(\mathbf{r})} = \varsigma\beta\frac{d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{d\varepsilon(\mathbf{r})} + \beta\frac{d\mu}{d\varepsilon(\mathbf{r})} - (1+\varsigma)\beta p(\mathbf{r}). \tag{6.53}$$

Комбинирование выражений (6.52) и (6.53) приводит к выражению

$$p(\mathbf{r}) = -\beta^{-1} d\ln_{\kappa,\varsigma}(\mathrm{Z}_{\kappa,\varsigma})/d\varepsilon(\mathbf{r}), \tag{6.54}$$

позволяющему найти усредненные величины $\langle\mathcal{T}_i\rangle$

$$\langle\mathcal{T}_i\rangle \equiv \int p(\mathbf{r})\mathcal{T}_i(\mathbf{r})d\Gamma = -\frac{1}{\beta}\int\mathcal{T}_i(\mathbf{r})\frac{d\ln_{\kappa,\varsigma}(\mathrm{Z}_{\kappa,\varsigma})}{d\varepsilon(\mathbf{r})}d\Gamma = \int\mathcal{T}_i(\mathbf{r})\frac{d\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}}{d\varepsilon(\mathbf{r})}d\Gamma. \tag{6.55}$$

Второй вариант определения статистической суммы. Некоторые авторы (см., например, Tsallis и др., 1998) предпочитают вводить другое определение статистической суммы, которое позволяет сконструировать с помощью микроканонического распределения (6.35) все термодинамические соотношения в почти классическом виде. Переопределенная статистическая сумма, заданная выражением

$$\ln_{\kappa,\varsigma}(W_{\kappa,\varsigma}) := \frac{1}{1+\varsigma}\left[\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma} + \beta\left(\mathcal{E}_{\{\kappa,\varsigma} - \mu\right)\right], \tag{6.56}$$

связана с $Z_{\{\kappa,\varsigma\}}$ соотношением

$$\ln_{\kappa,\varsigma}(W_{\kappa,\varsigma}) = \ln_{\kappa,\varsigma}(Z_{\kappa,\varsigma}) + \beta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}. \tag{6.57}$$

С физической точки зрения разница статистических значений сумм $Z_{\kappa,\varsigma}$ и $W_{\kappa,\varsigma}$ состоит в том, что первая определяет свободную энергию $\mathcal{F}_{\kappa,\varsigma}$, а вторая – энтропию $S_{\kappa,\varsigma}$ (как это принято в класической статистической термодинамике (см. Зубарев, 1971)), величины которых являются функциями температуры T и внутренней энергии $\mathcal{E}_{\{\kappa,\varsigma}$ соответственно.

Действительно, комбинирование определения (6.56) с выражением (6.38) для (κ,ς)-энтропии приводит к выражению

$$S_{\kappa,\varsigma} = \ln_{\kappa,\varsigma}(W_{\kappa,\varsigma}). \tag{6.58}$$

Определим теперь деформированную свободную энергию $F'_{\kappa,\varsigma}$ выражением

$$F'_{\kappa,\varsigma} := \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - \beta^{-1}\ln_{\kappa,\varsigma}(W_{\kappa,\varsigma}). \tag{6.59}$$

которое при $\kappa \to 0$ совпадает со свободной энергией в классической статистике $F := \mathcal{E} - \dfrac{1}{\beta}\ln W$. Тогда из (6.58) и (6.59) следует основное термодинамическое тождество

$$S_{\kappa,\varsigma} = \beta\left(\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - F'_{\kappa,\varsigma}\right), \tag{6.60}$$

с использованием которого могут быть получены и другие термодинамические соотношения.

6.4. Термическое равновесие двух неэкстенсивных систем в статистике Шарма−Танеджа−Миттал

Нахождение условий термического равновесия двух независимых систем требует привлечения законов композиции для энтропий и энергий. В статистической термодинамике Больцмана−Гиббса эти законы имеют свойство аддитивности. Для неэкстенсивных (κ,ς)-систем важным является свойство псевдоаддитивности (6. 21) энтропии (ШТМ), которое в данной работе не распространяется на энергии. Это приводит, как будет показано ниже, к равенству так называемых физических температур для двух независимых (κ,ς)-систем, при сохранении усреднения физических величин нормированным распределением.

Физическая температура. Начиная с работы (Tsallis и др.,1998), имеет место дискуссия по методу усреднения микроскопической энергии любой неэкстенсивной системы, состоящей из двух статистически независимых равновесных подсистем и, соответственно, по закону композиции усредненных энергий. В основном предполагается аддитивный закон для микроскопических энергий

$$\varepsilon_{ij}^{(1,2)} := \varepsilon_i^{(1)} + \varepsilon_j^{(2)}, \tag{6.61}$$

которым мы здесь воспользуемся. Тогда усреднение выражения (6.61) статистически равновесным (κ,ς)-распределением (6.35) приводит к следующему закону аддитивности усредненных энергий:

$$\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}(1,2) = \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{(1)} + \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{(2)}, \tag{6.62}$$

где

$$\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}(1,2) := \mathbf{E}\left[\varepsilon^{(1,2)}(\mathbf{r})\right] = \int \varepsilon^{(1,2)}(\mathbf{r}) p^{(1,2)}(\mathbf{r}) d\Gamma_1 d\Gamma_2 =$$

$$= \int p^{(2)}(\mathbf{r}) d\Gamma_2 \int \varepsilon^{(1)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Gamma_1 + \int p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Gamma_1 \int \varepsilon^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(2)}(\mathbf{r}) d\Gamma_2,$$

$$\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{(1)} := \mathbf{E}\left[\varepsilon^{(1)}(\mathbf{r})\right] = \int \varepsilon^{(1)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) d\Gamma, \quad \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{(2)} := \mathbf{E}\left[\varepsilon^{(2)}(\mathbf{r})\right] = \int \varepsilon^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(2)}(\mathbf{r}) d\Gamma.$$

Варьирование условия аддитивности усредненной энергии $\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}(1,2)$ равновесной совокупной системы и условия квазиаддитивности (6.21) ее энтропии $S_{\kappa,\varsigma}(1,2) = S_{\kappa,\varsigma}(1)\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2) + S_{\kappa,\varsigma}(2)\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1)$ приводит, с учетом постоянства энергии $\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}(1,2) = const$ и энтропии $S_{\kappa,\varsigma}(1,2) = const$, к равенствам:

$$\delta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} \equiv \delta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{(1)} = -\delta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}^{(2)}, \tag{6.63}$$

$$S_{\kappa,\varsigma}^{(1)} \delta\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2) + \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2)\delta S_{\kappa,\varsigma}^{(1)} + S_{\kappa,\varsigma}^{(2)} \delta\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1) + \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1)\delta S_{\kappa,\varsigma}^{(2)} = 0, \tag{6.64}$$

откуда следует:

$$\frac{\partial S^{(1)}_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}^{(1)}_{\kappa,\varsigma}}\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2)+\frac{\partial \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1)}{\partial \mathcal{E}^{(1)}_{\kappa,\varsigma}}S^{(2)}_{\kappa,\varsigma}=S^{(1)}_{\kappa,\varsigma}\frac{\partial \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(2)}{\partial \mathcal{E}^{(2)}_{\kappa,\varsigma}}+\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}(1)\frac{\partial S^{(2)}_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}^{(2)}_{\kappa,\varsigma}}\,. \tag{6.65}$$

Используя (6.21), (6.23) и (6.38), легко получить соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}=\frac{\kappa^2 S_{\kappa,\varsigma}-\varsigma\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\cdot\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}, \tag{6.66}$$

с учетом которого равенство (6.65) принимает вид:

$$\left(\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}\right)_{(1,2)}\times\left\{\left(\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}\right)_{(1)}\delta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}\right)_{(2)}\delta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}\right\}=0\,. \tag{6.67}$$

Из (67) следует условие

$$\left.\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}\right|_{(1)}=\left.\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}\right|_{(2)}, \tag{6.68}$$

(здесь $\delta S^{(r)}_{\kappa,\varsigma}/\delta\mathcal{E}^{(r)}_{\kappa,\varsigma}=\beta^{(r)}$, $(r=1,2)$), которое удовлетворяется тождественно только при равенстве так называемых физических температур двух независимых (κ,ς)-подсистем при их тепловом контакте. Физическая температура T_{ph} определяется выражением

$$\frac{1}{T_{ph}}:=\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}=\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{1}{T}, \tag{6.69}$$

где $T=\beta^{-1}=\left(\delta S_{\kappa,\varsigma}/\delta\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}\right)^{-1}$.

Таким образом, отношение эквивалентности (6.68) является обобщением нулевого закона термодинамики на неэкстенсивные системы, описываемые статистикой (ШТМ). Оно показывает, что в отличие от классического случая физическая температура T_{ph} не является обратной величиной множителя Лагранжа, β^{-1}, но определяется выражением (6.69). В случае если $\kappa,\varsigma=0$, то $T_{ph}\equiv T$ и законы композиции всех выше приведенных микроскопических и средних и величин становятся аддитивными.

Физическое давление. Важно иметь в виду, что, по аналогии с физической температурой T_{ph}, можно ввести и физическое давление P_{qh}. Для этой цели необходимо рассмотреть две независимые находящиеся в состоянии механического равновесия (κ,ς)-подсистемы, которые образуют совокупную замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S_{\{\kappa,\varsigma\}}(1{,}2)=const$, энергии $\mathcal{E}_{\{\kappa,\varsigma\}}(1{,}2)$ и объема $V(1{,}2)=V^{(1)}+V^{(2)}=const$. В этом случае (κ,ς)-энтропия совокупной системы должна экстремизироваться с фиксацией общей энергии и объема. В результате, после применения процедуры, аналогичной выводу T_{ph}, и при учете равенств $\delta V\equiv \delta V^{(1)}=-\delta V^{(2)}$, получим следующее отношение эквивалентности:

$$\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial V}\Bigg|_{(1)}=\frac{1}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}}{\partial V}\Bigg|_{(2)}=\frac{P_{ph}}{T_{ph}}, \tag{6.70}$$

которое удовлетворяется тождественно только при совпадении так называемых физических давлений $P_{ph}\Big|_{(1)}=P_{ph}\Big|_{(2)}$ в двух подсистемах при их механическом контакте. Здесь физическое давление P_{ph} определяется соотношением

$$P_{ph}:=\frac{T_{ph}}{\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma}}\frac{\delta S_{\kappa,\varsigma}}{\delta V}. \tag{6.71}$$

Таким образом, предполагая аддитивный закон энергетического и механического взаимодействия между двумя микроскопическими системами, управляемыми одной и той же неаддитивной (κ,ς)-энтропией, можно определить интенсивные макроскопические переменные (температуру и давление), отвечающие нулевому принципу термодинамики в контексте неинтенсивной статистической механики (ШТМ).

В связи с введением в рассмотрение физической температуры T_{ph} сделаем следующее общее замечание. В большинстве сложных неэкстенсивных систем важную роль играют длинномасштабные пространственно-временные корреляции в фазовом или геометрическом пространстве. Это означает, в частности, что существенное значение имеет та часть внутренней энергии системы, которая связана с силовым взаимодействием отдаленных друг от друга ее частей, а именно потенциальная энергия. В классической статистической механике внутренняя энергия определяется, как правило, суммой кинетических энергий всех молекул совокупной системы. В такой системе «тепловой баланс» достигается в основном за счет локального теплообмена между близко расположенными (в частности, в пограничных областях) ее составляющими, т.е. «тепло» связано с передачей кинетической энергии отдельными частицами системы. Поскольку физическая температура T_{ph} отвечает за «глобальный тепловой баланс» между различными частями системы, то ее энергетический баланс будет сильно отличаться от локального теплового баланса. Локальный тепловой баланс описывается абсолютной температурой $T=1/\beta$, измеряемой термометром. Однако подобное измерение физической температуры T_{ph} нереально, что связано с наличием функционала $(\mathcal{I}_{\kappa,\varsigma}-\varsigma S_{\kappa,\varsigma})$, зависящего, согласно (6.27), от параметров деформации κ и ς.

Важно подчеркнуть, что отношение эквивалентности (68), являющееся обобщением нулевого закона термодинамики на неэкстенсивные (κ,ς)-системы, противоречит основным принципам классической термодинамики, где абсолютная температура T (интенсивный параметр), а не функционал T_{ph} является термодинамическим параметром, характеризующим термодинамическое состояние системы при равновесии. Тот факт, что термодинамическое и механическое равновесие двух соприкасающихся систем достигается при физических температуре и давлении, неизбежно приводит при конструировании макроскопической термостатики к необходимости модификации полученных выше термодинамических соотношений (6.58)-(6.60), включая введение термодинамической энтропии Клаузиуса.

6.5. Макроскопическая термостатика

Следует отметить, что все выведенные выше термостатические соотношения, описывающие неэкстенсивную (κ,ς)-систему, основывались на микроскопических статистико-механических соображениях. Такой микроскопический подход крайне важен. Однако, современное состояние теории не будет полностью удовлетворительным до тех пор, пока не будет сформулирована макроскопическая термодинамика неэкстенсивных (κ,ς) -систем. Принимая во внимание тот факт, что соответствующее обобщение теории в решающей степени зависит от вида переопределенного энтропийного функционала, крайне важно выяснить его воздействие на структуру макроскопических термодинамических соотношений.

В качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения модифицированной макроскопической термодинамики Шарма− Танеджа−Миттал мы, следуя работе (Abe, 2000; Abe, Okamoto, 2001; Abe и др., 2001), используем первый закон термодинамики и структуру преобразования Лежандра.

С учетом введенных выше физических температуры и давления определим макроскопическую энтропию Клаузиуса. Рассмотрим для этого структуру преобразования Лежандра. Уравнение (6.40) $\beta = dS_{\{\kappa,\varsigma\}}/d\mathcal{E}_{\{\kappa,\varsigma\}}$ указывает на то, что параметры β и $\mathcal{E}_{\{\kappa,\varsigma\}}$ образуют пару переменных Лежандра. Это приводит к следующему определению свободной энергии (см.(6.59)):

$$F'_{\kappa,\varsigma} = \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - TS_{\kappa,\varsigma} = \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - T\ln_{\kappa,\varsigma}(W_{\kappa,\varsigma}). \qquad (6.72)$$

Это определение, однако, неудовлетворительно с точки зрения макроскопической деформированной термодинамики. Свободная энергия должна зависеть от физической температуры T_{ph}, а не от абсолютной температуры T.

Физическая свободная энергия Гельмгольца. По аналогии с подходом, предложенным в работах (Abe, 2000; Abe и др., 2001) при разработке макроскопической термостатики на основе энтропии Тсаллиса, введем физическую (κ,ς)-свободную энергию Гельмгольца соотношением

$$F_{\kappa,\varsigma} := \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - T_{ph}\ln(W_{\kappa,\varsigma}), \qquad (6.73)$$

которое является фактически преобразованием Лежандра, связанным с другой энтропийной величиной, а именно с $\ln(W_{\kappa,\varsigma})$. Такое определение физической свободной энергии приводит к тому, что некоторые из термодинамических соотношений в том числе определяющих макроскопическую энтропию Клаузиуса, должны быть соответствующим образом модифицированы.

Используя соотношения (6.56), (6.58) и (6.69), можно убедиться, что переопределенная таким образом макроскопическая свободная энергия $F_{\kappa,\varsigma}$ является функцией T_{ph}. Дифференцируя $F_{\kappa,\varsigma}$, получим

$$dF_{\kappa,\varsigma}= d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} - \ln(W_{\kappa,\varsigma})dT_{ph} - T_{ph}w_{\kappa,\varsigma}dS_{\{\kappa,\varsigma\}} . \tag{6.74}$$

При написании (6.74) нами было использовано соотношение

$$d\ln(W_{\kappa,\varsigma}) = \frac{dS_{\{\kappa,\varsigma\}}}{\left[\exp_{\kappa,\varsigma}(S_{\kappa,\varsigma})\right]^{\varsigma+\kappa} + (\varsigma-\kappa)S_{\kappa,\varsigma}} \equiv w_{\kappa,\varsigma}dS_{\{\kappa,\varsigma\}}, \tag{6.75}$$

выведенное с учетом следующего выражения для дифференциала:

$$d\ln_{\{\kappa,\varsigma\}}(x) = \frac{1}{2\kappa}\left[(\varsigma+\kappa)x^{\varsigma+\kappa-1} - (\varsigma-\kappa)x^{\varsigma-\kappa-1}\right]dx =$$

$$= \left[u_{\kappa,\varsigma}(x) + \varsigma\ln_{\kappa,\varsigma}(x)\right]d\ln(x) = \left[x^{\varsigma+\kappa} + (\varsigma-\kappa)\ln_{\kappa,\varsigma}(x)\right]d\ln(x). \tag{6.76}$$

Заметим, что весовая функция $w_{\kappa,\varsigma}$ в частном случае статистики Каниадакиса (при $\varsigma=0$) принимает следующий вид (см. Колесниченко, 2020):

$$w_\kappa = 1/\left\{\left[\exp_\kappa(S_\kappa)\right]^\kappa - \kappa S_\kappa\right\} = 1/\sqrt{1+(\kappa S_\kappa)^2}, \tag{6.77}$$

а для статистики Тсаллиса, когда $\varsigma = \pm|\kappa| = (q-1)/2$, параметр $w_{\kappa,\varsigma}$ принимает следующее выражение (ср. Abe, 1997, 2000)

$$w_{2-q} := 1/\left[\exp_{2-q}(S_{2-q})\right]^{q-1} = 1/\left[1+(q-1)S_{2-q}\right]. \tag{77*}$$

Энтропия Клаузиуса. Если теперь использовать первый закон термодинамики

$$d'Q_{\kappa,\varsigma} = d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} + P_{ph}dV, \tag{6.78}$$

где $Q_{\kappa,\varsigma}$ – количество теплоты, подводимое к (κ,ς)-системе (или отводимое от нее), то диференциальное равенство (6.74) можно переписать в виде

$$dF_{\kappa,\varsigma} = d'Q_{\kappa,\varsigma\}} - P_{ph}dV - \ln(W_{\kappa,\varsigma})dT_{ph} - T_{ph}w_{\kappa,\varsigma}dS_{\kappa,\varsigma}. \qquad (6.79)$$

Отсюда следует возможность ввода макроскопической энтропии Клаузиуса $S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}$ для неаддитивных систем:

$$dS^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma} := d'Q_{\kappa,\varsigma} / T_{ph}, \qquad S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma} = \ln(W_{\kappa,\varsigma}), \qquad (6.80)$$

где

$$dS^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma} = d\ln(W_{\kappa,\varsigma}) = w_{\kappa,\varsigma}dS_{\{\kappa,\varsigma\}} \equiv \frac{dS_{\{\kappa,\varsigma\}}}{\left[\exp_{\kappa,\varsigma}(S_{\kappa,\varsigma})\right]^{\varsigma+\kappa} + (\varsigma-\kappa)S_{\kappa,\varsigma}}.$$

Используя теперь соотношения (6.79) и (6.80) при конструировании макроскопической термостатики (κ,ς)-системы, покажем, как количество тепла и энтропия Клаузиуса влияют на термодинамические процессы. Введем с этой целью макроскопические характеристические функции: обобщенную энтальпию $H_{\kappa,\varsigma} = \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} + P_{ph}V$ и обобщенную свободную энергию Гиббса $G_{\kappa,\varsigma} = F_{\kappa,\varsigma} + P_{ph}V$. Напомним, что любые характеристические функции обладают следующим свойством: если известна характеристическая функция, выраженная через соответствующие (свои для каждой функции) параметры состояния, то с ее помощью можно вычислить все термодинамические величины. В этом нетрудно убедиться, например, из уравнений

$$d\mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} = w_{\kappa,\varsigma}T_{ph}dS_{\kappa,\varsigma} - P_{ph}dV = T_{ph}dS^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma} - P_{ph}dV, \qquad (6.81)$$

$$dH_{\kappa,\varsigma} = T_{ph}w_{\kappa,\varsigma}dS_{\kappa,\varsigma} + VdP_{ph} = T_{ph}dS^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma} + VdP_{ph}, \qquad (6.82)$$

$$dF_{\kappa,\varsigma} = -P_{ph}dV - \ln W_{\kappa,\varsigma}dT_{ph} = -P_{ph}dV - S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}dT_{ph}, \qquad (6.83)$$

$$dG_{\kappa,\varsigma} = -\ln W_{\kappa,\varsigma}dT_{ph} + P_{ph}dV = -S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}dT_{ph} + P_{ph}dV, \qquad (6.84)$$

следствием котоых являются следующие частные производные:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{\partial V}\right)_{S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}} = \left(\frac{\partial F_{\kappa,\varsigma}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} = -P_{ph}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma}}{\partial S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}}\right)_V = \left(\frac{\partial H_{\kappa,\varsigma}}{\partial S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}}\right)_{P_{ph}} = T_{ph}, \qquad (6.85)$$

$$\left(\frac{\partial H_{\kappa,\varsigma}}{\partial P_{ph}}\right)_{S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}} = \left(\frac{\partial G_{\kappa,\varsigma}}{\partial P_{ph}}\right)_{T_{ph}} = V, \quad \left(\frac{\partial F_{\kappa,\varsigma}}{\partial T_{ph}}\right)_V = \left(\frac{\partial G_{\kappa,\varsigma}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = -S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}. \qquad (6.86)$$

Комбинируя (6.73) и (6.86), получим одно из важных уравнений Гиббса−Гельмгольца

$$F_{\kappa,\varsigma} = \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} + T_{ph}\left(\partial F_{\kappa,\varsigma} / \partial T_{ph}\right)_V. \qquad (6.87)$$

Это уравнение позаволяет рассчитать свободную энергию Гельмгольца, если известна внутренняя энергия как функция физической температуры T_{ph}.

Используя определения характеристических функций $H_{\kappa,\varsigma}$ и $G_{\kappa,\varsigma}$, а также формулы (6.85)-(6.87), можно получить также два других уравнений Гиббса− Гельмгольца:

$$H_{\kappa,\varsigma} = \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} + P_{ph}\left(\partial H_{\kappa,\varsigma} / \partial P_{ph}\right)_{S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}}. \qquad (6.88)$$

Это уравнение позволяет расчитать энтальпию, если известна внутренняя энергия как функция физического давления P_{ph}.

$$G_{\kappa,\varsigma} = F_{\kappa,\varsigma} + P_{ph}\left(\partial G_{\kappa,\varsigma} / \partial P_{ph}\right)_{T_{ph}}. \qquad (6.89)$$

При помощи этого уравнения можно расчитать свободную энергию Гиббса из свободной энергии Гельмгольца, если последняя известна как функция физического давления P_{ph}.

Наконец, при использовании уравнения (6.87) можно получить выражение для изохорной теплоемкости

$$C_V = \left(\partial \mathcal{E}_{\kappa,\varsigma} / \partial T_{ph}\right)_V = T_{ph}\left(\partial^2 F_{\kappa,\varsigma} / \partial T^2_{ph}\right)_V \qquad (6.90)$$

Таким образом, применяя обобщенную энтропию Клаузиуса к сложной неэкстенсивной системе, мы смогли найти основной набор неэкстенсивных термодинамических соотношений. Полученная стандартная форма соотношений (6.81)-(6.90) в макроскопической термостатике Шарма− Танеджа−Миттал позволяет заключить, что они остаются инвариантными относительно неаддитивной модификации их классических аналогов. Можно также убедиться в том, что в дополнение к структуре Лежандра и другие важные теоремы и термодинамические свойства остаются при этом (κ,ς)-инвариантными (см., например, Tsallis, 2009).

Кроме того, можно показать, что введенная формулой (6.80) макроскопическая энтропия Клаузиуса $S^{\mathcal{K}}_{\kappa,\varsigma}$ является аддитивной величиной, что находится в соответствии с аксиоматикой Каратеодори (см. Мюнстер, 2010), согласно которой экстенсивность количества тепла играет существенную роль при определении энтропии как переменной состояния (см. Abe, 2002).

6.6. Дивергенция Брэгмана. Обобщенная *H*-Теорема

Порожденная энтропией $S_{\kappa,\varsigma}$ дивергенция Брэгмана (см. Bregman, 1967; Cichocki, Amari, 2010)

$$D_{\kappa,\varsigma}\left[p:q\right]=S_{\kappa,\varsigma}\left[q(\mathbf{r})\right]-S_{\kappa,\varsigma}\left[p(\mathbf{r})\right]+\int\frac{\partial S_{\kappa,\varsigma}[q(\mathbf{r})]}{\partial q(\mathbf{r})}\left[p(\mathbf{r})-q(\mathbf{r})\right]d\Gamma\geq 0 \tag{6.91}$$

относится к наиболее существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической (κ,ς)-системы (Scarfone, 2018). Являясь функционалом, она определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $p(\mathbf{r})$ относительно состояния с распределением $q(\mathbf{r})$. Выражение (6.91) представляет собой функционал для двух нормированных распределений $\int p(\mathbf{r})d\Gamma=\int q(\mathbf{r})d\Gamma=1$.

Различные свойства общего вида дивергенции Брэгмана можно найти в работе (Cichocki, Amari, 2010). Здесь же мы отметим, что величина $D_{\kappa,\varsigma}(p:q)$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Легко видеть, что при $\varsigma=0$, $\kappa\to 0$ эта величина переходит в так называемую информацию различия Кульбака−Лейблера (см. Кульбак, 1967; Зарипов, 2010)

$$D_{\kappa\to 0,\varsigma=0}(p:q)\Rightarrow K(p:q):=\iint p(\mathbf{r})\ln\left(\frac{p(\mathbf{r})}{q(\mathbf{r})}\right)d\Gamma. \tag{6.92}$$

Кроме этого, поскольку при $p=q$ имеет место равенство $D_{\kappa,\varsigma}(p:p)=0$

, то дивергенция Брэгмана является функцией Ляпунова[14].

Максимум (κ,ς)-энтропии для равновесного распределения. Сначала придадим выражению (6.91) другую форму. С учетом свойства (6.13) для деформированного логарифма $\ln_{\kappa,\varsigma}$ получим:

$$D_{\kappa,\varsigma}[p:q]=S_{\kappa,\varsigma}[q(\mathbf{r})]-S_{\kappa,\varsigma}[p(\mathbf{r})]-\lambda\int[p(\mathbf{r})-q(\mathbf{r})]\ln_{\kappa,\varsigma}\left(\frac{q(\mathbf{r})}{\alpha}\right)d\Gamma\geq 0 \qquad (6.93)$$

Пусть теперь распределение $p(\mathbf{r})$ является равновесным $p(\mathbf{r})=p_0(\mathbf{r})$, для которого справедливо представление (6.34), которое мы запишем в виде:

$$-\lambda\ln_{\kappa,\varsigma}[p_0(\mathbf{r})/\alpha]=\beta[\varepsilon(\mathbf{r})-\mu]\equiv z(\mathbf{r}), \qquad (6.94)$$

а распределение $q(\mathbf{r})$ соответствует произвольному состоянию системы. Кроме этого, предположим, что для обоих распределений справедливо равенство (условие Гиббса)

$$\int q(\mathbf{r})\,z(\mathbf{r})d\Gamma=p_0(\mathbf{r})\,z(\mathbf{r})d\Gamma, \qquad (6.95)$$

Покажем, что в этом случае справедливо также и равенство

$$(\varsigma+1)\int[p_0(\mathbf{r})-q(\mathbf{r})]\ln_{\kappa,\varsigma}[p_0(\mathbf{r})]d\Gamma=\int[q(\mathbf{r})-p_0(\mathbf{r})]u_{\kappa,\varsigma}[p(\mathbf{r})]d\Gamma. \qquad (6.96)$$

Действительно, комбинируя (6.13) и (6.34), находим соотношение

$$(1+\varsigma)\ln_{\kappa,\varsigma}[p_0(\mathbf{r})]=-u_{\kappa,\varsigma}[p_0(\mathbf{r})]-z(\mathbf{r}), \qquad (6.97)$$

используя которое, совместно с (6.95), получим (6.96).

С другой стороны, из определения дивергенции Брэгмана (93) и учета (6.1) и (6.31) (с заменой $p\Rightarrow q$), имеем выражение:

$$S_{\kappa,\varsigma}[q(\mathbf{r})]:=\int q(\mathbf{r})\ln_{\kappa,\varsigma}[q(\mathbf{r})]d\Gamma=-D_{\kappa,\varsigma}[q:p_0]-$$

---

[14] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$+\int p_0(\mathbf{r})\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]d\Gamma-\lambda\int\left[q(\mathbf{r})-p_0(\mathbf{r})\right]\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})/\alpha\right], \tag{6.98}$$

которое, при учете формулы (13), принимает вид:

$$S_{\kappa,\varsigma}\left[q(\mathbf{r})\right]:=\int q(\mathbf{r})\ln_{\kappa,\varsigma}\left[q(\mathbf{r})\right]d\Gamma=-D_{\kappa,\varsigma}\left[q:p_0\right]+\int p_0(\mathbf{r})\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]d\Gamma-$$
$$-\int\left[q(\mathbf{r})-p_0(\mathbf{r})\right]u_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]d\Gamma-(1+\varsigma)\int\left[q(\mathbf{r})-p_0(\mathbf{r})\right]\ln_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]. \tag{6.99}$$

Наконец, комбинируя (6.96) и (6.99), получим искомый результат (см. Scarfone, 2018)

$$S_{\kappa,\varsigma}\left[q(\mathbf{r})\right]=S_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]-D_{\kappa,\varsigma}\left[q:p_0\right]\le S_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]. \tag{6.100}$$

где дивергенция Брэгмана выступает в виде отрицательного вклада в энтропию Шарма−Танеджа−Миттал и проявляется как негэнтропия. Понятие негэнтропии, т.е. изменения энтропии с обратным знаком, было предложено Э. Шредингером (1947). Из неравенства (6.100) следует, что энтропия $S_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]$ равновесного состояния больше, чем энтропия $S_{\kappa,\varsigma}\left[q(\mathbf{r})\right]$ произвольного состояния.

Теорема Гиббса и *H*-теорема. Как известно, открытая система представляет собой часть большой замкнутой системы и находится с внешним окружением в неравновесном контакте. В окружении отсутствуют неравновесные явления, и можно считать, что она находится в равновесном состоянии с распределением $p_0(\mathbf{r})$. Сравнивая значения энтропий при условии Гиббса (6.95), получим из (6.100) теорему Гиббса в виде неравенства

$$D_{\kappa,\varsigma}\left[q:p_0\right]=-\left\{S_{\kappa,\varsigma}\left[q(\mathbf{r}),t\right]-S_{\kappa,\varsigma}\left[p_0(\mathbf{r})\right]\right\}\ge 0\,. \tag{6.101}$$

Таким образом, увеличение энтропии системы до ее максимального значения в равновесии происходит совместно с потерей информации различия, то есть имеет место совместное увеличение статистической разупорядоченности и уменьшение статистической упорядоченности микросостояний неэкстенсивной системы.

Поскольку согласно свойству выпуклости (Cichocki, Amari, 2010) дивергенции Брэгмана $D_{\kappa,\varsigma}\left[q:p_0\right]$ является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того, чтобы состояние полного равновесия

$p_0(\mathbf{r})$ было устойчивым, необходимо выполнение следующего неравенства

$$dD_{\kappa,\varsigma}\left[p\colon p_0\right]/\,dt = -d\left[S_{\kappa,\varsigma}(q(\mathbf{r}),t) - S_{\kappa,\varsigma}(p_0(\mathbf{r}))\right]/\,dt \le 0\,. \qquad (6.102)$$

Таким образом, при стремлении системы к равновесному состоянию во временной эволюции дивергенция Брэгмана (информация различия) уменьшается. Из (6.102) следует H-теорема для открытых неравновесных неэкстенсивных (κ,ς)-систем

$$dS_{\{\kappa\}}\big(q(\mathbf{r}),t\big)/\,dt > 0\,, \qquad (6.103)$$

которая справедлива при приближении к состоянию полного статистического равновесия. Эта теорема утверждает, что (κ,ς)-энтропия системы непрерывно растет в направлении равновесия, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения. Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы Шарма−Танеджа−Миттал при спонтанных переходах. При этом важно отметить, что факт того, что (κ,ς)-энтропия квазиаддитивна, а энтропия совокупной системы больше, чем сумма энтропий отдельных подсистем, указывает на то, что совокупная система термодинамически более стабильна (Landsberg, Vedral, 1998).

В заключение этой главы следует отметить, в последнее десятилетие двухпараметрическая (κ,ς)-статистика Шама−Танеджа−Миттал привлекает все больший интерес, поскольку она обладает многими интересными свойствами (принцип максимальной энтропии, термодинамическая устойчивость, устойчивость Леша, непрерывность и т. п.). Это позволяет быть этой статистике одним из удачных обобщений статистической механики Больцмана−Гиббса особенно в контексте специальной теории относительности, и полученных распределений, которые наблюдаются в различных физических, природных и искусственных системах.

Изложенный здесь подход позволяет моделировать, в частности, сложные космологические и космогонические среды (от галактик и астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью (фракталов), дальнодействующего силового взаимодействия, а также эридитальности и немарковости эволюционных процессов (см. Kolesnichenko, 2020). Этот факт потребовал переопределения ряда термодинамических соотношений, полученных на микроскопическом уровне, при конструировании макроскопической неэкстенсивной термостатики. Изложенный здесь подход позволяет моделировать, в частности, сложные космологические и космогонические среды (от галактик и астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью (фракталов), дальнодействующего силового взаимодействия, а также эридитальности и немарковости эволюционных процессов (см. Kolesnichenko, 2020).

Библиография

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко. А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттал как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. Vol XLII P.74-101.

Колесниченко А. В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. -360 с.

Колесниченко А. В. К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем а основе каппа-энтропии Каниадакиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020, № 17. 36 с.

Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука. 1967. 408 с.

Мюнстер А. Химическая термодинамика. Из-во: URSS. 2010. 296 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971. 416 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? М.: ИЛ. 1947. 147 с.

Abe S A note on the *q*-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics // Physics Letters A. 1997. V. 224. № 6. P. 326-330.

Abe S .Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems // Eprint arXiv:cond-mat/0012115. 2000. V.3. P. 1-14.

Abe S., Martinez S., Pennini F., Plastino A. Nonextensive thermodynamic relations // Physics Letters A. 2001. V.281. № 2-3. P.126-130.

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications”. Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Abe S. Macroscopic thermodynamics based on composable nonextensive entropies // Physica A. 2002. V. 305. P. 62-68.

Beck C. Generalised information and entropy measures in physics // Contemp. Phys. 2009. V. 50. № 4. P. 495–510.

Bregman L. M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming // USSR computational mathematics and mathematical physics, 1967. V. 7. № 3. P. 200-217.

Canturk B., Oikonomouy T., Bagciz G. B. The parameter space and third law of thermodynamics for the Borges Roditi, Abe and Sharma Mittal entropies // International Journal of Modern Physics B. 2018. V. 32. P. 1850274 (10 pages)

Cichocki A., Amari S. Families of Alpha-Beta- and Gamma-Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities // Entropy. 2010. V. 12. P. 1532-1568.

Daroczy Z. Generalized information functions // Inf. Control. 1970. V. 16. № 1. P. 36–51.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543–549.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics. В сб. «Statistical Physics». Brandeis Ltctures. 1963. V. 3. P.160.

Havrda J., Charvat F. Quantiication method of classiication processes. Concept of structural α-entropy // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Kaniadakis G. H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics // Phys. Lett. A. 2001. V. 288. P. 283-291.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 056125.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity II // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 036108.

Kaniadakis G., Lissia M., Scarfone A. M. Deformed logarithms and entropies // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340. № 1-3. P. 41-49.

Kaniadakis G., Lissia M., Scarfone A. M.. Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics **//** Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 046128.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Renyi A. On measures of entropy and information // In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. University California Press. Berkeley. 1961. V. 1. P. 547–561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Scarfone A.M. Legendre structure of the thermostatistics theory based on the Sharma–Taneja–Mittal entropy // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1. P. 63-70.

Scarfone A.M. Intensive variables in the framework of the non-extensive thermostatistics // Physics Letters A. 2010. V. 374. № 27. P. 2701-2706.

Scarfone A. M. A Maximal Entropy Distribution Derivation of the Sharma-Taneja-Mittal Entropic Form // Open Systems & Information Dynamics. 2018. V. 25, №. 1. P. 1850002-1−1850002-11.

Sharma B. D., Mittal D. P. New nonadditive measures of entropy for discrete probability distributions // J. Math. Sci. 1975. V. 10. P. 28-40.

Sharma B. D., Mittal D. P. New non-additive measures of relative information // J. Combinatorics Information & System Sciences. 1977. V.2. № 4. P. 122-132.

Scarfone A. M., Wada T. Legendre structure of κ-thermostatistics revisited in the framework of information geometry // J. Phys. A. 2014. V. 47, P. 275002 (17 pp).

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1-2. P.479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

Wada T., Scarfone A. M. Finite difference and averaging operators in generalized entropies // J. Phys.: Conference Series. 2010. V. 201. P. 012005 (1-8).

ГЛАВА 7

Построение термодинамики квантовых неэкстенсивных систем в рамках статистики Тсаллиса

В рамках квантовой статистики Тсаллиса, основанной на параметрической неаддитивной энтропии, связанной с матрицей плотности, получены термодинамические равенства для большого канонического квантового ансамбля. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для независимых квантово-механических систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру, отличную от инверсии множителя Лагранжа β. С учетом обобщенного первого закона термодинамики и преобразования Лежандра проведен анализ модифицированных термодинамических соотношений в статистике Тсаллиса. На основе свойства выпуклости различающей информации Ратье–Каннапана, обобщенной на квантовый случай, обсуждается второй закон термодинамики. Изучены спонтанные переходы между стационарными состояниями сложной квантово-механической системы и доказана H-теорема Больцмана.

Развитый здесь подход предполагает использование неэкстенсивной квантовой термодинамики в различных контекстах, касающихся, в частности, моделирования квантовых тепловых эффектов в наноустройствах, в материаловедении, биомедицине и других квантовых технологиях.

Введение

Статистическая механика Больцмана–Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. Это связано, в частности, с тем, что в основе статистики Больцмана–Гиббса лежит постулат о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). А это означает, в свою очередь, что фазовое пространство не содержит запрещенных состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к экспоненциальному распределению вероятности состояний системы (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных) или, в случае кинетической теории газов, к максвелловскому распределению скоростей. Кроме этого, в основе этих наук лежит фундаментальное предположение о малости радиуса взаимодействия между отдельными элементами системы по сравнению с размерами самой системы. Поскольку в большинстве обычных систем силы между отдельными ее частями короткодействующие, то каждая «молекула» чувствует лишь несколько ближайших соседей. Таким образом, аддитивность энтропии и других термодинамических параметров для равновесных или близких к равновесию систем часто является следствием локального взаимодействия между отдельными элементами системы.

Вместе с тем существует широкий класс малых и сложных систем, элементы которых взаимодействуют глобально, чему предшествует снижение симметрии системы, связанное с формированием коллективных мод интенсивных переменных. В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры подобных систем, поведение и свойства которых являются аномальными с точки зрения классической статистики. Существует множество систем, в которых имеются нелокальные корреляции, сильные взаимозависимости между отдельными (всеми) элементами системы. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия. В частности, к их числу относятся системы, которые помнят свое прошлое, поскольку движения отдельных частиц таких системах являются взаимообусловленными (т.е. сильно коррелированными).

Довольно широкий класс подобных систем (хотя далеко не всех) адекватно описывается неэкстенсивной (неаддитивной) статистической механикой, основанной на какой-либо параметрической энтропии (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988) и Реньи (Renyi, 1961, 1970), которые, однако, сохраняют гносеологическую структуру (логическую схему построения) классической статистики (см., например, Curado, Tsallis, 1991; Beck, Schlogl, 1993; Borges, Roditi, 1998; Tsallis и др., 1998; Tsallis, 2009; Plastino and Plastino, 1997; Tirnakli, Torres, 2000; Lenzi, Mendes, 2001; Abe, 2001; Зарипов, 2002, 2010; Gell-Mann, Tsallis, 2004; Wada, Scarfone, 2005; Scarfone, Wada, 2007; Hanel и др., 2009). Важным преимуществом неэкстенсивных статистик по сравнению с классической статистикой Больцмана−Гиббса является асимптотический степенной закон распределения вероятностей (проявляющийся при максимизации соответствующих параметрических энтропий), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса.

Вместе с тем следует заметить, что неэкстенсивные статистики (например, статистики Тсаллиса и Реньи) представляет собой все же обобщение, а не альтернативу классической статистике Больцмана−Гиббса, поскольку они распространяют область применимости стандартной статистической теории на неэкстенсивные системы только путем расширения математической формы их энтропийного функционала (см., например, Колесниченко, 2018 a-d).

В настоящее время теории неэкстенсивных сложных систем существенно развиваются в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения (см. Библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. -cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется). Каждая теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются не гиббсовыми (не гауссовыми), а степенными распределениями. В частности, неэкстенсивная статистика Тсаллиса (Хаврда−Чарват−Дароши) успешно применяется ко многим сложным системам, начиная от нелинейных диффузионных уравнений (Plastino и др., 2000), обобщенных кинетических уравнений (Boghosian, 1999; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), систем Фоккера-Планка (Frank, Daffertshofer, 2001b), H-теоремы Больцмана (Mariz, 1992; Ramshaw, 1993a,b; Shiino, 1998; Frank, Daffertshofer, 2001a; Зарипов, 2002,2010), удельной теплоемкости гармонического осциллятора (Ito, Tsallis, 1989), квантовой статистики (Büyükkılıç и др., 1995), до изучения космических систем с дальним силовым взаимодействием (Chavanis, Delfini, 2009; Колесниченко, 2016), межзвездной турбулентности и теории фракталов (Esquivel, Lazarian, 2010; Колесниченко, 2018c), эволюции астрофизических дисков (Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014; Колесниченко, 2015, 2017, 2019), скорости солнечного звука (Du, 2006), релаксации спинового стекла (Pickup и др., 2009), городской транспортной системы (Kolesnichenko, 2014), биофизики, экономики, нейрофизики и многое другое.

Среди множества малых систем особую важность имеют малые квантовые системы, основанные на неаддитивной параметрической энтропии Тсаллиса $S_q(\hat{\rho})$, связанной с матрицей плотности $\hat{\rho}$, описывающей различные квантовые состояния. При изучении подобных систем возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. В их числе, одной из значительных, является проблема построения термодинамики квантово-механических ансамблей в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса.

В данной главе для описания квантовой физической системы мы воспользуемся формализмом матрицы (оператора) плотности, с помощью которого наиболее удобно описывать системы, квантовые состояния которых известны не полностью (см. Ландау, Лифшиц, 2006; фон Нейман, 1964; Нильсон, Чанг, 2006; Кулик и др., 2008). Кроме этого, следуя фон Нейману (1964, (стр. 266)), будем использовать обычный формализм феноменологической термодинамики, при этом роль квантовой механики сведется лишь к тому, что наше рассмотрение будет относиться к квантово-механическим объектам − правильность же обоих основных начал термодинамики предполагается. С учетом этого будет показано, как можно получить равновесную статистическую термодинамику неэкстенсивных систем и определить ее свойства на основе двух функционалов − квантовой параметрической энтропии Тсаллиса $S_q(\hat{\rho})$ и обобщенной квантовой относительной энтропии (квантовой различающей информации Ратье−Каннаппана). Это исследование будет базироваться на степенном равновесном распределении матрицы плотности, полученном из условия абсолютного экстремума энтропии $S_q(\hat{\rho})$ при заданности средней энергии и среднего числа частиц для ансамбля квантовых систем, а также на осреднении его случайных динамических параметров (наблюдаемых) по эскортному распределению. Будет получено обобщение на квантовый случай нулевого закона термодинамики для двух независимых подсистем при их тепловом контакте и введена так называемая физическая температура, отличная от инверсии множителя Лагранжа β.

При ее использовании, с привлечением обобщенного первого закона термодинамики и преобразования Лежандра, будут найдены модифицированные термодинамические соотношения, отличные от выведенных «обычным» для статистики способом. И, наконец, на основе функционала для квантовой относительной энтропии, обобщенного на неэкстенсивные системы, будет обсуждаться второй закон термодинамики, будут исследованы спонтанные переходы между произвольными состояниями сложной квантовой системы и доказана H-теорема Больцмана в рамках неэкстенсивной квантовой статистики.

7.1. Основные определения и статистические свойства квантовой энтропии Тсаллиса для неэкстенсивных систем

Приступим теперь к основной цели данной работы – конструированию равновесной термодинамики квантово-механических ансамблей, основанной на обобщенной неэкстенсивной статистке Тсаллиса. В основу изучения различных статистических квантовых ансамблей неэкстенсивных систем можно положить экстремальные свойства квантовой информационной энтропии (введенной впервые в работе (Wehrl, 1978)) и использовать их для нахождения различных матриц плотности (заменяющих функцию распределения вероятностей в классической статистике). Отметим, кстати, что при обобщении ансамблей Гиббса на случай квантовой статистики фон Нейман исходил именно из экстремальных свойств введенной им энтропии квантового состояния $S(\hat{\rho}) \equiv -\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\right)$ (см. фон Нейман, 1964), где $\hat{\rho}$ − матрица (оператор[15)]) плотности микросистемы, при помощи формализма которой, согласно теореме Глисона (Gleason, 1957), описывается любая квантово-механическая система (см. также, Ландау, Лифшиц, 2006).

В квантовой неэкстенсивной статистике при вероятностной нормировке

$$\mathbf{Sp}\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 1, \tag{7.1}$$

[15)] Далее операторы будем обозначать буквой со «шляпкой» над ней.

матрицы плотности $\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_r w_r \psi_r(\mathbf{x}) \psi_r^*(\mathbf{x}')$ (в матричном $\mathbf{x}$-представ-лении (см. Приложение А)), описывающей смешанные квантовые состояния, квантовая информационная энтропия Тсаллиса $S_q(\hat{\rho})$ задается следующим обобщенным функционалом от оператора плотности (см. Daroczy, 1970; Wehrl, 1978; Tsallis, 1988):

$$S_q(\hat{\rho}) \equiv \frac{1}{q-1} \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho} - \hat{\rho}^q\right). \tag{7.2}$$

Здесь энтропийный индекс q (параметр деформации) представляет собой вещественное число (принадлежащее областисти $q \in \mathcal{R}$), которое характеризует неэкстенсивную особенность (неаддитивность) квантовой системы. Заметим, что шпуровая (-trace) структура определения энтропии (2) важна тем, что делает энтропию функционально независимой от унитарных преобразований в пространстве состояний, т.е. эта формула справедлива при любом представлении оператора $\hat{\rho}$, а не только при его матричном $\mathbf{x}$-представлении (см., например, Зубарев и др., 2002).

Можно показать, что параметрическая квантовая энтропия (7.2) может быть представлена также в следующих эквивалентных формах:

$$S_q(\hat{\rho}) = -\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^q \ln_q \hat{\rho}\right) = -\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho} \operatorname{Ln}_q \hat{\rho}\right) \equiv -\left\langle \operatorname{Ln}_q \hat{\rho} \right\rangle_1 . \tag{7.2*}$$

Здесь

$$\ln_q \hat{A} \equiv \frac{\hat{A}^{1-q} - 1}{1-q}, \qquad \operatorname{Ln}_q \hat{A} \equiv \frac{\hat{A}^{q-1} - 1}{q-1} = \hat{A}^{q-1} \ln_q \hat{A} \tag{7.3}$$

– так называемые деформированные логарифмы (Tsallis, 1999, 2009), обладающие, как легко убедиться, следующим свойством: при $q \to 1$, $\ln_q \hat{A} \to \ln \hat{A}$, $\operatorname{Ln}_q \hat{A} \to \ln \hat{A}$. При его использовании энтропия Тсаллиса $S_q(\hat{\rho}) = -\mathbf{Sp}(\hat{\rho}^q \ln_q \hat{\rho})$ переходит в классическую квантовую энтропию фон Неймана $S_1(\hat{\rho}) \equiv -\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\right)$, являющуюся, в свою очередь, квантовым обобщением энтропии Гиббса в классической статистической механике.

В обычной квантовой статистике любой случайной динамической переменной A ставится в соответствие эрмитов оператор $\hat{A}$ (см. фон Нейман, 1964) так, что среднее значение этой переменной в состоянии микросистемы, описываемом матрицей плотности $\hat{\rho}$, вычисляется по формуле: $\langle A\rangle_1 = \mathbf{Sp}(\hat{\rho}\hat{A})$. В неэкстенсивной квантовой статистике Тсаллиса для вычисления среднего значения $\langle\hat{A}\rangle_q$ динамической переменной $\hat{A}$ и ее флуктуации $\Delta_q\hat{A}$ можно использовать различные формулировки (см., например, Tsallis, 2009). Далее мы воспользуемся следующим их определением:

$$\langle\hat{A}\rangle_q \equiv \mathbf{Sp}(\hat{P}_q\hat{A}) = \frac{\mathbf{Sp}(\hat{\rho}^q\hat{A})}{\mathbf{Sp}\hat{\rho}^q}, \quad \Delta_q\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_q, \quad \mathbf{Sp}(\hat{\rho}^q\Delta_q\hat{A}) = 0, \qquad (7.4)$$

где

$$\hat{P}_q(\mathbf{x}) \equiv \hat{\rho}^q / \mathbf{Sp}(\hat{\rho}^q), \qquad (7.5)$$

– так называемое нормированное эскортное распределение (Abe, 2000c), для которого $\mathbf{Sp}(\hat{P}_q) = 1$.

Неаддитивность q-энтропии Тсаллиса для независимых систем. Энтропия (7.2) имеет много полезных свойств. Покажем сначала, что для независимых квантовых физических систем она неаддитивна. Действительно, пусть состояние системы, состоящей из двух подсистем, описывается совместным мультипликативным статистическим оператором $\hat{\rho}^{(1,2)} \equiv \hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}$, где $\hat{\rho}^{(1)}$ и $\hat{\rho}^{(2)}$ – операторы плотности отдельных подсистем (здесь и далее символом $\otimes$ обозначено матричное произведение). Тогда энтропии отдельных подсистем и общая энтропия системы задаются следующими выражениями:

$$S_q^{(1)} \equiv S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right) = \frac{1}{q-1}\left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1)}\right)^q\right],$$

$$S_q^{(2)} = S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\right) = \frac{1}{q-1}\left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(2)}\right)^q\right],$$

$$S_q^{(1,2)} = S_q\left[\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right] = \frac{1}{q-1}\left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1,2)}\right)^q\right] = \frac{1}{q-1}\left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right)^q\right], \qquad (*)$$

при условии нормировки

$$\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1,2)}\right) = \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1)}\right) = \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(2)}\right) = 1.$$

Используя (*), получим, с учетом соотношения
$\mathbf{Sp}(\hat{A} \otimes \hat{B}) = \mathbf{Sp}(\hat{A})\mathbf{Sp}(\hat{B})$, следующее выражение

$$(q-1)S_q^{(1)}S_q^{(2)} = \frac{1}{q-1}\left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1)}\right)^q\right] \times \left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(2)}\right)^q\right] =$$

$$= \frac{1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1)}\right)^q}{q-1} + \frac{1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(2)}\right)^q}{q-1} - \frac{1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(1)}\right)^q \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^{(2)}\right)^q}{q-1} =$$

$$= S_q^{(1)} + S_q^{(1)} - S_q^{(1,2)}.$$

Отсюда следует свойство неаддитивности энтропии двух независимых систем в квантовой статистике Тсаллиса

$$S_q\left(\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right) = S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right) + S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\right) + (1-q)S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right)S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\right). \qquad (7.6)$$

Таким образом, неаддитивная квантовая энтропия $S_q\left(\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right)$ является субэкстенсивным (суперэкстенсивным) функционалом при $q>1$ ($q<1$) и экстенсивным функционалом только в пределе слабой связи двух подсистем, когда $q \to 1$.

Заметим, однако, что эскортное осреднение приводит к свойству аддитивности для осредненной энергии совокупной квантовой системы

$$U_q^{(1,2)} = U_q^{(1)} + U_q^{(2)}, \text{ где } \quad U_q \equiv \langle \hat{H} \rangle_q = \mathbf{Sp}\left(\hat{P}_q \hat{H}\right).$$

Условная квантовая энтропия для неэкстенсивных систем. Пусть имеется квантовая система, которая описывается оператором плотности $\hat{\rho}^{(1,2)}$. И пусть теперь эта система состоит из двух зависимых подсистем «1» и «2». Согласно основным аксиомам, обосновывавшим единственность энтропии Тсаллиса для квантово-механического случая (см. Abe, 2000a), для двух зависимых квантовых систем «1» и «2» имеем следующее соотношение для энтропий

$$S_q(1,2) = S_q(1) + S_q(2|1) + (1-q)S_q(1)S_q(2|1) =$$

$$= S_q(2) + S_q(1|2) + (1-q)S_q(2)S_q(1|2), \qquad (7.6^*)$$

где условная энтропия $S_q(2|1) \equiv S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\middle|\hat{\rho}^{(1)}\right)$ с распределением оператора плотности $\hat{\rho}^{(1,2)}$ определяется следующим образом (Abe, 2002a; Abe, Rajagopal, 2000a,b)

$$S_q(2|1) = \frac{S_q(1,2) - S_q(1)}{1 + (1-q)S_q(1)}, \tag{7.6**}$$

$$\mathbf{Sp}_{I,II}\hat{\rho}^{(I,II)} = \mathbf{Sp}_I\hat{\rho}^{(I)} = \mathbf{Sp}_{II}\hat{\rho}^{(II)} = 1. \tag{7.6***}$$

В формулах (7.6**) и (7.6***) введены нижеследующие обозначения

$$S_q(1,2) = S_q\left(\hat{\rho}^{(1,2)}\right), \quad S_q(1) = S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right), \quad \hat{\rho}^{(1,2)} = \hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)},$$

где $\hat{\rho}^{(1)} = \mathbf{Sp}_2\hat{\rho}^{(1,2)}$ и $\hat{\rho}^{(1,2)} = \mathbf{Sp}_1\hat{\rho}^{(1,2)} \otimes \mathbf{Sp}_2\hat{\rho}^{(1,2)}$ – матрицы плотности подсистемы «1» (здесь символ $\mathbf{Sp}_2\hat{\rho}^{(1,2)}$ означает частичный след матрицы плотности $\hat{\rho}^{(1,2)}$ по квантовым числам, характеризующим подсистему «2») и совокупной матрицы плотности соответственно, и используется известное свойство матрицы плотности составной системы (фон Нейман, 1964)

$$\mathbf{Sp}(\hat{\rho}^{(1,2)}) = \mathbf{Sp}_1\left(\mathbf{Sp}_2(\hat{\rho}^{(1,2)})\right) = \mathbf{Sp}_2\left(\mathbf{Sp}_1(\hat{\rho}^{(1,2)})\right).$$

При $q=1$ соотношение (7.6*) совпадает с соответствующим равенством в классической статистической механике Больцмана−Гиббса (см. Закиров, 2002,2010).

Экстремальность большого канонического распределения для неэкстенсивных квантовых систем. Прежде всего, отметим, что различные статистические ансамбли квантовых систем (как и классических) эквивалентны в термодинамическом отношении, что связано, в частности, с малостью флуктуаций энергии, числа частиц и объема (см. Зубарев, 1971). Далее мы воспользуемся наиболее удобным для наших целей большим каноническим ансамблем квантовых систем, описывающим контакт с термостатом и резервуаром частиц и определяемым заданием средней энергии и среднего числа частиц.

Рассмотрим ансамбль систем с постоянным объемом, находящихся в тепловом и материальном контакте с окружением. Тогда матрица равновесной плотности $\hat{\hat{\rho}}(\mathbf{x})$ (статистический оператор равновесного распределения) может быть определена из абсолютного экстремума квантовой информационной энтропии Тсаллиса (7.2) при выполнении следующих дополнительных условий:

$$\langle\hat{H}\rangle_q \equiv U_q = \mathbf{Sp}\left(\hat{P}_q\hat{H}\right) = const\,, \quad \langle\hat{N}\rangle_q \equiv N_q = \mathbf{Sp}\left(\hat{P}_q\hat{N}\right) = const\,, \tag{7.7}$$

т.е. при заданности осредненных операторов плотности энергии $\hat{H}(\mathbf{x})$ и полного числа частиц $\hat{N}(\mathbf{x})$ и при сохранении нормировки (7.1).

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), равновесная матрица плотности $\hat{\hat{\rho}}$, «экстремизирующая» энтропию Тсаллиса S_q при указанных ограничениях, определяется из условия равенства нулю первой вариации по $\hat{\rho}$ следующего лагранжиана

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) \equiv -\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}\,\mathrm{Ln}_q\,\hat{\rho}\right) - \beta\frac{\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^q\hat{H}\right)}{c_q} + \beta\mu\frac{\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^q\hat{N}\right)}{c_q} - \lambda\mathbf{Sp}\hat{\rho}\,. \tag{7.8}$$

Здесь

$$c_q \equiv \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^q\right) \tag{7.9}$$

– так называемый коэффициент Тсаллиса; $\beta, (\beta\mu)$ и λ – определяемые из уравнений (7.1) и (7.7) лагранжевы множители, которые связаны с ограничением на осредненные операторы плотности энергии и полного числа частиц квантовой системы в неаддитивной статистике Тсаллиса; при этом величина параметра μ имеет смысл химического потенциала квантовых частиц.

Определяя абсолютный экстремум функционала (7.8) из условия $\delta\mathcal{L}(\hat{\rho})/\delta\hat{\rho} = 0$, находим для неэкстенсивных квантовых систем следующее выражение для обобщенного большого канонического распределения оператора плотности $\hat{\hat{\rho}}(\mathbf{x},\beta_q)$:

$$\hat{\hat{\rho}}(\mathbf{x},\beta_q) = \frac{1}{\tilde{Z}_q(\beta)}\left\{1-(1-q)\beta_q\left[\left(\hat{H}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)-\mu\left(\hat{N}(\mathbf{x})-\tilde{N}_q\right)\right]\right\}^{1/(1-q)} =$$

$$= \tilde{Z}_q^{-1} \exp_q \left\{ -\beta_q \left[\left(\hat{H}(\mathbf{x}) - \tilde{U}_q \right) - \mu \left(\hat{N}(\mathbf{x}) - \tilde{N}_q \right) \right] \right\}, \tag{7.10}$$

где

$$\tilde{Z}_q(\beta_q) = \mathbf{Sp} \left\{ \exp_q \left[-\beta_q \left((\hat{H} - \tilde{U}_q) - \mu(\hat{N} - \tilde{N}_q) \right) \right] \right\} \tag{7.11}$$

– обобщенная статистическая сумма состояний для большого квантового ансамбля, определяемая из условия нормировки (7.1); параметр $\beta_q \equiv \beta / \tilde{c}_q$ является (как будет показано ниже) обратной физической температурой равновесной квантовой системы, $T_{pf} \equiv 1/\beta_q$;

$$\tilde{c}_q \equiv \mathbf{Sp}\left(\hat{\tilde{\rho}}^q \right) = \mathbf{Sp} \left\{ \exp_q \left[-\beta_q \left((\hat{H} - \tilde{U}_q) - \mu(\hat{N} - \tilde{N}_q) \right) \right] \right\}^q / (\tilde{Z}_q)^q \tag{7.12}$$

– значение коэффициента Тсаллиса в равновесном случае; знак тильды «$\sim$» здесь и далее над осредненными динамическими переменными $\hat{A}$ означает, что осреднение проведено с помощью равновесного распределения (7.10).

Экспонента Тсаллиса и деформированный логарифм. В формуле (7.10) используется так называемая деформированная экспонента Тсаллиса

$$\exp_q \hat{A} = \begin{cases} \left[1 + (1-q)\hat{A} \right]^{1/(1-q)}, \text{если} \quad \mathrm{Spec}\left[1 + (1-q)\hat{A} \right] \geq 0; \\ \qquad 0, \quad \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{7.13}$$

причем неравенство $\mathrm{Spec}\left[1 + (1-q)\hat{A} \right] \geq 0$ означает, что существует естественное «отключение», когда спектр оператора в скобках имеет отрицательные значения, связанные с действительностью следа.

Легко проверить, что в пределе $q \to 1$ функция (7.12) принимает стандартный вид:

$$\exp_1 \hat{A} \equiv \lim_{q \to 1+0} \exp_q \hat{A} = \lim_{q \to 1-0} \exp_q \hat{A} = \exp \hat{A} \quad (\forall x). \tag{17.4}$$

Используя определения (7.3) и (7.12), можно убедиться, что имеют место следующие соотношения для деформированной экспоненты (см., например, Tsallis, 2009):

$$\exp_q(\ln_q \hat{A}) = \ln_q(\exp_q \hat{A}) = \hat{A} \quad (\forall x; \forall q), \tag{7.15}$$

$$(\exp_q \hat{A})(\exp_q \hat{B}) = \exp_q \left[\hat{A} + \hat{B} + (1-q)\hat{A}\hat{B} \right], \tag{7.16}$$

$$d\exp_q \hat{A} / d\hat{A} = (\exp_q \hat{A})^q. \tag{7.17}$$

Соответственно для деформированного логарифма $\ln_q \hat{A}$ имеем:

$$\ln_q(\hat{A}\hat{B}) = \ln_q \hat{A} + \ln_q \hat{B} + (1-q)(\ln_q \hat{A})(\ln_q \hat{B}), \tag{7.18}$$

$$\ln_q \hat{A}^{-1} = -\hat{A}^{q-1} \ln_q \hat{A}, \quad \ln_q(\hat{B}\hat{A}^{-1}) = \hat{A}^{q-1}(\ln_q \hat{B} - \ln_q \hat{A}), \tag{7.19}$$

$$d\ln_q \hat{A} / d\hat{A} = 1 / \hat{A}^q. \tag{7.20}$$

Эти формулы будут использованы далее.

Некоторые свойства равновесного распределения. Из распределения (7.10) следует соотношение

$$\left(\hat{\tilde{\rho}}\tilde{Z}_q\right)^{1-q} = 1-(1-q)\beta_q\left[\Delta_q\hat{H} - \mu\Delta_q\hat{N}\right]. \tag{7.21}$$

Если умножить (7.21) на $\hat{\tilde{\rho}}^q$ и затем взять шпур, то получим равенство

$$(\tilde{Z}_q)^{1-q}\mathbf{Sp}(\hat{\tilde{\rho}}) = \mathbf{Sp}\left\{\hat{\tilde{\rho}}^q\left[1-(1-q)\beta_q\left(\Delta_q\hat{H} - \mu\Delta_q\hat{N}\right)\right]\right\} = \mathbf{Sp}(\hat{\tilde{\rho}}^q), \tag{7.22}$$

из которого, при учете (7.1) и (7.7), следует важное представление для «равновесного» коэффициента Тсаллиса

$$\tilde{c}_q \equiv \mathbf{Sp}(\hat{\tilde{\rho}}^q) = (\tilde{Z}_q)^{1-q} = 1+(1-q)\tilde{S}_q. \tag{7.23}$$

Используя (7.23) и вытекающее из формулы (7.10) выражение

$$\tilde{c}_q \equiv \mathbf{Sp}(\hat{\tilde{\rho}}^q) = (\tilde{Z}_q)^{-q}\mathbf{Sp}\left\{\exp_q\left[-\beta_q\left(\Delta_q\hat{H} - \mu\Delta_q\hat{N}\right)\right]\right\}^q, \tag{7.24}$$

получим еще одно представление обобщенной статистической суммы

$$\tilde{Z}_q(\beta,\mu)=\mathbf{Sp}\left\{\exp_q\left[-\beta_q\left(\Delta_q\hat{H}-\mu\Delta_q\hat{N}\right)\right]\right\}^q . \tag{7.25}$$

Далее квантово-механическая флуктуация $\Delta_q\hat{A}$ равновесного значения переменной (наблюдаемой) $\hat{A}$ будет задаваться соотношением

$$\Delta_q\hat{A}\equiv\hat{A}-\mathbf{Sp}(\hat{\tilde{P}}_q\hat{A}), \tag{7.26}$$

где равновесное экскортное распределение $\hat{\tilde{P}}_q$ определяется, как легко можно убедиться, формулой

$$\hat{\tilde{P}}_q(\mathbf{x},\beta_q,\mu)=\left\{\exp_q\left[-\beta_q\left(\Delta_q\hat{H}-\mu\Delta_q\hat{N}\right)\right]\right\}^q / \tilde{Z}_q(\beta_q,\mu), \tag{7.27}$$

где

$$\tilde{Z}_q(\beta_q,\mu)=\mathbf{Sp}\left\{\exp_q\left[-\beta_q\left(\Delta_q\hat{H}-\mu\Delta_q\hat{N}\right)\right]\right\}=$$

$$=\mathbf{Sp}\left\{\exp_q\left[-\beta_q\left(\Delta_q\hat{H}-\mu\Delta_q\hat{N}\right)\right]\right\}^q .$$

Наконец, при использовании распределения (7.27) и формулы (7.25) можно получить следующую форму записи для среднего значения $\tilde{A}_q\equiv\mathbf{Sp}\left(\hat{\tilde{P}}_q\hat{A}\right)$ любой наблюдаемой $\hat{A}$ в равновесной квантовой системе

$$\tilde{A}_q=\frac{\mathbf{Sp}\left\{\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{H}+(\mu\beta_q)\Delta_q\hat{N}\right)\right]^q\hat{A}\right\}}{\tilde{Z}_q}=$$

$$=\frac{\mathbf{Sp}\left\{\hat{A}\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{H}+(\mu\beta_q)\Delta_q\hat{N}\right)\right]^q\right\}}{\mathbf{Sp}\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{H}+(\mu\beta_q)\Delta_q\hat{N}\right)\right]^q} . \tag{7.28}$$

Экстремальность большого канонического распределения для неэкстенсивных квантовых систем. Заметим, что экстремальные свойства всех квантовых неэкстенсивных ансамблей можно получить из следующих неравенств:

$$\mathbf{Sp}\left[\hat{\sigma}\,\mathrm{Ln}_q\,\hat{\sigma}\right]-\mathbf{Sp}\left[\hat{\sigma}\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\right)^{q-1}\mathrm{Ln}_q\,\hat{\rho}\right]\begin{matrix}\geq 0, & \text{если} & q>0;\\ \leq 0, & \text{если} & q<0,\end{matrix} \tag{7.29}$$

где $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ − произвольные статистические операторы.

Действительно, поскольку для числа $r>0$ имеем (см. теорему №42 в монографии (Харди и др., 1948))

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}_q\, r=\frac{r^{q-1}-1}{q-1}&\geq 1-1/r, \quad \text{если}\, q>0,\\ &=1-1/r, \quad \text{если}\, q=0,\\ &\leq 1-1/r, \quad \text{если}\, q<0,\end{aligned} \tag{7.30}$$

то, подставляя в (7.30) $r\equiv\hat{\sigma}\hat{\rho}^{-1}$ (где $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ − положительно определенные операторы) и усредняя полученное выражение по распределению $\hat{\sigma}$, получим, например, для $q>0$ неравенство

$$\mathbf{Sp}\left\{\hat{\sigma}\,\mathrm{Ln}_q\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\right)\right\}\geq\mathbf{Sp}\left\{\hat{\sigma}\left(1-\frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}}\right)\right\}=1-1=0, \tag{7.31}$$

так как оба оператора $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ нормированы на единицу и операторы под знаком шпура перестановочны. Воспользовавшись формулой (7.19), будем иметь

$$\mathrm{Ln}_q\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\right)=\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\right)^{q-1}\mathrm{ln}_q\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\right)=\hat{\sigma}^{q-1}(\mathrm{ln}_q\,\hat{\sigma}-\mathrm{ln}_q\,\hat{\rho})=\mathrm{Ln}_q\,\hat{\sigma}-\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\rho}}\right)^{q-1}\mathrm{Ln}_q\,\hat{\rho}. \tag{7.32}$$

Подставляя теперь это соотношение в неравенство (7.31), получим «верхнее» неравенство (7.29).

Используя аналогичный метод, легко убедиться в том, что при $q<0$ имеет место «нижнее» неравенство (7.29).

Максимум (минимум) равновесной энтропии Тсаллиса. Докажем теперь, что в случае квантовой неэкстенсивной статистики экстремум функционала (7.8), т.е. большое каноническое распределение $\hat{\mathring{\rho}}$, соответствует максимуму (минимуму) квантовой энтропии Тсаллиса

$S_q(\hat{\rho}) = -\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}\operatorname{Ln}_q \hat{\rho}\right)$ соответственно при $q > 0$ $(q < 0)$ среди всех вероятностных распределений с одинаковыми средней энергией и среднем числом частиц.

Пусть $\hat{\tilde{\rho}}$ − большое каноническое распределение, а $\hat{\sigma}$ − нормированный статистический оператор, соответствующий той же средней энергии и среднему числу частиц, как и (7.10), а в остальном − произвольный. При подстановке (7.10) в неравенство (7.29), можно получить

$$S_q(\hat{\sigma}) \equiv -\mathbf{Sp}\left(\hat{\sigma}\operatorname{Ln}_q \hat{\sigma}\right) \le -\mathbf{Sp}\left[\hat{\sigma}\left(\hat{\sigma}/\hat{\tilde{\rho}}\right)^{q-1}\operatorname{Ln}_q \hat{\tilde{\rho}}\right] \le S_q(\hat{\tilde{\rho}}). \qquad (7.33)$$

Действительно, поскольку $\operatorname{Ln}_q \hat{A} = \hat{A}^{q-1}\ln_q \hat{A}$, то, с учетом (7.15) и (7.19), будем иметь

$$\operatorname{Ln}_q \hat{\tilde{\rho}} = \operatorname{Ln}_q\left\{\frac{1}{\tilde{Z}_q}\exp_q\left[-\beta_q\left((\Delta_q\hat{H} - \mu\Delta_q\hat{N})\right)\right]\right\} =$$

$$= \operatorname{Ln}_q \exp_q\{..\} - \left(\exp_q\{..\}\right)^{q-1}\tilde{Z}_q^{\,1-q}\operatorname{Ln}_q \tilde{Z}_q =$$

$$= \left(\exp_q\{..\}\right)^{q-1}\{..\} - \left(\exp_q\{..\}\right)^{q-1}\ln\tilde{Z}_q = \left(\exp_q\{..\}\right)^{q-1}\left[\{..\} - S_q(\hat{\tilde{\rho}})\right],$$

откуда следует

$$-\mathbf{Sp}\left\{\hat{\sigma}\left(\hat{\sigma}/\hat{\tilde{\rho}}\right)^{q-1}\operatorname{Ln}_q \hat{\tilde{\rho}}\right\} = -\mathbf{Sp}\left\{\hat{\sigma}^q\hat{\tilde{\rho}}^{1-q}\left(\exp_q\{..\}\right)^{q-1}\left[\{..\} - S_q(\hat{\tilde{\rho}})\right]\right\} =$$

$$= -\mathbf{Sp}\left\{\hat{\sigma}^q\left[\{..\} - S_q(\hat{\tilde{\rho}})\right]\right\}\tilde{Z}_q^{q-1} = S_q(\hat{\tilde{\rho}}).$$

(7.34)

Таким образом, большое каноническое распределение (7.10) соответствует максимуму квантовой информационной энтропии Тсаллиса при $q > 0$ среди всех вероятностных распределений с одинаковыми средней энергией и среднем числом частиц. Используя аналогичный метод, легко убедиться в том, что при подстановке (7.10) в неравенство (7.29) получается, что распределение (7.10) соответствует минимуму энтропии Тсаллиса при $q<0$.

Большое каноническое распределение квантовых систем и термодинамические соотношения в q-статистике. До сих пор мы рассматривали квантовые неэкстенсивные системы, состоящие лишь из одного сорта частиц. Легко обобщить большое каноническое распределение (7.10) на системы, состоящие из нескольких сортов частиц N_j, а также если заданы средние значения каких-либо других динамических величин $\hat{A}_k$,

$$\langle \hat{A}_k(\mathbf{x})\rangle_q \equiv \mathbf{Sp}\left(\hat{P}_q \hat{A}_k\right) = A_{qk} = const\,, \quad (k=1,2,\ldots,R). \tag{7.35}$$

Можно представить себе, что система находится в тепловом и материальном контакте с большими резервуарами частиц разных сортов M и энергий с помощью полупроницаемых перегородок, пропускающих лишь один сорт молекул. Используя (7.7) и (7.7*), легко показать, что статистический оператор такого квантового ансамбля будет иметь вид

$$\hat{\tilde{\rho}}(\mathbf{x},\beta_q) = \tilde{Z}_q^{-1} \exp_q\left\{-\beta_q\left[\Delta_q \hat{H}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{R} a_k \Delta_q \hat{A}_k(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{M} \mu_j \Delta_q \hat{N}_j(\mathbf{x})\right]\right\}, \tag{7.36}$$

где

$$\tilde{Z}_q(\beta_q, a_k, \mu_j) \equiv \mathbf{Sp}\left\{\exp_q\left[-\beta_q\left(\Delta_q \hat{H}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{R} a_k \Delta_q \hat{A}_k(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{M} \mu_j \Delta_q \hat{N}_j(\mathbf{x})\right)\right]\right\}.$$

Здесь μ_j — химические потенциалы частиц сорта j; a_k – новые термодинамические параметры, определяемые из условий (7.7*).

Подставляя распределение (7.10) в (7.2), получим, при использовании (7.23), следующее выражение для равновесной энтропии Тсаллиса для большого канонического ансамбля квантовых систем:

$$\tilde{S}_q = -\mathbf{Sp}\left(\hat{\tilde{\rho}} \,\mathrm{Ln}_q \hat{\tilde{\rho}}\right) = -\frac{1-\mathbf{Sp}\left(\hat{\tilde{\rho}}^q\right)}{1-q} = -\frac{1-\tilde{c}_q}{1-q} = \frac{(\tilde{Z}_q)^{1-q}-1}{1-q} = \ln_q \tilde{Z}_q\,. \tag{7.37}$$

Определим теперь деформированный большой термодинамический потенциал в квантовой статистике Тсаллиса следующим соотношением:

$$\tilde{\Omega}_q \equiv \tilde{U}_q - \frac{1}{\beta}\tilde{S}_q - \mu\tilde{N}_q = \tilde{U}_q - \frac{1}{\beta}\frac{(\tilde{Z}_q)^{1-q} - 1}{1-q} - \mu\tilde{N}_q. \qquad (7.38)$$

При дифференцировании энтропии $\tilde{S}_q$ по $\tilde{U}_q$ в результате будем иметь

$$\partial\tilde{S}_q / \partial\tilde{U}_q = \partial \ln_q \tilde{Z}_q / \partial\tilde{U}_q = \beta. \qquad (7.39)$$

Действительно, используя формулы (7.17) и (7.20), а также соотношения (7.11) и (7.25), получим

$$\frac{\partial\tilde{S}_q}{\partial\tilde{U}_q} = \frac{\partial \ln_q \tilde{Z}_q}{\partial\tilde{Z}_q}\frac{\partial\tilde{Z}_q}{\partial\tilde{U}_q} = \tilde{Z}_q^{-q}\frac{\partial\tilde{Z}_q}{\partial\tilde{U}_q} = \tilde{Z}_q^{-q}\,\mathrm{Sp}\frac{\partial \exp_q\{..\}}{\partial\{..\}}\frac{\partial\{..\}}{\partial\tilde{U}_q} =$$

$$= \tilde{Z}_q^{-q}\,\mathrm{Sp}\left\{\exp_q\{..\}\right\}^q \frac{\partial\{..\}}{\partial\tilde{U}_q} = \tilde{Z}_q^{1-q}\frac{\beta}{\tilde{c}_q} = \beta.$$

Аналогичным путем получим

$$\partial\tilde{S}_q / \partial\tilde{N}_q = -\beta\mu_\alpha, \quad (\alpha = 1,\ldots,M). \qquad (7.40)$$

В итоге, справедливы следующие обобщенные соотношения равновесной термодинамики квантовых неэкстенсивных систем

$$\tilde{S}_q = \ln_q \tilde{Z}_q, \quad \tilde{\Omega}_q = \tilde{U}_q - \frac{1}{\beta}\tilde{S}_q - \mu\tilde{N}_q, \qquad (7.41)$$

$$\frac{\partial\tilde{S}_q}{\partial\tilde{U}_q} = \frac{\partial}{\partial\tilde{U}_q}(\ln_q \tilde{Z}_q) = \beta, \quad \frac{\partial\tilde{S}_q}{\partial\tilde{N}_q} = -\beta\mu, \qquad (7.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta\tilde{\Omega}_q) = \tilde{U}_q, \quad \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}(\beta\tilde{\Omega}_q) = -\tilde{N}_q. \qquad (7.43)$$

Здесь, однако, следует подчеркнуть, что величина $\tilde{Z}_q$ характеризуется микроскопическими энергией $\hat{H}(\mathbf{x})$ и числом частиц $\hat{N}_q$, вычисленными относительно средней энергии $\tilde{U}_q$ и среднего числа частиц $\tilde{N}_q$ соответственно. Если ввести новую статистическую сумму Z_q^*, которая определяется микроскопическими величинами $\hat{H}(\mathbf{x})$ и $\hat{N}_q$ относительно нулевой точки, согласно формуле

$$(Z_q^*)^{1-q} \equiv (\tilde{Z}_q)^{1-q} - \beta(1-q)\left(\tilde{U}_q - \mu\tilde{N}_q\right) \tag{7.44}$$

и переопределить квантовый большой потенцал выражением

$$\tilde{\Omega}_q^* = -\beta^{-1}\ln_q Z_q^*, \tag{7.45}$$

то соотношения (7.41)-(7.43) равновесной квантовой термодинамики принимают почти классическую форму

$$\tilde{S}_q = \beta\left(\tilde{U}_q - \mu\tilde{N}_q - \tilde{\Omega}_q^*\right), \tag{7.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln_q Z_q^*\right) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta\tilde{\Omega}_q^*\right) = -\tilde{U}_q\,, \tag{7.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}\left(\ln_q Z_q^*\right) = -\frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}\left(\beta\tilde{\Omega}_q^*\right) = \tilde{N}_q\,, \tag{7.48}$$

$$\frac{\partial\tilde{S}_q}{\partial\tilde{U}_q} = \beta, \quad \frac{\partial\tilde{S}_q}{\partial\hat{N}_q} = -\beta\mu\,. \tag{7.49}$$

Подчеркнем, что введенные выше соотношения обусловлены стандартной процедурой нахождения равновесного распределения матрицы плотности на основе принципа Джейнса экстремума квантовой параметрической энтропии Тсаллиса и потому применимы для весьма широкого круга квантовых аномальных явлений, описываемых неаддитивной статистической механикой.

