



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



О.В.Николаева, Е.А.Забродина,
Н.Н.Фимин, В.М.Чечеткин

Гидродинамические течения в нагреваемых трубах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Николаева О.В., Забродина Е.А., Фимин Н.Н., Чечёткин В.М. Гидродинамические течения в нагреваемых трубах. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2020. 46 с.

<https://doi.org/10.20948/mono-2020-nikolaeva>

<https://keldysh.ru/e-biblio/nikolaeva/index.pdf>



О.В. Николаева

Е.А. Забродина

Н.Н. Фимин

В.М. Чечёткин

**Гидродинамические
течения
в нагреваемых трубах**

**О.В. Николаева, Е.А. Забродина,
Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин**

Гидродинамические течения в нагреваемых трубах

ИПМ им. М.В. Келдыша
Москва – 2020

УДК 519.688

ББК 22.193

Г 464

Гидродинамические течения в нагреваемых трубах / О.В. Николаева, Е.А. Забродина, Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020. — 46 с.

ISBN 978-5-98354-057-6

Рассматривается модельная задача о переносе тепла от неравномерно нагреваемых стенок трубы к основной массе гидродинамического течения (имеющего относительно низкую температуру), или, иными словами, первичные стадии релаксации температуры и давления жидкости в нагреваемой трубе. Проводятся расчеты с помощью программ, использующих уравнения Навье–Стокса, модифицированного Барнетта, и кинетического уравнения типа БГК в различных сочетаниях.

Рецензент чл.-корр. РАН В.Ф. Тишкин

Работа выполнена в рамках госзадания

ISBN 978-5-98354-057-6

© ИПМ им.М.В.Келдыша, 2020

Введение. Гидродинамическое приближение Барнетта и кинетическое уравнение БГК

Задачи, связанные с различными аспектами гидродинамического движения в условиях, существенно отличающихся от равновесных и требующих при этом особых условий замыкания (например, при наличии значительных температурных градиентов и внутренних интенсивных источников/стоков тепла — типа фазовых переходов — в течении, а также в условиях присутствия значительной локальной пространственной неоднородности тензора напряжений), требуют использования принципиально иных математических моделей, чем известные и широко используемые подходы, основанные на решении уравнений Эйлера или Навье–Стокса (УНС). В частности, проблемы описания эволюции двухфазных (парожидкостных) систем в охлаждающих контурах АЭС, котлоагрегатах тепловых станций и пр., приводят к мысли о целесообразности введения в рассмотрение (и построения соответствующей вычислительной модели) системы уравнений Барнетта [1]–[2], являющихся следующим за уравнениями Навье–Стокса приближением, получаемым методом Чэпмена–Энскога [3]–[5] из кинетического уравнения Больцмана. При этом макроскопические параметры гидродинамического течения получаются асимптотическим разложением решения этого уравнения по малому параметру (в качестве которого выбирается число Кнудсена $\text{Kn} \rightarrow 0$). При этом каждому члену этого разложения соответствует надлежащее число слагаемых в выражениях для тензора напряжений σ_{ij} и теплового потока q (в отличие от метода Гильберта, где строится разложение по малому параметру плотности ρ , температуры T и компонент скорости среды v_i).

Помимо использования в выделенной зоне гидродинамического расчета приближения Барнетта (требующего определенной модификации для непосредственного применения, поскольку следует учитывать факт наличия неустранимых неустойчивостей при численном решении “нерегуляризованного” уравнения Барнетта), достаточно привлекательной является возможность применения кинетического подхода в существенно неравновесном слое жидкости, прилегающем к сильно и неравномерно нагретой стенке (либо ко внешней по отношению к нагреваемой аэродинамическим потоком поверхности — как, например, при гиперзвуковом режиме обтекания). Для этого представляется вполне правомочным обратиться к кинетическому уравнению Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК). Оно является максимально простым по структуре и в то же время достаточно адекватно передающим физическую картину, имеющую место при взаимодействии молекул среды в пристеночной области (обобщенном слое Кнудсена).

В настоящей работе рассматриваются несколько вариантов численного моделирования течения в трубе с нагреваемыми стенками:

1) введение в рассмотрение рассчитываемого по *модифицированному* (далее это уточнение подразумевается неявно) Барнетту погранслоя при наличии основного потока, описываемого уравнениями Навье–Стокса;

2) наличие погранслоя, полностью рассчитываемого с помощью уравнения БГК при условии основного потока, рассматриваемого в рамках УНС;

3) расчет всей массы движущейся жидкости в трубе по Барнетту;

4) введение в рассмотрение переходного слоя жидкости, расположенного между кинетическим погранслоем (рассчитываемым по кинетической модели БГК) и основной массой потока (рассчитываемой по Навье–Стоксу или Барнетту).

Можно утверждать, что сочетание кинетического расчета с гидродинамическим может быть оправдано в ряде важных случаев, причем главными основаниями для такого комплексного кинетически–гидродинамического подхода являются эффекты существенной неравновесности течения в областях резких градиентов температур, плотностей и при возможном фазовом переходе в жидкости (в этом случае гидродинамика выходит за рамки своей применимости из-за непригодности метода усреднения по всему объему среды, используемого в методах Гильберта, Грэда, Чэпмена–Энскога перехода от кинетического уравнения к системе гидродинамических уравнений). Чрезвычайно важной и сложной задачей при таких сложных расчетах является учет взаимной передачи информации о среде через формальную границу расчетных областей (в каждой из областей моделирование ведется на основании своей методики: БГК — Барнетт, Барнетт — Навье–Стокс и т.д.)

1. Физическая постановка задачи о переносе тепла от стенок к “основному холодному течению” для уравнения БГК в обобщенном погранслое

Мы будем рассматривать задачу о движении теплоносителя через тонкую цилиндрическую трубу, проходящую через активную зону реактора. Предполагается, что на открытый торец трубы поступает равномерно и прямолинейно движущаяся вода с заданными макропараметрами (плотностью, скоростью и температурой). Предполагается, что стенка трубы имеет более высокую по сравнению с водой температуру. Необходимо определить, как взаимодействие с нагретой стенкой влияет на макропараметры воды в трубе.

Задача решается в осесимметричной геометрии. Пространственная точка определяется двумя координатами — высотой (z) и радиусом (r). Скорость имеет две компоненты – продольную (v_z) и поперечную (v_r). Поскольку (по крайней мере в начальный момент времени) температура стенки много больше температуры воды, предполагается, что прилегающая к стенке вода находится

в состоянии перегретого пара. Также предполагается, что молекулы пара находятся в состояниях, близких к локально–термодинамическому равновесию (в терминах функций распределения $f = f_{Maxwell}^{loc} + \delta f$, $|\delta f| \ll |f_{Maxwell}^{loc}|$).

При решении рассматриваемой задачи область трубы разделяется на внутренний и пограничный слои. Внутренний слой заполнен водой, находящейся в состоянии термодинамического равновесия; движение воды моделируется уравнениями газодинамики. Пограничный слой заполнен паром. Динамика молекул пара подчиняется уравнению БГК. Толщина пограничного слоя выбирается равной нескольким длинам свободного пробега молекулы воды.

Решением уравнений газодинамики являются макропараметры воды — плотность, температура, продольная и поперечная скорости потока во всех пространственных точках внутреннего слоя. Для уравнений газодинамики начальные условия и краевые условия на границах внутреннего слоя задают значения макропараметров или их пространственных градиентов.

Решением БГК уравнения является функция распределения молекул пара по пространственным координатам и скоростям. Функция распределения в каждой пространственной точке однозначно определяет макропараметры пара (плотность, температуру, продольную и поперечную скорости потока). Краевые условия для БГК уравнения задают на границах пограничного слоя значения решения для тех молекул, скорости которых направлены внутрь этого слоя. Поскольку предполагается, что пар находится вблизи точки термодинамического равновесия, в качестве такого решения на границах выбираются квазимаксвелловские распределения. Аналогично квазимаксвелловское распределение выбирается в качестве начального условия.

Подчеркнем, что краевые условия для БГК уравнений задают значения функции распределения только для входящих в пограничный слой молекул пара. Таким образом, только для таких молекул задаются значения макропараметров (плотности, скоростей, температуры). Однако на том торце трубы, через который вода входит в трубу, макропараметры следует считать заданными для всех молекул. Поэтому на этой границе параметры квазимаксвелловского распределения входящих в пограничный слой молекул зависят от параметров распределения выходящих молекул. Таким образом достигается равенство макропараметров пара заданным значениям. Аналогичным образом достигается равенство нулю поперечной скорости потока на стенке трубы (молекулы отражаются от твердой стенки). Однако температура задается только для молекул пара, отраженных стенкой; получаемая при этом в расчетах температура молекул пара, движущихся к стенке, иная. Также только для отраженных молекул задаются плотность и продольная скорость. Предполагается, что температура пара не влияет на температуру стенки.

На торце, из которого вода выходит из трубы, и на границе газодинамического и БГК режимов (она же граница жидкость/пар) плотность, скорости и температура определяются только для входящих в пограничный слой молекул пара. Выходящие из пограничного слоя и входящие в газодинамический слой молекулы формируют другие макропараметры. Взаимодействие двух режимов осуществляется следующим образом. Макроскопические величины на границе получаются из решения задачи о распаде разрыва между ячейками, примыкающими к границе с двух сторон. При этом, если ячейка принадлежит “кинетической” области, то исходные газодинамические величины в ней определяются интегрированием ее функции распределения с предыдущего временного шага. По рассчитанным новым граничным макровеличинам для “кинетической” области строится новая “входящая” функция распределения, которая будет граничным условием для текущего временного шага. Для соседней газодинамической области граничными будут сами рассчитанные макровеличины. Таким образом, “граничные условия” между областями пересчитываются на каждом шаге по времени. Так как с обеих сторон от такой границы находится одно и то же вещество (вода), то граница считается прозрачной для вещества, а давление досчитывается по одному и тому же уравнению состояния.

2. Математическая постановка задачи для уравнения БГК

Уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) для функции распределения молекул пара в пограничном слое может быть записано в следующей форме:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f(r, \mu, v, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{1}{v} I(f)(f_e(f) - f). \quad (1)$$

Оно рассматривается в осесимметричном цилиндрическом слое $r_0 < r < R_0$, $0 < z < H$. Предполагается, что решение f не зависит от азимутальной пространственной координаты.

Функция распределения f ([молекул/(м³(м/с)³)]) зависит от 6 переменных: пространственных координат r, z ([м]); модуля скорости молекулы v ([м/сек]); времени t ([сек]); углов, определяющих единичный вектор $\vec{\Omega}(\theta, \varphi)$ направления переноса частиц в сферической системе координат ($0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$). Предположение об изотропии функции распределения по угловой переменной φ эквивалентно условию $f(r, z, \mu, \varphi, v, t) = f(r, z, \mu, 2\pi - \varphi, v, t)$ ($\mu \equiv \cos \theta$). Обозначение $f_e(f)$ используется в том смысле, что локально–равновесное квазимаксвелловское распределение f_e зависит от функции распределения в той же точке через посредство параметров $\rho(f)$, $T(f)$, $V(f)$, являющихся моментами функции

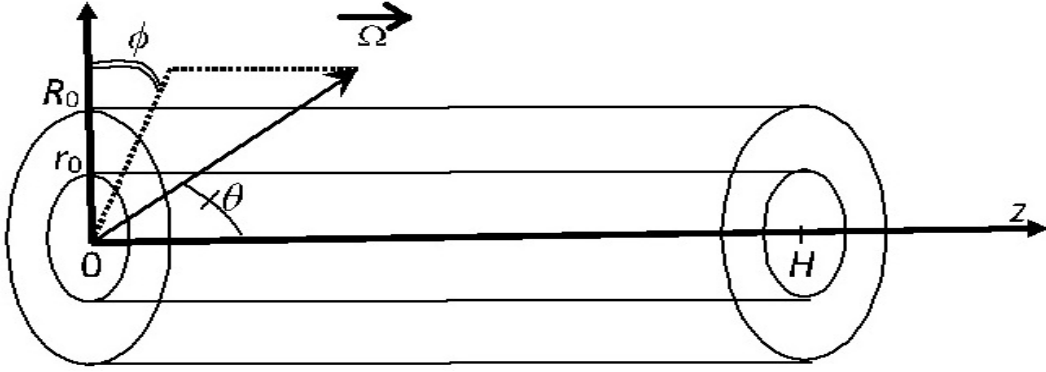


Рис. 1. Расчетная область начально–граничной задачи для уравнения БГК

f (явный вид f_e см. ниже). Производная по направлению в уравнении (1) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\Omega}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\xi}{r} \frac{\partial (rf)}{\partial r} - \frac{\partial (\eta f)}{\partial \varphi}, \quad \xi \equiv \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta \equiv \sin \theta \sin \varphi.$$

Интеграл по скоростям от функции распределения (пространственная удельная плотность частиц) записывается в форме

$$\rho(r, z, t) = 2 \int_0^\infty v^2 dv \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi f(r, z, \mu, \varphi, v, t) d\varphi.$$

Частота взаимодействия молекул $I(f)$ ([сек⁻¹]) принимается в расчетах равной модельной величине (существенно зависящей от скорости частиц и их функции распределения, что отличает используемую модель от классической модели БГК)

$$I_{v,f} = \sqrt{3T(f)k_B/m_0^3} \sigma \rho(f),$$

где $\sigma = d_0^2$ ([м²]) — эффективное сечение взаимодействия молекул, $d_0 = 0,3 \cdot 10^{-9}$ ([м]) — эффективный диаметр молекулы воды, $k_B = 1,380648 \cdot 10^{-23}$ ([Дж/К]) — постоянная Больцмана, $m_0 = 3,01510 \cdot 10^{-26}$ ([кг]) — масса молекулы воды, $\rho(f)$ ([кг]) — локальная массовая плотность частиц:

$$\rho(r, z, t) = 2m_0 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty v^2 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv,$$

величина $T(f)$ ([К]) — локальная температура микроканонического ансамбля:

$$T(r, z, t) = \frac{4m_0}{3R\rho(r, z, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty ((\xi v - v_r)^2 + (\mu v - v_z)^2) \times \\ \times v^2 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv,$$

$R = k_B/m_0$ — газовая постоянная. Компоненты скорости потока ([м/с]) определяются соотношениями:

$$v_z = \frac{2m_0}{\rho(r, z, t)} \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv,$$

$$v_r = \frac{2m_0}{\rho(r, z, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi \xi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv.$$

Локально–равновесное распределение [молекул/(м³·(м/с)³)] в правой части уравнения БГК определяется выражением:

$$f_e(f) = f(\mu, \varphi, v, v_r, v_z, \rho, T) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2} m_0} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{v^2 + v_r^2 + v_z^2 - 2v(\mu v_z + \xi v_r)}{2RT}\right) \times$$

$$\times (A_1 + A_2(v\xi - v_r) + A_3(v\mu - v_z) + A_4((v\xi - v_r)^2 + (v\mu - v_z)^2 - 3RT)),$$

где коэффициенты $A_k|_{k=1,\dots,4}$ находятся из вышеприведенных определений $\rho(r, z, t)$, $T(r, z, t)$, v_r , v_z при замене интегралов в правых частях выражений квадратурными формулами.

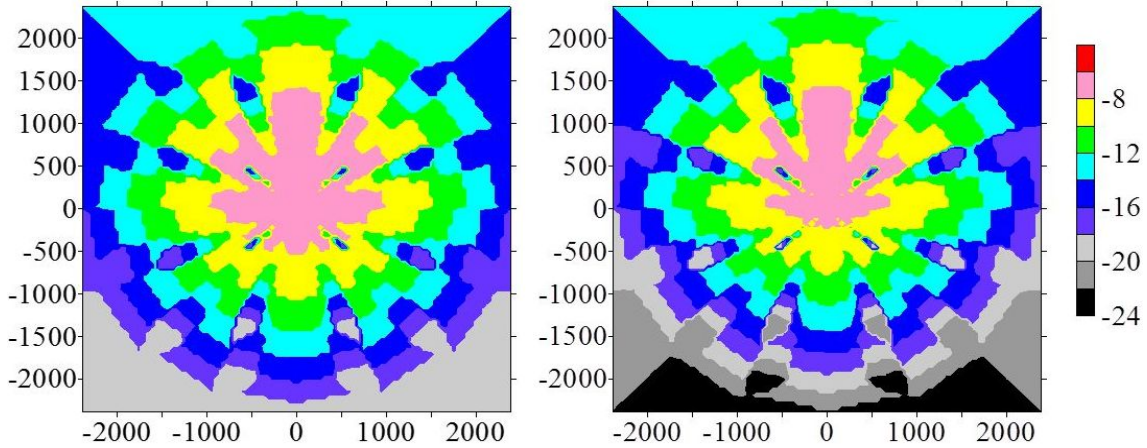


Рис. 2. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: слева — для радиуса $r = 4.999$ мм, справа — для радиуса $r = 5.000$ мм (на стенке трубы, $z = H/2$). Ось абсцисс — продольная скорость молекул [см/с], ось ординат — поперечная скорость молекул [см/с].

Приведем постановку *краевых условий* для уравнений БГК в кольцевой цилиндрической области погранслоя. На границе $z = H$ задаются значения функции распределения для молекул, вытекающих из открытого торца цилиндра (при $\mu > 0$):

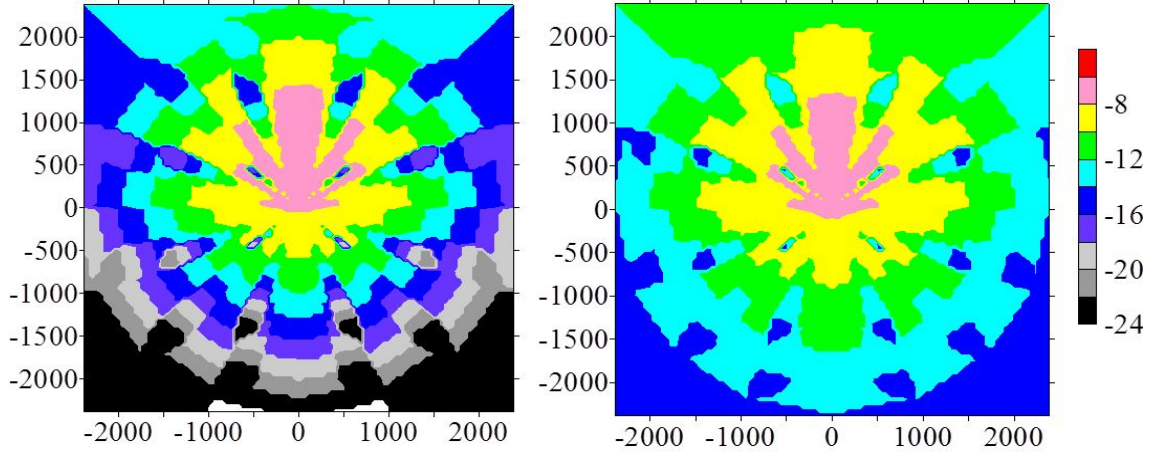


Рис. 3. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: слева — для радиуса $r = 4.997$ мм, справа — для радиуса $r = 4.998$ мм ($z = H/2$). Измеряемые вдоль осей величины — см. рис. 2

$$\begin{aligned}
 f(r, z = H, \mu, \varphi, v, t) &= \\
 &= f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r, z = H, t), v_z(r, z = H, t), \\
 &\quad \rho(r, z = H, t), T(r, z = H, t)) \\
 &\quad \text{при } \mu < 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

На границе $r = r_0$ задается значение функции распределения для молекул, поступающих из газодинамической области (для которых $0 < \varphi < \pi/2$)

$$\begin{aligned}
 f(r = r_0, z, \mu, \varphi, v, t) &= \\
 &= f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = r_0, z, t), v_z(r = r_0, z, t), \\
 &\quad \rho(r = r_0, z, t), T(r = r_0, z, t))
 \end{aligned} \tag{3}$$

при заданных макропараметрах $v_r(r, z = H, t)$, $v_z(r, z = H, t)$, $\rho(r, z = H, t)$, $T(r, z = H, t)$ и $v_r(r = r_0, z, t)$, $v_z(r = r_0, z, t)$, $\rho(r = r_0, z, t)$, $T(r = r_0, z, t)$. Подчеркнем, что условия (2), (3) задают значения функции распределения и тем самым макропараметров только для молекул, влетающих в трубу, но не для молекул, вылетающих из трубы.

На границе $r = R_0$ (жесткая стенка трубы) при $\pi/2 < \varphi < \pi$ (такой интервал угла отвечает молекулам, движущимся от стенки) задается следующее условие:

$$\begin{aligned}
 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) &= \\
 &= G \cdot f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = R_0, z, t), v_z(r = R_0, z, t), \\
 &\quad \rho(r = R_0, z, t), T(r = R_0, z, t)),
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$G = \left(- \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi/2} \xi d\varphi \int_0^{\infty} v^3 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) dv \right) \times \\ \times \left(\int_{-1}^1 d\mu \int_{\pi/2}^{\pi} \xi d\varphi \int_0^{\infty} v^3 f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = R_0, z, t), \right. \\ \left. v_z(r = R_0, z, t), \rho(r = R_0, z, t), T(r = R_0, z, t)) \right)^{-1} > 0.$$

Вышеприведенное условие на жесткой стенке трубы обеспечивает выполнение равенства аннуляции соответствующего (радиального) потока молекул:

$$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} \xi d\varphi \int_0^{\infty} v^3 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) dv = 0$$

(откуда следует соотношение “непротекания” $v_r(r = R_0, z, t) = 0$). Также условие (4) обеспечивает заданные плотность, температуру и продольную скорость для молекул, отраженных от стенки трубы.

На границе $z = 0$ задается краевое условие (для молекул, втекающих в цилиндр через его открытый торец, чему соответствует условие $\mu > 0$)

$$f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) = \tag{5} \\ = f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r, z = 0, t), v_z(r, z = 0, t), \rho(r, z = 0, t), T(r, z = 0, t)) \\ \text{при } \mu > 0,$$

причем

$$2m_0 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v^2 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = \rho(r, z = 0, t), \\ \frac{4m_0}{3R\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v^2 ((\xi v - v_r)^2 - (\mu v - v_z)^2) \times \\ \times f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = T(r, z = 0, t), \\ \frac{2m_0}{\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v^3 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = v_z(r, z = 0, t), \\ \frac{2m_0}{\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} \xi d\varphi \int_0^{\infty} v^3 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = v_r(r, z = 0, t).$$

Эти условия фиксируют макропараметры (плотность, скорости и температуру) для всего ансамбля молекул (как влетающих в цилиндр, так и вылетающих из него).

Приведем постановку *начальных условий* для смешанной задачи для уравнения БГК в погранслое. В начальный момент времени задаются функции

$$\rho(r, z, t = 0), v_r(r, z, t = 0), v_z(r, z, t = 0), T(r, z, t = 0)$$

во всей расчетной области (кольцевого цилиндра), то есть $r_0 \leq r \leq R_0$, $0 \leq z \leq H$. Начальное условие для уравнения БГК имеет вид

$$f(r, z, \mu, \varphi, t = 0) = f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r, z, t = 0), v_z(r, z, t = 0), \rho(r, z, t = 0), T(r, z, t = 0)). \quad (6)$$

Рассмотрим *метод решения* поставленной выше начально–граничной задачи (1)–(6) для кинетического уравнения БГК. Для этого произведем аппроксимацию по времени. Интегрируя уравнение (1) по переменной t , находим

$$\frac{1}{v\Delta t}(f^+ - f^-) + \frac{\partial f^0}{\partial \bar{\Omega}} = \frac{1}{v}I(f^-)(f_e(f^-) - f^0),$$

$$I(f^-) = \sqrt{3T(f^-)k_B/m_0^3} \sigma \rho(f^-), \quad (7)$$

где $f^-(r, z, \mu, \varphi, v) = f(r, z, \mu, \varphi, v, t^-)$ — решение в начале временного шага при $t = t^-$, $f^+(r, z, \mu, \varphi, v) = f(r, z, \mu, \varphi, v, t^+)$ — решение в начале временного шага при $t = t^+$, $\Delta t = t^+ - t^-$,

$$f^0(r, z, \mu, \varphi, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^-}^{t^+} f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dt$$

— среднее на временном шаге решение. Заметим, что здесь частота взаимодействий $I(f^-)$ и локально–равновесное распределение $f_e(f^-)$ в правой части уравнения берутся для начала временного шага.

Примем кусочно–линейную аппроксимацию функции распределения

$$f(t) = f^+ \text{ при } \tau \leq t \leq t^+,$$

$$f(t) = f^- + \frac{t - t^-}{\tau - t^-}(f^+ - f^-) \text{ при } t^- < t < \tau,$$

$$\tau = t^- + \frac{2p\Delta t}{1 + p}, \quad p \in [0, 1]$$

$f^+ = (1 + p)f^0 - pf^-$, параметр $p \in [0, 1]$ (при $p = 0$ функция $f(t)$ является кусочно–постоянной, $p = 1$ функция $f(t)$ — кусочно–линейной). Подставляя это выражение для f^+ в уравнение (7), получаем

$$\frac{1 + p}{v\Delta t} f^0 + \frac{\partial f^0}{\partial \bar{\Omega}} = \frac{1}{v}I(f^-)(f_e(f^-) - f^0). \quad (8)$$

Значения макропараметров на границе погранслоя с областью

гидродинамического расчета

$$v_r(r_0, z, t^-), v_z(r_0, z, t^-), \rho(r_0, z, t^-), T(r_0, z, t^-) \quad (9)$$

берутся из решения уравнений газодинамики в соседней области на предыдущем временном шаге.

Значения макропараметров на входном торце трубы и на жесткой стенке

$$v_r(r, z = 0), v_z(r, z = 0), \rho(r, z = 0), T(r, z = 0), \quad (10)$$

$$v_r(R, z), v_z(R, z), \rho(R, z), T(R, z) \quad (11)$$

считаются фиксированными во все моменты времени; на выходном торце трубы значения величин

$$v_r(r, z = H), v_z(r, z = H), \rho(r, z = H), T(r, z = H) \quad (12)$$

пересчитываются на каждом шаге по времени из условия нулевых производных по нормали к торцевой границе, а не задаются постоянными.

В расчетах установлено, что функция распределения молекул в кнудсеновском (кинетическом) погранслое далека от равновесной. Поэтому непосредственная передача данных о состоянии погранслоя к жидкостному течению, в котором производятся расчеты по гидродинамической программе, невозможна (на границе этих двух расчетных областей должен производиться обмен информацией о сохранении баланса массы, импульса и энергии: 1) со стороны погранслоя в виде квазиравновесной псевдомаксвелловской функции распределения, моменты которой являются локальными макровеличинами $\rho_{kin}, T_{kin}, v_{kin}$, передаваемыми в качестве граничных условий в область гидродинамического расчета; 2) со стороны основного потока жидкости — в виде макровеличин $\rho_{Hydr}, T_{Hydr}, v_{Hydr}$, формирующих на границе областей со стороны кинетического погранслоя локальную псевдомаксвелловскую функцию). Поэтому введена в рассмотрение дополнительная релаксационная область “над” погранслоем, в которой происходит изотропизация распределения молекул и формируется необходимая при обмене информацией псевдомаксвелловская функция распределения.

Отдельным весьма нетривиальным вопросом является соответствие термодинамических параметров неравновесного микроканонического ансамбля частиц в кинетическом погранслое макропараметрам (T, S, W и т. п.) канонического ансамбля области основного гидродинамического течения в процессе выравнивания их в переходной релаксационной зоне между расчетными зонами $r_0 < r < R_0$ и $0 < r < R_0 - \Delta_K$ (см. далее).

Выводы из проведенных расчетов таковы.