7.2. Модифицированная статистическая термодинамика неэкстенсивных систем в квантовой статистике Тсаллиса

Принимая во внимание тот факт, что структура основных соотношений статистической термодинамики Гиббса существенно зависит от аддитивности классической энтропии, крайне важно выяснить, каким образом, в случае использования физической температуры T_{ph}

могут быть модифицированы аналогичные соотношения (7.40)-(7.43) в неаддитивной статистике Тсаллиса.

Термодинамическое равновесие двух независимых систем. Рассмотрим для этого термодинамическое равновесие двух независимых неэкстенсивных квантовых систем с энтропиями Тсаллиса $S_q^{(1)} \equiv S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right)$ и $S_q^{(2)} \equiv S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\right)$, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянными значениями совокупной энтропии $S_q^{(1,2)} \equiv S_q(\hat{\rho}^{(1,2)}) = const$ и совокупной осредненной энергии системы $U_q^{(1,2)} = U_q^{(1)} + U_q^{(2)} = const$.

Согласно свойству (7.6) неаддитивности q-энтропии Тсаллиса, совокупную энтропию квантовой системы можно записать в следующем виде

$$S_q^{(1,2)} = S_q^{(1)}\left[1 + \varepsilon S_q^{(2)}\right] + S_q^{(2)}\left[1 + \varepsilon S_q^{(1)}\right] - \varepsilon S_q^{(1)} S_q^{(2)}, \tag{7.50}$$

где $\varepsilon \equiv (1-q)$. Варьирование $\delta S_q^{(1,2)}$ и $\delta U_q^{(1,2)}$ для полной замкнутой системы с постоянными значениями энтропии $S_q^{(1,2)}$ и энергии $U_q^{(1,2)}$ приводит к равенству $\delta S_q^{(1,2)} = 0 = \delta S_q^{(1)}\left[1 + \varepsilon S_q^{(2)}\right] + \delta S_q^{(2)}\left[1 + \varepsilon S_q^{(1)}\right]$ для энтропии и равенству $\delta U_q^{(1,2)} = 0 = \delta U_q^{(1)} + \delta U_q^{(2)}$ для средней энергии. Объединяя их, в итоге получим уравнение

$$\frac{\delta S_q^{(1)} / \delta U_q^{(1)}}{1 + \varepsilon S_q^{(1)}} = \frac{\delta S_q^{(2)} / \delta U_q^{(2)}}{1 + \varepsilon S_q^{(2)}}, \tag{7.51}$$

или, с учетом (7.37) и (7.49),

$$\frac{\beta}{1 + (1-q) S_q^{(1)}} = \frac{\beta}{1 + (1-q) S_q^{(2)}} = \frac{\beta}{c_q} \equiv \beta_q. \tag{7.52}$$

Отношение эквивалентности (7.52) определяет условие теплового равновесия двух квантовых q-систем и является обобщением нулевого закона термодинамики на неаддитивные квантово-механические системы. Оно показывает, что в отличие от классического квантового случая $(q \to 1)$ физическая температура T_{ph} не является обратной величиной множителя Лагранжа, β^{-1}, но

$$T_{ph} \equiv \frac{1}{\beta_q} = \frac{c_q}{\beta} = \left(1 + \frac{1-q}{k_B} S_q\right) T = c_q T \,. \tag{7.53}$$

Очевидно, что квантовая физическая температура T_{ph}, отличная от инверсии множителя Лагранжа β, отвечает за «глобальный» энергетический (тепловой) баланс между различными частями неаддитивной квантовой системы, который сильно отличается от локального теплового баланса. Локальный баланс можно охарактеризовать общей температурой $T = 1/\beta$, измеряемой термометром, но любое измерение физической температуры T_{ph} связано с необходимостью вычисления коэффициента Тсаллиса $\tilde{c}_q$, зависящего от параметра неаддитивности q.

Таким образом, отличие физической температуры от инверсии множителя Лагранжа β с неизбежностью приводит к необходимости видоизменения полученных выше термодинамических соотношений (7.40)-(7.43) для неаддитивных квантовых систем. В работе (Abe, Okamoto, 2001) в качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения макроскопической термодинамики с физической температурой, предлагаются первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра.

Деформированные термодинамические равенства для канонического квантового ансамбля. Аналогично введенной выше физической температуре T_{ph} квантовой системы можно определить квантовое физическое давление P_q путем исследования механического равновесия двух независимых q-систем. В этом случае энтропия совокупной квантовой системы должна максимизироваться с фиксацией общего объема $V^{(1,2)} = V^{(1)} + V^{(2)} = const$. В результате будем иметь

$$\frac{\delta S_q^{(1)} / \delta V^{(1)}}{1+\varepsilon S_q^{(1)}} = \frac{\delta S_q^{(2)} / \delta V^{(2)}}{1+\varepsilon S_q^{(2)}} = \frac{P_{ph}}{T_{ph}}, \tag{7.54}$$

где P_{ph} − квантовое физическое давление, которое определяется соотношением

$$P_{ph} \equiv \frac{T_{ph}}{1+(1-q)S_q} \frac{\delta S_q}{\delta V} = \frac{T_{ph}}{c_q} \frac{\delta S_q}{\delta V}. \tag{7.55}$$

Очевидно, что определенные таким образом квантовые физическая температура и физическое давление обязательно должны привести к модификации определения термодинамической энтропии Клаузиуса.

Преобразования Лежандра. Уравнение (7.25) $\left(\beta = \partial S_q / \partial U_q\right)$ указывает на то, что параметры β и $U_q = U_q(S_q, P_{ph}, N)$ образуют пару переменных Лежандра. Это приводит к следующему определению большого термодинамического потенциала (см.(7.38)):

$$\Omega'_q(T,V,\mu) \equiv U_q - TS_q - \mu N_q = U_q - T\ln_q\left[c_q^{1/(1-q)}\right] - \mu N_q$$

(в этом разделе знак «тильды» будем опускать). Это выражение, однако, является неудовлетворительным, поскольку оно не написано с точки зрения физической температуры: термодинамический потенциал должен быть функцией T_{ph}, а не зависеть от абсолютной температуры T.

По аналогии с работой (Abe, 2000b), которой мы далее воспользуемся, переопределим большой термодинамический потенциал (7.38) следующим образом:

$$\Omega_q(T_{ph}, V, \mu_\alpha) = U_q - T_{ph}\ln\left[c_q^{1/(1-q)}\right] - \mu N_q. \tag{7.56}$$

При учете соотношений (7.23), (7.43) и (7.53) можно убедиться, что величина Ω_q на самом деле является функцией T_{ph}. Варьируя функцию Ω_q, в результате получим

$$\delta\Omega_q = \delta U_q - \frac{\ln c_q}{(1-q)}\delta T_{ph} - \frac{T_{ph}}{c_q}\delta S_q - \mu\,\delta N_q - N_q\delta\mu\,. \tag{7.57}$$

Если теперь использовать первый закон термодинамики в формулировке Каратеодори (Münster, 1969)

$$\delta' Q_q = \delta U_q + \delta' W_q = \delta U_q + P_{ph}\delta V - \mu\delta N_q, \tag{7.58}$$

где $\delta' Q_q$ и $\delta' W_q$ – малые изменения количества теплоты (так называемой некомпенсированной теплоты), подводимой к q-системе или отводимой от нее, и работы, которые определяются выражениями (Jarzynski, 1997, 2011; Abe, Rajagopal, 2003; Abe, 2006; Jarzynski, Wójcik, 2004)

$$\delta' Q_q \equiv \frac{\mathbf{Sp}\left[\delta\hat{\rho}^q(\hat{H} - U_q)\right]}{\mathbf{Sp}\hat{\rho}^q}, \quad \delta' W_q \equiv -\langle\delta\hat{H}\rangle_q = -\frac{\mathbf{Sp}(\hat{\rho}^q\delta\hat{H})}{\mathbf{Sp}\hat{\rho}^q}, \tag{7.59}$$

то (7.57) можно переписать в виде

$$\delta\Omega_q = \delta' Q_q - P_{ph} d\delta - \frac{\ln c_q}{(1-q)}\delta T_{ph} - \frac{T_{ph}}{c_q}\delta S_q - N_q\delta\mu\,. \tag{7.60}$$

Отсюда следует, что определение термодинамической энтропии Клаузиуса модифицируется для неаддитивных квантовых систем следующим образом:

$$\delta S_q = c_q \delta' Q_q \,/\, T_{ph}. \tag{7.61}$$

Введем теперь в рассмотрение следующие характеристические функции квантовой системы: обобщенную энтальпию $H_q(S_q, P_{ph}, N_\alpha) = \quad = U_q + P_{ph}V$, энергию Гельмгольца $F_q(T, V, N_\alpha) = U_q - T_{ph}\left[\ln c_q^{1/(1-q)}\right]$ и свободную энергию Гиббса $G_q(T, P_{ph}, N_\alpha) = F_q + P_{ph}V$. Заметим, что все характеристические функции обладают следующим свойством: если известна характеристическая функция, выраженная через соответствующие (свои для каждой характеристической функции) переменные, то из нее можно вычислить любую термодинамическую величину.

В этом нетрудно убедиться. Из уравнений

$$\delta U_q = (T_{ph} / c_q)\delta S_q - P_{ph}\delta V + \mu\delta N_q, \tag{7.62}$$

$$\delta H_q = (T_{ph} / c_q)\delta S_q + V\delta P_{ph} + \mu\delta N_q, \tag{7.63}$$

$$\delta F_q = -(1-q)^{-1}\ln c_q \delta T_{ph} - P_{ph}\delta V + \mu\delta N_q, \tag{7.64}$$

$$\delta G_q = -(1-q)^{-1}\ln c_q \delta T_{ph} + V\delta P_{ph} + \mu\delta N_q, \tag{7.65}$$

$$\delta\Omega_q = -(1-q)^{-1}\ln c_q \delta T_{ph} - P_{ph}\delta V - N_q\delta\mu \tag{7.66}$$

следуют обобщенные термодинамические соотношения

$$\left(\partial U_q / \partial V\right)_{S_q, N_\alpha} = \left(\partial F_q / \partial V\right)_{T_{ph}, N_\alpha} = -P_{ph}, \tag{7.67}$$

$$\left(\partial U_q / \partial S_q\right)_{V, N_\alpha} = \left(\partial H_q / \partial S_q\right)_{P_{ph}, N_\alpha} = T_{ph} / c_q, \tag{7.68}$$

$$\left(\partial H_q / \partial P_{ph}\right)_{S_q, N_\alpha} = \left(\partial G_q / \partial P_{ph}\right)_{T_{ph}, N_\alpha} = V, \qquad (7.69)$$

$$\left(\partial F_q / \partial T_{ph}\right)_{V, N_\alpha} = \left(\partial G_q / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}, N_\alpha} = -\ln c_q / (1-q). \qquad (7.70)$$

Уравнение для квантовых теплоемкостей. Как известно, в термодинамике теплоемкость вещества в наиболее общем виде определяется следующим образом: $C_z = T\left(\partial S / \partial T\right)_z$. Здесь C_z – теплоемкость в таком процессе, в котором сохраняется постоянным параметр z, где z– любые обобщенные координаты. Наиболее распространенными являются изобарная теплоемкость и изохорная теплоемкость:

$$C_{qp} = (T_{ph} / c_q)\left(\partial S_q / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}}, \quad C_{qV} = (T_{ph} / c_q)\left(\partial S_q / \partial T_{ph}\right)_V. \qquad (7.71)$$

Так как в соответствии с формулой $\left(\partial y / \partial x\right)_z = \left(\partial y / \partial u\right)_z \left(\partial u / \partial x\right)_z$, (справедливой для случая двух переменных, когда $y = y(x,z)$ и $u = u(x,z)$) имеем

$$\left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial S_q}{\partial H_q}\right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial H_q}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \text{ и } \left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_V = \left(\frac{\partial S_q}{\partial U_q}\right)_V \left(\frac{\partial U_q}{\partial T_{ph}}\right)_V, \qquad (7.72)$$

а из соотношений (7.68) и (7.70) следует, что $\left(\partial S_q / \partial H_q\right)_{P_{ph}} = c_q / T_{ph}$, $\left(\partial S_q / \partial U_q\right)_V = c_q / T_{ph}$, то (7.71) можно записать в виде

$$C_{qp} = \left(\partial H_q / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}}, \quad C_{qV} = \left(\partial U_q / \partial T_{ph}\right)_V. \qquad (7.73)$$

Уравнение, устанавливающее связь между теплоемкостями C_p и C_V, может быть получено следующим образом. В соответствии с соотношением (см. Сычев, 1991)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)_n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_n + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)_n, \qquad (7.74)$$

являющимся следствием выражения для полного дифференциала функции $z = z(x, y)$, можно записать (полагая $m = x$) равенство

$$\left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial S_q}{\partial T_{ph}}\right)_V + \left(\frac{\partial S_q}{\partial V}\right)_{T_{ph}} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}. \qquad (7.75)$$

Отсюда, используя уравнение Максвелла $(\partial S_q/\partial V)_{T_{ph}} = (\partial P_{ph}/T_{ph})_V$, получим

$$C_p - C_V = (T_{ph}/c_q^2)\left(\partial P_{ph}/\partial T_{ph}\right)_V \left(\partial V/\partial T_{ph}\right)_{P_{ph}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \qquad (7.76)$$

Это выражение можно представить в другом виде, если использовать связку трех производных $\left(\partial z/\partial x\right)_y \left(\partial x/\partial y\right)_z \left(\partial y/\partial z\right)_x = -1$ (следствие соотношения (7.74) при $m = x$, $n = z$ (Сычев, 1991)), из которой следует

$$\left(\partial P_{ph}/\partial T_{ph}\right)_V = -\left(\partial V/\partial T_{ph}\right)_{P_{ph}} \left(\partial P_{ph}/\partial V\right)_{T_{ph}}. \qquad (7.77)$$

С учетом (77) связь между теплоемкостями приобретает классический вид:

$$C_p - C_V = -(T_{ph}/c_q^2)\left(\partial V/\partial T_{ph}\right)^2_{P_{ph}} / \left(\partial V/\partial P_{ph}\right)_{T_{ph}}. \qquad (7.78)$$

Таким образом, стандартная форма термодинамических соотношений (7.68) и (7.73) для уравнения состояния и теплоемкости позволяет заключить, что они остаются инвариантными относительно неаддитивной модификации их классических аналогов. Подчеркнем важный факт, что температуры $T=1/\beta$ и $T_{ph}=1/\beta_q$ не зависят от выбора нуля энергий, и поэтому они допускают физическую интерпретацию. Заметим, что в дополнение к структуре Лежандра различные другие важные теоремы и свойства остаются q-инвариантными (см. Tsallis, 2009).

7.3. Квантовая относительная энтропия в статистике Тсаллиса. Обобщенная H-теорема Больцмана

Наряду с квантовой параметрической энтропией $S_q(\hat{\rho})$ обобщенная квантовая относительная энтропия (квантовая информация различия Ратье–Каннаппана (см. Abe, Rajagopal, 2003;Abe, 2004))

$$K_q(\hat{\rho}:\hat{\sigma}) \equiv \frac{1}{1-q}\Big[1-\mathbf{Sp}(\hat{\rho}^q\hat{\sigma}^{1-q})\Big] = \mathbf{Sp}\Big[\hat{\rho}\ln_q\Big(\hat{\sigma}\hat{\rho}^{-1}\Big)\Big] =$$

$$= \mathbf{Sp}\Big[\hat{\rho}^q(\ln_q\hat{\rho}-\ln_q\hat{\sigma})\Big] = -\mathbf{Sp}\Big(\hat{\rho}^q\ln_q\hat{\sigma}\Big) - S_q(\hat{\rho}) \tag{7.79}$$

относится к наиболее существенным статистическим характеристикам квантово-механической q-системы. Являясь функционалом, она характеризует переход системы от состояния с матрицей плотности $\hat{\rho}$ в состояние с матрицей $\hat{\sigma}$, когда статистические наблюдения ведутся относительно состояния $\hat{\rho}$.

Легко показать, что в пределе слабой связи $q\to 1$ величина $K_q(\hat{\rho}:\hat{\sigma})$ переходит в традиционную квантовую относительную энтропию матрицы $\hat{\sigma}$ по отношению к матрице $\hat{\rho}$ (или в квантовую различающую информацию Кульбака–Лейблера)

$$\lim_{q\to 1}K_q(\hat{\rho}:\hat{\sigma}) = K_1(\hat{\rho}:\hat{\sigma}) = \mathbf{Sp}\left[\hat{\rho}\left(\ln\frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}}\right)\right] = -\mathbf{Sp}\big[\hat{\rho}\ln\hat{\sigma}\big] - S_1(\hat{\rho}). \tag{7.80}$$

Действительно, в пределе $q\to 1$ имеем

$$\frac{1}{1-q}\left[1-\mathbf{Sp}(\hat\rho^q\hat\sigma^{1-q})\right]=\frac{1}{1-q}\mathbf{Sp}\left\{\hat\rho\left[1-\left(\hat\rho/\hat\sigma\right)^{q-1}\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{1-q}\mathbf{Sp}\left\{\hat\rho\left[1-\exp\ln\left(\hat\rho/\hat\sigma\right)^{q-1}\right]\right\}\simeq \tag{7.81}$$
$$\simeq\frac{1}{1-q}\mathbf{Sp}\left\{\hat\rho\left[1-1-(q-1)\ln\left(\hat\rho/\hat\sigma\right)\right]\right\}=\mathbf{Sp}\left\{\hat\rho\left[\ln\left(\frac{\hat\rho}{\hat\sigma}\right)\right]\right\}=K_1\left(\hat\rho:\hat\sigma\right).$$

Выпуклость обобщенной квантовой относительной энтропии. Покажем, что энтропия $K_q\left(\hat\rho:\hat\sigma\right)$является вещественным, выпуклым и положительным (отрицательным) функционалом с минимумом (максимумом) при $q>0$ $\left(q<0\right)$. Это можно сделать, используя квантовую относительную энтропию (79), преобразованную к виду

$$K_q\left(\hat\rho:\hat\sigma\right)=\mathbf{Sp}\left(\hat\rho\,\mathrm{Ln}_q\,\hat\rho\right)-\mathbf{Sp}\left[\hat\rho\left(\frac{\hat\rho}{\hat\sigma}\right)^{q-1}\mathrm{Ln}_q\,\hat\sigma\right]$$

и неравенства (29), записанные в виде

$$\mathbf{Sp}\left(\hat\rho\,\mathrm{Ln}_q\,\hat\rho\right)-\mathbf{Sp}\left[\hat\rho\left(\frac{\hat\rho}{\hat\sigma}\right)^{q-1}\mathrm{Ln}_q\,\hat\sigma\right]\begin{matrix}\geq 0, & \textit{если}\; q>0;\\ \leq 0, & \textit{если}\; q<0.\end{matrix}$$

В результате получим

$$K_q\left(\hat\rho:\hat\sigma\right)\geq 0,\quad \left(q\geq 0\right);\quad K_q\left(\hat\rho:\hat\sigma\right)\leq 0,\quad \left(q<0\right). \tag{7.82}$$

Таким образом, обобщенная квантовая относительная энтропия неотрицательна, т.е. функционал $K_q\left(\hat\sigma:\hat\rho\right)$ при $q>0$ удовлетворяет такому же обобщенному неравенству Клейна $K_1\left(\hat\rho:\hat\sigma\right)\geq 0$ (являющемуся квантовым аналогом неравенства Гиббса для информации различия Кульбака−Лейблера (см., например, Колесниченко, 2018а)), как и квантовая относительная энтропия фон Неймана ($K_1\left(\hat\rho:\hat\sigma\right)\geq 0$), а потому может использоваться для тех же целей. Однако в рассматриваемом случае имеется свобода выбора параметра деформации q, что позволяет адекватно исследовать неэкстенсивную квантовую систему.

При $\hat\rho\equiv\hat\sigma$ имеем равенство $K_q\left(\hat\rho:\hat\rho\right)=0$. Таким образом, квантовая информация различия Ратье−Каннаппана является знакоопределенной функцией Ляпунова.

Неаддитивность квантовой относительной энтропии для независимых систем. Пусть состояние физической квантовой системы описывается нормированными совместными распределениями операторов плотности $\hat{\rho}_{(1,2)} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ и $\hat{\sigma}_{(1,2)} = \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2$ при статистической независимости двух физических систем. Квантовые относительные энтропии для неэкстенсивных совокупной и отдельных систем определяются выражениями

$$K_q\left(\hat{\rho}_{(1,2)} : \hat{\sigma}_{(1,2)}\right) \equiv \frac{1}{1-q}\left[1 - \mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}_{(1,2)}^{q}\hat{\sigma}_{(1,2)}^{1-q}\right)\right], \tag{7.83}$$

$$K_q\left(\hat{\rho}_1 : \hat{\sigma}_1\right) \equiv \frac{1}{1-q}\left[1 - \mathbf{Sp}(\hat{\rho}_1^{q}\hat{\sigma}_1^{1-q})\right],$$

$$K_q\left(\hat{\rho}_2 : \hat{\sigma}_2\right) \equiv \frac{1}{1-q}\left[1 - \mathbf{Sp}(\hat{\rho}_2^{q}\hat{\sigma}_2^{1-q})\right], \tag{7.84}$$

где условия нормировки имеют вид

$$\mathbf{Sp}\hat{\rho}_{(1,2)} = \mathbf{Sp}\hat{\rho}_1 = \mathbf{Sp}\hat{\rho}_2, \quad \mathbf{Sp}\hat{\sigma}_{(1,2)} = \mathbf{Sp}\hat{\sigma}_1 = \mathbf{Sp}\hat{\sigma}_2. \tag{7.85}$$

Отсюда следует, что квантовая информация различия Ратье−Каннаппана обладает следующим свойством псевдоаддитивности для независимых систем

$$K_q\left(\hat{\rho}_{(1,2)} : \hat{\sigma}_{(1,2)}\right) =$$

$$= K_q\left(\hat{\rho}_1 : \hat{\sigma}_1\right) + K_q\left(\hat{\rho}_2 : \hat{\sigma}_2\right) + (q-1)K_q\left(\hat{\rho}_1 : \hat{\sigma}_1\right)K_q\left(\hat{\rho}_2 : \hat{\sigma}_2\right). \tag{7.86}$$

При $q=1$ из (86) следует свойство аддитивности для квантовой информация различия Кульбака−Лейблера $K_1\left(\hat{\rho} : \hat{\sigma}\right) \equiv \mathbf{Sp}\left[\hat{\rho}\ln\left(\hat{\rho}\hat{\sigma}^{-1}\right)\right]$ в классической модели с мерой фон Неймана.

Формула перехода системы от произвольного в равновесное состояние. Пусть равновесная неаддитивная квантовая система находится в термостате с температурой $1/\beta$. Для определения равновесного оператора плотности $\hat{\hat{\sigma}}$ находим безусловный экстремум лагранжиана

$$L(\hat{\sigma}) \equiv -\mathbf{Sp}\left(\hat{\sigma}\,\mathrm{Ln}_q\,\hat{\sigma}\right) - \beta\frac{\mathbf{Sp}\left(\hat{\sigma}^q\hat{H}\right)}{c_q} - \lambda\mathbf{Sp}\hat{\sigma}, \text{ где } c_q \equiv \mathbf{Sp}\hat{\sigma}^q.$$

В результате получим следующее каноническое распределение для нормированной матрицы плотности в квантовой статистике Тсаллиса:

$$\hat{\tilde{\sigma}}(\mathbf{x},\tilde{\beta}_q)=\frac{1}{\tilde{Z}_q(\tilde{\beta}_q)}\left\{1-(1-q)\tilde{\beta}_q\left[\left(\hat{H}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)\right]\right\}^{1/(1-q)}, \tag{7.87}$$

где

$$\tilde{U}_q=\mathbf{Sp}\left[\hat{\tilde{\sigma}}^q H(\mathbf{x})\right]/\mathbf{Sp}\hat{\tilde{\sigma}}^q,\quad \tilde{\beta}_q=\beta/\tilde{c}_q,\quad \tilde{c}_q=\mathbf{Sp}\hat{\tilde{\sigma}}^q, \tag{7.88}$$

$$\tilde{Z}_q(\tilde{\beta}_q)\equiv\mathbf{Sp}\left\{\exp_q\left[-\tilde{\beta}_q\left(\hat{H}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)\right]\right\} \tag{7.89}$$

– статистическая сумма.

Используя каноническое распределение (87) для термостата с температурой $1/\beta$ можно найти соответствующие значения энтропии $\tilde{S}_q=\ln_q\tilde{Z}_q$, энергии $\tilde{U}_q=\mathbf{Sp}(\hat{\tilde{\sigma}}^q\hat{H})/\mathbf{Sp}\hat{\tilde{\sigma}}^q$ и свободной энергии $\tilde{F}_q=\tilde{U}_q-\tilde{\beta}_q^{-1}\tilde{S}_q$ для квантовой системы, находящейся в равновесном состоянии. Дифференцируя выражение $\tilde{S}_q=\ln_q\tilde{Z}_q$, можно получить полную систему термодинамических равенств для замкнутой системы, обобщающую классические квантовые соотношения на равновесные квантовые q-системы (ср. с формулами (7.41)-(7.43)):

$$d\tilde{S}_q=\beta d\tilde{U}_q,\quad d(\beta\tilde{F}_q)=\tilde{U}_q d\beta. \tag{7.90}$$

Рассмотрим теперь спонтанный переход между произвольным состоянием системы с матрицей плотности $\hat{\rho}$ и его равновесным состоянием с матрицей плотности $\hat{\tilde{\sigma}}$. Подставляя (87) в выражение $\tilde{c}_q K_q\left(\hat{\tilde{\sigma}}:\hat{\rho}\right)$, в результате получим неравенство

$$\tilde{c}_q K_q\left(\hat{\rho}:\hat{\tilde{\sigma}}\right)=\frac{1}{1-q}\left[\tilde{c}_q-\tilde{c}_q\mathbf{Sp}\left(\hat{\rho}^q\hat{\tilde{\sigma}}^{1-q}\right)\right]=$$

$$=\frac{\tilde{c}_q-\mathbf{Sp}\left\{\hat{\rho}^q\left[1-(1-q)\tilde{\beta}_q\left((\hat{H}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q)\right)\right]\right\}}{1-q}= \tag{7.91}$$

$$=\frac{\tilde{c}_q-c_q+c_q(1-q)\tilde{\beta}_q(U_q-\tilde{U}_q)}{1-q}=-\frac{1-\tilde{c}_q}{(1-q)}+\frac{1-c_q}{(1-q)}+c_q\tilde{\beta}_q(U_q-\tilde{U}_q)=$$

$$=\tilde{S}_q-S_q+c_q\tilde{\beta}_q\left[\left(U_q-\tilde{U}_q\right)\right]=\tilde{S}_q-S_q+\tilde{\beta}_q\mathbf{Sp}\left[\hat{\rho}^q\left(\hat{H}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)\right],$$

совпадающее при $q=1$ с известным термодинамическим неравенством для информации различия Кульбака–Лейблера для аддитивных квантовых систем.

Неравенство Клаузиуса. Варьируя оператор $\tilde{c}_q K_q\left(\hat{\rho}:\hat{\tilde{\sigma}}\right)$ относительно матрицы плотности $\hat{\rho}$, т.е. считая, что $\hat{\rho}\to\hat{\tilde{\rho}}+\delta\hat{\rho}$ и $\mathbf{Sp}(\delta\hat{\rho})=0$, получим

$$\tilde{c}_q\delta K_q\left(\hat{\rho}:\hat{\tilde{\rho}}\right)=-\delta S_q(\hat{\rho})+\tilde{\beta}_q\mathbf{Sp}\left[\delta\hat{\rho}^q\left(\hat{H}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)\right]. \tag{7.92}$$

Здесь использовано преобразование

$$S_q(\hat{\rho})\equiv\frac{\mathbf{Sp}(\hat{\rho}-\hat{\rho}^q)}{q-1}\to\frac{\mathbf{Sp}(\hat{\tilde{\rho}}-\hat{\tilde{\rho}}^q)}{q-1}+\delta\frac{\mathbf{Sp}(\hat{\rho}-\hat{\rho}^q)}{q-1}=\tilde{S}_q+\delta S_q(\hat{\rho}).$$

Учитывая теперь выражение (7.59) для вариации количества теплоты, поступающего в систему $\delta' Q_q\equiv\mathbf{Sp}\left[\delta\hat{\rho}^q(\hat{H}-U_q)\right]/\tilde{c}_q$, перепишем выражение (88) следующим образом

$$\tilde{c}_q\delta K_q\left(\hat{\rho}:\hat{\tilde{\rho}}\right)=\beta\delta' Q_q-\delta S_q(\hat{\rho}). \tag{7.93}$$

Используя теперь положительное унитальное отображение $\hat{\rho} \to \hat{\hat{\rho}} + \delta\hat{\rho} \equiv \Lambda(\hat{\rho})$ (полностью сохраняющее след), представим вариацию $\delta K_q\left(\hat{\hat{\rho}} : \hat{\rho}\right)$ в виде:

$$\delta K_q\left(\hat{\rho} : \hat{\hat{\rho}}\right) = \delta K_q\left(\Lambda(\hat{\rho}) : \hat{\hat{\rho}}\right) - \delta K_q\left(\hat{\rho} : \hat{\hat{\rho}}\right). \quad (7.94)$$

В работе (Abe, Rajagopsal, 2003), было показано, что только если параметр деформации q лежит в интервале $q \in (0,2)$, то справедливо следующее неравенство

$$\delta K_q\left(\Lambda(\hat{\rho}) : \hat{\hat{\rho}}\right) - \delta K_q\left(\hat{\rho} : \hat{\hat{\rho}}\right) \leq 0. \quad (7.95)$$

Следовательно, при учете (7.87)-(7.89) можно получить следующее фундаментальное неравенство Клаузиуса

$$\beta\delta' Q_q \leq \delta S_q(\hat{\rho}), \quad q \in (0,2), \quad (7.96)$$

связывающее энтропию замкнутой квантовой системы с теплотой и температурой.

Таким образом, второй закон термодинамики (7.90) в квантовой термодинамике Тсаллиса также справедлив, что согласуется с принципом термодинамики в классической квантовой термодинамике (см. фон Нейман, 1964). Однако в отличие от последней, он справедлив только для значений энтропийного индекса, ограниченого интервалом $q \in (0,2)$, а для квантовых систем с $q > 2$ он нарушается. Отметим еще одно обстоятельство. В классической термодинамике второй закон определяет направление реально осуществляющихся процессов. Следовательно, адиабатические необратимые процессы ($\delta' Q_q = 0$) в квантовой термодинамике Тсаллиса, согласно неравенству (7.90), могут происходить в направлении роста энтропии только для значений параметра деформации $q \in (0,2)$.

H-теорема в квантовой статистике Тсаллиса. Сравним теперь значения энтропий Клаузиуса для двух состояний квантово-механической системы с распределениями $\hat{\rho}$ и $\hat{\tilde{\rho}}$ при условии Гиббса, т.е. при одинаковости средних энергий

$$\mathbf{Sp}(\hat{H}\hat{P}_q) = \mathbf{Sp}(\hat{H}\hat{\tilde{P}}_q)\,. \qquad (7.97)$$

С учетом условия $\tilde{c}_q \equiv \left(\tilde{Z}_q\right)^{1-q} > 0$ и свойства выпуклости (7.82) информации различия Ратье–Каннаппана, из (7.85) получим

$$K_q\left(\hat{\tilde{\rho}} : \hat{\rho}\right) = \tilde{S}_q(\hat{\tilde{\rho}}) - S_q(\hat{\rho}^q) \geq 0 \qquad q \in (0,2) \qquad (7.98)$$

Из неравенств (7.92) следует обобщенная теорема Гиббса: квантовая q-энтропия равновесного состояния максимальна $\tilde{S}_q(\hat{\tilde{\rho}}) \geq S_q(\hat{\rho}^q)$ при $0 < q < 2$.

Из (7.92) также вытекает, что при увеличении энтропии $S_q(\hat{\rho}^q) \to \tilde{S}_q(\hat{\tilde{\rho}})$, положительная мера информации различия уменьшается, т.е. имеет место уменьшение статистической упорядоченности в микросостояниях квантовой неэкстенсивной системы.

Согласно свойству выпуклости (7.82), квантовая информация различия Ратье–Каннаппана является знакоопределенной функцией Ляпунова. Чтобы состояние полного равновесия было устойчивым необходимы следующие неравенства[16]

$$\frac{d}{dt}\left[\tilde{c}_q K_q\left(\hat{\rho} : \hat{\tilde{\rho}}\right)\right] = -\frac{d}{dt}\left[S_q\left(\hat{\rho}\right) - \tilde{S}_q\left(\hat{\tilde{\rho}}\right)\right] < 0 \quad \text{при } 0 < q < 2. \qquad (7.99)$$

Таким образом, при стремлении системы к равновесному состоянию во временной эволюции информация различия уменьшается. Из (93) следует закон возрастания энтропии Тсаллиса со временем в квантовой неаддитивной статистической механике

---

[16]) Напомним, что функцией Ляпунова для данной системы называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда поизводная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$dS_q(p)/dt > 0 \quad \text{при } 0<q<2, \tag{7.100}$$

который справедлив при приближении к состоянию полного статистического равновесия (H-теорема Больцмана). Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы при спонтанных переходах.

В заключение этой главы отметим, что область неэкстенсивной квантовой статистики и теормодинамики в настоящее время переживает фазу интенсивного развития. Обсуждаются различные подходы и идеи, в том числе методы исследования равновесных и неравновесных состояний, базирующиеся на квантовых термодинамических моделях с параметрическими функционалами для энтропий. В случае квантовых систем, описываемых методом статистических операторов (или матрицами плотности) комплексов частиц, были получены обобщения ряда этих функционалов для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.

Развитый здесь подход предполагает использование неэкстенсивной квантовой термодинамики в различных квантовых технологиях, связанных, в частности, с моделированием тепловых квантовых эффектов в различных наноустройствах.

Библиография

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах // Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971. 416 с.

Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: Физматлит. 2002. Т.1. 431 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астро-физических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса–Мендеса–Пластино // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018c, № 60. 44 с.

Колесниченко. А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018d. Vol XLII P.74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (Методы квантовой механики и кибернетики). Кн 2. М.: МИФИ. 2008. 532 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука. 2006. 757 с.

Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: 1964. 367 с.

Нильсон М., Чанг И. Кавантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир. 2006. 824 с.

Харди Г.Г, Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Ин.-Лит. 1948. 456 с.

Abe S. Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy // Physics Letters A, 2000a. V. 271. № 1-2. P. 74-79.

Abe S. Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems // Eprint arXiv:cond-mat/0012115. 2000b. V.3. P.1-14.

Abe S. A problem with the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics. 2000c. arXiv:cond-mat/0006053.

Abe S. Nonadditive generalization of the quantum Kullback-Leibler divergence for measuring the degree of purification // Physical Review A. 2003. V. 68. № 3. id. 032302.

Abe S. Quantum q-divergence // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 344. № 3 P. 359-365.

Abe S. Geometric effect in nonequilibrium quantum thermodynamics //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 372. № 2. P. 387-392.

Abe S., Rajagopal A.K. Nonadditive Conditional Entropy and Its Significance for Local Realism // Physics Letters A. 2000a. V 272. № 5-6. P. 341-345.

Abe S., Rajagopal A.K. Towards Nonadditive Quantum Information Theory // eprint arXiv:quant-ph/0003145. 2000b. (12 pages. Invited talk at International Workshop on Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics (3-6 April, 2000, Denton, Texas)).

Abe S. Heat and entropy in nonextensive thermodynamics: transmutation from Tsallis theory to Rényi-entropy-based theory // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001. V. 300. № 3. P. 417-423.

Abe S., Okamoto Y. Eds., "Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications". Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001. ISBN 3-540-41208-5.

Abe S., Rajagopal A.K. Validity of the Second Law in Nonextensive Quantum Thermodynamics // Physical Review Letters.2003. V. 91. № 12. id. 120601.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 286 p.

Büyükkılıç F.,Demirhan D., Güleç A. A. statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases // Phys. Lett. A 1995. V. 197. № 3. P. 209-220.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics// Bras. J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 91-107.

Borges E., Roditi I. A family of nonextensive entropies // Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P.399-402.

Chavanis P.H., Delfini L. Dynamical stability of systems with long-range interactions: application of the Nyquist method to the HMF model // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 69. № 3. P. 389-429.

Curado E. M. F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. A: Mathematical and General.1991. V. 24. № 2. P. L69-72.

Daroczy Z. Generalized information functions // Inf. Control. 1970. V. 16. № 1. P. 36–51.

Du J. Test of nonextensive statistical mechanics by solar sound speeds // Europhys. Lett. 2006. V. 75. № 6. P. 861-867.

Esquivel A., Lazarian A. Tsallis Statistics as a Tool for Studying Interstellar Turbulence // Astrophys. J. 2010. V. 710. № 1. P. 125-132.

Frank T.D., Daffertshofer A. H-theorem for nonlinear Fokker-Planck equations related to generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001a. V. 295. № 3. P. 455-474.

Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalized thermostatistics // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2001b. V. 292. № 1. P. 392-410.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. "Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications. Oxford University Press. 2004. 440 p

Gleason A. M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // Mathematics Journal (Indiana University). 1957. V. 6. P. 885–893.

Hanel R., Thurner S., Tsallis C. Limit distributions of scale-invariant probabilistic models of correlated random variables with the q-Gaussian as an explicit example // Eur. J. Phys. B. 2009. V. 72. № 2. P. 263-268.

Havrda J., Charvat F. Quantiication method of classiication processes. Concept of structural α-entropy // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Ito N., Tsallis C. Specific heat of the harmonic oscillator within generalized equilibrium statistics // Nuovo Cimento D. 1989. V. 11. № 6. P. 907-911.

Jarzynski C. Equilibrium free-energy differences from nonequilibrium measurements: A master-equation approach // Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics), 1997. V. 56. № 5. P.5018-5035.

Jarzynski C., Wójcik D. Classical and Quantum Fluctuation Theorems for Heat Exchange //Physical Review Letters. 2004. V. 92 №23, id. 230602.

Jarzynski C. Equalities and inequalities: irreversibility and the second law of thermodynamics at the nanoscale. Annu. Rev. Cond. Matt. Phys. 2011. V. 2. P. 329-335.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1963. V.3. P. 160.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics // RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V. 6. № 6. P. 587-597.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research. 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V.6. № 6 P. 587-597.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P. 354-365.

Lenzi E.K., Mendes R.S. Collisionless Boltzmann equation for systems obeying Tsallis distribution // Eur. J. Phys. B. 2001. V. 21. № 3. P. 401-406.

Mariz A.M. On the irreversible nature of the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1992. V. 165. № 5-6. P. 409-411.

Münster A. Chemische thermodynamic. Akademie-Verlag Berlin, 1969. 261 s.

Pickup R.M., Cywinski R., Pappas C., Farago B., Fouquet P. Generalized Spin-Glass Relaxation // Phys. Rev. Lett. 2009. V.102. № 9. id. 097202.

Plastino A., Plastino A.R. On the universality of thermodynamics' Legendre transform structure // Phys. Lett. A. 1997. V. 226. № 5. P. 257-263.

Plastino A.R., Casas M., Plastino A. A nonextensive maximum entropy approach to a family of nonlinear reaction-diffusion equations // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 280. № 3. P. 289-303.

Ramshaw J.D. H-theorems for the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1993a. V. 175. № 3-4. P. 169-170.

Ramshaw J.D. Irreversibility and generalized entropies // Phys. Lett. A. 1993b. V. 175. № 3-4. P. 171-172.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Renyi A. On measures of entropy and information // In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. University California Press. Berkeley. 1961. V. 1. P. 547–561.

Scarfone A. M., Wada T. Equivalence among different formalisms in the Tsallis entropy framework // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. V. 384. № 2. P. 305-317.

Shiino M. H-theorem with generalized relative entropies and the Tsallis statistics //.J. Phys. Soc. Jpn. 1998. V.67. № 11. P. 3658-3660.

Tirnakli U., Torres D.F. Exact and approximate results of non-extensive quantum statistics // Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. № 4. P. 691-698.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics //J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P.479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R., Plastino A. The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P.543-554.

Wada T., Scarfone A.M. A non self-referential expression of Tsallis' probability distribution function // Eur. J. Phys. B. 2005. V. 47. № 4. P. 557-561.

Wehrl A. General properties of entropy // Reviews of Modern Physics. 1978. V. 50. № 2. P. 221-260.

ГЛАВА 8

Термодинамика Бозе-газа и черного излучения в неэкстенсивной статистике Тсаллиса

Целью данной главы является построение термодинамики открытых квантовых неэкстенсивных систем элементарных частиц Бозе-газа в рамках статистики Тсаллиса, основанной на модифицированной квантовой энтропии, зависящей от действительного параметра q. Получены обобщенные выражения для термодинамического потенциала, внутренней энергии, свободной энергии, удельной теплоты и давления, а также основные термодинамические уравнения. Обсуждаются модифицированные равновесные распределения Бозе–Эйнштейна для массивных частиц и обобщенные законы Планка, Рэлея–Джинса и Вина для фотонов, которые могут быть применимы к различным физическим задачам, в частности, к описанию космического черного излучения. Исходным основанием подобного рассмотрения фотонного газа является предположение, согласно которому распределение фотонов космического фонового излучения (находящегося в тепловом равновесии) может отличаться от классического распределения Планка из-за влияния дальнодействующего гравитационного воздействия на больших расстояниях. Это влияние, возможно, является отражением того отдаленного во времени факта, согласно которому материя и свет были сильно связаны между собой.

Обобщенная термодинамика фотонного газа может быть использована, в частности, в качестве теоретического обоснования экспериментальных исследований чернотельной радиации внутри разнообразных астрофизических объектов.

Введение

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана–Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. В качестве примера можно привести невозможность в рамках статистики БГ объяснить спектр космических лучей − одной из наиболее важных систем релятивистских частиц.

В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры сложных (аномальных) систем, которым присущи эффекты сильного дальнодействия, нелокальные корреляции между отдельными элементами системы (помнящей свое прошлое), фрактальный характер фазового пространства, немарковское поведение. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических характеристик, как энтропия или внутренняя энергия.

В связи с этим исследования в области механики неаддитивных (неэкстенсивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса, что объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (Tsallis,1988), в которой был введен функционал энтропии $\mathcal{S}_q(p) := k_{\mathcal{B}}(q-1)^{-1}\left[1-\int p^q d\Gamma'\right]$, зависящей от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающей неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Важно, что в пределе слабой связи $q \to 1$ энтропия Тсаллиса переходит в энтропию БГ. Наиболее существенным преимуществом, основанной на энтропии Тсаллиса[17)] статистики, по сравнению со статистической механикой БГ, является то, что она приводит к асимптотическому степенному закону распределения вероятностей, который отличен от экспоненциального поведения, порожденного классическим распределением Гиббса.

Неэкстенсивная статистика, в настоящее время интенсивно развивается. Возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. В научной литературе доступны многочисленные коллекции миниобзоров (см., например, Tsallis,

---

[17)] Заметим, что, хотя эта энтропия получила название энтропии Тсаллиса, в историческом плане появление q-энтропии можно проследить по более ранним работам (Harvda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970).

1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; Kaniadakis и др., 2002, 2006; Kaniadakis, Lissia, 2004; Gell-Mann, Tsallis, 2004; Herrmann и др.,2004; Колесниченко, 2019). Эта статистика успешно применяется ко многим природным системам, в частности, к ранней вселенной (Pessah и др., 2001), к космической плазме (Lima и др., 2000), к космологическим проблемам (к трехмерной гравитационной проблеме N-тел), к астрофизическим проблемам (например, при толковании черных дыр, суперструн, темной материи (Leubner, 2005)) и так далее. Моделированию Бозе-газа и чернотельному излучению в рамках неэкстенсивной статистики также посвящено большое число публикаций (см., например, Tsallis и др., 1995; Plastino и др., 1995; Tirnakli и др., 1997; Lenzi, Mendes, 1998; Wang, Le Méhauté, 1998; Wang и др., 1998; Büyükkilic., Demirhan, 2000; Anchrordoqui, Torres, 2001; Martinez и др., 2001, 2002; Chamati и др., 2006; Zaripov, 2009; Rovenchak, 2018; Ma и др., 2019; Kolesnichenko, 2020).

Тем не менее, в настоящей работе вновь предлагается обсудить в рамках формализма Тсаллиса механизм чернотельного излучения применительно к задачам космологии. Исходным основанием подобного рассмотрения является утверждение, согласно которому существующее космическое фоновое излучение (находящееся по предположению в тепловом равновесии) может несколько отличаться от классического закона излучения черного тела Планка из-за влияния дальнодействующего гравитационного воздействия на больших расстояниях (Mather и др. 1994). Это влияние может быть отражением того отдаленного во времени факта, когда материя и свет были сильно связаны между собой, или же оно является результатом еще более замысловатых природных явлений (Sistema, Vucetich, 2005).

Уместность предпринятого здесь обсуждения данной проблемы, по мнению автора статьи, связана со следующим обстоятельством. В статистической механике Тсаллиса возможно осреднение микроскопических физических величин с помощью трех распределений: $p(\mathbf{r})$, $p^q(\mathbf{r})$, $p^q(\mathbf{r})/\int p^q(\mathbf{r})d\Gamma'$. Первое осреднение соответствует первоначальной статистике Тсаллиса (Tsallis,1988), второе (ненормированное) осреднение – статистике Курадо−Тсаллиса (Curado, Tsallis, 1991; Зарипов, 2002, Колесниченко, 2018), третье осреднение – статистике Тсаллиса−Мендеса−Плас-тино (Tsallis и др., 1998). Эти способы осреднения, каждый из которых имеет, вообще говоря, свои преимущества и недостатки, предопределяют совершенно разные q-термодинамики. По этой причине вопрос об использовании того или иного приема осреднения в физических приложениях носит принципиальный характер, поскольку различия в определении средних значений могут оказаться существенными при обработке экспериментальных данных.

Вместе с тем получаемые при этом существенные несоответствия могут быть, по мысли ряда авторов, благополучно устранены путём использования статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино, когда осреднение производится по так называемому нормированному эскортному распределению вероятности $\mathbb{P}_q(\mathbf{r}) := p^q / \int p^q d\Gamma'$ (см, например, Tsallis и др., 1998; Tsallis, 1999; Martinez и др., 2000). Однако существует и иная точка зрения (которой автор придерживается в данной работе), согласно которой единственно правильным осреднением является осреднение с ненормированным распределением p^q, используемое в аксиоматическом обосновании рассматриваемой неэкстенсивной статистики (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970). Она обуславливается, в частности, тем, что только это распределение не приводит к переопределению понятия температуры q-системы, которая в этой статистике является интенсивным параметром (абсолютной температурой T), а не функционалом (так называемой физической температурой T_{ph}, зависящей от энтропии $\mathcal{S}_q$), как это происходит при иных определениях взвешенного среднего. Отметим, что эти и некоторые другие убедительные соображения в пользу осреднения Курадо−Тсаллиса приведены в монографии (Зарипов, 2002).

Возвращаясь к уместности появления данной работы, заметим, что во многих цитируемых выше публикациях по заявленной тематике некоторые авторы (см., например, Tirnakli и др., 1997**;** Wang и др., 1998; Rovenchak, 2018) в качестве отправной точки использовали обобщенное распределение Планка в виде:

$$\overline{n}_j(T,q) = 1 \Big/ \left\{ \left[1 + (q-1)\frac{\hbar\omega_j}{k_{\mathcal{B}}T} \right]^{\frac{1}{q-1}} - 1 \right\}.$$

Можно легко убедиться в том, что к подобному распределению собственных частот излучения приводит условие максимума модифицированной энтропии Бозе-газа в статистике Тсаллиса только в том случае, когда осреднение физических величин производится с помощью распределения $p^q(\mathbf{r})$ (Büyükkilic, Demirhan, 2000; Зарипов, 2010). Несмотря на это, те же авторы в своих работах использовали осреднение с распределением $p(\mathbf{r})$, соответствующее оригинальной статистике Тсаллиса. В ряде других публикаций (см., например, Martinez и др., 2002; Ma и др. 2019) за исходное распределение неэкстенсивного фотонного газа принималось обобщенное распределение Планка $\overline{n}_j(T_{ph},q)$ с физической температурой, что представляется совершенно не практичным, поскольку измерение физической температуры T_{ph} нереально, что связано с ее зависимостью от энтропии $\mathcal{S}_q$.

В данной главе представлен с единых позиций круг вопросов, связанных с конструированием деформированной термодинамики и чернотельного излучения на основе модифицированных для неэкстенсивных систем энтропии Бозе-газа и соответствующей дивергенции Брэгмана. При этом при получении всех термодинамических величин систематически использовано осреднение Курадо−Тсаллиса. Проведенное исследование базируется на свойствах негиббсового канонического ансамбля бозонных систем, полученного из принципа Джейнса (Jaynes, 1963) максимума q-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии и полного числа частиц Бозе-газа. Получены обобщенные выражения для термодинамического потенциала, полной и свободной энергии, энтропии, удельной теплоты, давления и теплоемкости, а также дифференциальные термодинамические уравнения для бозонного газа. Показано, что сохраняются принцип максимума равновесной энтропии, лежандрова структура теории и *H*-теорема обычной статистической механики БГ. Получено статистическое распределение для массивных бозонов, а также обобщение классического закона Планка для теплового спектра космического фонового излучения в рамках статистики Тсаллиса. Показано, что все эти величины восстанавливают свои стандартные выражения в пределе.

8.1. Элементы неаддитивной статистики Тсаллиса

В статистической механике Тсаллиса для непрерывных величин при вероятностной нормировке

$$\int p(\mathbf{r})d\Gamma' = 1, \quad 0 \le p < \infty \tag{8.1}$$

для фазовой функции распределения $p(\mathbf{r})$ (в общем случае эта функция может зависеть от времени t и от внешних параметров $\{a_k\}$) энтропия Тсаллиса для вещества задаётся следующим функционалом (Tsallis, 1988):

$$\mathcal{S}_q(p) := \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1}\left(1 - \int p^q d\Gamma'\right). \tag{8.2}$$

Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем 6*N*-мерным фазовым пространством $\mathbf{r} := \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N\}$, безразмерный элемент которого записывается в следующей современной форме $d\Gamma' := (2\pi\hbar)^{-s} d\mathbf{r}$ (где $d\mathbf{r} := \prod_j d\mathbf{q}_j d\mathbf{p}_j$; $k_{\mathcal{B}} \simeq 1.380662 \cdot 10^{-16}$ *эрг/К* – постоянная Больцмана; $\hbar = h/2\pi$; $h \simeq 6.626117 \cdot 10^{-27}$ *эрг*$\cdot$*с* – постоянная Планка). Энтропийный индекс q представляет собой вещественное число, принадлежащее области $q \in \mathcal{R}$. Такая деформированная энтропия позволяет учитывать важную особенность поведения аномальных материальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими силовыми взаимодействиями, при которых вероятность реализации $p(\mathbf{r})$ больших значений состояний убывает (при $q > 1$) не экспоненциально, а степенным образом.

Можно показать, что в пределе слабой связи энтропия Тсаллиса (8.2) переходит в классическую формулу для энтропии $\mathcal{S}_{BG}$ в статистике Больцмана–Гиббса. Действительно, в пределе $q \to 1$ имеем:

$$p^{q-1} = \exp\{(q-1)\ln p\} \to 1 + (q-1)\ln p,$$

и энтропия $\mathcal{S}_q$ сводится к $\mathcal{S}(p) = \lim\limits_{q\to 1} \mathcal{S}_q(p) = -k_{\mathcal{B}} \int p \ln p \, d\Gamma' = \mathcal{S}_{BG}$.

Если состояние физической двухкомпонентной системы описывается совместным мультипликативным распределением $p_{12} = p_1 p_2$, (где $p_{12} = p_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $p_1 = p_1(\mathbf{r}_1)$, $p_2 = p_2(\mathbf{r}_2)$), которое может зависеть от времени t, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ относятся к двум независимым q-системам, то общая энтропия даётся выражением

$$\mathcal{S}_q(p_{12}) = \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1}\left(1 - \iint p_{12}^q d\Gamma_1' d\Gamma_2'\right) =$$

$$= \mathcal{S}_q(p_1) + \mathcal{S}_q(p_2) + \frac{1-q}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{S}_q(p_1)\mathcal{S}_q(p_2). \tag{8.3}$$

Соотношение (8.3) выражает свойство неаддитивности для энтропии совокупной системы в статистике Тсаллиса.

Энтропия Тсаллиса (8.2) может быть представлена в следующей эквивалентной форме:

$$\mathcal{S}_q(p) = -k_{\mathcal{B}} \int p^q \ln_q(p) d\Gamma' = -k_{\mathcal{B}} \langle \ln_q p \rangle_q, \tag{8.4}$$

при написании которой использовано осреднение с ненормированным распределением p^q (свойственным статистике Курадо-Тсаллиса (Curado, Tsallis, 1991))

$$\langle \mathcal{A} \rangle_q := \int p^q \mathcal{A}(\mathbf{r}) d\Gamma', \tag{8.5}$$

для произвольной физической величины $\mathcal{A}(\mathbf{r})$, а также так называемый «деформированный логарифм»

$$\ln_q x := \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (x \in \mathcal{R}^+;\ q \in \mathcal{R}). \tag{8.6}$$

Экстремальное значение энтропии Тсаллиса. Аналог равновесного распределения Гиббса в статистике Курадо−Тсаллиса может быть получен, как и в классическом случае, из экстремума энтропии (8.2) при выполнении условия сохранения нормировки (8.1) и заданном значении средней энергии системы

$$\mathcal{E}_q \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_q := \int \mathcal{H}(\mathbf{r}) p^q d\Gamma' = const, \tag{8.7}$$

где функция Гамильтона $\mathcal{H}(\mathbf{r})$ задаётся математической моделью изучаемых физических процессов. В соответствии с теоремой Лагранжа вероятное распределение $p(\mathbf{r})$, «экстремизирующее» энтропию Тсаллиса $\mathcal{S}_q(p)$, при указанных ограничениях имеет вид (см., например, Колесниченко, 2019):

$$p(\mathbf{r}) = Z_q^{-1}(\beta)\left[1 - k_{\mathcal{B}}^{-1}(1-q)\beta\mathcal{H}(\mathbf{r})\right]^{1/1-q}, \tag{8.8}$$

где

$$Z_q = \int \left[1 - k_{\mathcal{B}}^{-1}(1-q)\beta\mathcal{H}(\mathbf{r}) \right]^{1/1-q} d\Gamma' \tag{8.9}$$

– обобщённый статистический интеграл, определяемый из условия нормировки (8.1); множитель Лагранжа β (обратная эффективная температура, $\beta = 1/T$) определяется из уравнения, получаемого подстановкой (8.8) в (8.7).

Распределение (8.8) удобно записать в виде, аналогичном классической форме Гиббса

$$p(\mathbf{r},\beta) = Z_q^{-1}\exp_q\left\{-k_{\mathcal{B}}^{-1}\beta\mathcal{H}(\mathbf{r})\right\}, \tag{8.10}$$

выражая стоящую в (8.8) степенную функцию $[..]^{1/1-q}$ через так называемую экспоненту Тсаллиса, которая определяется следующим образом (Тсаллис, 2009):

$$\exp_q(x) \equiv [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} = \begin{cases} 0, & \textit{если } q<1 \textit{ и } x< -1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \textit{если } q<1 \textit{ и } x\geq -1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \textit{если } q>1 \textit{ и } x< -1/1-q. \end{cases} \tag{8.11}$$

Здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y,0)$. Легко проверить, что в пределе $q \to 1$ эта функция принимает стандартный вид: $\underset{q\to 1}{\exp_q(x)} = \exp(x)$.

Используя определения деформированных функций $\ln_q x$ и $\exp_q(x)$, легко можно убедиться в том, что имеют место следующие соотношения:

$$\ln_q(x) = x^{1-q}\ln_{2-q}(x), \quad \ln_q(1/x) + \ln_{2-q}(x) = 0, \quad (\forall x; \forall q), \tag{8.12}$$

$$\ln_{2-q} x = \frac{x^{q-1}-1}{q-1}, \quad \ln_q\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{1-q}}\ln_q x, \quad (\forall x; \forall q), \tag{8.13}$$

$$\exp_q[\ln_q(x)] = \ln_q[\exp_q(x)] = x, \quad \exp_{2-q}(-x) = 1/\exp_q(x), \quad (\forall x; \forall q), \tag{8.14}$$

$$\exp_{2-q}(x) = [1-(1-q)x]^{1/(q-1)}, \quad (\forall x; \forall q), \tag{8.15}$$

$$\ln_q(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{2}x^2q+\frac{1}{6}x^3q(1+q)-\frac{1}{24}x^4q(1+q)(2+q)+\ldots, \quad (\forall q), \quad (8.16)$$

$$\exp_q(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2q+\frac{1}{6}x^3q(2q-1)+\frac{1}{24}x^4q(2q-1)(3q-2)+\ldots \ (\forall q), \quad (8.17)$$

$$\frac{d}{dx}\ln_q x=\frac{1}{x^q}, \quad \frac{d}{dx}\exp_q(x)=[\exp_q(x)]^q, \quad (x>0;\forall q). \qquad (8.18)$$

Далее эти соотношения будут широко использованы.

8.2. Энтропия Бозе-газа в статистике Больцмана−Гиббса

Бозе-газ состоит из бозонов − частиц, имеющих целый спин и подчиняющихся статистике Бозе−Эйнштейна. Бозе создал статистическую механику для газа фотонов, а Эйнштейн развил её для описания массивных частиц.

Напомним классический вероятностно-статистический способ вычисления энтропии Бозе-газа. С этой целью рассматриваются различные равновероятные группы квантовых состояний $j=1,2,\ldots$, которыми может быть реализовано изучаемое макроскопическое состояние ансамбля из $\mathcal{N}$ газовых частиц. $6\mathcal{N}$-мерное фазовое пространство делится на $\mathcal{M}$ ячеек безразмерного объема $g_j := (2\pi\hbar)^{-s}(\Delta\mathbf{q}_j\Delta\mathbf{p}_j)$, который характеризует максимально возможное число микросостояний в j-ой ячейке, содержащей n_j Бозе-частиц (здесь s − число степеней свободы элементарной частицы). Далее определяется число всех возможных способов заполнения $\mathcal{N}=\sum_j n_j$ частиц по $\mathcal{M}$ ячейкам. Данное число является по определению статистическим весом $\Delta\Gamma$, характеризующим вероятность макроскопического состояния системы. Если теперь каждую группу из n_j частиц рассматривать как независимую подсистему и обозначить посредством $\Delta\Gamma_{n_j}$ ее статистический вес, то можно написать: $\Delta\Gamma=\prod_j \Delta\Gamma_{n_j}$. В классической статистике энтропия выражается логарифмической мерой статистического веса $\mathcal{S} := k_{\mathcal{B}}\ln\Delta\Gamma = k_{\mathcal{B}}\ln\prod_j \Delta\Gamma_{n_j}$. В случае статистики Бозе−Эйнштейна в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц, так что статистический вес $\Delta\Gamma_{n_j}$ есть число всех способов, которыми можно распределить n_j частиц по g_j состояниям. Статистический вес в статистике Бозе имеет вид

$$\Delta\Gamma_{n_j} = \frac{(g_j + n_j - 1)!}{n_j!(g_j - 1)!},$$

вытекающий из условия, что в ячейке может находиться любое количество частиц. Логарифмируя это выражение и воспользовавшись для логарифмов всех трех факториалов приближенной формулой Стирлинга $\ln x! = x\ln(x/e)$, найдем:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = -k_{\mathcal{B}}\sum_j\left\{n_j \ln n_j + g_j \ln g_j - (g_j + n_j)\ln(g_j + n_j)\right\}. \qquad (8.19)$$

Если записать эту формулу, используя среднее число $\bar{n}_j = n_j / g_j$ частиц в каждом из квантовых состояний j-й группы, то получим известное выражение для энтропии неравновесного Бозе-газа в классическом случае (см. Ландау, Лифшиц, 1964):

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = -k_{\mathcal{B}}\sum_j g_j\left\{\bar{n}_j \ln \bar{n}_j - (1 + \bar{n}_j)\ln(1 + \bar{n}_j)\right\}. \qquad (8.20)$$

Легко убедиться в том, что условие экстремальности энтропии $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ приводит к дискретному распределению Бозе−Эйнштейна:

$$\bar{n}_j = \left\{\exp\left(\frac{\varepsilon_j - \mu}{k_{\mathcal{B}}T}\right) - 1\right\}^{-1}. \qquad (8.21)$$

Заметим, что величина $\bar{n}_j$ есть дискретный аналог непрерывной функции распределения $D(\mathbf{r},t)$ по фазовому пространству $\mathbf{r} := \{\mathbf{q};\mathbf{p}\}$. Переход от дискретного распределения $\bar{n}_j$ к плотности распределения Бозе частиц в фазовом пространстве $D(\mathbf{r},t)$ осуществляется заменой суммирования по j интегрированием по всему фазовому пространству, безразмерный элемент которого определяется соотношением $d\Gamma := g(2\pi\hbar)^{-s}d\mathbf{r}$ (здесь $g = 2S+1$, S – спин частицы; $d\mathbf{r} := d\mathbf{q}\,d\mathbf{p} = d\mathbf{p}\,dV_{\mathcal{N}}$)[18]. В итоге получим следующее выражение для

---

[18]) Заметим, что часто интегрирование по $dV_{\mathcal{N}}$ сводится к замене $dV_{\mathcal{N}}$ на полный объем $V_{\mathcal{N}}$ газа.

энтропии неравновесного Бозе-газа в случае непрерывных распределений:

$$\mathcal{S}(t) = -k_{\mathcal{B}} \int \left\{ D(\mathbf{r},t) \ln D(\mathbf{r},t) - [1 + D(\mathbf{r},t)] \ln[1 + D(\mathbf{r},t)] \right\} d\Gamma . \qquad (8.22)$$

Приведем также выражение для так называемой физической информации различия Бозе-газа $\mathcal{I}_{12}$, характеризующей переходы между двумя состояниями неравновесной системы. Величина $\mathcal{I}_{12}$, являющаяся знакоопределенным функционалом (функцией Ляпунова), определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $\overline{n}_{1j}$ относительно ее состояния с распределением $\overline{n}_{2j}$.

В дискретном случае эта величина имеет вид (см. Зарипов, 2010):

$$\mathcal{I}_{12}\left[\overline{n}_1 : \overline{n}_2\right] := k_{\mathcal{B}} \sum_j g_j \left[\overline{n}_{1j} \ln \frac{\overline{n}_{1j}}{\overline{n}_{2j}} - (1 + \overline{n}_{1j}) \ln \left(\frac{1 + \overline{n}_{1j}}{1 + \overline{n}_{2j}} \right) \right] \geq 0, \qquad (8.23)$$

а для непрерывного аналога имеем:

$$\mathcal{I}_{12} := k_{\mathcal{B}} \int \left[D_1 \ln \left(\frac{D_1}{D_2} \right) - (1 + D_1) \ln \left(\frac{1 + D_1}{1 + D_2} \right) \right] d\Gamma \geq 0 . \qquad (8.24)$$

8.3. Энтропия Бозе–газа в статистике Тсаллиса

Обобщенное выражение квантовой энтропии (8.20) для Бозе-газа, полученное в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса в работах (Büyükkilic, Demirhan, 1993, 2004), имеет вид:

$$S_q := \frac{k_{\mathcal{B}}}{q - 1} \sum_j g_j \left[-\overline{n}_j^{\,q} - 1 + (1 + \overline{n}_j)^q \right]. \qquad (8.25)$$

Энтропию (8.25) удобно представить в следующих эквивалентных двух формах:

$$S_q = \frac{k_{\mathcal{B}}}{1 - q} \sum_j g_j \overline{n}_j^{\,q} \left[1 - \left(\frac{1 + \overline{n}_j}{\overline{n}_j} \right)^{q-1} \right] + \frac{k_{\mathcal{B}}}{1 - q} \sum_j g_j \left[1 - \left(1 + \overline{n}_j \right)^{q-1} \right] =$$

$$= k_{\mathcal{B}} \sum\nolimits_j g_j \left[\bar{n}_j{}^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+\bar{n}_j}{\bar{n}_j} \right) + \ln_{2-q}(1+\bar{n}_j) \right] =$$

$$= k_{\mathcal{B}} \sum\nolimits_j g_j (1+\bar{n}_j)^{q-1} \left[\bar{n}_j \ln_q \left(\frac{1+\bar{n}_j}{\bar{n}_j} \right) + \ln_q(1+\bar{n}_j) \right]. \qquad (8.26)$$

При $q \to 1$ из (8.26) вытекает выражение (8.20) для энтропии неравновесного Бозе-газа для аддитивных систем.

Совершая переход от суммирования к интегрированию в формуле (8.25), получим выражение для квантовой энтропии в случае непрерывных распределений

$$\mathcal{S}_q = \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1} \int \left\{ -[D(\mathbf{r})]^q - 1 + [1 + D(\mathbf{r})]^q \right\} d\Gamma =$$

$$= k_{\mathcal{B}} \int \left[[D(\mathbf{r})]^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+D(\mathbf{r})}{D(\mathbf{r})} \right) + \ln_{2-q}\left(1 + D(\mathbf{r})\right) \right] d\Gamma. \qquad (8.27)$$

Здесь $D(\mathbf{r})$ – плотность распределения квантовых частиц в фазовом пространстве $\mathbf{r}$. Используя (8.27), легко показать, что в статистике Тсаллиса энтропия Бозе-газа двух независимых систем не обладает свойством аддитивности.

Экстремум энтропии и равновесные состояния. Равновесные состояния неэкстенсивных систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. В состоянии равновесия энтропия должна иметь максимальное значение. Покажем, каким образом из этого требования можно найти функцию распределения частиц Бозе-газа в состоянии статистического равновесия. Задача заключается в нахождении таких $\bar{n}_j$, при которых квантовая энтропия (8.25) имеет максимальное значение, возможное при дополнительных условиях

$$\mathcal{E}_q := \sum\nolimits_j g_j \varepsilon_j \bar{n}_j^q = const, \ \ \mathcal{N}_q := \sum\nolimits_j g_j \bar{n}_j^q = const, \qquad (8.28)$$

выражающих постоянство полного числа частиц $\mathcal{N}_q$ и полной энергии $\mathcal{E}_q$ газа. Следуя известному методу неопределенных множителей Лагранжа, надо приравнять нулю первую вариацию функционала

$$\mathcal{L}(\bar{n}_j) := \mathcal{S}_q - \beta\sum_j g_j\varepsilon_j\bar{n}_j^q + \beta\mu\sum_j g_j\bar{n}_j^q\,, \tag{8.29}$$

где β и μ – некоторые постоянные. Произведя дифференцирование, найдем:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{n}_j} = \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1}\sum_j g_j q\left\{\left[-\bar{n}_j^{\,q-1} + \left(1+\bar{n}_j\right)^{q-1}\right] - \frac{(q-1)\beta}{k_{\mathcal{B}}}(\varepsilon_j-\mu)\bar{n}_j^{\,q-1}\right\} = 0\,, \tag{8.30}$$

откуда

$$\frac{1+\bar{n}_{j0}}{\bar{n}_{j0}} = \left[1-k_{\mathcal{B}}^{-1}(1-q)\beta_0(\varepsilon_j-\mu_0)\right]^{1/(q-1)} \equiv \exp_{2-q}\left[\frac{\beta_0(\varepsilon_j-\mu_0)}{k_{\mathcal{B}}}\right], \tag{8.31}$$

или

$$\bar{n}_{j0} = \frac{1}{\left[1+(q-1)\frac{\varepsilon_j-\mu_0}{k_{\mathcal{B}}T_0}\right]^{1/q-1} - 1} = \frac{1}{\exp_{2-q}\left(\frac{\varepsilon_j-\mu_0}{k_{\mathcal{B}}T_0}\right)-1}\,. \tag{8.32}$$

Это есть не что иное, как обобщенное распределение Бозе−Энштейна в статистике Тсаллиса. Здесь $T_0 = 1/\beta_0$ – равновесная температура и μ_0 – равновесный химический потенциал Бозе-газа ($\mu_0 < 0$).

С помощью распределения (8.32) могут быть вычислены равновесные значения полного число частиц и полной энергии системы:

$$\mathcal{N}_{q0} := \sum_j g_j\bar{n}_{j0}^q = \sum_j g_j\left\{\exp_{2-q}\left[(\varepsilon_j-\mu_0)/k_{\mathcal{B}}T_0\right]-1\right\}^{-q}, \tag{8.33}$$

$$\mathcal{E}_{q0} := \sum_j g_j\varepsilon_j\bar{n}_j^q = \sum_j g_j\varepsilon_j\left\{\exp_{2-q}\left[(\varepsilon_j-\mu_0)/k_{\mathcal{B}}T_0\right]-1\right\}^{-q}. \tag{8.34}$$

Заметим, что формула (8.33) определяет в неявном виде химический потенциал $\mu_0(T_0,\mathcal{N}_{q0})$ Бозе-газа как функцию от температуры T_0 и полного числа частиц $\mathcal{N}_{q0}$.

Термодинамические соотношения. Получим теперь экстремальное значение S_{q0} энтропии и основные термодинамические соотношения. Подставляя распределение (8.31) в выражение (8.26) для энтропии и используя формулы (8.14), получим:

$$\mathcal{S}_{q0} = k_{\mathcal{B}} \sum_j g_j \left[\bar{n}_{j0}{}^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+\bar{n}_{j0}}{\bar{n}_{j0}} \right) + \ln_{2-q}(1+\bar{n}_{j0}) \right] =$$

$$= k_{\mathcal{B}} \sum_j g_j \left[\bar{n}_{j0}^q \frac{\beta_0(\varepsilon_j - \mu_0)}{k_{\mathcal{B}}} + \ln_{2-q}(1+\bar{n}_{j0}) \right] =$$

$$= \beta_0(\mathcal{E}_q - \mu_0 \mathcal{N}_q) + k_{\mathcal{B}} \sum_j g_j \ln_{2-q}(1+\bar{n}_{j0}) =$$

$$= \beta_0(\mathcal{E}_{q0} - \mu_0 \mathcal{N}_{q0}) - \beta_0 \Omega_{q0}. \qquad (8.35)$$

Здесь

$$\Omega_q := \sum_j \Omega_{qj} = -k_{\mathcal{B}} \beta^{-1} \sum_j g_j \ln_{2-q}(1+\bar{n}_{j0}) \qquad (8.36)$$

– термодинамический потенциал полного числа частиц бозонного газа; Ω_{qj} – термодинамический потенциал частиц в j-ом квантовом состоянии, определяемый соотношением

$$\Omega_{qj} := -\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta(1-q)} G_j \left[1 - (1+\bar{n}_j)^{q-1} \right] = -k_{\mathcal{B}} \beta^{-1} g_j \ln_{2-q}(1+\bar{n}_{j0}) =$$

$$= G_j k_{\mathcal{B}} \beta^{-1} \ln_q \left\{ 1 - \left[\exp_{2-q}\left(\frac{\varepsilon_j - \mu_0}{k_{\mathcal{B}} T_0} \right) \right]^{-1} \right\}. \qquad (8.37)$$

Используя производные по β_0, μ_0 и ε_j от распределения $\bar{n}_{j0}$

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_{j0}}{\partial \beta_0} \right)_{\mu_0} = -k_{\mathcal{B}}^{-1} \left\{ 1 + \bar{n}_{j0} \right\}^{2-q} n_{j0}^q (\varepsilon_j - \mu_0),$$

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_{j0}}{\partial \mu_0} \right)_{\beta_0} = -k_{\mathcal{B}}^{-1} \beta_0 \bar{n}_{j0}^q \left\{ 1 + \bar{n}_{j0} \right\}^{2-q}, \quad \left(\frac{\partial \bar{n}_{j0}}{\partial \varepsilon_j} \right)_{\mu_0} = \beta_0 k_{\mathcal{B}}^{-1} n_{j0}^q \left\{ 1 + \bar{n}_{j0} \right\}^{2-q}, \qquad (8.38)$$

и формулы (8.18), легко получить следующие уравнения равновесной термодинамики для систем с переменным числом частиц:

$$\Omega_{q0} = -k_{\mathcal{B}} \beta^{-1} \sum_j g_j \ln_{2-q}(1+\bar{n}_{j0}), \qquad (8.39)$$

$$\mathcal{N}_{q0} = -\frac{\partial\Omega_{q0}}{\partial\mu_0}, \quad \bar{n}_{j0}^q = -\frac{\partial\Omega_{qj}}{\partial\mu_0}, \tag{8.40}$$

$$\partial(\beta_0\Omega_{q0})/\partial\beta_0 = \mathcal{E}_{q0} - \mu_0 \sum_j g_j \bar{n}_{j0}^q, \quad \mathcal{S}_{q0} = -\partial\Omega_{q0}/\partial\beta_0^{-1}, \tag{8.41}$$

$$\beta_0^{-1} d\mathcal{S}_{q0} = d\mathcal{E}_q - \mu_0 d\left(\sum_j g_j \bar{n}_{j0}^q\right). \tag{8.42}$$

Найдем теперь вторую вариацию функционала (8.29) $\mathcal{L}(\bar{n}_j)$; в результате получим:

$$\delta^2\mathcal{L} = -k_{\mathcal{B}} q \sum_j g_j \bar{n}_j^{\,q-2} \left\{ 1 - \frac{(1-q)\beta}{k_{\mathcal{B}}}(\varepsilon_j - \mu) - \left(1 + \frac{1}{\bar{n}_j}\right)^{q-2} \right\} (\delta\bar{n}_j)^2. \tag{8.43}$$

Из (8.43) следует, что при $q > 0$ экстремум соответствует максимуму функционала, $\delta^2\mathcal{L} < 0$. Таким образом, распределение (8.32) максимизирует обобщенную энтропию (8.25) для бозонного газа.

Дивергенция Брэгмана. Рассмотрим теперь спонтанный переход между произвольным неравновесным состоянием $\bar{n}_j(t)$ и равновесным состоянием $\bar{n}_{j0}$ открытой неэкстенсивной квантовой системы. В качестве информации различия далее будем использовать обобщенную меру Брэгмана, порожденную отрицательной функцией ($-\mathcal{S}_q$) (см. Bregman, 1967; Cichocki, Amari, 2010)

$$\mathcal{I}_q[\bar{n}:\bar{n}_0] := \mathcal{S}_{q0} - \mathcal{S}_q + \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1} \sum_j g_j (\bar{n}_j^q - \bar{n}_{j0}^q) \frac{\partial\mathcal{S}_{q0}}{\partial\bar{n}_{j0}^q} =$$

$$= S_{q0} - S_q + \frac{k_{\mathcal{B}}}{q-1} \sum_j g_j (\bar{n}_j^q - \bar{n}_{j0}^q) \left[-1 + \left((1+\bar{n}_{j0})/\bar{n}_{j0} \right)^{q-1} \right] \geq 0, \tag{8.44}$$

где первый член −это разность квантовых энтропий (сравни с (8.23)). Дивергенция Брэгмана (8.44), являясь знакоопределенным функционалом, определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $\bar{n}_j(t)$ относительно равновесного состояния с распределением $\bar{n}_{j0}$. Основные свойства дивергенции Брегмана можно найти в фундаментальной работе (Cichocki, Amari, 2010). Здесь же мы отметим лишь то, что величина $\mathcal{I}_q[\bar{n}:\bar{n}_0]$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Кроме этого, поскольку при $\overline{n}_j = \overline{n}_{j0}$ имеет место равенство $\mathcal{I}_q\left[\overline{n}_0 : \overline{n}_0\right] = 0$, то дивергенция Брегмана является функцией Ляпунова[19].

Принцип максимума энтропии равновесного распределения Бозе– Эйнштейна в статистике Тсаллиса. Подставляя в формулу (8.44) равновесное распределение $\overline{n}_{j0}$ (8.32), в результате получим

$$\mathcal{I}_q = -(\mathcal{S}_q - \mathcal{S}_{q0}) + \beta_0(\mathcal{E}_q - \mathcal{E}_{q0}) - \beta_0\mu_0(\mathcal{N}_q - \mathcal{N}_{q0}) \geq 0\,. \tag{8.45}$$

Отсюда вытекает следующее дифференциальное уравнение

$$d\mathcal{I}_q = -d\mathcal{S}_q + \beta_0\left(d\mathcal{E}_q - \mu_0\, d\mathcal{N}_q\right). \tag{8.46}$$

Если теперь предположить, что для обоих состояний системы справедливы соотношения $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{q0}$ и $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q0}$ (так называемое, условие Гиббса), то из (8.45) следует неравенство

$$\mathcal{I}_q(t) = -(\mathcal{S}_q(t) - \mathcal{S}_{q0}) \geq 0\,, \tag{8.47}$$

в котором информация различия представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и называется негэнтропией. Понятие негэнтропии, т.е. изменения энтропии с обратным знаком, было предложено Э. Шредингером (Шредингер, 1947). В общем случае и для Бозе-газа выполняется негэнтропийный принцип Л. Бриллюэна (Бриллюэн, 1960). Из соотношения (47) следует, что энтропия равновесного состояния $\mathcal{S}_{q0}$ больше, чем энтропия произвольного состояния $\mathcal{S}_q$, $\mathcal{S}_q \leq \mathcal{S}_{q0}$.

Сравнивая значения энтропий при условии Гиббса, получим из уравнения (8.46) теорему Гиббса в виде неравенства (8.47). Таким образом, увеличение энтропии к ее максимальному равновесному значению происходит с потерей информации различия, то есть увеличи-

---

[19] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределенная функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

вается статистическое разупорядочение и понижается статистическое упорядочение микросостояний неэкстенсивной системы. Поскольку информация различия является функцией Ляпунова с фиксированным знаком, то равновесие будет устойчивым, если выполняется неравенство

$$d\mathcal{I}_q(t)/dt = -d(\mathcal{S}_q(t) - \mathcal{S}_{q0})/dt \le 0. \qquad (8.48)$$

Таким образом, при стремлении q-системы, состоящей из элементарных частиц Бозе-газа, к равновесному состоянию во временной эволюции информация различия уменьшается. Из (8.48) следует H-теорема для открытых неравновесных неэкстенсивных q-систем (неравенство для энтропии Тсаллиса)

$$dS_q(t)/dt > 0, \qquad (8.49)$$

которое справедливо при приближении к состоянию полного статистического равновесия. Эта теорема утверждает, что q-энтропия системы непрерывно растет в направлении равновесия, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения. Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы Тсаллиса при спонтанных переходах.