1) В релаксационном слое воды реализуется распределение, близкое к максвелловскому, в то время как в кнудсеновском (“паровом”) погранслое

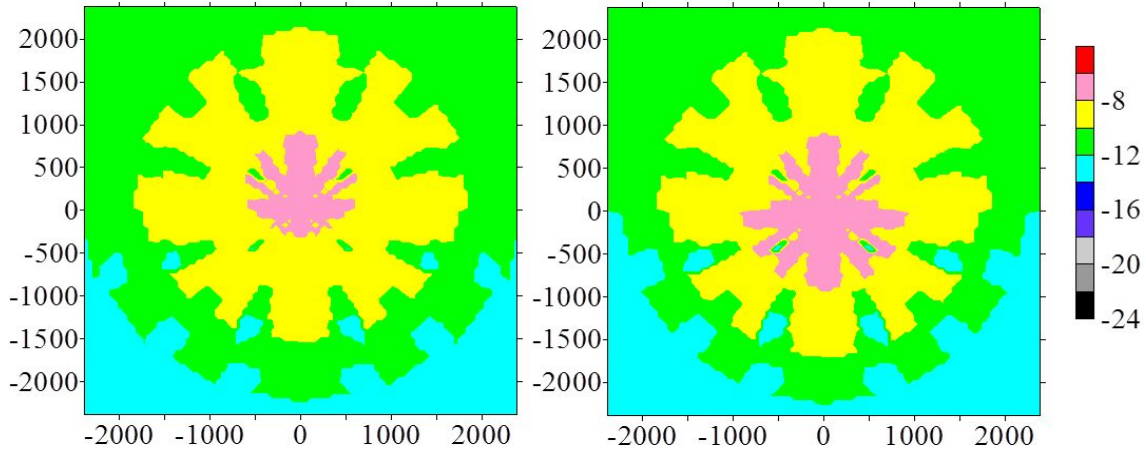


Рис. 4. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: слева — для радиуса $r = 4.995$ мм, справа — для радиуса $r = 4.996$ мм ($z = H/2$). Измеряемые вдоль осей величины — см. рис. 2

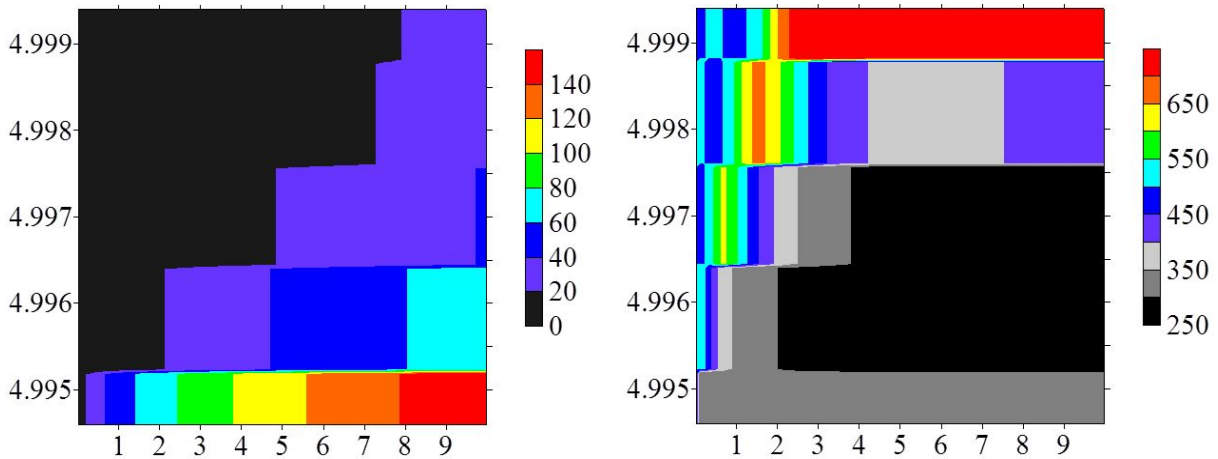


Рис. 5. Слева — поперечная (радиальная) скорость v_r (см/с) в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, справа — продольная (тангенциальная) скорость v_z (см/с) в поперечном сечении пограничного кинетического слоя. По оси абсцисс отложено время расчета (нс), по оси ординат — радиус (мм) от оси трубы.

распределение существенно анизотропно и близким к максвелловскому не является. Толщина кнудсеновского погранслоя выбиралась $\Delta_K \sim 10\langle\ell\rangle$ (где $\langle\ell\rangle$ — средняя длина пробега молекулы в паре), толщина релаксационного слоя $\Delta_{Rel} = 4\Delta_K$; по-видимому, установлению релаксации препятствует нагрев стенки, который и формирует анизотропию функции распределения.

2) С начального момента времени возникает тенденция к потоку вещества из воды в паровой погранслои (что, очевидно, связано с существенной исходной разницей в плотности среды в этих областях), происходит постепенное нагревание пара до температуры выше, чем температура стенки.

3) Максимум температуры пара находится у стенки трубы, а максимум его плотности — на центральной линии парового погранслоя.

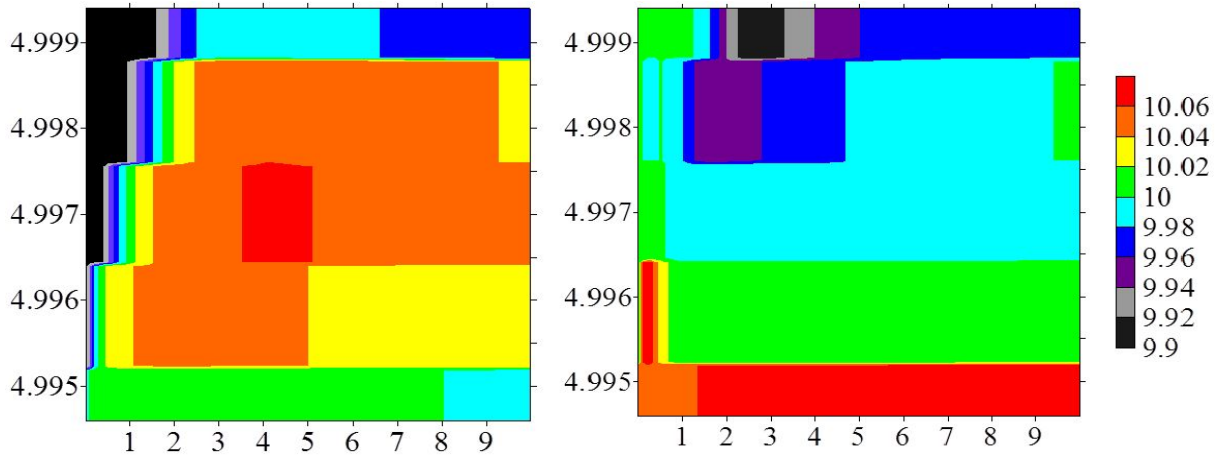


Рис. 6. Слева — плотность ρ ($\text{кг}/\text{м}^3$) в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, справа — температура (К) в поперечном сечении пограничного кинетического слоя. По оси абсцисс отложено время расчета (нс), по оси ординат — радиус (мм) от оси трубы.

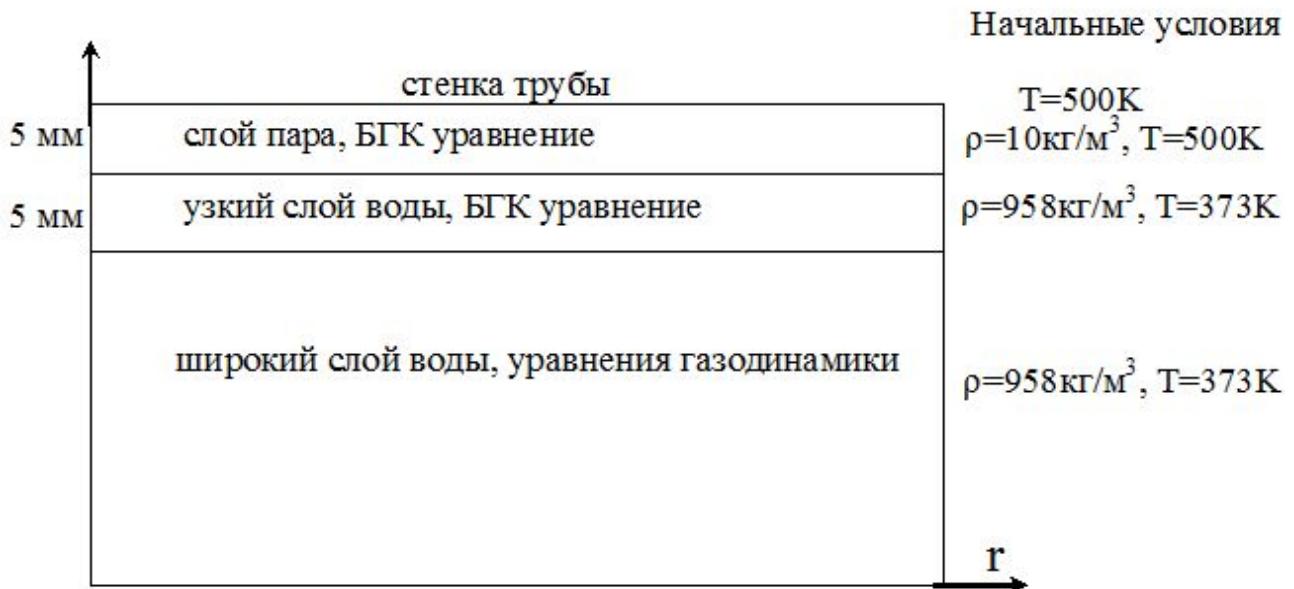


Рис. 7. Модифицированная постановка задачи расчета кинетического погранслоя, учитывающая введение эффективного релаксационного подслоя, служащего для максвеллизации функции распределения (с последующим переходом к макровеличинам в гидродинамической области расчета).

3. Модифицированное барнеттовское приближение в условиях значительных температурных неоднородностей

Из уравнения Больцмана можно получить (путем умножения на сумматорные инварианты $(1, v_k, v)$ с последующим интегрированием по скоростям одной из сталкивающихся молекул) систему 5 гидродинамических

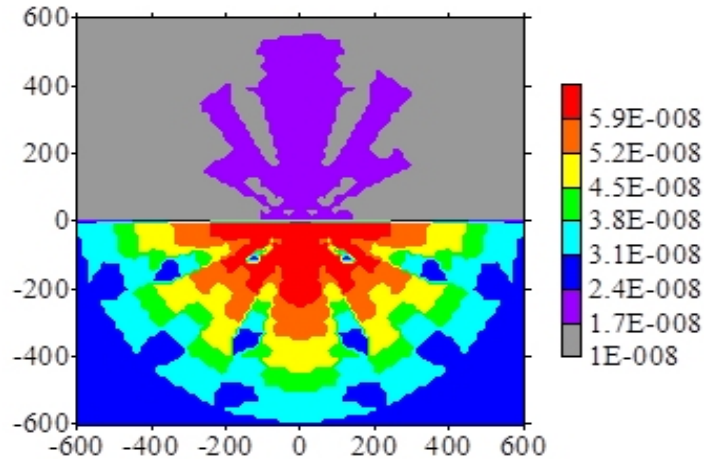


Рис. 8. Функция распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс (у твердой стенки трубы). По оси абсцисс — продольная (тангенциальная) скорость v_z (см/с), по оси ординат — поперечная (радиальная) скорость v_r (см/с) в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.

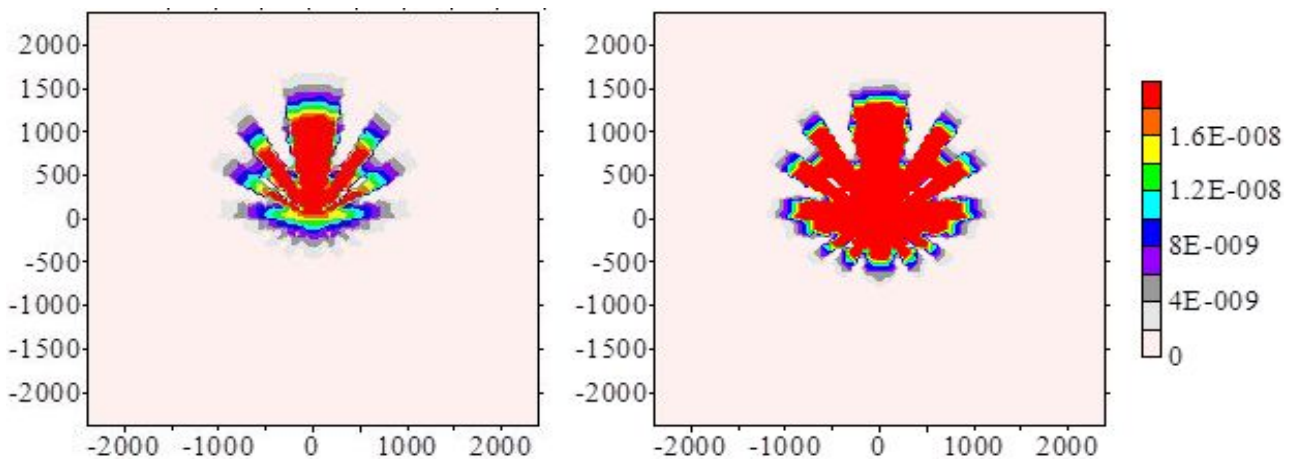


Рис. 9. Функции распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс в кинетическом погранслое (слева — на расстоянии $0.1\Delta_K$, справа — на расстоянии $0.9\Delta_K$ от твердой стенки, Δ_K — толщина кнудсеновского погранслоя). Величины по осям координат — см. рис. 8

законов сохранения:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{D\rho v_k}{Dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} = f_k^{(out)},$$

$$\frac{D\rho(\varepsilon + v^2)/2}{Dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (p_{ki}v_k + q_k)}{\partial x_i} = f_k^{(out)}v_i,$$

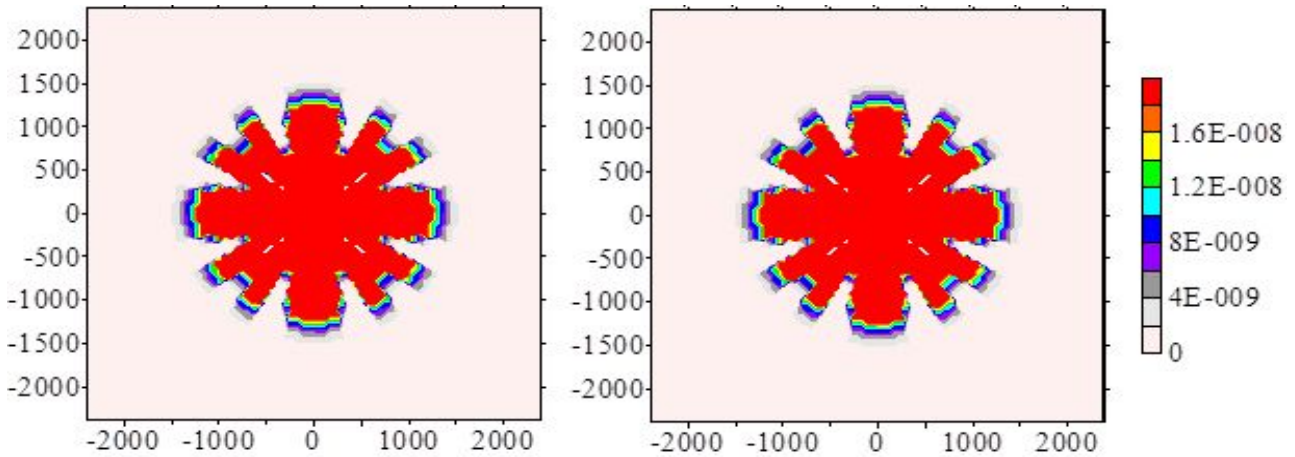


Рис. 10. Функции распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс в релаксационном слое (слева — на расстоянии $0.1\Delta_{Rel}$, справа — на расстоянии $0.9\Delta_{Rel}$ от твердой стенки, $\Delta_{Rel} = 4\Delta_K$ — толщина релаксационного слоя). Величины по осям координат — см. рис. 8