Заметим, что тот факт, что q-энтропия квазиаддитивна, и энтропия совокупной системы больше, чем сумма энтропий отдельных подсистем, указывает на то, что совокупная система термодинамически более стабильна (Landsberg, Vedral, 1998).

8.4. Энтропия световых квантов Бозе. Черное излучение

Электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии (так называемое черное излучение) можно рассматривать как фотонный газ. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе−Эйнштейна. Поскольку фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), то состоящий из фотонов газ можно считать идеальным. Для возможности установления теплового равновесия в излучении необходимо наличие хотя бы небольшого количества материальной среды (например, газа). Механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается при этом в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к существенной специфической особенности фотонного газа – число частиц $\mathcal{N}$ в нем является переменной величиной и само должно определиться из условий теплового равновесия, что приводит к равенству нулю химического потенциала μ фотонного газа (см. Ландау, Лифшиц, 1964).

Следовательно, распределение фотонов по различным квантовым состояниям j (уровням энергии) с определенными энергиями $\varepsilon_j := \hbar\omega_j$ (где ω_j – собственная частота излучения в данном объеме $V_{\mathcal{N}}$) определяется формулой (8.32) с $\mu = 0$:

$$\bar{n}_j = \frac{1}{\left[1+(q-1)\frac{\hbar\omega_j}{k_{\mathcal{B}}T}\right]^{1/q-1} - 1} = \frac{1}{\exp_{2-q}\left(\frac{\hbar\omega_j}{k_{\mathcal{B}}T}\right) - 1} . \quad (8.50)$$

Это есть так называемое обобщенное распределение Планка в статистике Тсаллиса. Считая далее объем системы $V_{\mathcal{N}}$ достаточно большим, перейдем указанным выше способом от дискретного к непрерывному распределению собственных частот излучения.

$$D_\omega = \frac{1}{\left[1+(q-1)\frac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right]^{1/q-1} - 1} = \frac{1}{\exp_{2-q}\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right) - 1} . \quad (8.51)$$

Заметим, что в силу определения (8.11) экспоненты Тсаллиса, второе представление распределения D_ω в формуле (8.51) справедливо в том случае, когда при $q<1$ имеет место неравенство $\hbar\omega / k_{\mathcal{B}}T < (1-q)^{-1}$, или когда при $q>1$ и $\hbar\omega / k_{\mathcal{B}}T \geq (1-q)^{-1}$.

Учитывая непрерывное распределение энергии фотонов, плотность квантовых состояний фотонов с частотами собственных колебаний в интервале между ω и $\omega + d\omega$ может быть задана как (см. Ландау и Лифшиц, 1964)

$$d\Gamma = (V_{\mathcal{N}}\omega^2 / \pi^2 c^3) d\omega , \quad (8.52)$$

где $c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \mathit{см/сек}$ – скорость света в вакууме, а ω – угловая частота. Умножив распределение (8.51) на эту величину, найдем число фотонов в данном интервале частот:

$$d\mathcal{N}_{rad}(\omega,T,q) = V_{\mathcal{N}} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right)-1\right]^{-q} d\omega, \tag{8.53}$$

а умножив еще на $\hbar\omega$, получим энергию излучения, заключенную в этом же участке спектра:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q) = V_{\mathcal{N}} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3\left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right)-1\right]^{-q} d\omega. \tag{8.54}$$

Формула (54) для спектрального распределения энергии черного излучения является обобщенной формулой Планка в статистике Тсаллиса. Будучи выражена через длины волн $\lambda = 2\pi c/\omega$, она принимает вид:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\lambda,T,q) = -V_{\mathcal{N}} \frac{16\pi^2 c\hbar}{\lambda^5}\left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{2\pi\hbar c}{k_{\mathcal{B}}T\lambda}\right)-1\right]^{-q} d\lambda. \tag{8.55}$$

Обобщенный закон Планка (8.51) описывает распределение электромагнитной энергии (или распределение плотности фотонов), излучаемой черным телом при данной температуре T. Закон Планка может быть представлен в различных вариантах, включающих такие параметры, как плотность потока или спектральное распределение. Два предельных случая, а именно, $\hbar\omega \ll k_{\mathcal{B}}T$ и $\hbar\omega \gg k_{\mathcal{B}}T$, заслуживают особого внимания.

В низкочастотном или высокотемпературном пределе ($\hbar\omega \ll k_{\mathcal{B}}T$) из соотношения (8.54), при учете свойства (8.17) функции $\underset{x\to 0}{\exp_{2-q}(x) \cong 1 + x + \ldots}$, получим:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q) = V_{\mathcal{N}} \frac{k_{\mathcal{B}}T}{\pi^2 c^3}\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right)^{1-q}\omega^2 d\omega =$$

$$= V_{\mathcal{N}} \frac{k_{\mathcal{B}}T}{\pi^2 c^3}\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right)^{1-q}\omega^2 d\omega = V_{\mathcal{N}} \frac{\hbar^{1-q}}{\pi^2 c^3}(k_{\mathcal{B}}T)^q \omega^{3-q}. \tag{8.56}$$

Эту формулу можно считать аналогом (q -обобщением) классической формулы Рэлея–Джинса $d\mathcal{E}(\omega) = V_{\mathcal{N}}(\pi^2 c^3)^{-1} k_{\mathcal{B}}T\omega^2 d\omega$ в статистике Тсаллиса. Она справедлива, если $1 > q \to -\infty$. Из (8.56) видно, что с уменьшением q излучение черного тела излучает меньше энергии по сравнению со стандартным излучением закона Рэлея–Джинса.

$$=V_{\mathcal{N}}\,\frac{k_{\mathcal{B}}T}{\pi^2c^3}\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right)^{1-q}\omega^2 d\omega = V_{\mathcal{N}}\,\frac{\hbar^{1-q}}{\pi^2c^3}(k_{\mathcal{B}}T)^q\,\omega^{3-q}\,. \tag{8.56}$$

В обратном предельном случае больших частот ($\hbar\omega \gg k_{\mathcal{B}}T$) соотношение (8.54) при учете формулы $\exp_{2-q}(x)=1/\exp_q(-x)$ дает:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q)=V_{\mathcal{N}}\,\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\,\omega^3\left[\exp_q\left(-\frac{\hbar\omega}{k_{\mathcal{B}}T}\right)\right]^q d\omega\,. \tag{8.57}$$

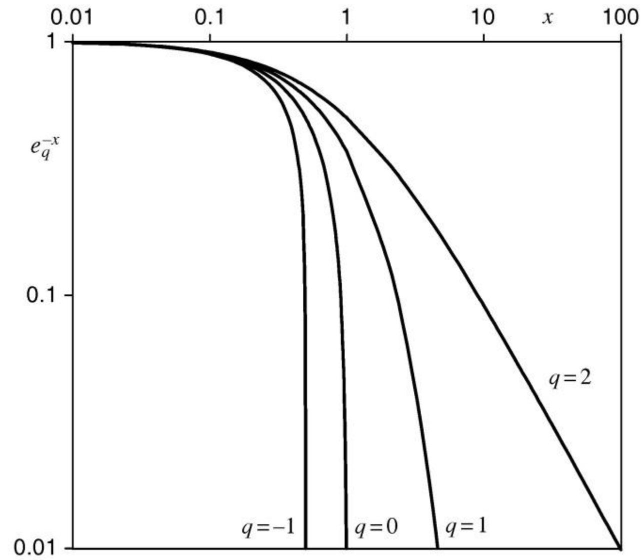


Рис.8.1. Функция $\exp_q(-x)$ для типичных значений q (в $\log-\log$ масштабе). При $q>1$ она имеет асимптотический наклон, равный $-1/(1-q)$ (Tsallis, 2009).

При написании (8.57) использовано свойство $\underset{x\to\infty}{\exp_q(-x)}=0$ деформированной экспоненты Тсаллиса (см. Рис.8.1). Выражение (8.57) можно рассматривать как q-обобщение классического закона Вина.

Заметим, что в пределе слабой связи $q\to1$ формулы (8.56) и (8.57) восстанавливают свои стандартные выражения.

Термодинамика черного излучения. Вычислим теперь термодинамические характеристики чернотельного излучения. Интегрируя (8.54) по всем частотам, получим полную энергию фотонного газа (черного излучения)

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V_{\mathcal{N}} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 \left[\exp_{2-q}(\hbar\omega / k_{\mathcal{B}} T) - 1\right]^{-q} d\omega. \tag{8.58}$$

Используя обозначение $x := \hbar\omega / k_{\mathcal{B}} T$, перепишем формулу (8.58) в виде:

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V_{\mathcal{N}} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_{\mathcal{B}} T}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty x^3 \left[\exp_{2-q}(x) - 1\right]^{-q} dx. \tag{8.59}$$

В выражение (8.59) входит интеграл вида $\int_0^\infty x^3 \left[\exp_{2-q}(x) - 1\right]^{-q} dx$, который при $q \to 1$ равен $\pi^4 / 15 \simeq 6.49394$ (см. Ландау, Лифшиц, 1964).

Обозначим интеграл через

$$J_q^{(n)} := \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty x^n \left[\exp_{2-q}(x) - 1\right]^{-q} dx. \tag{8.60}$$

(см. Приложение Б) для его вычисления в Приложении). Тогда для полной энергии излучения будем иметь:

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V_{\mathcal{N}} T^4 \frac{\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15 c^3 h^3} J_q^{(3)} = a J_q^{(3)} V_{\mathcal{N}} T^4 = a_q V_{\mathcal{N}} T^4, \tag{8.61}$$

где $a_q := a J_q^{(3)}$; $a = \frac{1}{15} \frac{\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{c^3 \hbar^3} = 7{,}56566(7) \cdot 10^{-15} \frac{эрг}{см^3 К^4}$ – постоянная давления излучения.

Как известно, при $\mu = 0$ термодинамический потенциал $\Omega_{rad}(V_{\mathcal{N}}, T, q)$ совпадает со свободной энергией $\mathcal{F}_{rad}(V_{\mathcal{N}}, T, q)$. При использовании формулы (8.41), в которой положим $\mu = 0$ и перейдем обычным образом от суммирования к интегрированию, для величины $\mathcal{F}_{rad}$ можно получить

$$\beta\mathcal{F}_{rad} = \int_0^\beta \mathcal{E}_q d\beta = a_q V_\mathcal{N} \int_0^\beta \beta^{-4} d\beta = -\frac{1}{3} a_q V_\mathcal{N} \beta^{-3}. \tag{8.62}$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_{rad}(V_\mathcal{N}, T, q) = -V_\mathcal{N} \frac{(k_\mathcal{B}T)^4 \pi^5}{45(c\hbar)^3} J_q^{(3)} = -\frac{1}{3} a_q V_\mathcal{N} T^4 = -\frac{1}{3}\mathcal{E}_{rad}. \tag{8.62*}$$

Энтропия чернотельного излучения в статистике Тсаллиса равна

$$\mathcal{S}_{rad}(V_\mathcal{N}, T, q) = -\frac{\partial \mathcal{F}_{rad}}{\partial T} = \frac{4}{3} a_q V_\mathcal{N} T^3. \tag{8.63}$$

Она пропорциональна кубу температуры.

Полная энергия излучения, согласно (8.35), равна

$$\mathcal{E}_q = T\mathcal{S}_q + \mathcal{F}_q = a_q V_\mathcal{N} T^4 = -3\mathcal{F}_q. \tag{8.64}$$

Таким образом, полная энергия черного излучения пропорциональна четвертой степени температуры (закон Больцмана).

Для теплоемкости чернотельного излучения $C_{rad,\mathcal{V}} := \left(\partial\mathcal{E}_{rad} / \partial T\right)_\mathcal{V}$ имеем:

$$C_{rad,\mathcal{V}} = 4V_\mathcal{N} a_q T^3. \tag{8.65}$$

Наконец, давление и уравнения состояния определяются соотношениями:

$$P_{rad}(T, q) = -\left(\partial\mathcal{F}_{rad} / \partial V_\mathcal{N}\right)_T = a_q T^4 / 3, \tag{8.66}$$

$$P_{rad} \cdot V_\mathcal{N} = V_\mathcal{N} a_q T^4 / 3 = \mathcal{E}_{rad} / 3. \tag{8.67}$$

Таким образом, несмотря на зависимость термодинамических величин от параметра деформации q, уравнение для полной энергии излучения (8.64) и уравнение состояния (8.67) остаются неизменными и в формализме Тсаллиса.

Для полного числа фотонов в черном излучении согласно (8.53) и (8.60), имеем:

$$\mathcal{N}_{rad}(T, q) = \int_0^\infty x^2 \left[\exp_{2-q}(x) - 1\right]^{-q} dx = V_\mathcal{N} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{k_\mathcal{B}T}{c\hbar}\right)^3 J_q^{(2)}. \tag{8.68}$$

Результаты этой главы использованы в качестве теоретического обоснования экспериментальных исследований чернотельного излучения, в частности космического микроволнового фонового излучения.

Библиография

Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: ИЛ. 1960. 392 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо−Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А. В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. 567 с.

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications”. Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? М.: ИЛ. 1947.147 с.

Anchrordoqui L.A., Torres D.F. Non-extensivity effects and the highest energy cosmic ray affair // Phys. Lett. A. 2001. V. 283. P. 319-322.

Bregman L.M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming // USSR computational mathematics and mathematical physics. 1967. V. 7. № 3. P. 200-217.

Büyükkilic F., Demirhan D. A fractal approach to entropy and distribution functions // Phys. Lett. A. 1993. V.181. P. 24-28**.**

Büyükkilic F., Demirhan D. A unified grand canonical description of the nonextensive thermostatistics of the quantum gases: Fractal and fractional approach // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 14. P. 705-711.

Chamati H., Djankova A.T., Tonchev N.S. On the application of nonextensive statistical mechanics to the black-body radiation // Physica A. 2006. V. 360. P. 297-303.

Cichocki A., Amari S. Families of Alpha-Beta- and Gamma-Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities // *Entropy.* 2010. V. *12.* № 6. P. 1532-1568.

Curado E. M. F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. A: Mathematical and General. 1991. V. 24. № 2. P. L69-72.

Daroczy Z. Generalized information function // Inform. Control. 1970. V.16. P. 36-51.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications // Oxford University Press. 2004. 440 p.

Grigolini P., Tsallis C., West B.J. Eds., “Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics” // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. 13, № 3. P. 367.

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30-35.

Herrmann H.J., Barbosa M., Curado E.M.F. Eds. “Trends and perspectives in extensive and non-extensive statistical mechanics”// Physica A. 2004. V. 344. № 3-4. P. v-vi.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics. В сб. Statistical Physics 3, Lectures from Brandeis Summer Institute 1962. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1963. p.181.

Kaniadakis G., Lissia M., Rapisarda A. Eds. “Non Extensive Thermodynamics and Physical Applications” // Physica A. 2002. V. 305. № 1-2. P. xv-xvii.

Kaniadakis G., Carbone A., Lissia M. Eds. “News, expectations and trends in statistical physics” // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1. P. xi-xi.

Kaniadakis G., Lissia M. Eds. “News and Expectations in Thermostatistics” // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340. № 1. P. xv-xix.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. № 2. P. 137-149.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Lenzi E.K,. Mendes R.S. Blackbody radiation in nonextensive Tsallis statistics: Exact solution // Phys. Lett. A. 1998. V. 250. P. 270-274.

Leubner M.P. Nonextensive Theory of Dark Matter and Gas Density Profiles // Astrophys. J. 2005. V. 632. L1–L4.

Lima J.A.S., Silva R. Jr., Santos J. Plasma oscillations and nonextensive statistics // Phys.Rev. E. 2000. V. 61. № 3. P. 3260-3263 **.**

Ma P., Zheng Y., Qi G. The nonextensive Bose-Einstein condensation and photon gas with parameter transformation // Eur. Phys. J. Plus. 2019. V 134. P. 502 (1-11).

Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis'entropy maximization procedure revisited // Physica A. 2000. V. 286. P. 489-502.

Martinez S., Pennini F., Plastino A., Tessone C. J. Blackbody radiation in a nonextensive scenario // Physica A. 2001. V. 295. P. 224-229.

Martinez S., Pennini F., Plastino A., Tessone C.J. *q*-Thermostatistics and the black-body radiation problem // Physica A. 2002. V. 309. P. 85-105.

Mather J.C., Cheng E.S., Cottingham D.A., Eplee R.E., Fixsen D.J., Hewagama T., Isaacman R.B., Jensen K.A, Meyer S.S., Noerdlinger P.D., Read S.M, Rosen L.P., Shafer R.A., Wright E.L., Bennett C.L., Boggess N.W, Hauser M.G., Kelsall T., Moseley S.H., Silverberg R.F, Smoot G.F., Weiss R., Wilkinson D.T. Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cobe 1firas instrument // Astrophys. J. 1994. V. 420. P. 439-444.

Plastino A.R., Plastino A., Vucetich H. A quantitative test of Gibbs' statistical mechanics // Physics Let. A. 1995. V. 207. P. 42-46.

Pessah M.E, Torres D.F., Vucetich H. Statistical mechanics and the description of the early universe. (I). Foundations for a slightly non-extensive cosmology // Phys. A: Statis. Mech. 2001. V. 297. № 1-2. P. 164-200.

Rovenchak A. Ideal Bose-gas in nonadditive statistics // Low temperature physics. 2018. V. 44. №. 10. P. 1025-1031.

Sistema P. D., Vucetich H. Cosmology, oscillating physics, and oscillating biology // Phys. Rev. Lett. 1994. V.72. №. 4. P. 454-457.

Tirnakli U., Büyükkiliç F., Demirhan D. Generalized Distribution Functions and an Alternative Approach to Generalized Planck Radiation Law // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1997. V. 240. № 3-4. P. 657-664.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C., Sa Barreto F.C., Loh E.D. Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation // Physical Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 1448-1451.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1-35.

Wang Q.A., Le Méhauté A. Nonextensive black-body distribution function and Einstein's coefficients *A* and *B* // Phys. Lett. A. 1998. V. 242. P. 301-306.

Wang Q.A., Nivanen L., Le Méhauté A. Generalized blackbody distribution within the dilute gas approximation // Physica A. 1998. V. 260 P. 490-498.

Zaripov R. G. Elementary particle physics and field theory. Evolution of the difference information in the process of the fermi and bose gas self-organization for nonextensive systems // Russian Physics Journal. 2009. V. 52. №. 4. P. 329-336.

ГЛАВА 9

Вывод соотношениний взаимности Онсагера для феноменологичесих коэффициентов в рамках неэкстенсивной термодинамики Тсаллиса

В рамках неэкстенсивной термодинамики Тсаллиса выведены соотношения симметрии Онсагера для феноменологических коэффициентов в линейных уравнениях регрессии для четных и нечетных малых флуктуаций макроскопических параметров состояния. Эти соотношения отражают на макроскопическом уровне инвариантность микроскопических уравнений движения относительно обращения времени. Также как в случае классической статистики Больцмана–Гиббса, проведенный вывод опирается на теорию равновесных флуктуаций динамических параметров состояния и на свойство инвариантности флуктуаций относительно инверсии времени. При этом использован постулат Онсагера, согласно которому затухание равновесных флуктуаций термодинамических переменных описывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Традиционные соотношения взаимности для экстенсивных систем получаются из выведенных соотношений в случае, когда параметр деформации q*, входящий в параметрический функционал энтропии Тсаллиса, равен единице.*

Введение

Как известно, в основе статистики Больцмана–Гиббса лежит постулат о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что фазовое пространство не содержит запрещенных состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к экспоненциальному распределению вероятности состояний системы (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных), или, в случае кинетической теории, к максвелловскому распределению скоростей. Кроме этого, в основе этой статистики лежит фундаментальное предположение о малости радиуса взаимодействия между отдельными элементами системы по сравнению с размерами самой системы. Поскольку в большинстве обычных систем силы между отдельными ее частями короткодействующие, то каждая «молекула» чувствует лишь несколько ближайших соседей. Таким образом, аддитивность энтропии и других термодинамических параметров для равновесных или близких к равновесию систем является следствием локального взаимодействия между отдельными элементами системы.

Вместе с тем, существует широкий класс сложных систем, элементы которых взаимодействуют глобально, чему предшествует снижение симметрии системы, связанное с формированием коллективных мод интенсивных переменных. В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической термодинамики, известны многочисленные примеры подобных систем, поведение и свойства которых являются аномальными с точки зрения классической статистики и равновесной термодинамики. Примером таких аномальных систем являются, например, в астрофизике газопылевые астрофизические диски достаточно больших размеров, существенным признаком которых является несводимость всей системы к простой сумме ее частей. Как известно, сила гравитационного притяжения между любыми телами падает с расстоянием достаточно медленно, обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Поэтому в самогравитирующих астрофизических дисках каждая частица «чувствует» не только ближайших соседей, а всю систему целиком (всю совокупность остальных частиц). Другими словами, отдельные части дискового облака будут взаимодействовать не только на границе их соприкосновения, но и глобально всеми своими объемами (Kolesnichenko, Marov, 2014; Kolesnichenko, 2017). Именно по этой причине моделирование эволюции дискового вещества на основе классической энтропии Больцмана–Гиббса $S^{BG} \equiv -k\int p \ln p \, d\mathbf{\Omega}$ не является в общем случае вполне адекватным. Это означает, что в самогравитирующих системах сильное гравитационное взаимодействие является причиной того, что дисковая система относится к числу сложных (аномальных) систем, для которых характерна слабая хаотизация фазового пространства, вследствие чего нарушается аддитивность ряда экстенсивных термодинамических параметров (в частности, энтропия в таких системах не будет аддитивной величиной) и традиционное экспоненциальное статистическое распределение вероятности состояний приобретает степенной характер (см., например, Колесниченко, Четверушкин, 2014; Колесниченко, 2015, 2018a-d, 2019).

Эффекты памяти также приводят к нарушению гипотезы молекулярного хаоса, поскольку движения отдельных частиц такой системы являются взаимообусловленными (т.е. сильно коррелированными). Существуют также системы, в которых имеются нелокальные корреляции, сильная взаимозависимость между всеми элементами системы (см., например, Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013; Kolesnichenko, 2014). Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Таким образом, построение статистической механики и термодинамики сложных неэкстенсивных систем является важной проблемой, как современной теоретической физики, так и смежных с ней наук. Начало систематического изучения в этом направлении исследований связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой им впервые был введен параметрический функционал

$$S_q(p) \equiv \frac{k}{q-1}\left(1-\int p^q d\mathbf{\Omega}\right) \tag{9.1}$$

для статистической энтропии, предназначенный для описания эволюции аномальных систем с сильным силовым взаимодействием и сильными корреляциями отдельных ее частей, а также с фрактальным характером фазового пространства. Энтропийный индекс q (параметр деформации) в определении энтропии $S_q(p)$ представляет собой вещественное число, принадлежащее области $q \in \mathcal{R}$ (часто это просто лишь подгоночный параметр задачи). Форма энтропии Тсаллиса позволяет учитывать важную особенность поведения аномальных систем, связанную с вероятностью реализации функции распределения $p(\mathbf{r})$. При $q>1$ в системе реализуются коллективные «эффективные» степени свободы и чем больше q, тем больше их вклад в организацию системы. Равновесная функция распределения вероятности $p(\mathbf{r})$, «экстремизирующая» энтропию Тсаллиса, носит степенной характер, причем при больших значениях энергии она убывает при $q>1$ (не экспоненциально быстро, а степенным образом), а при $q<1$ это распределение обрезается на некотором конкретном значении энергии. Благодаря этому статистическая термодинамика Тсаллиса описывает события практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана–Гиббса и классической термодинамикой.

В настоящее время теория неэкстенсивных систем существенно развивается в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять ее природу, возможности и ограничения (см. библиографию на сайте http:/tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется). При этом возникают многочисленные новые математические проблемы статистики неэкстенсивных систем, требующие своего решения. Среди них одной из важных является проблема обоснования в рамках статистики Тсаллиса знаменитых «соотношений взаимности» Онсагера между коэффициентами линейных уравнений переноса, выражающих феноменологические законы, которым подчиняются необратимые процессы в механической системе. Эти соотношения симметрии отражают на макроскопическом уровне инвариантность микроскопических уравнений движения относительно операции обращения знака времени. Они по своему существу являются соотношениями макроскопическими. Однако исходными для получения этих соотношений в классической статистике являются микроскопические, обратимые во времени уравнения механики. Таким образом, теория Онзагера позволяет с помощью статистической механики связать микроскопические и макроскопические свойства достаточно долго изолированной системы, успевшей перейти в состояние термодинамического равновесия. При этом теория базируется на трех основаниях: на теории флуктуаций, на микроскопической обратимости и на гипотезе существования линейных законов затухания флуктуаций термодинамических параметров (основной гипотезе Онзагера).

В настоящей главе при использовании этих трех оснований теории Онзагера, дано обоснование в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса соотношений взаимности кинетических коэффициентов для необратимых процессов в неэкстенсивных системах. Насколько известно автору данной монографии подобные попытки предпринимались в литературе всего лишь дважды (см. Cáceres, 1995; Chame, de Mello, 1997). Однако в этих совершенно не доступных отечественному исследователю публикациях данная проблема рассмотрена лапидарно, без необходимой полноты, в частности, без учета влияния на структуру соотношений взаимности Онзагера четных и нечетных параметров состояния, являющихся функциями скоростей элементарных частиц.

9.1. Некоторые элементы статистики Тсаллиса

Напомним здесь базовые элементы формализма неаддтивной статистики Тсаллиса, обобщающей идеи и подходы классической статистической механики на негиббсовые (степенные) вероятностные распределения и приведенные здесь с целью сравнительного сопоставления столь различных статистик. Более детальное рассмотрение этого вопроса можно найти в монографиях (Tsallis, 1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; 2006; Sugiyama, 2004; Kaniadakis, Lissia, 2004**;** Gell-Mann, Tsallis, 2004; Swinney, Tsallis, 2009; Herrmann и др.,2004; Boon, Tsallis, 2005; Колесниченко, 2019)

Параметрическая энтропии Тсаллиса. Рассмотрим адиабатически изолированную систему, состоящую из N частиц, причем N – очень большое число. Микроскопическое состояние системы описывается точкой $\mathbf{r} \equiv \{\mathbf{q}^N \mathbf{p}^N\} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_N; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N\}$ в фазовом пространстве, где $\mathbf{q}^N$ и $\mathbf{p}^N$ соответственно канонические координаты и импульсы частиц.

В статистической механике Тсаллиса (для непрерывных величин при вероятностной нормировке $\int p(\mathbf{r}) d\mathbf{\Omega} = 1$, для фазовой функции распределения $p(\mathbf{r})$, $0 \le p(\mathbf{r}) < \infty$) энтропия задается функционалом (9.1), который можно записать также в виде:

$$S_q(p) \equiv -k \int p^q(\mathbf{r}) \ln_q p(\mathbf{r})\, d\mathbf{\Omega} = -k \langle \ln_q p(\mathbf{r}) \rangle_q, \tag{9.2}$$

где k − постоянная Больцмана. Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем 6N-мерным фазовым пространством, безразмерный пространственный элемент которого может быть представлен в следующей современной форме $d\mathbf{\Omega} \equiv \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} d\mathbf{q}^N d\mathbf{p}^N$.

При написании (9.2) использован так называемый, «деформированный логарифм» (Tsallis, 1999, 2009)

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \quad (x \in \mathcal{R}^+ ;\ q \in \mathcal{R}), \tag{9.3}$$

а таже взвешенное ненормированное среднее, которое для любой физической микроскопической величины $a(\mathbf{r})$ в состоянии с распределением $p(\mathbf{r})$ определяется (в статистике Курадо−Тсаллиса) соотношением (Curado, Tsallis,1991).

$$\langle a \rangle_q \equiv \int a(\mathbf{r}) p(\mathbf{r})^q d\mathbf{\Omega}, \quad 0 < \int p(\mathbf{r}) d\mathbf{\Omega} < \infty. \tag{9.4}$$

Равновесные состояния сложных q-систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Каноническая равновесная функция распределения Гиббса $p(\mathbf{r})$ в статистике Курадо−Тсаллиса, «экстремизирующая» q-энтропию Тсаллиса (9.1), может быть получена, как и в классическом случае, путем использования вариационного принципа Джейнса при выполнении следующих дополнительных условий: сохранения нормировки (9.4) функции распределения вероятности и при заданном значении средней энергии

$$E_q \equiv \langle H \rangle_q = \int H(\mathbf{r}) p^q d\mathbf{\Omega} = const,$$

где функция Гамильтона $H = H(\mathbf{r})$ задается математической моделью изучаемых физических процессов в системе. В результате деформированное каноническое распределение Гиббса с параметрами q, β имеет вид (см., например, Колесниченко 2018a, 2019)

$$p(\mathbf{r},\beta) = Z_q^{-1}(\beta)\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})\right]^{1/(1-q)}, \tag{9.5}$$

где

$$Z_q(\beta) \equiv \int\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})\right]^{1/(1-q)} d\mathbf{\Omega} \tag{9.6}$$

– обобщенный статистический интеграл, определяемый из условия нормировки (9.4); множитель Лагранжа β (обратная эффективная температура) определяется из уравнения, получаемого подстановкой (9.5) в соотношение $E_q \equiv \langle H \rangle_q$.

При $1 - k^{-1}(1-q)\beta H > 0$ и $q = 1$ из (9.5) и (9.6) следует классическое каноническое распределение Гиббса

$$p(\mathbf{r},T) = \frac{\exp\left\{-H(\mathbf{r})/kT\right\}}{\int \exp\left\{-H(\mathbf{r})/kT\right\} d\mathbf{\Omega}}$$

для аддитивных систем, находящихся в термостате с температурой $T = 1/\beta$.

Деформированная экспонента Тсаллиса. Распределение (9.5) удобно представить в классической форме Больцмана

$$p(\mathbf{r},\beta) = Z_q^{-1}(\beta)\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H(\mathbf{r})\right]^{1/(1-q)} = Z_q^{-1}(\beta)\exp_q\left\{-k^{-1}\beta H(\mathbf{r})\right\}, \tag{9.7}$$

выражая стоящую в (9.5) степенную функцию $[..]^{1/1-q}$ через деформированную экспоненту Тсаллиса (q-экспоненциальную функцию), которая определяется следующим образом:

$$\exp_q x \equiv [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} . \tag{9.8}$$

Используя определения (9.3) и (9.8), можно убедиться, что имеют место следующие используемые ниже соотношения для деформированной экспоненты и деформированного логарифма (см, например, Tsallis, 2009):

$$\exp_q(\ln_q x) = \ln_q(\exp_q x) = x \quad (\forall x; \forall q), \tag{9.9}$$

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q)(\ln_q x)(\ln_q y), \quad \left(\forall (x,y); \forall q\right), \tag{9.10}$$

$$\frac{d}{dx}\exp_q x = (\exp_q x)^q, \quad (\forall q), \quad \frac{d}{dx}\ln_q x = \frac{1}{x^q} \ (x > 0; \forall q). \qquad (9.11)$$

9.2. Макроскопические параметры состояния квазиравновесной системы и их флуктуации

Как хорошо известно, для макроскопического описания квазиравновесной системы не нужна полная совокупность динамических переменных, характеризующих ее микроскопическое состояние, а лишь гораздо меньшее их число. Эти переменные могут, например, относиться к экстенсивным свойствам макроскопически бесконечно малых подсистем внутри системы, которые, однако, должны содержать еще достаточно большое (в статистическом смысле) число частиц, так чтобы к ним можно было применить принципы статистической механики. В качестве этих усредненных «крупнозернистых» переменных, которые не сильно отличаются от своих равновесных значений, могут быть выбраны экстенсивные параметры для малой подсистемы, например, масса, электрический заряд, энергия и т.д. Обозначим эту ограниченную систему параметров через A_j $(j = 1,2,...,n)$, где n может быть неопределенно большим, но много меньше N.

Для удобства введем матричные и тензорные обозначения. Будем далее рассматривать величины A_j, как компоненты вектора $\mathbf{A}$. Макроскопическое состояние системы может при этом быть представлено точкой в так называемом $\mathbf{A}$-пространстве, n декартовыми координатами которого являются величины A_j. Переменные $\mathbf{A}$ являются функциями динамических переменных $\mathbf{r} \equiv \{\mathbf{q}^N \mathbf{p}^N\}$ системы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Введем теперь макроскопическую функцию распределения W:

$$W(\mathbf{A})d\mathbf{A} = W(A_1, A_2, ..., A_n)dA_1 dA_2 ... dA_n, \qquad (9.12)$$

которая дает вероятность того, что параметры $\mathbf{A}$ лежат в области $d\mathbf{A}$ вблизи значений $\mathbf{A}$. Далее мы будем рассматривать параметры $\mathbf{A}$ не как динамические переменные $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, а как термодинамические величины, но сохраним при этом для них прежние обозначения (см. Зубарев, 1971; Зубарев и др., 2002). Функция W должна удждовлетворять условию нормировки уже не в фазовом пространстве $d\mathbf{\Omega}$, а в пространстве значений $\mathbf{A}$:

$$\int W(\mathbf{A})d\mathbf{A} = \int W(A_1, A_2, ..., A_n)dA_1 dA_2 ... dA_n = 1. \tag{9.13}$$

Поскольку параметры $\mathbf{A}$ ведут себя как суммы большого числа независимых случайных переменных, то можно воспользоваться центральной предельной теоремой теории вероятностей. Это дает право считать, что по аналогии с классической статистикой Гиббса (см. де Гроот, Мазур, 1964; Зубарев и др., 2002), макроскопическая функция распределения W для q-флуктуаций $\delta_q A_j$ в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса является обобщенным q-гауссианом (см. Приложение С)[20]

$$W = \Omega_{0q}\left\{1 - \frac{1-q}{2k}\sum_{i,j}^{n} \mathrm{g}_{ij}(q)\Delta_q A_j\, \Delta_q A_i\right\}^{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= \Omega_{0q}\exp_q\left\{-\frac{1}{2k}\sum_{i,j}^{n} \mathrm{g}_{ij}(q)\Delta_q A_j\, \Delta_q A_i\right\} =$$

$$= \Omega_{0q}\exp_q\left\{-\frac{1}{2k}\mathbf{g}(q) : \Delta_q \mathbf{A}\Delta_q \mathbf{A}\right\}, \tag{9.14}$$

где

[20]) Принятие формы (9.14) для функции распределения W определяет класс переменных, к которому применимо предложенное здесь рассмотрение. Заметим, что именно такая функция распределения была положена в основу обобщения в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса флуктуационно- диссипативной теоремы в работе (Chame, de Mello, 1994), а также при рассмотрении обобщённой необратимой термодинамики в работе (Cáceres, 1995).

$$\Delta_q A_j \equiv \left[A_j - \langle A_j \rangle_q W(\mathbf{A})^{1-q} \right] \quad (j = 1,2,\ldots,n), \quad \left(\Delta_q \mathbf{A} \equiv \mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle_q W(\mathbf{A})^{1-q} \right)$$
(9.15)

− флуктуация параметра A_j в статистике Курадо−Тсаллиса (см. Curado,Tsallis, 1991; Зарипов, 2002); $g_{ik}(q)$ − элементы симметричной положительно определенной матрицы $\mathbf{g}$ (это значит, что квадратичная форма $\sum_{ik}^{n} g_{ik} x_i x_k$ с действительными x_j является положительно определенной); константа Ω_{0q} определяется из условия нормировки (9.13).

Вводя новое обозначение α для q-флуктуаций переменных $\mathbf{A}$

$$\alpha \equiv \Delta_q \mathbf{A} = \mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle_q W(\mathbf{A})^{1-q}, \tag{9.15}$$

можно вместо (9.14) написать

$$W(\alpha) \equiv \Omega_{0q} \left\{ 1 - \frac{1-q}{2k} \mathbf{g}(q) : \alpha\alpha \right\}^{\frac{1}{1-q}} = \Omega_{0q} \exp_q \left\{ -\frac{1}{2k} \mathbf{g}(q) : \alpha\alpha \right\}. \tag{9.16}$$

После вычисления нормировочной постоянной Ω_{0q} с помощью условия нормировки $\int W(\alpha) d\alpha = 1$, окончательно получим:

$$W(\alpha) = \sqrt{\frac{|\mathbf{g}|}{(2\pi k)^n}} (q-1)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{n}{2}\right)} \exp_q \left\{ -\frac{1}{2k} \mathbf{g}(q) : \alpha\alpha \right\}, \tag{9.17}$$

где $\alpha\alpha$−диадное произведение (матрица с элементами $\alpha_i \alpha_j$); $\Gamma(x)$− гамма- функция. Среднее по Тсаллису значение переменных α равно нулю $\langle \alpha \rangle_q = 0$.

По аналогии с процедурой вычисления всех флуктуаций в классической статистике (см. Зубарев, 1971), вычислим с помощью обобщенного q-гауссиана (9.16) ряд средних значений.

Определим интенсивные параметры $\mathbf{X}_q$ (так называемые термодинамические силы), сопряженные с экстенсивными параметрами α:

$$\mathbf{X}_q \equiv k\frac{\partial}{\partial\alpha}(\ln_q \mathrm{W}) \quad \left(X_{qi} \equiv k\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\ln_q W), \quad (i=1,2,\ldots,n) \right). \tag{9.18}$$

Из этого определения и распределения (9.17), с учетом формул (9.9) и (9.10), следует, что

$$X_{qi} = k\frac{\partial \ln_q W}{\partial\alpha_i} = k\left[1+(1-q)\ln_q \Omega_{0q}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left\{-\frac{1}{2k}\sum_{i,k}^{n} \mathrm{g}_{ik}(q)\alpha_k\alpha_i\right\} =$$

$$= -c(q)\sum_{k}^{n} \mathrm{g}_{ik}(q)\alpha_k\,, \tag{9.19}$$

или

$$\mathbf{X}_q = -\mathbf{s}_q \cdot \alpha, \quad \left(X_{qi} = -\sum_{j}^{n} s_{qij}\alpha_j\,,\ (i=1,2,\ldots,n) \right). \tag{9.20}$$

Здесь $s_{qij} \equiv c(q)\mathrm{g}_{ij}$, $\quad c(q) \equiv 1+(1-q)\ln_q \Omega_{0q}$, $\quad s_{1ij} = \mathrm{g}_{ij}$.

Разрешая соотношения (9.20) относительно α, получим нужные для дальнейшего зависимости

$$\alpha = -\mathbf{s}_q^{-1}\cdot \mathbf{X}_q, \tag{9.21}$$

где $\mathbf{s}_q^{-1}$ представляет собой матрицу, обратную матрице $\mathbf{s}_q$,

$(\mathbf{s}_q\cdot\mathbf{s}_q^{-1}=\mathbf{s}_q^{-1}\cdot\mathbf{s}_q=\mathbf{I})$; $\mathbf{I}$– единичная матрица, с компонентами δ_{ik}; δ_{ik}– символ Кронекера.

Среднее значение диады $\alpha\mathbf{X}$ вычисляется без труда:

$$\langle\alpha\mathbf{X}_q\rangle_q \equiv \int \alpha\mathbf{X}_q W^q d\alpha = k\int \alpha\frac{\partial \ln_q W}{\partial\alpha} W^q d\alpha = k\int \alpha\frac{\partial W}{\partial\alpha}d\alpha\,, \tag{9.22}$$

где мы использовали (9.11) и (9.18), а величина $d\alpha$ обозначает $da_1 da_2 \ldots da_n$.

Интегрирование в выражении (9.22) по частям дает:

$$\langle\alpha\mathbf{X}_q\rangle_q = k\int \alpha\frac{\partial W}{\partial\alpha}d\alpha = k\int \frac{\partial W\alpha}{\partial\alpha}d\alpha - k\int W\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha d\alpha = -k\int W\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha d\alpha\,, \tag{9.23}$$

поскольку на границах области интегрирования функция W обращается в нуль, а производная по вектору α в подынтегральном выражении есть единичная матрица $\mathbf{I}$, так как $\partial a_i / \partial a_k \equiv \delta_{ik}$. Таким образом, в конечном счете, получаем, учитывая нормировку функции $W(\alpha)$, следующее соотношение:

$$\langle \alpha \mathbf{X}_q \rangle_q = -k\mathbf{I}, \quad \left(\langle \alpha_j X_{qi} \rangle_q = -\left\langle \alpha_j \sum_k^n s_{qik}(q)\alpha_k \right\rangle_q = -k\delta_{ji} \right). \tag{9.24}$$

Заметим, что, по аналогии с известной теоремой классической статистики (см. Зубарев и др. 2002), величину $\langle \alpha \mathbf{X}_q \rangle_q$ можно рассматривать или как среднее по ансамблю, или как среднее по времени $\overline{\alpha \mathbf{X}_q}$ для простой одиночной системы.

Используя теперь (9.20) и (9.24), можно получить важный результат: средние квадратичные флюктуации, вычисленные с помощью q-гауссиана (16), определяются матрицей, обратной $\mathbf{s}$:

$$\langle \alpha\alpha \rangle_q = k\mathbf{s}_q^{-1}. \tag{9.25}$$

Учет параметров нечетных функций скоростей частиц. До сих пор рассматривались переменные $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ как четные функции скоростей частиц. Однако в общем случае важны также переменные, являющиеся нечетными функциями скоростей частиц (например, плотности импульсов и др.), которые при изменении направления скоростей частиц меняют свой знак, в отличие от четных переменных, остающихся при этом инвариантными. Эти переменные обозначим как B_j $(j = 1,2,\ldots,m)$.

По аналогии с соотношениями (9.12) введем макроскопическую функцию распределения $W(\mathbf{A},\mathbf{B})d\mathbf{A}d\mathbf{B}$ и ограничимся здесь случаем, когда на систему не действует внешнее магнитное поле. Для совокупности макроскопических переменных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно опять применить центральную предельную теорему и написать обобщенное гауссово q-распределение в виде:

$$W(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{|\mathbf{g}||\mathbf{h}|}{(2\pi k)^{n+m}}}(q-1)^{(n+m)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{n+m}{2}\right)} \times$$

$$\times \exp_q \left\{ -\frac{1}{2k} \left(\mathbf{g}(q) : \alpha\alpha + \mathbf{h}(q) : \beta\beta \right) \right\}, \tag{9.26}$$

где $\beta \equiv [\mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle_q W(\mathbf{A},\mathbf{B})^{1-q}]$ – q-флуктуации переменных $\mathbf{B}$; $\mathbf{g} = \{g_{ij}\}$, $\mathbf{h} = \{h_{ij}\}$ – симметричные положительно определенные матрицы. Заметим, что смешанные члены, содержащие как α, так и β в (26) отсутствуют в силу соотношения $W(\alpha,\beta) = W(\alpha,-\beta)$, которое можно получить, выражая $W(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$ через интеграл по объему в фазовом пространстве и принимая во внимание четности различных входящих в уравнение величин относительно перемены знака скоростей частиц (см. Зубарев и др., 2002).

С помощью функции распределения (9.26) определим два набора термодинамических сил (интенсивных параметров системы):

$$\mathbf{X}_q \equiv k \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln_q \mathrm{W}) = -\mathbf{s}_q \cdot \alpha, \tag{9.27}$$

$$\mathbf{Y}_q \equiv k \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln_q \mathrm{W}) = -\mathbf{f}_q \cdot \beta, \tag{9.28}$$

и получаем по аналогии с (9.24) формулы

$$\langle \alpha \mathbf{X}_q \rangle_q = -k\mathbf{I}, \quad \langle \alpha \mathbf{Y}_q \rangle_q = 0, \tag{9.29}$$

$$\langle \beta \mathbf{Y}_q \rangle_q = -k\mathbf{I}, \quad \langle \beta \mathbf{X}_q \rangle_q = 0. \tag{9.30}$$

Здесь $\mathbf{f}_q = c(q)\mathbf{h}, \quad c(q) \equiv 1 + (1-q)\ln_q \Omega_{0q}, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{h}$.

Для дисперсий распределения (9.26) получаем из (9.29)-(9.30), с учетом (9.27) и (9.28) , следующие соотношения:

$$\langle \alpha\alpha \rangle_q = k\mathbf{s}_q^{-1}, \quad \langle \beta\beta \rangle_q = k\mathbf{f}_q^{-1}, \tag{9.31}$$

$$\langle \alpha\beta \rangle_q = \langle \beta\alpha \rangle_q = 0. \tag{39.2}$$

9.3. Уравнения затухания малых флуктуаций

Согласно гипотезе Онзагера затухание (регрессия) флуктуаций подчиняется в среднем обычным феноменологическим законам. Выражение этих законов дают линейные соотношения между производными по времени параметров α и β и самими этими параметрами:

$$\mathbf{J}_q^{(\alpha)} \equiv \frac{d\alpha}{dt} = -\mathbf{M}^{(\alpha\alpha)} \cdot \alpha - \mathbf{M}^{(\alpha\beta)} \cdot \beta, \tag{9.33}$$

$$\mathbf{J}_q^{(\beta)} \equiv \frac{d\beta}{dt} = -\mathbf{M}^{(\beta\alpha)} \cdot \alpha - \mathbf{M}^{(\beta\beta)} \cdot \beta\ , \tag{9.34}$$

где $\mathbf{M}^{(\alpha\alpha)}, \mathbf{M}^{(\alpha\beta)}$, $\mathbf{M}^{(\beta\alpha)}, \mathbf{M}^{(\beta\beta)}$ – феноменологические коэффициенты. Левые части этих уравнений называются потоками.

Следует отметить, что гипотеза Огзагера о том, что уравнения (9.33) и (9.34) справедливы для малых флуктуаций представляется вполне разумной, хотя строгие пределы ее применимости могут быть установлены только на основе чисто микроскопического подхода. Вместе с тем эмпирическим путем было установлено, что для значений макроскопических параметров α (и/или β) значительно превышающих их среднеквадратичную величину в равновесном состоянии $(\alpha\alpha \gg k\mathbf{g}^{-1})$ средние от этих величин удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям первого порядка (см. де Гроот, Мазур, 1964).

Разрешая соотношения (27) и (28) относительно α и β, получим

$$\alpha = -\mathbf{s}_q^{-1} \cdot \mathbf{X}_q, \tag{9.35}$$

$$\beta = -\mathbf{f}_q^{-1} \cdot \mathbf{Y}_q. \tag{9.36}$$

Вводя (9.35) и (9.36) в (9.33) и (9.34), получаем выражения для потоков, которые выражаются черех термодинамические силы следующим образом:

$$\frac{d\alpha}{dt} \equiv \mathbf{J}_q^{(\alpha)} = \mathbf{L}_q^{(\alpha\alpha)} \cdot \mathbf{X}_q + \mathbf{L}_q^{(\alpha\beta)} \cdot \mathbf{Y}_q, \tag{9.37}$$

$$\frac{d\beta}{dt} \equiv \mathbf{J}_q^{(\beta)} = \mathbf{L}_q^{(\beta\alpha)} \cdot \mathbf{X}_q + \mathbf{L}_q^{(\beta\beta)} \cdot \mathbf{Y}_q, \tag{9.38}$$

где феноменологические коэффициенты $\mathbf{L}_q$ задаются выражениями:

$$\mathbf{L}_q^{(\alpha\alpha)} = \mathbf{M}^{(\alpha\alpha)} \cdot \mathbf{s}_q^{-1}, \quad \mathbf{L}_q^{(\alpha\beta)} = \mathbf{M}^{(\alpha\beta)} \cdot \mathbf{f}_q^{-1},$$

$$\mathbf{L}_q^{(\beta\alpha)} = \mathbf{M}^{(\beta\alpha)} \cdot \mathbf{s}_q^{-1}, \quad \mathbf{L}_q^{(\beta\beta)} = \mathbf{M}^{(\beta\beta)} \cdot \mathbf{f}_q^{-1}. \tag{9.39}$$

Здесь точкой между символами тензоров обозначено внутреннее произведение, например,

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \to (\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})_l = \sum\nolimits_k T_{ik} v_k, \quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{T} \to (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{T})_{ik} = \sum\nolimits_l Q_{il} T_{lk}. \tag{9.40}$$

Согласно соотношениям (9.37) и (9.38), в наиболее общем случае любой поток возникает под действием всех термодинамических сил. Коэффициенты $\{L_{qik}\}$ представляют собой кинетические коэффициенты, т.е. коэффициенты пропорциональности потоков различным термодинамическим силам. При помощи выражений (9.39) можно получить следующие соотношения Онсагера (в случае, когда внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$ отсутствует):

$$\mathbf{L}_q^{(\alpha\alpha)} = \tilde{\mathbf{L}}_q^{(\alpha\alpha)}, \quad \mathbf{L}_q^{(\alpha\beta)} = -\tilde{\mathbf{L}}_q^{(\alpha\beta)}, \quad \mathbf{L}_q^{(\beta\beta)} = \tilde{\mathbf{L}}_q^{(\beta\beta)}, \tag{9.41}$$

которые являются математической формулировкой принципа взаимности кинетических коэффициентов. Здесь через $\tilde{\mathbf{T}}$ обозначена транспонированная матрица, которая получается путем перестановки индексов матрицы $\mathbf{T}$ ($\tilde{T}_{ik} = T_{ki}$).

Приведем вывод этих соотношений в рамках неэкстенсивной статистики.

9.4. Микроскопическая обратимость и доказательство соотношений взаимности Онсагера

Рассмотрим среднее по времени пульсации α_i, взятой в момент времени t, и α_k, отнесенной ко времени $t+\tau$, где значение τ положительно (см. Ландау, Лифшиц, 1964):

$$\overline{\alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int \alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)dt. \tag{9.42}$$

С помощью замены переменных $t \to -t-\tau$, и считая $T \gg \tau$, получаем

$$\overline{\alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int \alpha_i(-t-\tau)\alpha_k(-t)dt. \tag{9.43}$$

Поскольку параметры α_i – четные функции скоростей, то, имея в виду симметрию уравнений механики относительно изменения знака времени (в отсутствии магнитного поля), можно записать

$$\alpha_k(-t)=\alpha_k(t) \ . \tag{9.44}$$

Поэтому, сравнивая формулы (9.42) и (9.43), получаем следующее соотношение:

$$\overline{\alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)}=\overline{\alpha_i(t+\tau)\alpha_k(t)} \, . \tag{9.45}$$

Аналогичное рассмотрение для средних по времени, содержащих β_i, при учете того, что (в отсутствие магнитного поля)

$$\beta_i(t)=-\beta_i(-t) \, , \tag{9.46}$$

приводит к соотношениям

$$\overline{\alpha_i(t)\beta_k(t+\tau)}=-\overline{\alpha_i(t+\tau)\beta_k(t)} \, , \tag{9.47}$$

$$\overline{\beta_i(t)\beta_k(t+\tau)}=\overline{\beta_i(t+\tau)\beta_k(t)} \, . \tag{9.48}$$

Продифференцировав формулы (9.45), (9.47) и (9.48) по τ и приняв затем $\tau=0$, находим

$$\overline{\alpha_i \frac{d\alpha_k}{dt}}=\overline{\frac{d\alpha_i}{dt}\alpha_k} \, , \quad \overline{\alpha_i \frac{d\beta_k}{dt}}=-\overline{\frac{d\alpha_i}{dt}\beta_k} \, , \quad \overline{\beta_i \frac{d\beta_k}{dt}}=\overline{\frac{d\beta_i}{dt}\beta_k} \, . \tag{9.49}$$

Вывод симметричности матрицы кинетических коэффициентов Онсагера. В предположении о том, что средние по времени равны средним по ансамблю, соотношения (9.49) можно переписать в виде:

$$\left\langle \alpha_i \frac{d\alpha_k}{dt} \right\rangle_q=\left\langle \frac{d\alpha_i}{dt}\alpha_k \right\rangle_q , \quad \left\langle \alpha_i \frac{d\beta_k}{dt} \right\rangle_q=-\left\langle \frac{d\alpha_i}{dt}\beta_k \right\rangle_q ,$$

$$\left\langle \beta_i \frac{d\beta_k}{dt} \right\rangle_q=\left\langle \frac{d\beta_i}{dt}\beta_k \right\rangle_q \, . \tag{9.50}$$

Исключая производные по времени в формулах (9.50) с помощью уравнений (9.37) и (9.38), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{qkj}^{(\alpha\alpha)} \langle X_{qj}\alpha_i \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qkj}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\alpha_i \rangle_q = \sum_{j=1}^{n} L_{qij}^{(\alpha\alpha)} \langle X_{qj}\alpha_k \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qij}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\alpha_k \rangle_q , \tag{9.51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{qkj}^{(\beta\alpha)} \langle X_{qj}\alpha_i \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qkj}^{(\beta\beta)} \langle Y_{qj}\alpha_i \rangle_q = -\sum_{j=1}^{n} L_{qij}^{(\alpha\alpha)} \langle X_{qj}\beta_k \rangle_q - \sum_{j=1}^{m} L_{qij}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\beta_k \rangle_q , \tag{9.52}$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{qkj}^{(\beta\alpha)} \langle X_{qj}\beta_i \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qkj}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\beta_i \rangle_q = \sum_{j=1}^{n} L_{qij}^{(\beta\alpha)} \langle X_{qj}\beta_k \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qij}^{(\beta\beta)} \langle Y_{qj}\beta_k \rangle_q . \tag{9.53}$$

Подставляя теперь в уравнения (9.51)-(9.53) выражения (9.29) и (9.30), в результате получим искомые тождества (9.41).

Важно отметить, что при наличии внешнего магнитного поля свойство инвариантности относительно обращения времени означает, что частицы пробегают в обратном направлении свои траектории, если одновременно с обращением скоростей меняет знак и магнитное поле ($t \to -t, \mathbf{B} \to -\mathbf{B}$). Это следует из выражения для силы Лоренца, которая пропорциональна векторному произведению скорости частицы и вектора магнитного поля. Аналогичная ситуация возникает во вращающихся системах. В этом случае частицы должны двигаться в обратном направлении по своим траекториям при изменении скорости частиц и вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения системы, поскольку частицы подвергаются действию силы Кориолиса, пропорциональной векторному произведению скорости частицы и угловой скорости вращения. Легко показать, что вследствие этого соотношения Онзагера (9.41), как и в классическом случае (см., например, де Гроот, Мазур, 1964), принимают вид:

$$\mathbf{L}_q^{(\alpha\alpha)}(\mathbf{B}) = \tilde{\mathbf{L}}_q^{(\alpha\alpha)}(-\mathbf{B}), \quad \mathbf{L}_q^{(\alpha\beta)}(\mathbf{B}) = -\tilde{\mathbf{L}}_q^{(\alpha\beta)}(-\mathbf{B}), \quad \mathbf{L}_q^{(\beta\beta)}(\mathbf{B}) = \tilde{\mathbf{L}}_q^{(\beta\beta)}(-\mathbf{B}). \tag{9.54}$$

Традиционные соотношения взаимности для экстенсивных систем получаются из выведенных здесь соотношений в случае, когда параметр деформации q, входящий в параметрический функционал энтропии Тсаллиса, равен единице.

Библиография

Де Гроот С, Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1964. 456 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах // Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971.416 с.

Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: Физматлит. 2002. Т.1. 431 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. 584 с.

Колесниченко А.В., Четверушкин Б.Н. Вывод гидродинамических и квазигидродинамических уравнений для автотранспортных систем на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 6. 32 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса–Мендеса–Пластино // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018c. № 60. 44 с.

Колесниченко. А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018d. V XLII. P.74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Abe S., Okamoto Y. Eds., "Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications". Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001. ISBN 3-540-41208-5.

Boon J.P., Tsallis C. Eds. "Special issue overview Nonextensive statistical mechanics: new trends, new perspectives" // Europhys. News. 2005. V. 36. № 6. P. 183-186 DOI 10.1051/epn:2005601.

Callen H.B. Thermodynamics. An introduction to the physical theories of equilibrium thermostatics and irreversible thermodynamics. Wiley & Sons, Inc. New York and London. 1960. 369 p.

Curado E.M.F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. A: Mathematical and General.1991. V.24. № 2. P. L69-72

Cáceres M. O. Irreversible thermodynamics in the framework of Tsallis entropy // Physica A. 1995. V. 218. P. 471-481.

Chame A., de Mello E.V.L. The fluctuation-dissipation theorem in the framework of the Tsallis statistics // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1994. V. 27. № 11. P. 3663-3670.

Chame A., de Mello E.V.L. The Onsager reciprocity relations within Tsallis statistics // Physics Letters A. 1997. V. 228. P. 159-163.

Einstein A. Theorie der Opaleszenz von homogenen Flussigkeiten und Flussigkeitsgemische in der Ndhe des kritischen Zustandes // Ann. Phys. (Leipzig). 1910.V. 33. P.1275-1298.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications. Oxford University Press. 2004. 440 p.

Grigolini P., Tsallis C., West B.J. Eds., "Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics" // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. 13, № 3. P. 367.

Herrmann H.J., Barbosa M., Curado E.M.F. Eds. “Trends and perspectives in extensive and non-extensive statistical mechanics” // Physica A 2004. V. 344. № 3/4. P. v-vi.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics”, RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V. 6. № 6. P. 587-597.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research. 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P. 354-365.

Kaniadakis G., Lissia M. Eds. “News and Expectations in Thermostatistics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340, № 1. P. xv-xix.

Kaniadakis G., Carbone A., Lissia M. Eds. “News, expectations and trends in statistical physics” // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1 P. xi-xi.

Sugiyama M. Eds. “Introduction to the topical issue: Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics” // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V.16. № 3. P. 221-222.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P. 479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections //Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382.

ГЛАВА 10

Линейный отклик квантовой неэкстенсивной системы на динамическое внешнее возмущение

В рамках квантовой статистической механики, основанной на параметрической неаддитивной энтропии Тсаллиса, связанной с матрицей плотности, развита динамическая теория линейного отклика неэкстенсивных квазиравновесных систем многих тел, на внешнее зависящее от времени возмущение. В этой главе для неэкстенсивных квантовых систем предложена модификация теории Кубо, разработанная в рамках классической квантовой механики. Построение микроскопической теории линейной реакции проведено на основе обобщённого канонического вида матрицы плотности, полученном при максимизации квантовой энтропии Тсаллиса при осреднении наблюдаемых величин по эскортному распределению. Представлены обобщённые выражение для адмитанса и функции отклика, описывающих линейную реакцию системы (с независящим явно от времени гамильтонианом) на слабое внешнее механическое воздействие. Обсуждается свойство симметрии для релаксационной функции при обращении времени и соотношения взаимности Онзагера для обобщённой восприимчивости. Показано, что эти известные в классической квантовой статистике свойства остаются в силе и для аномальных систем.

Введение

В настоящее время теории неэкстенсивных сложных систем существенно развиваются в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения (см. Библиографию на сайте http:/tsallis. - cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется). Каждая такая теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются не гиббсовыми, а степенными распределениями. В частности, неэкстенсивная статистическая механика Тсаллиса (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988; Abe, 2000a) успешно применяется ко многим сложным системам, начиная от нелинейных диффузионных уравнений, обобщенных кинетических уравнений (Lenzi и др., 2001), Н-теоремы Больцмана (Frank, Daffertshofer, 2001), систем Фоккера−Планка (Frank, Daffertshofer, 2001b), квантовой статистики, до изучения космических систем с дальним силовым взаимодействием (Kolesnichenko, 2017**)**, эволюции астрофизических дисков, межзвездной турбулентности и теории фракталов (Kolesnichenko, Marov, 2013,2014**)**, биофизики, экономики, нейрофизики и многое другое (см. Beck, Schlogl, 1993; Abe, Okamoto, 2001; Gell-Mann, Tsallis, 2004; Tsallis,1999, 2009; Колесниченко 2015, 2016, 2018a,в 2019; Kolesnichenko, Marov, 2013; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013; Kolesnichenko, 2014, 2017).

Среди множества неэкстенсивных систем особое значение имеют малые квантовые системы, основанные на неаддитивной параметрической энтропии Тсаллиса $S_q(\hat{\rho})$ (Wehrl, 1978), связанной с матрицей плотности $\hat{\rho}$, описывающий системы, квантовые состояния которых известны не полностью (Нейман, 1964; Нильсон, Чанг, 2006). При изучении подобных систем возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения (см. Abe, Rajagopal, 2000, 2003; Abe, 2003, 2004, 2006). В их числе, одной из важных, является проблема моделирования реакции квантовой системы на механическое возмущение, нарушающее равновесие (Зубарев,1971; Зубарев и др., 2002). Причиной этих возмущений может быть или совершаемая над системой работа, через изменение её объема, или взаимодействие с другими ансамблями (обладающими другой температурой или химическим потенциалом), или, наконец, включение внешних полей, непосредственно действующих на частицы системы. Этот последний случай необратимых процессов, вызванных механическими возмущениями, рассмотрен в настоящей главе.

Механические возмущения можно полностью описать добавлением к равновесному гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}$ квантовой системы соответствующего оператора энергии возмущения $\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t)$, зависящего от времени[21]. Микроскопическая теория линейной реакции ансамбля классических квантовых систем обычно разрабатывается двумя способами: либо с использованием запаздывающих функций Грина (см., например, Зубарев, 1971; Зубарев и др., 2002), либо методом Кубо, с помощью функций отклика и релаксации (Kubo, 1957; Kubo и др., 1957). Метод Кубо основан на квантовом уравнении Лиувилля с учётом условия, что система в отдалённом прошлом (т.е. при $t=-\infty$) находилась в равновесном состоянии, а затем было «включено» внешнее механическое возмущение. Кубо показал, что отклик системы на внешнее возмущение можно описать формулами, связывающими отклонение $\delta\langle A\rangle$ средних значений $\langle A\rangle$ некоторых динамических переменных A от равновесных значений $\langle A\rangle_{eq}$, с явным видом гамильтониана механического возмущения $\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t)$. Исключительная особенность формул Кубо состоит в том, что они выражают неравновесные свойства в виде средних по состоянию статистического равновесия и имеют весьма общий характер (см. Зубарев, 1971).

Влияние внешних возмущений на средние значения наблюдаемых величин в неэкстенсивной квантовой статистике Тсаллиса также можно описывать либо модифицированными функциями Грина, описывающими линейную реакцию на слабые механические возмущения (см., например, Abe, 1999; Lenzi и др., 1999, 2000), либо на основе модифицированного метода Кубо (Abe, Okamoto, 2001; Guo, Du, 2014), чему мы и последуем в данной работе. Следует заметить, что в неэкстенсивной статистике Тсаллиса в зависимости от способа определения средних значений динамических величин наличествуют различные варианты представлений равновесных ансамблей. Выполненный в данной работе анализ отклика квантовой системы на механические возмущения основан на осреднении наблюдаемых величин по эскортному вероятностному распределению (Abe, 2000b) и на соответствующем степенном представлении канонического равновесного распределения матрицы плотности.

---

[21] По терминологии Кубо возмущения, которые не допускают такого представления, называют термическими.

10.1. Основные определения и статистические свойства квантовой энтропии Тсаллиса

Приступим прежде всего к конструированию равновесной термодинамики квантово-механических ансамблей, основанной на обобщённой неэкстенсивной статистке Тсаллиса. В основу изучения различных статистических квантовых ансамблей неэкстенсивных систем можно положить экстремальные свойства квантовой информационной энтропии (введенной впервые в работе (Wehrl, 1978)) и использовать их для нахождения различных матриц плотности, заменяющих функцию распределения вероятностей в классической статистике (Abe, 2000a). Отметим, кстати, что при обобщении ансамблей Гиббса на случай квантовой статистики фон Нейман исходил именно из экстремальных свойств введенной им энтропии квантового состояния $S(\hat{\rho}) \equiv -\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\right)$ (см. фон Нейман, 1964), где $\hat{\rho}$ – матрица (оператор[22)]) плотности микросистемы, при помощи формализма которой, согласно теореме Глисона (Gleason, 1957), описывается любая квантово-механическая система.

В квантовой неэкстенсивной статистике при вероятностной нормировке

$$\mathbf{Tr}\,\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 1, \tag{10.1}$$

матрицы плотности $\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_r w_r \psi_r(\mathbf{x}) \psi_r^*(\mathbf{x}')$ (в матричном $\mathbf{x}$-представ-лении (см. Приложение C)), описывающей смешанные квантовые состояния, квантовая информационная энтропия Тсаллиса $S_q(\hat{\rho})$ задаётся следующим обобщенным функционалом от оператора плотности (см. Daroczy, 1970; Wehrl, 1978; Tsallis, 1988):

$$S_q(\hat{\rho}) \equiv \frac{1}{q-1}\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho} - \hat{\rho}^q\right). \tag{10.2}$$

Здесь энтропийный индекс q (параметр деформации) представляет собой вещественное число (принадлежащее областисти $q \in \mathcal{R}$), которое характеризует неэкстенсивную особенность (неаддитивность) квантовой системы. Заметим, что шпуровая (-trace) структура определения энтропии (10.2) важна тем, что делает энтропию функциональ-

---

[22)] Далее операторы будем обозначать буквой со «шляпкой» над ней.

но независимой от унитарных преобразований в пространстве состояний, т.е. эта формула справедлива при любом представлении оператора $\hat{\rho}$, а не только при его матричном $\mathbf{X}$-представлении (см., например, Зубарев и др., 2002).

Можно показать, что параметрическая квантовая энтропия (10.2) может быть представлена также в следующих эквивалентных формах:

$$S_q(\hat{\rho}) = -\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}^q ln_q \hat{\rho}\right) = -\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho} Ln_q \hat{\rho}\right). \qquad (10.2^*)$$

Здесь

$$\ln_q \hat{A} \equiv \frac{\hat{A}^{1-q} - 1}{1-q}, \qquad \mathrm{Ln}_q \hat{A} \equiv \frac{\hat{A}^{q-1} - 1}{q-1} = \hat{A}^{q-1} \ln_q \hat{A} \qquad (10.3)$$

– так называемые деформированные логарифмы (Tsallis, 1999, 2009), обладающие, как легко убедиться, следующим свойством: при $q \to 1$, $\ln_q \hat{A} \to \ln \hat{A}$, $\mathrm{Ln}_q \hat{A} \to \ln \hat{A}$. При его использовании энтропия Тсаллиса $S_q(\hat{\rho}) = -\mathbf{Tr}\,(\hat{\rho}^q \ln_q \hat{\rho})$ переходит в $S_1(\hat{\rho}) \equiv -\mathbf{Tr}\,(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ – квантовую энтропию фон Неймана, являющуюся, в свою очередь, квантовым обобщением энтропии Гиббса в классической статистической механике.

Энтропия Тсаллиса (10.2) имеет много полезных свойств. В частности, если состояние совокупной квантовой системы, состоящей из двух независимых подсистем, описывается совместным мультипликативным статистическим оператором $\hat{\rho}^{(1,2)} \equiv \hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}$, где $\hat{\rho}^{(1)}$ и $\hat{\rho}^{(2)}$ – матрицы плотности отдельных подсистем (здесь и далее символом $\otimes$ обозначено матричное произведение), то общая энтропия системы

$$S_q^{(1,2)} = S_q\left(\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right) = \frac{1}{q-1}\left[1 - \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}^{(1,2)}\right)^q\right]$$

неаддитивна, т.е.

$$S_q\left(\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right) = S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right) + S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\right) + (1-q) S_q\left(\hat{\rho}^{(1)}\right) S_q\left(\hat{\rho}^{(2)}\right). \qquad (10.4)$$

Таким образом, неаддитивная квантовая энтропия $S_q\left(\hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}\right)$ является субэкстенсивным (суперэкстенсивным) функционалом при $q>1$ ($q<1$) и экстенсивным функционалом только в пределе слабой связи двух подсистем, когда $q \to 1$.

В обычной квантовой статистике любой случайной динамической переменной A ставится в соответствие эрмитов оператор $\hat{A}$ (см. фон Нейман, 1964) так, что среднее значение этой переменной в состоянии микросистемы, описываемом матрицей плотности $\hat{\rho}$, вычисляется по формуле: $\langle A\rangle_1 = \mathbf{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{A})$. В неэкстенсивной квантовой статистике Тсаллиса для вычисления среднего значения $\langle\hat{A}\rangle_q$ динамической переменной $\hat{A}$ и её флуктуации $\Delta_q\hat{A}$ можно использовать различные формулировки (см., например, Tsallis, 2009). Далее мы воспользуемся следующим их определением:

$$\langle\hat{A}\rangle_q \equiv \frac{\mathbf{Tr}\,(\hat{A}\hat{\rho}^q)}{\mathbf{Tr}\,\hat{\rho}^q} \equiv \mathbf{Tr}\,(\hat{A}\hat{\sigma}_q), \quad \Delta_q\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_q, \tag{10.5}$$

где

$$\hat{\sigma}_q \equiv \hat{\rho}^q \,/\, \mathbf{Tr}\,\hat{\rho}^q, \quad \mathbf{Tr}\hat{\sigma}_q = 1 \tag{10.6}$$

– так называемое нормированное эскортное распределение (Abe, 2000b), для которого.

Важно отметить, что различные статистические ансамбли квантовых систем (как и классических) эквивалентны в термодинамическом отношении, что связано, в частности, с малостью флуктуаций энергии, числа частиц и объёма (см. Зубарев, 1971). Далее мы воспользуемся наиболее удобным для наших целей большим каноническим ансамблем квантовых систем, описывающим контакт с термостатом и резервуаром частиц и определяемым заданием средней энергии и среднего числа частиц.

Экстремальность канонического распределения для неэкстенсивных систем. Рассмотрим ансамбль замкнутых систем с заданным числом частиц и постоянным объёмом, находящихся в тепловом и материальном контакте с окружением. Тогда матрица равновесной плотности $\hat{\bar{\rho}}$ (статистический оператор равновесного распределения) может быть определена из абсолютного экстремума квантовой информационной энтропии Тсаллиса (10.2) при выполнении следующих дополнительных условий:

$$\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle_q \equiv U_q = \mathbf{Tr}\Big(\hat{\sigma}_q\hat{\mathcal{H}}\Big) = const, \tag{10.7}$$

т.е. при заданности осреднённого оператора плотности энергии $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x})$ и при сохранении нормировки (1).

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), равновесная матрица плотности $\hat{\hat{\rho}}$, «экстремизирующая» энтропию Тсаллиса S_q при указанных ограничениях, определяется из условия равенства нулю первой вариации по $\hat{\rho}$ следующего Лагранжиана

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) \equiv -\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}\,\mathrm{Ln}_q\,\hat{\rho}\right) - \beta\frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}^q\hat{\mathcal{H}}\right)}{c_q} - \lambda\mathbf{Tr}\,\hat{\rho}\,. \tag{10.8}$$

Здесь

$$c_q \equiv \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}^q\right) \tag{10.9}$$

– так называемый коэффициент Тсаллиса; β и λ – определяемые из уравнений (10.1) и (10.7) лагранжевы множители, которые связаны с ограничением на осреднённый оператор плотности энергии квантовой системы в неаддитивной статистике Тсаллиса.

Определяя абсолютный экстремум функционала (10.8) из условия $\delta\mathcal{L}(\hat{\rho})/\delta\hat{\rho} = 0$, находим для неэкстенсивных квантовых систем следующее выражение для обобщенного большого канонического распределения оператора плотности $\hat{\hat{\rho}}(\beta_q)$:

$$\hat{\hat{\rho}}(\mathbf{x},\beta_q) = \tilde{Z}_q^{-1}\left\{1-(1-q)\beta_q\left[\left(\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)\right]\right\}^{1/(1-q)} =$$

$$= \tilde{Z}_q^{-1}\exp_q\left\{-\beta_q\left[\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right]\right\}, \tag{10.10}$$

где

$$\tilde{Z}_q(\beta_q) = \mathbf{Tr}\exp_q\left\{-\beta_q\left[\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right]\right\} \equiv \mathbf{Tr}\,\exp_q\left\{-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right\} \tag{10.11}$$

– обобщенная статистическая сумма состояний для канонического квантового ансамбля, определяемая из условия нормировки (10.1); параметр $\beta_q \equiv \beta/\tilde{c}_q$ является обратной физической температурой равновесной квантовой системы, $T_{pf} \equiv \beta_q^{-1}$;

$$\tilde{c}_q \equiv \mathbf{Tr}\left(\hat{\hat{\rho}}^q\right) = (\tilde{Z}_q)^{-q}\,\mathbf{Tr}\,\exp_q\left\{-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right\} \tag{10.12}$$

– значение коэффициента Тсаллиса в равновесном случае; знак тильды « $\sim$ » здесь и далее над осредненными $\tilde{A}_q \equiv \mathbf{Tr}(\hat{A}\hat{\tilde{\sigma}}_q)$ динамическими переменными $\hat{A}$ означает, что осреднение проведено с помощью равновесного распределения (10.10).

В формуле (10.11) и далее везде квантово-механическая флуктуация $\Delta_q\hat{A}$ для любого оператора $\hat{A}$ определяется относительно его равновесного среднего значения, т.е. задаётся соотношением $\Delta_q\hat{A} \equiv \hat{A} - \mathbf{Tr}\left(\hat{\tilde{\sigma}}_q\hat{A}\right)$.

Экспонента Тсаллиса и деформированный логарифм. В формуле (10.10) используется так называемая деформированная экспонента Тсаллиса

$$\exp_q(\hat{A}) \equiv \begin{cases} \left[1+(1-q)\hat{A}\right]^{1/(1-q)}, \text{если} \quad \mathbf{Spec}\left[1+(1-q)\hat{A}\right] \ge 0; \\ 0, \quad \text{в других случаях}, \end{cases} \tag{10.13}$$

причем неравенство $\mathbf{Spec}\left[1+(1-q)\hat{A}\right] \ge 0$ означает, что существует естественное «отключение», когда спектр оператора в скобках имеет отрицательные значения, связанные с действительностью следа.

Легко проверить, что в пределе $q \to 1$ функция (10.12) принимает стандартный вид:

$$\exp(\hat{A}) \equiv \lim_{q\to 1+0} \exp_q(\hat{A}) = \lim_{q\to 1-0} \exp_q(\hat{A}) \quad (\forall q). \tag{10.14}$$

Используя определения (10.3) и (10.12), можно убедиться, что имеют место следующие соотношения для деформированной экспоненты (см., например, Tirnakli, Torres, 2000; Tsallis, 2009):

$$\exp_q(\ln_q \hat{A}) = \ln_q(\exp_q \hat{A}) = \hat{A},$$

$$\exp_q(\hat{A})\exp_q(\hat{B}) = \exp_q\left[\hat{A}+\hat{B}+(1-q)\hat{A}\hat{B}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{A}}\exp_q(\hat{A}) = \left[\exp_q(\hat{A})\right]^q \quad (\forall q). \tag{10.15}$$

Эти формулы будут использованы далее.

Некоторые свойства равновесного распределения. Из распределения (10) следует соотношение

$$\left(\hat{\tilde{\rho}}\tilde{Z}_q\right)^{1-q} = 1-(1-q)\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}. \qquad (10.16)$$

Если умножить (10.16) на $\hat{\tilde{\rho}}^q$ и затем взять шпур, то получим равенство

$$(\tilde{Z}_q)^{1-q}\,\mathbf{Tr}\hat{\tilde{\rho}} = \mathbf{Tr}\left\{\hat{\tilde{\rho}}^q\left[1-(1-q)\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right]\right\} = \mathbf{Tr}\,\hat{\tilde{\rho}}^q, \qquad (10.17)$$

из которого, при учете (10.1) и (10.7), следует важное представление для «равновесного» коэффициента Тсаллиса

$$\tilde{c}_q \equiv \mathbf{Tr}\,\hat{\tilde{\rho}}^q = (\tilde{Z}_q)^{1-q} = 1+(1-q)\tilde{S}_q. \qquad (10.18)$$

Используя (10.18) и вытекающее из формулы (10.10) выражение

$$\tilde{c}_q \equiv \mathbf{Tr}\,\hat{\tilde{\rho}}^q = (\tilde{Z}_q)^{-q}\,\mathbf{Tr}\left\{\exp_q(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}})\right\}^q, \qquad (10.19)$$

получим ещё одно представление обобщённой статистической суммы

$$\tilde{Z}_q(\beta_q) = \mathbf{Tr}\left\{\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right\}^q. \qquad (10.20)$$

Заметим, что согласно (10.10) имеем

$$\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right) \equiv \left\{\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right\}^q \times \left\{1-(1-q)\beta_q\left[\left(\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x})-\tilde{U}_q\right)\right]\right\};$$

отсюда, при учёте двух различных выражений для $\tilde{Z}_q(\beta_q)$ равных

$$\tilde{Z}_q(\beta_q) = \mathbf{Tr}\left\{\exp_q\left(-\beta_q\,\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right\} = \mathbf{Tr}\left\{\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right\}^q,$$

получим

$$\mathbf{Tr}\left\{\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right]^q\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right\} = 0, \qquad (10.21)$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}_q = \frac{\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right]^q}{\tilde{Z}_q} = \frac{Q_q(\hat{\mathcal{H}},\beta_q)}{\mathbf{Tr}\,Q_q(\hat{\mathcal{H}},\beta_q)}. \qquad (10.22)$$

Наконец, при использовании равновесного канонического распределения (10.22) и формулы (10.20) можно получить следующую форму записи для среднего значения $\langle\tilde{A}\rangle_q \equiv \tilde{A}_q$ любой наблюдаемой $\hat{A}$ равновесного ансамбля квантовых систем.

$$\tilde{A}_q \equiv \mathbf{Tr}\left(\hat{A}\,\hat{\tilde{\sigma}}_q\right) = \frac{\mathbf{Tr}\left\{\hat{A}Q_q(\hat{\mathcal{H}},\beta_q)\right\}}{\tilde{Z}_q} = \frac{\mathbf{Tr}\left\{\hat{A}\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right]^q\right\}}{\mathbf{Tr}\left[\exp_q\left(-\beta_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right]^q}. \quad (10.23)$$

Заметим, что формулы (10.22) и (10.23) справедливы и для квазиравновесного случая, когда $\hat{A} \to \hat{A}(t)$ и $\hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}(t)$. Дифференцируя в этом случае тождество (10.23) по времени, найдём

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle_q = \mathbf{Tr}\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_q}{\partial t}\hat{A}(t) + \hat{\sigma}_q\frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t}\right) \quad (10.24)$$

Подставляя сюда $\partial\hat{\sigma}_q/\partial t$ из обобщённого уравнения Лиувилля (см. Приложение С), получим

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}(t)\rangle_q = \mathbf{Tr}\left\{\left(\frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t),\hat{\mathcal{H}}\right]\right)\hat{\sigma}_q\right\} = \mathbf{Tr}\left(\frac{d\hat{A}(t)}{dt}\hat{\sigma}_q\right) = \left\langle\frac{d\hat{A}(t)}{dt}\right\rangle_q \quad (10.25)$$

где $\dfrac{d\hat{A}(t)}{dt} = \dfrac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t} + \dfrac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t),\hat{\mathcal{H}}\right]$ – производная динамической переменной $\hat{A}$ по времени. Если динамическая переменная $\hat{A}$ независит явно от времени, то

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}(t)\rangle_q = \frac{1}{i\hbar}\mathbf{Tr}\left\{\left(\left[\hat{A}(t),\hat{\mathcal{H}}\right]\right)\hat{\sigma}_q\right\} = -\frac{1}{i\hbar}\mathbf{Tr}\left\{\left(\left[\hat{\sigma}_q,\hat{\mathcal{H}}\right]\right)\hat{A}(t)\right\} \quad 10.26)$$

10.2. Реакция квантовой неэкстенсивной системы на механическое возмущение

Как хорошо известно, в равновесной статистической термодинамике классических и квантовых систем кинетические коэффициенты в линейных уравнениях релаксации непосредственно связаны с флуктуационными процессами, происходящими в квазиравновесной системе (см. Kubo, 1957). Проанализируем эту связь более подробно для случая квазиравновесных квантовомеханических неэкстесивных систем Тсаллиса и выясним линейную реакцию на механическое возмущение релаксационных уравнений для наблюдаемых величин.

Модифицированное уравнение Лиувилля для оператора $\hat{\sigma}_q(t)$. Рассмотрим реакцию квантового статистического ансамбля неэкстенсивных систем с равновесным гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}$, не зависящим от времени, на включение внешнего оператора энергии возмущения $\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t)$, зависящего от времени. Предположим, что внешняя возмущающая сила имеет механическую природу и может быть представлена малым добавочным членом в гамильтониане системы, т.е.

$$\hat{\mathcal{H}}(t)=\hat{\mathcal{H}}+\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t), \quad \hat{\mathcal{H}}_{ext}(t)=-\hat{A}F(t), \tag{10.27}$$

где $\hat{A}$ – квантовомеханический оператор, независящий явно от времени, сопряженный полю $F(t)$; $F(t)\equiv F_t$ – возмущающая сила (функция времени, не имеющая операторной структуры); $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x},\mathbf{x}';t)\equiv\hat{\mathcal{H}}_t$ – возмущённый гамильтониан (самосопряжпенный оператор), действующий в гильбертовом пространстве на матрицу плотности $\hat{\rho}$ для смешанных ансамблей. Предположим также, что при $t\to-\infty$ внешнее возмущение отсутствует, т.е. $\hat{\mathcal{H}}_{ext}\Big|_{t=-\infty}=0$.

Следует заметить, что в общем случае на систему могут действовать разные возмущающие силы $F_j(t)$ механического типа. В этом случае добавка к равновесному гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t)=-\sum_{j=1}^{n}\hat{A}_jF_j(t)=-\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{F}(t),$$

где $\hat{A}_j$ – динамические переменные, на которые с силой $F_j(t)$ действует внешнее поле; $\hat{\mathbf{A}}=(\hat{A}_1,\ldots,\hat{A}_n)$, $\mathbf{F}(t)=(F_1(t),\ldots,F_n(t))$.

Матрица плотности $\hat{\rho}$, являющаяся унитарным оператором, в координатном $\mathbf{X}$-представлении задаётся формулой

$$\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}';t)=\sum_r w_r\psi_r(\mathbf{x},t)\psi_r^*(\mathbf{x}',t), \tag{10.28}$$

где $\{|\psi_r(t)\rangle\}$– возможные квантовые состояния системы и w_r– их классические вероятности. Статистический оператор $\hat{\rho}(t)$ удовлетворяет фундаментальному уравнению квантовой механики (уравнению движения Лиувилля–фон Неймана) в операторной форме

$$\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}+\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t),\hat{\rho}(t)\right], \tag{10.29}$$

и начальному условию $\hat{\rho}\big|_{t=-\infty}=\hat{\rho}_{eq}\equiv\hat{\hat{\rho}}$, которое означает, что при $t=-\infty$ система находится в состоянии статистического равновесия и описывается равновесным каноническим ансамблем[23)]. Здесь

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{a},\hat{c}\right]\equiv\frac{1}{i\hbar}(\hat{a}\hat{c}-\hat{c}\hat{a})$$

– квантовая скобка Пуассона для операторов $\hat{a}$ и $\hat{c}$; $\hbar$ – постоянная Планка. Уравнение (10.29) является естественным обобщением классического уравнения Лиувилля на квантовые системы (см., Зубарев и др.,2002)

Поскольку матрица плотности является унитарной, то уравнение, которому подчиняется любая степень оператора $\hat{\rho}(t)$ имеет ту же форму, что и исходное уравнение Лиувиля (10.29).

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}^q(t)}{\partial t}=\left[\hat{\mathcal{H}}+\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t),\hat{\rho}^q(t)\right]=\left[\hat{\mathcal{H}},\hat{\rho}^q(t)\right]-\left[\hat{A},\hat{\rho}^q(t)\right]F(t). \tag{10.30}$$

С учётом того, что след произведения некоммутирующих операторов $\hat{a}$ и $\hat{c}$ не изменяется при их циклической перестановке $\mathbf{Tr}(\hat{a}\hat{c})=\mathbf{Tr}(\hat{c}\hat{a})$ (см. фон-Нейман, 1964), получим при взятии шпура от обеих частей уравнения (4) следующий важный результат: коэффициент Тсаллиса $c_q\equiv\mathbf{Tr}\hat{\rho}^q$ не зависит явно от времени t. Следовательно, уравнение для эскортного распределения $\hat{\sigma}_q\equiv\hat{\rho}^q/\mathbf{Tr}\hat{\rho}^q$ имеет вид:

[23)] Распределение $\hat{\rho}_{eq}$ может быть не только каноническим распределением, но любым равновесным распределением (в частности, большим каноническим распределением – наиболее удобном при вычислении средних для бозе- и ферми- систем). Канонический ансамбль больше подходит к некоторым другим системам, например, спиновым.

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\sigma}_q(t)}{\partial t}=\left[\hat{\mathcal{H}}-\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{F}(t),\hat{\sigma}_q(t)\right]. \tag{10.31}$$

Начальное условие для этого уравнения, с учётом формулы (10.22) для канонического распределения, принимает следующий вид:

$$\hat{\sigma}_q(t=-\infty)=\hat{\tilde{\sigma}}_q(\beta_q)=\frac{\left\{\exp_q\left(-\tilde{\beta}_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right\}^q}{\mathbf{Tr}\left\{\exp_q\left(-\tilde{\beta}_q\Delta_q\hat{\mathcal{H}}\right)\right\}}. \tag{10.32}$$

Учитывая, что внешнее силовое воздействие на систему мало, представим эскортное распределение $\hat{\sigma}_q(t)$ также в виде суммы невозмущенной равновесной $\hat{\tilde{\sigma}}_q$ части и малой добавки $\delta\hat{\sigma}_q(t)$, описывающей возмущение:

$$\hat{\sigma}_q(t)=\hat{\tilde{\sigma}}_q+\delta\hat{\sigma}_q(t), \tag{10.33}$$

где равновесное эскортное распределение $\hat{\tilde{\sigma}}_q$ удовлетворяет условию

$$\left[\hat{\mathcal{H}},\hat{\tilde{\sigma}}_q\right]=0. \tag{10.34}$$

Подставляя (10.27) и (10.33) в (10.31), получим уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\,\delta\hat{\sigma}_q(t)}{\partial t}=\left[\hat{\mathcal{H}},\delta\hat{\sigma}_q(t)\right]-\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\sigma}_q\right]\cdot\mathbf{F}(t), \tag{10.35}$$

определяющее флуктуацию $\delta\hat{\sigma}_q(t)$ распределения $\hat{\sigma}_q(t)$ в первом порядке по возмущению.

Основные формулы метода Кубо в теории линейной реакции. Введём для удобства линейный оператор коммутирования[24)] $\hat{\mathcal{H}}^{\times}$, определяемый соотношением $\hat{\mathcal{H}}^{\times}\hat{A}\equiv\left[\hat{\mathcal{H}},\hat{A}\right]$. Оператор $\hat{\mathcal{H}}^{\times}$ действу-

---

[24)] Оператор коммутирования $\hat{a}^{\times}$ подчиняется следующим правилам (см. *Cubo, 1957*): $\exp(\hat{a}^{\times})\hat{b}=\sum\frac{1}{n!}\left(\hat{a}^{\times}\right)^n\hat{b}=\sum\frac{1}{n!}[\hat{a}[\hat{a}...[\hat{a},\hat{b}]...]=\exp(\hat{a})\hat{b}\exp(-\hat{a})$; $\hat{a}^{\times}\hat{b}^{\times}-\hat{b}^{\times}\hat{a}^{\times}=\left[\hat{a},\hat{b}\right]^{\times}$.

ет на другие операторы. Используя этот оператор, перепишем уравнение (10.35) в виде

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{\sigma}_q(t)=\hat{\mathcal{H}}^{\times}\delta\hat{\sigma}_q(t)-\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\sigma}_q(t)\right]\cdot\mathbf{F}(t). \tag{10.36}$$

Используя теперь начальное условие (10.32), запишем уравнение (10.36) в интегральной форме; в линейном приближении по возмущению получим

$$\delta\hat{\sigma}_q(t)=-\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\exp\left(\frac{\hat{\mathcal{H}}(t-t')}{i\hbar}\right)\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\sigma}_q(t')\right]\cdot\mathbf{F}(t')\exp\left(\frac{-\hat{\mathcal{H}}(t-t')}{i\hbar}\right)\simeq$$

$$\cong-\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\exp\left(\frac{\hat{\mathcal{H}}(t-t')}{i\hbar}\right)\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\tilde{\sigma}}_q\right]\cdot\mathbf{F}(t')\exp\left(\frac{-\hat{\mathcal{H}}(t-t')}{i\hbar}\right). \tag{10.37}$$

Здесь использовано предположение, что $F(-\infty)=0$ и $\delta\hat{\sigma}_q(-\infty)=0$, т.е. предполагалось, что в момент времени $t=-\infty$ система находилась в равновесии.

С использованием формулы (10.37) можно найти среднее значение q-флуктуации $\Delta_q\hat{B}\equiv\hat{B}-\mathbf{Tr}(\hat{\tilde{\sigma}}_q\hat{B})$ любой динамической переменной $\hat{B}(t)$, которое определяется соотношением

$$\langle\Delta_q\hat{B}(t)\rangle_q=\mathbf{Tr}\left(\hat{\sigma}_q(t)\hat{B}\right)-\mathbf{Tr}\,(\hat{\tilde{\sigma}}_q\hat{B})=\mathbf{Tr}\left(\delta\hat{\sigma}_q(t)\hat{B}\right), \tag{10.38}$$

где $\hat{\tilde{\sigma}}_q$ – равновесное экскортное распределение, задаваемое формулой (10.32). В результате получим

$$\langle\Delta_q\hat{B}(t)\rangle_q=-\frac{1}{i\hbar}\mathbf{Tr}\int_{-\infty}^{t}dt'\hat{B}(t-t')\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\tilde{\sigma}}_q\right]\cdot\mathbf{F}(t'). \tag{10.39}$$

Здесь

$$\hat{B}(t)=/\exp\left(it\hat{\mathcal{H}}/\hbar\right)\hat{B}\exp\left(-it\hat{\mathcal{H}}/\hbar\right) \tag{10.40}$$

– оператор динамической переменной $\hat{B}(t)$ в представлении Гейзенберга, удовлетворяющий уравнению $i\hbar\dot{\hat{B}}(t)=\left[\hat{B}(t),\hat{\mathcal{H}}\right]$ с граничным условием $\hat{B}(0)\equiv\hat{B}$.

Соотношение (10.39) можно записать в другом виде. Вводя так называемую равновесную функцию отклика (response function)

$$\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t) = -\frac{1}{i\hbar}\mathbf{Tr}\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\tilde{\sigma}}_q\right]\hat{B}(t) = \frac{1}{i\hbar}\mathbf{Tr}\,\hat{\tilde{\sigma}}_q\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{B}(t)\right], \tag{10.41}$$

(описывающую реакцию системы на воздействие внешней силы, которая приводит к изменению равновесного среднего значения динамической переменной $\hat{B}$), получим

$$\langle\Delta_q\hat{B}(t)\rangle_q = \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t-t')\mathbf{F}(t'). \tag{10.42}$$

Формулы (10.13) и (10.16) являются основным результатом теории линейной реакции Кубо и называются формулами Кубо.

Воспользуемся теперь необходимой для дальнейшего модификацией известного в квантовой механике тождества Кубо (см. Kubo,1957; Зубарев и др., 2002)

$$\left[\hat{a},\exp\hat{b}\right] \equiv \exp\hat{b}\int\limits_0^1 \exp(x\hat{b})\left[\hat{a},\hat{b}\right]\exp(-x\hat{b})dx,$$

справедливого для любых операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Модификация этого тождества на случай неэкстенсивных квантовых систем с каноническим распределением матрицы плотности $\hat{\tilde{\sigma}}_q = \left[\exp_q(-\tilde{\beta}\Delta_q\hat{\mathcal{H}})\right]^q/\tilde{Z}_q \equiv \hat{\tilde{Q}}_q(\hat{\mathcal{H}};\tilde{\beta})/\tilde{Z}_q$) имеет вид (см., например, Abe, Okamoto, 2001):

$$\left[\hat{A},\hat{\tilde{Q}}_q(\hat{\mathcal{H}};\beta_q)\right] \equiv q\hat{\tilde{Q}}_q(\hat{\mathcal{H}};\beta_q)\int\limits_0^{\beta_q} d\lambda\left[\hat{\tilde{Q}}_q(\hat{\mathcal{H}};\lambda)\right]^{-1}\left[\hat{\mathcal{H}},\tilde{A}(\lambda)\right]\hat{\tilde{Q}}_q(\hat{\mathcal{H}};\lambda), \tag{10.43}$$

где

$$\hat{\tilde{A}}(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda(1-q)\Delta_q\hat{\mathcal{H}}}\hat{A}\frac{1}{1-\lambda(1-q)\Delta_q\hat{\mathcal{H}}}. \tag{10.44}$$

Подставляя (10.43) в формулу (10.42), получаем (при учёте уравнения движения $i\hbar d\hat{B}(t)/dt = [B(t),\hat{\mathcal{H}}]$ с граничным условием $B(0)=B$) следующую формулу для равновесной функции отклика (функции последствия):

$$\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t) = -\frac{1}{i\hbar}\mathbf{Tr}\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\tilde{\sigma}}_q\right]\hat{B}(t) =$$

$$= -q\mathbf{Tr}\,\hat{\tilde{\sigma}}_q \int\limits_0^{\beta_q} d\lambda \left[\hat{\tilde{\sigma}}_q(\hat{\mathcal{H}},\lambda) \right]^{-1} \tilde{A}(\lambda)\, \hat{\tilde{\sigma}}_q(\hat{\mathcal{H}},\lambda)\, \frac{d}{dt}\hat{B}(t)\,. \qquad (10.45)$$

Заметим, что уравнение (10.42) можно интерпретировать двояким образом. С одной стороны, величина $-\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\tilde{\sigma}}_q\right]$ является изменением эскортного распределения под воздействием внешней силы. Первое из уравнений (10.42) как раз и описывает влияние изменения этого распределения на среднее значение оператора $\hat{B}(t)$ по истечении некоторого времени. С другой стороны, можно представить себе, что внешняя сила влияет на изменение самой динамической переменной $\hat{B}$. Это влияние описывается членом $\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{B}(t)\right]$ во втором уравнении (10.42).

В заключение этого подпункта сделаем следующее общее замечание. При рассмотренном подходе возникает следующий капитальный вопрос: можно ли считать, что вычисленное среднее значение динамической переменной $\hat{B}$ действительно представляет собой величину, наблюдаемую в эксперименте? Подобный скептицизм связан с двумя проблемами. Первая из них относится к использованию усреднения по статистическому ансамблю, при котором значение любой наблюдаемой отождествляется со статистическим средним по ансамблю одинаковых квантовых систем. Право на такое отождествление связано с макроскопичностью динамического параметра $\hat{B}$ и рассматриваемой квантовой системы (Зубарев, 1971). Вторая проблема связана с тем, что в процессе измерения возникают возмущения в рассматриваемой квантовой системе. Согласно (10.39), величина $\langle \Delta_q \hat{B}(t) \rangle_q$ вычисляется как среднее по ансамблю, каждый член которого не испытывает возмущений в процессе измерения. В действительности же каждая отдельная система непрерывно подвергаться возмущающему воздействию внешних сил и это обстоятельство не принималось во внимание при вычислении (10.39). Таким образом, в данной работе предполагается, что для рассматриваемых величин и для применяемых способов наблюдения подобное квантовомеханическое возмущение будет несущественным.

10.3. Общее выражение для адмитанса и соотношения симметрии Онзагера

Запишем теперь формулу (10.42) для случая периодической возмущающей силы

$$\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}_0\exp(i\omega t),\ \text{или}\quad \mathbf{F}(t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\mathbf{F}_0\exp(i\omega t+i\varepsilon). \tag{10.46}$$

Здесь второе выражение подчёркивает, что возмущение включается адиабатически в бесконечно отдаленное в прошлое время. Для этого возмущения реакцию системы можно записать в виде

$$\langle\Delta_q\hat{B}(t)\rangle_q=\int_{-\infty}^{t}dt'\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t-t')\mathbf{F}(t')=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}dt'\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t-t')\mathbf{F}_0\left[\exp(i\omega t)+\exp(-i\omega t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}dx\,\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(x)\mathbf{F}_0\left[\exp(-i\omega x+i\omega t)+\exp(i\omega x-i\omega t)\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\chi_{B\mathbf{A}}^{(q)}(\omega)\mathbf{F}_0\exp(i\omega t)\right\}, \tag{10.47}$$

где величина

$$\tilde{\chi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(\omega)\equiv\int_0^{\infty}dt\,\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t)\exp(-i\omega t), \tag{10.48}$$

или более точно

$$\chi_{B\mathbf{A}}^{(q)}(\omega)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\infty}dt\,\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}\exp(-i\omega t-\varepsilon t) \tag{10.49}$$

является так называемой комплексной восприимчивостью, или адмитансом, которая, как видно, является просто фурье-образом функции отклика $\tilde{\phi}_{B\mathbf{A}}^{(q)}(t)$; символ Re означает действительную часть соответствующего выражения; $\mathbf{A}=\{A_i\}$. Соотношение (10.47) получается при подстановке (10.46) в формулу (10.42).

Заметим, что если оператор $\hat{B}\equiv\hat{\mathbf{J}}$ соответствует макроскопическому потоку, то величины $\chi_{J_lA_i}^{(q)}(\omega)\equiv\mathcal{L}_{li}(\omega)$ обычно называют обобщёнными кинетическими коэффициентами, так как они определяют средний поток $\langle \Delta_q \mathbf{J}^{(\omega)} \rangle_q$ под воздействием периодического возмущения.

Наконец, при интегрировании по частям, уравнение (10.49) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{i\omega + \varepsilon} \left\{ \tilde{\phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(0) + \int_0^\infty \tilde{\phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(x) \, \exp(-i\omega x - \varepsilon x) dx \right\} =$$

$$= \tilde{\Phi}_{B\mathbf{A}}(0) - i\omega \int_0^\infty \tilde{\Phi}_{B\mathbf{A}}(t)\, e^{-i\omega t} dt\,, \qquad (10.50)$$

где релаксационная функция $\tilde{\Phi}_{B\mathbf{A}}(t)$, определяемая выражением

$$\tilde{\Phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(t) \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \int_t^\infty \tilde{\phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(x) \exp(-\varepsilon x) dx =$$

$$= \sum_{k,j} \left(\frac{\tilde{\sigma}_q(k) - \tilde{\sigma}_q(j)}{E_k - E_j} \right) \langle k | \hat{\mathbf{A}} | j \rangle \, \langle j | \hat{B} | k \rangle \exp\left\{ -i(E_k - E_j)t / \hbar \right\}, \qquad (10.51)$$

описывает релаксацию системы на внешнее механическое воздействие. Здесь $\tilde{\sigma}_q(j) = \left[1 - \tilde{\beta}_q (1-q)(E_j - \tilde{U}_q) \right]^{q/(1-q)} / \tilde{Z}_q$. Здесь E_j – полный набор собственных функций оператора гамильтона, $\hat{\mathcal{H}} | j \rangle = E_j | j \rangle$
.

Из выражения (10.51) вытекают четыре важных свойства симметрии для релаксационной функции $\tilde{\Phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(t)$ и адмитанса[25)]:

(I) Функция $\tilde{\Phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(t)$ является действительной величиной, что доказывается путём комплексного сопряжения обоих сторон выражения (10.51), перестановки индексов суммирования i, j и использования свойств эрмитовости матричных элементов[26)].

[25)]. Свойство симметрии для адмитанса в случае классической статистической механики впервые были рассмотрены Казимиром (*Casimir, 1945*).

[2626)] Напомним, что оператор $\hat{A}^+$ называется сопряженным оператору $\hat{A}$, если для каждой пары функций ψ_1 и ψ_2 имеет место соотношение

(II) Имеет место симметрия обращения времени, $\tilde{\Phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(t)=\tilde{\Phi}^{(q)}_{\mathbf{A}B}(-t)$; это свойство доказывается путём перестановки операторов $\hat{\mathbf{A}}=\{A_i\}$ и $\hat{B}$, перестановки индексов суммирования i,j, замены t на $-t$, и сравнения полученного результата с выражением (51).

(III) При обращении времени, сопровождающемся изменением направления магнитного поля $\mathbf{H}$ на обратное, волновая функция заменяется сопряжённой ей величиной; следовательно

$$\tilde{\Phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(t,\mathbf{H})=\varepsilon_A\varepsilon_B\,\tilde{\Phi}^{(q)}_{\mathbf{A}B}(-t,-\mathbf{H})=\varepsilon_A\varepsilon_B\,\tilde{\Phi}^{(q)}_{\mathbf{A}B}(t,-\mathbf{H}), \qquad (10.52)$$

где параметры ε_j равны $+1$ или -1 в зависимости от того, являются ли чётными или нечётными функциями скоростей молекул динамические переменные A и B. В большинстве случаев ε_A и ε_B имеют один и тот же знак.

(IV) В силу соотношения (10.50), теми же свойствами симметрии обладает и комплексная восприимчивость $\chi^{(q)}_{BA}(\omega)$; их удобно записать для функции $\sigma_{B\mathbf{A}}(\omega)$, определенной следующим образом:

$$\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega)\equiv\int_t^{\infty}dt\,\tilde{\Phi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(t)\exp(-i\omega t)\,. \qquad (10.52)$$

Она также имеет свойства симметрии Онзагера:

(a) $$Re\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega)=Re\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(-\omega);$$

(b) $$Im\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega)=-Im\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(-\omega)$$

(c) $$\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega,-\mathbf{H})=\varepsilon_A\varepsilon_B\,\tilde{\sigma}^{(q)}_{\mathbf{A}B}(\omega,\mathbf{H})\,. \qquad (10.53)$$

Следовательно, согласно свойству (II) имеем

(d) $$Re\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega,\mathbf{H})=Re\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(-\omega,\mathbf{H})=\varepsilon_A\varepsilon_B Re\,\tilde{\sigma}^{(q)}_{\mathbf{A}B}(\omega,-\mathbf{H});$$

(e) $$Im\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega,\mathbf{H})=-Im\tilde{\sigma}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(-\omega,\mathbf{H})=\varepsilon_A\varepsilon_B Im\,\tilde{\sigma}^{(q)}_{\mathbf{A}B}(\omega,-\mathbf{H}). \qquad (10.54)$$

$\left\langle\psi_1,\hat{A}\psi_2\right\rangle=\left\langle\hat{A}^{+}\psi_1,\psi_2\right\rangle$. Эрмитовый (или самосопряженный) оператор $\hat{A}$ совпадает со своим сопряженным: $\hat{A}=\hat{A}^{+}$. Собственные значения эрмитовых операторов являются действительными числами.

(V) Наконец, в рассматриваемом здесь случае неэкстенсивных систем справедливы (известные в классической квантовой теории) соотношения Крамерса-Кронига для действительной и мнимой частей адмитанса $\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega)$, имеющие, в силу уравнения (10.51),следующий вид:

$$\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega) = Re\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega) + Im\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega),$$

$$Re\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega) = P.\sum_{k,j}\left(\frac{\tilde{\sigma}_q(k) - \tilde{\sigma}_q(j)}{\hbar\omega + E_k - E_j}\right)\langle k|\hat{\mathbf{A}}|j\rangle\langle j|\hat{B}|k\rangle$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\chi}^{(q)}_{B\mathbf{A}}(\omega) = \pi\sum_{k,j}\left[\tilde{\sigma}_q(k) - \tilde{\sigma}_q(j)\right]\langle k|\hat{\mathbf{A}}|j\rangle\,\langle j|\hat{B}|k\rangle\delta(\hbar\omega + E_k - E_j)\,. \tag{10.55}$$

Здесь символ $P.$означает, что учитывается только главное значение комплексной величины.

Таким образом, приведенные соотношения теории линейной реакции, полученные в рамках классической статистической квантовой механики, справедливы и для механики неэкстенсивных систем, основанных на параметрической квантовой энтропии Тсаллиса. Полученные результаты могут быть полезным инструментарием при анализе динамических характеристик неэкстенсивных квантовых систем, проявляющих аномальные с точки зрения классической статистики свойства.

Библиография

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука. 1971. 416 с.

Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: Физматлит. 2002. Т.1. 431 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астрофизических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018а. № 60. 44 с.

Колесниченко. А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018в. Vol XLII P.74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: 1964. 367 с.

Нильсон М., Чанг И. Кавантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир. 2006. 824 с.

Abe S. Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy //Physics Letters A, 2000a. V. 271. № 1-2. P. 74-79.

Abe S. A problem with the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics. 2000b. arXiv:cond-mat/0006053.

Abe S. Nonadditive generalization of the quantum Kullback-Leibler divergence for measuring the degree of purification // Physical Review A. 2003. V. 68. № 3. id. 032302.

Abe S. Quantum q-divergence // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 344. № 3 P. 359-365.

Abe S. Geometric effect in nonequilibrium quantum thermodynamics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 372. № 2. P. 387-392.

Abe S. The thermal Green functions in nonextensive quantum statistical mechanics // The European Physical Journal B. 1999. V. 9. № 4. P. 679-683.

Abe S., Rajagopal A.K. Towards Nonadditive Quantum Information Theory // eprint arXiv:quant-ph/0003145. 2000b. (12 pages. Invited talk at International Workshop on Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics (3-6 April, 2000, Denton, Texas)).

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications” (Chapter II). Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Abe S., Rajagopal A.K. Validity of the Second Law in Nonextensive Quantum Thermodynamics // Physical Review Letters.2003. V. 91. № 12. id. 120601.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 286 p.

Casimir H.B. On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility // Reviews of Modern Physics. 1945. V. 17. № 2-3. P. 343-350.

Daroczy Z. Generalized information functions // Inf. Control. 1970. V. 16. № 1. P. 36–51.

Du J. Test of nonextensive statistical mechanics by solar sound speeds // Europhys. Lett. 2006. V. 75. № 6. P. 861-867.

Guo R., Du J.The adiabatic static linear response function in nonextensive statistical mechanics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2014. V. 414. P. 414-420.

Frank T.D., Daffertshofer A. *H*-theorem for nonlinear Fokker-Planck equations related to generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001a. V. 295. № 3. P. 455-474.

Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalized thermostatistics // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2001b. V. 292. № 1. P. 392-410.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. “Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications. Oxford University Press. 2004. 440 p.

Gleason A. M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // Mathematics Journal (Indiana University). 1957. V. 6. P. 885–893.

Havrda J., Charvat F. Quantiication method of classiication processes. Concept of structural α-entropy // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1963. V.3. P. 160.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics”, RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V. 6. № 6. P. 587-597.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research. 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P. 354-365.

Kubo R. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems // J. Phys. Soc. Jap. 1957. V.12. № 6. P. 570–586.

Kubo R., Yokota M., Nakajima S. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. II. Response to Thermal Disturbance // J. Phys. Soc. Jap. 1957. V 12. № 11. P. 1203–1211.

Lenzi E.K., Mendes R.S. Collisionless Boltzmann equation for systems obeying Tsallis distribution // Eur. J. Phys. B. 2001. V. 21. № 3. P. 401-406.

Lenzi E.K., Mendes R.S., Rajagopal A.K. Green functions based on Tsallis nonextensive statistical mechanics: normalized q-expectation value formulation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 286. № 3. P. 503-517.

Lenzi E.K., Mendes R.S., Rajagopal A.K Quantum statistical mechanics for nonextensive systems // Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). 1999. V. 59. № 2, P.1398-1407.

Tirnakli U., Torres D.F. Exact and approximate results of non-extensive quantum statistics // Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. № 4. P. 691-698.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P.479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Wehrl A. General properties of entropy // Reviews of Modern Physics. 1978. V. 50. № 2. P. 221-260.

ГЛАВА 11

Джинсовская неустойчивость протопланетного околозвездного диска с учетом магнитного поля и излучения в неэкстенсивной термодинамике Тсаллиса

В рамках неэкстенсивной термодинамики Тсаллиса дан вывод критериев гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего протопланетного диска, вещество которого состоит из смеси проводящего идеального q-газа и модифицированного излучения фотонного газа. Критерии неустойчивости выведены из соответствующих дисперсионных соотношений, записанных как для нейтрального дискового вещества, так и для намагниченной плазмы с модифицированным чернотельным излучением. Сконструирована термодинамика фотонного газа, основанная на неэкстенсивной квантовой энтропии Тсаллиса, зависящей от параметра деформации q. Показано, что чернотельное q-излучение может стабилизировать состояние неэкстенсивной среды для чисто газового диска, а для электропроводящего диска критерий неустойчивости Джинса видоизменяется магнитным полем и радиационным давлением только в поперечном режиме распространения волны возмущения.

Введение

Звездообразование и формирование протопланетных газопылевых аккреционных дисков и экзопланет – это непрерывный процесс эволюции вещества во Вселенной. Наблюдения областей звездных сгущений свидетельствуют о всеобъемлющей связи волокон и магнитных полей с этими процессами. Эволюция газопылевой дисковой среды наиболее адекватно моделируется в рамках классической механики гетерогенных многокомпонентных турбулентных электропроводящих сред с учетом физико- химических свойств фаз, тепломассопереноса, вязкости, химических реакций, вариаций непрозрачности среды для звездного излучения, процессов коагуляции и др. Строгое математическое рассмотрение этой проблемы содержится, например, в работах (Колесниченко, 2011, 2016, 2017; Kolesnichenko, Marov, 2008, 2013, 2019; Marov, Kolesnichenko, 2013).

При условии, что хаотические турбулентные скорости пылевых частиц не превышают некоторого предела, в протопланетном диске развиваются разного рода гидродинамические неустойчивости, в частности, гравитационная (джинсовская) неустойчивость, соответствующая классическому сценарию Гольдрейха−Уорда формирования планетезималей (Goldrich, Ward, 1973). Гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего космического вещества звездного протопланетного диска. Она вызывает формирование относительно устойчивых астрофизических объектов, таких как допланетные пылевые сгущения (пылевые кластеры), твердые планетезимали и, наконец, планеты (см., Jeans, 1902, 2009; Чандрасекар, 1985; Сафронов, 1969; Горькавый, Фридман, 1994; Фридман, Хоперсков, 2011). Самогравитирующая дисковая среда становится гравитационно неустойчивой, если возникшие в ней сколь угодно малые флуктуации скорости и плотности вещества неограниченно растут со временем вследствие тяготения; при этом гравитационное равновесие нарушается, если соответствующие длины волн возмущения превышают определенное значение. Проблеме гравитационной неустойчивости астрофизических дисков в последнее время посвящено большое число публикаций, среди которых можно выделить следующие работы (Chandrasekhar, Fermi, 1953**;** Bonnor, 1957; Hunter, 1972**;** Goldreich, Lynden-Bell, 1965; Low, Lynden-Bell, 1976; Shakura, Sunyaev, 1976; Camenzind и др., 1986**;** Cadez, 1990; Pandey, Avinash, 1994; Owen и др.,1997; Tsiklauri, 1998; Mace и др., 1998; Lima и др., 2002; Trigger и др., 2004; Sakagami, Taruya, 2004; Shukla, Stenflo, 2006; Tsintsadze и др., 2008; Masood и др., 2008; Cadez, 2010; Dhiman, Dadwal, 2012; Fridman, Polyachenko,1984, 2012; Kaothekar, Chhajlani, 2013; Joshi, Pensia, 2017; Pensia и др., 2018; Kumar и др., 2018; Колесниченко, 2015, 2018, 2019). Во всех этих работах рассмотрены различные аспекты джинсовской неустойчивости самогравитирующих космических сред как в рамках классических уравнений Навье-Стокса и МГД-уравнений, так и на основе бесстолкновительного уравнения Больцмана (при наличии гравитационного поля) и уравнения Пуассона.

Вместе с тем, в работах (Колесниченко, 2016a,b; 2017; Колесниченко, 2019; Колесниченко, Маров, 2015) было предложено рассматривать совокупность пылевых образований в дисковой среде, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды, обладающей нецелой массовой размерностью, и применять для ее описания дробно-интегральную гидродинамику, в которой для учета фрактальности используются дробные интегралы, порядок которых определяется массовой размерностью фрактальных пылевых кластеров. Сложная пространственно-временная структура подобной среды приводит к нарушению принципа экстенсивности (аддитивности) для таких важнейших термодинамических характеристик, как энтропия или внутренняя энергия.

Неэкстенсивная статистика, в настоящее время интенсивно развивается. Возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. В научной литературе доступны коллекции миниобзоров (см., например, Tsallis, 1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; Kaniadakis и др., 2002, 2006; Kaniadakis, Lissia, 2004; Gell-Mann, Tsallis, 2004; Herrmann и др., 2004; Колесниченко, 2019). Статистика Тсаллиса успешно применяется ко многим природным системам, в частности, к ранней Вселенной (Pessah и др., 2001), к космической плазме (Lima и др., 2000), к астрофизическим проблемам (например, к трехмерной гравитационной проблеме N-тел), к космологическим проблемам (например, при толковании черных дыр, суперструн, темной материи (Leubner, 2005)) и так далее. Моделированию Бозе-газа и чернотельному излучению в рамках неэкстенсивной статистики также посвящено большое число публикаций (см., например, Tsallis и др., 1995; Plastino и др., 1995; Tirnakli и др., 1997; Lenzi, Mendes, 1998; Wang, Le Méhauté, 1998; Wang и др., 1998; Büyükkilic., Demirhan, 2000; Anchrordoqui, Torres, 2001; Martinez и др., 2001, 2002; Chamati и др., 2006; Zaripov, 2009; Rovenchak, 2018; Ma и др., 2019; Kolesnichenko, 2020). Тем не менее, в настоящей главе предлагается вновь обсудить в рамках формализма Тсаллиса механизм чернотельного излучения применительно к задачам космологии. Основанием для подобного решения является, с одной стороны, противоречивое конструирование деформированной термодинамики чернотельного излучения, присутствующее в ряде публикаций (см. ниже), а с другой стороны, неоспоримый экспериментальный факт, согласно которому существующее космическое фоновое излучение (находящееся в тепловом равновесии) несколько отличается от классического закона излучения черного тела Планка из-за влияния дальнодействующего гравитационного воздействия на больших расстояниях (Mather и др., 1994). Это влияние может быть отражением того отдаленного во времени факта, когда материя и свет были сильно взаимосвязаны между собой, или же оно является результатом еще более замысловатых природных явлений (Sistema, Vucetich, 2005).

В работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013) в рамках статистики Тсаллиса была сконструирована на основе модифицированного кинетического уравнения (с интегралом столкновений в форме Бхатнагара-Гросса-Крука) обобщенная гидродинамика (так называемая q-гидродинамика Навье-Стокса), пригодная для моделирования сред с фрактальной структурой. Именно на основе этой гидродинамики в серии работ (Колесниченко, 2015, 2016b, 2019; Kolesnichenko, Marov, 2008, 2014, 2016) была рассмотрена проблема гравитационной неустойчивости Джинса для протопланетного газопылевого диска с фрактальной структурой при учете радиации и воздействия вращательного движения диска на критическую длину волны возмущения, ведущей к неустойчивости. В этих работах проведено исследование влияния «классической» чернотельной радиации на гравитационную неустойчивость аккреционных дисков, находящихся на начальной стадии своего образования. Точнее речь идет о центральной части дисков, в которой практически все излучение является длинноволновым, поскольку оно уже успело пройти через многократное поглощение и переизлучение частицами фрактальной дисковой среды. Именно там возможно существование локального термодинамического равновесия, при котором температура дискового вещества практически совпадает с температурой черного тела. Полученные при этом критерии, как правило, лучше отвечают условиям развития неустойчивости в радиационной дисковой среде с фрактальной структурой в фазовом пространстве.

В работе (Kolesnichenko, 2020), посвященной рассмотрению в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса джинсовской неустойчивости звездного протопланетного диска с радиацией, термодинамические параметры чернотельного излучения использовались в обычной классической форме. В отличие от этой работы здесь предлагается воспользоваться модифицированным (в рамках формализма Тсаллиса) механизмом Планка для черного излучения (теплового фотонного газа) и исследовать его влияние на гравитационную неустойчивость протопланетного диска. Поскольку во всем космосе нет такого места, где не присутствуют магнитные поля, существенно изменяющие условия неустойчивости, то вполне уместно рассмотреть в рамках неэкстенсивной q-гидродинамики гравитационную неустойчивость электропроводящего протопланетного диска (плазменной дисковой среды) с учетом деформированных радиационных процессов.

Таким образом, целью данного рассмотрения является изложение с единых позиций обобщенной статистики Тсаллиса круга вопросов, связанных с выводом критерия гравитационной неустойчивости Джинса для неэкстенсивной дисковой электропроводной среды при учете влияния на этот критерий чернотельного излучения, отвечающего модифицированной q-энтропии фотонного газа (q-энтропии световых квантов Бозе). При этом сконструирована деформированная термодинамика черного излучения, базирующаяся на свойствах универсального степенного q-распределения Бозе–Эйнштейна (негиббсового канонического ансамбля бозонных систем), полученного из вариационного принципа максимизации Джейнса (Jaynes, 1963) q-энтропии Бозе-газа. Этому распределению соответствуют обобщенные законы Планка, Рэлея–Джинса и Вина для фотонов теплового спектра, на основе которых в работе выведены модифицированные выражения для всех термодинамических параметров черного излучения.

11.1. Исходные гидродинамические уравнения

Рассмотрим динамическую неэкстенсивную протопланетную среду с нормированным распределением частиц $f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)$ в геометрическом пространстве $\mathbf{r}$ и в пространстве скоростей $\mathbf{c}$ с размерностью D. Предлагаемое Тсаллисом обобщение статистической термодинамики (в случае статистики Курадо−Тсаллиса) лучше всего описывается следующими двумя аксиомами (Curado, Tsallis, 1991**;** Колесниченко, 2018):

Аксиома 1. Функционал энтропии, связанный с нормированным распре- делением функции вероятностей $f(\mathbf{z},t)$, равен

$$\mathcal{S}_q[f] := \frac{k}{q-1}\int d\mathbf{z}\left\{f(\mathbf{z}) - [f(\mathbf{z})]^q\right\},$$

где q − параметр деформации – число, связанное с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных систем, являющееся мерой их неаддитивности (Tsallis, 2009); здесь $\mathbf{z}=(\mathbf{r},\mathbf{c})$ − элемент объема фазового пространства; $d\mathbf{z} := d\mathbf{r}d^D\mathbf{c}$, где D − нецелая размерность пространства скоростей; k − постоянная Больцмана.

Аксиома 2. Экспериментально измеряемое значение любой макроскопи- ческой величины $\langle\mathcal{A}\rangle_q$ задается соотношением

$$\langle\mathcal{A}\rangle_q := \int \mathcal{A}(\mathbf{r},t)\left[f(\mathbf{z})\right]^q d\mathbf{z},$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ – соответствующая микроскопическая величина.

Важно подчеркнуть, что энтропия $\mathcal{S}_q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ двух независимых систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не является аддитивной переменной при $q\neq 1$, поскольку имеет место равенство (см. Tsallis, 2009)

$$\mathcal{S}_q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = \mathcal{S}_q(\mathcal{A}) + \mathcal{S}_q(\mathcal{B}) + k^{-1}(1-q)\mathcal{S}_q(\mathcal{A})\mathcal{S}_q(\mathcal{A}).$$

Несмотря на это обстоятельство, в литературе было показано, что существует, тем не менее, значительное количество обычных статистических и термодинамических свойств, которые справедливы для любого значения величины q (Bibliography / http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm).

Основные определения и система уравнений q-гидромеханики. Энтропия Тсаллиса влечет за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение гидродинамики (Oliveira, Galvao, 2018). Простейшей гидродинамической величиной является числовая плотность $n_q(\mathbf{r},t)\equiv\int\left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c}$. Тогда массовая q-плотность среды равна $\rho_q(\mathbf{r},t)\equiv m n_q(\mathbf{r},t)$. Поскольку частица, движущаяся со скоростью $\mathbf{c}$, обладает импульсом $m\mathbf{c}$, то выражение $\mathbf{u}_q(\mathbf{r},t)\equiv\dfrac{1}{\rho_q(\mathbf{r},t)}\int m\mathbf{c}\left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c}$ определяет гидродинамическую скорость элемента объема. Величина $\varepsilon_q(\mathbf{r},t)=\int\frac{m}{2}\left|\mathbf{c}-\mathbf{u}_q\right|^2\left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c}\,/\,\rho_q(\mathbf{r},t)$ является удельной внутренней q-энергией (на единицу массы) неэкстенсивной системы. Потоки

$$\mathcal{P}_q(\mathbf{r},t) := m\int(\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)(\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)[f(\mathbf{z})]^q d^D\mathbf{c}$$

и

$$\mathcal{J}_q(\mathbf{r},t) := \tfrac{1}{2} m \int \left|\mathbf{c} - \mathbf{u}_q\right|^2 (\mathbf{c} - \mathbf{u}_q)[f(\mathbf{z})]^q d^D\mathbf{c}$$

представляют собой соответственно тензор давлений и поток тепла. Гидростатическое q-давление определяется как

$$p_q(\mathbf{r},t) := \tfrac{1}{3} \mathcal{P} : \mathcal{I} = \tfrac{1}{3} m \int \left|\mathbf{c} - \mathbf{u}_q\right|^2 \left[f(\mathbf{z})\right]^q d^D\mathbf{c}\,,$$

где $\mathcal{I}$ – единичный тензор второго ранга. В частности, если сдвиговые напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой, то $\mathcal{P}_q = p_q \mathcal{I}$.

В работах (Boghosian,1998; Kolesnichenko, 2019) в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса было проведено методом моментов конструирование гидродинамических уравнений на основе модифицированного кинетического уравнения Больцмана[27)] (при учете самогравитации) с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса−Крука):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot grad + \mathcal{F}_q \cdot grad_{\mathbf{c}}\right)\left[f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\right]^q = -\frac{\left[f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\right]^q - \left[f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\right]^q}{\tau}. \tag{11.1}$$

Здесь $grad_{\mathbf{c}} := \mathbf{i}_x \partial/\partial c_x + \mathbf{i}_y \partial/\partial c_y + \mathbf{i}_z \partial/\partial c_z$; $\mathcal{F}_q(\mathbf{r},t) := \mathbf{f}/m - grad\,\Psi_q(\mathbf{r},t)$ – не зависящая от скорости внешняя сила (сила тяжести) отнесенная к единице массы; $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ – сила негравитационного происхождения (например, электро- магнитная сила Лоренца); $\Psi_q(\mathbf{r},t) := -G\int \frac{m}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[f(\mathbf{z}',t)]^q d\mathbf{z}'$ – гравитационный потен-

[27)] В цитируемой работе кинетическая теория была основана на операторе столкновений Бхатнагера–Гросса–Крука (BGK), который был обобщен для произвольного значения параметра q.

циал, удовлетворяющий уравнению Пуассона $\Delta\Psi_q(\mathbf{r}) = 4\pi G\int m f^q d^D\mathbf{c}$; G − гравитационная постоянная; τ − положительный параметр, который интерпретируется как характерное время релаксации произвольной функции распределения $f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)$ к обобщенному локально-максвелловскому распределению (величина τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в системе). Равновесное распределение $f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{c})$, в случае когда $q>1$, определяется следующей формулой (см., например, Колесниченко, 2019)

$$f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{c}) = \left\{ c_{q,D}\frac{\rho_q}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{D/2}\right\}^{1/q}\left\{1-(1-q)\frac{m(\mathbf{c}-\mathbf{u}_q)^2}{2kT}\right\}^{1/(1-q)}, \qquad (11.2)$$

где $c_{q,D} = \dfrac{(1-q)^{D/2}\Gamma(\frac{q}{1-q})}{\Gamma(\frac{q}{1-q}-\frac{D}{2})}$; $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}dt$ − Гамма-функция.

В результате были получены следующие моментные уравнения q-гидродинамики, которые являются обобщением обычных гидродинамических уравнений Навье−Стокса:

$$\partial\rho_q/\partial t + div(\rho_q\mathbf{u}_q) = 0, \qquad (11.3)$$

$$\partial(\rho_q\mathbf{u})/\partial t + Div\left(\mathcal{P}_q + \rho_q\mathbf{u}\mathbf{u}\right) = n_q\mathbf{f} - \rho_q\, grad\psi_q, \qquad (11.4)$$

$$\partial(\rho_q\varepsilon_q)/\partial t + div\left\{\mathcal{J}_q + \rho_q\varepsilon_q\mathbf{u}_q\right\} + \mathcal{P}_q : Grad\,\mathbf{u}_q = 0. \qquad (11.5)$$

Уравнения (11.3)-(11.5) не являются в общем случае замкнутыми, поскольку отсутствует необходимая связь (так называемые определяющие соотношения) потоковых величин ($\mathcal{P}_q$ и $\mathcal{J}_q$) и скалярных характеристик течения (ρ_q, $\mathbf{u}_q$ и T). Эта связь может быть найдена с помощью решения модельного кинетического уравнения (11.1) методом Чепмена−Энскога при использовании общего асимптотического разложения функции распределения по числу Кнудсена. Этот метод был использован в работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), в результате чего были найдены определяющие соотношения, замыкающие систему (11.3)-(11.5). В частности, в случае приближения нулевого порядка, когда распределение $f \equiv f^{(0)}$ (т.е. является обобщенным локально-максвелловским распределением (11.2)), было показано, что тензор напряжения $\mathcal{P}_q$ сводится к шаровому тензору $\mathcal{P}_q^{(0)} \equiv p_q \mathcal{I}$, а поток тепла $\mathcal{J}_q = 0$. При этом внутренняя энергия ε_q и гидростатическое давление p_q задаются соотношениями

$$\varepsilon_q = \frac{DkT}{2m}[1+(1-q\tfrac{D}{2})]^{-1}, \quad p_q = \frac{\rho_q kT}{m[1+(1-q)\tfrac{D}{2}]} = \frac{2}{D}\rho_q \varepsilon_q. \tag{11.6}$$

Поскольку определение температуры в q-статистике достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа), то далее мы будем интерпретировать величину $T_{eff} \equiv T / \left[1+(q-1)\frac{D}{2}\right]$ как обобщенную температуру сложной неаддитивной системы. Естественно, что эта температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) частиц системы. Заметим, что если записать через эффективную температуру T_{eff} выражение для внутренней энергии (11.6), то для величины ε_q получим соотношение $\varepsilon_q = DkT_{eff}/2m$, которое совпадает при $q \to 1$ и $D = 3$ с определением внутренней энергии в статистике Больцмана–Гиббса, равному распределению энергии классического идеального газа по степеням свободы. Если сохранить обычные представления об обобщенной температуре T_{eff}, то тогда неравенство $\varepsilon_q > 0$ накладывает жесткое ограничение на величину параметра деформации q. В этом случае энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $0 < q < 1 + 2/D$.

В приближении первого порядка были найдены следующие определяющие уравнения для потока тепла $\mathcal{J}_q$ и тензора вязких напряжений $\mathcal{T}_q \equiv \mathcal{P}_q - p_q\mathcal{I}$:

$$\mathcal{J}_q(\mathbf{r},t) = -\lambda_q \, gradT \,, \quad \mathcal{T}(\mathbf{r},t) = \mu_q\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}\mathcal{I}\nabla\cdot\mathbf{u}\right), \qquad (11.7)$$

где $\lambda_q = \tau\dfrac{kp_q}{m}\dfrac{1+D/2}{1+(1-q)(1+D/2)}$, $\mu_q = \tau p_q = \tau\dfrac{\rho_q kT}{m[1+(1-q)\frac{D}{2}]}$ – соответственно коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости.

11.2. Энтропия Бозе-газа в статистике Больцмана−Гиббса

Прежде чем приступить к обсуждению проблемы чернотельного излучения в статистике Тсаллиса, сделаем следующее замечание. Осреднение микроскопических физических величин в q-статистике возможно с помощью трех распределений: $f(\mathbf{r})$, $f^q(\mathbf{r})$, $f^q(\mathbf{r})/\int f^q(\mathbf{r})d\mathbf{z}$. Первое осреднение соответствует первоначальной статистике Тсаллиса (Tsallis,1988), второе (ненормированное) осреднение – статистике Курадо−Тсаллиса (Curado, Tsallis, 1991; Зарипов, 2002, Колесниченко, 2018), третье нормированное (эскортное) осреднение – статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино (Tsallis и др., 1998). Различным способам осреднения соответствуют совершенно разные q-термодинамики. Именно по этой причине вопрос об использовании того или иного осреднения носит принципиальный характер в ряде физических приложений, поскольку различия в определении макроскопических параметров могут оказаться существенными при обработке экспериментальных данных. По мнению ряда авторов, получаемые при этом несоответствия могут быть благополучно устранены при использовании только нормированного эскортного распределения (см, например, Tsallis и др., 1998; Tsallis, 1999; Martinez и др., 2000).

Вместе с тем существует и иная точка зрения (которой придерживается автор данной работы), согласно которой единственно правильным осреднением в q-статистике Тсаллиса является осреднение с ненормированным распределением f^q, наличествующее в ее аксиоматическом обосновании (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970). Именно это распределение не приводит к переопределению понятия температуры, которая в этой статистике является интенсивным параметром (т.е. абсолютной температурой T), а не функционалом (так называемой физической температурой T_{ph}, зависящей от энтропии $\mathcal{S}_q$), как это происходит при иных определениях средневзвешенного осреднения. Отметим, что это и некоторые другие убедительные соображения в пользу использования осреднения Курадо−Тсаллиса приведены в монографиях (Зарипов, 2002, 2010).

Модификация чернотельного излучения рассматривалась в ряде работ (см., например, Tirnakli и др., 1997; Wang и др., 1998; Rovenchak, 2018), в которых в качестве отправной точки использовалось следующее обобщенное распределение Планка для собственных частот излучения фотонного газа:

$$p_0(\omega) = 1 \Big/ \left\{ \left[1 + (q-1)\tfrac{\hbar\omega}{kT} \right]^{1/(q-1)} - 1 \right\}.$$

Можно легко убедиться в том (см. ниже), что это распределение получается из условия максимума модифицированной q-энтропии Бозе-газа (Büyükkilic, Demirhan, 2000; Зарипов, 2010) только в том случае, когда в качестве осреднения микроскопических физических величин используется распределение $p(\omega)^q$. Несмотря на это обстоятельство, авторы цитируемых выше работ, исходя из приведенного равновесного распределения $p_0(\omega)$, при выводе обобщенной q-термодинамики Бозе-газа систематически использовали осреднение с распределением $p(\omega)$, соответствующее оригинальной статистике Тсаллиса. В ряде других публикаций (см., например, Martinez и др., 2002; Ma и др., 2019) за исходное равновесное распределение неэкстенсивного фотонного газа принималось приведенное q-распределение $p_0(\omega)$, в котором, однако, вместо абсолютной температуры T фигурирует физическая температура T_{ph}. Такая замена представляется совершенно не приемлемой, поскольку измерение величины T_{ph} практически нереально, что связано с ее зависимостью от функционала энтропии $\mathcal{S}_q$.

Бозе-газ состоит из бозонов − частиц, имеющих целый спин и подчиня- ющихся статистике Бозе−Эйнштейна[28]. Напомним классический вероятностно -статистический способ нахождения энтропии Бозе-газа. С этой целью рассматриваются различные равновероятные группы квантовых состояний $j=1,2,\ldots$, которыми может быть реализовано изучаемое макроскопическое состояние ансамбля из $\mathcal{N}$ частиц Бозе-газа. $6\mathcal{N}$-мерное фазовое пространство делится на $\mathcal{M}$ ячеек безразмерного объема $g_j := (2\pi\hbar)^{-s}(\Delta\mathbf{r}_j\Delta\mathbf{c}_j)$, который характеризует максимально возможное число микросостояний в j-ой ячейке, содержащей n_j Бозе-частиц (здесь s − число степеней свободы элементарной частицы). Далее определяется величина $\mathcal{N}=\sum_j n_j$ − число всех возможных способов заполнения частиц по $\mathcal{M}$ ячейкам. Данное число является по определению статистическим весом $\Delta\Gamma$, характеризующим вероятность макроскопического состояния системы. Если теперь каждую группу из n_j частиц рассматривать как независимую подсистему и обозначить посредством $\Delta\Gamma_{n_j}$ ее статистический вес, то можно написать: $\Delta\Gamma=\prod_j \Delta\Gamma_{n_j}$. В классической статистике энтропия выражается логарифмической мерой статистического веса $\mathcal{S}:=k\ln\Delta\Gamma = k\ln\prod_j \Delta\Gamma_{n_j}$. В случае статистики Бозе−Эйнштейна в каждом кван- товом состоянии может находиться любое число частиц, так что статистический вес $\Delta\Gamma_{n_j}$ есть число всех способов, которыми можно распределить n_j частиц по g_j состояниям. Тогда из условия, что в ячейке может находиться любое количество частиц, вытекает следующий вид статистического веса $\Delta\Gamma_{n_j}=\dfrac{(g_j+n_j-1)!}{n_j!(g_j-1)!}$. Логарифмируя это

---

[28]) Бозе создал статистическую механику для газа фотонов, а Эйнштейн развил ее для описания массивных частиц.

выражение и воспользовавшись для логарифмов всех трех факториалов приближенной формулой Стирлинга $\ln x! = x\ln(x/e)$, найдем:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = -k\sum_j \left\{n_j \ln n_j + g_j \ln g_j - (g_j + n_j)\ln(g_j + n_j)\right\}.$$

Если записать эту формулу, используя среднее число $\bar{n}_j = n_j / g_j$ частиц в каждом из квантовых состояний j-й группы, то получим известное выражение для энтропии неравновесного Бозе-газа в классическом случае (см. Ландау, Лифшиц, 1964):

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = -k\sum_j g_j \left\{\bar{n}_j \ln \bar{n}_j - (1+\bar{n}_j)\ln(1+\bar{n}_j)\right\}.$$

Легко убедиться в том, что условие экстремальности энтропии $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ приводит к дискретному распределению Бозе−Эйнштейна:

$$\bar{n}_j = \left\{\exp\left[(\varepsilon_j - \mu)/kT\right] - 1\right\}^{-1}.$$

Заметим, что величина $\bar{n}_j$ есть дискретный аналог непрерывной функции распределения $p(\mathbf{r},\mathbf{c})$ по фазовому пространству $\mathbf{z} := \{\mathbf{r};\mathbf{c}\}$. Переход от дискретного распределения $\bar{n}_j$ к непрерывному распределению $p = p(\mathbf{r},\mathbf{c})$ Бозе частиц осуществляется заменой суммирования по j интегрированием по всему фазовому пространству, безразмерный элемент которого определяется соотношением

$$d\mathbf{z} := g(2\pi\hbar)^{-s} d\mathbf{r}\, d^D\mathbf{c}\,, \quad d\mathbf{r}\, d^D\mathbf{c} = dV d^D\mathbf{c}$$

где $g = 2S+1$, S – спин частицы;)[29].

В итоге получим следующее выражение для классической энтропии неравновесного Бозе-газа в случае непрерывных распределений:

$$\mathcal{S}(t) = -k\int\left\{p\ln p - (1+p)\ln(1+p)\right\}d\mathbf{z}. \tag{11.8}$$

---

[29]) Интегрирование по dV часто сводится к замене dV на полный объем V однородного фотонного газа.

Здесь $p = p(\mathbf{r},\mathbf{c})$ – плотность распределения квантовых частиц в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{c})$.

11.3. Энтропия Бозе−газа в статистике Тсаллиса

Обобщенное выражение квантовой энтропии (11.8) для Бозе-газа, полученное в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса в работах (Büyükkilic, Demirhan, 1993, 2000), имеет вид:

$$S_q := \frac{k}{q-1}\int\left[-p^q - 1 + (1+p)^q\right]d\mathbf{z}\,. \tag{11.9}$$

Энтропию (11.9) удобно записать в следующих двух эквивалентных формах:

$$S_q = k\int d\mathbf{z}\left[p^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+p}{p}\right) + \ln_{2-q}(1+p)\right] =$$

$$= k\int d\mathbf{z}(1+p)^{q-1}\left[p\ln_q\left(\frac{1+p}{p}\right) + \ln_q(1+p)\right], \tag{11.10}$$

где $\ln_q x := \dfrac{x^{1-q}-1}{1-q}$ $(x \in R^+;\ q \in R)$ – так называемый «деформированный логарифм» (см., например, Tsallis, 2009; Колесниченко, 2019). При $q \to 1$ из (11.10) следует выражение (11.8) для классической энтропии неравновесного Бозе-газа для аддитивных систем. Используя (11.10), легко показать, что в статистике Тсаллиса энтропия Бозе-газа двух независимых систем также не обладает свойством аддитивности.

Экстремум энтропии и равновесные состояния. Равновесные состояния неэкстенсивных систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. В состоянии равновесия энтропия должна иметь максимальное значение. Таким образом, задача заключается в нахождении таких распределений $p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})$, при которых квантовая энтропия Бозе-газа (11.9) имеет максимальное значение, при следующих дополнительных условиях

$$\mathcal{E}_q := \int d\mathbf{z}\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})p(\mathbf{r},\mathbf{c})^q = const, \quad \mathcal{N}_q := \int p(\mathbf{r},\mathbf{c})^q d\mathbf{z} = const, \tag{11.11}$$

выражающих постоянство полной энергии $\mathcal{E}_q$ и полного числа частиц $\mathcal{N}_q$ Бозе-газа. Следуя известному вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), приравняем нулю первую вариацию функционала

$$\mathcal{L}(p) := \mathcal{S}_q - \beta\int\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})p^q d\mathbf{z} + \beta\mu\int p^q d\mathbf{z}, \tag{11.12}$$

где параметры β и μ являются множителями Лагранжа. Произведя теперь дифференцирование по p, получим

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta p} = \frac{k}{q-1}\int q\left\{\left[-p^{q-1} + (1+p)^{q-1}\right] - \frac{(q-1)\beta}{k}\left(\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c}) - \mu\right)p^{q-1}\right\}d\mathbf{z} = 0. \tag{11.13}$$

Отсюда следует

$$\frac{1+p_0}{p_0} = \left\{1 - \frac{(1-q)}{k}\beta_0\left[\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c}) - \mu_0\right]\right\}^{1/(q-1)}, \tag{11.14}$$

или

$$p_0(\mathbf{r},\mathbf{c}) = \left\{\left[1 + (q-1)\tfrac{\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})-\mu_0}{kT_0}\right]^{1/q-1} - 1\right\}^{-1} = \left\{\exp_{2-q}\left[\tfrac{\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})-\mu_0}{kT_0}\right] - 1\right\}^{-1}. \tag{11.15}$$

Это есть не что иное, как обобщенное распределение Бозе−Энштейна в статистике Тсаллиса. Здесь $T_0 = 1/\beta_0$ – равновесная температура и μ_0 – равновесный химический потенциал Бозе-газа ($\mu_0 < 0$).

Присутствующая в (11.15) степенная функция $[..]^{1/1-q}$ записана в виде так называемой экспоненты Тсаллиса, которая определяется следующим образом (Тсаллис, 2009):

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \tag{11.16}$$

При этом выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y,0)$. В пределе $q \to 1$ функция (11.16) принимает стандартный вид: $\exp_{q\to 1}(x) = \exp(x)$. Легко проверить, что имеют место следующие формулы:

$$\exp_q[\ln_q(x)] = \ln_q[\exp_q(x)] = x, \tag{11.17}$$

$$\exp_{2-q}(x) = [1-(1-q)x]^{1/(q-1)}, \quad (\forall x; \forall q), \tag{11.18}$$

$$\exp_{2-q}(-x) = 1/\exp_q(x), \quad (\forall x; \forall q), \tag{11.19}$$

$$\frac{d}{dx}\ln_q x = \frac{1}{x^q}, \quad \frac{d}{dx}\exp_q(x) = [\exp_q(x)]^q, \quad (x > 0; \forall q). \tag{11.20}$$

С помощью распределения (11.15) могут быть вычислены равновесные значения полного числа частиц и полной энергии системы:

$$\mathcal{N}_{q0} := \int p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})\,d\mathbf{z} = \int \left\{ \exp_{2-q}\left[\frac{\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c}) - \mu_0}{kT_0}\right] - 1 \right\}^{-q} d\mathbf{z}, \tag{11.21}$$

$$\mathcal{E}_{q0} := \int \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})\,d\mathbf{z} = \int \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c}) \left\{ \exp_{2-q}\left[\frac{\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c}) - \mu_0}{kT_0}\right] - 1 \right\}^{-q} d\mathbf{z}. \tag{11.22}$$

Заметим, что формула (11.21) определяет в неявном виде химический потенциал $\mu_0 = (T_0, \mathcal{N}_{q0})$ Бозе-газа как функцию от температуры T_0 и полного числа частиц $\mathcal{N}_{q0}$.

Термодинамические соотношения. Получим теперь экстремальное (равновесное) значение S_{q0} энтропии и основные соотношения обобщенной равновесной термодинамики. Подставляя для этого распределение (11.14) в выражение (11.10) для q-энтропии Тсаллиса и используя формулу (11.19), получим:

$$\mathcal{S}_{q0} = k\int \left[{p_0}^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+p_0}{p_0}\right) + \ln_{2-q}(1+p_0) \right] d\mathbf{z} =$$

$$= k\int \left[{p_0}^q \frac{\beta_0(\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c}) - \mu_0)}{k} + \ln_{2-q}(1+p_0) \right] d\mathbf{z} =$$

$$=\beta_0(\mathcal{E}_q-\mu_0\mathcal{N}_q)+k\int \ln_{2-q}(1+p_0)d\mathbf{z}=\beta_0(\mathcal{E}_{q0}-\mu_0\mathcal{N}_{q0})-\beta_0\Omega_{q0}\,. \quad (11.23)$$

Здесь

$$\Omega_q:=\int \Omega_q(\mathbf{r},\mathbf{c})d\mathbf{z}=-k\beta^{-1}\int \ln_{2-q}\left[1+p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})\right]d\mathbf{z} \quad (11.24)$$

– термодинамический потенциал полного числа частиц бозонного газа; $\Omega_q(\mathbf{r},\mathbf{c})$– локальный термодинамический потенциал частиц, определяемый как

$$\Omega_q(\mathbf{r},\mathbf{c}):=-\frac{k}{\beta}\frac{1-\left[1+p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})\right]^{q-1}}{(1-q)}=-\frac{k}{\beta}\ln_{2-q}\left[1+p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})\right]=$$

$$=\frac{k}{\beta}\ln_q\left\{1-\left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})-\mu_0}{kT_0}\right)\right]^{-1}\right\}. \quad (11.25)$$

Используя производные от распределения p_0 по параметрам β_0,μ_0 и ε

$$\left(\partial p_0/\partial\beta_0\right)_{\mu_0}=-k^{-1}[\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})-\mu_0]p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})\{1+p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})\}^{2-q}\ ,$$

$$\left(\partial p_0/\partial\mu_0\right)_{\beta_0}=-k^{-1}\beta_0 p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})\left[1+p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})\right]^{2-q},$$

$$\left(\partial p_0/\partial\varepsilon\right)_{\mu_0}=k^{-1}\beta_0 p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})\{1+p_0(\mathbf{r},\mathbf{c})\}^{2-q} \quad (11.26)$$

и формулы (11.20), легко получить следующие уравнения равновесной термодинамики для системы Бозе-газа с переменным числом частиц:

$$\Omega_{q0}=-k\beta^{-1}\int \ln_{2-q}(1+p_0)d\mathbf{z}, \quad (11.27)$$

$$\mathcal{N}_{q0}=-\partial\Omega_{q0}/\partial\mu_0,\quad p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})=-\partial\Omega_{q0}(\mathbf{r},\mathbf{c})/\partial\mu_0, \quad (11.28)$$

$$\partial(\beta_0\Omega_{q0})/\partial\beta_0=\mathcal{E}_{q0}-\mu_0\int p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})d\mathbf{z},\quad \mathcal{S}_{q0}=-\partial\Omega_{q0}/\partial\beta_0^{-1}, \quad (11.29)$$

$$d\mathcal{S}_{q0}/\beta_0=d\mathcal{E}_{q0}-\mu_0\, d\left(\int p_0^q(\mathbf{r},\mathbf{c})d\mathbf{z}\right). \quad (11.30)$$

Вторая вариация функционала (11.12) имеет вид:

$$\delta^2\mathcal{L} = -kq\int p^{q-2}\left\{1-(1-q)\frac{\beta}{k}\left[\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{c})-\mu\right]-\left(\frac{1+p}{p}\right)^{q-2}\right\}(\delta p)^2 d\mathbf{z}, \quad (11.31)$$

из которого следует, что при $q>0$ экстремум соответствует максимуму функционала, $\delta^2\mathcal{L}<0$. Таким образом, распределение (11.15) максимизирует обобщенную q-энтропию для бозонного газа.

Можно показать, что из принципа максимум равновесного распределения q-энтропии Бозе–Эйнштейна следует, что энтропия равновесного состояния $\mathcal{S}_{q0}$ больше, чем энтропия $\mathcal{S}_q(t)$произвольного состояния, $\mathcal{S}_{q0} \geq \mathcal{S}_q(t)$. Таким образом, q-энтропия Бозе-газа непрерывно растет в направлении равновесия, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения.

11.4. Энтропия световых квантов Бозе. Черное излучение

Электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии (так называемое черное излучение) можно рассматривать как фотонный газ. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе−Эйнштейна. Поскольку фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), то состоящий из фотонов газ можно считать идеальным. Для возможности установления теплового равновесия в излучении необходимо наличие хотя бы небольшого количества материальной среды. Механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается при этом в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к существенной специфической особенности фотонного газа − число частиц $\mathcal{N}$ в нем является переменной величиной и само должно определиться из условий теплового равновесия, что приводит к равенству нулю химического потенциала μ фотонного газа (Ландау, Лифшиц, 1964).

Следовательно, распределение фотонов по различным уровням энергии $\varepsilon := \hbar\omega$ (где ω – собственная частота колебаний черного излучения в данном объеме V) определяется формулой (11.15) с $\mu = 0$:

$$p_{\omega} = \left\{\left[1+(q-1)\tfrac{\hbar\omega}{kT}\right]^{1/q-1} - 1\right\}^{-1} = \left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right]^{-1}. \qquad (11.32)$$

Это есть так называемое обобщенное распределение Планка в статистике Тсаллиса.

Заметим, что в силу определения (11.16) экспоненты Тсаллиса, второе представление распределения p_{ω} в формуле (11.32) справедливо в том случае, когда при $q<1$ имеет место неравенство $\hbar\omega / kT < (1-q)^{-1}$ или когда при $q>1$ и $\hbar\omega / kT \geq (1-q)^{-1}$.

Для непрерывного распределения энергии фотонов, число квантовых состояний фотонов с частотами собственных колебаний в интервале частот между ω и $\omega + d\omega$ может быть задано как (Ландау, Лифшиц, 1964)

$$d\mathbf{z} = V(\omega^2 / \pi^2 c^3) d\omega. \qquad (11.33)$$

где c – скорость света в вакууме, а ω – угловая частота. Умножив распределение (11.32) на эту величину, найдем число фотонов в данном интервале частот:

$$d\mathcal{N}_{rad}(\omega, T, q) = V\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right]^{-q} d\omega, \qquad (11.34)$$

а умножив еще на $\hbar\omega$, получим энергию излучения, заключенную в этом же участке спектра:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega, T, q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3\left[\exp_{2-q}\left(\tfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right]^{-q} d\omega. \qquad (11.35)$$

Формула (11.36) для спектрального распределения энергии черного излучения является обобщенной формулой Планка в статистике Тсаллиса.

Обобщенный закон Планка (11.32) описывает распределение электромагнитной энергии (или распределение плотности фотонов), излучаемой черным телом при данной температуре T. Закон Планка может быть представлен в различных вариантах, включающих такие параметры, как плотность потока или спектральное распределение. Два предельных случая, а именно, $\hbar\omega \ll kT$ и $\hbar\omega \gg kT$, заслуживают особого внимания.

В низкочастотном или высокотемпературном пределе ($\hbar\omega \ll kT$) из соотношения (36), при учете разложения $\underset{x\to 0}{\exp_{2-q}(x)} \cong 1 + x + \ldots$, получим:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q) = V\frac{kT}{\pi^2 c^3}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^{1-q}\omega^2 d\omega = = V\frac{\hbar^{1-q}}{\pi^2 c^3}(kT)^q\omega^{3-q}. \qquad (11.36)$$

В статистической термодинамике Тсаллиса эту формулу можно считать q-обобщением классической формулы Рэлея–Джинса

$$d\mathcal{E}(\omega) = V(\pi^2 c^3)^{-1} kT\omega^2 d\omega. \qquad (11.37)$$

Она справедлива, если $1 > q \to -\infty$. Из (11.36) видно, что с уменьшением q черное тела излучает меньше энергии по сравнению со стандартным излучением закона Рэлея–Джинса.

В случае больших частот ($\hbar\omega \gg kT$) соотношение (11.35) при учете формулы $\exp_{2-q}(x) = 1/\exp_q(-x)$ дает:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3\left[\exp_q\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]^q d\omega. \qquad (11.38)$$

При написании выражения (11.38) использовано свойство $\underset{x\to -\infty}{\exp_q(-x)} = 0$ деформированной экспоненты Тсаллиса (Tsallis, 2009). Выражение (11.38) можно рассматривать как q-обобщение классического закона Вина. Заметим, что в пределе слабой связи $q \to 1$ формулы (11.37) и (11.38) восстанавливают свои классические выражения.

Термодинамика черного излучения. Интегрируя (11.36) по всем частотам, получим полную энергию фотонного газа (черного излучения) в объеме V

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int\limits_0^\infty \omega^3\left[\exp_{2-q}\left(\hbar\omega/kT\right)-1\right]^{-q}d\omega. \tag{11.39}$$

Используя обозначение $x := \hbar\omega/kT$, перепишем формулу (311.9) в виде:

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4\int\limits_0^\infty x^3\left[\exp_{2-q}(x)-1\right]^{-q}dx. \tag{11.40}$$

В выражение (11.40) входит интеграл вида $\int\limits_0^\infty x^3\left[\exp_{2-q}(x)-1\right]^{-q}dx$, который при $q\to 1$ равен $\pi^4/15 \simeq 6.49394$ (Ландау, Лифшиц, 1964).

Обозначим интеграл через[30)]

$$J_q^{(n)} := \frac{15}{\pi^4}\int\limits_0^\infty x^n\left[\exp_{2-q}(x)-1\right]^{-q}dx. \tag{11.41}$$

Тогда для полной энергии излучения будем иметь:

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = VT^4\frac{\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}J_q^{(3)} = VaJ_q^{(3)}T^4 = Va_qT^4, \tag{11.42}$$

где $a_q := aJ_q^{(3)}$; $a = \pi^5 k^4/15c^3\hbar^3 = 7{,}56566(7)\cdot 10^{-15}\,\textit{эргсм}^{-3}K^{-4}$ – постоянная давления излучения.

Как известно, при $\mu = 0$ термодинамический потенциал $\Omega_{rad}(V,T,q)$ совпадает со свободной энергией $\mathcal{F}_{rad}(V,T,q)$. При использовании формулы (11.29), в которой положим $\mu = 0$, для величины $\mathcal{F}_{rad}$ получим:

[30)] Вычисление интегралов такого рода проведено в работе (Колесниченко, 2020). $J_q^{(n)} = -\frac{15\,\Gamma(1-q)}{\pi^4(q-1)^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{\frac{(n-k)n!}{k!(n-k+1)!}\frac{\Gamma[(1-q)(n-k)]}{\Gamma[(1-q)(n-k+1)]}\right\}$.

$$\beta\mathcal{F}_{rad} = \int\limits_0^\beta \mathcal{E}_{rad} d\beta = Va_q \int\limits_0^\beta \beta^{-4} d\beta = -V\frac{1}{3}a_q\beta^{-3}. \tag{11.43}$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_{rad}(V,T,q) = -V\frac{(kT)^4\pi^5}{45(c\hbar)^3}J_q^{(3)} = -V\frac{1}{3}a_q T^4 = -\frac{1}{3}\mathcal{E}_{rad}. \tag{11.44}$$

Энтропия чернотельного излучения в статистической термодинамике Тсаллиса равна

$$\mathcal{S}_{rad}(V,T,q) = -\frac{\partial\mathcal{F}_{rad}}{\partial T} = V\frac{4}{3}a_q T^3. \tag{11.45}$$

Она пропорциональна кубу температуры.

Полная энергия излучения, согласно (11.23), равна

$$\mathcal{E}_{rad} = T\mathcal{S}_{rad} + \mathcal{F}_{rad} = Va_q T^4 = -3\mathcal{F}_{rad}. \tag{411.6}$$

Таким образом, полная энергия черного излучения пропорциональна четвертой степени температуры (закон Больцмана).

Для теплоемкости чернотельного излучения $C_{rad,V} := \left(\partial\mathcal{E}_{rad} / \partial T\right)_V$ имеем:

$$C_{rad,V} = V4a_q T^3. \tag{11.47}$$

Наконец, давление и уравнения состояния определяются соотношениями:

$$P_{rad}(T,q) = -\left(\frac{\partial\mathcal{F}_{rad}}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}a_q T^4, \tag{11.48}$$

$$P_{rad}\cdot V = V\frac{1}{3}a_q T^4 = \frac{\mathcal{E}_{rad}}{3}. \tag{11.49}$$

Таким образом, несмотря на зависимость термодинамических величин от параметра деформации q, уравнение для полной энергии излучения (11.46) и уравнение состояния (11.49) остаются неизменными и в формализме Тсаллиса.

11.5. Замкнутая система уравнений q-гидродинамики для пропланетного аккреционного диска с равновесным излучением

В эволюции многих протопланетных аккреционных дисков, особенно на ранней стадии их возникновения, большую роль играет давление излучения, как фактор их гидростатического равновесия. Впервые анализ неустойчивости в аккреционных дисках относительно осесимметричных возмущений с учетом давления излучения был проведен в работе Шакуры и Сюняева (Shakura, Sunyaev, 1976). В последующих работах рассматривались общие политропные модели (Camenzind и др.,1986), учитывались неосесимметричные возмущения (McKee, 1990), звуковые и эпициклические колебания (Хоперсков, Храпов,1995; Фридман, Хоперсков, 2011) и т.д.

Ниже мы используем приведенную выше систему уравнений q-гидродинамики для моделирования неустойчивости околосолнечного допланетного толстого диска, вещество которого состоит из смеси вещества (находящегося в состоянии идеального q-газа) и чернотельного изотропного излучения при температуре T, распространяющегося по всем направлениям. Будем предполагать, что протопланетный диск является оптически толстым и распределение поля излучения близко к равновесному. Подчеркнем также, что диск в значительной мере обладает осевой симметрией, что является следствием его вращения вокруг центральной звезды. Далее будем также предполагать, что диск является самогравитирующим, для которого вертикальная структура (вдоль оси вращения) определяется балансом сил давления и гравитации самого диска.

В случае пренебрежения гидродинамическими диссипативными процессами и нагревом космического вещества, обусловленным диссипацией и процессами ионизации и возбуждения, исходная система

q-уравнений, состоящая из аналога уравнений Эйлера и уравнения Пуассона, имеет вид[31)] (см., например, Колесниченко, 2019):

$$\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u})=0, \tag{11.50}$$

$$d\mathbf{u}/dt=-\rho^{-1}\,\mathrm{grad}\,P-\mathrm{grad}\psi, \tag{11.51}$$

$$\Delta\psi=4\pi G\rho, \tag{11.52}$$

$$d\mathcal{E}/dt=-P\rho^{-1}\,\mathrm{div}\mathbf{u}+dQ/dt, \tag{11.53}$$

где соотношением $d\mathcal{A}/dt:=\partial\mathcal{A}/dt+(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathcal{A}$ определяется полная производная структурной величины $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ по времени. Здесь

$$P(\mathbf{r},t)=p_q+P_{rad}\equiv p_q+a_qT^4/3, \tag{11.54}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_q+\varepsilon_{rad}\equiv\varepsilon_q+a_qT^4/\rho \tag{11.55}$$

– соответственно полное давление и полная внутренняя энергия (на единицу массы) смеси идеального q-газа и чернотельного излучения; $\rho dQ/dt$ – полная скорость выделения тепла за счет вязкой диссипации и энергия, уносимая теплопроводностью и излучением из элемента среды при его движении; $\varepsilon_q(\mathbf{r},t)=c_{vq}T(\mathbf{r},t)=\dfrac{D}{2+(1-q)D}\dfrac{kT(\mathbf{r},t)}{m}$ – внутренняя энергия (на единицу массы газовой составляющей допланетного диска); $\varepsilon_{rad}=a_qT^4/\rho$ – удельная энергия излучения (в статистике Тсаллиса) черного тела, находящаяся в единице массы; T – абсолютная температура; $p_q(\mathbf{r},t)=\dfrac{2}{2+(1-q)D}\dfrac{k}{m}T(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)=\dfrac{2}{D}\rho\varepsilon_q$ – газовое давление в неэкстенсивной дисковой системе (аналог закона состояния в кинетической теории идеальных газов); $P_{rad}\equiv a_qT^4/3$ – лучевое давление; $a_q:=aJ_q^{(3)}$ – модифицированная постоянная излучения Стефана– Больцмана (см. (11.41)); $\psi(\mathbf{r},t)=-G\int_V\dfrac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$ – гравитацион-

---

[31)] Далее индекс q у ряда гидродинамических и термодинамических переменных мы будем опускать.