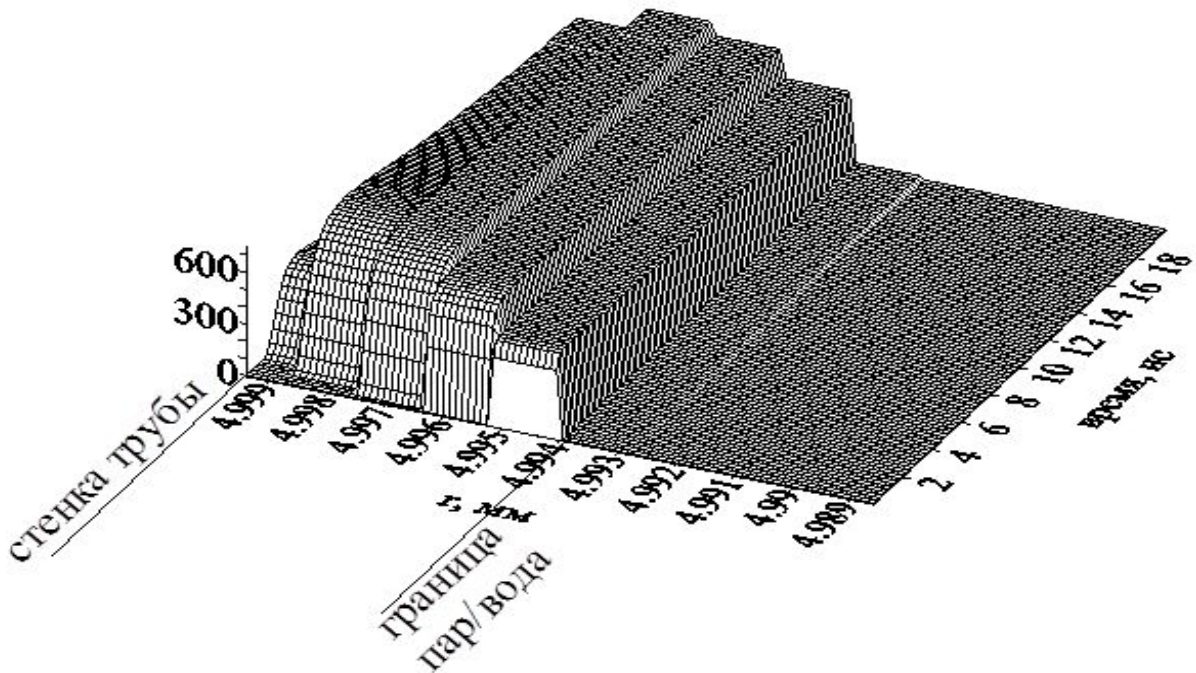


Рис. 11. Поперечная скорость в кинетическом погранслое v_r [м/с] в среднем по высоте поперечном сечении трубы

где: D/Dt — оператор субстанциальной производной, $p_{ki} = m \int V_k V_i f(x, v, t) dv$ — тензор давления; здесь $V_i = v_i - c_i$ — скорость частицы в системе отсчета, сопутствующей потоку с гидродинамической скоростью c . При этом

$$\rho \varepsilon = \frac{m}{2} \int V^2 f dv - \text{удельная внутренняя энергия среды,}$$

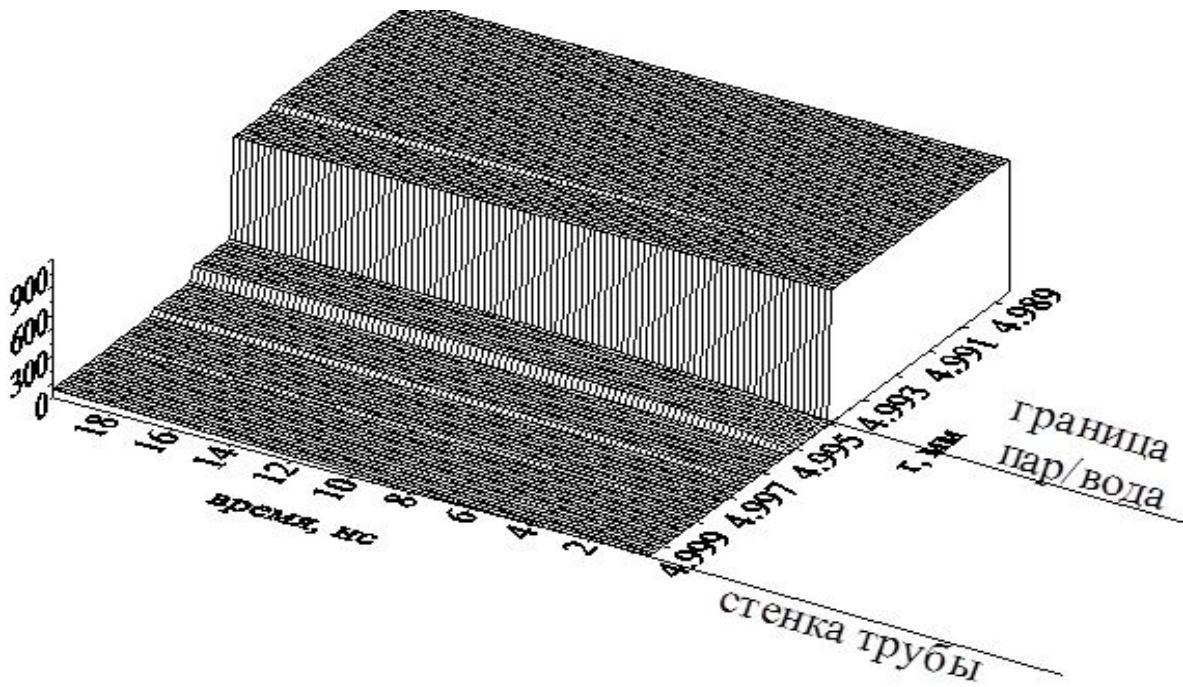


Рис. 12. Плотность в кинетическом погранслое ρ [кг/м³] в среднем по высоте поперечном сечении трубы

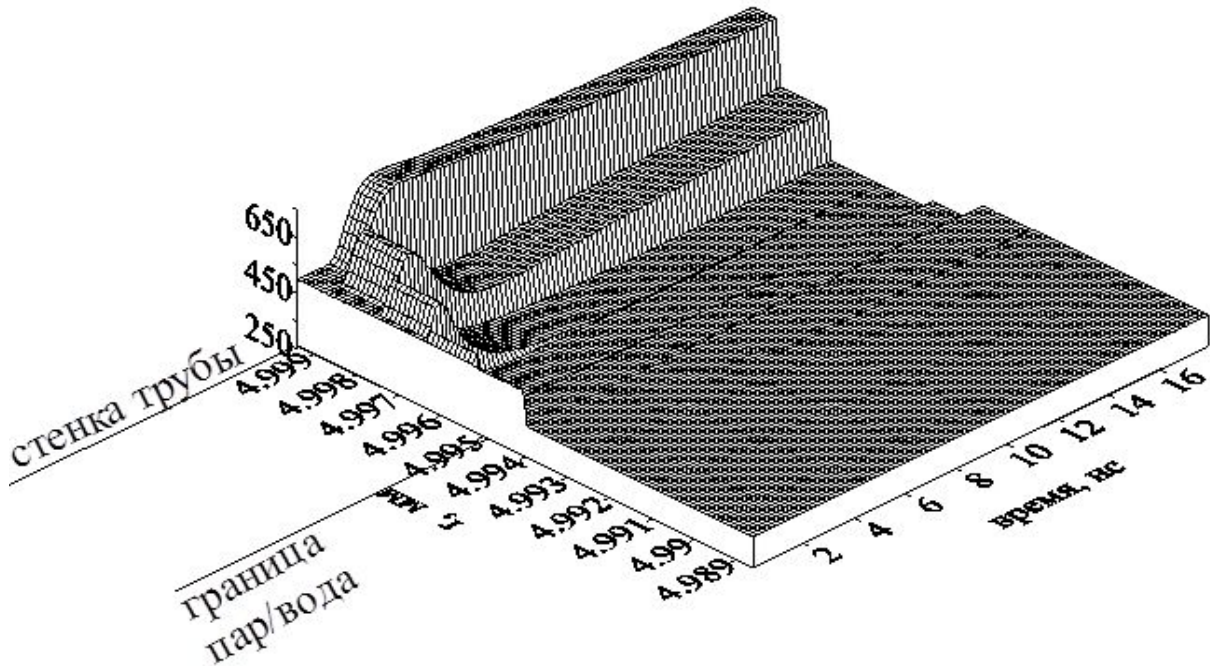


Рис. 13. Температура в кинетическом погранслое T [K] в среднем по высоте поперечном сечении трубы

$$q_k = \frac{m}{2} \int \mathbf{V}^2 V_k f dv - \text{удельный тепловой поток в среде.}$$

Поскольку эта система не замкнута (не установлены явные формы p_{ki} и $\varepsilon = \varepsilon(T)$), для чего необходимо знать УРС $p = p(T)$), необходимо ввести

некоторые уточнения в исходную модель, принимая во внимание ее априорные термодинамические свойства.

Для этого пригодной является, например, так называемая 13–моментная модель для совокупности 13 макропеременных $\{\rho, \rho v_k, \rho \epsilon = 7\rho RT/2, \sigma_{ki}, q_k\}$.

Метод Чэпмена–Энскога получения из кинетического уравнения Больцмана цепочки гидродинамических уравнений состоит в представлении функции распределения посредством асимптотического ряда по малому параметру:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

В этом случае тензор напряжений и тепловой поток можно также представить в виде рядов (в качестве малого параметра ϵ используем число Кнудсена Kn):

$$q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}, \quad q_i^{(1)} = -(\lambda \nabla T)_i, \quad q_i^{(2)} = \theta_1 \sum_{k=1}^3 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \dots,$$

$$\sigma_{ik} = p \delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)}, \quad \sigma_{ik}^{(1)} = -2\mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \sigma_{ik}^{(2)} = \sigma_{ik}^{(T)} + \sigma_{ik}^{(p,v)}, \quad (13)$$

$$(\sigma_{ik}^{(j)}, q_i^{(j)})_{j=1,2} \sim \text{Kn}^j, \quad \text{Kn} = \frac{\ell_0}{\Lambda_0} = \frac{\text{Ma}}{\text{Re}}, \quad \text{Ma} = \frac{v_0}{c_0}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 v_0 \Lambda_0}{\mu_0},$$

где величины $v_0, \ell_0, \Lambda_0, \mu_0, p_0, \rho_0, T_0, c_0$ — соответственно, характерные значения: скорости движения среды, средней длины $\langle \ell \rangle$ свободного пробега молекул (массы m), размера течения, коэффициента сдвиговой вязкости μ , изотропного давления p , плотности среды ρ , температуры среды T и локальной скорости звука в среде c ; полагаем, что справедливо уравнение состояния среды $p = p(\rho, T)$ в аналитической форме (фактически являющееся глубокой модификацией уравнения Ван дер Ваальса). Обозначение $\langle \mathcal{A}_{ik} \rangle$ введено для тензора $\frac{1}{2}(\mathcal{A}_{ik} + \mathcal{A}_{ki}) - \frac{1}{3}\delta_{ik}\mathcal{A}_{jj}$.

В вышеприведенных формулах из барнеттовских напряжений выделены температурные

$$\sigma_{ik}^{(T)} = \xi_3 \mu^2 \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle + \xi_5 \frac{\mu^2}{T} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle,$$

при этом остальные члены содержат производные от компонентов скорости и давления:

$$\sigma_{ik}^{(p,v)} = \xi_3 \mu^2 \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle - \xi_5 \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \right.$$

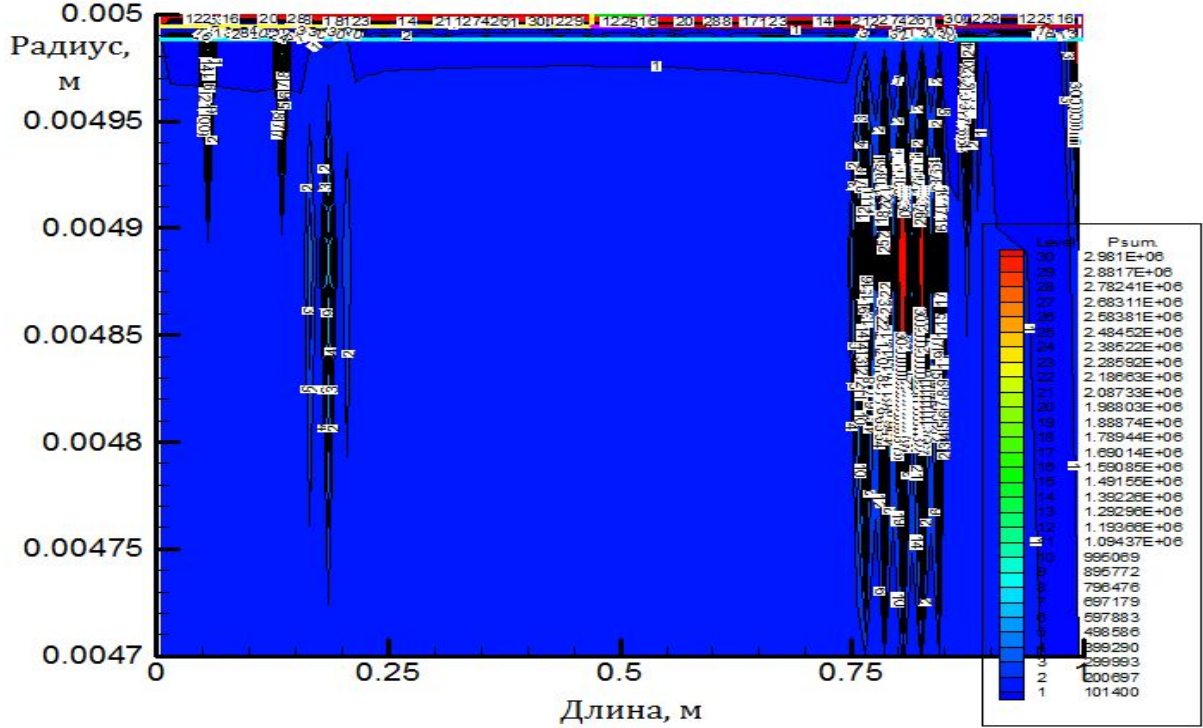


Рис. 14. Давление в области гидродинамического (модифицированный Барнетт) расчета на время $t_{1000} = 0.806 \cdot 10^{-8}$ с (1000-й шаг по времени) при начальной плотности среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ [кг/м³].

$$+ \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + 2 \sum_j \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \dots$$

Барнеттовские коэффициенты $\theta_1, \xi_j \sim O(1)$ предполагаются (ограниченными в изменении) функциями переменных μ, T, μ'_T (в свою очередь, зависящих от вида межмолекулярного взаимодействия).

Поскольку для введенного выше коэффициента первой вязкости имеем $\mu_0 \approx \rho_0 c_0 \lambda_0$, то справедливы следующие оценки:

$$\sigma_{ik}^{(1)} \sim \text{Kn} \rho_0 c_0 v_0, \quad \sigma_{ik}^{(p,v)} \sim \text{Kn}^2 \rho_0 v_0^2, \quad q_i^{(1)} \sim \text{Kn} \rho c_0^3,$$

$$\sigma_{ik}^{(T)} \sim \text{Kn}^2 \rho_0 c_0^2 \mathfrak{X}, \quad \sigma_{ik}^{(j \geq 3)} \sim \text{Kn}^3 \rho_0 c_0 v_0 \mathfrak{X}, \quad q_i^{(2)} \sim \text{Kn}^2 \rho c_0^2 v_0,$$

где $\mathfrak{X} \equiv (\delta T)_0 / T_0$ — характерное значение относительного перепада температур в среде (например, в трубах или каналах: $(\delta T)_0 = T_{bound} - T_0$, где в данном случае T_{bound} — усредненная по некоторому отрезку канала температура стенок, T_0 — характерное значение температуры в среднем по сечению течения либо на некотором определенном расстоянии от стенки). Если изменения температуры в течении обусловлены исключительно переходом кинетической энергии движущейся среды в тепловую вследствие диссипативных процессов, то $\mathfrak{X} \ll 1$, и все барнеттовские члены уравнений

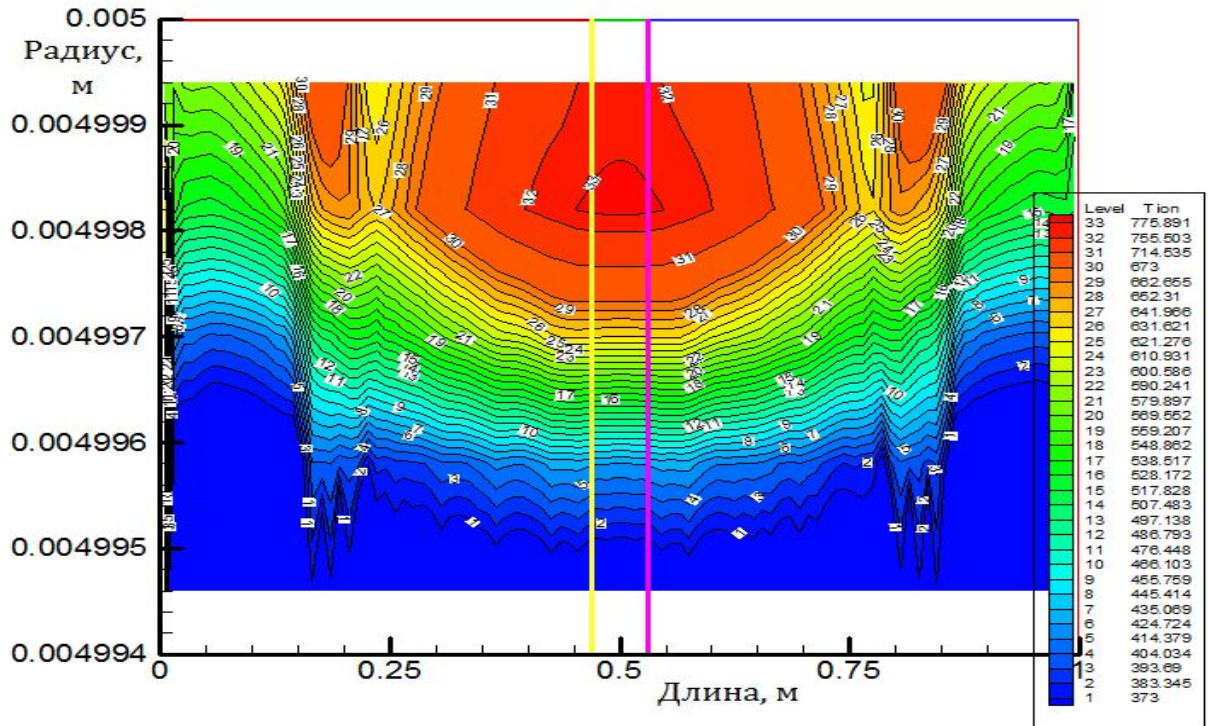


Рис. 15. Температура в погранслое на момент времени $t_{1000} = 10^{-8}$ с (при начальной плотности среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ [кг/м³]). В основной гидродинамической области — расчет по модифицированному Барнетту.

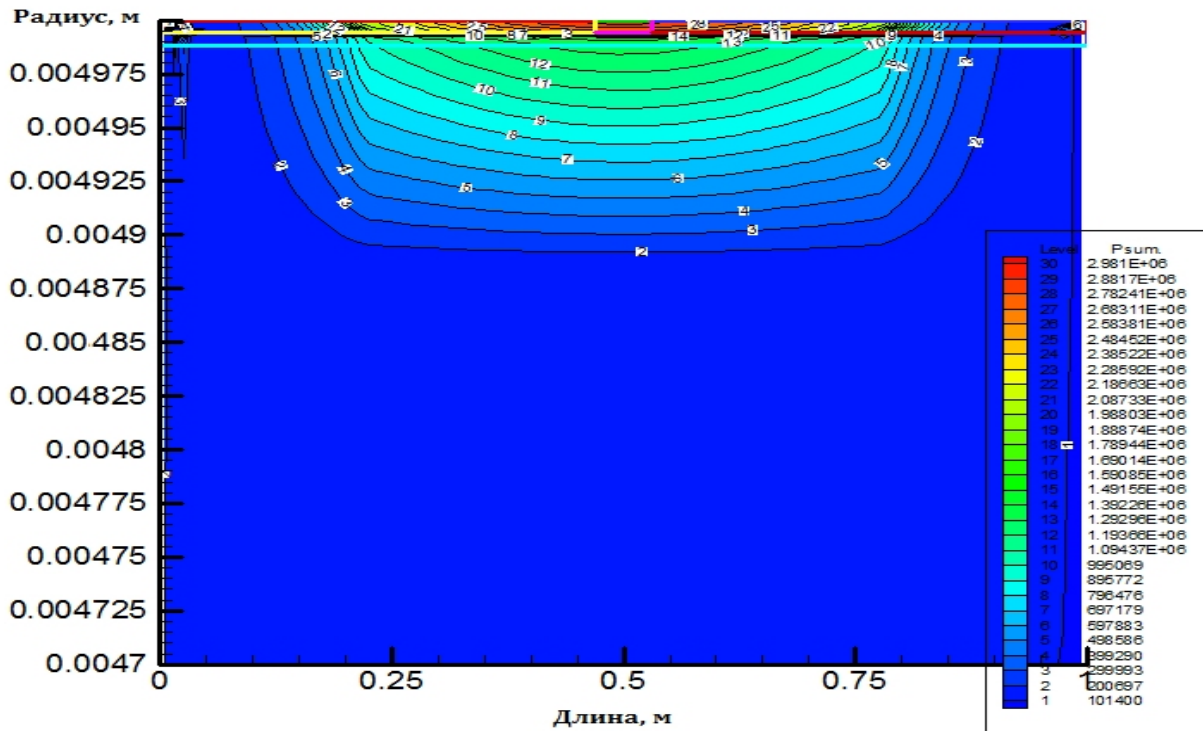


Рис. 16. Давление в погранслое на момент времени $t_{1000} = 10^{-8}$ с (начальная плотность среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ [кг/м³]).

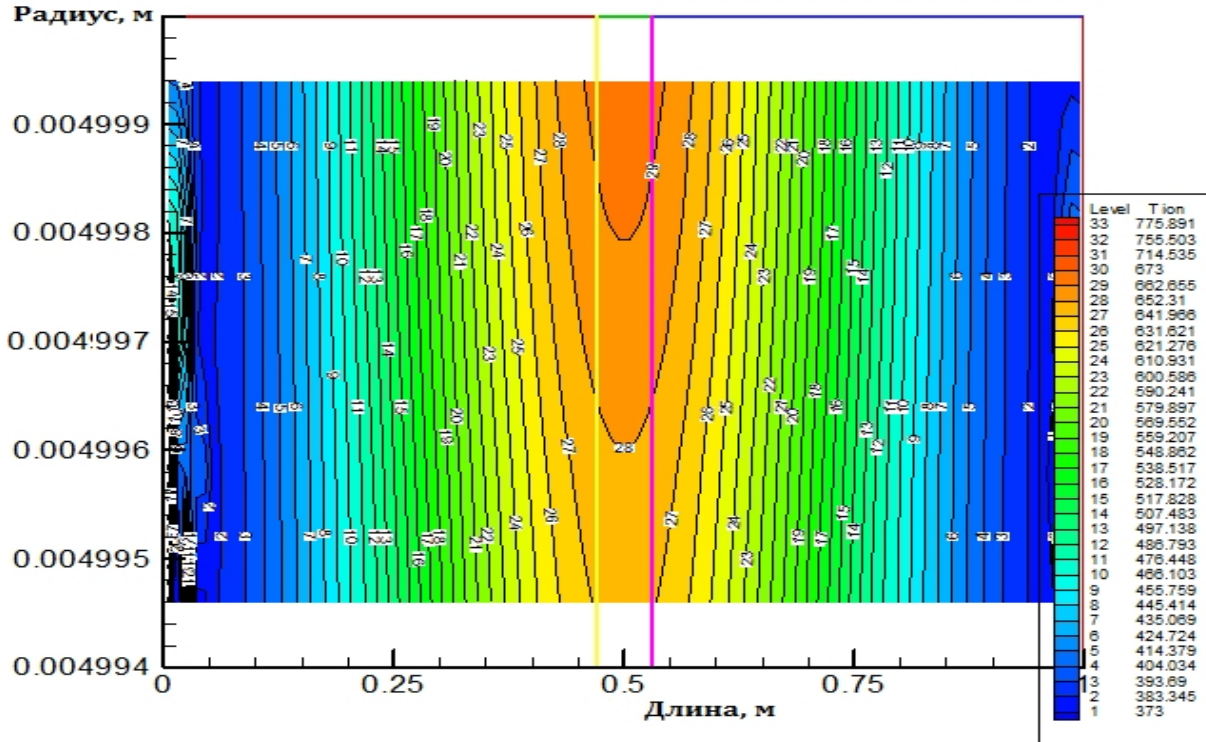


Рис. 17. Температура в погранслое на момент времени $t_{1000} = 10^{-8}$ с (начальная плотность среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ [кг/м³]).

сохранения малы по сравнению с навье–стоксовскими (соответствующими наличию только первых двух слагаемых в выражениях для σ_{ik} и q_i): их отношение порядка $\mathbf{Kn}^2 \sim \mathfrak{X} \ll 1$ [6]. Однако для $\mathfrak{X} \gtrsim 1$ (данное условие выполняется, например, при контакте жидкости в течении с нагретой до достаточно высокой температуры стенкой канала в упомянутых ранее задачах о теплоотводе и вынужденном охлаждении, см., например, работы [7]–[9]) уже совершенно неправомерно игнорировать наличие как минимум трех слагаемых в вышеприведенных выражениях для σ_{ik} и q_i . В этом случае температурные напряжения $\sigma_{ik}^{(T)}$ могут быть того же порядка величины, что и обычные вязкие напряжения $\sigma_{ik}^{(1)}$, входящие в уравнения Навье–Стокса. Действительно, $\sigma_{ik}^{(T)} / \sigma_{ik}^{(1)} \sim \mathbf{KnMa}^{-1} \mathfrak{X} = O(1)$, и малость числа Кнудсена (условие возможности описания течения как движения “сплошной среды” с физической точки зрения и условие формальной применимости метода Чэпмена–Энскога — с математической) может компенсироваться произведением двух последних сомножителей $\mathfrak{X}, \mathbf{Ma}^{-1} \gtrsim 1$ (при этом необходимо учитывать, что характерный размер Λ_0 , входящий в определение параметра Кнудсена, должен соответствовать некоторому приграничному слою, а не полному масштабу системы). В то же время (в частности, при рассмотрении критических режимов течения в задачах, связанных с гидродинамикой теплоносителей) справедлива следующая оценка: $\sigma_{ik}^{(p,v)} / \sigma_{ik}^{(1)} \sim \mathbf{KnMa} = o(1)$.

Следует указать на то, что понятие “пограничного слоя”, в котором

сосредоточено основное влияние эффектов учета дополнительных барнеттовских членов в уравнениях гидродинамики, необходимо существенным образом модифицировать: это связано с тем, что уравнения движения в приграничной области не могут быть построены в соответствии с теорией Прандтля из-за наличия интенсивной “термострессовой псевдоконвекции”, обусловленной наличием значительного температурного градиента в окрестности нагреваемой стенки. Исключение уравнения для поперечной компоненты скорости (существование которой обусловлено не гравитационными или какими-либо иными внешними силами, а изменением плотности среды при ее контакте с нагревателем, вследствие чего происходит “оттеснение” внешних “холодных” слоев жидкости/газа от источника тепла) в погранслое в барнеттовском приближении невозможно, и основное предположение теории Прандтля о том, что давление в нем “...как бы создается внешним течением” [10] неправомерно. Более того, в рассматриваемом случае неправомерно использование также классической модели конвективного погранслоя [11]: выделение для отдельного рассмотрения пристенного слоя определенной толщины ($\delta > \delta_{Prandtl} \sim \sqrt{\Lambda_0 \mu_0 / \nu_0}$, где Λ_0, μ_0, ν_0 — характерные величины течения) в рассматриваемых условиях представляется рациональным только на условиях принятия некоторого априорного критерия ослабления поперечного конвективного движения среды (с характерной скоростью порядка $\nu_{conv} \sim \mathcal{X}^3 \nu_\mu$, где $\nu_\mu = \mu_0 / (\rho_0 \Lambda_0)$ — т. н. “вязкая скорость” течения). Это для температурных граничных режимов общего вида (неравномерность нагрева границы и, как следствие, наличие эффекта “скольжения”) затруднительно. По-видимому, единственно принципиально возможным упрощением для модифицированного погранслоя (при условии возможности априорной формулировки влияния эффектов неоднородности теплового потока на границе) будет учет в вязкостном члене и членах термострессовой силы только производных скорости течения в направлении “поперек” данного слоя: в этом случае барнеттовский погранслоем можно привести (для достаточно простой геометрии границы) к обобщенной модели Польгаузена [14].