ный потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона (11.8) (интеграл здесь берется по всему объему V, занимаемому допланетным облаком); $c_{vq} = \dfrac{D}{2+(1-q)D}\dfrac{k}{m}$ – удельная изохорная теплоемкость газовой составляющей смеси. Определим также показатель адиабаты газового вещества диска, как отношение $\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = c_{pq} / c_{vq}$. Тогда

$$\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = 2-q+2/D, \quad \gamma_1 = (2+D)/D. \tag{11.56}$$

Уравнение для полной внутренней энергии (11.53) удобно переписать, используя уравнение неразрывности (11.50), в обычной форме первого начала термодинамики

$$Td\mathcal{S}/dt \equiv dQ/dt = d\mathcal{E}/dt + Pdv/dt, \tag{11.57}$$

выражающего скорость $d\mathcal{S}/dt$ изменения энтропии $\mathcal{S}$ (на единицу массы) дискового вещества и излучения при движении элемента среды вдоль его траектории. Здесь $v(\mathbf{r},t) = 1/\rho$ – удельный объем вещества протопланетного диска.

Изоэнтропические изменения в среде, содержащей q-газ и q-радиацию. Далее мы будем рассматривать такие движения космического вещества (находящегося в состоянии идеального q-газа) и чернотельного q-излучения, для которых энтропия каждой частицы среды (вещество + излучение) остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути частицы, т.е. $d\mathcal{S}/dt \equiv \partial\mathcal{S}/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathcal{S} = 0$. Подобные обратимые и адиабатические движения являются изоэнтропическими. Для них энергетическое уравнение (11.21) сводится к уравнению

$$\rho\, d\mathcal{E}/dt + P\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{11.58}$$

выражающему тот факт, что скорость изменения полной внутренней энергии движущегося элемента среды равна работе по сжатию этого элемента, совершаемой окружающей средой.

Вместе с тем для астрофизических целей часто удобно использовать другие формы уравнения (11.58), которые впервые были выведены Эддингтоном (Eddington, 1988) и Чандрасекхаром (Чандрасекхар, 1950). Эти формы справедливы, когда давление P и внутреннюю энергию $\mathcal{E}$ дисковой среды можно вычислить из соответствующих уравнений состояния как функций от удельного объема v и температуры T (или энтропии $\mathcal{S}$) в зависимости от исследуемого процесса. Для «медленного» процесса, характеризуемого временем, много большим времени теплопередачи, любые возмущения профиля температуры будут успевать релаксировать. Следовательно, этот процесс можно рассматривать как изотермический, при котором $P = P(v, T_0) = P(v)$. «Быстрый» процесс (по сравнению с процессом теплопереноса) можно считать адиабатическим в силу нехватки времени для обмена теплом двух соседних областей: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = const$ и $P = P(v, \mathcal{S}_0) = P(v)$.

Из энергетического уравнения (11.58) для квазистатического процесса следует

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}\right)_T dv + Pdv = \frac{v}{T}\left(12P_{rad} + \frac{c_{vq}}{c_{pq} - c_{vq}} p_q\right) dT + (4P_{rad} + p_q)dv. \tag{11.59}$$

Следовательно, для изоэнтропических изменений имеем

$$\left(12P_{rad} + \frac{1}{\gamma_q - 1} p_q\right) d\,lnT + (4P_{rad} + p_q) d\ln v = 0. \tag{11.60}$$

Введем теперь адиабатические показатели смеси вещества и излучения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соотношениями

$$d\,lnP / dt = \Gamma_1 d\,ln\rho / dt, \tag{11.61}$$

$$\frac{d}{dt} lnT = (\Gamma_3 - 1)\frac{d}{dt} ln\,\rho = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d}{dt} ln\,P, \tag{11.62}$$

которые могут быть использованы вместо энергетического уравнения (11.58). С учетом уравнений состояния для смеси идеального q-газа (11.6) и идеального q-излучения» (11.49) можно записать

$$dP = d(P_{rad} + p_q) = (4P_{rad} + p_q) d\,lnT - p_q d\ln v\,. \tag{11.63}$$

Следовательно, (11.61) есть не что иное, как

$$(4P_{rad} + p_q) d\,lnT + [\Gamma_1(P_{rad} + p_q) - p_q] d\ln v = 0\,. \tag{11.64}$$

Из (11.60) и (11.64) следует, что

$$\frac{12P_{rad}+(\gamma_q-1)^{-1}p_q}{4P_{rad}+p_q}=\frac{4P_{rad}+p_q}{\Gamma_1(P_{rad}+p_q)-p_q}. \qquad (11.65)$$

Введем теперь в рассмотрение коэффициент $\beta := p_{gas}/P$, характери- зующий долю вещества в полном давлении системы[32]. При использовании этого коэффициента соотношение (11.65) можно переписать в виде:

$$\Gamma_1=\beta+\frac{(4-3\beta)^2(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}, \quad (\gamma_q-1=1-q+2/D). \qquad (11.66)$$

Легко можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\Gamma_2=\frac{(4-3\beta)\Gamma_1}{\beta+3(1-\beta)\Gamma_1}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{3(\gamma_q-1)(1-\beta)(4+\beta)}, \qquad (11.67)$$

$$\Gamma_3=1+\frac{\Gamma_1-\beta}{4-3\beta}=1+\frac{\Gamma_1(\Gamma_2-1)}{\Gamma_2}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}. \qquad (11.68)$$

Если $p_{rad} \ll p_q$, то все обобщенные показатели адиабаты Γ для «q-газа +излучение» совпадают с показателем адиабаты чистого q-газа $\left(\gamma_q=2/D+2-q\right)$, а когда присутствует одно лишь излучение абсолютно черного тела ($p_q \ll p_{rad}$), то они равны $4/3$. Таким образом, для смеси «идеального q-газа» и q-радиации обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от $4/3$ до γ_q.

11.6. Джинсовская гравитационная неустойчивость в неэкстенсивной кинетической теории

Рассмотрим здесь простейшую задачу возникновения неустойчивости в бесконечной покоящейся сферически однородной среде.

---

[32] На особую важность отношения $(1-\beta)$ для теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars»).

Напомним, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости Дж. Джинс рассматривал однородное состояние самогравитирующей среды в состоянии покоя, что не совсем корректно, так как такое состояние не является состоянием равновесия. Тем не менее его вывод критерия неустойчивости можно рассматривать как первое приближение, которое в наиболее простых случаях дает правильный порядок нижней критической длины волны возмущения, ведущего к неустойчивости (см., например, Сафронов, 1969; Фридман, Хоперсков, 2011).

Линеаризованные основные дифференциальные уравнения (11.50)-(11.53) для случая чисто радиального сферически симметричного движения с учетом допущений, что невозмущенное состояние является равновесным $(u = u_0 + u', u_0 = 0)$ и что уравнение Пуассона (11.52) можно применить лишь к возмущениям плотности (условие $\psi_0 \cong 0$ называют иногда «мошенничеством» Джинса (см. Jeans, 1902)), имеют вид:

$$\partial\rho' / \partial t + \partial(\rho_0 u) / \partial r = 0, \tag{11.69}$$

$$\partial u / \partial t = \rho_0^{-1} \partial P' / \partial r - \rho' \rho_0^{-2} \partial P_0 / \partial r - \partial\psi' / \partial r, \tag{11.70}$$

$$d(P' / P_0) / dt = \Gamma_{1,0} d(\rho' / \rho_0) / dt, \tag{11.71}$$

$$\partial^2 \psi' / \partial r^2 = 4\pi G \rho'. \tag{11.72}$$

Уравнение (11.71) тривиально интегрируется. Если выбрать постоянную интегрирования так, чтобы $P' = 0$ при $\rho' = 0$, то получим

$$P' / P_0) = \Gamma_{1,0} \rho' / \rho_0. \tag{11.73}$$

Допустим теперь, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями величин P_0 и ρ_0, велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (это так называемое приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь производными $\partial P_0 / \partial r$ и $\partial \rho_0 / \partial r$. При этих дополнительных упрощающих предположениях уравнение неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно уравнение для адиабатической звуковой волны[33)] (см., например, Ландау, Лифшиц, 1964)

$$\partial^2\rho'/\partial t^2+v_{S,0}^2\partial^2\rho'/\partial r^2-4\pi G\rho_0\rho'=0\,. \qquad (11.74)$$

Здесь возмущенная производная давления $\partial P'/\partial r$ выражается, согласно (11.73), через возмущенную производную плотности $\partial\rho'/\partial r$ в виде

$$\partial P'/\partial r=(\Gamma_{1,0}P_0/\rho_0)\partial\rho'/\partial r=v_{S,0}^2\partial\rho'/\partial r\,, \qquad (11.75)$$

Где $v_{S,0}^2$– адиабатическая (или лапласова) скорость звука в дисковой среде. При написании (11.75) было учтено, что

$$\frac{P_0}{\rho_0}=\frac{p_{q,0}+p_{rad,0}}{\rho_0}=\frac{1}{\beta_0}\frac{p_{q,0}}{\rho_0}=\frac{1}{\beta_0}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{kT_0}{m}=\frac{1}{\beta_0}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\frac{kT_0}{m}\,. \qquad (11.76)$$

Заметим, что в частном случае, когда $q=1$ и $D=3$, имеем классический идеальный газ , $\gamma_1=5/3$. Отсюда следует, что

$$v_{S,0}\equiv\left(\frac{k}{m}T_0\left[1+\frac{2(4-3\beta_0)^2}{3\beta_0(8-7\beta_0)}\right]\right)^{1/2}. \qquad (11.77)$$

Когда излучение отсутствует ($\beta_0=1$), то $v_{S,0}:=v_{gas,0}\equiv(\gamma_1 kT_0/m)^{1/2}$ – адиабатическая скорость звука в идеальном газе.

Если $q\neq 1$ (идеальный q-газ) и излучение отсутствует ($\beta_0=1$), то

$$v_{S,0}=\left(\frac{kT_0}{m}\frac{2\gamma_q}{(\gamma_q-1)D}\right)^{1/2}=\left(\frac{kT_0}{m}\frac{2-q+2/D}{(1-q)D/2+1}\right)^{1/2}. \qquad (11.78)$$

Уравнение (11.74) является линейным и однородным уравнением в частных производных, следовательно, к нему применим метод нормальных колебаний (метод мод). Решая уравнения (11.74) для возмущенной плотности в виде $\rho'\sim\exp(-i\omega t+i\mathrm{k}r)$, описывающем волны с угловой частотой ω, волновым вектором k в направлении r

---

[33)] При изучении возмущённых состояний самогравитирующего космического вещества, часто приходится иметь дело с разновидностью звуковых волн.

[34] и длиной волны $\lambda_r = 2\pi / \mathrm{k}$, получим следующее дисперсионное уравнение для бегущей волны

$$\omega^2 - \mathrm{k}^2 \frac{p_{q,0}}{\rho_0} \left\{ 1 + \frac{\Gamma_{1,0} - \beta_0}{4 - 3\beta_0} \left(1 + 4 \frac{1 - \beta_0}{\beta_0} \right) \right\} + 4\pi G \rho_0 = 0, \qquad (11.79)$$

которое с учетом соотношений (11.40) и (11.41) принимает «стандартный» вид

$$\omega^2 = \mathrm{k}^2 v_{S,0}^2 - 4\pi G \rho_0 . \qquad (11.80)$$

Здесь адиабатическая скорость звука $v_{S,0}$ определяется формулой (11.75).

Для устойчивых волн с частотами ω имеем $\omega^2 > 0$, тогда как неустойчивость соответствует условию $\omega^2 < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения

$$\lambda_{cr} = 2\pi / \mathrm{k}_{cr}, \quad \mathrm{k}_{cr}^2 = \omega_{cr}^2 / v_{S0}^2, \quad \omega_{cr}^2 = 4\pi G \rho_0 . \qquad (11.81)$$

Из уравнения (11.80) следует, что граничное значение $\mathrm{k} = \mathrm{k}_{cr}$ разделяет устойчивые $(\mathrm{k} > \mathrm{k}_{cr})$ и неустойчивые $(\mathrm{k} < \mathrm{k}_{cr})$ пульсации плотности. При малых k (длинные волны) пульсации будут расти со временем и появляется нестабильность Джинса, а коротковолновые пульсации плотности (большие k, малые длины волн) колеблются, т.е. распространяются в виде звуковых волн.

Таким образом, критическая длина волны возмущения, равная

---

[34]) Следует заметить, что линеаризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость $\mathbf{u}$ была параллельна волновому вектору $\pm\mathbf{k}$ (Ландау, Лифшиц, 1964). Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуковыми волнами, параллельны направлению распространения волн.

$$\lambda_{cr}=\frac{2\pi v_{S0}}{\omega_{cr}}=\left(\frac{\pi v_{S0}^2}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\pi kT_0}{mG\rho_0 D}\left[\frac{1}{\gamma_q-1}+\frac{(4-3\beta_0)^2}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{11.82}$$

является размером мельчайших «капель» рассматриваемой «фрактальной» газовой среды с излучением, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Следовательно, модифицированный в рамках неэкстенсивной кинетической теории критерий неустойчивости Джинса для смеси q -газа и чернотельной q -радиации будет выглядеть следующим образом: длина неустойчивой волны возмущения λ_r должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_r \geq \lambda_{cr}=v_{S0}\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\pi kT_0}{mG\rho_0}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right)^{\frac{1}{2}} .\tag{11.83}$$

Заметим, что в традиционной литературе длину

$$\lambda_{\mathcal{J}}=\left(\pi v_{gas,0}^2/G\rho_0\right)^{1/2}=\left(\gamma_1\pi kT_0/mG\rho_0\right)^{1/2}, \tag{11.84}$$

соответствующую размеру области сжатия самогравитирующего газа, называют длиной Джинса. С учетом (11.83) критерий неустойчивости Джинса в неэкстенсивной кинетике может быть переписан в виде:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_{\mathcal{J}}}\geq\frac{v_{S0}}{v_{gas,0}}=\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{2/D}{(1-q+2/D)}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(1-q+2/D)}{\beta_0^2+12\beta_0(1-q+2/D)(1-\beta_0)}\right]\right)^{1/2}\equiv\Xi. \tag{11.85}$$

Отсюда следует:

1.Если $q=1$(при этом $\gamma_1=1+2/D$), то фактор

$$\Xi\equiv\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(1+\frac{(4-3\beta_0)^2 2/D}{\beta_0^2+24\beta_0(1-\beta_0)/D}\right)\right]^{1/2}\geq 1. \tag{11.86}$$

Следовательно, критическая длина волны возмущения в рассматриваемом случае больше джинсовской, т.е. благодаря давлению излучения система стабилизируется.

2.Если $q\neq 1$, но излучение отсутствует $\beta_0=1$, то фактор

$$\Xi=\frac{1}{\gamma_1}\left(2/D+\frac{2/D}{1-q+2/D}\right)^{1/2}, \quad 0<q<1+2/D. \tag{11.87}$$

В этом случае критерий гравитационной неустойчивости зависит от численных значений параметров деформации q и нецелой размерности пространства скоростей D. При этом возможна ситуация, при которой гравитационно- устойчивое (на основе классической статистики Больцмана–Гиббса) облако газа, будет неустойчивым согласно неэкстенсивной статистике Тсаллиса (см. Колесниченко, Маров, 2014; Kolesnichenko, Marov, 2014, 2016).

Связанная с λ_{cr} критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром λ_{cr}) определяется соотношением

$$\mathcal{M}_{cr}=(\pi/6)\rho_0\lambda_{cr}^3=\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\Xi^3, \tag{11.88}$$

где

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\equiv(\pi/6)\rho_0\lambda_{\mathcal{J}}^3=(\pi/6)\rho_0\left(\gamma_1\pi kT_0/mG\rho_0\right)^{3/2} \tag{11.89}$$

– критическая масса Джинса. Возмущения с массой $\mathcal{M}_r$, превышающей критическую массу Джинса $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ ($\Xi>1$), могут расти, формируя гравитационно- ограниченные структуры, в то время как возмущения с массой $\mathcal{M}_r$ меньше $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ не растут и ведут себя как акустические волны. При этом для самогравитирующих неэкстенсивных сред с излучением критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса q, нецелой размерности пространства скоростей D и коэффициента β, которые, являясь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путем из экспериментальных данных. Это позволяет при исследовании неустойчивости самогравитирующих космических объектов в рамках неэкстенсивной статистики более обоснованно моделировать реально складывающуюся ситуацию.

Следует отметить, что дальнейшее развитие предложенного здесь подхода может быть связано с учетом влияния на джинсовскую неустойчивость вращения среды, магнитного поля, вязкости и других диссипативных эффектов.

11.7. Гравитационная неустойчивость Джинса для намагниченной плазмы с чернотельным излучением

Исходные бездиссипативные уравнения намагниченной плазмы с радиационными процессами состоят из уравнений: уравнений Эйлера для идеальной q-жидкости, уравнения Пуассона и уравнения магнитной индукции в магнитной гидродинамике:

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{grad}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{11.90}$$

$$\rho d\mathbf{u}/dt = c^{-1}\mathbf{j}\times\mathcal{B} - \mathrm{grad}P - \rho\,\mathrm{grad}\,\psi, \tag{11.91}$$

$$\frac{dT}{dt} = (\Gamma_3 - 1)\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \quad \Gamma_3 = 1 + \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma_q - 1)}{\beta + 12(\gamma_q - 1)(1-\beta)}, \tag{11.92}$$

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho, \tag{11.93}$$

$$\partial\mathcal{B}/\partial t = \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathcal{B}), \quad \mathrm{div}\,\mathcal{B} = 0. \tag{11.94}$$

Здесь $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}_0\mathbf{i}_z$ – магнитное поле; c – скорость света; $\mathbf{j} = (c/4\pi)rot\mathcal{B}$ – сила тока; $\gamma_q - 1 = 1 - q + 2/D$.

Линеаризуем уравнения (11.90)-(11.94), предполагая, что невозмущенное состояние среды является однородным и равновесным $(\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \mathbf{u}_0 = 0)$ и что $\psi_0 \cong 0$; тогда, в случае цилиндрически симметричного движения ($\mathbf{r} = \mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_z z$), получим[35):]

$$\partial\rho' / \partial t + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{11.95}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}\left[\frac{\operatorname{grad}\rho'}{\rho_0} - \frac{4-3\beta_0}{\beta_0}\frac{\operatorname{grad}T'}{T_0}\right] - \operatorname{grad}\psi' - \frac{1}{4\pi\rho_0}(\operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{B}}') \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_0, \tag{11.96}$$

$$\partial T' / \partial t - (\Gamma_{3,0} - 1) T_0 \rho_0{}^{-1} \partial\rho' / \partial t = 0, \tag{11.97}$$

$$\Delta\psi' = 4\pi G\rho', \qquad 11.70)$$

$$\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}' / \partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_0), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{B}}' = 0, \tag{11.99}$$

где

---

[35]) Известно, что проблему устойчивости самогравитирующего двумерного газового облака в принципе нельзя описывать в рамках двумерного приближения, поскольку оно заведомо является сильно неустойчивым (см., например, Фридман, Хоперсков, 2011). Однако при наличии сильного внешнего гравитационного поля с цилиндрической геометрией и с образующей вдоль оси вращения облака, возможно обеспечить его устойчивость в случае, когда угловая скорость вращения достаточно велика. В этом случае структура допланетного облака вдоль оси вращения будет определяться исключительно его самогравитацией. Разумеется, этот случай искусственный, поскольку в реальных астрофизических системах такие цилиндрические поля если и встречаются, то без вложенных дисков. Вместе с тем рассмотрение такого вложенного в цилиндр самогравитирующего газового диска представляет определённый математический интерес, поскольку только в этом случае можно выделить эффекты, к которым приводит самогравитация в чистом виде. Именно такие модели рассматривались в большинстве классических работ по астрофизическим дискам (см., например, Goldreich, Lynden-Bell, 1965**;** Hunter ,1972; Toomre, 1964).

$$\frac{\beta_0 P_0}{\rho_0} = \frac{2}{(\gamma_q - 1)D}\frac{kT_0}{m_0} = \frac{k}{m_0}\frac{T_0}{1+(1-q)D/2} \equiv \frac{k}{m_0}T_{eff,0}. \qquad (11.100)$$

Получим теперь в рамках неэкстенсивной механики Тсаллиса дисперсионное уравнение для определения критерия неустойчивости однородной плазмы с учетом воздействия радиационного давления. Используем для этого метод нормальных колебаний, при условии экспоненциального возмущения всех пульсирующих параметров: ρ', u, T', ψ' и $\mathcal{B}'$, т.е. когда они пропорциональны $\sim \exp[i(-\omega t + \mathrm{k}_x x + \mathrm{k}_z z)]$. Здесь ω – частота гармонических колебаний, $\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_z^2}$ – волновое число. В результате будем иметь:

$$\left(-\omega^2 + V_{\mathcal{B}}^2 \mathrm{k}_z^2\right)\left[\left(-\omega^2 + V_{Alf}^2 \mathrm{k}^2 + \mathcal{A}\mathrm{k}_x^2\right)\left(-\omega^2 + \mathcal{A}\mathrm{k}_z^2\right) - \mathcal{A}^2 \mathrm{k}_x^2 \mathrm{k}_z^2\right] = 0, \qquad (11.101)$$

где

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}\left[1 + \frac{4-3\beta_0}{\beta_0}(\Gamma_{3,0} - 1\right] - \frac{4\pi G\rho_0}{\mathrm{k}^2} = v_{S,0}^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{\mathrm{k}^2}; \qquad (11.102)$$

$$V_{Alf}^2 = \mathcal{B}_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} \qquad (11.103)$$

– альфвеновская скорость плазмы.

Рассмотрим два простых случая:

1. Для поперечного распространения волн (когда $\mathrm{k}_x = \mathrm{k}$, $\mathrm{k}_z = 0$) уравнение (101) сводится к простой форме (сравни с (11.80))

$$\omega^2 - V_{Alf}^2 \mathrm{k}_x^2 - v_{S,0}^2 \mathrm{k}_x^2 + 4\pi G\rho_0 = 0, \qquad (11.104)$$

для которого, с учетом формулы (11.75), критерий гравитационной неустойчивости самогравитирующей плазмы с магнитным полем и радиационным давлением принимает вид:

$$\mathrm{k}_x^2(V_{Alf}^2+\frac{1}{(\gamma_q-1)D/2}\frac{kT_0}{m}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]>4\pi G\rho_0\,. \quad (11.105)$$

2. В случае продольного (к направлению магнитного поля) распространения пульсационных волн (для которых $\mathrm{k}_z=\mathrm{k}$, $\mathrm{k}_x=0$) уравнение (101) сводится к следующим двум уравнениям:

$$\omega^2-V_{Alf}^2\mathrm{k}_z^2=0, \quad \omega^2-v_{S,0}^2\mathrm{k}_z^2+4\pi G\rho_0=0\,. \qquad (11.106)$$

Таким образом, в поперечном режиме распространения волны возмущения критерий неустойчивости Джинса для плазмы модифицируется магнитным полем и радиационным давлением. В случае продольного режима на джинсовский критерий не влияет магнитное поле, поскольку этот режим обеспечивает Альфвен-режим движения отдельно от гравитационного режима.

В заключение этой главы отметим, что экзопланеты образуются из протопланетных дисков в результате потери ими устойчивости. Гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего космического вещества протопланетного диска. В конечном счете, именно с ней связано формирование экзопланет. Однако полной ясности в том, какие физико-химические процессы идут при их формировании и какие из них доминируют, до сих пор нет. Большинство обнаруженных на сегодня протопланетных дисков вокруг солнечноподобных звезд сильно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине современная теория, которая используется для описания Солнечной системы, только одна из многих, и для описания эволюции звездных протопланетных дисков она очевидно намного сложнее. Об этом, в частности, свидетельствует коллекция обнаруженных во Вселенной экзопланет, которые весьма разнообразны. В связи со сказанным назрела необходимость в создании нестандартных моделей, объясняющих многообразие протопланетных дисков и планетных систем.

Предложенный здесь подход может быть распространен на процессы, связанные, например, с исследованием гравитационных возмущений экзопланетных дисков с излучением, с исследованием собственных частот колебаний вертикально неоднородных магнитных протопланетных дисков и др. При этом следует заметить, что численное значение параметра деформации q играет существенную роль. К сожалению, проблема его определения все еще остается открытой. Вместе с тем, в настоящее время имеются серьезные успехи в гелиосейсмологии, которая исследует внутреннюю структуру и динамику Солнца (см. Gough, 2012). В солнечной атмосфере установлены и изучены почти 10 миллионов резонансных мод колебаний. Их частоты измерены с достаточно большой точностью, что позволяет исследовать внутреннюю структуру Солнца на больших глубинах (Gough, Hindman, 2010). Эти результаты поднимают ряд теоретических вопросов, ответы на которые необходимы для понимания того, как на самом деле эволюционирует обычная звезда с протопланетным диском. Поскольку гелиосейсмология приводит экспериментальные доказательства присутствия неэкстенсивных эффектов в недрах звезды (в частности, по найденным скоростям звука), то есть надежда, что она также сможет в самое ближайшее время предоставить космологические экспериментальные данные по численным значениям параметра деформации q, отличным от единицы.

Библиография

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. Т. 32. С. 93-118.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках неаддитивной статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков // Матем. Моделирование. 2016b. Т. 28. № 3. С. 96-118.

Колесниченко А.В. Конструирование континуальных моделей турбулентных космических сред. Проблемы математического моделирования астрофизических аккреционных дисков // LAP LAMBERT Academic Publishing RU. 2016a. 380 с.

Колесниченко А.В. Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред. Моделирование аккреционных протопланетных дисков. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. 372 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Модификация критерия джинсовской неустойчивости астрофизических объектов с фрактальной структурой в рамках неэкстенсивной статистики // Астроном. Вестн. 2014. Т. 48. № 5. С. 383–395.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. К моделированию процесса агрегации пылевых фрактальных кластеров в протопланетном ламинарном диске // Исследования Солнечной системы: космические вехи. Механика, управление, и информатика. М.: ИКИ РАН, 2015a. С. 349-385.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. 567 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Фридман А.М., Хоперсков А.В. Физика галактических дисков. М.: Физматлит. 2011. 640 с.

Хоперсков А.В., Храпов С.С. Неустойчивость звуковых волн в тонком газовом диске // Письма в АЖ. 1995. Т. 21. С. 388-393.

Чандрасекхар С. Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 476 с.

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications”. Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Anchrordoqui L.A., Torres D.F. Non-extensivity effects and the highest energy cosmic ray affair // Phys. Lett. A. 2001. V. 283. P. 319-322.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics // Bras. J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 91-107.

Bonnor W. B. Jeans' Formula for Gravitational Instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1957. V. 117. № 1. P. 104-117. (https://doi.org/10.1093/mnras/117.1.104).

Büyükkilic F., Demirhan D. A fractal approach to entropy and distribution functions // Phys. Lett. A. 1993. V.181. P. 24-28.

Büyükkilic F., Demirhan D. A unified grand canonical description of the nonextensive thermostatistics of the quantum gases: Fractal and fractional approach // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 14. P. 705-711.

Cadez V.M. Applicability problem of Jeans criterion to a stationary self-gravita ting cloud // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 242-244.

Cadez V. M. Instabilities in stratified magnetized Stellar atmospheres //Publ. Astron. Obs. Belgrade. 2010. V. 90. P. 121-124.

Camenzind M., Demole F., Straumann N. The stability of radiation–pressure–dominated accretion discs // Astron.Astrophys. 1986. V. 158. P. 212-216.

Chamati H., Djankova A.T., Tonchev N.S. On the application of nonextensive statistical mechanics to the black-body radiation // Physica A. 2006. V. 360. P. 297-303.

Chandrasekhar S., Fermi E. Problems of gravitational stability in the Presence of a magnetic field // Astrophysical Journal. 1953. V. 118. P. 116-141.

Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. 1991. A 24. P. L69-72.

Daroczy Z. Generalized information function// Inform. Control. 1970. V. 16. P. 36–51.

Dhiman J.S., Dadwal R. On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-uniform Rotation and Magnetic Field // Journal of Astrophysics and Astronomy. 2012. V. 33. № 4. P. 363-373.

Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars. Cambridge. England: Cambridge University Press. 1988. 407 p.

Fridman A.M, Polyachenko V.L. Physics of gravitating system- N.Y.: Springer-Verlag. 1984. V. 1. 468 p.; V. 2. 358 p.

Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of Gravitating Systems I: Equilibrium and Stability. Springer Science & Business Media. 2012. 468 p.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. "Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications" // Oxford University Press. 2004. 440 p.

Grigolini P., Tsallis C., West B.J. Eds., "Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics" // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. 13, № 3. P. 367.

Goldreich P., Lynden-Bell D. I. Gravatational stability of uniformly rotating disks // MNRAS, 1965. V. 130. P. 97-124.

Goldreich P., Ward W.R. The Formation of Planetesimals // Astrophysical Journal. 1973. V. 183. P. 1051-1062 .

Gough D. O., Hindman B. Helioseismic Detection of Deep Meridional Flow // J. Astroph. 2010. V. 714. № 1. P. 960-970.

Gough D. O Heliophysics Gleaned from Seismology // Progress in solar/stellar Physics with Helio- and Asteroseismology, Proc. 65th Fujihara Seminar, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser., 2011. V. 462. P. 429-454 (arXiv:1210.1114v1 [astro-ph.SR]. 2012).

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Herrmann H.J., Barbosa M., Curado E.M.F. Eds. "Trends and perspectives in extensive and non-extensive statistical mechanics" // Physica A. 2004. V. 344. № 3-4. P. v-vi.

Hunter C. Self-gravitating gaseous disks // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V.4. P. 219-242.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // In collec. "Statistical Physics 3", Lectures from Brandeis Summer Institute 1962. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1963. p.181.

Jeans J.H. The stability of a spherical nebula 199 // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. V.199. P. 1-53.

Jeans J. H. Astronomy and Cosmogony, Cambridge Univ. Press. 2009. 476 p.

Joshi H., Pensia R. K. Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // Physics of plasmas. 2017. V. 24. P. 032113 -1 – 032113-8.

Kaniadakis G., Lissia M., Rapisarda A. Eds. “Non Extensive Thermodynamics and Physical Applications” // Physica A. 2002. V. 305. № 1-2. P. xv-xvii.

Kaniadakis G., Lissia M. Eds. “News and Expectations in Thermostatistics” // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340. № 1. P. xv-xix.

Kaniadakis G., Carbone A., Lissia M. Eds. “News, expectations and trends in statistical physics” // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1. P. xi-xi.

Kaothekar S., Chhajlani R.K Jeans Instability Of Self Gravitating Partially Ionized Hall Plasma With Radiative Heat Loss Functions And Porosity // AIP Conference Proceedings 1536. 2013. P.1288-1289.

Kolesnichenko A. V. On the Simulation of Helical Turbulence in an Astrophysical Nonmagnetic Disk // Solar System Research. 2011. Том 45, вып. 3, стр. 246-263.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbody Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System Research. 2020a V. 54, № 5, P. 420-431.

Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya. Thermodynamic Model of MHD Turbulence and Some of Its Applications to Accretion Disks // Solar System Research. 2008. V. 42. № 3. P. 226-255.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics. RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. № 2. P. 137-149.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of Aggregation of Fractal Dust Clusters in a Laminar Protoplanetary Disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48, № 5. P. 354-365.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the Jeans and Toomre Instability Criteria for Astrophysical Fractal Objects Within Nonextensive Statistics// Solar System Research, 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

Kolesnichenko A. V., Marov M.Ya. Streaming Instability in the Gas–Dust Medium of the Protoplanetary Disc and the Formation of Fractal Dust Clusters // Solar System Research. 2019. V. 53. № 3. P. 181-198.

Kumar V., Sutar D. L., Pensia, R. K., Sharma S. Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // 2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. 1953. 2018. P. 060036-1–060036-4.

Leubner M.P. Nonextensive Theory of Dark Matter and Gas Density Profiles // Astrophys. J. 2005. V. 632. L1–L4.

Lima J.A.S., Silva R. Jr., Santos J. Plasma oscillations and nonextensive statistics // Phys.Rev. E. 2000. V. 61. № 3. P. 3260-3263.

Lima J.A. S., Silva R., Santos J. Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory // Astronomy and Astrophysics. 2002. V. 396. P. 309-313.

Low C., Lynden-Bell D. The minimum Jeans mass or when fragmentation must Ssop.// Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1976. V. 176. № 2. P. 367-390.

Ma P., Zheng Y., Qi G. The nonextensive Bose-Einstein condensation and photon gas with parameter transformation // Eur. Phys. J. Plus. 2019. V. 134. P. 502 (1-11).

Mace R. L., Verheest, Frank; Hellberg M. A. Jeans stability of dusty space plasmas // Physics Letters A. 1998. V. 237. P 146-151.

McKee M.R. The radial-azimuthal stability of accretion disks around black holes // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 521-525.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Turbulenceand Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer Science+Business Media New York. 2013. 657 c.

Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis'entropy maximization procedure revisited // Physica A. 2000. V. 286. P. 489-502.

Masood W., Salimullah M., Shah H. A. A quantum hydrodynamic model for multicomponent quantum magnetoplasma with Jeans term // Physics Letters A, 372. 2008. V.45. P. 6757-6760.

Mather J.C., Cheng E.S., Cottingham D.A., et al. Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cobe 1firas instrument // Astrophys. J. 1994. V. 420. P. 439-444.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / http://tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm.

Owen J. M., Villumsen J. Baryons V. Dark Matter, and the Jeans Mass in Simulations of Cosmological Structure Formation // J. Astroph. 1997. V. 481. № 1. P. 1-21.

Pandey B.P., Avinash K. Jeans instability of a dusty plasma // Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). 1994 .V. 49. № 6. P. 5599-5606.

Pensia R. K., Sutar D. L., Sharma S. Analysis of Jeans Instability of Optically Thick Quantum Plasma under the Effect of Modified Ohms law // 2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. 1953. 2018. P. 060044-1–060044-4.

Pessah M.E, Torres D.F., Vucetich H. Statistical mechanics and the description of the early universe. (I). Foundations for a slightly non-extensive cosmology // Phys. A: Statis. Mech. 2001. V. 297. № 1-2. P. 164-200.

Plastino A.R., Plastino A., Vucetich H. A quantitative test of Gibbs' statistical mechanics // Physics Let. A. 1995. V. 207. P. 42-46.

Rovenchak A. Ideal Bose-gas in nonadditive statistics // Low temperature physics. 2018. V. 44. №. 10. P. 1025-1031.

Sakagami M., Taruya A. Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatistics // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V. 16. № 3. P. 279-292.

Sistema P. D., Vucetich H. Cosmology, oscillating physics, and oscillating biology // Phys. Rev. Lett. 1994. V.72. №. 4. P. 454-457.

Shakura N.I., Sunyaev R.A. A theory of the instability of disk accretion onto black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars // Mon. Not. RAS, astr. Soc. 1976. V. 175. P. 613-632.

Shukla P. K., Stenflo L. Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 462. 2006. P. 403-407.

Tirnakli U., Büyükkiliç F., Demirhan D. Generalized Distribution Functions and an Alternative Approach to Generalized Planck Radiation Law // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1997. V. 240. № 3-4. P. 657-664.

Trigger S. A., Ershkovich A. I., van Heijst G. J. F., Schram P. P. J. M. Kinetic theory of Jeans instability // Phys. Rev. E 69, 2004. P. 066403 –066405.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astroph. 1964. V.139. P. 1217-1238.

Tsiklauri D. Jeans Instability of Interstellar Gas Clouds in the Background of Weakly Interacting Massive Particles // J. Astroph. 1998. V. 507. № 1. P. 226-228.

Tsintsadze N. L., Chaudhary R., Shah H. A., Murtaza G. Jeans instability in a magneto- radiative dusty plasma // Journal of Plasma Physics. 2008. V. 74. № 6. P. 847-853.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1/2. P. 479-487.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evi-dences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Sa Barreto F.C., Loh E.D. Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation // Physical Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 1448-1451.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astroph. 1964. V.139. P. 1217-1238.

Wang Q.A., Le Méhauté A. Nonextensive black-body distribution function and Einstein's coefficients *A* and *B* // Phys. Lett. A. 1998. V. 242. P. 301-306.

Wang Q.A., Nivanen L., Le Méhauté A. Generalized blackbody distribution within the dilute gas approximation // Physica A. 1998. V. 260 P. 490-498.

Zaripov R. G. Elementary particle physics and field theory. Evolution of the difference information in the process of the fermi and bose gas self-organization for nonextensive systems // Russian Physics Journal. 2009. V. 52. №. 4. P. 329-337.

ГЛАВА 12

Модифицированный в рамках негауссовой каппа-статистики интегральный критерий устойчивости Чандрасекара для равновесного сферического облака протозвезды

В рамках неэкстенсивной статистической механики Каниадакиса получено обобщение интегральной теоремы устойчивости Чандрасекара сферически симметричного распределения материи и черного излучения в протозвездном облаке, находящемся в состоянии гравитационного равновесия. С этой целью используются элементы деформированной термодинамики для идеального газа, деформированное каноническое распределение Гиббса, а также эффективная гравитационная постоянная, вычисленная в формализме Верлинде. При этом параметр деформации к (каппа) измеряет так называемую степень неэкстенсивности облачной системы. Кроме этого, обсуждаются в контексте каппа-статистики модифицированные термодинамические свойства излучения черного тела, в частности, к -аналог закона Стефана для энергии излучения и обобщенные выражения для энтропии, теплоемкости и давления излучения. Представленный способ объединения указанных аномальных физических процессов обеспечивает альтернативу классической процедуре вывода Чандрасекаром известных интегральных теорем для газовых конфигураций, находящихся в гравитационном равновесии, и восстанавливает классические выражения в пределе к → 0.

Введение

Несмотря на большие достижения в области естественных наук, классическая статистическая механика, основанная на энтропии Больцмана–Гиббса (БГ), все же не является пригодной для описания многих сложных физических систем, особенно систем, характеризующихся большой дальностью пространственно-временных корреляций, немарковостью процессов, фрактальностью геометрии фазового пространства, дальнодействующими силовыми взаимодействиями, наличием степенных статистических распределений. В качестве примера можно привести невозможность объяснения в рамках статистики БГ спектра космических лучей – одной из важнейших систем релятивистских частиц. В связи с этим, за последние несколько десятилетий было предпринято множество попыток обобщить статистику БГ. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (Tsallis, 1988), в которой был введен функционал энтропии $S_q(f) := k_{\mathcal{B}}(q-1)^{-1}\left[1-\int f^q d\Omega\right]$, зависящий от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающий неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Неэкстенсивная q-статистика Тсаллиса, являющаяся в настоящее время наиболее изученной в литературе, показала хорошее соответствие с наблюдениями и экспериментальными измерениями специфических свойств сложных систем, поведение которых часто невозможно описать в рамках классической статистики Больцмана–Гиббса (см., например, Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013; Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014, 2016, 2019b; Колесниченко, 2019a; Kolesnichenko, 2020a,b).

Вместе с тем определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером экстенсивной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивных статистик, проводимых в настоящее время, являются различные нелогарифмические энтропии, рассмотренные, например, в работах (Renyi, 1961; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989; Abe, 1997; Landsberg, Vedral, 1998; Kaniadakis, 2009; Зарипов, 2002, 2010; Колесниченко, 2018; Kolesnichenko, Marov, 2019). Основанные на неэкстенсивных энтропиях многочисленные статистические теории постоянно развиваются в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения (см. Библиографию на сайте: http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio. Htm), которая постоянно обновляется).

Среди разнообразных неэкстенсивных статистик особый интерес представляет каппа-статистика, основанная на энтропийном функционале Каниадакиса

$$S_\kappa(f) := -\frac{k_{\mathcal{B}}}{2\kappa}\int f\left(f^{\kappa} - f^{-\kappa}\right)d\Omega,$$

который впервые был введен в работах (Kaniadakis, 2001a,b; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Каппа-статистика Каниадакиса, естественно возникающая в рамках специальной теории относительности Эйнштейна, оказалась применимой для описания значительного числа экспериментально наблюдаемых аномальных явлений в физике и в других естественных науках. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с аномальными явлениями в специальной теории относительности (Kaniadaris, 2005), в квантовой механике (Kaniadaris, 2002), в звездной астрофизике (Carvalho и др., 2008, 2009; Soares, Silva, 2011), в деформированной термодинамике неэкстенсивных систем (Scarfone, Wada, 2006, 2014; Колесниченко, 2020a,b), в термодинамике Бозе-газа и черного излучения (Lourek, Tribeche, 2016; Ourabah, Tribeche, 2014; Kolesnichenko, 2020c) в газокинетических моделях аномальных систем (Kaniadakis, 2001; Rossani, Scarfone, 2004; Silva и др., 2008; Bento и др., 2013) и т.п. При изучении этих и подобного типа сложных систем возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. К их числу относится, в частности, проблема совместного образования звезды (протосолнца) и экзопланетного облака из вещества единой вращающейся туманности (Hoyle,1960).

В данной главе обсуждается идея Чандрасекара о существовании глобального критерия стабильности сферической конфигурации из вещества и излучения, находящейся в гравитационном равновесии, и на ее основе сформулирована в контексте неэкстенсивной статистики Каниадакиса обобщенная интегральная теорема устойчивости для конечной протозвездной туманности.

Классическая интегральная теорема (см. Чандрасекар,1950; Теорема 6, стр.111) для находящейся в гравитационном равновесии сферической конфигурации из вещества (газа) и чёрнотельного излучения гласит, *что полное давление P_{ce} газа и излучения в центре притяжения гравитирующего облака массы $\mathcal{M}$, в котором средняя плотность $\bar{\rho}(r)$ в точке, находящейся на расстоянии r от центра, не увеличивается от центра к поверхности, должно удовлетворять неравенству*

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\bar{\rho}^{4/3}\mathcal{M}^{2/3} \le P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}\mathcal{M}^{2/3}. \qquad (12.1)$$

Здесь $\overline{\rho}$, ρ_{ce} – соответственно средняя плотность облака и плотность в его центре. Смысл теоремы состоит в том, что давление, действующее в центре облака массы $\mathcal{M}$, должно быть промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью – одна с плотностью, равной средней плотности $\overline{\rho}$ конфигурации, а другая с плотностью, равной плотности ρ_{ce} в ее центре. Если неравенство (12.1) нарушается, то должны существовать некоторые области, в которых преобладают противоположные градиенты плотности; а это означает неустойчивость всей системы. Другими словами, можно считать, что неравенство (12.1) эквивалентно интегральному условию устойчивости «материнской» звёздной туманности (Чандрасекар, 1985).

Исходя из правой части этого неравенства, Чандрасекар доказал другую теорему (см. Чандрасекар,1950; Теорема 7, стр.113), согласно которой отношение давления излучения к полному давлению в центре газовой конфигурации, $(1-\beta_c)$, в которой $\overline{\rho}(r)$ не увеличивается от центра к периферии, удовлетворяет неравенству

$$(1-\beta_{ce}) \le (1-\beta_*), \tag{12.2}$$

где коэффициент β_* определяется из уравнения четвертого порядка $\left(\mu^2 M / 5.48 M_\odot\right)^2 \beta_*^4 = 1-\beta_*$. Здесь $\beta := p_{gas} / P$ – коэффициент, характеризующий долю вещества в полном давлении смеси; μ – средний молекулярный вес; $M_\odot = 1.989(2) \times 10^{33}\,г$ – масса Солнца. Эта теорема показывает, что для сферического гравитирующего облака значение величины $(1-\beta)$ в его центре «ce» не может превосходить некоторого количества, зависящего только от массы облака. В частности, для протосолнечного облака имеет место неравенство $(1-\beta_c) < 0{,}03$, откуда следует, что для звезды солнечной массы со средней молекулярной массой, равной единице, радиационное давление в центре не может превышать 3% от общего давления, иначе звезда будет нестабильной. В этой главе получено обобщение этих двух теорем на случай неэкстенсивного сферического протозвездного облака с учетом модифицированных в рамках статистики Каниадакиса термодинамики вещества, чернотельного излучения и гравитационной постоянной, а также дана количественная оценка роли параметра деформации каппа в образовании неустойчивости самогравитирующей протозвездной туманности. Показано, что этот параметр расширяет комбинацию естественных констант, входящих в неравенство (12.1), корректируя при этом численные значения соответствующих величин, необходимых для оценки протозвездных масс, и модифицирует тем самым классическую гипотезу Хойла (Hoyle,1960) о совместном образовании протозвезды и экзопланетного облака из вещества единой вращающейся туманности (небулы).

Глава организована следующим образом. В разд. 12.1 мы напоминаем основные элементы каппа-статистики и приводим деформированное каноническое распределение Гиббса для скоростей свободных газовых частиц (Kaniadakis, 2001; Silva и др., 2008). В разд.12.2 обсуждается энтропия световых квантов Бозе в статистике Каниадакиса и представлены термодинамические соотношения для чернотельного излучения (Ourabah, Tribeche, 2014; Lourek, Tribeche, 2016; Kolesnichenko, 2020c). В разд. 12.3 приводится значение для модифицированной гравитационной постоянной, полученной в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса (Abreu и др., 2016a,b, 2017; Колесниченко, Маров, 2020). В разд. 12.4. приведены уравнения, описывающие неэкстенсивное протозвездное облако с излучением в состоянии механического равновесия, рассматриваемые для простоты в пренебрежении магнитными полями и эффектом вращения. Наконец, последний разд. 12.5 посвящен выводу интегрального условия устойчивости для сферически симметричного распределения вещества и излучения в протозвездном облаке на основе статистики Каниадакиса.

12.1. Равновесное распределение скоростей свободных частиц в рамках формализма Каниадакиса

В деформированной статистической механике Каниадакиса для непрерывных аномальных систем при вероятностной нормировке $\int_{\mathcal{R}} f(\mathbf{u})d\mathbf{\Omega}=1$ для плотности вероятности распределения частиц $f(\mathbf{r},\mathbf{u})$ в фазовом пространстве, κ-энтропия системы задается следующим функционалом (Kaniadakis, 2001a,b)

$$S_\kappa(f) := -k_{\mathcal{B}} \int_R f(\mathbf{r},\mathbf{u}) \frac{f(\mathbf{r},\mathbf{u})^\kappa - f(\mathbf{r},\mathbf{u})^{-\kappa}}{2\kappa} d\mathbf{\Omega}, \qquad (12.3)$$

где $d\mathbf{\Omega} = d\mathbf{r}\, d\mathbf{u}$; $k_{\mathcal{B}} = 1.380662(44)\times 10^{-16}$ *эрг* K^{-1} – постоянная Больцмана; энтропийный индекс κ представляет собой вещественное число, принадлежащее области $|\kappa| = 1$. В пределе слабой связи (когда $\kappa \to 0$) каппа-энтропия системы переходит в каноническую форму классической статистики Больцмана–Гиббса, $S_{\mathcal{BG}}(f) := -k_{\mathcal{B}} \int_R f(\mathbf{r},\mathbf{u}) \ln f(\mathbf{r},\mathbf{u}) d\mathbf{\Omega}$.

Основанная на энтропии Каниадакиса неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру обычной статистической механики Больцмана–Гиббса и пригодна для описания большого класса сложных явлений в различных прикладных областях. Каппа-статистика изначально обобщает классическую статистику введением так называемых к-экспоненты и к-логарифма, которые определяются формулами

$$\exp_\kappa(x) := \left[\kappa x + \sqrt{1+\kappa^2 x^2}\right]^{1/\kappa}, \quad \ln_\kappa(x) := \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2^\kappa}, \qquad (12.4)$$

при выполнении следующей операции

$$\ln_\kappa\left[\exp_\kappa(x)\right] = \exp_\kappa\left[\ln_\kappa(x)\right] = x, \qquad (12.5)$$

и дают в пределе $\kappa \to 0$ обычный логарифм и обычную экспоненту. Многочисленные свойства этих деформированных функций представлены в работах (Scarfone, Wada, 2006; Kaniadakis, 2013; Колесниченко, 2020a,b)

Рассмотрим теперь не меняющиеся с течением времени стационарную функцию распределения вероятностей для сложных κ-систем. Для них в работах (Kaniadakis, 2001; Silva, 2006; Bento и др., 2013) было получено в случае однородной среды следующее равновесное распределение свободных частиц в одномерном пространстве скоростей

$$f_{eq}(u) = \frac{1}{\tilde{Z}} \exp_\kappa\left(-\frac{mu^2}{2k_{\mathcal{B}}T}\right). \qquad (12.6)$$

Здесь

$$\tilde{Z} = \int_{\mathcal{R}} \exp_{\kappa}\left(-\frac{mu^2}{2k_{\mathcal{B}}T}\right)du, \qquad |\kappa| < 2/3 \tag{12.7}$$

– постоянная κ-нормировки; m – масса одной частицы космического вещества протопланетного облака; T – измеряемая в градусах абсолютная температура. В предположении, что $a := m/2k_{\mathcal{B}}T$, $x := au^2$, для величины $\tilde{Z}$ получим $\tilde{Z} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\exp_{\{\kappa\}}(-x)dx$. При использовании интегральной формулы (см., например, Bento и др., 2013)

$$\int_0^{\infty} x^{r-1}\exp_{\kappa}(-x)\,dx = \frac{|2\kappa|^{-r}}{1+r|\kappa|}\Gamma(r)\times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - r/2\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + r/2\right]}, \tag{12.8}$$

в конечном счете будем иметь

$$\tilde{Z} = \sqrt{\frac{2\pi k_{\mathcal{B}}T}{m}}\,\frac{|2\kappa|^{-1/2}}{1+|\kappa|/2}\,\frac{\Gamma\left(|2\kappa|^{-1} - 1/4\right)}{\Gamma\left(|2\kappa|^{-1} + 1/4\right)}. \tag{12.9}$$

Здесь $\Gamma(x)$ – Гамма-функция).

Применяя формулу (12.8), легко получить среднее значение квадрата скорости частицы для каждой степени свободы

$$\langle u^2\rangle_{\kappa} := \int_0^{\infty} u^2 f_{eq}(u)du \Big/ \int_0^{\infty} f_{eq}(u)du =$$

$$= \frac{1}{m}k_{\mathcal{B}}T\,\frac{1}{|2\kappa|}\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\,\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 1/4\right]},\ |\kappa| < 2/3). \tag{12.10}$$

Тогда, с учетом κ- теоремы о равнораспределении энергии, выражение для среднего значения кинетической энергии всех частиц аномального вещества протозвездного облака, состоящего из N газовых частиц, будет иметь вид:

$$E_{\kappa} = N\frac{m\langle u^2\rangle_{\kappa}}{2} = \frac{1}{2}Nk_{\mathcal{B}}\mathcal{B}_{\kappa}T = \frac{1}{2}Nk_{\mathcal{B}}T_{\kappa}, \tag{12.11}$$

где

$$\mathcal{B}_\kappa := \frac{1}{|2\kappa|}\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}. \qquad (12.12)$$

Заметим, что из свойств Гамма-функции следует, что $\lim\limits_{\kappa\to 0}\mathcal{B}_{\{\kappa\}}=1$.

Поскольку определение температуры в κ-статистике достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа (Колесниченко, 2020a)), то далее мы будем интерпретировать величину $T_\kappa := \mathcal{B}_\kappa T$ как обобщённую температуру сложной неаддитивной κ-системы. Естественно, что эта температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) частиц системы.

Используя (12.12), определим используемые далее удельную (на единицу массы) внутреннюю κ-энергию и κ-давление вещества протозвездного облака соотношениями

$$\varepsilon_\kappa := \frac{3E_\kappa}{mN} = \frac{3k_\mathcal{B}}{2m}T_\kappa, \quad p_\kappa = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_\kappa = \frac{k_\mathcal{B}}{m}\rho T_\kappa = k_\mathcal{B}T_\kappa n. \qquad (12.13)$$

Здесь $n := N/V$, $\rho := mN/V$ – соответственно числовая плотность и массовая плотность вещества облака. Следует отметить, что формула (12.13) для внутренней энергии экстенсивного вещества в случае $\kappa\to 0$ принимает вид $\varepsilon = (3/2)k_\mathcal{B}T/m$, что соответствует выражению для энергии идеального газа в статистике Больцмана−Гиббса.

Деформированная термодинамика на основе каппа-статистики. Далее в работе будут использованы результаты работ (Scarfone, Wada, 2006; Колесниченко, 2020a,b), в которых выполнено конструирование на основе параметрической κ-энтропии статистической термодинамики неэкстенсивных систем. Проведенное в них исследование базировалось на свойствах негиббсового канонического к-распределения, полученного из принципа Джейнса (Jaynes,1963) максимума к-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы, и вероятностной нормировке для функции к-распределения. Было показано, что все важнейшие термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия, могут быть выражены с использованием только равновесной функции к-распределения. Полученные при этом дифференциальные уравнения равновесной термодинамики для средних величин имеют следующую почти классическую форму:

$$F_{\kappa} = -k_{\mathcal{B}} T \ln_{\kappa} \mathrm{Z}_{\kappa}, \quad E_{\kappa} = -T^2 \left(\partial (T^{-1} F_{\kappa}) / \partial T \right)_V, \tag{12.14}$$

$$TS_{\kappa} = E_{\kappa} - F_{\kappa}, \quad S_{\kappa} = -\left(\partial F_{\kappa} / \partial T \right)_V, \tag{12.15}$$

$$C_{V,\kappa} = \left(\partial E_{\kappa} / \partial T \right)_V = \frac{3}{2} N \mathcal{B}_{\kappa} k_{\mathcal{B}}, \tag{12.16}$$

$$p_{\kappa} = -\left(dF_{\kappa} / dV \right)_T. \tag{12.17}$$

Здесь Z_{κ}, F_{κ}, $C_{V,\kappa}$ – соответственно обобщенные статистический интеграл, свободная энергия и теплоемкость (при постоянном объеме) системы.

12.2. Термодинамика излучения черного тела в каппа статистике

Электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии (черное излучение), можно рассматривать как фотонный газ. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе−Эйнштейна. Поскольку фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), то состоящий из фотонов газ можно считать идеальным. Однако при этом необходимо наличие хотя бы небольшого количества материальной среды (например, газа) для самой возможности установления теплового равновесия в излучении. В этом случае механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к специфической особенности фотонного газа − число частиц *N* в нем не сохраняется и само должно определиться из условий теплового равновесия, что приводит к равенству нулю химического потенциала μ фотонного газа (см. Ландау, Лифшиц, 1976).

Из-за важности радиации для моделирования различных астрофизических объектов излучение абсолютно черного тела исследовалось в первую очередь в рамках неэкстенсивной q-статистики Тсаллиса (см., например, Tsallis и др. 1995; Колесниченко, 2020c). В данном разделе мы получим термодинамические свойства чернотельного излучения в рамках к-статистики Каниадакиса.

Распределение фотонов по различным уровням энергии $\varepsilon = h\nu$ (где ν − частота фотонов; $h = 6.626176(36)\times 10^{-27}\,\textit{эрг}\cdot c$ − постоянная Планка) в статистике Каниадакиса имеет следующий вид (Aliano и др., 2003)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp_\kappa(\varepsilon / k_{\mathcal{B}}T) - 1}\,. \qquad (12.18)$$

В предельном случае к→ 0 обобщенное распределение (12.18) сводится к классическому распределению Бозе−Эйнштейна.

Умножая распределение (12.18) на плотность квантовых состояний фотонов с частотами собственных колебаний в интервале между ν и $\nu + d\nu$ (Ландау, Лифшиц,1976)

$$d\Omega = V(8\pi\nu^2 c^3)d\nu\,, \qquad (12.19)$$

(где V − объем системы; $c = 2.99792458\times 10^{10}\,\textit{см} / \textit{сек}$ − скорость света в вакууме), получим следующую формулу для полного числа фотонов в этом участке спектра:

$$dN_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^2}{\exp_\kappa(\frac{h\nu}{k_{\mathcal{B}}T}) - 1}d\nu\,, \qquad (12.20)$$

а при умножении (12.20) еще и на $h\nu$ приходим к выражению для полной энергии излучения в данном интервале частот:

$$dE_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{\exp_\kappa(\frac{h\nu}{k_{\mathcal{B}}T}) - 1}d\nu\,. \qquad (12.21)$$

Соотношение (12.21) представляет собой обобщенный в рамках статистики Каниадакиса закон излучения Планка. При $\kappa \to 0$ он сводится к классическому закону чернотельного излучения.

Термодинамика чернотельного излучения. Если теперь ввести переменную интегрирования $x := h\nu / k_{\mathcal{B}}T$ и проинтегрировать (12.21) по всем частотам, то в результате получим полную энергию излучения в данном объеме среды

$$E_\kappa^{rad} := \int_0^\infty dE_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{h\nu^3}{\exp_\kappa(\frac{h\nu}{k_{\mathcal{B}}T}) - 1}d\nu =$$

$$=V\frac{8h\pi}{c^3}\left(\frac{k_{\mathcal{B}}T}{h}\right)^4\int_0^\infty\frac{x^3}{\exp_\kappa(x)-1}dx\,. \tag{12.22}$$

В выражение (12.22) входит интеграл вида $\int_0^\infty\frac{x^3dx}{\exp_\kappa(x)-1}$, который при $\kappa\to0$ равен $\pi^4/15\simeq6.49394$ (Ландау, Лифшиц,1976). Введем обозначение для интеграла[36)]

$$J_\kappa(n):=\frac{15}{\pi^4}\int_0^\infty\frac{x^n dx}{\exp_\kappa(x)-1}\,. \tag{12.23}$$

Тогда для полной энергии излучения черного тела в формализме Каниадакиса будем иметь (обобщенный закон Больцмана)

$$E_\kappa^{rad}(T)=V\frac{8\pi^5k_{\mathcal{B}}^4}{15c^3h^3}J_\kappa(3)T^4=Va_\kappa T^4\,. \tag{12.24}$$

Здесь

$$a=\frac{8}{15}\frac{\pi^5k_{\mathcal{B}}^4}{c^3h^3}=7.56566(71)\times10^{-15}\,эрг\,см^{-3}\,K^{-4}\,,\quad a_\kappa:=aJ_\kappa(3) \tag{12.25}$$

– соответственно классическая и модифицированная постоянная плотности излучения Планка.

При использовании соотношений (12.15) и (12.24) легко получить следующее выражение для свободной энергии излучения черного тела:

$$F_\kappa^{rad}(T)=-T\int E_\kappa^{rad}\frac{dT}{T^2}=-\frac{4V}{3c}\frac{2\pi^5k_{\mathcal{B}}^4}{15c^2h^3}J_\kappa(3)T^4=$$

$$=-\frac{V}{3}aJ_\kappa(3)T^4=-\frac{V}{3}a_\kappa T^4=-\frac{1}{3}E_\kappa^{rad}\,. \tag{12.26}$$

Согласно формуле (12.14), энтропия черного излучения в статистике Каниадакиса равна

[36)] Формула для вычисления этого интеграла получена в работе (Колесниченко, 2020c); в частности, $J_\kappa^{(3)}=\frac{15}{\pi^4(1-\kappa)^3}\sum_{j=0}^{3}\left[C_3^jB\left(1-\kappa,\,(1-\kappa)(3-j)+1\right)\right]$, где $B(x,y)$ – Бета-функция.

$$S_{\kappa}^{rad} = -\left(\frac{\partial F_{\kappa}^{rad}}{\partial T}\right)_V = \frac{16V}{3c}\frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}J_{\kappa}(3)T^3 = \frac{4V}{3}a_{\kappa}T^3. \qquad (12.27)$$

Тогда из (12.24)-(12.26) следует соотношение

$$T\,S_{\kappa}^{rad}(T) = E_{\kappa}^{rad}(T) - F_{\kappa}^{rad}(T), \qquad (12.28)$$

которое доказывает инвариантность величины полной энергии чернотельного излучения $E_{\kappa}^{rad}(T)$ и в каппа-статистике.

Давление и теплоемкость (при постоянном объеме) для черного излучения в статистике Каниадакиса могут быть определены, согласно формулам (12.16) и (12.17), соотношениями:

$$C_{V,\kappa}^{rad} = \left(\frac{\partial E_{\kappa}^{rad}}{\partial T}\right)_V = 4Va_{\kappa}T^3, \;\; p_{\kappa}^{rad} = -\left(\frac{dF_{\kappa}^{rad}}{dV}\right)_T = \frac{1}{3}a_{\kappa}T^4 = \frac{1}{3V}E_{\kappa}^{rad} \qquad (12.29)$$

Таким образом, несмотря на зависимость термодинамических величин от параметра деформации κ, уравнение для полной энергии излучения (12.28) и уравнение состояния лучевого давления

$$Vp_{\kappa}^{rad} = \frac{V}{3}a_{\kappa}T^4 = \frac{1}{3}E_{\kappa}^{rad} \qquad (1230)$$

остаются неизменными и в формализме Каниадакиса.

В заключение этого раздела следует отметить, что черное тело излучает больше энергии с увеличением значения параметра деформации |κ| по сравнению со стандартным законом излучения Планка. Кроме этого, было установлено, что эффекты деформированной статистики Каниадакиса более заметны при высоких температурах (Lourek, Tribeche, 2016).

12.3. Эффективная гравитационная постоянная в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса

В соответствии с теорией ускоренного расширения Вселенной (Verlinde, 2011) центральным понятием, необходимым для возникновения гравитации является информация, которая подчиняется голографическому принципу (см., например, Susskind, 1995), и хорошо известный закон равнораспределения энергии. Здесь под голографией понимается информация о Вселенной, закодированная на экране (устройстве хранения информации), который трактуется как некая двумерная поверхность Вселенной. Согласно голографическому принципу рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии, хранящейся на голографических экранах; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийная сила), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности. А это и есть гравитация (см. Колесниченко, Маров, 2020).

В работах (Abreua др., 2013; Abreua др.,2016) с учетом формализма Верлинде дан вывод модифицированной гравитационной постоянной в рамках статистики Тсаллиса. Повторим кратко здесь этот вывод в рамках формализма Каниадакиса. С этой целью рассмотрим поверхность сферы радиуса R (играющую роль голографического экрана), которая находится в состоянии теплового равновесия и в центре которой находится масса M. Будем предполагать, что число битов, которые являются наименьшей единицей измерения информации на экране, пропорционально площади голографического экрана $A=4\pi R^2$; тогда полное число битов N может быть записано в виде

$$N = A / L_{Pl}^2 = 8\pi^2 R^2 c^3 / hG \,. \tag{12.31}$$

Здесь $L_{Pl}=\sqrt{Gh/2\pi c^3}=1.616225\times 10^{-35}\,м$, $G=6.6720(41)\times 10^{-8}\,дин\,см^2 г^{-2}$, – соответственно панковская длина и гравитационная постоянная. В формализме Верлинде предполагается, что полная энергия битов на голографическом экране задается законом равнораспределения энергии $E=N\,k_{\mathcal{B}}T/2$, который выводится в классической статистике Больцмана–Гиббса. Как было показано выше, этот закон в статистике Каниадакиса модифицируется следующим образом

$$E_\kappa=\frac{N}{2}\frac{1}{|2\kappa|}\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\,\frac{\Gamma\Big[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\Big]\Gamma\Big[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\Big]}{\Gamma\Big[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\Big]\Gamma\Big[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\Big]}k_{\mathcal{B}}T=\frac{N}{2}k_{\mathcal{B}}T_\kappa \,. \tag{12.32}$$

Отсюда с учетом того, что энергия тестовой частицы внутри голографического экрана делится поровну на все биты, можно записать следующее соотношение

$$Mc^2 = E_{\text{к}} = \frac{N}{2}\mathcal{B}_{\text{к}} k_{\mathcal{B}} T \ , \qquad (12.33)$$

где M – масса, которая в голографическом принципе возникает в области пространства, ограниченного экраном. Тестовая частица с массой m воспринимает всю энергию, распределенную по занятым битам, что следует из соотношения (12.33), которое представляет собой полную энергию, сосредоточенную на голографическом экране.

Важно отметить, что наблюдатель в системе покоя этой тестовой частицы, которая представляет собой ускоренную систему координат, зарегистрирует за счет эффекта Унру[37)] (Unruh, 1970) наличие следующей температуры чернотельного излучения космологического горизонта:

$$k_B T := \frac{1}{4\pi^2}\frac{a_{ac}\, h}{c}, \qquad (12.34)$$

которая зависит только от ускорения и выбора естественных единиц. Здесь a_{ac} – местное равномерное ускорение связанного с тестовой частицей кадра. Поэтому в энтропийной теории Верлинде температуру Унру можно принять за температуру голографического экрана[38)]. Важно отметить, что при использовании принципа эквивалентности, ускорение a_{ac}, фигурирующее в формуле (34), является также модифицированным абсолютным ускорением свободного падения, связанным с массивным телом в формализме Верлинде–Каниадакиса. Действительно, подставляя формулу (12.31) в соотношение (12.33) и используя выражение (12.34) получим, что

---

[37]) Эффект Унру (Unruh effect) – предсказываемый квантовой теорией поля эффект наблюдения теплового излучения в ускоряющейся системе отсчёта при отсутствии этого излучения в инерциальной системе отсчёта.

3) Температура Унру имеет тот же вид, что и температура Хокинга $T_H = gh/4\pi^2 c k_B$, где g обозначает поверхностную гравитацию черной дыры, которая была получена С. Хокингом (Hawking, 1975). Поэтому в свете принципа эквивалентности ее иногда называют температурой Хокинга–Унру.

$$k_B T = \frac{1}{4\pi^2}\frac{a_{ac}\,h}{c} = \frac{2Mc^2 hG}{8\pi^2 R^2 c^3 B_\kappa},$$

откуда следует модифицированная формула для ускорения

$$a_{ac} = \frac{M}{R^2}\frac{G}{\mathcal{B}_\kappa} = \frac{M}{R^2}G_\kappa\,. \qquad (12.35)$$

Здесь

$$G_\kappa = \frac{G}{\mathcal{B}_\kappa} = \left|2\kappa\right|\frac{2+3|\kappa|}{2+|\kappa|}\times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}G \qquad (12.36)$$

– эффективная гравитационная постоянная, полученная в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса. Заметим, что при $\kappa = 2/3$ (критическое значение параметра деформации) величину G_κ нельзя вычислить из соотношения (36), поскольку в его знаменателе находится расходящаяся для этого значения Гамма-функция. Таким образом, число $\kappa = 2/3$ является верхним пределом, когда мы имеем дело с голографическим экраном (сравни с результатами работы (Tsallis, Cirto, 2013).

12.4. Равновесное состояние протозвездного облака с чернотельным излучением

Будем далее предполагать, что протозвездное облако является квазиравновесным, сферически симметричным и оптически толстым, причем распределение поля излучения также близко к равновесному. Пусть r означает радиус-вектор, измеренный от центра конфигурации, принятого за начало координат. Для сферически симметричного распределения космического вещества все физические параметры будут функциями только от одного параметра r. Пусть $M(r)$ – масса, заключенная внутри сферы радиуса r. Тогда

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r)\,dr, \qquad dM(r) = 4\pi r^2 \rho\, dr\,. \qquad (12.37)$$

Будем обозначать через $\bar{\rho}(r)$ среднюю плотность внутри сферы радиуса r, а через $\bar{\rho}$ средняя плотность всей конфигурации протозвездного облака

$$\overline{\rho}(r)=\frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}, \quad \overline{\rho}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \tag{12.38}$$

Здесь M – масса всей конфигурации, а R – радиус конфигурации, который равен радиус-вектору точки, в которой все термодинамические параметры космического вещества обращаются в нуль.

Условие механического равновесия неэкстенсивного протозвездного сферически симметричного облака имеет вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP_\kappa}{dr}=G_\kappa\frac{M(r)}{r^2}. \tag{12.39}$$

Здесь введены следующие обозначения: $P_\kappa(r)=p_\kappa+p_\kappa^{rad}\equiv p_\kappa+a_\kappa T^4/3$ – полное давление космического вещества, состоящего из идеального κ-газа и чёрнотельного κ-излучения; $p_\kappa(r)=\dfrac{2}{3}\rho\varepsilon_\kappa=\dfrac{k_{\mathcal{B}}}{m}\mathcal{B}_\kappa T\rho$ – газовое давление в неэкстенсивной протозвездной конфигурации (определяемое формулой (12.13)); $p_\kappa^{rad}\equiv a_\kappa T^4/3$ – лучевое давление (определяемое формулой (12.29)); $G_\kappa=G/\mathcal{B}_\kappa$ – эффективная гравитационная постоянная (см. формулу (12.36)).

Введем уже здесь необходимую для дальнейших целей величину

$$\beta_\kappa:=\frac{p_\kappa}{P_\kappa}=\frac{p_\kappa}{p_\kappa+p_\kappa^{rad}}=\left[1+\frac{a_\kappa}{3\mathcal{B}_\kappa}\frac{1}{k_{\mathcal{B}}n}T^3\right]^{-1}, \tag{12.40}$$

характеризующую долю вещества в полном давлении системы[39)].

Из (38) и (39) следует фундаментальное уравнение равновесия:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP_\kappa}{dr}\right)=-4\pi G_\kappa\rho,$$

которое может быть записано в виде

[39)] На особую важность отношения $(1-\beta)$ для классической теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars»).

$$\frac{dP_\kappa}{dr} = -\frac{G_\kappa M(r)}{4\pi r^4}\frac{dM(r)}{dr}. \qquad (12.41)$$

Так как

$$\frac{d}{dr}\left[P_\kappa + \frac{G_\kappa M^2(r)}{8\pi r^4}\right] = \frac{dP_\kappa}{dr} + \frac{G_\kappa M(r)}{4\pi r^4}\frac{dM(r)}{dr} - \frac{G_\kappa M^2(r)}{2\pi r^5},$$

то, с учетом уравнения (12.41), получим:

$$\frac{d}{dr}\left[P_\kappa(r) + \frac{G_\kappa M^2(r)}{8\pi r^4}\right] = -\frac{G_\kappa M^2(r)}{2\pi r^5} < 0, \qquad (12.42)$$

что означает уменьшение функции $\left(P_\kappa(r) + G_\kappa M^2(r)/8\pi r^4\right)$ от центра к периферии для любой равновесной конфигурации неэкстенсивного протозвездного облака. Если $P_{\kappa,ce}$ означает центральное давление, то для него справедливо следующее интегральное неравенство

$$P_{\kappa,ce} > P_\kappa(r) + \frac{G_\kappa M^2(r)}{8\pi r^4} > \frac{GM^2}{8\pi \mathcal{B}_\kappa R^4}. \qquad (12.43)$$

(ср. Чандрасекар, 1950 Теорема 1, стр.106).

12.5. Интегральное условие устойчивости для сферически симметричного распределения космического вещества и черного излучения в статистике Каниадакиса

Приступим теперь к основной цели данной работы – выводу в рамках каппа-статистики модифицированного интегрального критерия устойчивости Чандрасекара для «материнской» звёздной туманности (небулы). Далее мы будем исходить из гипотезы Ф. Хойла (Hoyle,1960) о совместном образовании звезды и допланетного облака из вещества единой вращающейся звёздной туманности.

Модифицированное в рамках каппа-статистики неравенство, которому удовлетворяют давление $P_{\kappa,ce}$ и плотность ρ_{ce} в центре притяжения гравитирующего облака массы M, средняя плотность $\overline{\rho}$ вещества звезды и эффективная гравитационная постоянная G_κ, принимает вид:

$$\frac{1}{2\mathcal{B}_{к}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\bar{\rho}^{4/3}M^{2/3}\leq P_{к,ce}\leq\frac{1}{2\mathcal{B}_{к}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}. \qquad (12.44)$$

Классическая форма этого неравенства было получено Чандрасекаром (1950) в предположении, что средняя плотность $\rho(r)$ внутри сферы радиуса r, выделенной из общей массы протозвездного облака, не увеличивается от центра к поверхности. Согласно этому неравенству, давление, действующее в центре облачной конфигурации массы M, является промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью – одна с плотностью, равной средней плотности $\bar{\rho}$ конфигурации, а другая с плотностью, равной плотности вещества ρ_{ce} в ее центре. Случай существования областей, в которых неравенство (12.50) нарушается, означает неустойчивости всего протозвездного облака (Чандрасекар, 1985).

Для вывода неравенства (12.44) используем соотношение (12.41), из которого, с учетом соотношения

$$r^4=\left[M(r)/\tfrac{4}{3}\pi\bar{\rho}(r)\right]^{4/3}$$

(см. уравнение (12.38)), будем иметь

$$P_{к,ce}-P_{к}=\frac{G_{к}}{4\pi}\int_0^r\frac{M(r)}{r^4}dM(r)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3}G_{к}\int_0^r\bar{\rho}^{4/3}(r)M^{-1/3}(r)dM(r). \qquad (12.45)$$

Так как по предположению $\bar{\rho}(r)$ не увеличивается с увеличением r, то из (12.45) следует, что

$$P_{к,ce}-P_{к}\geq\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3}G_{к}\bar{\rho}^{4/3}(r)\int_0^r M^{-1/3}(r)dM(r). \qquad (12.46)$$

Вычисляя интеграл в правой части (12.46), получим

$$P_{к,ce}-P_{к}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}G_{к}\,\bar{\rho}^{4/3}(r)M^{2/3}(r) \qquad (12.47)$$

Обращаясь снова к выражению (12.45), в согласии с принятой гипотезой имеем:

$$P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} \le \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3} G_{\text{к}} \bar{\rho}_{ce}^{4/3} \int_0^r M^{-1/3}(r) dM(r),$$

или

$$P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G_{\text{к}} \,\bar{\rho}^{4/3}(r) M^{2/3}(r). \tag{12.48}$$

Объединяя (12.47) и (12.48), получим

$$\frac{1}{2\mathcal{B}_{\text{к}}} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3}(r) M^{2/3}(r) \le P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} \le \frac{1}{2\mathcal{B}_{\text{к}}} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_{ce}^{4/3} M^{2/3}(r). \tag{12.49}$$

Наконец, полагая в неравенстве (12.49) $r = R$, получим модифицированное неравенство Чандрасекара (12.44).

Если теперь в левую часть неравенства (12.44) вместо плотности $\bar{\rho}$ подставить ее выражение $M / \frac{4}{3}\pi R^3$, то получим

$$\frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{\mathcal{B}_{\text{к}} R^4} \le P_{\text{к},ce} \le \frac{1}{2\mathcal{B}_{\text{к}}} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_{ce}^{4/3} M^{2/3}. \tag{12.50}$$

Таким образом, добавочное ограничение, наложенное на распределение плотностей, а именно, что $\bar{\rho}(r)$ не увеличивается от центра к поверхности, дает возможность улучшить неравенство (12.43), полученное для $P_{\text{к},ce}$ в предыдущем разделе.

Модифицированная теорема Чандрасекара №7. Исходя из правой части неравенства (12.44) получим теперь модифицированное в рамках статистики Каниадакиса соотношение (12.2), т.е. модифицированную теорему 7 (см. Чандрасекар,1950; Теорема 7, стр.113).

Используя для этого определение (12.40) параметра $\beta_{\text{к}}$, уравнения состояния для лучевого давления (12.30), а также определение давления к-газа (12.15), получим $P_{\text{к}} = p_{\text{к}} / \beta_{\text{к}} = p_{\text{к}}^{rad} / (1 - \beta_{\text{к}})$, или

$$P_{\text{к}} = \frac{1}{\beta_{\text{к}}} \frac{k_{\mathcal{B}}}{m} \rho B_{\text{к}} T = \frac{1}{1 - \beta_{\text{к}}} \frac{1}{3} a_{\text{к}} T^4, \tag{12.51}$$

где

$$B_\kappa := \frac{1}{|2\kappa|}\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\;\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]},$$

$$a_\kappa = 8\frac{\pi k_{\mathcal{B}}^4}{c^3h^3}\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\exp_\kappa(x)-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_\kappa = \left[1+\frac{a_\kappa}{B_\kappa}\frac{1}{3k_{\mathcal{B}}}\frac{T^3}{n}\right]^{-1}, \tag{12.52}$$

$$T = \left[\frac{3k_{\mathcal{B}}}{m}\frac{(1-\beta_\kappa)}{\beta_\kappa}\frac{B_\kappa}{a_\kappa}\right]^{1/3}\rho^{1/3}. \tag{12.52}$$

Теперь

$$P_\kappa = \frac{1}{\beta_\kappa}\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}\rho B_\kappa T = \left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}B_\kappa\right)^4\frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_\kappa)}{\beta_\kappa^4}\right]^{1/3}\rho^{4/3}. \tag{12.53}$$

Следовательно, в центре облачной конфигурации

$$P_{\kappa,ce} = \left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}B_\kappa\right)^4\frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}. \tag{12.54}$$

С другой стороны, согласно неравенству (12.50) имеем

$$P_{\kappa,ce} \le \frac{1}{2}G_\kappa\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}M^{2/3}\rho_{ce}^{4/3}. \tag{12.55}$$

Сравнивая (12.54) и (12.55) и учитывая (12.36), получим:

$$\left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}\right)^4 B_\kappa^7\frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{1/3} \le G\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3}M^{2/3}, \tag{12.56}$$

или

$$\left[\frac{B_\kappa^7}{J_\kappa(3)}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{-1/2}M \ge \frac{\mu^{-2}}{G^{3/2}}\left(\frac{18}{a\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m_H}\right)^2 =$$

$$=\left(\frac{ch}{G}\right)^{3/2}\mu^{-2}m_H^{-2}\frac{\sqrt{135}}{2\pi^3}=5.48M_{\odot}\mu^{-2}. \qquad (12.57)$$

Здесь использованы соотношения: $a_{\text{к}}=a\,J_{\text{к}}(3)=J_{\text{к}}(3)\,8\pi^5k_B^4\,/\,15h^3c^3$ – модифицированная постоянная плотности излучения Планка; $m=\mu m_H$, где μ – средний молекулярный вес; $\left(hc\,/\,G\right)^{3/2}m_H^{-2}\approx 29.2M_{\odot}$; m_H – масса атома водорода; $M_{\odot}$ – масса Солнца.