Приведем расчетные уравнения в приближениях Навье–Стокса и (модифицированного) Барнетта в цилиндрической системе координат. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho r}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_z r)}{\partial z} = 0.$$

Уравнения переноса импульса и энергии:

$$\frac{\partial (\rho v_r r)}{\partial t} + \frac{\partial ((\rho v_r^2 + p)r)}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_z v_r r}{\partial z} =$$

$$\begin{aligned}
&= p + \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + r \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \sigma_{\varphi\varphi}, \\
&\frac{\partial(\rho v_{\varphi} r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_{\varphi} r)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_r v_{\varphi} r)}{\partial r} = -\rho v_r v_{\varphi}, \\
&\frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v_z^2) r}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_z v_r r)}{\partial r} = \frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r} + r \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}, \\
&\frac{\partial(er)}{\partial t} + \frac{\partial((e+p)v_z r)}{\partial z} + \frac{\partial((e+p)v_r r)}{\partial r} = \\
&= r \cdot \operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} T) + \frac{\partial(r(v_r \sigma_{rr} + v_z \sigma_{zr}))}{\partial r} + r \frac{\partial(v_r \sigma_{zr} + v_z \sigma_{zz})}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений равны

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^N + \sigma_{ij}^B,$$

где первое слагаемое соответствует вязкости уровня приближения Навье–Стокса:

$$\sigma_{rr}^N = 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^N = 2\mu \left(\frac{1}{r} v_r - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v} \right),$$

$$\sigma_{rr}^N = 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v} \right), \quad \sigma_{zr}^N = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \nabla \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r},$$

а второе слагаемое соответствует вязкости уровня приближения Барнетта:

$$\sigma_{ij}^B = (\mu/p)^2 \cdot \Phi_{ij}.$$

Обозначения и размерности переменных в данных формулах следующие: t — время ($[t] = \text{сек}$), $\mathbf{v} = (v_z, v_r, v_{\varphi})$ — скорость течения ($[v_i] = \text{м/сек}$), μ — коэффициент вязкости ($[\mu] = \text{Па} \cdot \text{сек}$), Явный вид тензорных коэффициентов Φ_{ij} приведен в **Приложении**.

Уравнение баланса импульса при наличии контакта среды с нагревателем, обеспечивающего наличие однородного ($T = T_{bound} = \text{const}$) или неоднородного ($T = T_{bound}(x, t)$) температурного поля (в последнем случае следует принимать во внимание “эффект скольжения”, существенно влияющий, в частности, на постановку граничных условий: тангенциальная составляющая скорости потока на поверхности границы $v_{\tau,0} \propto \mu(\rho T)^{-1}(\partial T / \partial x_{\tau})|_{n=0}$), и локальных пристенных значениях $\text{Ma} \lesssim 1$, $\text{Re} \gg 1$, замыкается учетом группы слагаемых $\sigma_{ik}^{(T)}$ во 2-ом приближении для тензора напряжений (13).

Будем полагать для простоты, что $f_i^{(out)} \equiv 0$ (отсутствие внешних массовых сил), коэффициент второй вязкости $\eta \equiv 0$.

В расчетах будет важен следующий установленный выше факт: v

получаемой методом Чэпмена–Энскога “редуцированной” гидродинамической пост-навье-стоксовской системе уравнений, возникающей при модификации системы Барнетта путем выявления членов 1-го порядка при разложении по малому параметру Kn (и отбрасывания остальных с более высоким порядком) в уравнении баланса импульса присутствует дополнительное слагаемое, отвечающее “термострессовым силам” (впервые рассматривавшимся Дж. Максвеллом [15], см. также [16]–[17]), которые не имеют аналогов в теории уравнений Эйлера и УНС.

4. Постановка задачи о гидродинамическом расчете полной области

Полная расчетная область — круговой цилиндр (труба) длины $x_{max} = 1$ м и радиуса $R = y_{max} = 0.005$ м. Внешний нагрев стенок трубы неравномерен и описывается нелинейной функцией с явно выраженным максимумом (см. далее). Расчет во внутренней области осуществляется по газодинамической модели, в погранслое ($0.004994 < r(\equiv y) < 0.005$) — по кинетической модели.

По длине цилиндра (вдоль оси симметрии) 100 ячеек, по радиусу в погранслое 5 ячеек, во внутренней области основного течения 25 ячеек (область 2).

Начальные данные задаются по областям. Продольная скорость u воды в начальный момент времени зависит от радиальной координаты точки и изменяется от $u_0 = 50$ м/с на оси симметрии до нуля на внешней границе y_{max} : $u = u_0(1 - (y/y_{max})^2)$ (пуазейлевский профиль). Плотности пара придавалось в целях анализа получаемых расчетных данных два значения: $\rho_0^{(1)} = 10$ [кг/м³] и $\rho_0^{(2)} = 200$ [кг/м³] (последнее значение соответствует состоянию фазового перехода “пар–жидкость”); температура $T_0 = 373 + (673 - 373) \cdot \sin^2(\pi x)$ [К]. Давление оказывается в диапазоне $p_0 = 1.011 \cdot 10^5 \dots 2.981 \cdot 10^6$ [Па]. Во внутренней области основного течения (области гидродинамического расчета, $0 < y < 0.004994$ [м]) давление линейно зависит от продольной координаты:

$$p = \frac{p_{x,min}(x_{max} - x) + p_{x,max}x}{x_{max}}, \quad p_{x,max} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ (Па)},$$

$$p_{x,min} = p_{x,max} - \Delta p, \quad \Delta p = \frac{4u_0\mu_0}{y_{max}^2}x_{max}, \quad \mu_0 = 2.7567 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Начальная температура воды $T_0 = 373$ [К]; плотность воды $\rho_0 = 958.457 \dots 958.458$ [кг/м³].

Граничные условия:

1) на внешней границе трубы $r_{max} = R_0$ задана температура, равная начальной температуре в прилегающей области в соответствии с приведенной выше формулой: $p_{wall} = 1.011 \cdot 10^5 \dots 2.981 \cdot 10^6$ [Па]. Нормальная и тангенциальная скорости равны нулю;

2) на торцевых границах $x = 0$ (для кольцевой области входа в погранслою и круговой области входа в основное течение) заданы параметры входящего потока, примерно равные начальным величинам из прилегающих внутренних ячеек. Продольная граничная скорость для погранслоя задается 0.1 [м/с], для внутренней области 50 [м/с];

3) на торцевых границах $x = x_{max}$ заданы “нулевые производные” по нормали от всех газодинамических величин.

Область погранслоя рассчитывается по уравнению БГК. Внутренняя область — по газодинамической системе (модифицированного Барнетта или Навье–Стокса) с учетом вязкости и теплопроводности.

Газодинамическая область разбита на две подобласти на радиусе 0.004988 м, так что толщина дополнительной релаксационной подобласти, прилегающей к погранслою, равна толщине погранслоя и имеет также 5 ячеек по радиусу. В нижней подобласти 25 ячеек по радиусу. Граница между подобластями внутренняя эйлера, не требующая дополнительных граничных условий.

В расчете использовалось уравнение состояния воды из работы *Revised Release on the IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use. The International Association for the Properties of Water and Steam* (President: Professor Tamara Petrova. Moscow, Russia, 2014; <http://www.iapws.org>), позволяющее учитывать фазовые переходы жидкость–пар. В качестве примера на рис. 18а,б представлены зависимости давления p и удельной внутренней энергии ε от удельного объёма $v = 1/\rho$ для нескольких значений температуры. Область фазового перехода на них заключена между $v_1(T)$ и $v_2(T)$, где давление равно давлению насыщения $p = p_s(T)$, зависимость которого от температуры показана на рис. 19а. С ростом температуры ширина переходной зоны $v_1 < v < v_2$ сужается (см. рис. 19б) и превращается в “критическую” точку $v_c = 0.00317$ м³/кг, где $p_c = 22.12$ МПа, $T_c = 647.3$ К. При температуре $T < T_c$ в “левой” части плоскости $p(v)$ (рис. 18а), где $v < v_1$, вода находится в жидком состоянии, в “правой” части $v > v_2$ — в газообразном. При $T > T_c$ состояние считается сверхкритическим. Из зависимости $p = p_s(T)$ следует, что удельная внутренняя энергия в переходной зоне является линейной функцией от v и находится интерполяцией между значениями на границах зоны:

$$\varepsilon(v, T) = \frac{\varepsilon(v_1, T) + \varepsilon(v_2, T)}{v_2 - v_1},$$

что соответствует прямым линиям на рис. 18б.

Допустимый диапазон величин $\{p, T\}$ ограничен сверху значениями

$p_{max} = 10^8$ Па и $T_{max} = 1073.15$ К. Входными величинами для расчета давления и удельной внутренней энергии являются переменные удельного объема (плотности) и температуры.

Так как в программе *НЗТ* входными величинами для уравнения состояния являются ρ и ε , то расчет T и p осуществляется итерационно. В *НЗТ* при решении задачи о распаде разрыва для расчета величин на границах ячеек уравнение состояния представляется в виде двучлена $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + c_0^2(\rho - \rho_0)$ с заданными коэффициентами γ , c_0 , ρ . При использовании более сложного уравнения состояния, как в данном случае, его нужно преобразовать к аналогичному виду, где коэффициенты уже не будут постоянными, а должны вычисляться в каждой ячейке пространства в каждый момент времени, исходя из заданных зависимостей $p(\rho, T)$. $\varepsilon(\rho, T)$:

$$\gamma = 1 + \rho^{-1} \frac{\partial p / \partial T}{\partial \varepsilon / \partial T}, \quad c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} - (\gamma - 1) \cdot (\rho \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \varepsilon),$$

$$\rho_0 c_0^2 = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} - \rho(\gamma - 1) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) - p, \quad p_0 = \rho_0 c_0^2 \gamma^{-1}.$$

Кроме основных величин давления и температуры, необходимо вычислять производные от давления и удельной внутренней энергии. Скорость звука: $c = \sqrt{\gamma(p + p_0) / \rho}$ (скорость звука, полученная из исходного уравнения состояния совпадает со скоростью звука из двучлена).

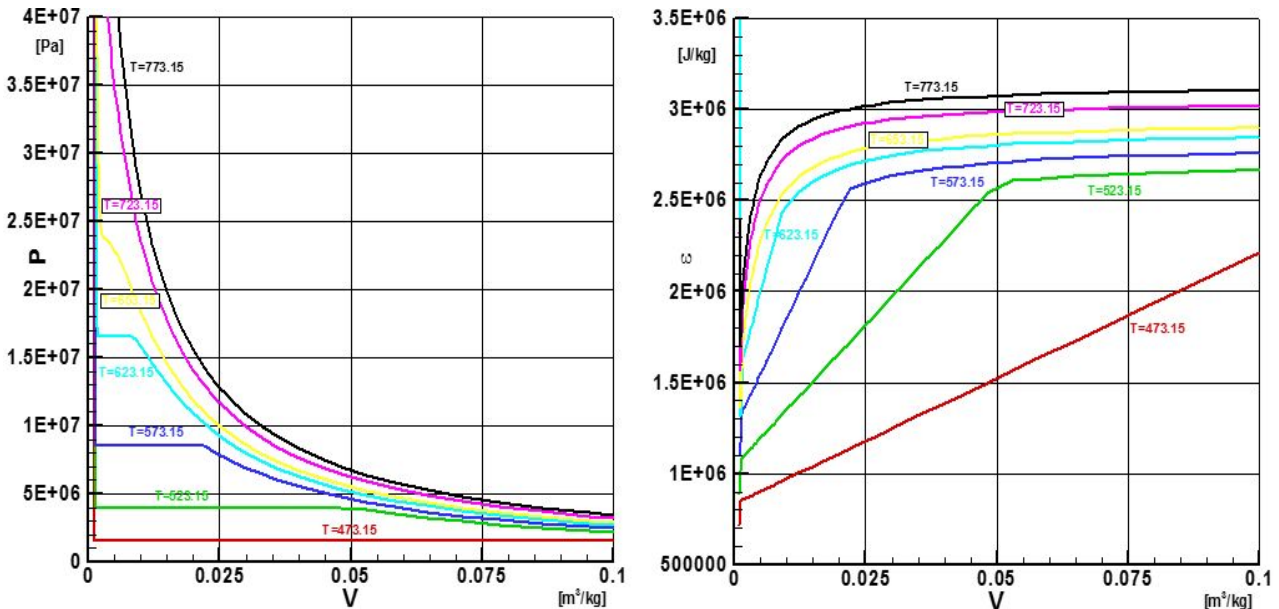


Рис. 18. Слева — зависимость давления от удельного объема для воды при нескольких значениях температуры (а), справа — зависимость удельной внутренней энергии от удельного объема для воды при нескольких значениях температуры (б)

Более подробно рассмотрим расчеты с начальной плотностью пара $\rho_0^{(2)}$ в погранслое. На рисунках 2–4 показаны профили функций распределения

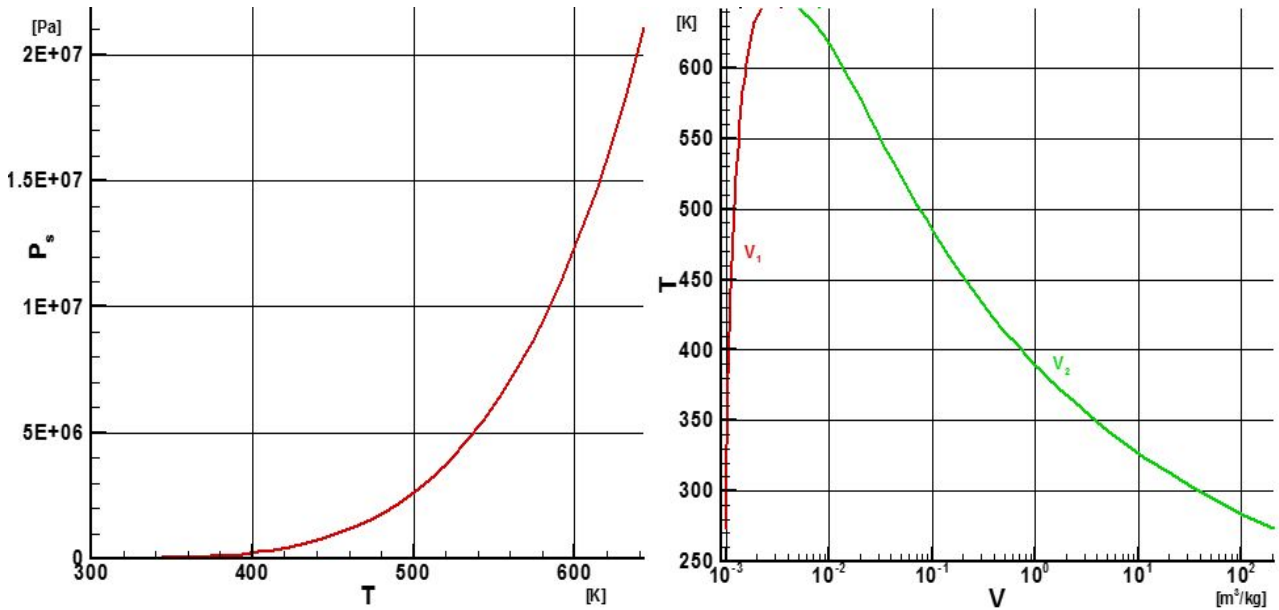


Рис. 19. Слева — зависимость давления насыщения от температуры (а), справа — зависимость границ области фазового перехода от температуры (б)

молекул по скоростям в погранслое ($t = 10^{-8}$ с) в зависимости от радиуса (близости выделенного сечения к стенке). Можно видеть, что при отдалении от нагреваемой поверхности и переходе к релаксационному подслою степень изотропии распределения увеличивается. На рисунке 5 приведены поперечная (радиальная) скорость v_r в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, справа — продольная (тангенциальная) скорость v_z в поперечном сечении пограничного кинетического слоя. На рисунке 6 показана изменения в радиальном направлении плотности и температуры в поперечном сечении кинетического погранслоя как динамические функции (в зависимости от времени). На рисунке 7 схематически показаны расчетные зоны в трубе (начиная от греющейся стенки до области гидродинамического расчета — с помощью уравнений Навье–Стокса или модифицированного Барнетта). На рисунках 8–10 приведены профили функции распределения молекул (для момента $t = 10^{-8}$ с) в релаксационном подслое (обеспечивающем максвеллизацию неравновесных распределений для обеспечения входных условий для гидродинамических расчетов). Рисунки 11–13 демонстрируют изменение усредненных величин поперечной скорости молекул (в кинетическом погранслое), их плотности и температуры (в расширенном релаксационном подслое погранслоя) в зависимости от времени. На рисунке 14 показана зависимость величины гидродинамического давления по модифицированному Барнетту в полной области гидродинамического расчета в трубе, на рисунке 15 — температура среды по мБарнетту; на рисунках 16–17 — те же величины, но расчет проведен по Навье–Стоксу. Рисунки 18 и 19 демонстрируют общий вид частных форм уравнения состояния воды $p = p(\rho, T)$ для различных температур, а также зависимости границ области

фазового перехода от температуры. На рисунках 20–30 приведены различные характеристики гибридного расчета БГК–мБарнетт в полной области расчетов вдоль трубы ($t = 10^{-8}$ с); рисунки 31–33 показывают температуры, давления среды и поперечной скорости молекул в погранслое в поперечном направлении (вдоль радиуса).

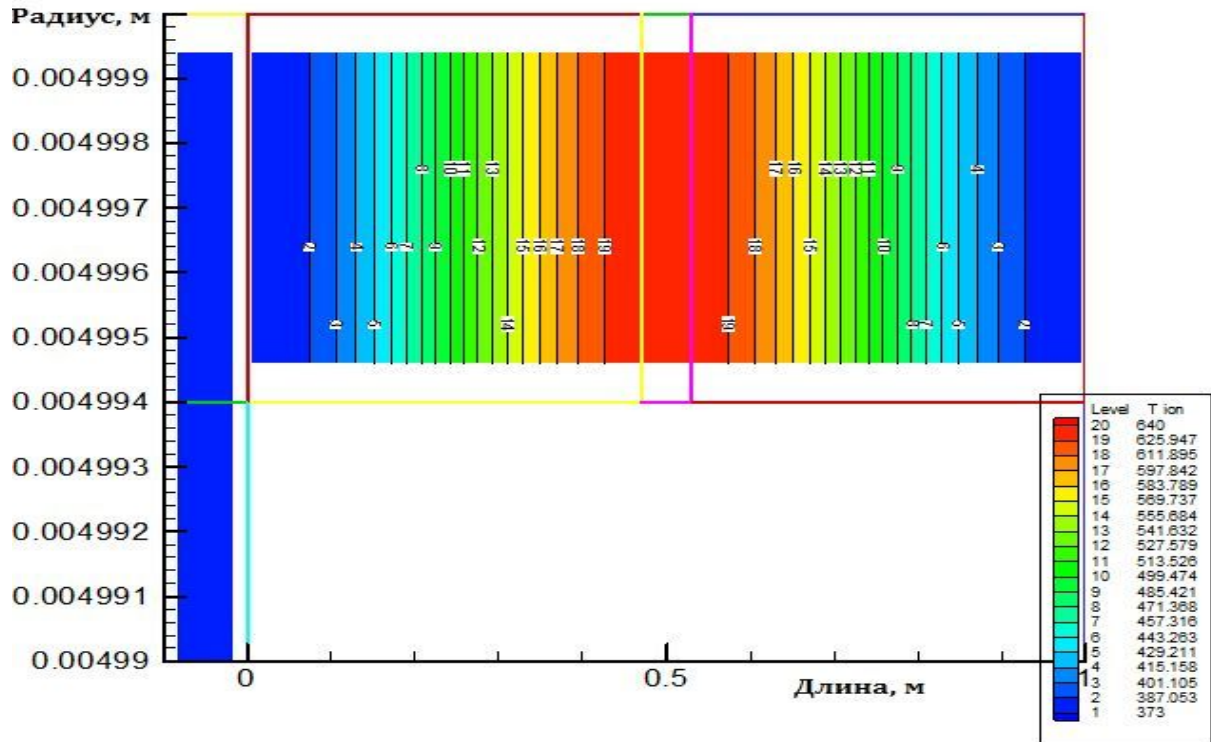


Рис. 20. Начальное давление в кинетическом погранслое по БГК/мБарнетту (начальная плотность среды погранслоя $\rho(t = 0) = \rho_0^{(2)}$).

5. Возникновение вихревых структур в течениях Барнетта

Исследование уравнений Барнетта показывает, что переход к описанию возникающих вихревых движений среды возможен посредством анализа структуры тензора напряжений, в том числе выявления возможности перехода коэффициента вязкости через критическое значение, учета реализации условий присутствия эффекта Марангони, а также определения существенности вклада тепловых барнеттовских потоков, нелинейных основной (“несущей”) скорости потока, что соответствует введению в рассмотрение нового принципиально значимого псевдоконвективного режима динамики среды. При этом в связи с отсутствием априорного предположения о малости температурного перепада \mathcal{X} возникающий тип конвекции в совокупности с надлежащими предположениями о первичном стационарном движении среды (например, в канале или трубе с обогреваемыми

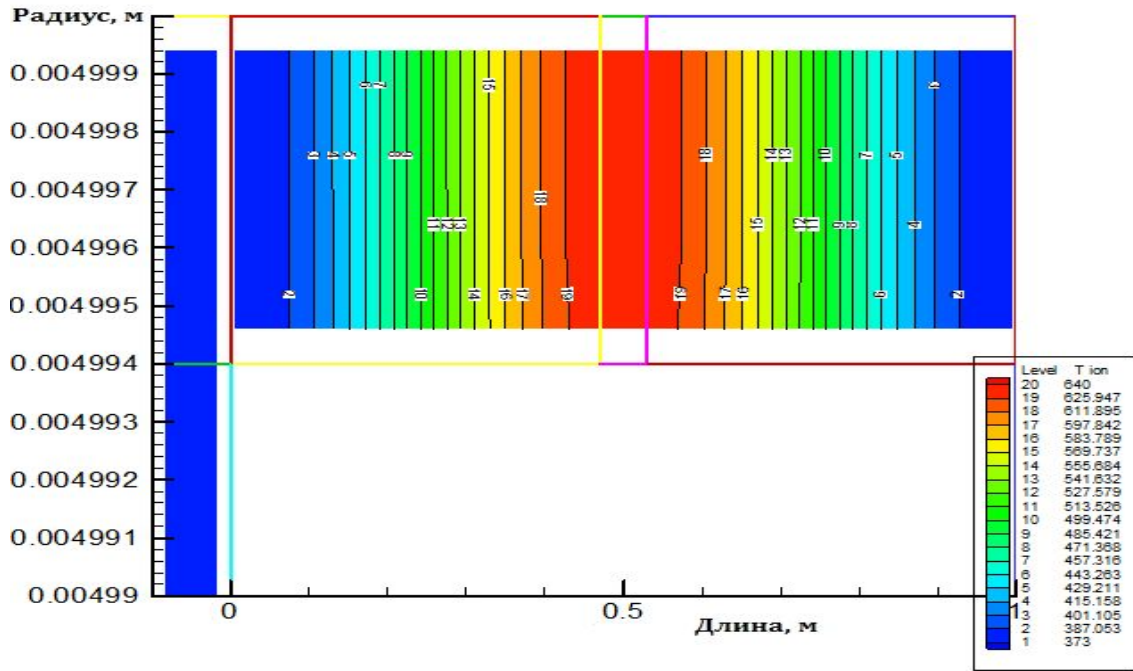


Рис. 21. Температура в кинетическом погранслое по БГК/модифицированному Барнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t=0) = \rho_0^{(2)}$).

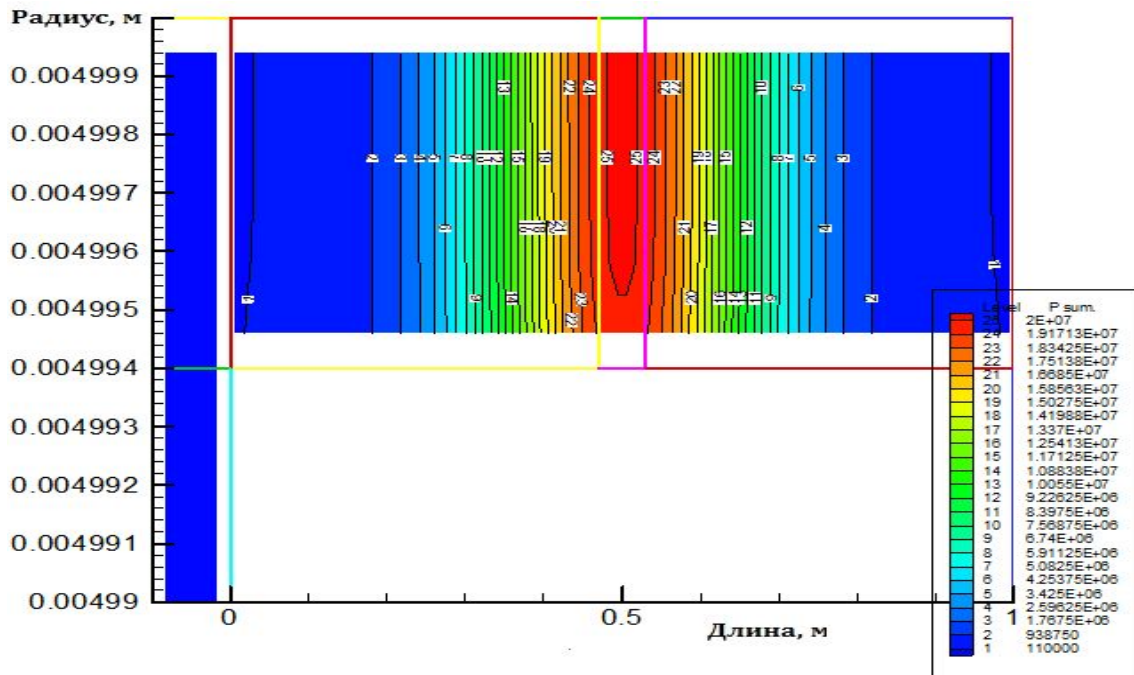


Рис. 22. Давление в кинетическом погранслое по БГК/модифицированному Барнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t=0) = \rho_0^{(2)}$).

стенками имеем профиль, топологически близкий пуазейлевскому) может при определенных условиях приводить к образованию в течении мезомасштабных “когерентных” структур [18]–[19]. Ограничимся случаем модельной ситуации среды с максимально упрощенным линеаризованным (безразмерным) уравнением состояния среды $\rho T = 1$ и рассмотрим

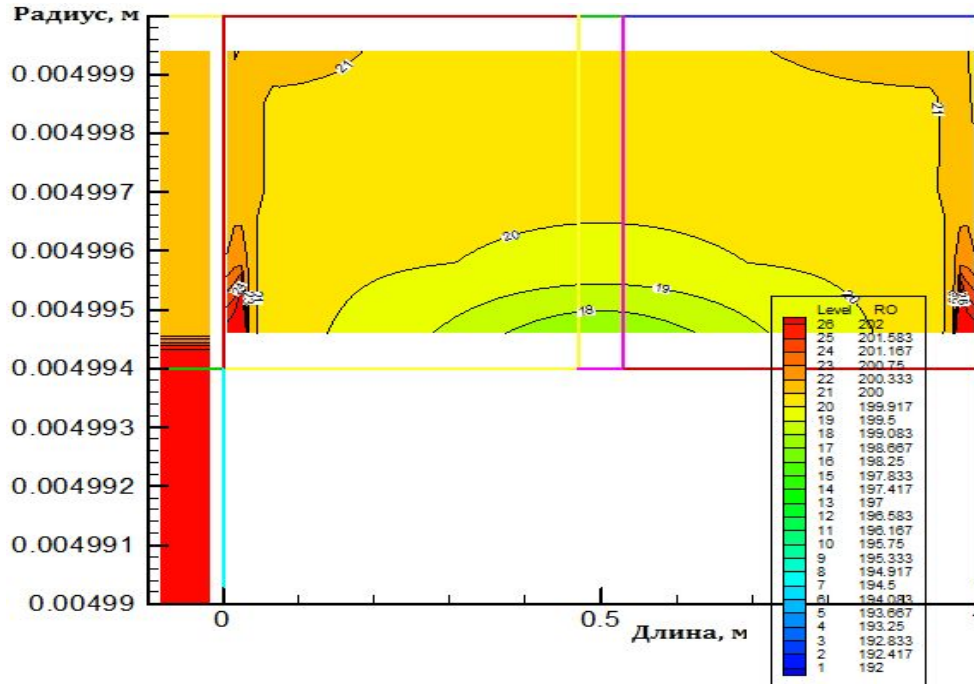


Рис. 23. Плотность в кинетическом погранслое по БГК/модифицированному Барнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t=0) = \rho_0^{(2)}$).