Из (12.57) следует неравенство

$$M\geq 5.48M_{\odot}\mu^{-2}\left[\frac{B_{\text{к}}^7}{J_{\text{к}}(3)}\frac{(1-\beta_{\text{к},ce})}{\beta_{\text{к},ce}^4}\right]^{1/2}, \qquad (12.58)$$

которое и дает нижний предел устойчивости гравитирующего облака (сферической газовой конфигурации) с массой M в рамках неэкстенсивной кинетики Каниадакиса.

С другой стороны, если ввести параметр $\beta_{\text{к}}^*$, который однозначно определяется массой M облачной конфигурации и молекулярным весом μ_{ce} в ее центре при помощи уравнения четвертого порядка (см. Чандрасекар, 1985)

$$G^{-3/2}\left(\frac{18}{\pi}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{k_B}{\mu_{ce}m_H}\right)^4\frac{B_{\text{к}}^7}{a_{\text{к}}}\frac{(1-\beta_{\text{к}}^*)}{\beta_{\text{к}}^{*4}}\right]^{1/2}=M, \qquad (12.59)$$

то неравенство (12.58) может быть переписано в виде

$$\frac{(1-\beta_{\text{к}}^*)}{\beta_{\text{к}}^{*4}}\geq\frac{(1-\beta_{\text{к},ce})}{\beta_{\text{к},ce}^4}, \qquad (12.60)$$

или, поскольку функция $(1-\beta)\beta^{-4}$ монотонно увеличивается с увеличением $(1-\beta)$, то справедливо неравенство:

$$1-\beta_{\text{к}}^*\geq 1-\beta_{\text{к}ce}. \qquad (12.61)$$

Таким образом, устойчивость сферического протозвездного неэкстенсивного облака с массой M определяется следующей модифицированной теоремой: отношение лучевого давления к полному давлению в центре конфигурации, находящейся в равновесии, $1-\beta_{\kappa,ce}$, в которой $\bar{\rho}(r)$ не увеличивается от центра к периферии, удовлетворяет неравенству (12.61), где параметр β_{κ}^{*} удовлетворяет уравнению четвертой степени (12.59).

В заключение этой главы заметим, что большинство обнаруженных на сегодня экзопланетных дисков вокруг солнечноподобных звезд сильно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине современная теория происхождение Солнечной системы, является одной лишь из многих, и для моделирования эволюции любой другой конечной протозвездной туманности подходящая теория может быть, вообще говоря, более сложной. Однако проблема построения непротиворечивой картины образования самих звезд и околозвездных облаков до сих пор полностью не решена. Разбор современных гипотез их образования показывает, что все эти гипотезы встречаются со значительными трудностями (см., например, Сафронов, 1969). Наиболее предпочтительной и перспективной сейчас представляется гипотеза совместного образования и эволюции звезды и протозвездного облака из единой конечной вращающейся туманности в результате потери ею гравитационной устойчивости (Hoele, 1960). В связи со сказанным возникает, по мнению автора, необходимость в разработке нестандартного подхода, объясняющего до известной степени многообразие открытых экзопланетных аккреционных дисков вокруг звезд и экзопланет.

Таким образом в данной главе в рамках такого подхода на основе неэкстенсивной статистической механики Каниадакиса получено обобщение интегральной теоремы устойчивости Чандрасекара сферически симметричного распределения материи и черного излучения в протозвездном облаке, находящемся в состоянии гравитационного равновесия.

Библиография

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах // Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма-Миттала, как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. V. 42. P. 74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019a. 360 с.

Колесниченко А.В. Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019b. № 95. 32 с.

Колесниченко А.В. К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020a. № 17. 36 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрическая энтропия Шарма−Танеджа −Миттал как основа семейства равновесных термодинамик неэкстенсивных систем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020b. № 36. 35 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Барроу и Тсаллиса-Чирто // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 105. 38 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая механика. Ч. I. М.: Наука. 1976. 588 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Чандрасекар С*.* О звездах, их эволюции и устойчивости // УФН. 1985. Т.145. № 3. С. 489-506.

Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 476 с.

Abe S. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics // Physics Letters A. 1997. V. 224. P. 326-330.

Abreua E.M.C., Neto J. A., Mendes A. C.R. Oliveira W. New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase–space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations // Physica A. 2013. V. 392. P. 5154-5163.

Abreu E. M.C., Neto J. A., Barboza Jr. E. M., Nunes R. C. Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe // Physica A. 2016. V. 441. P. 141-150.

Aliano A., Kaniadakis G., Miraldi E. Bose–Einstein condensation in the framework of κ -statistics // Physica B. 2003. V. 325. P. 35-40.

Bento E. P., Silva J.R.P., Silva R. Non-Gaussian statistics, Maxwellian derivation and stellar polytropes // Physica A. 2013. V 392. P. 666-672.

Carvalho J. C., Silva R., do Nascimento J. D. Jr., De Medeiros J. R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades // Europhys. Lett. 2008. V. 84. № 5. P. 59001 (pp.5).

Carvalho J. C., do Nascimento J. D. Jr., Silva R., De Medeiros J. R. Non-Gaussian Statistics and Stellar Rotational Velocities of Main-Sequence Field Stars// Astrophys. Journ. Lett. 2009. V. 696. P. L48-L51.

Hawking S. W. Particle Creation By Black Holes // Commun. Math. Phys. 1975. V. 43. 199-220.

Hoele F. On the origin of the solar nebula // Quart J. Roy. Astron. Soc. 1960. V. 1. P. 28-55.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1963. V. 3. P.181.

Kaniadakis, G. Non-linear kinetics underlying generalized statistics // Physica A 2001a. V. 296. P. 405-425.

Kaniadakis, G. H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics // Phys. Lett. A. 2001b, V. 288. P. 283-291.

Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. № 1. P. 3-13.

Kaniadakis G., Scarfone A.M. A new one-parameter deformation of the exponential function // Physica A. 2002. V. 305. P. 69-75.

Kaniadakis G., Quarati P., Scarfone A. M. Kinetical foundations of nonconventional statistics // Physica A. 2002. V. 305 P. 76-83.

Kaniadakis, G. Statistical mechanics in the context of special relativity II. // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 036108.

Kaniadakis G. Statistical origin of quantum mechanics // Physica A. 2002. V. 307 P. 172-184.

Kaniadakis G. Theoretical Foundations and Mathematical Formalism of the Power-Low Tailed Statistical Distributions // Entropy. 2013. V. 15. P. 3983-4010.

Kolesnichenko A.V Modeling the Linear Response from a Quantum Nonextensive System to a Dynamic External Disturbance // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020a. V. 12. № 5. P. 647-659.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2020b. V. 54. №. 2. P. 137-149.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbode Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System research. 2020c. V. 54. № 5. P. 420-431.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics”, RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Renyi Thermodynamics as a Mandatory Basis to Model the Evolution of a Protoplanetary Gas–Dust Disk with a Fractal Structure // Sol. Syst. Res. 2019a. V. 53. № 6. P. 443-461.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of Aggregation of Fractal Dust Clusters in a Laminar Protoplanetary Disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48, № 5. P. 354-365.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the Jeans and Toomre Instability Criteria for Astrophysical Fractal Objects Within Nonextensive Statistics // Solar System Research. 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Streaming Instability in the Gas–Dust Medium of the Protoplanetary Disc and the Formation of Fractal Dust Clusters // Solar System Research. 2019b. V. 53. № 3. P. 181-198.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Lourek I., Tribeche M. Thermodynamic properties of the blackbody radiation: A Kaniadakis approach // Physics Letters A. 2017. V. 381. P. 452-456.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Ourabah K., Tribeche M. Plank radiation law and Einstein coefficients reexamined in Kaniadakis κ statistics // Physical Review T. 2014. V. 89. P. 062130 (pp 5).

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1961. P. 547-561.

Rossani A., Scarfone A.M. Generalized kinetic equations for a system of interacting atoms and photons: theory and simulations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2004. V. 37. № 18. P. 4955-4975.

Scarfone A. M., Wada T. Canonical partition function for anomalous systems described by the κ-entropy // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2006. V.162. P. 45 -52.

Silva R. The H-theorem in κ-statistics: influence on the molecular chaos hypothesis // Physics Letters A. 2006. V. 352. P. 17-20.

Silva J. M., Silva R., Lima J.A.S. Conservative force fields in non-Gaussian statistics // Physics Letters A. 2008. V. 372. P. 5754-5757.

Sharma B.D., Mittal D.P. New Non-additive Measures of Relative Information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V. 2. P.122-133.

Soares B. B., Silva J. R. P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context // Europhys. Lett. 2011. V. 96. P. 19001 (pp.6).

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11. P. 6377-6396.

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Advances in Electronics and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1989. V.76. P. 327-413.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1-2. P.479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C., Sa Barreto F.C., Loh E.D. Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation // Physical Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 1448-1451.

Tsallis C., Cirto L. J. L. Black hole thermodynamical entropy. 2013. The European Physical Journal C. 2013. V. 73. №7. P. 2487 (pp.5).

Unruh W.G. Notes on black-hole evaporation. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. № 4. P. 870-892.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1-26.

ГЛАВА 13

Моделирование динамической эволюции Вселенной под воздействием энтропийной силы, связанной с модифицированной энтропией Шарма-Миттал

В этой главе с помощью формализма Верлинда рассмотрено несколько сценариев эволюции Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, которые возможны в рамках энтропийной космологии, основанной на новой модификации энтропийной меры Шарма–Миттал. Исследование, проводимое в рамках негауссовой статистической теории, использует несколько энтропийных мер, ассоциированных с поверхностью горизонта Вселенной из-за голографически хранящейся там информации. Сконструировано несколько вариантов обобщенных уравнений Фридмана, которые могут служить эффективной теоретической основой для описания динамической эволюции поверхностно плоской, однородной и изотропной Вселенной, порождая многообразные формы заключенной в ней материи. Предложенный подход, связанный с использованием вероятностных неэкстенсивных аспектов космологического горизонта поверхности Вселенной, соответствует известным основным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамического поведения космического пространства без привлечения концепции гипотетической темной энергии.

Введение

Среди множества сценариев ускоренного расширения Вселенной большое внимание совсем недавно привлекла «энтропийная космология», согласно которой гравитация воспринимается как своего рода сила, связанная с ростом энтропии из-за информации, хранящейся голографически на поверхности горизонта Вселенной. В энтропийной космологии предполагается, что энтропия на поверхности, ассоциируемой с горизонтом Вселенной, обусловлена голографически хранящейся на этой поверхности информацией. Понятие «энтропийная сила» впервые было предложено в работе (Verlinde, 2011), в которой гравитация объясняется через энтропию, т.е. имеет термодинамическое происхождение (Padmanabhan, 2010; Akbar, Cai, 2007; Abreu, Neto, 2021). Было показано, что исходя из голографического принципа образования пространства-времени[40)] неизбежно возникает гравитация, которая отождествляется с энтропийной силой $F_S = -TdS/dr$, обусловленной увеличением энтропии[41)], связанным с ростом площади, занимаемой материальными телами. В рамках гипотезы Верлинде в работе (Easson и др. 2011) была развита эвристическая теория ускоренного расширения Вселенной, базирующаяся на энтропийной силе. Авторами этой работы было показано, что наряду с традиционным объяснением ускоренного расширения Вселенной, основанным на наличии управляющей силы в уравнениях Фридмана, обусловленной гипотетической темной энергией, возможна альтернативная интерпретация динамической эволюции Вселенной, связанная с наличием отталкивающей энтропийной силы, которая возникает при росте информации на экране поверхности хаббловского горизонта (Bekenstein, 1975; Hawking, 1975). Оказалось, что при таком подходе физическое понимание процесса ускорения Вселенной вполне объяснимо без привлечения концепции темной энергии, как некой постулируемой среды с отрицательным давлением.

Наконец, в целом ряде работ (см., например, Koivisto и др., 2011; Myung, 2011; Cai и др., 2010a; Cai, Saridakis, 2011; Qiu, Saridakis, 2012; Basilakos и др., 2012; Easson и др., 2012; Komatsu, Kimura, 2013, 2014; Wissner-Gross, Freer, 2013; Czinner, Iguchi, 2016; Moradpour, 2016; Moradpour и др., 2018, 2019; Keul и др., 2018; Komatsu, 2017, 2019; Saya-

---

[40)] Под голографией в космологии понимается информация о Вселенной, закодированная на поверхностном экране, расположенном на горизонте событий (области пространства-времени), который трактуется как двумерная поверхность Вселенной.

[41)] Согласно голографическому принципу энтропия хранится на голографических экранах, а рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийной силы), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности.

hian Jahromi и др., 2018; Sheykhi, 2018; Aditya и др., 2019; Saridakis, Basilakos, 2021; Barrow и др., 2021; Sharma и др., 2021; Kolesnichenko, Marov, 2021), посвященных энтропийной космологии, были рассмотрены сценарии ускоренного расширения Вселенной под влиянием энтропийных сил различной природы. В этих исследованиях, наряду с температурой де Ситтера (de Sitter, 1917), используются различные энтропии, ассоциированные с космическим горизонтом Вселенной. Это энтропия Бекенштейна–Хокинга (Bekenstein, 1975), равнораспределенные по степеням свободы неэкстенсивные энтропии Тсаллиса–Кирто (Tsallis, Cirto, 2013), Каниадакиса (Kaniadakis, 2002; Sharma и др., 2021) и Барроу (Barrow, 2020; Padmanabhan и др., 2010); модифицированные энтропии Реньи (Czinner, Iguchi, 2016; Komatsu, 2017; Jahromi и др., 2018; Moradpour, 2019) и Шарма–Миттал (Sayahian Jahromi и др., 2018; Abreu и др., 2021). При этом в уравнениях общей теории относительности Эйнштейна вместо космологической постоянной Λ появляются дополнительные управляющие члены, связанные с используемой энтропией. С помощью видоизмененных подобным образом уравнений Фридмана было показано, что основанные на них теоретические модели могут объяснить текущую ускоренную фазу Вселенной, поскольку хорошо согласуются с данными по сверхновым звездам (см., например, Anagnostopoulos и др., 2020). Важно также отметить, что обнаруженное ускорение Вселенной получается сравнительно небольшим (порядка постоянной Хаббла), в отличие от его огромного значения, предсказываемого квантовой теорией поля в сочетании с общей теорией относительности[42)]. Как видим, изучение влияния энтропийных сил на эволюцию Вселенной представляет несомненный интерес, поскольку из-за отталкивающего (антигравитационного) действия именно эти силы могут сыграть роль темной

[42)] Отождествление космологической постоянной с энергией вакуума не позволяет, к сожалению, проникнуть в существо темной энергии и приводит к пока неразрешимой проблеме, которая заключается в том, что наблюдаемое значение плотности тёмной энергии $\rho_{\Lambda_{obs}} \approx (10^{-3} ev)^4$ и ее теоретически предсказанное значение, $\rho_{\Lambda_{th}} \approx 10^{18} (Gev)^4$ отличаются на 120 порядков (здесь $V = V(\varphi)$ – потенциал скалярного поля φ (инфлатона) (см. Вайнберг, 2013).

энергии как в форме космологической постоянной, так и в форме скалярных полей (Вайнберг, 2008).

В данной главе, мотивированной результатами исследований (Sayahian Jahromi и др., 2018; Abreu и др. 2020), для объяснения эволюции ускоренно расширяющейся Вселенной в рамках негауссовых статистических теорий используется температура де Ситтера и неэкстенсивные энтропийные меры, ассоциированные с хаббловским горизонтом поверхности Вселенной из-за голографически хранящейся там информации (Nunes и др., 2016; Jahromi и др., 2018; Komatsu, 2017, 2019; Anagnostopoulos и др., 2020). Эффективность использования неэкстенсивных (негауссовых) статистик в космологическом контексте, необходимость привлечения которых возникает из-за дальнодействующей природы гравитации, заключается в появлении дополнительных параметров неэкстенсивности в выражениях для гравитационных сил. Это позволяет выбрать наиболее подходящие их значения при конструировании правдоподобных сценариев динамической эволюции Вселенной.

Здесь предложена новая модификация энтропийной меры Шарма–Миттал (см. Sharma, Mittal, 1975; Колесниченко, 2018), описывающая эволюцию Вселенной и обобщающая модифицированные энтропии Реньи и Тсаллиса, которые были использованы ранее в работах (Sayahian Jahromi, 2018; Abreu и др., 2020; Sharma и др., 2021). При этом в новой модификации энтропии Шарма–Миттал[43)] предлагается использовать вместо традиционной энтропии Бекенштейна–Хокинга (Easson и др., 2011) энтропию Барроу, отвечающую квантовым гравитационным эффектам хаббловского горизонта поверхностности Вселенной (Anagnostopoulos и др., 2019, 2020; Barrow, 2020; Saridakis, 2020).

На основе модифицированной подобным образом энтропии Шарма–Миттал сконструировано несколько вариантов обобщенных уравнений Фридмана–Робертсона–Уокера, которые содержат дополнительные управляющие силы, соответствующие изменяющемуся во

[43)] Новая модификация энтропии Шарма–Миттала базируется на неэкстенсивной энтропии Барроу, которая заменяет обычную энтропию Бекенштейна–Хокинга, используемую в энтропийном формализме, разработанном в работах (Moradpour и др., 2018; Abreu и др. 2020).

времени космологическому члену и зависящие от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания гравитационных эффектов. Отмечается совместимость этих негауссовых сценариев эволюции Вселенной с имеющимися данными космологических наблюдений. Полученные на основе формализма обобщенной энтропии Шарма–Миттал результаты соответствуют основным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамической эволюции Вселенной в терминах неэкстенсивной энтропии, включая дальнодействующие взаимодействия, такие как гравитация и антигравитация.

13.1. Исходные энтропийные меры на голографическом горизонте Вселенной

Представление о возникновении энтропийной силы на голографическом горизонте расширяющейся плоской Вселенной, имеющем ассоциированную энтропию и температуру, приводит к так называемой «энтропийной космологии», которая предполагает, что именно энтропийная сила ответственна за явление ускоренного расширения Вселенной. По этой причине неоднозначная составляющая темной энергии как в форме космологической постоянной Λ, так и в форме скалярных полей (Weinberg, 1989), может быть опущена в уравнениях Фридмана.

Рассмотрим прежде всего энтропийные силы, связанные с оригинальными энтропиями, традиционно используемыми в энтропийной космологии.

Энтропийная сила, связанная с энтропией Бекенштейна-Хокинга. В энтропийной космологии (Easson и др. 2011), по аналогии с термодинамическими характеристиками хаббловского горизонта черной дыры, описываемой своими температурой и энтропией, часто принимается, что область расширяющейся пространственно-плоской Вселенной (совпадающая с горизонтом Хаббла) имеет температуру, пропорциональную температуре де Ситтера, $T_S = \hbar H / 2\pi k$ (de Sitter, 1917), и связанную с ней ассоциированную энтропию Бекенштейна–Хокинга S_{BH}. В этом случае проблема связи космологической постоянной с энтропийной силой решается естественным образом (Verlinde, 2011).

В энтропийной космологии горизонт (радиус) Хаббла R_H и температура космологического горизонта Вселенной $T_H \simeq \gamma T_S$ определяются выражениями

$$R_H = cH^{-1}, \tag{13.1}$$

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k} H = \frac{\hbar}{2\pi k}\frac{c}{R_H}, \tag{13.2}$$

где k и $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Больцмана и приведенная постоянная Планка–Дирака соответственно; $H(t) := a^{-1}\partial a/\partial t$ – параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной (в современную эпоху $H_0 = 2.2\times10^{-18}c^{-1}$); t– космическая временная координата; $a(t)$ – коэффициент расширения (масштабный фактор Робертсона–Уокера (см. Вайнберг, 2013).

Температуру горизонта Вселенной, тесно связанную с температурой де Ситтера, можно оценить как $T_H \simeq T_S \times \mathcal{O}(1) \sim 3\times10^{-30}K$, что намного порядков ниже температуры космического микроволнового фона, $T = 2.73K$.

Связанная с горизонтом Вселенной энтропия Бекенштейна–Хокинга задается следующим соотношением (Bekenstein, 1975)

$$S_{BH} := k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right) = k\frac{c^3}{\hbar G}\frac{A_H}{4}, \tag{13.3}$$

где $A_H = \pi R_H^2 = \pi c^2 H^{-2}$ – величина площади поверхности области хаббловского радиуса R_H; $A_{Pl} = \hbar G/c^3 \approx 2.612\times10^{-70}\,м^2$ – площадь Планка. При подстановке величины A_H в соотношение (13.3) получим

$$S_{BH} = k\left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)\pi R_H^2 = \left(\frac{k\pi c^5}{\hbar G}\right)\frac{1}{H^2} \equiv \frac{K}{H^2} \sim k(2.6\pm0.3)\times10^{122}. \tag{13.4}$$

Здесь введена широко используемая нами в дальнейшем численная константа

$$K := \frac{\pi k c^5}{\hbar G} = \frac{\pi k c^2}{L_{Pl}^2} = \frac{\pi k c^2}{A_{Pl}} > 0, \tag{13.5}$$

где $L_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$ – планковская длина.

Увеличение радиуса R_H на dR_H увеличивает энтропию S_{BH} на dS_{BH} в соответствии с

$$dS_{BH} = 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)R_H dR_H =$$

$$= 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)\left(\frac{c}{H}\right)dR_H = 2\left(\frac{K}{c^2}\right)R_H dR_H. \quad (13.6)$$

Горизонтальная энтропийная сила F_{BH} (антигравитация), отвечающая росту энтропии Бекенштейна–Хокинга, может быть определена как $F_{BH} := -T_H dS_{BH}/dR_H$. Здесь знак минус указывает направление увеличения энтропии или экран, которым в данном случае является горизонт событий (Easson и др. 2011). Тогда, используя соотношения (13.2) и (13.6), получим следующее выражение для энтропийной силы

$$F_{BH} = -\frac{\hbar H}{2\pi k}\frac{2K}{c^2}R_H = -\frac{c^4}{G}. \quad (13.7)$$

Давление этой силы на космологический горизонт Вселенной, приводящее к явлению антигравитации, определяется формулой

$$P_{BH} = \frac{F_{BH}}{4A_H} = -\frac{c^4}{G}\frac{1}{4\pi R_H^2} = -\frac{c^2}{4\pi G}H^2. \quad (13.8)$$

Заметим, что эта величина близка к измеренному отрицательному давлению (натяжению) темной энергии в форме космологической постоянной (Вайнберг, 2013). Таким образом, можно считать, что в голографическом подходе давление (эффект отталкивания) возникает не за счет отрицательного давления темной энергии, а за счет энтропийного натяжения, обязанного накоплению энтропии на горизонте Вселенной.

Энтропийная сила, связанная с энтропией Барроу. Недавно в работе (Barrow, 2020) была предложена модель квантовой гравитационной пены пространства-времени для оценки энтропии черных дыр и Вселенной, поверхность которых может иметь сложную фрактальную структуру космологического горизонта (области пространства-времени) вплоть до сколь угодно малых масштабов (порядка планковской длины) из-за квантово-гравитационных эффектов. Введение фрактальной структуры горизонта Вселенной приводит к увеличению площади ее поверхности. Как известно, площадь поверхности Вселенной – это ключевая характеристика, которая определяет ее энтропию и информативность. Энтропия Барроу возникает, в частности, из-за того, что поверхность горизонта Вселенной может деформироваться вследствие квантово-гравитационных эффектов, а ее отклонение от энтропии Бекенштейна–Хокинга количественно определяется показателем степени деформации Δ, отвечающим фрактальной размерности поверхности.

Подобная фрактальная структура горизонта Вселенной приводит к конечному объему, но с бесконечной или конечной площадью (см. Barrow, 2020). Согласно космологической термодинамике возможные эффекты квантово-гравитационной пены пространства-времени в области космологического горизонта приводят к новому определению энтропии Вселенной – к неаддитивной энтропии Барроу S_{Bar} (Barrow, 2020), связанной с аддитивной энтропией Бекенштейна–Хокинга: $S_{Bar}/k := \left(S_{BH}/k\right)^{1+\Delta/2}$. При подстановке величин S_{BH} и k в это соотношение получим $S_{Bar} \sim 10^{120(1+\Delta/2)}$. Параметр Δ $(0 \le \Delta \le 1)$, являясь фрактальной массовой размерностью квантово-гравитационной пены, количественно определяет деформацию структуры горизонта Вселенной[44].

Энтропию S_{Bar} можно представить в следующих формах:

$$S_{Bar} = k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right)^{1+\Delta/2} = k\left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}}\right)^{1+\Delta/2} =$$

---

[44] Следует отметить, что при определении энтропии Барроу сложная фрактальная структура космологического горизонта моделируется аналогом сферической «снежинки Коха», использующим бесконечную убывающую иерархию соприкасающихся сфер вокруг горизонта событий Шварцшильда. Тем не менее, эта простая модель возможных проявлений квантово-гравитационной эффектов, имеет важные следствия для оценок энтропии Вселенной, которая обычно несколько больше чем в базовом сценарии, связанном с энтропией Бекенштейна–Хокинга.

$$=K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}\left(\frac{R_H}{c}\right)^{2+\Delta}=K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}. \qquad (13.9)$$

Здесь $A_{Pl}=\hbar G/c^3\approx 2.612\times10^{-70}\,м^2$ – площадь Планка; A_H – величина площади стандартного горизонта; $K:=\pi kc^2/A_{Pl}>0$. В случае, когда параметр $\Delta=0$, что соответствует простейшей структуре космологического горизонта Вселенной, восстанавливается рассмотренная выше стандартная энтропия Бекенштейна–Хокинга, $S_{Bar}\equiv S_{BH}:=k\left(A_H/A_{Pl}\right)=KH^{-2}$.

В случае когда $\Delta=1$, то имеет место гладкая пространственно-временная структура горизонта Вселенной, при которой энтропия Барроу совпадает с так называемой равно распределенной по степеням свободы энтропией Тсаллиса –Кирто (Tsallis., Cirto, 2013; Padmanabhan, 2010). В этом случае формула (13.9) аналогична формуле для неаддитивной энтропии Тсаллиса и Кирто

$$S_{TC}:=k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right)^{3/2}==K\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{R_H}{c}\right)^{3}=K\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2}H^{-3}, \qquad (13.10)$$

введенной этими авторами в рассмотрение при исследовании эволюции черных дыр на основе совершенно других физических принципов, отличных от фрактальной интерпретации горизонта Вселенной (см. Torres и др., 1997; Aditya и др., 2019; Wilk, Wlodarczyk, 2020; Waheed, 2020).

Ясно, что в общем случае среды с фрактальной размерностью $(0<\Delta\le1)$, космологические уравнения Фридмана, основанные на энтропийной силе Барроу, будут содержать, как показано ниже, новые дополнительные члены, позволяющие моделировать космологическое поведение Вселенной для различных моделей энтропии (Saridakis, 2020; Anagnostopoulos и др., 2020; Saridakis, Basilako, 2021).

Применяя рассмотренную в предыдущем подразделе процедуру вывода выражений для энтропийной силы и соответствующего давления на космологический горизонт Вселенной, но уже с энтропией Барроу, получим:

$$\frac{dS_{Bar}}{dR_H} = \frac{(2+\Delta)}{c} K \left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} \left(\frac{R_H}{c}\right)^{1+\Delta} = \frac{2+\Delta}{c} K \left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-(1+\Delta)}. \qquad (13.11)$$

Соответственно, э для энтропийной силы F_{Bar}, возникающей из-за деформации горизонта Вселенной, связанной с квантово-гравитационными эффектами, и для давления P_{Bar} этой силы на космологический горизонт Вселенной будем иметь:

$$F_{Bar} = -T_H \frac{dS_{Bar}}{dR_H} = -\frac{(2+\Delta)}{2G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} R_H^{\Delta} c^{4-\Delta} = -\frac{2+\Delta}{2G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} c^4 H^{-\Delta}, \quad (13.12)$$

$$P_{Bar} = \frac{F_{Bar}}{4\pi R_H^2} = -\frac{(2+\Delta)}{2} \frac{c^{4-\Delta}}{4\pi G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} R_H^{\Delta-2} = \frac{2+\Delta}{2} \frac{c^2}{4\pi G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} H^{2-\Delta}. \quad (13.13)$$

Здесь использовано следующее выражение для температуры де Ситтера

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k} \frac{c}{R_H} = \frac{c^6}{2GKR_H} = \frac{c^5 H}{2GK}. \qquad (13.2^*)$$

Перейдем теперь к определению энтропийных сил, полученных на основе особого энтропийного формализма, предложенного в статье (Sayahian Jahromi и др., 2018).

13.2. Модифицированные энтропии Реньи и Шарма–Миттал на хаббловском горизонте Вселенной

Оригинальные и модифицированные энтропии Реньи и Тсаллиса, возникающие согласно развиваемой концепции на горизонте неэкстенсивной Вселенной, широко используются в космологии (см., например, Biró, Czinner, 2013; Czinner, Iguchi, 2016; Aditya и др., 2019; Waheed, 2020**;** Abreu, Neto. 2021; Kolesnichenko, Marov, 2021). В частности, модифицированная энтропия Реньи успешно применяется к голографическому закону равнораспределения, предложенному Падманабханом для исследования термодинамических аспектов космической гравитации (Padmanabhan, 2010; Komatsu, 2017). При этом модифицированная энтропия Реньи S_{mod}^{R} связана с формальной заменой энтропии Тсаллиса, фигурирующей в логарифмической формуле (20) оригинальной энтропии Реньи, на энтропию Бекенштейна–Хокинга.

В рамках неэкстенсивной статистической механики был предложен (Sayahian Jahromi и др., 2018) особый энтропийный формализм, основанный на модифицированной двухпараметрической энтропии Шарма-Миттал, которая, являясь родоначальником целого семейства однопараметрических энтропий, в частности энтропий Реньи и Тсаллиса, рассматривает их как некоторые предельные однопараметрические случаи (Scarfone, Wada, 2005; Scarfone, 2006; Akturk и др., 2007; Колесниченко, 2019). Таким образом, эти и некоторые другие однопараметрические энтропии могут изучаться по единообразной схеме.

По мнению авторов данной работы, в качестве перспективных будущих исследований представляет несомненный интерес изучение еще одной модификации энтропии Шарля-Миттеля, которая приводит к новому сценарию в эволюционной космологии.

Оригинальные меры энтропий Шарма–Миттал и Реньи. Рассмотрим вначале оригинальную двухпараметрическую энтропию Шарма–Миттал, которая определяется формулой

$$S_{SM}(q,r):=k\frac{\left(\sum_j p_j{}^q\right)^{(1-r)/(1-q)}-1}{1-r}, \tag{13.14}$$

где $r,q>0,\ r\neq1\neq q,\ r\neq q$. В выражении (13.14) $p=\{p_j\}_{j=1,\dots,\mathrm{W}}$ – дискретная случайная величина, а W обозначает количество доступных в системе микросостояний.

Энтропийная мера (13.14) включает как классическую, так и деформированные однопараметрические энтропии, в частности:

- энтропию Больцмана–Гиббса (Gibbs, 1960; Зубарев, 1971).

$$S_{SM}(q\to1,r\to1)=S_{BG}:=-k\sum_j p_j\ln p_j; \tag{13.15}$$

- энтропию Реньи (Renyi, 1961, 1970)

$$S_{SM}(q,r\to1)=S_{Re}(q):=\frac{k}{1-q}\ln(\sum_j p_j{}^q),\quad q>0,\ q\neq1; \tag{13.16}$$

- энтропию Тсаллиса (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988)

$$S_{SM}(q,r=q)=S_{Ts}(q):=k\frac{\sum_j p_j{}^q-1}{1-q}; \tag{13.17}$$

В пределе $q\to 1$ как энтропия Тсаллиса, так и энтропия Реньи воспроизводят стандартную энтропию Больцмана–Гиббса (13.15).

Используя обозначение $\langle 1\rangle_q:=\sum_j p_j{}^q$ для так называемой обобщённой статистической суммы, перепишем выражения (13.16) и (13.17) для энтропий Реньи и Тсаллиса в виде

$$S_{Re}=\frac{k}{1-q}\ln\left[\sum_j p_j{}^q\right]=\frac{k}{1-q}\ln\langle 1\rangle_q, \tag{13.18}$$

$$S_{Ts}=\frac{k}{1-q}\left[\sum_j p_j{}^q-1\right]=\frac{k}{1-q}\left(\langle 1\rangle_q-1\right), \tag{13.19}$$

Сопоставление выражений (13.18) и (13.19) даёт связь

$$S_{Re}=\frac{k}{1-q}\ln\left[1+\frac{1-q}{k}S_{Ts}\right] \tag{13.20}$$

Аналогично для энтропии Шарма–Миттал имеем:

$$S_{SM}(q,r)=\frac{k}{1-r}\left[\left(1+\frac{1-q}{k}S_{Ts}\right)^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right]=\frac{k}{1-r}\left\{\left[\exp\left(k^{-1}S_{Re}\right)\right]^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right\} \tag{13.21}$$

Модифицированные меры энтропий Шарма–Миттал и Реньи. Только в этом разделе для большей наглядности формул будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha\equiv k/(1-q),\quad \beta\equiv k/(1-r). \tag{13.22}$$

Как было отмечено выше, модификация энтропий Реньи и Шарма–Миттал, предложенная в работах (Moradpour и др., 2018; Abreu и др. 2020), обеспечивается формальной заменой оригинальной энтропии Тсаллиса, фигурирующей в формулах (13.20) и (13.21) на энтропию Бекенштейна–Хокинга S_{BH}. В результате было получено следующее выражение для модифицированной энтропии Реньи

$$\tilde{S}_{Re} = \alpha \ln\left[1 + S_{BH} / \alpha\right]. \tag{13.23}$$

Аналогично для модифицированной энтропии Шарма–Миттал имеет место представление (Abreu и др., 2020; Abreu, Neto, 2021)

$$\tilde{S}_{SM} = \beta\left[\left(1 + S_{BH} / \alpha\right)^{\alpha/\beta} - 1\right]. \tag{13.24}$$

Важно отметить, что физическая интерпретация подобной модификации указанных энтропий остается в настоящее время все-таки не вполне ясной. Тем не менее, в ряде работ (см., например, Czinner, Iguchi, 2016; Komatsu, 2017, 2019) было показано, что энтропии (13.23) и (13.24) могут служить эффективной теоретической основой для энтропийной космологии, порождая ее различные варианты.

Для получения нового варианта модификации энтропии Шарма–Миттал в настоящей работе нами предложено в оригинальном математическом ее выражении (формула (13.21)) заменить энтропию Тсаллиса на энтропию Барроу (13.9), описывающую сложную фрактальную структуре космологического горизонта. В результате получим следующие модифицированные энтропии Реньи и Шарма–Миттал

$$S_{Re}^{mod} = \alpha \ln\left[1 + S_{Bar} / \alpha\right], \tag{13.25}$$

$$S_{SM}^{mod} = \beta\left[\left(1 + S_{Bar} / \alpha\right)^{\alpha/\beta} - 1\right], \tag{13.26}$$

которые содержат параметры неэкстенсивности α и β и показатель степени деформации деформации космологической поверхности Δ, что позволяет конструировать многочисленные космологические модели эволюции Вселенной.

Энтропийная сила, связанная с модифицированной энтропией Шарма–Миттал. Энтропийную силу F_{SM}, отвечающую росту модифицированной энтропии Шарма–Миттал (13.26), будем определять как $F_{SM} = -T_H dS_{SM}^{mod} / dR_H$. Подставляя соотношения (13.9), (13.11) и (13.26) в это определение, получим

$$F_{SM} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\frac{\left(K/k\right)^{\Delta/2}H^{-\Delta)}}{\left(1+\alpha^{-1}K\left(K/k\right)^{\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}. \tag{13.27}$$

При написании этого выражения была использована следующая производная

$$\frac{dS_{SM}^{mod}}{dR_H} = \frac{1}{\left(1+\alpha^{-1}S_{Bar}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}\frac{dS_{Bar}}{dR_H} = \frac{2+\Delta}{c}\frac{K\left(K/k\right)^{\Delta/2}H^{-(1+\Delta)}}{\left(1+\alpha^{-1}K\left(K/k\right)^{\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}, \tag{13.28}$$

полученная с учетом формул (13.2*), (13.9) и (13.11).

Соответственно, давление P_{SM} силы F_{SM} на космологический горизонт Вселенной определяется формулой

$$P_{SM} = \frac{F_{SM}}{4\pi R_H^2} = -\frac{2+\Delta}{8\pi}\left(\frac{c^2}{G}\right)\frac{\left(K/k\right)^{\Delta/2}H^{2-\Delta)}}{\left(1+\alpha^{-1}K\left(K/k\right)^{\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}. \tag{13.29}$$

Энтропийная сила Реньи. Энтропийную силу F_{Re}, отвечающую росту модифицированной энтропии Реньи S_{Re}^{mod}, получим путем приравнивания показателя $(\beta-\alpha)/\beta=(r-q)/(1-q)$ в формуле (13.27) к единице. В результате будем иметь:

$$F_{Re} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\frac{H^2}{\alpha^{-1}K+\left(K/k\right)^{-\Delta/2}H^{(2+\Delta)}}. \tag{13.30}$$

Соответственно, давление P_{Re} этой силы на космологический горизонт Вселенной определяется соотношением

$$P_{Re} = \frac{F_{Re}}{4\pi R_H^2} = -\frac{2+\Delta}{8\pi}\left(\frac{c^2}{G}\right)\frac{1}{\alpha^{-1}K+(K/k)^{-\Delta/2}H^{2+\Delta}}H^4. \tag{13.31}$$

Если в формуле (13.30) положить $\Delta = 0$, то получим выражение для энтропийной силы Реньи, модифицированной с помощью энтропии Бекенштейна–Хокинга S_{BH}:

$$\tilde{F}_{Re} := -T_H \frac{d\tilde{S}_{Re}}{dR_H} = -\left(\frac{c^4}{G}\right)\frac{1}{1+K/\alpha H^2}. \qquad (13.32)$$

Энтропийная сила Барроу и Тсаллиса-Кирто. Энтропийные силы Барроу F_{Bar} и Тсаллиса-Кирто F_{TC} также можно получить из формулы (27), полагая $(\alpha = \beta; \Delta = 1)$ и $(\alpha = \beta;\ \Delta = 0)$ соответственно. В результате будем иметь (см. Kolesnichenko, Marov, 2021):

$$F_{Bar} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-\Delta)}, \quad F_{TC} = -\frac{3}{2G}(K/k)^{1/2} c^4 H^{-1}. \qquad (13.33)$$

13.3. Обобщенные уравнения динамической космологии Фридмана–Робертсона–Уокера

В классической космологии модели эволюционирующей Вселенной конструируют на основе уравнений общей теории относительности Эйнштейна (см., например, Толмен, 2009; Вайнберг, 2013). Мы используем подход, основой которого служит построение уравнений Фридмана на основе модифицированного энтропийного формализма Шармы–Миттал, что является основной целью работы. Эту цель преследовали основные результаты по анализу различных типов неэкстенсивной энтропии, ответственной в рамках рассматриваемой концепции за возникновение энтропийной силы, изложенные в разделах 13.1-13.2.

Ограничимся рассмотрением эволюционной плоской модели Вселенной, которая является бесконечной в пространстве, однородной, изотропной и расширяющейся. При этом будем считать, что Вселенная моделируется некоторой космологической жидкостью, дисперсные частицы которой суть галактики. На таком уровне крупномасштабного усреднения структура Вселенной симметрична и не имеет особенностей.

В плоском гиперпространстве пространственно-временной линейный интервал имеет вид метрики Робертсона–Уокера

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (13.34)$$

которому соответствует метрический тензор $g_{\mu\nu}$ с галилеевыми компонентами

$$g_{00} = c^2;\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a(t)^2;\ g_{\mu\nu} = 0\ \textit{при}\ \mu \neq \nu;\ g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu},$$

где t– космическая временная координата; $a(t)$ – коэффициент расширения (масштабный фактор Робертсона–Уокера.

Будем рассматривать идеальную космологическую жидкость, которая определяется как среда, в каждой точке которой существует локально инерциальная декартова система отсчета, движущаяся вместе с жидкостью; при этом сама жидкость однородна по всем направлениям. Для такой среды тензор энергии-импульса, играющий роль источника гравитационного поля, в принятой системе координат имеет вид $T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$, где $\rho = \rho(t)$, $P = P(\rho)$ – соответственно плотность и скалярное давление жидкости (включающей материю и излучение) в момент времени t. Здесь введена четырехмерная скорость $u_\mu = \partial x_\mu / \partial s$, которая определена условием, что в сопутствующей локально инерциальной декартовой системе отсчета ее компоненты равны $u_0 = 1$ и $u_{\mu \neq 0} = 0$. Таким образом, в состоянии покоя компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ имеют следующий вид (Мизнер и др., 1977):

$$T_{00} = \rho c^2;\quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -P;\quad T_{\mu\nu} = 0\ \textit{при}\ \mu \neq \nu. \qquad (13.35)$$

Заметим, что в плоской модели Вселенной[45]) трехмерная кривизна является нулевой, однако четырехмерное пространство остается кривым.

Уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера в гравитации Эйнштейна. Далее будем рассматривать стандартную модель Фридмана

---

[45]) Как известно, пространство является плоским только в том случае, если отношение $\Omega := \rho / \rho_{cr} \cong 1$, где $\rho_{cr} := 3H^2 / 8\pi G$ – критическая массовая плотность (вещество + излучение). По современным наблюдательным данным величина $\Omega = 1.02 \pm 0.02$.

для пространственно плоской открытой Вселенной. В сделанных предположениях из уравнений общей теории относительности Эйнштейна следуют два уравнения поля Фридмана для масштабного фактора $a(t)$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^2 \equiv H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (13.36)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{\Lambda}{3}, \quad (13.37)$$

описывающих эволюцию Вселенной. Здесь $H(t) := a^{-1}\partial a/\partial t$ – параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной, текущее значение которой близко к планковскому (см. Anagnostopoulos и др., 2020); $\rho = \rho_m + \rho_R$ – общая плотность вещества и радиации. Уравнения (13.36) и (13.37) включают дополнительный управляющий параметр $\Lambda/3$, (который часто может быть опущенным), объясняющий при надлежащем определении ускоренное расширение поздней Вселенной (Weinberg, 1989).

Из уравнений (13.36) и (13.37) легко получить следующий закон сохранения энергии (уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H(t)\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = 0. \quad (13.38)$$

Для этого необходимо продифференцировать уравнение (13.36) и результат скомбинировать с уравнением (13.37), которому удовлетворяет давление. Это уравнение может быть выведено также непосредственно из первого закона термодинамики, если рассматривать Вселенную как термодинамическую систему, ограниченную видимым горизонтом и расширяющуюся адиабатически (*Ryden*, 2003).

Таким образом, фундаментальными уравнениями динамической космологии, основанными на метрике Робертсона–Уокера, являются уравнения ускорения (13.36), уравнение сохранения энергии (13.38) и уравнение состояния (зависимость давления $P(t)$ от $a(t)$), которые определяют коэффициент расширения $a(t)$ (Friedmann, 1922).

Ранее в статье (Колесниченко, Маров, 2021) был рассмотрен сценарий ускорения космического пространства под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями пропорциональными площади космологического горизонта Вселенной. К таким энтропиям относятся приведенные в первом разделе этой статьи энтропии Бекенштейна–Хокинга, Барроу и Тсаллиса–Кирто. Однако простая формула площади для энтропии не выполняется в теориях космической гравитации с высшими производными (Cai, Kim, 2005). Поэтому представляется целесообразным получить обобщенные уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера в рамках теории гравитации, основанной на рассмотренных выше модифицированных энтропиях, зависящих от свободных параметров деформации (Δ) и неэкстенсивности (α,β). Эти результаты непосредственно связаны с голографическими свойствами гравитации.

Обобщенные уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера. Согласно общей теории относительности, гравитационное поле создается не только плотностью среды, но и давлением в комбинации $\rho(t)+P(t)/c^2$ (см. Черепащук, Чернин, 2004). Предполагая далее, что в развиваемом нами варианте энтропийной космологии, основанном на модифицированной энтропии Шарма–Миттал, эффективное давление постулируемого аналога космической жидкости P'_{SM}, вызывающее эволюцию Вселенной (в частности, энтропийную силу и антигравитацию), определяется соотношением

$$P'_{SM}=P+P_{SM}=P-\frac{1}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2(K/k)^{\Delta/2}H^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}, \quad (13.39)$$

где давление P_{SM} задается формулой (13.29). При использовании эффективного давления P'_{SM} классические уравнения Фридмана (13.36) и (13.38), принимают следующий обобщенный вид:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}=-4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]+\frac{(2+\Delta)}{2}\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}}H(t)^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)^{1+\frac{\Delta}{2}}H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}. \quad (13.40)$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}+3H\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{4\pi G}\frac{(2+\Delta)}{2}\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}}H(t)^{3-\Delta}}{\left[1+(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)^{1+\frac{\Delta}{2}}H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}.$$

(13.41)

Наличие нескольких свободных параметров в этих уравнениях позволяет получить различные варианты движущих сил, вызывающих отклонение от «стандартной» голографической модели Вселенной, предложенной Верлинде (Verlinde, 2011).

Ниже приведено несколько вариантов моделей фридмановской Вселенной, полученных исходя из модифицированной энтропии Шарма–Миттеля.

Уравнения Фридмана, полученные с использованием модифицированной энтропии Реньи S_{mod}^{Re}**.** Эти уравнения можно получить из уравнений (13.40) и (13.41), при устремлении параметра неэкстенсивности r к единице. В результате будем иметь:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}=-4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]+\frac{2+\Delta}{2}\frac{H(t)^4}{(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)+\left(\frac{K}{k}\right)^{-\Delta/2}H(t)^{(2+\Delta)}},$$

(13.42)

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}+3H\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\frac{H(t)^5}{(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)+\left(\frac{K}{k}\right)^{-\Delta/2}H(t)^{(2+\Delta)}}.$$

(13.43)

Уравнения Фридмана, основанные на модифицированной энтропии Реньи $\tilde{S}^{Re}$**.** Полагая в уравнениях (13.42) и (13.43) параметр деформации равным нулю ($\Delta=0$), получим следующие обобщенные уравнения Фридмана

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}+4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{H(t)^2}{1+(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)H(t)^{-2}},\qquad(13.44)$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}+3H\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{4\pi G}\frac{H(t)^3}{1+(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)H(t)^{-2}}\,, \tag{13.45}$$

основанные на энтропии Реньи, модифицированной с помощью энтропии Бекенштейна–Хокинга (ср. Sayahian и др., 2018).

Классические уравнения энтропийной космологии. Устремляя в уравнениях (44) и (45) параметр неэкстенсивности q к единице, получим

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}=-4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]+H(t)^2\,, \tag{13.46}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}+3H\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]-\frac{3}{4\pi G}H(t)^3=0\,. \tag{13.47}$$

Эти уравнения можно рассматривать как обобщенные уравнения ускорения (13.36) и непрерывности (13.38) для энтропийной космологии, выведенные с использованием энтропии Бекенштейна–Хокинга. Величина H^2 в этих уравнениях связана с энтропийной силой, которая может объяснить ускоренное расширение Вселенной без введения понятия темной энергии – космического вакуума (связанного с космологической постоянной), плотность энергии которого отрицательна. Заметим, что энтропия Бекенштейна–Хокинга пропорциональна площади космологического горизонта Вселенной, благодаря чему модель, основанная на этой энтропии, предсказывает только расширяющуюся с равномерным ускорением Вселенную. Как было показано в работе (Easson и др., 2011), эта модель ускоренного расширения Вселенной способна обеспечить хорошее соответствие данным по сверхновым звездам.

Ускоренное расширение Вселенной под воздействием энтропийной силы Барроу. Устремляя теперь в уравнениях (13.42) и (13.43) параметр экстенсивности q к единице, получим уравнения

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}+4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}H(t)^{2-\Delta}\,, \tag{13.48}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}+3H\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}H(t)^{3-\Delta}, \qquad (13.49)$$

описывающие при использовании для поверхности горизонта Вселенной энтропии Барроу как космологическое ускорение, так и замедление (Колесниченко, Маров, 2021).

Важно отметить, что случай нулевой деформации ($\Delta=0$) соответствует энтропийной силе Барроу, которая полностью соответствует стандартной энтропийной силе, рассмотренной в работе (Easson и др., 2011). Следует вместе с тем подчеркнуть, что, как отмечалось авторами работы (Anagnostopoulos и др., 2020), опиравшимися на указанные выше наблюдательные данные космической хронометрии с целью прямых измерений параметра Хаббла, этим данным лучше соответствует значение параметра деформации, равное $\Delta=0.094$. Другими словами, допускается, что небольшое отклонение от стандартной голографической энтропии Бекенштейна–Хокинга является более предпочтительным.

В общем случае, когда $0<\Delta<1$, мы имеем новый космологический сценарий проявления энтропийной силы, основанный на энтропии Барроу, связанной с квантово-гравитационными эффектами горизонта Вселенной. Этот сценарий позволяет моделировать космологическое состояние и эволюцию Вселенной при различных модификациях управляющей гравитационной силы Барроу (см. Saridaki, 2020).

Ускоренное расширение Вселенной под воздействием энтропийной силы Тсаллиса–Кирто. Вариант $\Delta=1$ в уравнениях (13.48) и (13.49), соответствующий максимальной деформации космологического горизонта из-за квантово-гравитационных эффектов, связан с энтропией Тсаллиса–Кирто (Tsallis., Cirto, 2013). Соответствующие обобщенные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}+4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2}H(t), \qquad (13.50)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+3H(t)\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{4\pi G}\frac{3}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2}H(t)^2. \qquad (13.51)$$

Сценарий проявления этой энтропии предсказывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной (см. Basilakos и др.,2009). Из уравнения (13.50) следует, что управляющий силовой член в этой модели пропорционален хаббловской скорости расширения Вселенной H, в отличие от аналогичного энтропийного силового члена в модели Бекенштейна–Хокинга, который пропорционален H^2.

Отметим, что космологические уравнения, подобные уравнениям (13.50) и (13.51), неоднократно обсуждались в литературе при моделировании эволюции Вселенной, основанной на различных аппроксимациях переменного космологического члена (см., например, (Basilakos и др.,2009). С другой стороны, полученная из обобщенной энтропии Тсаллиса–Кирто энтропийная сила (13.33) ведет себя так же, как и движущая сила вязкой космологической жидкости с объемной вязкостью η, с использованием которой в моделях вязкой космологии объясняется ускоренное расширение Вселенной. Действительно, выражение для эффективного давления $P'_{TC}(t)=P(t)-\frac{3c^3}{8\pi G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2}H(t)$ в уравнении (13.50), аналогично выражению $P'(t)=P(t)-3\eta H(t)$ для давления в моделях вязкой космологии, предложенных для описания темной материи. В моделях этого типа предполагается, что Вселенная заполнена космологической жидкостью с объемной вязкостью η, которая может генерировать энтропию однородной и изотропной Вселенной (см. Padmanabhan, Chitre, 1987; Meng, Dou 2009). Приведенное сходство стало возможным по причине того, что введенная на основе голографического принципа неаддитивная энтропия Тсаллиса–Кирто ведет себя так, как если бы это была классическая энтропия однородной и изотропной Вселенной, порожденная объемным вязким напряжением космологической жидкости (Li, Barrow, 2009; Sebastian, 2010).

Итак, все модели, рассмотренные в этом разделе, как и многие другие, сконструированные на базе обобщенных уравнений Фридмана (13.40)-(13.41), описывают эволюцию Вселенной без использования представлений о наличии гипотетической темной энергии, аналогом которой служит космологическая постоянная. Несомненно, что их дальнейший анализ будет способствовать более глубокому пониманию нетрадиционной термодинамики и статистических аспектов пространства-времени и гравитации.

13.4. Термодинамический подход к моделированию неадиабатической эволюции Вселенной

Термодинамический вывод уравнения сохранения космической энергии. Закон сохранения энергии (13.38) может быть получен также непосредственно из первого закона термодинамики, если рассматривать Вселенную как термодинамическую систему, ограниченную космологическим горизонтом и расширяющуюся адиабатически (Ryden, 2003).

Согласно первому закону термодинамики, принцип сохранения полной энергии для неаддитивных систем можно записать в виде соотношения Гиббса $T\partial S/\partial t = \partial E/\partial t + P\partial V/\partial t$, выражающего скорость изменения энтропии S при движении элемента неаддитивной среды вдоль его траектории (Колесниченко, 2018, 2019). Здесь $\partial E/\partial t$ и $\partial V/\partial t$ – изменения во времени внутренней энергии и объема области вещества и излучения Вселенной соответственно [46)].

Рассмотрим теперь сферу начального радиуса $\hat{r}_s$, расширяющуюся вместе с универсальным расширением Вселенной, так что ее собственный радиус $R_H(t)$ в момент времени t определяется выражением $R_H = a(t)\hat{r}_s$. Тогда объем $V(t)$ сферы равен $V(t) = (4\pi/3)\hat{r}_s^3 a(t)^3$. Отсюда

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{3}\hat{r}_s^3\left(3a^2\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right) = V\left(\frac{3}{a}\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right) = 3VH. \qquad (13.52)$$

Для внутренней энергии сферы имеем $E(t) = \varepsilon(t)V(t)$, где $\varepsilon(t)$–плотность внутренней энергии, определяемая соотношением $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$. Отсюда скорость изменения внутренней энергии сферы $E(t)$ определяется как

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}V + \varepsilon\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + 3H\varepsilon\right)V = \left(\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\rho\right)c^2\left(\frac{4\pi}{3}R_H^3\right). \qquad (13.53)$$

---

46) Следует заметить, что в общем случае для каждой из используемых в модели эволюции Вселенной энтропийных мер должна соответствовать своя температура хаббловского горизонта.

Подставляя это выражение в соотношение Гиббса, получим второй закон термодинамики для расширяющейся или сжимающейся Вселенной:

$$T_H \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + 3H(\varepsilon + P)\right)V = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right]c^2\left(\frac{4\pi}{3}R_H^3\right). \tag{13.54}$$

Рассмотрим сначала изоэнтропические (обратимые и адиабатические) движения космического вещества, для которых энтропия каждой частицы среды остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути элемента среды, т.е. $\partial S / \partial t = 0$. Для них уравнение (13.54) сводится к ранее полученному уравнению неразрывности (13.38) для адиабатического расширения Вселенной.

Обобщенное энергетическое уравнение для моделирования неадиабатической эволюции Вселенной. При моделировании эволюции Вселенной в рамках неадиабатической энтропийной космологии изменение энтропии системы не равно нулю, $\partial S / \partial t \neq 0$ (см. Frolov, Kofman, 2003; Cai, Kim, 2005; Akbar, Cai, 2007). Для вычисления этой величины в уравнении (13.54) будем использовать формулу (13.29) для модифицированной энтропии Шарля–Миттела, полученную с помощью энтропии Барроу (Barrow, 2020), как наиболее общую в рассматриваемом здесь случае. В результате получим

$$T_H \frac{\partial S_{SM}^{mod}}{\partial t} = -\frac{(2+\Delta)c^5}{2G} \frac{(K/k)^{\Delta/2} H^{-\Delta-2}}{\left[1 + \alpha^{-1} K (K/k)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{13.55}$$

С учетом этого выражения энергетическое уравнение (13.54), записанное в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = T_H \frac{\partial S_{SM}^{mod}}{\partial t}\left(\frac{3}{4\pi}\right)c^{-5}H^3,$$

принимает вид обобщенного закона сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4\pi G}\frac{(2+\Delta)}{2}\frac{(K/k)^{\Delta/2}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}H^{-\Delta+1}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (13.56)$$

Правая часть этого уравнения связана с неадиабатическими процессами в космологическом пространстве. Если параметр Хаббла $H=0$ или если $H=const$, то уравнение (13.56) сводится к классическому уравнению неразрывности (13.38) для адиабатического расширения Вселенной. В общем случае неадиабатической эволюции Вселенной на основе уравнения (56) можно получить целый набор обобщенных систем космологических уравнений Фридмана для масштабного фактора.

Таким образом, методы энтропийной космологии, основанные на предложенной модификации энтропии Шарля–Миттела, являются достаточно эффективными для конструирования целого набора моделей, которые позволяют найти количественные оценки ускоренного расширения Вселенной в соответствии с данными наблюдений. Важно отметить, что рассмотренная в этой главе модификация неэкстенсивной энтропии Шарма– Миттал базируется на энтропии Барроу, которая заменяет энтропию Бекенштейна–Хокинга, фигурирующую в известных энтропийных формализмах. Смысл такой замены состоит в том, что наличие энтропии Барроу, учитывающей возможные эффекты квантово-гравитационной пены на канве пространства-времени в области космологического горизонта, создает дополнительные средства для оценки ускоренного расширения Вселенной, которое в большинстве случаев несколько больше, чем в базовом сценарии, основанном на энтропии Бекенштейна–Хокинга.

В заключение нужно отметить, что предложенный в этой главе подход, связанный с использованием вероятностных негауссовых (неэкстенсивных) аспектов хаббловского горизонта поверхности Вселенной, соответствует известным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамического поведения космоса без привлечения концепции темной энергии. Это обстоятельство, несомненно, побуждает к более глубокому изучению вероятностных неэкстенсивных аспектов пространства-времени из-за дальнодействующей природы гравитации.

Библиография

Вайнберг С. Космология. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2013. 608 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука. 1971. 416 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма–Миттал как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. V. XLII. P.74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87) 2019. 360 с.

Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 2. Изд-во «Мир». 1977. 525 с.

Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009. 520 с.

Черепащук А.М., Чернин А.Д. Вселенная, жизнь, черные дыры. – Фрязино: «Век 2», 2004, 320 с.

Aditya Y., Mandal S., Sahoo P., Reddy D. Observational constraint on interacting Tsallis holographic dark energy in logarithmic Brans Dicke theory // Eur. Phys. J. 2019. V. 79. №.12. P. 1020) [arXiv:1910.12456].

Akbar M., Cai R. G. Thermodynamic Behavior of Friedmann Equations at Apparent Horizon of FRW Universe // Phys. Rev. D. 2007. V.75, P.084003 [arXiv:hep-th/0609128].

Abreu E. M. C., Neto J. A., Barboza E. M. Jr., Mendes A. C. R., Soares B. B. On the equipartition theorem and black holes non-Gaussian entropies // Modern Physics Letters A. 2020. V. 35. № 32. P. 2050266 (7 pages).

Abreu E.M.C., Neto J.A. Some statistical approaches in the apparent horizon entropy and the generalized second law of thermodynamics // arXiv:2107. 04869 v1 [gr-qc] 10 Iul 2021.

Aktürk E., Bagci G. B., Sever R. Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? // 2007. Eprint arXiv: cond-mat/0703277.

Anagnostopoulos F.K., Basilakos S., Saridakis E.N. Observational constraints on Barrow holographic dark energy // Eur. Phys. J. C. 2020. V.80. P. 826 (1-9).

Anagnostopoulos F. K., Basilakos S., Kofinas G., Zarikas V. Constraining the Asymptotically Safe Cosmology: cosmic acceleration without dark energy // JCAP. 2019. V. 053 [arXiv:1806.10580].

Basilakos S., Polarski D., Sola J. Generalizing the running vacuum energy model and comparing with the entropic-force models // Phys. Rev. D 2012. V.86.№ 4. P. 043010

Basilakos S., Plionis M., Sola J. Hubble expansion and structure formation in time varying vacuum models // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. №8. P 083511

Barrow J. D .The area of a rough black hole // Physics Letters B. 2020. V. 808. P 135643.

Barrow J. D., Basilakos S., Saridakis E.N. Big Bang Nucleosynthesis constraints on Barrow entropy // Physics Letters B. 2021. V.815. № 9 P.136134

Bekenstein J.D. Black Holes and Entropy // Phys. Rev. D. 1975. V.7. № 8. P. 2333-2346.

Biró T. S., Czinner V. G. A *q*-parameter bound for particle spectra based on black hole thermodynamics with Rényi entropy. Physics Letters B. 2013. V.726. № 4-5. P. 861-865.

Cai Y.-F., Liu J., Li H. Entropic cosmology: A unified model of inflation and late-time acceleration // Physics Letters B. 2010a. V. 690. P. 213-219.

Cai Y.-F., Saridakis E. Inflation in entropic cosmology: Primordial perturbations and non-Gaussianities // Physics Letters B. 2011. V. 697. P. 280-287.

Cai R. G., Kim S. P. First law of thermodynamics and Friedmann equations of Friedmann-Robertson-Walker universe // JHEP. 2005. V. 0502. P. 050 [arXiv:hep-th/0501055].

Czinner V. G., Iguchi H. Rényi entropy and the thermodynamic stability of black holes // Phys. Lett. B. 2016. V. 752. P. 306-310.

Daroczy Z. Generalized information function// Inform. Control. 1970. V.16. P. 36-51.

Easson D. A., Frampton P. H., Smoot, G. F. Entropic accelerating universe // Physics Letters B. 2011. V. 696. № 3, P. 273-*277 /* arXiv.1002.427 v3[hep.-th.] 24 Oct 2010.

Easson D. A., Frampton P. H., Smoot, G. F. Entropic Inflation // arXiv.1003.1528 v3[hep.-th.] 13Apr 2012.

Frolov A. V., Kofman L. Inflation and de Sitter thermodynamics // JCAP. 2003. V. 0305. P. 009 [arXiv:hep-th/0212327].

Jahromi A. S, Moosavi S., Moradpour H., Graca J. M., Lobo I., Salako I., Jawad A. // Generalized entropy formalism and a new holographic dark energy model. Physics Letters B. 2018. V.780, P. 21-24.

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V.3. P.30-35.

Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes // Zeitschrift für Physik. 1922. V. 10, P. 377-386.

Gibbs J. W. Elementary principles in statistical mechanics: 1902. New York: Charles Scribner's Sons. 1960.

Hawking S. W. Particle Creation By Black Holes // Commun Math. Phys. 1975. V. 43. 199-220.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity // Physical review E. 2002. V. 66. № 5. P. 056125.

Keul N.D., Oruganty K., Bergman E.T.S., Beattie N.R., McDonald W.E., Kadirvelraj R., Gross M.L., Phillips R.S., Harvey S.C., Wood Z.A. The entropic force generated by intrinsically disordered segments tunes protein function // Nature. 2018. V.563. P. 584-588.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Scenario of accelerated universe expansion under exposure to entropic forces related to with the entropies of Barrow and Tsallis−Cirto // Mathematica Montisnigri. 2021. V. L. P. 80-103.

Komatsu E., et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2011. V. 192. №2. article id. 18, 47 pp.

Komatsu N., Kimura S. Non-adiabatic-like accelerated expansion of the late universe in entropic cosmology // Phys. Rev. D. 2013. V.87, P. 043531.

Komatsu N., Kimura S. Evolution of the universe in entropic cosmologies via different formulations // Physical Review D, 2014. V. 89. № 12. P.123501.

Komatsu N. Cosmological model from the holographic equipartition law with a modified Rényi entropy // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77. P.229-241.

Komatsu N. Generalized thermodynamic constraints on holographic-principle-based cosmological scenarios // Physical Review D. 2019. V. 99. P. 043523.

Koivisto T.S., Mota D. F., Zumalacárregui M. Constraining entropic cosmology // J. Cosmol.Astropart. Phys. 2011. № 02. id.027;

Li B., Barrow J. Does bulk viscosity create a viable unified dark matter model? // Physical Review D, 2009. V. 79. № 10. P. id. 103521

Meng X.-H., Dou X. Friedmann cosmology with bulk viscosity: a concrete model for dark energy // Communicationsin Theoretical Physics. 2009. Vl. 52. № 2. P. 377-38.

Moradpour H. Implications, consequences and interpretations of generalized entropy in the cosmological setups // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. № 9. P. 4176-4184.

Moradpour H. Sheykhi S., Corda C., Salako I.G. Implications of the generalized entropy formalisms on the Newtonian gravity and dynamics // Physics Letters B. 2018. V.783. P. 82-85.

Moradpour H., Corda C., Ziaie A. H., Ghaffari S. The extended uncertainty principle inspires the R´enyi entropy // EPL (Europhysics Letters). 2019. V. 127. №. 6. P. 60006

Myung Y.S. Entropic force and its cosmological implications // Astrophys. Space Sci. 2011. V. 335. № 2. P. 553-559.

Nunes R. C., Barboza E. M., Abreu E. M. C., Neto J. A. Probing the cosmological viability of non-gaussian statistics // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. V. 08. P. 051.

Padmanabhan T. Thermodynamical Aspects of Gravity: New insights // Rept. Prog. Phys. 2010. V.73. № 4. P.046901 (44pp) [arXiv:0911.5004].

Padmanabhan T., Chitre S. M. Viscous universes. Physics Letters A, 1987. V. 120. №. 9. P. 433-436.

Padmanabhan T. Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity // Modern Physics Letters A, 2010. V. 25. № 14. P. 1129-1136.

Qiu T., Saridakis E. N. Entropic force scenarios and eternal inflation // Phys. Rev. D. 2012. V.85. P. 043504.

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960.V. 1. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1961. p. 547-561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Ryden B. Introduction to Cosmology. Cambridge University Press. 2017. 279 p.

Saridakis E.N., Basilakos S. The generalized second law of thermodynamics with Barrow entropy. Eur. Phys. J. C .2021.V. 81:644-649.

Saridakis E. N. Modified cosmology through spacetime thermodynamics and Barrow horizon entropy // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2020. P. 1-10.

Sayahian Jahromi A., Moosavi S. A., Moradpour H., Morais Graça J. P., Lobo I. P., Salako I. G., Jawad A. Generalized entropy formalism and a new holographic dark energy model // Physics Letters B. 2018. V.780. P.21-24.

Scarfone A. M., Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma–Taneja–Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72 № 2. id. 026123.

Sharma B.D., Mittal D.P. New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. & Syst.Sci.1975. V.2. P.122-133.

Sharma U. K., Dubey V. C., Ziaie, A. H., Moradpour, H. Kaniadakis Holographic Dark Energy in non-flat Universe // Eprint arXiv:2106.08139. 2021.

Sheykhi A. Modified Friedmann equations from Tsallis entropy // Physics Letters B. 2018. V. 785. P.118-126.

de Sitter W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis //Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam). 1917. V. 19. P. 1217-1225.

Sebastian, L. Dark viscous fluid coupled with dark matter and future singularity // European Physical Journal C. 2010. V. 69. P. 547-553.

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11. P. 6377-6396.

Torres D.F., Vucetich H., Plastino A. Early Universe Test of Nonextensive Statistics // Phys. Rev. Lett. 1997. V.79. № 9. P. 1588-1590.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P.479–487.

Tsallis C., Cirto L. J.L. Black hole thermodynamical entropy // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73. P.2487.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1-26.

Waheed S. Reconstruction paradigm in a class of extended teleparallel theories using Tsallis holographic dark energy // Eur. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. № 1. P. 11.

Weinberg S. The cosmological constant problem **//** Reviews of Modern Physics. 1989. V. 61. № 1. P.1-23.

Wilk G., Wlodarczyk Z. On the interpretation of nonextensive parameter *q* in Tsallis statistics and Levy distributions // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. P. 2770.

Wissner-Gross A.D., Freer C.E. Causal entropy forces // Phys. Rev. Lett. 2013, V.110, 168702. OhysRevLett.110.168702.

ГЛАВА 14

Вывод в рамках статистики Тсаллиса релятивистских гидродинамических уравнений для разреженной неидеальной газовой системы высокоэнергетических частиц

В этой главе обсуждается конструирование неэкстенсивной релятивистской диссипативной гидродинамики одинаковых частиц на основе релятивистского кинетического уравнения, полученного в q-неэкстенсивном контексте статистики Тсаллиса и с учетом включения корреляционных эффектов (путем отказа от гипотезы молекулярного хаоса) в столкновительный член. Показано, что локальное столкновительное равновесие описывается обобщенной версией релятивистского распределения Юттнера. С помощью этого распределения определены в явном виде все термодинамические параметры состояния. Линейные определяющие соотношения и коэффициенты переноса, такие как сдвиговая вязкость, объемная вязкость и теплопроводность, получены на основе линеаризованного интеграла столкновений, записанного в форме Андерсона–Виттинга и оцениваются с использованием аппроксимации времени релаксации. Сконструированная неэкстенсивная релятивистская гидродинамика предназначена для моделирования широкого круга явлений в астрофизике, космологии и физике высоких энергий.

Введение

В последнее время появляется все больше доказательств того, что неэкстенсивная статистическая механика Тсаллиса (Tsallis, 1988), используемая для описания статистического и кинетического поведения аномальных неаддитивных систем различной природы, может рассматриваться как наиболее подходящая основа теоретической базы для моделирования огромного числа физических явлений и процессов. Эти явления включают ситуации, когда система проявляет эффект памяти любого рода, испытывает дальнодействующие корреляции (когда ее размер сопоставим с диапазоном действующих в ней сил), испытывает некоторые внутренние флуктуации, и фазовое пространство, в котором она функционирует, ограничено или имеет фрактальную структуру.

Напомним, что принадлежащая Тсаллису модифицированная версия энтропии Больцмана-Гиббса (БГ) в случае неэкстенсивной газовой системы имеет вид (см. Tsallis, 1988; Колесниченко, 2019):

$$S_q := -k_B \int f^q(\mathbf{r}) \ln_q f(\mathbf{r}) d\Omega = -k_B \left\langle \ln_q f \right\rangle_q, \quad q \in [0,2],$$

где k_B – постоянная Больцмана; $f(\mathbf{r})$, $d\Omega$ – соответственно функция распределения и элемент объема в фазовом пространстве; q – параметр деформации (неаддитивности энтропии S_q), связанный с некоторыми дополнительными степенями свободы, присущими аномальным системам, и который должен определяться *a posteriori*; $\ln_q z$ – деформированная q – логарифмическая функция, обратная для которой является деформированной q-экспонентой, $\exp_q z$. Обе эти функции определяются следующим образом:

$$\ln_q z := (1-q)^{-1}(z^{1-q} - 1), \quad (z > 0),$$

$$\exp_q z := [1 + (1-q)z]^{1/(1-q)}, \ \left(z > (q-1)^{-1}\right);$$

причем $\exp_q(\ln_q z) = \ln_q(\exp_q z) = z$. При написании второй формы определения энтропии Тсаллиса использовано осреднение $\left\langle \ldots \right\rangle_q := \int (\ldots) f^q d\Omega$ с ненормированным распределением f^q для любой микроскопической физической величины, свойственное статистике Курадо-Тсаллиса[47)] (см. Колесниченко, 2018).

[47)] В этой главе использовано ненормированное осреднение Курадо-Тсаллиса, поскольку это единственное осреднение, которое не приводит к переопределению понятия температуры *q*-системы. Только в этой статистике температура является интенсивным параметром, а не функциона-

Энтропия Тсаллиса широко исследована как в теоретическом, так и в прикладном контексте (см., например, Gell-Mann, Tsallis, 2004; Tsallis, 2009; Колесниченко, 2019). В частности, неэкстенсивный статистический формализм оказался полезной конструкцией для анализа многих астрофизических и космологических явлений (см., например, Колесниченко, 2015, 2019; Kolesnichenko, 2017, 2020a,b, 2021). Недавно было найдено еще одно из заманчивых применений неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, связанное с физикой высоких энергий (Wilk, Włodarczy, 2000, 2009; Biro и др., 2017; Cleyman и др., 2013). Оказалось, что экспериментальные спектры частиц на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (*Relativistic Heavy Ions Collider*) и на Большом адронном коллайдере (*Large Hadron Collider*) могут быть успешно описаны распределениями энергии по так называемому расширенному степенному закону Тсаллиса-Парето − типичным для канонического равновесного распределения, связанного с энтропийной мерой Тсаллиса в широком диапазоне энергий, размеров сталкивающихся систем и производимых сортов адронов[48)]. Другими словами, математическое моделирование процессов производства вторичных частиц внутри газовых потоков при адронных релятивистских столкновениях тяжелых ионов (в результате которых происходит образование нового адронного состояния материи кварк-глюонной плазмы (*QGP*)) приводит к наиболее адекватным результатам только при использовании неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, в то время как условия, необходимые для применения классической статистики БГ и релятивистской кинетической теории (Israel, 1963; de Groot и др., 1968; Muronga, 2007a,b; Ландау, Лифшиц, 1988 ; Колесниченко, 2023a), выполняются в этом случае весьма приближенно.

Указанное неэкстенсивное распределение в физике высоких энергий связано, предположительно, с тем, что адронизирующие системы характеризуются сильными внутренними флуктуациями и дальними корреляциями, которые могут быть истолкованы как про-

---

лом, как, например, при осреднении с помощью нормированного эскортного распределения Тсаллиса-Мендеса-Пластино (см. Зарипов, 2010).

[48)] Адроны − *бесцветные* составные частицы (протоны и нейтроны), построенные из кварков и глюонов (безмассовых частиц, являющихся переносчиками сильного *цветового* взаимодействия между кварками).

явление некоторых внутренних динамических, неравновесных процессов (таких, например, как распад резонансов или возникновение температурных флуктуаций). В результате вместо обычного локального теплового равновесия (имеющего место во всех приложениях классической статистики) в рассматриваемых аномальных системах возникает некое «стационарное состояние» (так называемое неэкстенсивное равновесие, зависящее от параметра деформации q), которое неявно учитывает разного рода внутренние динамические эффекты (Kodama и др., 2005; Osada, Wilk, 2008; Urmossy и др., 2012; Bíró и др., 2017). В работах (Silva, Lima 2005; Lavagno и др. 2009; Santos и др., 2017) также было установлено, что в аномальных релятивистских системах подобные явления могут быть эффективно описаны (без привлечения каких-либо соображений относительно динамических источников различных флуктуаций) в рамках концепции неэкстенсивной кинетики в виде обобщенной версии распределения Юттнера (Jüttner, 1911) − общего решения нулевого порядка релятивистского уравнения переноса (см. de Groot и др., 1980).

По этой причине стало ясно, что важным шагом на пути успешного решения обсуждаемой проблемы является аккуратное конструирование неэкстенсивной релятивистской гидродинамики, которая полностью согласуется с статистическим подходом Тсаллиса и на основе которой возможно эффективное моделирование широкого круга динамических явлений в системах с релятивистскими ядерными столкновениями высоких энергий. В ряде зарубежных работ (см., например, Kodama и др., 2005; Urmossy и др., 2012; Bíró и др., 2017) была разработана в *q-неэкстенсивном* контексте Тсаллиса релятивистская кинетическая теория, в которой дана новая интерпретация параметра неэкстенсивности *q,* как количественной меры внутренних флуктуаций, характерных для адронизирующих систем[49)].

Вместе с тем следует отметить, что почти во всех известных автору работах по обсуждаемой проблеме отсутствует сколько-нибудь детальный кинетический вывод неэкстенсивного релятивистского уравнения переноса, описывающего эффекты, связанные с ультрарелятиви-

---

[49)] Заметим, что предположение, связывающее параметр *q* с флуктуациями формализовано в виде новой ветви статистической механики, называемой суперстатистикой Бека-Коэна (см. Beck, 2000; Tsallis, Souza, 2003).

вистскими скоростями движения частиц. При этом формулировки привлекаемых предположений делаются обычно без подробных пояснений, а приведенные формулы часто даются без соответствующего математического обоснования. По этой причине автор синопсиса (Колесниченко, 2023*c*) предпринял попытку более детального вывода неэкстенсивного релятивистского кинетического уравнения с учетом включения корреляционных эффектов (путем отказа от гипотезы молекулярного хаоса «*Boltzmann' Stosszahlansatz*») в столкновительный член. Это обобщенное кинетическое уравнение позволяет получить законы сохранения плотности, импульса и энергии для аномальных q-систем, подтвердить справедливость второго закона термодинамики, согласно которому возникновение σ_q энтропии нигде и никогда не бывает отрицательным, а также сконструировать неэкстенсивную релятивистскую гидродинамику, описывающую широкий круг явлений, возникающих при больших скоростях (сравнимых со скоростью света) макроскопического движения составляющих жидкость частиц.

14.1. Основные макроскопические величины

Некоторые исходные определения. Приведем сначала статистические выражения для основных макроскопических физических величин, записанных на языке неэкстенсивной релятивистской кинетической теории[50)]. В неоднородной среде релятивистского газа, состоящего из одинаковых частиц, макроскопические величины являются функциями пространственно-временных координат $x := x^{\mu} := (t, \mathbf{x})$, где индекс μ принимает 4 значения: $\mu = 0,1,2,3$; t – время. Далее будем использовать метрический тензор $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, где $\mu,\nu = 0,1,2,3$, а оператор ковариантного дифференцирования будем обозначать как[51)]

[50)] В этой работе, если не оговорено особо, будем для простоты выкладок использовать единицы, в которых постоянная Планка и скорость света равны единице.

[51)] Это определение ковариантного дифференцирования справедливо только при отсутствии гравитационного поля (см. Weinberg, 1972).

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) =: (\partial_0, \nabla). \qquad (14.1)$$

Макроскопическое состояние неэкстенсивного релятивистского газа характеризуется 4-вектором потока частиц $N_q^\mu(x)$, 4-тензором энергии-импульса $\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x)$ и 4-вектором потока энтропии $S_q^\mu(x)$. Эти макроскопические величины определяются в кинетической q-теории как статистические средние с помощью ненормированной функции распределения f^q, где $f(t,\mathbf{x},p^0,\mathbf{p})$ − функция распределения фазового пространства одной частицы (локальная плотность вероятности), которая нормирована на число частиц в системе, т.е. определена таким образом, что произведение $\mathrm{d}\mathcal{N} = f\,\mathrm{d}^3|\mathbf{x}|\,\mathrm{d}^3|\mathbf{p}|$ дает среднее число частиц, которые в момент времени t находятся в элементе объема $\mathrm{d}^3|\mathbf{x}|$ с центром в точке $\mathbf{x}$ и имеют импульсы частиц в пределах $(\mathbf{p}, \mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})$. Эта функция зависит от пространственно-временных координат $x := x^\mu = (t,\mathbf{x})$ и 4-вектора энергии-импульса $p := p^\mu = (p^0,\mathbf{p}) := (E,\mathbf{p})$, где $m = \sqrt{p^\mu p_\mu}$, $\mathbf{p}$, $\mathrm{E} = p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ − соответственно релятивистские масса, импульс и энергия частицы, находящейся в элементе пространственного объема $\mathrm{d}^3|\mathbf{x}|$ в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. С помощью функции $f^q(x,p)$ фундаментальные полевые величины $N^\mu(x)$, $\mathcal{T}^{\mu\nu}(x)$ и $S^\mu(x)$ (здесь $\mu = 0,1,2,3$) записываются в ковариантной форме следующим образом (Колесниченко, 2023a):

$$N_q^\mu(x) = \langle p^\mu \rangle_q := \int p^\mu f^q(x,p)\,\mathrm{d}P, \quad (\mu = 0,1,2,3), \qquad (14.2)$$

$$\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x) = \langle p^\mu p^\nu \rangle_q := \int p^\mu p^\nu f^q(x,p)\,\mathrm{d}P, \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3), \qquad (14.3)$$

$$S_q^\mu(x) := -k_B \int p^\mu \left[f^q(x,p) \ln_q f(x,p) - f(x,p) \right] \mathrm{d}P, \quad (\mu = 0,1,2,3). \qquad (14.4)$$

Здесь $\mathrm{d}P := g \dfrac{\mathrm{d}^3 p}{p^0 (2\pi)^3}$ −инвариантный объем пространства с импульсом, где $g = 2j+1$ обозначает число внутренних степеней свободы (j–

спин частицы); k_B – постоянная Больцмана. По поводу формулы (14.4) сразу отметим следующее: в немногочисленной литературе по неэкстенсивной релятивистской кинетической теории существуют различные не эквивалентные друг другу определения 4-вектора потока q-энтропии $S_q^{\mu}(x)$, которые приводят к различным термодинамическим соотношениям (см., например, Lima и др., 2001; Lavagno и др., 2009; Osada, Wilk, 2009). В данной работе мы будем использовать определение, предложенное в работе (Osada, Wilk, 2009), поскольку только оно соответствует статистической квантовой q-энтропии, учитывающей поправки, касающиеся термодинамической согласованности в случае релятивистских квантовых распределений частиц высоких энергий (Cleymans, Worku, 2012).

Гидродинамическая 4-скорость. Важным понятием при конструировании релятивистской кинетической теории является гидродинамическая 4-скорость $u^{\mu}(x)$, которая используется при определении ряда физических параметров, играющих важную роль при формулировании макроскопических законов сохранения. 4-скорость $u^{\mu}(x)$ обычно задается в виде времениподобного вектора с модулем равным единице в каждой пространственно-временной точке: $u^{\mu}(x)u_{\mu}(x)=1$. С помощью вектора гидродинамической скорости определяется так называемый *тензор-проектор*

$$\Delta^{\mu\nu}(x):=g^{\mu\nu}-u^{\mu}(x)u^{\nu}(x), \tag{14.5}$$

который при свертке с произвольным 4-вектором действует как проекционный оператор, уничтожая параллельную скорости $u^{\mu}(x)$ часть этого вектора, $\Delta^{\mu\nu}(x)u_{\nu}(x)=0$; кроме этого проекционный оператор характеризуется следующими свойствами: $\Delta^{\mu\nu}=\Delta^{\nu\mu}$, $\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\nu\sigma}=\Delta^{\mu}_{\sigma}$, $\Delta^{\mu}_{\mu}=3$.

Поскольку гидродинамическая скорость $u^{\mu}(x)$ является времениподобным вектором, то возможно в каждой пространственно-временной точке ввести локальную систему покоя (называемую также сопутствующей системой координат), обозначаемую индексом *LR* (*local rest*). Гидродинамическая скорость в этой системе имеет следующие компоненты: $u^{\mu}_{LR}=(1,0,0,0)$, а $\Delta^{\mu\nu}_{LR}=\Delta_{LR\mu\nu}=\mathrm{diag}(0,-1,-1,-1)$,

$\Delta^{\mu}_{LR\nu} = \mathrm{diag}\,(0,1,1,1)$. Чтобы зафиксировать выбор гидродинамической скорости $u^{\mu}(x)$, далее будем использовать следующее удобное ее определение: $u^{\mu} := N^{\mu}/\sqrt{N^{\nu}N_{\nu}}$, данное Эккартом (Eckart, 1940).

Оператор ковариантного дифференцирования ∂^{μ} может быть разложен по отношению к гидродинамической 4-скорости $u^{\mu}(x)$ на временииподобную и пространственноподобную части в соответствии с соотношением

$$\partial^{\mu} = u^{\mu}\,\mathrm{D} + \nabla^{\mu}, \qquad (14.6)$$

где символ $\mathrm{D} := u^{\nu}\partial_{\nu}$ означает конвекционную производную по времени с$(\mathrm{D}_{LR} = \partial/\partial t)$, а символ $\nabla^{\mu} := \Delta^{\mu\nu}\partial_{\nu}$ есть оператор-градиент, который в ло- кальной системе координат является чисто пространственным, $u^{\mu}\nabla_{\mu} = 0$ (или с$\nabla^{0}_{LR} = 0$, $\nabla^{i}_{LR} = -\nabla_{LRi} = -\partial/\partial\mathbf{x}$).

Основные макроскопические параметры неэкстенсивной релятивистской жидкости. С помощью основных полевых величин $N^{\mu}_{q}(x)$, $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q}(x)$ и $S^{\mu}_{q}(x)$ и гидродинамической скорости $u^{\mu}(x)$ можно определить следующие макроскопические параметры системы из одинаковых релятивистских частиц: плотность частиц $n_q(x)$, плотность энергии $\varepsilon_q(x)$, локальное гидростатическое давление $P_q(x)$, тепловой поток $J^{\mu}_{q}(x)$, тензор давления $P^{\mu\nu}_{q}(x)$ и плотность энтропииис s_q. Так,

(i) плотность частиц $n_q(x)$ задается ковариантным выражением

$$n_q(x) := N^{\mu}_{q}u_{\mu}; \qquad (14.7)$$

(ii) плотность энергии $\varepsilon_q(x)$ определяется выражением

$$\varepsilon_q(x) := e_q n_q := u_{\mu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q}u_{\nu}, \qquad (14.8)$$

где e_q – средняя энергия на одну частицу; $\tilde{h}_q(x) := \varepsilon_q + P_q = h_q n_q$ – плотность энтальпии, $P_q(x)$ – локальное статическое давление;

(iii) поток тепла $J_q^{\mu}(x)$, определяемый как разность потока энергии $W_q^{\mu}(x) := u_{\nu}\mathcal{T}^{\nu\sigma}\Delta_{\sigma}^{\mu}$ и потока энтальпии, переносимых частицами, задается выражением

$$J_q^{\mu}(x) := (u_{\nu}\mathcal{T}^{\nu\sigma} - h_q N^{\sigma})\Delta_{\sigma}^{\mu}, \quad (\mu = 0,1,2,3), \tag{14.9}$$

где $h_q = \tilde{h}_q / n_q$ – энтальпия, приходящаяся на одну частицу; в ковариантной формулировке имеет место условие ортогональности $J_q^{\mu} u_{\mu} = 0$ для потока тепла;

(iv) тензор давления $P_q^{\mu\nu}(x)$ определяется формулой

$$P_q^{\mu\nu}(x) := \Delta_{\sigma}^{\mu}\, \mathcal{T}_q^{\sigma\tau}\, \Delta_{\tau}^{\nu}, \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3), \tag{14.10}$$

из которой следует, что этот тензор симметричен, поскольку тензор энергии-импульса симметричен; для дальнейших целей тензор давления удобно разбить на «обратимую» и «необратимую» части: $P_q^{\mu\nu} = -P_q\Delta^{\mu\nu} + \Pi_q^{\mu\nu}$, где тензор $\Pi^{\mu\nu}(x)$ называется тензором вязкого давления;

(v) плотность энтропии $\tilde{s}_q(x)$ определяется как скаляр

$$\tilde{s}_q = s_q n_q := S_q^{\mu} u_{\mu}, \tag{14.11}$$

где s_q – энтропия на одну частицу.

С учетом определений плотности энергии (14.8), потока тепла (14.9) и тензора давления можно записать следующие соотношения (de Groot и др.,1980):

$$\varepsilon_q(x) = u_{\mu}\mathcal{T}_q^{\mu\nu}u_{\nu}, \;\; J_q^{\mu}(x) = u_{\nu}\mathcal{T}_q^{\nu\sigma}\Delta_{\sigma}^{\mu}, \;\; \Pi_q^{\mu\nu}(x) - P_q(x)\Delta^{\mu\nu} = \Delta_{\sigma}^{\mu}\mathcal{T}_q^{\sigma\lambda}\Delta_{\lambda}^{\nu}. \tag{14.12}$$

Разложение тензора энергии-импульса. С помощью определения (14.6) для проекционного оператора $\Delta^{\mu\nu}$ можно доказать следующее тождество (см., например, Колесниченко, 2023b)

$$\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x) = \mathcal{T}_{q(0)}^{\mu\nu} + \mathcal{T}_{q(1)}^{\mu\nu}, \tag{14.13}$$

где $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q(0)}(x)$ − обратимая часть: $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q(0)} := \varepsilon_{q0} u^{\mu} u^{\nu} - P_{q0}\Delta^{\mu\nu}$, а $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q(1)}(x)$ − необратимая часть: $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q(1)} := \left[J^{\mu}_{q} u^{\nu} + J^{\nu}_{q} u^{\mu} \right] + \Pi^{\mu\nu}_{q}$.

Разложение (14.13) играет важную роль при выводе макроскопических законов сохранения.

14.2. Обобщенное релятивистское кинетическое уравнение

Обобщенное кинетическое уравнение, описывающее поведение скалярной функции распределения $f^{q}(x,p)$ в пространстве-времени, имеет

вид (см. Lavaagno и др., 2009; Osada, Wilk, 2009; Колесниченко, 2023a)[52] :

$$p^{\mu}\partial_{\mu} f^{q}(x,p) \equiv p^{\mu}\left[u_{\mu}\mathrm{D} + \nabla_{\mu} \right] f^{q}(x,p) = C_{q}\left[f, f_{1} \right], \quad (\alpha = 0,1,2,3), \qquad (14.14)$$

где

$$C_{q}\left[f, f_{1} \right] \equiv \frac{1}{2}\int R_{q}[f, f_{1}]\, W_{p,p_{1}\leftrightarrow p',p_{1}'}\, \mathrm{d}P_{1}\, \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_{1}{}'. \qquad (14.15)$$

− интеграл столкновений (*collision term*).

При выводе этого уравнения в неэкстенсивной релятивистской кинетической теории, наряду с требованиями ковариантности были сделаны те же предположения, что и в чисто релятивистском подходе, а именно:

i) учитывались только двухчастичные столкновения;

ii) использована величина скорости перехода $W_{p,p_{1}\to p',p_{1}'}$, являющаяся мерой вероятности процессов столкновения;

iii) использовано предположение, что функция распределения медленно меняется в пространстве-времени, т.е. ее изменения на характерной длине взаимодействия и в течение характерного времени взаимодействия частиц пренебрежимо малы;

---

[52]) Для простоты изложения внешняя сила в кинетическом уравнении (14.14) не учитывалась.

iv) наконец, самое главное, использовано q-расширение гипотезы молекулярного хаоса, позволяющее учитывать влияние статистических корреляций на вид столкновительного члена.

Скорость перехода $W_{p,p_1\to p',p_1'}$, зависящая только от 4-импульсов двух частиц до и после столкновения, представляет собой лоренцев скаляр. Очевидно, что оба аргумента до и после стрелки в этом обозначении могут располагаться в произвольном порядке. В соответствии с принятым условием медленного изменения функции распределения на расстояниях и временах порядка характеристических длин и времен силового взаимодействия предполагается, что разностью пространственно-временных координат $x=(t,\mathbf{x})$ сталкивающихся частиц до и после столкновения можно пренебречь. Величина $W_{p,p_1\to p',p_1'}$ является функцией десяти скалярных инвариантов, которые можно построить из 4-импульсов $p^{\mu},p_1^{\mu},p'^{\mu},p_1'^{\mu}$. Кроме этого, поскольку должен выполняться закон сохранения энергии-импульса, то справедливо равенство $p^{\mu}+p_1^{\mu}=p'^{\mu}+p_1'^{\mu}$. Отсюда следует, что вероятность перехода симметрична для обращения во времени процессов столкновения, т.е. замена $p,p_1\leftrightarrow p',p_1'$ оставляет это выражение неизменным. Таким образом, имеет место принцип детального равновесия

$$W_{p,p_1\to p',p_1'}=W_{p',p_1'\to p,p_1}=W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}. \qquad (14.16)$$

Фигурирующая в интеграле столкновений (14.15) величина $R_q[f'f_1']$, описывающая в неэкстенсивной релятивистской кинетике среднее число столкновений коррелирующих между собой частиц, записывается здесь в следующей форме (Lima и др., 2001; Biro, Kaniadakis, 2006; Lavagno и др., 2009):

$$R_q[f,f_1]=\exp_q\left[\ln_q f'+\ln_q f_1'\right]-\exp_q\left[\ln_q f+\ln_q f_1\right]. \qquad (14.17)$$

Заметим, что когда $q\to 1$, соотношение (14.17) соответствует стандартной гипотезе Больцмана о молекулярном хаосе: $\lim_{q\to 1}R_q=R_1=\left[f'f_1'-ff_1\right]$. Таким образом эта *анзац-функция* [53] (14.17)

---

[53] Напомним, что анзац-функция представляет собой не что иное, как основанное на эвристических соображениях существенное предположе-

учитывает влияние статистических корреляций на столкновительный член в неэкстенсивном случае, являясь таким образом *q*-расширением гипотезы молекулярного хаоса. При этом параметр неэкстенсивности *q* лежит в интервале [0,2].

Определим теперь следующую корреляционную (положительную и симметричную по аргументам) функцию

$$H_q\left[f,f_1\right]:=\exp_q\left[\ln_q f+\ln_q f_1\right]\geq 0, \tag{14.18}$$

связанную с двумя частицами, находящимися в одном пространственно-временном положении X, но с различными 4-векторами энергии-импульса p^μ и p_1^μ соответственно. Эта формула, приводящая к справедливости H-теоремы для коррелирующих статистически между собой частиц, является постулируемой. Для $q=1$ она возвращает классический интеграл столкновений, где число бинарных столкновений вокруг пространственно-временных координат X пропорционально $H_1\left[f,f_1\right]=ff_1$. Как уже было сказано выше, могут быть приняты и другие постулаты. Однако в данной работе мы не будем обсуждать эту проблему.

С учетом функции (14.18) неэкстенсивное релятивистское уравнение переноса (14.14) может быть записано в виде

$$p^\mu u_\mu \mathrm{D} f^q+p^\mu \nabla_\mu f^q=C_q\left[f,f_1\right]\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\int\left\{H_q\left[f',f_1'\right]-H_q\left[f,f_1\right]\right\}W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P'\mathrm{d}P_1{}'. \tag{14.19}$$

14.3. Макроскопические законы сохранения. *H*–теорема

Некоторые свойства интеграла столкновений. Можно показать, что имеет место *лемма*, согласно которой (вследствие того, что при столкновениях частиц должен выполняться микроскопический закон сохранения энергии-импульса $p'^\mu+p_1'^\mu=p^\mu+p_1^\mu$) интеграл столкновений (14.15) обладает следующим свойством:

$$\mathcal{F}_\psi:=\int\psi(x,p)C_q\left[f,f_1\right]\mathrm{d}P\equiv 0, \tag{14.20}$$

ние, которое может подтвердиться лишь после получения всех следствий из сконструированного уравнения переноса.

где $\psi(x,p^{\mu})$ – сумматорный инвариант (линейная комбинация некого скаляра $\alpha(x)$и 4-вектора p^{μ}):

$$\psi(x,p^{\mu}) := \alpha(x) + \beta_{\mu}(x) p^{\mu}. \qquad (14.21)$$

Пространственно-временные функции $\alpha(x)$ и $\beta_{\mu}(x)$ произвольны, с одним лишь ограничением: функции $\alpha(x)$ должны аддитивно сохраняться при столкновениях. Любая аддитивная функция импульсов является линейной комбинацией сумматорных инвариантов (14.21).

Для доказательства леммы (14.20) подставим явное выражение (14.15) в (14.20):

$$\mathcal{F}_{\psi} = \frac{1}{2}\int \psi_p \left\{H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1]\right\} W_{p,p_1\to p',p_1'}\, \mathrm{d}P \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1'. \qquad (14.23)$$

Этот интеграл очевидно равен интегралу

$$\mathcal{F}_{\psi} = \frac{1}{2}\int \psi_{p'} \left\{H_q[f,f_1] - H_q[f',f_1']\right\} W_{p',p_1'\to p,p_1}\, \mathrm{d}P \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1'. \qquad (14.24)$$

Выполняя почленное сложение этих двух интегралов), получим

$$\mathcal{F}_{\psi} = \frac{1}{2}\int [\psi_p - \psi_{p'}] \left\{H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1]\right\} W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'} \mathrm{d}P \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1'. \qquad (14.25)$$

Интеграл (14.23) симметричен относительно p и p_1. Поэтому

$$\mathcal{F}_{\psi} = \frac{1}{2}\int [\psi_{p_1} - \psi_{p_1'}] \left\{H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1]\right\} W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\, \mathrm{d}P \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1'. \qquad (14.26)$$

Складывая (14.25) и (14.26), получим

$$\mathcal{F}_{\psi} = \frac{1}{4}\int [\psi_p + \psi_{p_1} - \psi_{p'} - \psi_{p_1'}] \times$$
$$\times \left\{H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1]\right\} W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\, \mathrm{d}P \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1' = 0. \qquad (14.27)$$

Здесь учтено, что в силу определения (14.21) функции $\psi(x,p^{\mu})$, выражение $\psi_p + \psi_{p_1} - \psi_{p'} - \psi_{p_1'}$ обращается в нуль, если учесть ограничение на функции $\alpha(x)$ и сохранение энергии-импульса в бинарном столкновении: $p'^{\mu}+p_1'^{\mu}=p^{\mu}+p_1^{\mu}$. Этим завершено доказательство леммы (14.20).

Общий вид уравнений движения неэкстенсивной релятивистской жидкости. Уравнение переноса (14.19) позволяет вывести общий вид справедливых на макроскопическом уровне законов сохранения числа частиц и сохранения энергии и импульса.

Используя лемму (14.20), положим функцию $\beta_{\mu}(x)$ равной нулю, а все функции $\alpha(x)$ равными одной произвольной функции α. В результате получим выражение

$$\int C_q[f,f_1]\mathrm{d}P=0,$$

которое с учетом уравнения переноса (14.19) может быть записано в виде

$$\int C_q[f,f_1]\mathrm{d}P=\int p^{\mu}\partial_{\mu}f^{q}(x,p)\mathrm{d}P=\partial_{\mu}\int p^{\mu}f^{q}(x,p)\mathrm{d}P=0. \qquad (14.28)$$

Выражение (214.8) с помощью осредненного 4-вектора потока частиц $N_q^{\mu}(x)$, определенного формулой (14.2), может быть переписано в виде макроскопического закона сохранения числа частиц

$$\partial_{\mu}N_q^{\mu}(x)=\partial_{\mu}\int p^{\mu}f^{q}(x,p)\mathrm{d}P=\int C_q[f,f_1]\mathrm{d}P=0,\quad (\mu=0,1,2,3). \qquad (14.29)$$

Если положить теперь функции $\alpha(x)$ в (14.21) равными нулю, то получим $\psi_p=\beta_{\mu}(x)p^{\mu}$; тогда из леммы (14.20), с учетом уравнения переноса (14.19), найдем

$$\int p^{\mu}C_q[f,f_1]\mathrm{d}P=\int p^{\mu}p^{\nu}\partial_{\nu}f^{q}(x,p)\mathrm{d}P=0. \qquad (14.30)$$

Отсюда следует макроскопический закон сохранения 4-тензора энергии-импульса

$$\partial_{\nu}\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x)=\int p^{\mu}C_q[f,f_1]\mathrm{d}P=0,\quad (\mu=0,1,2,3), \qquad (14.31)$$

где тензор $\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x)$ определяется формулой (14.2). В случае $\mu=0$ уравнение (14.31) есть закон сохранения энергии, а для $\mu=1,2,3$ – это закон сохранения импульса.

Динамические законы для плотности, импульса и энергии. Неэкстенсивные релятивистские гидродинамические уравнения следуют непосредственно из выведенных выше законов сохранения числа частиц и энергии-импульса.

Используя закон сохранения числа частиц (14.29) и оператор конвекционной производной по времени $\mathrm{D}=u^{\nu}\partial_{\nu}$, получим следующее уравнение непрерывности для плотности $n_q(x)$ (de Groot и др. 1980)

$$\mathrm{D}n_q=-n_q\nabla_{\mu}u^{\mu}. \tag{14.32}$$

Уравнение движения получается из закона сохранения энергии-импульса (14.31) путем свертывания его с проекционным оператором $\Delta^{\mu\nu}$. Учитывая разложение тензора энергии-импульса (14.13), получим (de Groot и др. 1980)

$$\begin{aligned}\tilde{h}_q\mathrm{D}u^{\mu}=&\nabla^{\mu}P_q-\Delta^{\mu}_{\nu}\nabla_{\sigma}\Pi_q^{\nu\sigma}+\tilde{h}_q^{-1}\Pi_q^{\mu\nu}\nabla_{\nu}P_q-\\&-\left(\Delta^{\mu}_{\nu}\mathrm{D}J_q^{\nu}+J_q^{\mu}\nabla_{\nu}u^{\nu}+J_q^{\nu}\nabla_{\nu}u^{\mu}\right),\end{aligned} \tag{14.33}$$

в котором, как и прежде, $\tilde{h}_q=h_qn_q=(\varepsilon_q+P_q)$ – плотность энтальпии. Из этого уравнения видно, что ускорение среды обусловлено градиентами давления и, кроме того, рядом членов чисто релятивистского происхождения. Если пренебречь диссипативными потоками $\Pi_q^{\mu\nu}$ и J_q^{α}, то уравнение движения сведется к уравнению нулевого порядка

$$\mathrm{D}u^{\mu}=\tilde{h}_q^{-1}\nabla^{\mu}P_q, \tag{14.34}$$

которое справедливо для идеальной релятивистской жидкости. Это соотношение между ускорением и градиентом давления играет определенную роль при выводе подходящих форм гидродинамических уравнений в нашем случае, когда рассматриваются только уравнения, линейные по величинам, связанным с явлениями переноса.

Уравнения баланса для энергии $e_q(x)$ на одну частицу системы выводятся из закона сохранения энергии-импульса (14.31) при учете соотношений (14.9), (14.10), а также разложения (14.13) для 4-тензора $\mathcal{T}_q^{\alpha\nu}$; в результате будем иметь (de Groot и др. 1980)

$$n_q\mathrm{D}e_q=-P_q\nabla_{\mu}u^{\mu}+\Pi^{\mu\nu}\partial_{\nu}u_{\mu}-\nabla_{\mu}J_q^{\mu}+2J_q^{\mu}\mathrm{D}u_{\mu}. \tag{14.35}$$

Если пренебречь в уравнениях (14.33) и (14.35) диссипативными членами, то получим релятивистские уравнения Эйлера

$$\mathrm{D}n_q = -n_q \nabla_\mu u^\mu, \quad \mathrm{D}u^\mu = (h_q n_q)^{-1} \nabla^\mu P_q, \qquad n_q \,\mathrm{D}e_q = -P_q \nabla_\mu u^\mu. \quad (14.36)$$

***H*-теорема**. В первом разделе формулой (14.4) был определен макроскопический 4-вектор потока энтропии

$$S_q^\mu(x) = -k_B \int p^\mu \Big[f(x,t)^q \ln_q f(x,t) - f(x,t) \Big] \mathrm{d}P,$$

а формулой (14.11) введена плотность энтропии $\tilde{s}_q(x) := s_q n_q := S_q^\mu u_\mu$, где s_q – энтропия на одну частицу. Получим здесь формальное выражение для баланса энтропии, используя тождество $n_q u^\mu \partial_\mu s_q = \partial_\mu (s_q N_q^\mu)$, которое является следствием закона сохранения (14.29) числа частиц и определения оператора дифференцирования по пространственно-временным координатам, ∂_μ. Добавляя и вычитая одну и ту же величину $\partial_\mu S_q^\mu$, перепишем это тождество в виде $n_q u^\mu \partial_\mu s_q = -\partial_\mu (S_q^\mu - s_q N_q^\mu) + \partial_\mu S_q^\mu$, которое может быть истолковано, как уравнение баланса для энтропии, приходящейся на одну частицу. Действительно, его можно переписать в виде

$$n_q u^\mu \partial_\mu s_q = -\partial_\mu J^{\,\mu}_{q,s} + \sigma_q, \quad (14.37)$$

где

$$J^\mu_{q,s}(x) := S_q^\mu(x) - s_q(x) N_q^\mu(x)$$

– поток энтропии (по определению), а величина $0 \le \sigma_q := \partial_\mu S_q^\mu$, являясь постулируемым законом возрастания q-энтропии, описывает здесь интенсивность ее источника. Локальное математическое выражение (14.37) второго закона релятивистской термодинамики не содержит никаких физических положений, кроме закона сохранения числа частиц, и потому носит здесь чисто формальный характер.

Из определения 4-вектора потока энтропии (14.4) и кинетического уравнения (14.19) следует, что для неэкстенсивной системы прирост энтропии $\sigma_q := \partial_\mu S_q^\mu$ определяется формулой

$$\sigma_q(x) := \partial_\mu S_q^\mu = -k_B \int p^\mu \partial_\mu \Big\{ f^q(x,p) \ln_q [f(x,p)] - f(x,p) \Big\} \mathrm{d}P =$$

$$=-k_B\int\left[\ln_q f(x,p)\right]p^{\mu}\partial_{\mu}f^{q}(x,p)\mathrm{d}P=-k_B\int\left[\ln_q f(x,p)\right]C_q\left[f_p,f_{p1}\right]\mathrm{d}P. \tag{14.38}$$

При написании этого выражения использовано свойство дифференцирования деформированного логарифма $\partial\ln_q z/\partial z=1/z^q$ (см., например, Колесниченко, 2019). Выражение (14.38) с помощью обозначения (14.20) может быть записано в виде

$$\sigma_q(x)=-k_B\mathcal{F}\left[\ln_q f(x,p)\right]. \tag{14.39}$$

Тогда с помощью (14.27) прирост энтропии можно представить, как

$$\sigma_q(x)=\frac{k_B}{8}\int\Big\{\left[\ln_q f_{p'}+\ln_q f_{p_1'}-\ln_q f_p-\ln_q f_{p_1}\right]\times$$

$$\times\left(H_q[f',f_1']-H_q[f,f_1]\right)\Big\}W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\,\mathrm{d}P\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P'\mathrm{d}P_1{}'\geq 0.$$

Этот результат можно сопоставить с экстенсивным релятивистским выражением, приведенным, например, в работе (de Groot и др., 1980). Как известно, необратимый характер термодинамики, возникающей при молекулярных столкновениях, восстанавливается, если вышеуказанная величина положительно определена, т.е. $\sigma_q\geq 0$. В данном случае это условие справедливо в силу наличия двух причин:

(i) во-первых, положительной определенности величины

$$\left(\ln_q f_{p'}+\ln_q f_{p_1'}-\ln_q f_p-\ln_q f_{p_1}\right)\times\left(H_q[f',f_1']-H_q[f,f_1]\right)$$

для любой пары распределений $(f_{p'},f_{p_1'})$ и (f_p,f_{p_1}); при этом знак источника четырех энтропий полностью определяется знаком неэкстенсивного параметра сq, который, как было показано в работе (Silva, Lima, 2005), лежит в интервале с$q\in[0,2]$);

(ii) во-вторых, удачного определения (14.4) для 4-вектора потока q-энтропии.

Неэкстенсивное q-равновесие. Если предположить, что функция распределения $f(x,p)$ с течением времени стремится к определенному пределу, то состояние неэкстенсивной q-системы будет переходить вместо строгого (локального) теплового равновесия (что является прерогативой идеальной газовой среды) в неэкстенсивное стационарное состояние. Это состояние включает некоторые микроскопические динамические взаимодействия и флуктуации, которые обобщенно характеризуются параметром деформации q (Abe, Rajagopal, 2003; Osada, Wilk, 2008). Следует заметить, что в установившемся состоянии энтропия q-системы достигает своего максимального значения. Необходимым условием подобного состояния является обращение в нуль всюду в пространстве-времени величины производства энтропии (14.39)

$$\sigma_q(x) = -k_B \mathcal{F}\left[\ln_q f_p\right] = 0 .$$

Получим теперь в качестве следствия неэкстенсивной релятивистской H-теоремы (14.38) условие неэкстенсивного стационарного состояния, которое является обобщенной версией релятивистского распределения Юттнера (см. de Groot и др., 1980). Как и в классическом случае, равенство является необходимым и достаточным условием существования как локального, так и глобального равновесия. Поскольку интеграл (14.39) должен быть положительно определенным, то это возможно лишь тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\ln_q f_{p'} + \ln_q f_{p_1'} - \ln_q f_p - \ln_q f_{p_1} = 0$, где импульсы связаны законом сохранения , справедливым для упругих парных столкновений.

Таким образом, величина $\psi = \ln_q f_p$ является сумматорным инвариантом столкновения молекул и потому должна иметь вид $\ln_q[f_{p0}] = \alpha_0 + \beta_0^\mu p_\mu$, где α_0 и β_0^μ – инварианты столкновений, приведенные ранее. Функцию распределения f_p, для которой выполняется это условие, далее будем обозначать символом f_{p0}. Таким образом, равновесная функция распределения f_{p0} определяется выражением

$$f_{(0)}(p) = f_{p0} = \left\{1 + (1-q)\left[\alpha_0 + \beta_0^\mu p_\mu\right]\right\}^{1/(1-q)} = \exp_q\left[\alpha_0 + \beta_0^\mu p_\mu\right]. \quad (14.40)$$

Далее параметр β_0^μ будем отождествлять с выражением $\beta_0^\mu \equiv -\beta_0 u_0^\mu$ (где u_0^μ – 4-скорость системы как целого; $\beta_0 = 1/k_B T$, T – температурное поле), а величину α_0 положим равной $\alpha_0 \equiv \mu_q \beta_0 = \mu_q / k_B T$ (где μ_q – химический потенциал). Здесь все термодинамические параметры являются глобальными, т.е. не зависят от X . Тогда выражение (14.40) может быть записано в виде обобщенной функции распределения (по импульсам) Юттнера (Jüttner, 1911) для однородной равновесной релятивистской среды

$$f_{p0}=\left\{1+(1-q)(\alpha_0-\beta_0 p_\mu u_0^\mu)\right\}^{1/(1-q)}=\exp_q\left[\frac{\mu_q-p_\mu u_0^\mu}{k_B T}\right].$$

Будем далее предполагать, что для неоднородных систем, находящихся в термодинамическом равновесии, функция распределения по пространственно-временным координатам и импульсам $f_{(0)}(x,p)$ имеет такую же функциональную форму (14.40), как и для случая глобального равновесия сложной q-системы, но с параметрами $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$ и $u^\mu(x)$, зависящими от x. Тогда с помощью локальной функции равновесия неэкстенсивной релятивистской q-системы

$$f_0(\alpha,\beta)=\left\{1+(1-q)\left[\alpha_0(x)-\beta_0(x)p_\mu u^\mu(x)\right]\right\}^{1/(1-q)} \tag{14.41}$$

можно в явном виде определить все равновесные термодинамические переменные.

14.4. Равновесное состояние

Напомним, что индексы поднимаются и опускаются с помощью пространственно-временной метрики $g^{\mu\nu}$. Заметим также, что при решении релятивистского уравнения переноса удобно использовать следующие тензоры:

$$\begin{cases} a^{\overline{\mu}}:=\Delta^{\mu\nu}a_\nu, \quad b^{\overline{\mu}\overline{\nu}}:=\frac{1}{2}(\Delta^\mu_\sigma\Delta^\nu_\tau+\Delta^\nu_\sigma\Delta^\mu_\tau)b^{\sigma\tau}, \\ \overset{\circ}{b}{}^{\overline{\mu}\overline{\nu}}:=b^{\overline{\mu}\overline{\nu}}-\frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}b^{\sigma\tau}=\left[\frac{1}{2}(\Delta^\mu_\sigma\Delta^\nu_\tau+\Delta^\nu_\sigma\Delta^\mu_\tau)-\frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right]b^{\sigma\tau}, \\ A^{\langle\mu\nu\rangle}=\left[\frac{1}{2}(\Delta^\mu_\sigma\Delta^\nu_\tau+\Delta^\mu_\tau\Delta^\nu_\sigma)-\frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right]A^{\sigma\tau}, \\ \overset{\circ}{\overline{p^\mu p^\nu}}:=\left(\Delta^\mu_\sigma\Delta^\nu_\tau-\frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right)p^\sigma p^\tau. \end{cases} \tag{14.42}$$

Кроме этого заметим, что любой 4-вектор A^μ, в частности, 4- импульс частицы p^μ может быть разложен при использовании произвольной гидродинамической 4-скорости потока u^{μ} на две части следующим образом:

$$p^{\mu} = E_p u^{\mu} + p^{\bar{\mu}},$$

Здесь $E_p := p^{\nu} u_{\nu}$ – энергия частицы в локальной системе координат (LR), а слагаемое $p^{\bar{\mu}} := \Delta^{\mu\nu} p_{\nu}$ является импульсом в сопутствующей системой координат (Anderson, 1974).

Сначала определим равновесную числовую плотность n_{q0}. С учетом формул (14.2), (14.7) и (14.28) находим

$$n_{q0}(x) := N^{\mu}_{q0} u_{\mu} = \int E_p \, f_0^q(\alpha,\beta) \mathrm{d}P = \mathcal{J}_{10}. \tag{14.43}$$

Подобным же образом определим q-равновесную плотность энергии ε_{q0} и гидростатическое давление P_{q0}. Используя разложение (14.13) для равновесного тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}_{q0} = \varepsilon_q u^{\mu} u^{\nu} - P_q \Delta^{\mu\nu}$, получим следующие выражения для величин ε_{q0} и P_{q0}:

$$\varepsilon_{q0}(x) = \int E_p^2 \, f_0^q(\alpha,\beta) \mathrm{d}P = \mathcal{J}_{20}, \tag{14.44}$$

$$P_{q0}(x) = -\frac{1}{3} T^{\mu\nu}_{q0} \Delta_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \int \mathrm{d}P (\Delta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu}) \, f_0^q(\alpha,\beta) = -\mathcal{J}_{21}. \tag{14.45}$$

При написании соотношений (14.43)-(14.45) были использованы следующие моментные интегралы (см. Muronga, 2007a,b; Biro, Molnar, 2012):

$$\mathcal{I}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta) = \frac{2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{k}!}{(2\mathrm{k}+1)!} \int_0^{\infty} \mathrm{d}P (E_p)^{\mathrm{n}-2\mathrm{k}} (\Delta^{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu})^{\mathrm{k}} f_0(\alpha,\beta), \tag{14.46}$$

$$\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta) = \frac{2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{k}!}{(2\mathrm{k}+1)!} \int_0^{\infty} \mathrm{d}P (E_p)^{\mathrm{n}-2\mathrm{k}} (\Delta^{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu})^{\mathrm{k}} f_0^q(\alpha,\beta), \tag{14.47}$$

$$\mathcal{K}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta) = q \frac{2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{k}!}{(2\mathrm{k}+1)!} \int_0^{\infty} \mathrm{d}P (E_p)^{\mathrm{n}-2\mathrm{k}} (\Delta^{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu})^{\mathrm{k}} f_0^{2q-1}(\alpha,\beta), \tag{14.48}$$

где $\mathrm{n},\mathrm{k} \geq 0$.

Используя производные $(\partial f_{0p}/\partial\alpha_0)_{\beta_0} = f_{p0}^q$ и $(\partial f_{p0}^q / \partial\alpha_0)_{\beta_0} = q f_{p0}^{2q-1}$, получим

$$\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta) = \left(\partial\mathcal{I}_{\mathrm{nk}} / \partial\alpha_0\right)_{\beta_0}, \quad \mathcal{K}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta) = \left(\mathcal{J}_{\mathrm{nk}} / \partial\alpha_0\right)_{\beta_0}. \tag{14.49}$$

Кроме этого, конвекционные производные по времени D от функций $\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}$ и $\mathcal{I}_{\mathrm{nk}}$ могут быть выражены в терминах $\mathrm{D}\alpha_0$ и $\mathrm{D}\beta_0$:

$$\mathrm{D}\mathcal{J}_{\mathrm{nk}} = \mathcal{K}_{\mathrm{nk}}\,\mathrm{D}\alpha_0 - \mathcal{K}_{(\mathrm{n+1,\,k})}\,\mathrm{D}\beta_0, \tag{14.50}$$

$$\mathrm{D}\mathcal{I}_{\mathrm{nk}} = \mathcal{J}_{\mathrm{nk}}\,\mathrm{D}\alpha_0 - \mathcal{J}_{(\mathrm{n+1,k})}\,\mathrm{D}\beta_0. \tag{14.51}$$

Можно также показать (применяя интегрирование по частям), что в глобальной системе покоя ($U_{\mathrm{LR}}^{\mu} = 1{,}0{,}0{,}0$) имеют место следующие рекурсивные соотношения (Muronga, 2007b; Biro, Molnar, 2012):

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{(\mathrm{n+2,k})} = m^2\mathcal{I}_{(\mathrm{n,k})} - (2\mathrm{k}+3)\mathcal{I}_{(\mathrm{n+2,k+1})}, \\ \mathcal{J}_{(\mathrm{n,k})} = -\beta_0^{-1}\mathcal{I}_{(\mathrm{n-1,k-1})} + \beta_0^{-1}(\mathrm{n}-2\mathrm{k})\mathcal{I}_{(\mathrm{n-1,k})}, \\ \mathcal{J}_{(\mathrm{n+2,k})} = m^2\mathcal{J}_{(\mathrm{n,k})} - (2\mathrm{k}+3)\beta_0^{-1}\mathcal{J}_{(\mathrm{n+2,k+2})}, \\ \mathcal{K}_{(\mathrm{n,k})} = -\beta_0^{-1}\mathcal{J}_{(\mathrm{n-1,k-1})} + \beta_0^{-1}(\mathrm{n}-2\mathrm{k})\mathcal{J}_{(\mathrm{n-1,k})}, \\ \mathcal{K}_{(\mathrm{n+2,k})} = m^2\mathcal{K}_{(\mathrm{n,k})} - (2\mathrm{k}+3)\mathcal{K}_{(\mathrm{n+2,k+1})}. \end{cases} \tag{14.52}$$

Для завершения описания равновесного состояния неэкстенсивной системы найдем равновесную плотность энтропии $s_{q0}(x)$, для чего подставим в формулу (4) выражение (40); в результате получим

$$S_{q0}^{\mu}(x) = -k_B\int p^{\mu}\left\{f_0^q(x,p)\ln_q\left[f_0(x,p)\right] - f_0(x,p)\right\}\mathrm{d}P =$$

$$= k_B\,\beta_0(x)\int p^{\mu}\left\{f_0^q(x,p)\left[\mu_q(x) - p_{\nu}u^{\nu}(x)\right] - f_0(x,p)\right\}\mathrm{d}P. \tag{14.53}$$

Свертывание этого выражения со скоростью $u^{\mu}(x)$ дает для плотности энтропии, определенной формулой (14.11) следующее равенство:

$$\tilde{s}_{q0}(x) = k_B\int \mathrm{d}P\,E_p\left\{\beta_0(x)\left[\mu_q(x) - u^{\mu}(x)\,p_{\mu}\right]f_0^q(x,p) - f_0(x,p)\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}_{20}}{T} - \frac{\mu_q}{T}\mathcal{J}_{10} + k_B \mathcal{I}_{10}, \qquad (14.54)$$

которое, при учете вытекающего из формул (14.45) и (14.50) соотношения

$$\mathcal{I}_{10} = -\beta_0 \mathcal{J}_{21} = \beta_0 P_{q0}$$

и формулы (14.44), может быть записано в форме следующего фундаментального термодинамического равенства[54)]:

$$T(x)\,\tilde{s}_{q0}(x) = \varepsilon_{q0}(x) + P_{q0}(x) - \mu_q(x)\,n_{q0}(x).$$

Если взять теперь ковариантную производную от этого равенства, то получим уравнение

$$T\,\partial_\mu s_{q0} = \partial_\mu e_{q0} + n_{q0}^{-1}\,\partial_\mu P_{q0} + P_{q0}\,\partial_\mu n_{q0}^{-1} - s_{q0}\,\partial_\mu T - \partial_\mu \mu_q,$$

которое приводит к двум термодинамическим уравнениям:

(i) к релятивистскому уравнению Гиббса (для энтропии на одну частицу)

$$T\,\partial_\mu s_{q0} = \partial_\mu e_{q0} + P_{q0}\,\partial_\mu (1/n_{q0}), \qquad (14.55)$$

или в виде, записанном для плотности энтропии $\tilde{s}_{q0} = s_{q0} n_{q0}$,

$$\partial_\mu \tilde{s}_{q0} = \beta_0 \partial_\mu \varepsilon_{q0} + \frac{\beta_0}{n_{q0}}\left(\frac{1}{\beta_0}\tilde{s}_{q0} - \varepsilon_{q0} - P_{q0}\right)\partial_\mu n_{q0} = \beta_0 \partial_\mu \varepsilon_{q0} - \alpha_0\,\partial_\mu n_{q0};$$

(ii) к релятивистскому уравнениям Гиббса-Дюгема:

$$n_{q0}^{-1}\,\partial_\mu P_{q0} = \partial_\mu \mu_q + s_{q0}\,\partial_\mu T, \qquad (14.56)$$

или в другом виде

$$\partial_\mu P_{q0} = \frac{n_{q0}}{\beta_0}\partial_\mu \alpha_0 - \frac{\varepsilon_{q0} + P_{q0}}{\beta_0}\partial_\mu \beta_0.$$

[54)] Заметим, что $P_{q0} \neq k_B T_q n_{q0}$, поскольку $n_{q0} = \mathcal{J}_{10} \neq \mathcal{I}_{10}$. Однако, если число частиц сохраняется, то интегралы от $\mathcal{I}_{10}$ и $\mathcal{J}_{10}$ должны приводить к одному и тому же числу частиц на единицу объема, хотя нормировки функций распределения различны.

Соотношение Гиббса (14.55) с помощью оператора D может быть представлено также в виде

$$T(x)\mathrm{D}s_{q0}(x) = \mathrm{D}e_{q0}(x) + P_{q0}(x)\mathrm{D}[n_{q0}(x)]^{-1}. \qquad (14.57)$$

Это соотношение имеет фундаментальное значение для нахождения явного вида интенсивности производства энтропии $\sigma(x)$.

Наконец, используя рекурсивные соотношения (14.52), можно с помощью моментных интегралов (14.46)-(14.48) и после некоторых алгебраических преобразований получить используемые далее соотношения

$$\mathrm{D}\alpha_0 = \left(\mathrm{D}\varepsilon_{q0} + \mathcal{K}_{30}\,\mathrm{D}\beta_0\right)/\mathcal{K}_{20}, \quad \mathrm{D}\beta_0 = -(\mathrm{D}\varepsilon_{q0} - \mathcal{K}_{20}\,\mathrm{D}\alpha_0)/\mathcal{K}_{30}, \qquad (14.58)$$

а также формулы для гидростатического давления P_{q0}

$$P_{q0} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{q0} - m^2\mathcal{J}_{(0,0)}\right), \qquad (14.59)$$

для энтальпии на одну частицу

$$h_{q0} = (\varepsilon_{q0} + P_{q0})/n_{q0} = \mathcal{K}_{31}/\mathcal{K}_{21}, \qquad (14.60)$$

а также для квадрата релятивистской скорости звука $c_{qs}^2 = (\partial P_{q0}/\partial\varepsilon_{q0})$ (при фиксированной релятивистской энтропии на частицу, s_{q0}/n_{q0})

$$c_{qs}^2 = \left(\frac{\partial P_{q0}}{\partial\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{m^2}{\mathcal{D}_{20}}\left(\mathcal{D}_{10} - \frac{\mathcal{K}_{30}\mathcal{K}_{00} - \mathcal{K}_{20}\mathcal{K}_{10}}{h_{q0}}\right)\right]. \qquad (14.61)$$

Здесь $m := \sqrt{p^\mu p_\mu}$ – релятивистская масса частицы,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{nk}} := \mathcal{K}_{(\mathrm{n}-1,\mathrm{k})}\mathcal{K}_{(\mathrm{n}+1,\mathrm{k})} - \mathcal{K}_{\mathrm{nk}}^2. \qquad (14.62)$$

14.5. Отклонение от равновесия, неэкстенсивная релятивистская модель *BGK* и коэффициенты переноса

Отклонение неэкстенсивной системы от равновесия. Если система находится вне q-равновесия, то функция распределения отличается от равновесного распределения, $f_p^q \neq f_{p0}^q$. Это приводит в общем случае к появлению дополнительных членов при определении макроскопических параметров состояния и к возникновению ненулевого источника энтропии $\sigma_q > 0$.

В разд. 14.4. была рассмотрена идеальная неэкстенсивная релятивистская газовая система, в которой сохраняется тепловое равновесие, т.е. отсутствуют любые диссипативные процессы. Для равновесных идеальных жидкостей тензор энергии-импульса определяется следующим общековариантным выражением $\mathcal{T}_{q0}^{\mu\nu} = \varepsilon_{q0} u^\mu u^\nu - P_{q0}\,\Delta^{\mu\nu}$. Для неравновесной среды слабые пространственные и временные градиенты приводят к изменению вектора потока частиц и тензора энергии-импульса на малые добавки ΔN_q^μ и $\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu}$. В результате, все эффекты, связанные с диссипацией, проявляются как малые вклады в 4-вектор N_q^μ и 4-тензор $\mathcal{T}_q^{\mu\nu} = \varepsilon_{q0} u^\mu u^\nu - P_{q0}\,\Delta^{\mu\nu} + \Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu}$. Следовательно, дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти явные выражения для ΔN_q^μ и $\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu}$.

Для удобства выполнения надлежащих операций разобьем тензор вязких напряжений $\Pi_q^{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\Pi_q^{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Pi}{}_q^{\mu\nu} - \Pi_q \Delta^{\mu\nu}. \tag{14.63}$$

Здесь $\overset{\circ}{\Pi}{}_q^{\mu\nu}$ – тензор вязкого давления с нулевым следом для q-системы;

$$\Pi_q = -\tfrac{1}{3}\Pi_q^{\mu\nu}\Delta_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{3}\Pi_q^{\mu\nu} g_{\nu\mu} = -\tfrac{1}{3}\Pi_{q,\mu}^{\mu} \tag{14.64}$$

– объемное вязкое давление, определяемое как взятая со знаком минус одна треть следа тензора вязкого давления.

Предположим теперь, что

$$f_p = f_{0p} + \Delta f_p, \qquad (\Delta f_p << f_{0p}), \tag{14.65}$$

где через Δf_p обозначено малое отклонение от q-равновесия. Это выражение может быть аппроксимировано разложением в ряд функции f_p относительно равновесия, которое в свою очередь определяется сумматорным инвариантом столкновения

$$\psi_{p0} = \ln_q f_{p0} = \left(\alpha_0 - \beta_0 p_\mu u^\mu\right); \tag{14.66}$$

в результате получим

$$f_p(\psi) = f_{0p}(\psi_0) + \frac{\partial f_{0p}(\psi_{p0})}{\partial \psi_{p0}} \Delta\psi_p + \ldots = f_{0p} + (f_{0p})^q \Delta\psi_p + \ldots, \tag{14.67}$$

где символом $\Delta\psi_p := (\psi - \psi_{p0})$ обозначено соответствующее малое отклонение. Сравнивая выражения (14.66) и (14.67) и ограничившись членами линейными по $\Delta\psi_p$, найдем

$$\Delta f_p = (f_{0p})^q \Delta\psi_p. \tag{14.68}$$

Поскольку в неэкстенсивной релятивистской теории все макроскопические величины связаны с функцией распределения $f^q(x,p)$**,** то отклонение $\Delta f_p^q := f_p^q - f_{p0}^q$ от равновесного распределения f_0^q также найдем из ряда

$$f_p^q = \left[f_{0p} + (f_{0p})^q \Delta\psi_p + \ldots\right]^q = (f_{0p})^q + q(f_{0p})^{2q-1} \Delta\psi_p + \ldots;$$

в результате в линейном приближении получим

$$\Delta f_p^q = q(f_{0p})^{2q-1} \Delta\psi_p. \tag{14.69}$$

Для дальнейших целей необходимо также иметь разложение в ряд по малому параметру Δf_{p0} функции $H_q[f, f_1] = \exp_q[\ln_q f + \ln_q f_1]$; в результате будем иметь

$$H_q[f_p, f_{p_1}] = H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}] + \frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]}{\partial f_{p0}} \Delta f_{p0} + \frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]}{\partial f_{p_1 0}} \Delta f_{p_1 0} + \ldots,$$

14.70)

где, в силу свойства дифференцирования деформированного логарифма, справедливы соотношения

$$\frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]}{\partial f_{p_1 0}} = \left(H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]\right)^q (f_{p_1 0})^{-q}, \tag{14.71}$$

$$\frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]}{\partial f_{p0}} = \left(H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]\right)^q (f_{p0})^{-q}. \tag{14.72}$$

Подставляя (14.71) и (14.72) в ряд (14.70), получим

$$H_q[f_p, f_{p_1}] \simeq H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}] + \left(H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]\right)^q (\Delta\psi_p + \Delta\psi_{p_1}). \tag{14.73}$$

Таким образом, интеграл столкновений в уравнении переноса (14.19) аппроксимируется вплоть до первого порядка в отклонениях от q-равновесия, как

$$C_q[f_p] = C_q[f_{p0}] + C_q[\Delta f_p]. \tag{14.74}$$

Поскольку слагаемое $C_q[f_{p0}] \propto \left\{H_q\left[f'_{p0}, f'_{p_1 0}\right] - H_q\left[f_{p0}, f_{p_1 0}\right]\right\}$ равно нулю, то $C_q[f_p] = C_q[\Delta f]$ и, следовательно, уравнение переноса (14.19) в случае малого линейного отклонения неэкстенсивной релятивистской системы от равновесия ($f_{0p} >> \Delta f_p$) принимает следующий вид[55)] :

$$p^\mu \partial_\mu (f_{p0})^q \cong C_q[\Delta f_p]. \tag{14.75}$$

Здесь интеграл столкновений $C_q[\Delta f_p]$ определяется выражением

$$C_q[\Delta f] := \frac{1}{2}\int W_{p,p_1 \leftrightarrow p',p'_1} \left(H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}]\right)^q \times$$
$$\times \left(\Delta\psi_{p'} + \Delta\psi_{p'_1} - \Delta\psi_p - \Delta\psi_{p_1}\right) \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1{}'. \tag{14.76}$$

Определение макроскопических параметров состояния в неравновесном случае. Используя неравновесную функцию распре-

---

[55)] Заметим, что члены более высокого порядка не играют роли в линейной теории.

деления $f^q(x,p)$ для вычисления плотности частиц, энергии и полного давления системы, можно получить следующие выражения:

$$n_q(x)=u_\mu N_q^\mu=\int(u_\mu p^\mu)f_p^q\,\mathrm{d}P=\int E_p f_p^q\,\mathrm{d}P, \tag{14.77}$$

$$\varepsilon_q(x)=u_\mu u_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu}=u_\mu u_\nu\int p^\mu p^\nu f_p^q\,\mathrm{d}P=\int E_p^2 f_p^q\,\mathrm{d}P, \tag{14.78}$$

$$P_q(x)=-\tfrac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}=-\tfrac{1}{3}\int(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)f_p^q\,\mathrm{d}P, \tag{14.79}$$

Вместе с тем, плотность числа частиц n_q и плотность энергии ε_q полностью определяются только равновесной функцией распределения f_p^q:

$$n_q=\int E_p f_p^q\,\mathrm{d}P=\int E_p f_{p0}^q\,\mathrm{d}P=n_{q0}, \tag{14.80}$$

$$\varepsilon_q=\int E_p^2 f_p^q\,\mathrm{d}P=\int E_p^2 f_{p0}^q\,\mathrm{d}P=\varepsilon_{q0}, \qquad (14.81$$

в то время как изотропное давление P_q разделяется на две части: на гидростатическое давление

$$P_{q0}=-\tfrac{1}{3}\int(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)f_{p0}^q\,\mathrm{d}P \tag{14.82}$$

и на объемное вязкое давление

$$\Pi_q=-\tfrac{1}{3}\int(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)\Delta f_{p0}^q\,\mathrm{d}P, \tag{14.83}$$

так что $P_q=P_{q0}+\Pi_q$. Заметим, что соотношения (14.80) и (14.81) удовлетворяются, если на добавки Δf_p^q наложить так называемыми условиями фита

$$\int E_p\,\Delta f_p^q\,\mathrm{d}P=0, \quad \int E_p^2\,\Delta f_{p0}^q\,\mathrm{d}P=0, \tag{14.84}$$

которые обеспечивают то, что на любой стадии процедуры решения уравнения переноса это решение зависит только от параметров $n_{q0}(x)$, $\varepsilon_{q0}(x)$, $u^\mu(x)$ и их градиентов.

Кроме этого ясно, что, поскольку моменты равновесного распределения приводят к исчезновению диссипативных величин то, только отклонения Δf_{p0}^{q} от равновесной функции распределения f_{p0}^{q} могут описывать диссипативные процессы. Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$\Delta N_q^{\mu} = \Delta_{\nu}^{\mu} N_q^{\nu} = \int p^{\bar{\mu}} f_p^q \,\mathrm{d}P \simeq \int p^{\bar{\mu}} \Delta f_p^q \,\mathrm{d}P, \qquad (14.85)$$

$$\Delta N_q^{\mu} = \Delta_{\nu}^{\mu} N_q^{\nu} = \int p^{\bar{\mu}} f_p^q \,\mathrm{d}P \simeq \int p^{\bar{\mu}} \Delta f_p^q \,\mathrm{d}P, \qquad (14.85)$$

$$W_q^{\mu} = \Delta_{\sigma}^{\mu} u_{\nu} \mathcal{T}^{\sigma\nu} = \int p^{\bar{\mu}} E_p f_p^q \,\mathrm{d}P \simeq \int p^{\bar{\mu}} E_p \Delta f_p^q \,\mathrm{d}P, \qquad (14.86)$$

$$\Pi^{\mu\nu} = \Delta_{\alpha}^{\mu} \Delta_{\beta}^{\nu} \mathcal{T}^{\alpha\beta} + \Delta^{\mu\nu} P_q = \int \overset{\circ}{\overline{p^{\mu} p^{\nu}}} f_p^q \,\mathrm{d}P \simeq \int \overset{\circ}{\overline{p^{\mu} p^{\nu}}} \Delta f_p^q \,\mathrm{d}P \qquad (14.87)$$

которые справедливы до первого порядка в отклонениях Δf_p^q неравновесной функции f_p^q от ее равновесного значения f_{p0}^q. Отсюда следует, что малая добавка $\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu}$ к равновесному тензору энергии-импульса $\mathcal{T}_{q0}^{\mu\nu}$ имеет вид

$$\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu} = W_q^{\mu} u^{\nu} + W_q^{\nu} u^{\mu} + \Pi_q^{\mu\nu}. \qquad (14.88)$$

Для полноты исследования отклонения системы от равновесия, вычислим 4-поток энтропии $S_q^{\mu}[f_p]$ до первого порядка в отклонениях Δf_p функции f_p от f_{p0}. Полученное в этом случае выражение имеет вид

$$S_q^{\mu}[f_p^q] = S_{q0}^{\mu} - k_B \int p^{\mu} \left[\Delta f_p^q \ln_q f_p - \Delta f_p \right] \mathrm{d}P \simeq$$

$$\simeq S_{q0}^{\mu} + k_B \left(\beta_0 J_q^{\mu} - \alpha_0 \Delta N_q^{\mu} \right) + \mathcal{O}[(\Delta f_p^q)^2], \qquad (14.89)$$

в котором выражение для равновесной энтропии определяется соотношением

$$S_{q0}^{\mu} = k_B \int p^{\mu} \left[f_{p0} + \beta_0 f_{p0}^q \, p^{\nu} u_{\nu} - \alpha_0 f_{p0}^q \right] \mathrm{d}P =$$

$$= k_B \left[-\alpha_0 \, \Delta N_{q0}^{\mu} + \beta_0 \, \mathcal{T}_{q0}^{\mu\nu} u_{\nu} + \beta_0 P_{q0} u^{\mu} \right]. \qquad (14.90)$$

При написании (14.90) использовано уже использованной нами выше выражение

$$\mathcal{I}_{10} \equiv \int p^{\mu} u_{\mu} f_p \, \mathrm{d}P = -\beta_0 \mathcal{J}_{21} = \beta_0 P_{q0}.$$

14.6. Нэкстенсивная релятивистская *BGK* модель и транспортные коэффициенты переноса

Для решения неэкстенсивного релятивистского уравнения переноса для неравновесных процессов может быть использован, в частности, метод моментов Грэда (Israel, 1963; Anderson, 1974; Muronga, 2007b; Betz и др., 2011). Этот метод, однако, страдает от невозможности оценить некоторые результирующие интегралы (даже численно), если только он не ограничится разложениями по равновесному распределению. Вместе с тем эта проблема может быть преодолена с помощью известной модели BGK (Bhatnagar, Gross, and Krook) с использованием времени релаксации τ, которая позволяет ограничиться только равновесными распределениями, хотя за это приходится расплачиваться меньшей точностью. В данной работе предлагается использовать релаксационный подход к выводу замкнутых неэкстенсивных релятивистских уравнений гидродинамики, разработанный для чисто релятивистского случая в работе (Anderson, Witting, 1974).

Уравнение переноса в приближении *BGK*, линейные определяющие соотношения. Предположим, что неравновесные вклады от диссипативных потокового пренебрежимо малы вблизи равновесия $\Delta f_p^q << f_{p0}^q$,т.е, что $p^{\mu}\partial_{\mu}\Delta f_p^q \to 0$. Поскольку имеет место приближенное равенство $p^{\mu}\partial_{\mu} f_p^q \simeq p^{\mu}\partial_{\mu} f_{p0}^q$, то все неравновесные моменты исчезают из левой части уравнения переноса (19), которое в приближении BGK принимает следующий вид (Anderson, Witting, 1974):

$$p^{\mu}\partial_{\mu}(f_{p0})^q \simeq -p^{\nu}u_{\nu}\frac{f_p^q - f_{p0}^q}{\tau} = -\frac{p^{\nu}u_{\nu}\nabla f_p^q}{\tau}, \tag{14.91}$$

где τ – время релаксации неравновесной функции распределения f_p^q к равновесию.

Используя формулу

$$f_0(x,p)=\left\{1+(1-q)\left[\alpha_{0(x)}-\beta_0(x)p^{\nu}u_{\nu}(x)\right]\right\}^{1/(1-q)}$$

для обобщенной равновесной функции распределения $f_0(x,p)$, получим потоковый член в равновесии в виде

$$p^{\mu}\partial_{\mu}(f_{p0})^{q}=q\,p^{\mu}(f_{p0})^{q-1}\partial_{\mu}f_{p0}=$$

$$=q(f_{p0})^{2q-1}\left\{p^{\mu}\partial_{\mu}\alpha_0-E_p\,p^{\mu}\partial_{\mu}\beta_0-\beta_0\,p^{\mu}p^{\nu}\partial_{\mu}u_{\nu}\right\}. \qquad (14.92)$$

Комбинируя уравнения (14.91) и (14.92), получим

$$\Delta f_p^{q}=\tau q\, f_{p0}^{2q-1}\left[\left(\frac{\beta_0}{E_p}\frac{\theta}{3}(p^{\alpha}p^{\beta}\Delta_{\alpha\beta})-\mathrm{D}\alpha_0+E_p\,\mathrm{D}\beta_0\right)+\right.$$

$$\left.+\left(h_0^{-1}-E_p^{-1}\right)p^{\mu}\nabla_{\mu}\alpha_0+\frac{\beta_0}{E_p}p^{\langle\alpha}p^{\beta\rangle}\sigma_{\alpha\beta}\right]. \qquad (14.93)$$

Здесь использовано разложение $\partial_{\mu}u_{\nu}=u_{\mu}\,\mathrm{D}u_{\nu}+\frac{1}{3}\theta\Delta_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}$ и введены следующие обозначения: $\omega^{\mu\nu}:=\frac{1}{2}(\nabla^{\mu}u^{\nu}-\nabla^{\nu}u^{\mu})$ – ковариантный ротор, $\sigma_{\mu\nu}=\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle}=\sigma_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}(\nabla_{\mu}u_{\nu}+\nabla_{\nu}u_{\mu}-\frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}u^{\sigma})$ –тензор сдвига, $\theta:=\nabla_{\mu}u^{\mu}$– ковариантная дивергенция гидродинамической скорости.

Заметим, что при получении выражения (14.93) были использованы законы сохранения равновесной системы для вычисления соответствующих производных по времени, которые могут быть записаны в терминах градиентов. Применяя соотношения (14.50)-(14.52) при различных значениях n и k, в результате получим

$$\mathrm{D}\alpha_0=\mathrm{n}_0\,\theta\left[h_0\mathcal{K}_{20}-\mathcal{K}_{30}\right]/\mathcal{D}_{20}, \qquad (14.94)$$

$$\mathrm{D}\beta_0=\mathrm{n}_0\,\theta\left[h_0\mathcal{K}_{10}-\mathcal{K}_{20}\right]/\mathcal{D}_{20}, \qquad (14.95)$$

$$\mathrm{D}u^{\mu}=\beta_0^{-1}\left[h_0^{-1}\nabla^{\mu}\alpha_0-\nabla^{\mu}\beta_0\right], \qquad (14.96)$$

где $\mathcal{D}_{\mathrm{nk}}:=\mathcal{K}_{(\mathrm{n}-1,\mathrm{k})}\mathcal{K}_{(\mathrm{n}+1,\mathrm{k})}-\mathcal{K}_{\mathrm{nk}}^{2}$.

Зная отклонения Δf_{p0}^{q} от равновесной функции распределения f_{p0}^{q}, можно найти обобщенные линейные соотношения в q-системе между градиентами и необратимыми потоками, определенными формулами (14.85)-(14.87). Так, линейная связь между тензором напряжений в первом приближении $\Pi^{\mu\nu}$ (формула (14.87)) и тензором сдвига $\sigma^{\mu\nu}$, полученная с использованием соотношения (14.93) и соответствующих моментных интегралов (14.47), принимает вид:

$$\Pi^{\mu\nu}(x)=\int p^{\langle\mu}p^{\nu\rangle}\,\Delta f_{p}^{q}\,\mathrm{d}P=$$

$$=\tau\beta_0\sigma^{\alpha\beta}\left[q\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}E_p^{-1}p^{\langle\mu}p^{\nu\rangle}p_{\langle\alpha}p_{\beta\rangle}\right]=\tau(2\beta_0\mathcal{K}_{32})\sigma^{\mu\nu}, \qquad (14.97)$$

или

$$\Pi^{\mu\nu}(x)=\eta\sigma^{\mu\nu}=\eta\left[\tfrac{1}{2}(\nabla_\mu u_\nu+\nabla_\nu u_\mu)-\tfrac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\theta\right], \qquad (14.98)$$

где $\eta=2\tau\,\beta_0\dfrac{q}{15}\int_0^\infty \mathrm{d}P\,(f_{0p})^{2q-1}E_p^{-1}(p^\mu p^\nu\Delta^{\mu\nu})^2=2\tau\,\beta_0\,\mathcal{K}_{32}>0$ – коэффициент сдвиговой вязкости.

Аналогично сдвиговой вязкости можно получить линейное уравнение для скалярного вязкого давления Π_q и рассчитать коэффициент объемной вязкости

$$\Pi_q(x)=-\frac{1}{3}\int \mathrm{d}P(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)\Delta f_{p0}^{q}=-\tau\frac{\theta}{3}\left[\beta_0\frac{q}{3}\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}E_p^{-1}(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)^2+\right.$$

$$+qn_{q0}\left(\frac{\mathcal{K}_{30}-h_{q0}\mathcal{K}_{20}}{\mathcal{D}_{20}}\right)\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)-$$

$$\left.-qn_{q0}\left(\frac{\mathcal{K}_{20}-h_{q0}\mathcal{K}_{10}}{\mathcal{D}_{20}}\right)\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}E_p(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)\right]=$$

$$=\tau\frac{\theta}{\mathcal{D}_{20}}\left[\tfrac{5}{3}\beta_0\mathcal{K}_{32}\mathcal{D}_{20}+n_{q0}\mathcal{K}_{21}\left(\mathcal{K}_{30}-h_{q0}\mathcal{K}_{20}\right)-n_{q0}\mathcal{K}_{31}\left(\mathcal{K}_{20}-h_{q0}\mathcal{K}_{10}\right)\right].$$

(14.99)

Отсюда следует релятивистская версия классического результата Стокса

$$\Pi_q(x) = -\eta_u \nabla_\mu u^\mu \equiv -\eta_u \theta, \tag{14.100}$$

где для коэффициента объемной вязкости имеет место следующее представление (Biro, Molnar,2012):

$$\eta_u = \tau \frac{n_{q0}}{\mathcal{D}_{20}} \left[\tfrac{5}{3} \beta_{q0} n_{q0}^{-1} \mathcal{D}_{20} \mathcal{K}_{32} + \mathcal{K}_{21} \left(\mathcal{K}_{30} - h_{q0} \mathcal{K}_{20} \right) - \mathcal{K}_{31} \left(\mathcal{K}_{20} - h_{q0} \mathcal{K}_{10} \right) \right] > 0 . \tag{14.101}$$

Найдем теперь выражение для потока энергии W_q^μ, определяемого формулой (96); в результате получим следующее приближенное соотношение

$$W_q^\mu(x) = \int p^{\bar{\mu}} E_p \Delta f_p^q \,\mathrm{d}P \sim \frac{q}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1} (\Delta^{\mu\nu} p^\mu p^\nu) -$$

$$-h_0 \frac{q}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}P E_p f_{p0}^{2q-1} (\Delta^{\mu\nu} p^\mu p^\nu) = \mathcal{K}_{21} - h_{q0} \mathcal{K}_{31} \simeq 0 . \tag{14.102}$$

Наконец, используя (9), определим выражение для потока тепла, которое в случае первого порядка в отклонениях Δf_p функции f_p от f_{p0} принимает вид

$$J_q^\mu(x) = -h_{q0} N_q^\nu \Delta_\nu^\mu \simeq -h_{q0} \int p^{\bar{\mu}} \Delta f_p^q \,\mathrm{d}P .$$

Подставляя сюда (14.93), получим

$$J_q^\mu(x) = \tau(\nabla^\mu \alpha_0) \left[h_{q0} \left(\frac{q}{3} \int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1} E_p^{-1} (p^\mu p^\nu \Delta_{\mu\nu}) \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{q}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1} (p^\mu p^\nu \Delta_{\mu\nu}) \right] = -\tau \left[\mathcal{K}_{21} - h_0 \mathcal{K}_{11} \right] \nabla^\mu \alpha_0 . \tag{14.103}$$

Таким образом, в рассматриваемом линейном случае, закон Фурье для по тока тепла в неэкстенсивной среде принимает вид:

$$J_q^\mu(x) = -\tau h_0 T^{-2} (\mathcal{K}_{21} - h_0 \mathcal{K}_{11}) \left(-\nabla^\mu T + T \mathrm{D} u^\mu \right) =$$

$$= \lambda \left(-\nabla^\mu T + (h_q n_q)^{-1} T \nabla^\mu P_q \right), \tag{14.104}$$

где $\lambda = \tau h_0 T^{-2}(h_0 \mathcal{K}_{11} - \mathcal{K}_{21}) > 0$ – коэффициент теплопроводности. При написании формулы (104) было использовано соотношение (14.96) и уравнение движения нулевого порядка (14.34).

Баланс энтропии, основанный на соотношении Гиббса. Найдем теперь явную форму уравнения баланса энтропии (14.37), для чего подставим в соотношение Гиббса (57) уравнения неразрывности (14.32) и энергии (14.35); в результате получим

$$\mathrm{D}s_q + \partial_\mu \left(J_q^\mu / T \right) = \sigma_q \equiv,$$

$$\frac{1}{T}\left\{ -\Pi_q \nabla^\mu u_\mu + \overset{\circ}{\Pi}{}_q^{\mu\nu} \overbrace{\overset{\circ}{\nabla}_\mu u_\nu} - J_q^\mu \left(\frac{\nabla_\mu T}{T} - \frac{\nabla_\mu P_q}{hn} \right) \right\}, \tag{14.105}$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \tfrac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\nabla_\sigma u^\sigma$$

– симметризованная пространственноподобная и обладающая нулевым следом часть градиента гидродинамической скорости, известная как тензор сдвига.

Если теперь исключить с помощью линейных законов термодинамические потоки из соотношения (14.105), то можно получить следующее выражение для прироста энтропии

$$T\sigma_q \equiv \eta_u \theta^2 + \eta(\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) + \lambda \left(\frac{\nabla_\mu T}{T} - \frac{\nabla_\mu P_q}{h_q n_q} \right)\left(\frac{\nabla^\mu T}{T} - \frac{\nabla^\mu P_q}{h_q n_q} \right) \geq 0. \tag{14.106}$$

Отсюда следует, что обобщенные линейные законы совместимы с неотрицательным приростом энтропии. Выражение (14.106) для σ_q имеет знакомый вид, но включает только первое приближение для коэффициентов переноса. При этом единственная явная зависимость от параметра деформации q имеет место в определениях термодинамических интегралов (14.46)-(14.48). Чтобы этот результат согласовывался с релятивистской термодинамикой необратимых процессов, приближенные значения коэффициентов переноса должны находиться в хорошем согласии с действительными коэффициентами (Muronga, 2007b**)**. И наоборот, полученные коэффициенты первого порядка могут служить хорошим критерием правильности метода диссипативной гидродинамики второго порядка, выводимой из релятивистского уравнения Больцмана, при использовании четырнадцати моментов с линеаризованным интегралом столкновений (Betz и др., 2011).

В заключение подчеркнем, что рассмотренный здесь подход к конструированию неэкстенсивной релятивистской гидродинамики содержит фундаментальный недостаток, который приводит который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям (и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения для теплового потока и вязкости) и к неустойчивости, что не подходит для многих явлений в астрофизике высоких энергий, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями. Этот эффект объясняется тем, что традиционный термодинамический подход (как классический, так и релятивистский) основан на слишком ограничительной гипотезе относительно взаимосвязи между потоками и термодинамическими силами. В частности, в случае рассматриваемой здесь простой жидкости постулировалось, что поток энтропии просто пропорционален потоку тепла и что плотность энтропии не зависит от потоков тепла и вязкости. Однако, этот постулат действительно верен только до первого порядка при отклонениях от равновесия. Пренебрежение членами второго порядка в плотности и потоке энтропии приводит к ошибкам того же порядка в производстве энтропии, за исключением случаев, когда пространственно-временные градиенты теплового и вязкого потоков пренебрежимо малы, т.е. в квазистационарных условиях. К сожалению, проблемы, связанные с гиперболичностью, не решились с введением параметра деформации q. Более совершенные, но более сложные замкнутые гидродинамические уравнения, чем представленные в данной работе, могут быть получены методами Грэда, при использовании 14-ти моментного приближения.

Перспективы. Современные ускорители высокоэнергетических частиц уже достигли энергетического диапазона, в котором сформировалась материя ранней Вселенной. В частности, при столкновениях тяжелых ионов на коллайдерах *RHIC* и *LHC* образуется ядерная материя, обладающая экстремальной температурой и плотностью. Это так называемая кварк-глюонная плазма (*КГП*), которая существовала вскоре после Большого взрыва. Ее свойства измеряются в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ионов, где плотность энергии достаточно высока, чтобы сформировать *КГП* за короткое время. К сожалению, из-за природы сильного взаимодействия не существует метода прямого наблюдения этой материи. Как было установлено в экспериментах, характеристика идентифицированных спектров адронов с помощью термодинамического подхода Больцмана-Гиббса недостаточна. Вместо этого спектры частиц, измеренные при столкновениях с высокой энергией, хорошо описываются неэкстенсивными распределениями Тсаллиса-Парето, полученными в рамках неэкстенсивной статистической термодинамики Тсаллиса. На базе сконструированной в этой главе q-модифицированной релятивистской гидродинамики возможна разработка различных адекватных моделей в физике элементарных частиц, описывающих широкий круг явлений в космосе и в процессах производства высокоэнергетических частиц в эволюционирующей жидкости на современных ускорителях, особенно при ядро-ядерных столкновениях.

Библиография

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка // Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с.

Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости. 1. Метод релятивистской необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023a. № 2. 44 с.

Колесниченко А.В. К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023b. № 13. 30 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Том VI. // Москва: Изд-во «Наука», 1988. 733 с.

Anderson J.L. Relativistic Grad polynomials // Phys. 1974 V.15. № 7. P. 1116-1119.

Abe S., Rajagopal A.K. Validity of the Second Law in Nonextensive Quantum Thermodynamics // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 12. P. 120601 (1-3).

Alberico W. M., Lavagno A. Non-extensive statistical effects in high-energy collisions // The European Physical Journal A, 2009. V. 40. № 3. P. 313-323.

Betz B., Denicol G.S, Koide T., Moln´ar E., Niemi H., Rischke D.H. Second order dissipative fluid dynamics from kinetic theory // HCBM 2010 - International Workshop on Hot and Cold Baryonic Matter, Budapest, Hungary, Edited by T.S. Biró; G.G. Barnaföldi; EPJ Web of Conferences.011. V.13. P. id.07005.

Biro T.S., Kaniadakis G. Two generalizations of the Boltzmann equation // Eur. Phys. J. B. 2006. V. 50. P. 3-6.

Biro T.S., Molnar E. Non-extensive statistics, relativistic kinetic theory and fluid dynamics // Eur. Phys. J. A 2012. V. 48: P.172 (1-11).

Bíró G., Barnaföldi G. G., Biró T.S., Ürmössy K. Application of the non-extensive statistical approach to high energy particle collisions // AIP Conference Proceedings. 2017. V.1853. №1. P. id. 080001 (1-7).

Cleymansa J., Worku D. Relativistic thermodynamics: Transverse momentum distributions in high-energy physics // Eur. Phys. J. A. 2012. V. 48. P. 160 (1-8).

Cleymans J., Lykasov G.I., Parvan A.S.,. Sorin A.S, Teryaev O.V., Worku D. Systematic properties of the Tsallis distribution: Energy dependence of parameters in high energy p-p collisions // Physics Letters B. 2013.V.723. P.351-354.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T, van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory I. The second law for a gas mixture outside equilibrium // Physica. 1968. V. 40. P. 257-276.

de Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch. G. Relativistic kinetic theory: principles and applications. North-Holland Publishing Company Amsterdam-New York-Oxford. 1980. 417 p.

Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 919-928.

Gell-Mann M., Tsallis C. (Eds.), Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, Oxford University Press, New York, 2004.

Jüttner F. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigke its verteilung in der Relativtheorie // Annalen der Physik 1911. Bd 34. S. 856-882.

Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1163-1181.

Kodama T., Elze H.-T., Aguiar C.E., Koide T. Dynamical correlations as origin of nonextensive entropy // Europhys. Lett. 2005. V. 70. № 4. P. 439-445.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbody Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System Research, 2020a.V. 54. № 5. P. 420-431.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Circular Disk Taking into Account the Magnetic Field and Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2021. V. 55. № 2. P.132-149.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2020b. V. 54. № 2. P.137-149.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research, 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Lavagno A., Quarati P., Scarfone A.M. Nonextensive relativistic nuclear and subnuclear equation of state // Brazilian Journal of Physics. 2009. V. 39. № 2A. P. 457-463.

Lima A.S., Silva R., Plastino A. R. Nonextensive Thermostatistics and the H Theorem // Physical Review Letters. 2001. V.86. №14. P. 2938-2941.

Muronga A. Relativistic dynamics of nonideal fluids: Viscous and heat-conducting fluids. I. General aspects and 3+1 formulation for nuclear collisions // Physical Review C. 2007a. V. 76. P. 014909 (1-20).

Muronga A. Relativistic dynamics of non-ideal fluids: Viscous and heat-conducting fluids. II. Transport properties and microscopic description of relativistic nuclear matter // Physical Review C. 2007b. V. 76. P. 014910 (1-20).

Osada T., WilkG. Nonextensive/Dissipative Correspondence in Relativistic Hydrodynamics // Prog. Theor. Phys. Supp. 2008. V. 174. P. 168-172.

Osada T., Wilk G. Nonextensive perfect hydrodynamics − a model of dissipative relativistic hydrodynamics? // Cent. Eur. J. Phys. 2009. V.7. № 3. P. 432-443.

Santos A.P., Silva R., Alcaniz J.S., Lima J.A.S. Nonextensive kinetic theory and *H*-theorem in general relativity // Annals of Physics. 2017. V. 386. P. 158-164.

Silva R., Lima J. A. S. Relativity, nonextensivity, and extended power law distributions // Physical Review E. 2005. V. 72. P. 057101 (1-4).

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http: /tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Urmossy K., Barnaföldi G.G., Biró T.S. Microcanonical jet-fragmentation in proton–proton collisions at LHC energy // Physics Letters B. 2012. V. 718. № 1. P.125-129.

Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity (J. Wiley and Sons, New York, 1972). [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология // М.: Мир. 1976].

Wilk G., Włodarczyk Z. Interpretation of the Nonextensivity Parameter *q* in Some Applications of Tsallis Statistics and Lévy Distributions // Physical Review Letters. 2000. V. 84. № 13. P. 2770-2773.

Wilk G., Włodarczyk Z. Power laws in elementary and heavy-ion collisions A story of fluctuations and nonextensivity? // Eur. Phys. J. A. 2009. V. 40. P. 299–312.

ГЛАВА 15

Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттал как основа семейства нелинейных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова

В этой главе анализируется важный аспект, связанный с выводом нелинейных степенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, коррелирующих с неэкстенсивной двухпараметрической энтропией Шарма–Миттал для неэкстенсивных систем. При этом получаемые диффузионные уравнения записаны таким образом, что их стационарные решения являются вероятностными распределениями, максимизирующими энтропию ШМ для неэкстенсивных систем. С целью получения точных решений нелинейных нестационарных одномерных уравнений ФПК, связанных с энтропиями Тсаллиса, Реньи и Шарма–Миттал, использован анзац-подход.

Введение

Статистическая энтропия Больцмана−Гиббса−Шеннона и основанная на ней классическая статистическая механика является чрезвычайно полезным инструментарием при изучении широкого круга простых физических систем. Эти системы, для которых, безусловно, целесообразно использовать классическую статистику и разработанные на её основе теории, можно условно охарактеризовать малым диапазоном пространственно-временных корреляций, эвклидовостью геометрии фазового пространства, марковостью случайных процессов, локальностью силового взаимодействия между элементами системы, эргодичностью динамических процессов и т.п. Такие системы хорошо описываются энтропией Больцмана−Гиббса−Шеннона и, как правило, следуют экспоненциальному закону вероятностных распределений.

Существует, однако, целый круг сложных систем (природных, искусственных и социальных), которые, в отличие от простых, характеризуются большой дальностью пространственно-временных корреляций, глобальностью силовых взаимодействий между элементами системы, иерархичностью (обычно мультифрактальностью) геометрии фазового пространства, немарковостью процессов (длинной памятью), неэргодичностью динамических процессов, наличием асимптотически степенных вероятностных распределений. Довольно широкий класс подобных систем (хотя далеко не всех) адекватно описывается неэкстенсивной (неаддитивной) статистической механикой, основанной, в частности, на параметрических энтропиях Тсаллиса (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988) и Реньи (Renyi, 1961, 1970), которые сохраняют гносеологическую структуру (логическую схему построения) классической статистики (см., например, Curado, Tsallis, 1991; Beck, Schlogl,1993**;** Borges, Roditi, 1998; Tsallis и др., 1998; Naudts, 2004; Tsallis, 2009; Plastino and Plastino, 1997; Tirnakli, Torres, 2000; Lenzi, Mendes, 2001; Abe, 2001; Wada,. Scarfone, 2005; Scarfone, Wada, 2007; Hanel и др., 2009; Зарипов, 2002, 2010; Колесниченко, 2019). Важным преимуществом неэкстенсивных статистик по сравнению с классической статистикой Гиббса является асимптотический степенной закон распределения вероятностей (проявляющийся при максимизации соответствующих параметрических энтропий), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса.

Неэкстенсивная статистика Тсаллиса успешно применяется ко многим системам, начиная от нелинейных диффузионных уравнений (Plastino и др., 2000), обобщенных кинетических уравнений (Boghosian, 1999; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), систем Фоккера-Планка (Frank, Daffertshofer, 2001), *H*-теоремы Больцмана (Mariz, 1992; Ramshaw, 1993a,b; Shiino, 1998), удельной теплоемкости гармонического осциллятора (Ito, Tsallis, 198*9*), квантовой статистики (Büyükkılıç и др., 1995), до изучения космических систем с дальним силовым взаимодействием (Chavanis, Delfini, 2009; Колесниченко, 2016), межзвездной турбулентности (Esquivel, Lazarian, 2010), эволюции астрофизических дисков (Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014), скорости солнечного звука (Du, 2006), релаксации спинового стекла (Pickup и др., 2009), городской транспортной системы (Kolesnichenko, 2014), биофизики, экономики, нейрофизики и много другого

Одновременно, наличие степенного закона в неэкстенсивной статистике позволило сконструировать неаддитивные термодинамики, в частности, на основе энтропии Тсаллиса (см. Beck, SchloЁgl,1993*;* Tsallis, 1999, 2001, 2002, 2009*;* Колесниченко, 2018a,b) и энтропии Реньи (Zaripov, 2005*;* Parvan, Biro, 2005; Зарипов, 2010).

С другой стороны, энтропия Реньи с успехом используется не только в физике фракталов и в теории информации (см. Mandelbrot, 1974, 1975, 1977, 1982*;* Beck, Schlögl, 1993*;* Grassberger,1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984*;* Halsey и др.,1986; Hentschel, Procaccia,1983*;* Beck, Schlogl, 1993*;* Мандельброт, 2002*;* Зарипов, 2002, 2010*;* Jizba, Arimitsu, 2004; Bialas, Czyz, 2008), но и в различных областях статистической механики, связанных с динамическим поведением сложных хаотических систем. Последнее связано с тем, что между теорией фракталов, опирающейся на геометрию и теорию размерности, с одной стороны, и теорией хаоса существует глубокая связь. Использование статистики Реньи привело к значительному прогрессу в исследованиях ряда аномальных физических явлений, в частности, в ядерной физике (Nagy, Romera, 2009), в теории черных дыр (Bialas, Czyz, 2008), при изучении фрактальных и мультифрактальных систем в космологии (Mandelbrot, 1977, 1982*;* Колесниченко 2016, 2019), в квантовой статистике (Aptekarev и др., 2012a,b, 2016) и т.д.

Несколько позднее в статистическую механику был введён новый функционал энтропии − двухпараметрическая энтропия Шарма−Миттал (*SM*) (Sharma, Mittal, 1975), которая, в частности, обобщает энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона, Реньи и Тсаллиса посредством манипулирования двумя параметрами, тем самым рассматривая эти энтропии как некоторые предельные однопараметрические случаи (Frank, Plastino, 2002; Scarfone, Wada, 2005; Scarfone, 2006; Akturk и др., 2007, 2008). Свойства энтропии Шарма−Миттал были тщательно исследованы рядом авторов (см., например, Masi, 2005; Scarfone, 2006; Lenzi, Scarfone, 2012; Kaniadakis и др., 2005; Nielsen, Nock, 2012)**.** Многие неэкстенсивные однопараметрические энтропии, введённые в литературе в рамках обобщённой статистической механики, относятся к *SM* и, таким образом, часто могут изучаться по единообразной схеме. Среди них, упомянутые выше энтропии Больцмана−Гиббса− Шеннона, Реньи и Тсаллиса, а также энтропия Ландсберга−Ведрала (Landberg, Vedral, 1998), Гауссова энтропия (Frank, Plastino, 2002) и некоторые другие.

Энтропия Шарма−Миттал, введённая первоначально в теории информации, в работе (Frank, Plastino, 2002) также была использована для построения обобщенной термостатистики. В работах (Fa, Lenzi, 2004*;* Scarfone, 2006*)* для получения обобщенных термодинамических соотношений на базе энтропии *SM* учитывалась гипотеза мультипликативности вероятностного распределения совместной вероятности двух независимых систем.

В данной работе также приведено построение обобщённых неэкстенсивных термодинамик, соответствующих однопараметрическим энтропиям, принадлежащим к семейству Шарма−Миттал. При этом также используются осреднённые значения параметров системы, полученные по нормированному эскортному распределению $f_j = p_j / \sum_j p_j{}^q$, которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Однако в отличие от ряда известных работ (см., например, Czachor, Naudts, 2002; Scarfone, 2006; Kaniadakis и др., 2005), в которых подобные исследования по термостатике проведены с привлечением двукратно деформированных экспоненты и логарифма (введённых первоначально в теории информации Шарма и Миттал в 1975 г.), особенность данной работы состоит в том, что проведено построение обобщённых неэкстенсивных термодинамик с помощью более простых и хорошо изученных однократно деформированных функций − логарифма и экспонента Тсаллиса.

К сожалению, обобщенные термодинамики, основанные на базе каких-либо неэкстенсивных статистик, предназначены в основном для описания равновесных состояний физических систем, и не вполне применимы к описанию их неравновесных состояний (см. Amigy и др., 2018). Вместе с тем, одним из основных феноменологических уравнений статистической механики, описывающим, в частности, динамическую эволюцию неравновесной системы, является нелинейное диффузионное уравнения Фоккера−Планка−Колмогорова. Степенные уравнения ФПК нашли применение в различных областях науки, таких как астрофизика, физика плазмы, гидродинамика, биофизика и др. (см., например, Tsallis, Bukman, 1996*;* Ribeiro и др.,2012*;* Curado и др., 2014*;* Combe и др. 2015*;* Chavanis, 2003*;* Livadiotis, McComas, 2013; Beck, 2009). Кроме этого, они использовались для моделирования распространения энергии в сильно нелинейных неупорядоченных решетках (Mulansky, Pikovsky, 2013). Нелинейная диффузия и уравнения ФПК тесно связаны также с нелинейными версиями уравнений Шредингера, Дирака и Клейна–Гордона (Nobre и др., 2013), допускающими сложные солитоноподобные аналитические решения, а также с нелинейными волновыми уравнениями, имеющими экспоненциальные плоские волновые решения, модулированные q-гауссианами (Plastino, Wedemann, 2017). Нелинейные диффузионные процессы важны также при изучении распространения биологических популяций (см. Newman, Sagan. 1981**;** Colombo, Anteneodo, 2018). В частности, основанные на каппа-статистике нелинейные диффузионные уравнения ФПК могут быть использованы в эпидемиологии при предсказании распространения эпидемий и пандемий (Kaniadakis и др., 2020; Клочкова и др., 2020).

Следует отметить, что, несмотря на большое разнообразие исследований в указанных научных областях, все они имеют много общего благодаря кооперативному взаимодействию между отдельными подсистемами рассматриваемой совокупной системы. Эти взаимодействия приводят к уменьшению большого числа степеней свободы систем многих тел и тем самым допускают низкоразмерное описание в терминах нелинейного нестационарного уравнения Фоккера–Планка−Колмогорова, которое раскрывает динамику, лежащую в основе многих наблюдаемых физических явлений.

В последнее время был разработан эффективный подход, позволяющий сконструировать нелинейные уравнения ФПК таким образом, чтобы их стационарные решения были согласованы с соответствующими равновесными (каноническими) распределениями плотности вероятности, полученными из условия экстремальности энтропий для рассматриваемых систем (см. Plastino A.R., Plastino A., 1995; Frank, 2002, 2005). Этот подход, дающий связь энтропии системы с нелинейными уравнениями ФПК, описывающими эволюцию неравновесных явлений, является одним из полезных приложений неэкстенсивной статистической механики. Использование диффузионных уравнений, соотнесенных с энтропийным методом, позволяет найти временную зависимость функции распределения плотности вероятности для неравновесных неэкстенсивных систем.

В данной работе показано, как эффективный термодинамический подход Франка к построению степенных уравнений ФПК может быть применим для относительно большой категории энтропий, являющихся частными случаями двухпараметрической энтропии Шарма−Миттал.

15.1. Энтропийный функционал Шарма−Миттал как родоначальник семейства однопараметрических энтропий

Введённая Шарма и Миттал двухпараметрическая энтропийная мера для функции распределения $P(x,t)$ определяется формулой (Sharma, Mittal, 1975)

$$S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]:=\frac{1}{r-1}\left[1-\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{(r-1)/(q-1)}\right],\quad (q,r>0;\ q,r\neq 1;\ q\neq r). \tag{15.1}$$

Энтропийная мера (15.1) включает в себя как классическую энтропию Больцмана−Гиббса−Шеннона, так и деформированные однопараметрические энтропии, хорошо известные в литературе, в частности:

- энтропию Тсаллиса (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988)

$$S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]:=\frac{1}{q-1}\left[1-\int P(x,t)^q dx\right],\quad (q>0,\ q\neq 1); \tag{15.2}$$

- энтропию Реньи (Renyi, 1961, 1970)

$$S^{\mathcal{R}}_{q}[P]:=\frac{1}{1-q}\ln\left[\int P(x,t)^q dx\right],\quad (q>0,\ q\neq 1); \tag{15.3}$$

- энтропию Гаусса (Frank, Plastino, 2002)

$$S^{\mathcal{G}}_{1,r}[P]:=\frac{1}{r-1}\left\{1-\exp\left[(r-1)\int P(x,t)\ln[P(x,t)]\,dx\right]\right\},\quad (q>0,\ q\neq 1); \tag{15.4}$$

- энтропию Ландсберга–Ведрала (Landberg, Vedral, 1998)

$$S^{\mathcal{LV}}_{q}[P]:=\frac{1}{1-q}\left[1-\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{-1}\right],\quad (q>0,\ q\neq 1); \tag{15.5}$$

- энтропию Больцмана−Гиббса−Шеннона

$$S^{\mathcal{BGS}}[P]:=-\int P(x,t)\ln[P(x,t)]\,dx\,. \tag{15.6}$$

Легко показать, что имеют место следующие равенства (см., например, Колесниченко, 2018):

$$\lim_{q\to1} S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]=S^{\mathcal{BGS}}[P]=\lim_{q\to1} S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\,,\quad S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}}[P]=S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\,, \tag{15.7}$$

$$\lim_{r\to1} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]=S^{\mathcal{R}}_{q}[P]\,,\qquad \lim_{q=1,r\to1} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]=S^{\mathcal{BGS}}[P]\,, \tag{15.8}$$

$$\lim_{r\to2-q} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]=S^{\mathcal{LV}}_{\{q\}}[P]\,,\ \lim_{q\to1} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]=S^{\mathcal{G}}_{\{1,r\}}[P]\,. \tag{15.9}$$

Экспонента Тсаллиса и деформированный логарифм. Далее мы будем широко использовать так называемые деформированные функции, в частности, деформированный логарифм $\ln_q(y)$ и деформированную экспоненциальную функцию (экспоненту Тсаллиса) $\exp_q(y)$, которые определяются следующим образом (см. Tsallis, 2007, 2009):

$$\ln_q(y):=\frac{y^{1-q}-1}{1-q},\quad y\in\mathbb{R}^+,\quad q\in\mathbb{R};\qquad \ln_{q=1}(y):=\ln y\ ,$$

$$\exp_q(y):=[1+(1-q)y]_+^{\frac{1}{1-q}}=\begin{cases}0, & \textit{если}\ q<1\ \textit{и}\ y<-1/1-q;\\ [1+(1-q)y]_,^{1/1-q} & \textit{если}\ q<1\ \textit{и}\ y\geq-1/1-q;\\ [1+(1-q)y]_,^{1/1-q} & \textit{если}\ q>1\ \textit{и}\ y<-1/1-q,\end{cases}$$

где $y\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$; выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[Y]_+\equiv\max(Y,0)$. Из определения деформированной экспоненты Тсаллиса следует, что для $q<1$, экспонента $\exp_q(y)$ исчезает для $y\leq-1/(1-q)$, непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до ∞, когда x увеличивается от $-1/(1-q)$ до ∞; для $q>1$, функция $\exp_q(y)$непрерывна и монотонно увеличивается от

0 до ∞, когда x увеличивается от $-\infty$ до $1/(1-q)$, оставаясь расходящейся для $y>1/(q-1)$.

Можно убедиться, что для деформированных экспоненты и логарифма справедливы используемые далее соотношения:

$$\exp_q\left[\ln_q(y)\right]=\ln_q\left[\exp_q(y)\right]=y,\ \ (\forall x;\forall q), \tag{15.10}$$

$$\frac{1}{\exp_q(y)}=\exp_{2-q}(-y)=\left[1-(q-1)y\right]_+^{\frac{1}{q-1}},\quad \ln_{2-q}\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln_q(y), \tag{15.11}$$

$$\exp_q(y)\cdot\exp_q(z)=\exp_q\left[y+z+(1-q)yz\right],\ \ (\forall(y,z);\forall q), \tag{15.12}$$

$$\ln_q(yz)=\ln_q(y)+\ln_q(z)+(1-q)\ln_q(y)\ln_q(z),\ (\forall(y,z);\forall q), \tag{15.13}$$

$$\frac{d}{dy}\exp_q(y)=\left[\exp_q(y)\right]^q,\qquad \frac{d}{dy}\ln_q(y)=\frac{1}{y^q}\ \ (y>0;\forall q). \tag{15.14}$$

Продемонстрируем теперь, что определяющие формулы для энтропий (15.1)-(15.6) связаны равенствами, представляющими чередования обычных и деформированных логарифмов и экспонент.

Используя обозначение

$$c_q(t):=\int P(x,t)^q dx\equiv\langle 1\rangle_q \tag{15.15}$$

для так называемой обобщённой статистической суммы, перепишем выражения (15.2) и (15.3) для энтропий Тсаллиса и Реньи и в виде

$$S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P]:=\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(1-q)}\right]^{1-q}-1}{1-q}=\ln_q\left[c_q^{1/(1-q)}\right], \tag{15.2*}$$

$$S_{\{q\}}^{\mathcal{R}}[P]:=\frac{1}{1-q}\ln\left[\int P(x,t)^q dx\right]=\frac{1}{1-q}\ln c_q=\ln\left[c_q\right]^{1-q}. \tag{15.3*}$$

Из сопоставления этих выражений получим соотношения

$$c_q^{1/(1-q)}=\exp\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{R}}[P]\right)=\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P]\right), \tag{15.16}$$

позволяющие переписать энтропии (14) и (15) в виде

$$S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]=\ln\left\{\exp_q\left(S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\right)\right\},\quad S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]=\ln_q\left\{\exp\left(S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]\right)\right\}. \qquad (15.17)$$

Формула (16) позволяет также получить равенства, связывающие энтропии Шарма−Миттал и Ландсберга–Ведрала с энтропиями Тсаллиса и Реньи:

$$S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]=\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(1-q)}\right]^{(1-r)}-1}{1-r}=\ln_r\left[c_q^{1/(1-q)}\right]=$$

$$=\ln_r\left\{\exp_q\left(S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\right)\right\}=\ln_r\left\{\exp\left(S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]\right)\right\}, \qquad (15.18)$$

$$S^{\mathcal{LV}}_{\{q\}}[P]=\frac{1-\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(q-1)}\right]^{1-q}}{1-q}=$$

$$=-\ln_q\left[c_q^{1/(q-1)}\right]=-\ln_q\left\{\exp\left(-S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]\right)\right\}. \qquad (15.19)$$

Таким образом, при использовании q-деформированных логарифма и экспоненты Тсаллиса возможно записать все перечисленные меры в компактной форме (15.16)-(15.19). Кроме этого, лаконичные соотношения (15.17)-(15.19) для энтропий облегчают нахождение предельных значений функционалов (15.1)-(15.6), по сравнению с их записью в явном виде. В частности, при использовании формулы (15.16)-(15.19) легко получить предельные соотношения (15.7)-(15.9).

Псевдоаддитивность энтропии Шарма−Миттал для независимых систем. Покажем, что подобно энтропии Тсаллиса, энтропия Шарма−Миттал подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем. Пусть совокупная система характеризуется нормированным распределением вероятностей микросостояний $P_{12}(x,t)$ и энтропией Шарма−Миттал

$$S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P_{12}]=\ln_r\left\{\exp_q\left(S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P_{12}]\right)\right\}. \qquad (15.20)$$

Будем предполагать, что распределения $P_{12}(x,t)$ является мультипликативным; тогда $P_{12}(x,t)=P_1(x,t)P_2(x,t)$, где распределения $P_1(x)$ и $P_2(x)$ относятся соответственно к первой и второй подсистемам. Подставим распределение $P_{12}(x,t)$ в (15.20). Учитывая формулы (15.12), (15.13), а также псевдоаддитивность энтропии Тсаллиса (см., например, Колесниченко, 2018), легко получить следующее выражение

$$S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_{12}]=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]+S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]+(1-q)S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}=$$

$$=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]\right)\cdot\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]\right)\right\}+$$

$$+(1-r)\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]\right)\right\}\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}+\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}=$$

$$=S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_1]+S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_2]+(1-r)S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_1]S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_2], \qquad (15.21)$$

из которого следует свойство псевоаддитивности энтропии Шарма−Миттал для двух независимых систем. Параметр r в (15.21) определяет степень неаддитивности энтропий из семейства Шарма−Миттал. Из (15.21) следует, что только для энтропий Реньи $(r=1)$ и Больцмана−Гиббса−Шеннона $(r,q=1)$ выполняется закон аддитивности.

15.2. Экстремум энтропии Шарма−Миттал и негиббсовое равновесное распределение

Пусть статистическая система с мерой Шарма−Миттала описывается распределением плотности вероятностей $P(x,t)$ и множеством структурных параметров $\mathcal{T}_k[P(x,t)]$ характеризующих неэкстенсивную систему. Будем далее считать, что средневзвешенное каждой случайной величины $\mathcal{T}_k$ определяется по формуле

$$\langle\mathcal{T}_k\rangle_q:=\int\mathcal{T}_k(x,t)\mathcal{P}(x,t)dx\,, \qquad (15.22)$$

где

$$\mathcal{P}(x,t) := \frac{P(x,t)^q}{\int P(x,t)^q dx} = \frac{P(x,t)^q}{c_q} \qquad (15.23)$$

– так называемое эскортное (нормированное на единицу) распределение, которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных неэкстенсивных систем (см. Abe, 2000).

Для отыскания равновесного распределения системы найдём безусловный экстремум энтропии Шарма–Миттала (15.18) при постоянстве среднего значения энергии $\mathcal{E}_q$ и сохранении нормировки распределения $P(x,t)$

$$\mathcal{E}_{\{q\}} := \int \varepsilon(x,t)\mathcal{P}(x,t)dx = const, \quad \int P(x,t) = 1.$$

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), для этого необходимо вычислить безусловный экстремум функционала

$$\mathcal{L}[P] := \ln_r \left[c_q\right]^{\frac{1}{q-1}} - \beta \int \varepsilon(x,t)P(x,t)^q / c_q - \alpha \int P(x,t)dx. \qquad (15.24)$$

Здесь параметры β и α являются неопределёнными множителями Лагранжа. Из условия равенства нулю первой вариации $\delta\mathcal{L}$ функционала $\mathcal{L}[P]$ получим равенство

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta P} = \frac{q}{1-q}\tilde{P}^{q-1}\tilde{c}_q^{\frac{r-q}{q-1}} - q\frac{\beta}{\tilde{c}_q}\tilde{P}^{q-1}\left[\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right] - \alpha = 0,$$

из которого следует

$$\tilde{P}^{q-1}\left\{1 - (1-q)\frac{\beta}{\Gamma_{\{q,r\}}}\left[\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right]\right\} = \left(\frac{1-q}{q}\alpha\right) / \mathbf{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}. \qquad (15.25)$$

Здесь и далее знак «тильды» у параметров системы означает их вычисление для равновесного распределения вероятностей $\tilde{P}(x)$; фигурирующая здесь величина $\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$ определяется соотношением

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} := \left[\tilde{c}_q\right]^{(r-1)/(q-1)}, \quad \tilde{c}_q := \int \tilde{P}(x)^q dx. \qquad (15.26)$$

Заметим, что для энтропии Тсаллиса величина $\mathbf{\Gamma}_{\{q\}}^{\mathcal{TS}} = \mathbf{\Gamma}_{\{q,r=q\}}^{\mathcal{SM}} = \tilde{c}_q$; для энтропии Реньи величина $\mathbf{\Gamma}_{\{q\}}^{\mathcal{R}} = \mathbf{\Gamma}_{\{q,1\}}^{\mathcal{SM}} = 1$; а для энтропии Ландсберга−Ведрала имеем $\mathbf{\Gamma}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}} = \mathbf{\Gamma}_{\{q,r=2-q\}}^{\mathcal{SM}} = 1/\tilde{c}_q$.

Поскольку множители Лагранжа β и α имеют, вообще говоря, произвольные значения, то можно положить

$$\alpha \equiv \frac{q}{1-q}\tilde{c}_q^{\,(r-1)/(q-1)} = \frac{q\mathbf{\Gamma}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}}{1-q}. \tag{15.27}$$

Тогда соотношение (15.25) приобретает следующий вид негиббсового равновесного распределения с параметром $\beta_{\{q,r\}}$:

$$\tilde{P}^{\mathcal{SM}}(x) = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}\left[1-(1-q)\beta_{\{q,r\}}\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_q\right]\right]_+^{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}\exp_q\left\{-\beta_{\{q,r\}}\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_q\right]\right\}. \tag{15.28}$$

Здесь

$$\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} = \tilde{c}_q^{\,1/(1-q)} = \int \exp_q\left\{-\beta_{\{q,r\}}\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right]\right\}dx \tag{15.29}$$

− статистический интеграл, определяемый из условия нормировки распределения $\tilde{P}(x)$; параметр $\beta_{\{q,r\}} := \beta/\mathbf{\Gamma}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}$ играет роль обратной физической температуры в статистике Шарма−Миттал (см. Колесниченко, 2018).

При условии $r = q$ из (15.28) следует выражение для равновесного распределения $\tilde{P}^{\mathcal{TS}}(x)$ в статистике Тсаллиса

$$\tilde{P}^{\mathcal{TS}}(x) = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}}\exp_q\left\{-\beta_q\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_q\right]\right\}, \tag{15.30}$$

где

$$\mathbf{Z}^{\mathcal{TS}} = \int \exp_q\left\{-\beta_q\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right]\right\}dx \tag{15.31}$$

– статистический интеграл в статистике Тсаллиса; параметр $\beta_q \equiv \beta / \tilde{c}_q$ является обратной физической температурой системы, $T_{ph} \equiv 1/\beta_q$; β – множитель Лагранжа, который связан с ограничением на среднюю энергию в неэкстенсивной статистической механике. При $1-(1-q)\beta_q\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_q\right]<0$ имеем $\tilde{P}^{\mathcal{TS}}=0$, а при $q=1$ из (15.30) и (15.31) следует классическое каноническое распределение Гиббса

$$\tilde{P}^{\mathcal{BGS}}(x)=\frac{\exp\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}\right]\right\}}{\int\exp\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}\right]\right\}dx}. \tag{15.32}$$

В случае, когда $r=1$, из (15.28) следует равновесное распределение в статистике Реньи

$$\tilde{P}^{\mathcal{R}}(x)=\frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}}\left\{1-\beta(1-q)\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right]\right\}_+^{\frac{1}{1-q}}=\frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}}\exp_q\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right]\right\}. \tag{15.33}$$

Здесь

$$\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}(\beta)=\tilde{c}_q^{1/(1-q)}=\int\exp_q\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_q\right]\right\}dx>0 \tag{15.34}$$

– статистический интеграл; $\beta=1/T$ – обратная температура (изменяющаяся в пределах допустимых значений). Таким образом, распределение вероятностей состояния статистического ансамбля неэкстенсивных систем с мерой Реньи, которые находятся в тепловом равновесии с внешней средой (термостатом) и могут обмениваться с ней энергией при постоянном объёме и постоянном числе частиц, соответствует обобщённому каноническому ансамблю Гиббса (33).

15.3. Соотношения равновесной термодинамики, построенной на базе энтропии Шарма−Миттал

Приступим теперь к конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике Шарма−Миттал. Поскольку соотношение (15.28) справедливо и для равновесного распределения $\tilde{P}(x)$, то для максимального значения энтропии Шарма−Миттал имеем

$$S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(\max) \equiv \tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} = \frac{\tilde{c}_q^{\,(1-r)/(1-q)} - 1}{1-r} = \frac{(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}})^{1-r} - 1}{1-r} = \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}. \qquad (15.35)$$

Квазиравновесную свободную энергию Гельмгольца $\tilde{\mathcal{F}}_{\{q,r\}}$ определим соотношением

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\{q,r\{} := \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}} - \frac{1}{\beta}\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}} - \frac{1}{\beta}\ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}, \quad \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} = \tilde{c}_q^{\,1/(1-q)}. \qquad (15.36)$$

Учитывая соотношения (15.33) и (15.36), можно переписать выражение для статистического интеграла $\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}$ в следующем виде

$$Z^{\mathcal{SM}}(\beta) = \int \exp_q \left\{ -\frac{\beta}{\left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{1-r}} \left[\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right] \right\} dx. \qquad (15.37)$$

Дифференцируя (15.37) по β с учётом формулы (15.14), получим

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} = -\int \left\{ \exp_q \left[-\left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \beta \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) \right] \right\}^q \times$$

$$\times \left\{ \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) + \beta \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) \frac{\partial \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1}}{\partial\beta} - \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_q}{\partial\beta} \right\} dx =$$

$$= -\left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r+q-1} \int \tilde{P}(x)^q \left\{ \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) + \beta \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} - \beta \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}}{\partial\beta} \right\} dx =$$

$$= \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r+q-1} \tilde{c}_q \beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}}{\partial\beta} = \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r} \beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_q}{\partial\beta} \; . \qquad (15.38)$$

С учётом формулы дифференцирования деформированного логарифма (15.14), из (15.38) следует

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} = \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{-r} \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} = \beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial\beta}. \qquad (15.39)$$

С другой стороны, используя выражение (15.35) и (15.37), получим

$$\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} = \ln_r \left\{ \int \exp_q \left[-\left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} \right)^{r-1} \beta \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) \right] dx \right\}, \tag{15.40}$$

Откуда

$$\frac{\partial \tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}}{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}} = \frac{\partial \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}} =$$

$$= \frac{\beta}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}} \int \left\{ \exp_q \left[-\left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} \right)^{r-1} \beta \left(\varepsilon(x) - \tilde{\mathcal{E}}_q \right) \right] \right\}^q dx = \beta \tilde{c}_q \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}} \right)^{r-1} = \beta. \tag{15.41}$$

Таким образом, для равновесной термодинамики, построенной на базе энтропии Шарма−Миттала, справедливы следующие соотношения:

$$\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} = \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_{\{q,r\}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}} - \frac{1}{\beta} \tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}} - \frac{1}{\beta} \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}},$$

$$\beta = \frac{\partial \tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}}{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}} \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}} = \frac{\partial (\beta \tilde{\mathcal{F}}_{\{q,r\}})}{\partial \beta}, \quad \beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}. \tag{15.42}$$

15.4. Дивергенция Брегмана. Обобщенная *H*-теорема

Покажем теперь, что при спонтанном переходе между произвольным состоянием системы с распределением $P(x,t)$ и равновесным состоянием с распределением $\tilde{P}(x)$ энтропия системы может только убывать, т.е. $S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[\tilde{P}(x)\right] \geq S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P(x,t)]$.

С этой целью введем в рассмотрение так называемую дивергенцию Брегмана (см. Bregman, 1967; Cichocki, Amari, 2010)

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P:U] := -\frac{1}{1-r} \left\{ \left[\int P(x,t)^q U(x,t)^{1-q} dx \right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1 \right\} =$$

$$= -\ln_r \left\{ \left[\int P(x,t)^q U(x,t)^{1-q} dx \right] \right\}^{\frac{1}{1-q}}, \tag{15.43}$$

которая относится к существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической системы Шарма−Миттал. Являясь функционалом, она характеризует переход системы от состояния $P(x,t)$ в состояние $U(x,t)$, когда статистические наблюдения ведутся относительно состояния $P(x,t)$. При этом выражение (15.43) представляет собой функционал для двух нормированных распределений $\int P(x,t)dx = \int U(x,t)dx = 1$.

Различные свойства общего вида дивергенции Брегмана можно найти в работе (Cichocki, Amari, 2010). Здесь же мы отметим, что величина $\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Кроме этого, поскольку при $P(x,t) = U(x,t)$ имеет место равенство $\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P:U] = 0$, то дивергенция Брегмана является функцией Ляпунова[56].

Выпуклость. Величина $\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}\left[P:U\right]$ является вещественным, выпуклым и положительным функционалом с минимумом (максимумом) в зависимости от сочетания знаков параметров деформации r и q. Покажем это. Для некоторого действительного числа $n > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{Y^{q-1}-1}{q-1} &\geq 1-\frac{1}{Y}, \quad \textit{если}\, q>0, \\ &= 1-\frac{1}{Y}, \quad \textit{если}\, q=0, \\ &\leq 1-\frac{1}{Y}, \quad \textit{если}\, q<0. \end{aligned} \tag{15.44}$$

Поэтому, например, для $q>1$ (см. (15.1)) справедливо неравенство

$$\left(P/U\right)^{q-1} \geq q + (1-q)(U/P),$$

при учете которого получаем

---

[56] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P:U]=\frac{1}{r-1}\left\{\left[\int P\left(\frac{P}{U}\right)^{q-1}dx\right]^{\frac{r-1}{q-1}}-1\right\}\leq$$
$$\leq\frac{1}{r-1}\left\{\left[\int P\left(q+(1-q)\frac{U}{P}\right)dx\right]^{\frac{r-1}{q-1}}-1\right\}\equiv 0 \quad , \qquad (15.45)$$

когда $r<1$. Легко показать, что

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P:U]\geq 0, \text{ если } q>1,\ r<1, \text{ или } 0<q<1, r>1. \qquad (15.46)$$

Обобщённая *H*-теорема в статистике Шарма-Миттала. Рассмотрим теперь замкнутую систему, для которой распределение $P(x,t)$ является произвольным, а распределение $U(x,t)$ является равновесным, $U\equiv\tilde{P}(x)$

$$\tilde{P}(x)=\left\{\frac{1-(q-1)\beta_{q,r}\left[\varepsilon(x)-\tilde{\mathcal{E}}_q\right]}{\tilde{c}_q}\right\}^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (15.47)$$

При использовании соотношений (15.15), (15.29), и (15.35) легко показать, что спонтанный переход между этими состояниями описывается следующей дивергенцией Шарма-Миттала

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:\tilde{P}\right]\equiv\frac{1}{1-r}\left[1-\left(\int P(x,t)^q\,\tilde{P}(x)^{1-q}dx\right)^{\frac{1-r}{1-q}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{1-r}\left[\left(c_q/\tilde{c}_q\right)^{\frac{1-r}{1-q}}\left[1-(1-q)\tilde{\beta}_{\{q,r\}}\left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right)\right]^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right]=$$

$$=-\ln_r\left\{\frac{c_q{}^{1/(1-q)}\exp_q\left[-\tilde{\beta}_{\{q,r\}}\left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right)\right]}{\tilde{c}_q{}^{1/(1-q)}}\right\}=$$

$$= -\frac{1}{\tilde{c}_q}\ln_r\left\{c_q^{1/(1-q)}\exp_q\left[-\tilde{\beta}_{\{q,r\}}\left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right)\right]\right\}+\frac{1}{\tilde{c}_q}\ln_r \tilde{c}_q{}^{1/(1-q)} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{c}_q}\left\{-\left[S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(t)-\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\right]-c_q\ln_r\exp_q\left[-\tilde{\beta}_{\{q,r\}}\left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t)-\tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}}\right)\right]\right\} \quad (15.48)$$

с равенством $\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:\tilde{P}\right]=0$ при распределении $P\equiv\tilde{P}$.

При выполнении условия Гиббса $\mathcal{E}_q=\tilde{\mathcal{E}}_q$ (см. Климонтович,1990) и с учётом свойства знакоопределённости (15.46) дивергенции Брегмана $\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:\tilde{P}\right]$ из (15.48) следует справедливое при $q>1,\ r<1$, или $0<q<1, r>1$ неравенство:

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P(t):\tilde{P}\right]\tilde{c}_q = -\left[S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(t)-\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\right]>0, \quad (15.49)$$

Это неравенство обобщает теорему Гиббса на неэкстенсивную статистику Шарма−Миттала. Согласно этой теореме, для замкнутой системы энтропия Шарма−Миттала $S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(t)=\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}-\tilde{c}_q\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$ возрастает до экстремального её значения $\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$ при $q>0$ одновременно с уменьшением положительной дивергенции $\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:\tilde{P}\right]$. Таким образом, дивергенция Брегмана здесь в виде отрицательного вклада в текущую энтропию Шарма−Миттал и потому может быть названа негэнтропией (Шредингер, 1947).

Поскольку информация различия Шарма−Миттал является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того, чтобы состояние равновесия $\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$ было устойчивым, необходимо выполнение следующих неравенств

$$\tilde{c}_q\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:\tilde{P}\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\left[S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(t)-\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\right]<0, \quad (15.50)$$

когда $q>1, r<1$, или $0<q<1, r>1$.

Из этих соотношений следует неравенство для энтропии Шарма−Миттал:

$$\frac{\partial S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(t)}{\partial t} > 0 \quad \text{при } q>1, r<1, \text{ или } 0<q<1, r>1, \qquad (15.51)$$

которое выражат H-теорему для стохастической (q,r)-системы, описываемой энтропией Шарма−Миттал: при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия замкнутой системы $S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(t)$ должна возрастать до экстремального её значения $\tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$, так и убывать в зависимости от выбора численных значений параметров неэкстенсивности q и r.

15.5. Структура уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова, связанных с энтропией Шарма−Миттал

Аномально-диффузионные явления весьма распространены в природе и могут быть адекватно описаны с помощью нелинейных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова, которые нашли широкое применение в различных естественно-научных областях, таких как астрофизика, физика плазмы, квантовая механика, общая и специальная теории относительноти, нелинейная гидродинамика, биофизика и т.п. Рассматриваемые в них явления имеют общий физический механизм, возникающий благодаря кооперативному взаимодействию между отдельными подсистемами совокупной системы. Кооперативные взаимодействия приводят к уменьшению большого числа степеней свобода систем многих тел и тем самым связывают отдельные подсистемы посредством процесса самоорганизации в синергетические объекты. Подобные синергетические системы допускают низкоразмерные описания в терминах нелинейных уравнений ФП, которые характеризуются специфическими типами нелинейных диффузионных вкладов.

Подобные вклады могут быть связаны, в частности, с неэкстенсивной статистической механикой. В научной литературе наиболее подробно изучены ситуации, когда диффузионные вклады записываются как степень плотности вероятности $P(x,t)$ (см., например, Plastino, A. Plastino, 1995; Tsallis, Bukman, 1996; Comptey, Jou, 1996; Shiino, 2001, 2003; Scarfone, Wada, 2007; Schwämmle и др., 2007*;* Wada, Scarfone, 2007, 2009*;* Casas, Nobre, 2019*;* Plastino, Wedemann, 2020).

В последнее время широкое распространение получил метод конструирования уравнения ФПК для любой неэкстенсивной физической системы, связанный с учетом локального производства ее энтропии. Этот метод был разработан на основе линейной неравновесной термодинамики Т. Франком (см. Frank, 2000, 2002), и его содержание подробно изложено в монографии (Frank, 2005). Сущность этого метода состоит в следующем:

Исходным является локальное уравнение непрерывности для плотности вероятности для распределения вероятности состояния $P(\mathbf{r})$ системы в фазовом пространстве $\mathbf{r} := \{\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n; \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ физического статистического ансамбля Гиббса (описывающего микросостояние хаотической системы)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{15.52}$$

которое имеет место как в физическом пространстве $\mathbf{X}$, так и в векторном пространстве скоростей $\mathbf{V}$. При этом нелинейный поток вероятности $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ задается соотношением

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) := -P(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\delta \mathcal{F}(P)}{\delta P} \right), \tag{15.53}$$

в котором величина $\nabla_{\mathbf{r}} \left(\delta \mathcal{F}(P) / \delta P \right)$ является термодинамической силой, а $\mathcal{F}(P)$ – свободная энергия для рассматриваемой системы (Frank, 2005).

Далее при построении уравнения ФПК на основе энтропийного функционала ШМ мы для простоты ограничимся рассмотрением классического стохастического марковского процесса в пространстве скоростей v, которое описывается функцией распределения $P^{\mathcal{SM}}(\mathbf{v}, t)$, информационной энтропией $S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]$ и средней энергией $\mathcal{E}^{\mathcal{SM}}_{\{q\}}$. Тогда функционал $\mathcal{F}^{\mathcal{SM}}$ задается выражением (15.42)

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\{q,r\}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\{q\}} - D^{\mathcal{SM}} \tilde{S}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}, \tag{15.54}$$

в котором

$$\mathcal{E}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(P)=\int\varepsilon(\mathbf{v})P(\mathbf{v})d\mathbf{v},\quad S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]:=\ln_{2-r}\left(\int P^q d\mathbf{v}\right)^{1/(q-1},\qquad (15.55)$$

где $\ln_{2-r}(x)=\dfrac{x^{r-1}-1}{r-1}$; $D^{\mathcal{SM}}\equiv 1/\beta$ – коэффициент диффузии (или коэффициент интенсивности шума), играющий роль температуры в пространстве скоростей (в общем случае $D^{\mathcal{SM}}\neq 1/\beta$); $\varepsilon(\mathbf{v})=\frac{m}{2}\mathbf{v}^2$ – кинетическая энергия частицы (далее предполагается, что $m=1$).

Принимая во внимание формулу $d\ln_{2-r}(x)/dx=1/x^{2-r}$, при вычислении вариационной производной $\delta\mathcal{F}(P)/\delta P$ получим:

$$\frac{\delta}{\delta P}\mathcal{F}^{\mathcal{SM}}(P)=\varepsilon(P)+D^{\mathcal{SM}}\left\{\frac{q}{q-1}P^{q-1}\left(\int P^q d\mathbf{v}\right)^{(r-q)/q-1}\right\}.\qquad (15.56)$$

Соответственно, для потока вероятности, с учетом (15.56), будем иметь

$$\mathbf{J}(\mathbf{v},t)=-P(\mathbf{v},t)\nabla_{\mathbf{v}}\left(\frac{\delta\mathcal{F}^{\mathcal{SM}}(P)}{\delta P}\right)=$$

$$=-P(\mathbf{v},t)\nabla_{\mathbf{v}}\varepsilon(\mathbf{v})-D^{\mathcal{SM}}\frac{q}{q-1}\left(\int P(\mathbf{v},t)^q d\mathbf{v}\right)^{\frac{r-q}{q-1}}P(\mathbf{v},t)\nabla_{\mathbf{v}}\left[P(\mathbf{v},t)^{q-1}\right]=$$

$$=P(\mathbf{v},t)F(\mathbf{v})-D^{\mathcal{SM}}\left(\int P(\mathbf{v},t)^q dv\right)^{\frac{r-q}{q-1}}\nabla_{\mathbf{v}}P^q(\mathbf{v},t).\qquad (15.57)$$

Здесь $F(\mathbf{v})=-\nabla_{\mathbf{v}}\varepsilon(\mathbf{v})=-\mathbf{v}$ – коэффициент линейного дрейфа. Таким образом, нелинейное степенное уравнение ФПК в кинетике Шарма–Миттал имеет вид:

$$\frac{\partial P^{\mathcal{SM}}(\mathbf{v},t)}{\partial t}=-\nabla_{\mathbf{v}}\left[F(\mathbf{v})P^{\mathcal{SM}}(\mathbf{v},t)\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta(t)}\left(\int P^{\mathcal{SM}}(\mathbf{v},t)^q dv\right)^{\frac{r-q}{q-1}}\nabla_{\mathbf{v}}\left[\nabla^2_{\mathbf{v}}P^{\mathcal{SM}}(\mathbf{v},t)\right].\qquad (15.58)$$

Здесь и далее для простоты будем предполагать, что коэффициент диффузии $D^{\mathcal{SM}}(t) = 1/\beta(t)$ зависит только от времени.

Из (15.58) следует, что одномерные нелинейные степенные уравнения ФПК, принадлежащие семейству Шарма−Миталл, имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v,t) = \frac{\partial}{\partial v}\left[v P(v,t)\right] + \frac{1}{\beta(t)} \Upsilon^{SM}[P] \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left[P^q(v,t)\right]. \qquad (15.59)$$

Здесь коэффициент $\Upsilon^{\mathcal{SM}}[P] := \left[\int P(v,t)^q \, dv\right]^{(r-q)/(q-1)}$ зависит только от времени; при этом для различных уравнений ФПК, принадлежащих семейству Шарма−Миттал, имеем:

$$\Upsilon^{\mathcal{TS}}[P] = \lim_{r\to q} \Upsilon^{\mathcal{SM}}[P] = \lim_{r\to q}\left[\int P^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}} = 1, \; q \neq 1, \;\; q > 1/3; \qquad (15.60)$$

$$\Upsilon^{\mathcal{R}}[P] = \lim_{r\to 1} \Upsilon^{\mathcal{SM}}[P] = \lim_{r\to 1}\left[\int P^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}} = \left[\int P^q dv\right]^{-1}, \qquad (15.61)$$

$$\Upsilon^{\mathcal{G}}[P] = \lim_{q\to 1} \Upsilon^{\mathcal{SM}}[P] = \exp\left[(r-1)\int P \ln P dv\right], \qquad (15.62)$$

$$\Upsilon^{\mathcal{BGS}}[P] = \lim_{q\to 1, r\to 1} \Upsilon^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P] = \lim_{q\to 1, r\to 1}\left[\int P^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}} = 1. \qquad (15.63)$$

15.6. Стационарные решения уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова, принадлежащих к семейству Шарма−Миттал

Уравнение ФПК в рамках статистики Шарма-Миттал. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = -v P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st} - \frac{1}{\beta(t)} \mathbf{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} \frac{\partial}{\partial v}\left(P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st}\right) = \mathrm{const}, \qquad (15.64)$$

решение которого имеет вид

$$P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}\exp_{2-q}\left\{-\frac{\alpha_{\{q\}}}{\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}})^{1-q}}v^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}\exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}\right)^2 v^2\right\}, \qquad (15.65)$$

где

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} := \left[\int \tilde{P}(v)^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}} = \frac{\alpha_{\{q\}}(\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}})^{q+1}}{(z_{\{q\}})^2}, \quad \boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} := \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2\mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+r}}, \qquad (15.66)$$

$$\alpha_{\{q\}} := \frac{\beta}{2q}, \quad \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}} := \begin{cases} \left[\dfrac{3q-1}{2q}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}, & q \neq 1; \\ \left[\sqrt{e}\right]^{1-r}, & q \to 1. \end{cases}, \qquad (15.67)$$

$$z_q := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{1-q}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1+q}{2(1-q)}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{1-q}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+q}{2(1-q)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}, & q \in (1/3,1); \\ \sqrt{\pi}, \quad q = 1; \\ \sqrt{\dfrac{1}{q-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{q}{q-1}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{q-1}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3q-1}{2(q-1}\right)}, & q > 1. \end{cases} \qquad (15.68)$$

При выводе (15.65) использована формула $\exp_{2-q}(x) := \left[1+(q-1)x\right]_+^{1/(q-1)}$, в которой выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[X]_+ := \max(X,0)$.

Уравнение ФПК в рамках статистики Тсаллиса. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{TS}}(v)\Big|_{st}$ имеет вид:

$$P^{\mathcal{TS}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}} \exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}}\right)^2 v^2\right\}, \tag{15.69}$$

где

$$\mathcal{K}^{\mathcal{TS}}_{\{q\}} = \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = 1, \;\; \mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}_{\{q\}} = \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = \left[\frac{(z_{\{q\}})^2}{\alpha_q}\right]^{\frac{1}{1+q}} = \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+q}}. \tag{15.70}$$

Уравнение ФПК в рамках статистики Реньи. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{R}}(v)\Big|_{st}$ имеет вид:

$$P^{\mathcal{R}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}} \exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}}\right)^2 v^2\right\}, \tag{15.71}$$

где

$$\mathcal{K}^{\mathcal{R}}_{\{q\}} = \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=1\}} := \begin{cases} [(3q-1)/2q], & q \neq 1; \\ 1, & q \to 1. \end{cases} \tag{15.72}$$

$$\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}_{\{q\}} = \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}}}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+q}} = \begin{cases} \left[\dfrac{(z_{\{q\}})^2(3q-1)}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+q}}, & q \neq 1; \\ \sqrt{2\pi/\beta}, & q \to 1. \end{cases} \tag{5.73}$$

Уравнение ФПК в рамках статистики Ландсберг–Ведрала. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{LV}}(v)\Big|_{st}$ имеет вид:

$$P^{\mathcal{LV}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{LV}}} \exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{LV}}}\right)^2 v^2\right\}, \tag{15.74}$$

$$\boldsymbol{Z}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}} = \lim_{r\to 2-q} \boldsymbol{Z}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} = \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}}}{\beta}\right]^{\frac{1}{3-q}}, \; \mathcal{K}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}} := \begin{cases} \left[\dfrac{3q-1}{2q}\right]^2, q \neq 1; \\ \left[\sqrt{e}\right]^{q-1}, \quad q \to 1. \end{cases}$$

(15.75)

15.7. Решение нестационарных уравнений ФПК, связанных с энтропией Шарма−Миттал

Для решения нестационарного диффузионного уравнений ФПК (15.59) (записанного в одномерном пространстве скоростей v) с начальным условием $P^{\mathcal{SM}}(v,0) = \delta(v - v_0)$, используем анзац-подход. В качестве пробной функции выберем функцию

$$P^{\mathcal{SM}}(v,t) = \frac{1}{\mathbf{Z}_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t)} \exp_{\{2-q\}} \left\{ -\beta_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t) \left[v - v_m(t)\right]^2 \right\}, \tag{15.76}$$

где

$$\beta_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t) := \left(z_{\{q\}} / \mathbf{Z}_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t) \right)^2, \quad \mathbf{Z}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t) := \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}}{\beta} t \right]^{1/(1+r)}.$$

(15.77)

Подставляя (15.76) в уравнение (15.59), получим следующие дифференциальные уравнения первого порядка для величин $\mathbf{Z}_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t)$ и $v_m(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} = -\mathbf{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} + \frac{2q}{\beta} z_{\{q\}}^2 K_{q.r} \left(\mathbf{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} \right)^{-r}, \tag{15.78}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_m(t) = -v_m(t). \tag{15.79}$$

Отсюда следует решение (Plastino, Plastino,1995)

$$\mathbf{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} = \left\{ \frac{2q}{\beta} z_{\{q\}}^2 K_{\{q.r\}} \left[1 - \exp\left(1 - (1+r)t\right) \right] \right\}^{1/(1+r)}, \tag{15.80}$$

$$\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_0 \exp(-t)\,. \tag{15.81}$$

В заключение заметим, что среди неэкстенсивных энтропий двухпараметрическая энтропия Шарма−Миттал (ШМ) занимает особое место, поскольку она позволяет получить ряд однопараметрических распределений, которые наблюдаются в различных физических, природных и искусственных системах.

В данной главе функционал Шарма-Миттал рассматривается как форматор семейства классической и деформированных однопараметрических энтропий, состоящего из энтропий Реньи, Тсаллиса, Ландсберга−Ведрала, Гаусса и Гиббса. Все эти энтропии связаны равенствами, представляющими чередования обычных $(\ln, \exp)$ и деформированных $(\ln_q,\ \exp_q)$ логарифмов и экспонент. Здесь было показано, что энтропия Шарма−Миттал подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем. Построена двухпараметрическая термодинамика неэкстенсивных систем для этой энтропии и показана её взаимосвязь с обобщёнными однопараметрическими термодинамиками, основанными на указанных выше деформированных энтропиях семейства ШМ. С учетом свойства выпуклости дивергенции Брегмана показано, что для энтропии ШМ сохраняется принцип максимума равновесной энтропии и доказаны теорем Гиббса и *H*-теорема, описывающая эволюцию хаотической системы во времени. Рассмотрен вывод степенных уравнений Фоккера−Планка− Колмогорова, соотнесенных с энтропией ШМ. При этом получаемые диффузионные уравнения записаны таким образом, что их стационарные решения являются вероятностными распределениями, максимизирующими энтропию ШМ для неэкстенсивных систем. Использован анзац-метод для получения нестационарного решении одномерного уравнения ФПК. Сконструированные указанным способом степенные уравнения Фоккера−Планка−Колмогорова могут найти применение в различных областях науки. В частности, выведенные здесь нелинейные диффузионные уравнения ФПК могут быть использованы в эпидемиологии при предсказании распространения эпидемий и пандемий.

Библиография

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Клочкова Л.В., Орлов Ю.Н., Тишкин В.Ф. Математическое моделирование стохастических процессов распространения вирусов в среде обитания людей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 114. 17 с.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астро-физических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

Abe S. Heat and entropy in nonextensive thermodynamics: transmutation from Tsallis theory to Rényi-entropy-based theory // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001. V. 300. № 3. P. 417-423.

Aktürk E., Bagci G. B., Sever R. Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? // 2007. Eprint arXiv: cond-mat/0703277.

Aktürk O., Aktürk E., Tomak M. Can Sobolev Inequality Be Written for Sharma-Mittal Entropy?// Intern. J. Theor.l Phys. 2008. V. 47. № 12, P. 3310-3320.

Amigy J.M., Balogh S.G., Hernändez S.A. Brief Review of Generalized Entropies // Entropy. 2018. V. 20. P. 813.

Aptekarev A. I., Dehesa J. S., Sanchez-Moreno P., Tulyakov D. N. Asymptotics of L_p-norms of Hermite polynomials and Renyi entropy of Rydberg oscillator states // Contemp. Math. 2012a. V. 578. P. 19-29.

Aptekarev A. I., Dehesa J. S., Sanchez-Moreno P., Tulyakov D. N. Rényi entropy of the infinite well potential in momentum space and Dirichlet-like trigonometric functionals // J Math. Chem. 2012b. № 50. P. 1079-1090.

Aptekarev A. I.,, Tulyakov D. N., Toranzo I. V., Dehesa J. S. Renyi entropies of the highly-excited states of multidimensional harmonic oscillators by use of strong Laguerre asymptotics // Eur. Phys. J. B. 2016. V. 89. P. 85-97.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 286 p.

Beck C. Generalised information and entropy measures in physics // Contemp. Phys. 2009. V. 50. P. 495-510.

Bialas A., Czyz W. Renyi entropies of a black hole from Hawking radiation // EPL (Europhysics Letters). 2008. V. 83. № 6. P. 60009 (Peebles, 1980;

Büyükkılıç F.,Demirhan D., Güleç A. A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases // Phys. Lett. A 1995. V. 197. № 3. P. 209-220.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics// Bras. J. Phys**.** 1999. V. 29**.** № 1. P. 91-107.

Borges E., Roditi I. A family of nonextensive entropies // Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P.399-402.

Casas G.A., Nobre F.D. Nonlinear Fokker-Planck equations in super-diffusive and sub-diffusive regimes // J. Math. Ph. 2019. V. 60. P. 053301 (1-13).

Chavanis P.H. Generalized thermodynamics and Fokker-Planck equations: applications to stellar dynamics and two-dimensional turbulence // Phys. Rev. E 2003. V. 68. P. 036108

Chavanis P.H., Delfini L. Dynamical stability of systems with long-range interactions: application of the Nyquist method to the HMF model // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 69. № 3. P. 389-429.

Curado E. M. F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. A: Mathematical and General.1991. V. 24. № 2. P. L69-72

Colombo E.H., Anteneodo C. Nonlinear population dynamics in a bounded habitat // J. Theor. Biol. 2018. V. 446. P.11-18.

Combe G., Richefeu V., Stasiak M., Atman A.P.F. Experimental validation of a nonextensive scaling law in confined granular media // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 115. P. 238301.

Comptey A., Jou D. Non-equilibrium thermodynamics and anomalous diffusion // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. V. 29 P. 4321-4329.

Curado E.M.F., Souza A.M.C., Nobre F.D., Andrade R.F.S. Carnot cycle for interacting particles in the absence of thermal noise // Phys. Rev. E. 2014. V. 89. P. 022117.

Czachor M., Naudts J. Thermostatistics based on Kolmogorov-Nagumo averages: unifying framework for extensive and nonextensive generalizations // Phys. Lett. A. 2002. V. 298. № 5-6. P 369 -374.

Daroczy Z. Generalized information functions // Inf. Control. 1970. V. 16. № 1. P. 36–51.

Du J. Test of nonextensive statistical mechanics by solar sound speeds // Europhys. Lett. 2006. V. 75. № 6. P. 861-867.

Esquivel A., Lazarian A. Tsallis Statistics as a Tool for Studying Interstellar Turbulence // Astrophys. J. 2010. V. 710. № 1. P. 125-132.

Fa K.S., Lenzi E.K Thermostatistical aspects of generalized entropies // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V.20. № 2. P 227 -233.

Frank T. D. On Nonlinear and Nonextensive Diffusion and the Second Law of Thermodynamics // Physics Letters A. 2000. V. 267. № 5-6. P. 298-304.

Frank T. D. Stability Analysis of Stationary States of Mean Field Models Described by Fokker-Planck Equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2002. V. 189. №. 3-4. P.199-218.

Frank, T.D. Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany. 2005. 404 p.

Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalized thermostatistics // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2001. V. 292. № 1. P. 392-410.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543–549.

Grassberger P. On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J. Statist. Phys. 1981. V. 26. № 1. P. 173-179.

Grassberger P. Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures // Physics Letters A. 1985. V. 107. № 3. P. 101-105.

Grassberger P., Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach **//** Physica D: Nonlinear Phenomena. 1984. V. 13. № 1-2. P. 34-54.

Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141–1151.

Hanel R., Thurner S., Tsallis C. Limit distributions of scale-invariant probabilistic models of correlated random variables with the *q*-Gaussian as an explicit example // Eur. J. Phys. B. 2009. V. 72. № 2. P. 263-268.

Havrda J., Charvat F. Quantiication method of classiication processes. Concept of structural α-entropy // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 8. № 3. P. 435-444.

Ito N., Tsallis C. Specific heat of the harmonic oscillator within generalized equilibrium statistics // Nuovo Cimento D. 1989. V. 11. № 6. P. 907-911.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1963. V.3. P.160.

Jizba P., Arimitsu T. Observability of Renyi's entropy // Physical Review E. 2004. V. 69. № 2. id. 026128

Kaniadakis G., Lissia M., Scarfone A. M. Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics // Physical Review E, 2005. V. 71. №4. id. 046128.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P 354–365.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V.6. № 6 P. 587-597.

Kolesnichenko A. V., Chetverushkin B. N. Kinetic derivation of a quasihydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. V. 28. P.547-576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Landberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-217.

Livadiotis G., McComas D.J. Understanding Kappa Distributions: A Toolbox for Space Science and Astrophysics // Space Sci. Rev. 2013. V. 175. P. 183-214.

Lenzi E.K., Mendes R.S. Collisionless Boltzmann equation for systems obeying Tsallis distribution // Eur. J. Phys. B. 2001. V. 21. № 3. P. 401-406.

Lenzi E. K., Scarfone A. M. Extensive-like and intensive-like thermodynamical variables in generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2012. V. 391. № 8. P. 2543-2555.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid. Mech. 1974. V. 62. P. 331-358.

Mandelbrot B.*B.* Les Objects Fractals. Forms, Hazard et Dimension. Paris: Flammarion. 1975. 195 p.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 365 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982. 460 p.

Mariz A.M. On the irreversible nature of the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1992. V. 165. № 5-6. P. 409-411.

Masi M. A step beyond Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 2005. V. 338. P. 3–5.

Mulansky M., Pikovsky A. Energy spreading in strongly nonlinear disordered lattices // N. Journ. Phys. 2013. V.15. P. 053015.

Nagy Á., Romera E. Maximum Rényi entropy principle and the generalized Thomas-Fermi model // Physics Letters A. 2009. V. 373. № 8-9. P. 844-846.

Naudts J. Continuity of a class of entropies and relative entropies // Rev. Math.Phys. 2004. V.16. P. 809822; Errata. Rev. Math. Phys. V.21, P. 947-948.

Newman W.I., Sagan C. Galactic civilizations: Population dynamics and interstellar diffusion // Icarus 1981. V. 46. P. 293-327.

Nielsen F., Nock R. A closed-form expression for the Sharma-Mittal entropy of exponential families // J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. 2012. V. 45. № 3, id. 032003.

Nobre F.D., Rego-Monteiro M.A., Tsallis C. Nonlinear relativistic and quantum equations with a common type of solution // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 140601.

Parvan A. S., Biro T. S. Thermodynamical limit in non-extensive Renyi statistics // Physics Letters A. 2005. V. 340. № 5-6. P. 375-387.

Pickup R.M., Cywinski R., Pappas C., Farago B., Fouquet P. Generalized Spin-Glass Relaxation // Phys. Rev. Lett. 2009. V.102. № 9. id. 097202.

Plastino A.R. Plastino A.Non-Extensive Statistical Mechanics and Generalized Fokker-Planck Equation // Physica A: Statis. Mech. & Appl. 1995. V. 222. P. 347-354.

Plastino A., Plastino A.R. On the universality of thermodynamics' Legendre transform structure // Phys. Lett. A. 1997. V. 226. № 5. P. 257-263.

Plastino A.R., Casas M., Plastino A. A nonextensive maximum entropy approach to a family of nonlinear reaction-diffusion equations // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 280. № 3. P. 289-303.

Plastino A.R., Wedemann R. S. Nonlinear Fokker–Planck Equation Approach to Systems of Interacting Particles: Thermostatistical Features Related to the Range of the Interactions // Entropy. 2020. V. 22. P.163 (1-13).

Ramshaw J.D. H-theorems for the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1993a. V. 175. № 3-4. P. 169-170.

Ramshaw J.D. Irreversibility and generalized entropies // Phys. Lett. A. 1993b. V. 175. № 3-4. P. 171-172.

Renyi A. On measures of entropy and information // In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. University California Press. Berkeley. 1961. V. 1. P. 547-561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Ribeiro M.S., Nobre F.D., Curado, E.M.F. Time evolution of interacting vortices under overdamped motion // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 021146.

Scarfone A. M. Thermal and mechanical equilibrium among weakly interacting systems in generalized thermostatistics framework // Physics Letters A. 2006.V. 355. № 4-5. P. 404-412.

Scarfone A. M. Legendre structure of the thermostatistics theory based on the Sharma Taneja Mittal entropy //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2006. V. 365. № 1. P. 63-70.

Scarfone A. M., Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72. № 2. id. 026123.

Scarfone A. M., Wada T. Equivalence among different formalisms in the Tsallis entropy framework // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. V. 384. № 2. P. 305-317.

Schwämmle V., Curado E. M. F., Nobre F. D. Nonlinear Fokker-Planck Equations Related to Standard Thermostatistics // Complexity, Metastability and Nonextensivity 2007. V. 84. P. 152-156.

Sharma B.D., Mittal D.P. New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. & Syst. Sci. 1975. V.2. P. 122-133.

Shiino M. *H*-theorem with generalized relative entropies and the Tsallis statis Tics // J. Phys. Soc. Jpn. 1998. V.67. № 11. P. 3658-3660.

Shiino M. Free energies based on generalized entropies and h-theorems for nonlinear Fokker–Planck equations // J. Math. Ph. 2001 V. 42, № 6. P. 2540-2553.

Shiino M. Stability analysis of mean-field-type nonlinear Fokker-Planck equations associated with a generalized entropy and its application to the self-gravitating system // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 056118 (1-16).

Tirnakli U., Torres D.F. Exact and approximate results of non-extensive quantum statistics // Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. № 4. P. 691-698.

Tsallis C., Bukman D.J. Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermostatistical basis // Phys. Rev. E 1996. V.54. P. R2197-R2200.

Tsallis C., Mendes R., Plastino A. The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P.543-554.

Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487.

Tsallis C. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian Journal of Physics. 1999. V. 29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Historical background and present status // In: S. Abe and Y. Okamoto (Eds.), Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications. Series Lecture Notes in Physics. Springer. Heidelberg. 2001. 277p.

Tsallis C. Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 13. P. 371-391.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Wada T., Scarfone A.M. A non self-referential expression of Tsallis' probability distribution function // Eur. J. Phys. B. 2005. V. 47. № 4. P. 557-561.

Wada T., Scarfone A.M. Connections between Tsallis' formalisms employing the standard linear average energy and ones employing the normalized q-average energy // Physics Letters A. 2005. V. 335. P. 351-362.

Wada T., Scarfone A.M. On the non-linear Fokker-Planck equation associated with κ -entropy// American Institute of Physics / AIP Conference Proceedings. 2007. V. 965. P. 177-181.

Zaripov R. Evolution of the Entropy and Renyi Difference Information during Self-Organization of Open Additive Systems // Russian Physics Journal. 2005. V. 48. № 3. P. 267-274.

Приложения

Приложение А:
Статистические операторы квантовых систем

Напомним некоторые понятия статистической механики квантовых систем в той мере, насколько это требуется для понимания дальнейшего (см., например, Зубарев, 1971; фон Нейман, 1064)

Чистые квантовые состояния. В отличие от классической статистической механики, в которой микроскопическое состояние системы описывается точкой $\mathbf{r} \equiv \{\mathbf{x}^n \mathbf{p}^n\} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ в $6n$-мерном фазовом пространстве, а эволюция состояния во времени − уравнениями Гамильтона, в квантовой механике состояние динамической системы описывается волновой функцией $\psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t)$(или, короче, $\psi(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ − совокупность координат $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$), заданной в гильбертовом пространстве и зависящей от времени и координат частиц, или от другой системы одновременно измеряемых физических величин. Заметим, что используемые в квантовой механике волновые функции в общем случае комплекснозначны и нормированы на единицу:

$$\left(\psi^*(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t)\right) = 1, \qquad \text{(A.1)}$$

где звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Скобки означают скалярное произведение функций в гильбертовом пространстве состояний, т.е.

$$\left(\psi_1^*, \psi_2\right) = \int \psi_1^*(\mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \qquad \text{(A.2)}$$

Динамические переменные в квантовой механике представляются линейными самосопряженными (эрмитовыми) операторами[57] $\hat{A}$,

---

[57]) Оператор $\hat{A}^+$ называется сопряженным оператору $\hat{A}$, если для каждой пары функций ψ_1 и ψ_2 имеет место соотношение $\left\langle \psi_1, \hat{A}\psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}^+ \psi_1, \psi_2 \right\rangle$. Эрмитов (или самосопряженный) оператор $\hat{A}$ сов-

действующими в гильбертовом пространстве состояний на волновые функции ψ (далее операторы будем обозначать буквой со «шляпкой» над ней). Их спектр определяет возможные наблюдаемые значения физических величин. Среднее значение динамической переменной $\hat{A}$ в произвольном квантовом состоянии ψ определяется выражением

$$\langle \hat{A} \rangle = \left(\psi^*, \hat{A}\psi\right), \tag{A.4}$$

Эта формула дает только вероятностное предсказание о наблюдаемых значениях любых физических величин. Лишь в частном случае, когда ψ есть собственная функция оператора $\hat{A}$, формула (А.4) дает точное значение величины $\hat{A}$ в состоянии ψ.

Статистические аспекты квантовой механики описываются с помощью ансамбля невзаимодействующих «копий» системы, находящихся в одном и том же квантовом состоянии ψ. Введенный таким способом статистический ансамбль называется чистым квантовым ансамблем.

Смешанные квантовые ансамбли. В более общем случае в квантовой статистической механике вводятся так называемые смешанные ансамбли, которые основаны на неполном наборе данных о системе. Рассмотрим ансамбль, состоящий из большого числа тождественных невзаимодействующих копий данной системы, которые могут находиться в некоторых различных квантовых состояниях ψ_r ($r = 1, 2, \ldots$). При этом определены лишь вероятности w_r ($w_r \geq 0$, $\sum_r w_r = 1$) обнаружить систему в каждом из возможных квантовых состояний.

Тогда среднее значение любой динамической величины A в смешанном ансамбле определяется выражением

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_r w_r \left(\psi_r^*, \hat{A}\psi_r\right), \tag{A.5}$$

падает со своим сопряженным: $\hat{A} = \hat{A}^+$. Собственные значения эрмитовых операторов являются действительными числами.

где $\left(\psi_r^*, \hat{A}\psi_r\right)$ – квантово-механическое среднее оператора $\hat{A}$ в состоянии r. В случае чистого ансамбля все вероятности w_r равны нулю, кроме одной, равной единице.

Для изучения смешанных ансамблей вводится статистический оператор $\hat{\rho}$ следующим способом. Для этого запишем линейный оператор $\hat{A}$ в матричном $\mathbf{x}$-представлении, определив его с помощью матричных элементов

$$\hat{A}\psi(\mathbf{x}) = \int A(\mathbf{x},\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'. \tag{A.6}$$

Подставляя (А.7) в (А.6), получим

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \int A(\mathbf{x},\mathbf{x}')\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}')d\mathbf{x}d\mathbf{x}' = \mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}), \tag{A7}$$

где

$$\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_r w_r \psi_r(\mathbf{x})\psi_r^*(\mathbf{x}') \tag{A.8}$$

– статистический оператор в матричном $\mathbf{x}$-представлении, который называется матрицей плотности. Статистический оператор (А.8) зависит от $2n$ переменных $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n;\mathbf{x}'_1,\ldots,\mathbf{x}'_n$.

Заметим, что статистический оператор $\hat{\rho}$ является эрмитовым, он положительно определен, т.е. не имеет отрицательных собственных значений, и подчиняется условию нормировки

$$\mathbf{Sp}\hat{\rho} = 1, \tag{A.9}$$

так как $\mathbf{Sp}\hat{\rho} \equiv \int \hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_r w_r \left(\psi_r^*, \psi_r\right) = 1$. Кроме того, если число частиц в квантовой системе не фиксировано, то n играет роль дополнительного квантового числа, характеризующего возможные состояния, и смешанный ансамбль должен включать системы с различными числами частиц.

Формула (А.7) удобна тем, что шпур матрицы инвариантен относительно унитарных преобразований операторов. Поэтому формула (А.7) не зависит от представления операторов $\hat{A}$ и $\hat{\rho}$.

Уравнение Лиувилля в квантовом случае. Рассмотрим эволюцию во времени статистического оператора для ансамбля систем с гамильтонианом $\hat{H}$, который может зависеть от времени. Статистический оператор в момент времени имеет вид (А.7), где w_r не зависят от t, так как они соответствуют распределению вероятностей при $t=0$. Функции $\psi_r(\mathbf{x},t)$ – решения уравнения Шредингера (А.5), удовлетворяющие начальному условию $\psi_r(\mathbf{x},t)\big|_{t=0}=\psi_r(\mathbf{x})$, где $\psi_r(\mathbf{x})$– некоторая система волновых функций, определяющих статистический оператор при $t=0$:

$$\hat{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\sum_r w_r\psi_r(\mathbf{x})\psi_r^*(\mathbf{x}'). \qquad (А.10)$$

Статистический оператор (А.8) удовлетворяет следующему уравнению движения (квантовому уравнению Лиувилля в операторной форме)

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=\left[\hat{H},\hat{\rho}\right]=(\hat{H}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{H}), \qquad (А11)$$

где $\hat{H}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ – самосопряжпенный оператор (гамильтониан), действующий в гильбертовом пространстве на матрицу плотности $\hat{\rho}$; $\hbar$ – постоянная Планка; $i\hbar\left[\hat{H},\hat{\rho}\right]=i\hbar(\hat{H}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{H})$ – квантовые скобки Пуассона. В частностном случае для системы из n одинаковых бесспиновых частиц массы m, взаимодействующих между собой с потенциалом $\Phi(|\mathbf{x}|)$, оператор энергии $\hat{H}$ имеет вид:

$$\hat{H}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}_j^2}+\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}^{N}\Phi\left(\left|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k\right|\right)\right\}\prod_{i=1}^{n}\delta(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_i'). \qquad (А.12)$$

Коммутативность операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{H}$ и их эрмитовость показывают, что они имеют общую систему собственных функций. Поэтому статистический оператор в случае статистического равновесия можно представить в виде (А.10), где $\psi_r(\mathbf{x})$ – собственные функции гамильтониана $\hat{H}\psi_r=E_r\psi_r$.

Заметим, что в квантовой механике не все собственные функции являются допустимыми волновыми функциями системы, а лишь те из них, которые удовлетворяют необходимым свойствам симметрии. Для системы частиц с нулевым или целым, кратным $\hbar$, спином допустимы лишь симметричные относительно одновременной перестановки координат и спинов частиц волновые функции. В этом случае говорят, что частицы подчиняются статистике Бозе.

Для системы частиц с полуцелым в единицах $\hbar$ спином допустимы лишь антисимметричные относительно перестановки координат и спинов волновые функции. В этом случае говорят, что частицы подчиняются статистике Ферми.

В выражении (А.10) для статистического оператора предполагается суммирование не по всем, а лишь по допустимым квантовым состояниям системы.

Приложение Б: Вычисление интеграла

$$J_q^{(n)} := \frac{15}{\pi^4}\int_0^\infty \frac{x^n}{\left[\exp_{2-q}(x)-1\right]^q}dx .$$

Преобразуем этот интеграл, сделав подстановку

$$\exp_{2-q}(x) \equiv [1+(q-1)x]^{1/(q-1)} = 1/z . \tag{Б.1}$$

Тогда

$$x = \frac{z^{1-q}-1}{q-1} = \ln_q z , \quad \left[\exp_{2-q} x - 1\right]^q = \frac{(1-z)^q}{z^q} , \tag{Б.2}$$

$$dx = \frac{d}{dz}(\ln_q z)dz = z^{-q}dz , \quad J_q^{(n)} := -\frac{15}{\pi^4 (q-1)^n}\int_0^\infty \frac{(z^{1-q}-1)^n}{(1-z)^q}dz . \tag{Б.3}$$

Отсюда следует, что

$$J_q^{(n)} = -\frac{15}{\pi^4 (q-1)^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 \frac{z^{(1-q)(n-k)}}{(1-z)^q}dz , \tag{Б.4}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k = 0,1,2,... \le n = 0,1,2,...)$.

Используя теперь известную формулу для определенного интеграла

$$\int_0^1 t^p (1-t)^{-q} dt = B(p+1, 1-q) = \frac{\Gamma(1-q)\Gamma(p+1)}{\Gamma(2+p-q)}, \quad (q<1,\ p>-1),$$

(Б.5)

где $p \equiv (1-q)(n-k)$; $B(s,r) = \int_0^1 \dfrac{t^{s-1}}{(1-t)^{1-r}} dt = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}$ – интеграл Эйлера первого рода (Бета-функция); $\Gamma(s)$ – Гамма-функция, получим:

$$J_q^{(n)} = -\frac{15}{\pi^4 (q-1)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k B\left(1-q, (1-q)(n-k)+1\right) \right] =$$

$$= -\frac{15\,\Gamma(1-q)}{\pi^4 (q-1)^n} \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(n-k)n!}{k!(n-k+1)!} \frac{\Gamma\left[(1-q)(n-k)\right]}{\Gamma\left[(1-q)(n-k+1)\right]} \right\}. \qquad \text{(Б.6)}$$

В частности,

$$J_q^{(3)} = \frac{15}{\pi^4 (1-q)^3} \sum_{k=0}^{3} \left[C_3^k B\left(1-q, (1-q)(3-k)+1\right) \right] =$$

$$= \frac{90 q\,\Gamma(-q)}{\pi^4 (q-1)^3} \sum_{k=0}^{3} \left\{ \frac{(3-k)}{k!(4-k)!} \frac{\Gamma\left[(1-q)(3-k)\right]}{\Gamma\left[(1-q)(4-k)\right]} \right\}. \qquad \text{(Б.7)}$$

Приложение С: Обобщённое распределение Гаусса

В классической статистической теории равновесных флуктуаций макроскопическая функция распределения (9.12) флуктуирующих термодинамических величин A_j записывается в виде (*Callen* 1960; *Зубарев*, 1971):

$$W(A_1, A_2, ..., A_n) = Q \exp\left\{ \frac{1}{k} \left[\hat{S} - S - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \left(A_k - \langle A_k \rangle \right) \right] \right\}, \qquad \text{(С.1)}$$

где

$$\mathbf{X} = \partial S / \partial \langle \mathbf{A} \rangle \tag{C.2}$$

– интенсивные параметры системы, термодинамически сопряжённые с осреднёнными экстенсивными параметрами $\langle \mathbf{A} \rangle = \int \mathbf{A} W(\mathbf{A}) d\mathbf{A}$; $S(\langle \mathbf{A} \rangle)$ – энтропия в квазиравновесном большом каноническом ансамбле, характеризующемся полным числом частиц N, объемом системы V и набором значений термодинамических переменных A_j); $\hat{S}(\mathbf{A})$ – энтропия микроканонического ансамбля, в котором параметры $\mathbf{A}$ заданы в области $d\mathbf{A}$ вблизи значений $\mathbf{A}$.

Сделаем существенное для дальнейшего замечание. Вследствие термодинамической эквивалентности этих двух статистических ансамблей энтропия $S(\mathbf{X})$ в большом каноническом ансамбле является такой же функцией от $\langle \mathbf{A} \rangle$, как энтропия в соответствующем микроканоническом ансамбле от $\mathbf{A}$, т. е. S и $\hat{S}$ – одинаковые функции, но от разных переменных. Это предположение фактически лежит в основе, так называемой квазитермодинамической теории флуктуации, впервые развитой Эйнштейном (*Einstein*, 1910), который, как изветно, исходил из интуитивных соображений. Поэтому разность $(\hat{S} - S)$ можно разложить в ряд по степеням $\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle$ и ограничиться, из-за малости флуктуаций, членами второго порядка. С учетом (C.2) получим

$$\hat{S} - S = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \, \Delta(A_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \langle A_i \rangle \partial \langle A_k \rangle} \mathrm{X}_k \, \Delta(A_i) \Delta(A_k) \, . \tag{C.3}$$

Подставляя (C.3) в (C.1) и учитывая, что линейные члены сокращаются, получим функцию распределения для флуктуаций:

$$W(A_1, A_2, \dots, A_n) = \Omega_0 \exp\left\{ \frac{1}{2k} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \langle A_i \rangle \partial \langle A_k \rangle} \Delta(A_i) \Delta(A_k) \right\}; \tag{C.4}$$

при этом константа Ω_0 определяется из условия нормировки

$$\int W(A_1, A_2, \dots, A_n) dA_1 dA_2 \dots dA_n = 1 \, . \tag{C.5}$$

Следовательно, вероятность флуктуации величин A_i определяется распределением Гаусса (C.4).

Распределение Гаусса (С.4) запишем в виде

$$W = \Omega_0 \exp\left\{\frac{1}{2k}\mathbf{g} : \alpha\alpha\right\}, \tag{С.6}$$

где
$$g_{ik} = -\frac{\partial^2 S}{\partial\langle A_i\rangle \partial\langle A_k\rangle}, \quad \alpha_j = \Delta A_j = A_j - \langle A_j\rangle,$$

или, после вычисления нормировочной постоянной Ω_0 ,

$$W = \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\Omega_0 \exp\left\{\frac{1}{2k}\mathbf{g} : \alpha\alpha\right\}, \tag{С.7}$$

Рассмотренный здесь кратко классический подход к нахождению макроскопической функции распределения вероятности флуктуирующих термодинамических величин A_j может быть обобщён на случай неэкстенсивной статастической механики Тсаллиса. Ключевым моментом является следующее обобщение соотношения (С.4) для статистического распределения функции W (см. *Cheme, de Mello*, 1994):

$$W = \Omega_{0q}\left\{1 - \frac{1-q}{2k}\sum_{i,j}^{n} \mathrm{g}_{ij}(q)\Delta_q A_j\, \Delta_q A_i\right\}^{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= \Omega_{0q} \exp_q\left\{-\frac{1}{2k}\mathbf{g}(q) : \Delta_q\mathbf{A}\Delta_q\mathbf{A}\right\}, \tag{С.8}$$

где $\Delta_q\mathbf{A} \equiv \mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle_q W(\mathbf{A})^{1-q}$ – флуктуация параметра $\mathbf{A}$ в статистике Курадо−Тсаллиса (см. *Curado,Tsallis*, 1991; *Зарипов,* 2002). Выбор в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса макроскопическая функция распределения (С.8) для q-флуктуаций $\Delta_q\mathbf{A}$ определяется существующей аналогией между классическим и деформированным каноническим распределением Гиббса (9.7) (см. *Колесниченко,* 2019). Заметим, что именно такая функция распределения была положена в основу обобщения в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса необратимой термодинамики в работе (*Cáceres*, 1995).

Оглавление

Подписано в печать 22.01.2024. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 30,8. Тираж 100 экз. Заказ М-4
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4