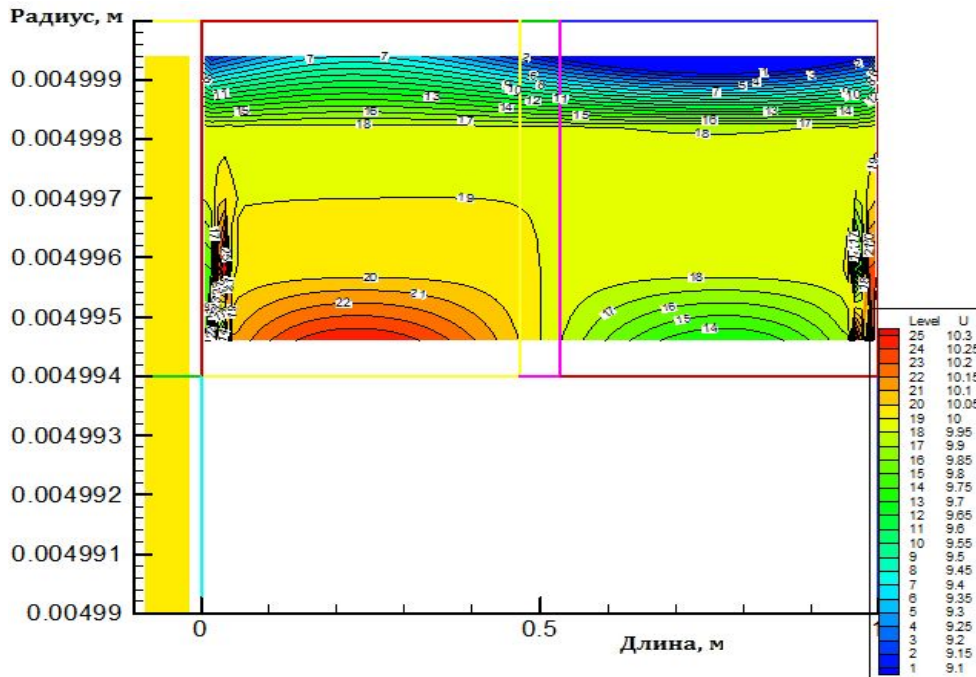


Рис. 24. Продольная скорость в кинетическом погранслое по БГК/мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t=0) = \rho_0^{(2)}$).

вопрос о возникновении из стационарного решения уравнения Барнетта нового решения, представляющего собой бифуркационную периодическую по времени ветвь, соответствующего на физическом уровне реализации вихревого (в общем случае многоточечного/многочастотного) движения среды.

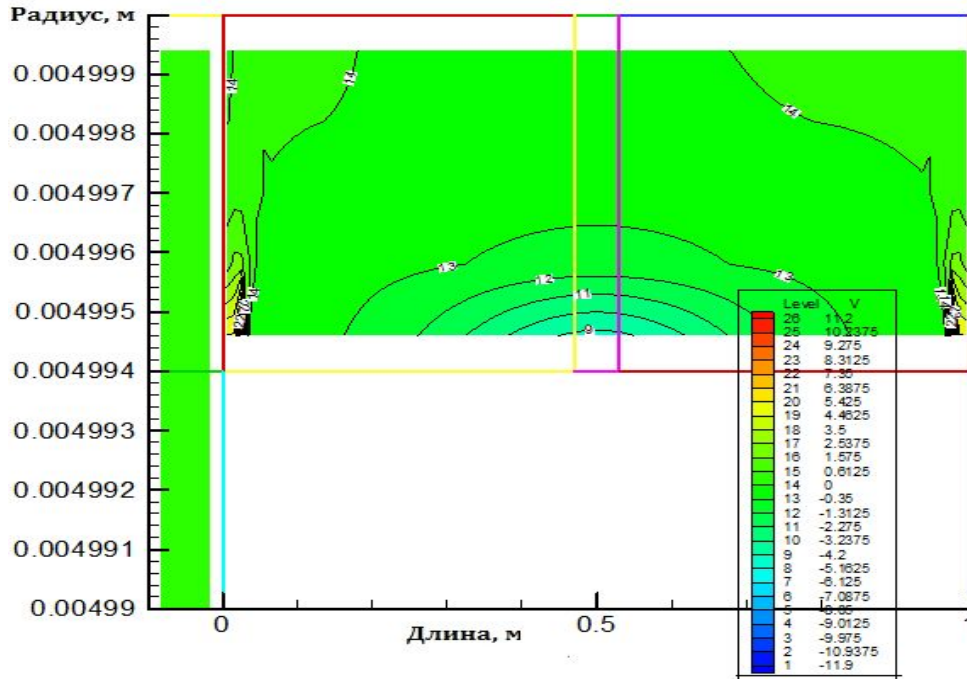


Рис. 25. Поперечная скорость в кинетическом погранслое по БГК/мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t=0) = \rho_0^{(2)}$).

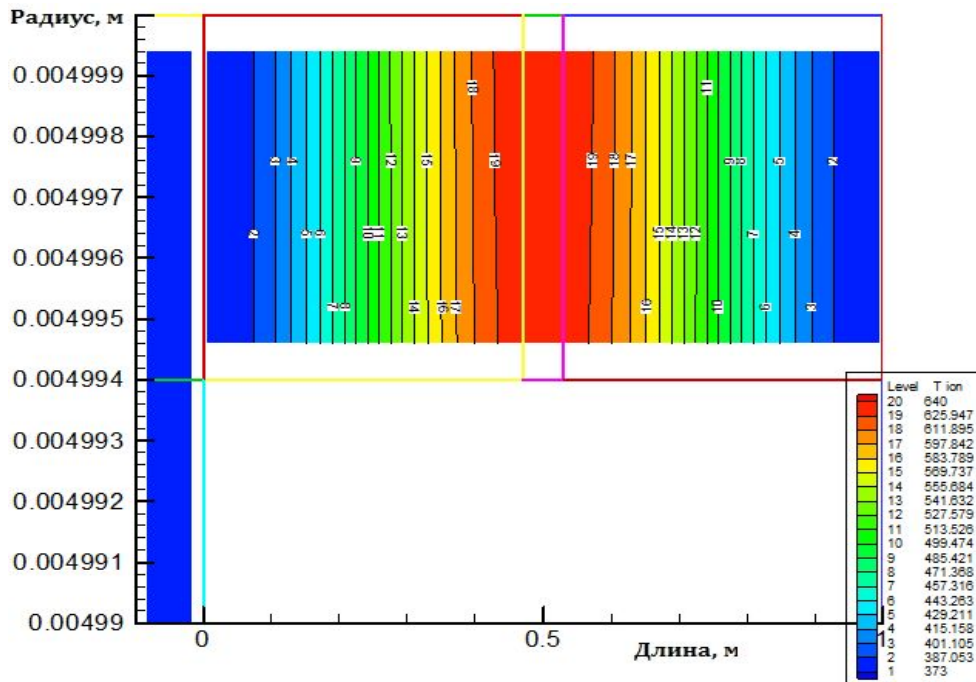


Рис. 26. Температура в погранслое по мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t=0) = \rho_0^{(2)}$).

Рассмотрим смешанную задачу о движении среды в области $\Omega = \{0 < y < Y; -\infty < z < \infty\} \in \mathbb{R}^2$ (канал с нагреваемыми стенками) для редуцированной системы Барнетта. Модификация предлагаемой методики на случай 3-мерного канала/трубы не представляет принципиальной сложности, но демонстрация промежуточных вычислений при этом выглядела

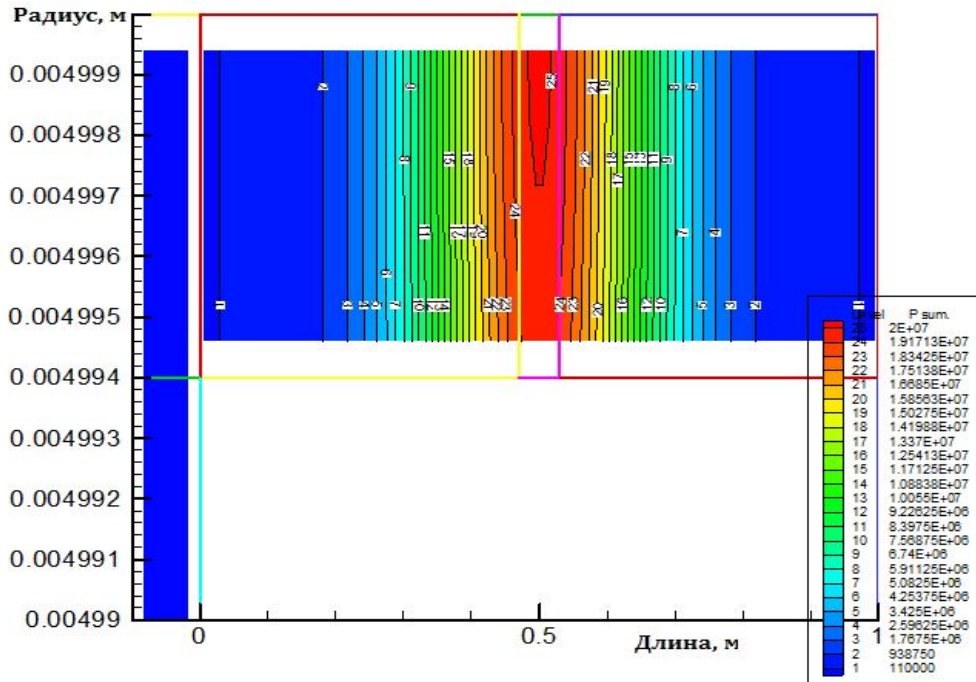


Рис. 27. Давление в погранслое по мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t = 0) = \rho_0^{(2)}$).

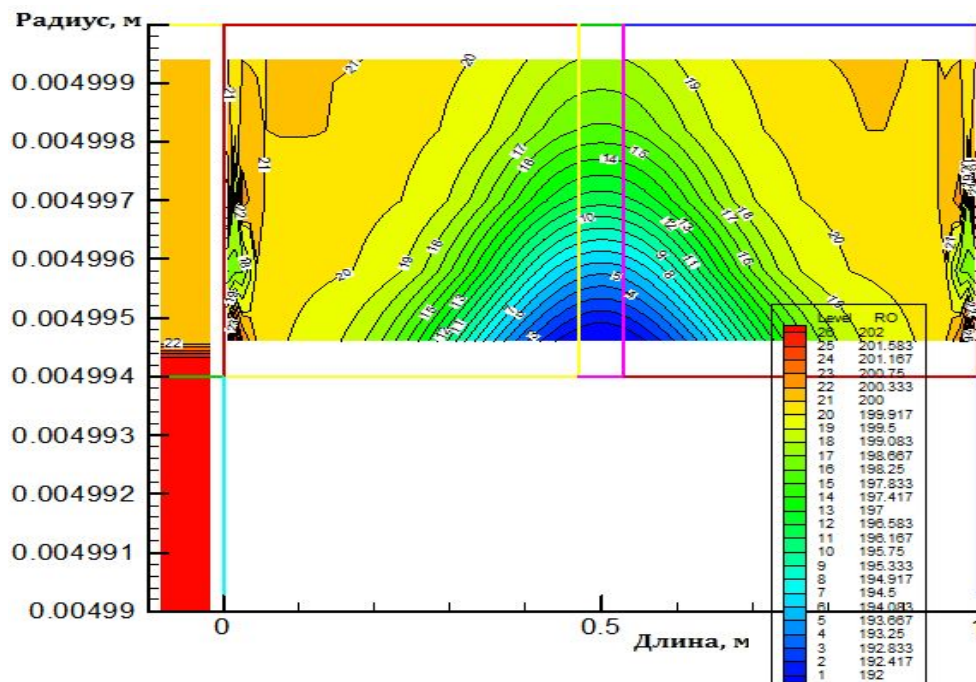


Рис. 28. Плотность в погранслое по мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t = 0) = \rho_0^{(2)}$).

бы чрезвычайно громоздкой; следует отметить, однако, что сложная топология (наличие кривизны канала, существенный рельеф поверхности границы) расчетной области даже 2-мерного течения может приводить к качественному изменению характера движения среды.

Уравнение непрерывности и линеаризованное УРС можно использовать для получения явного вида функциональной связи $\mathbf{v} = \mathbf{v}[T]$ из уравнения

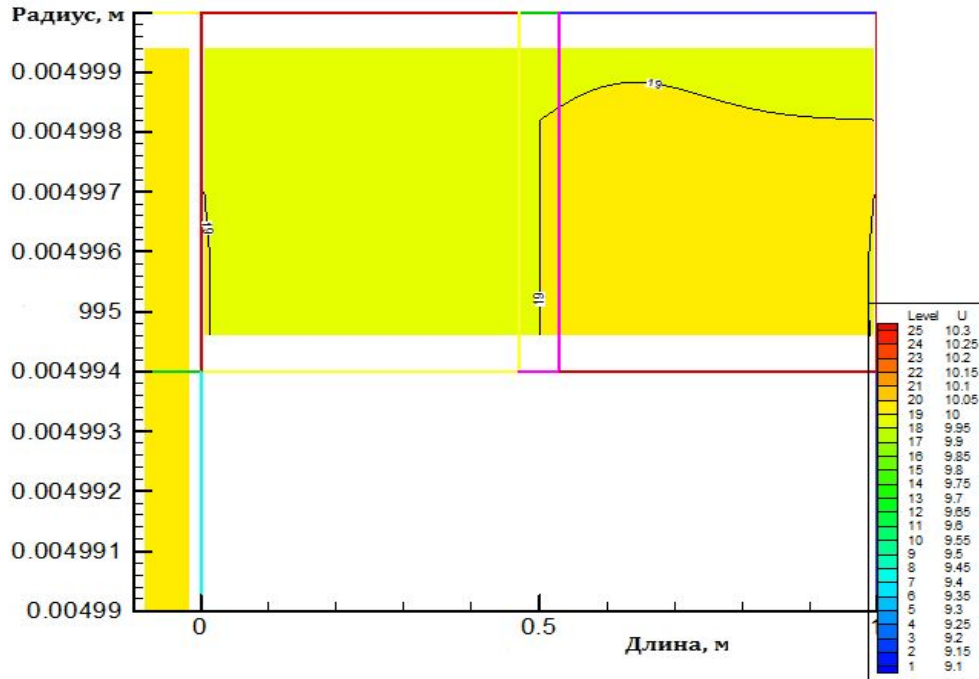


Рис. 29. Продольная скорость в погранслое по мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t = 0) = \rho_0^{(2)}$).

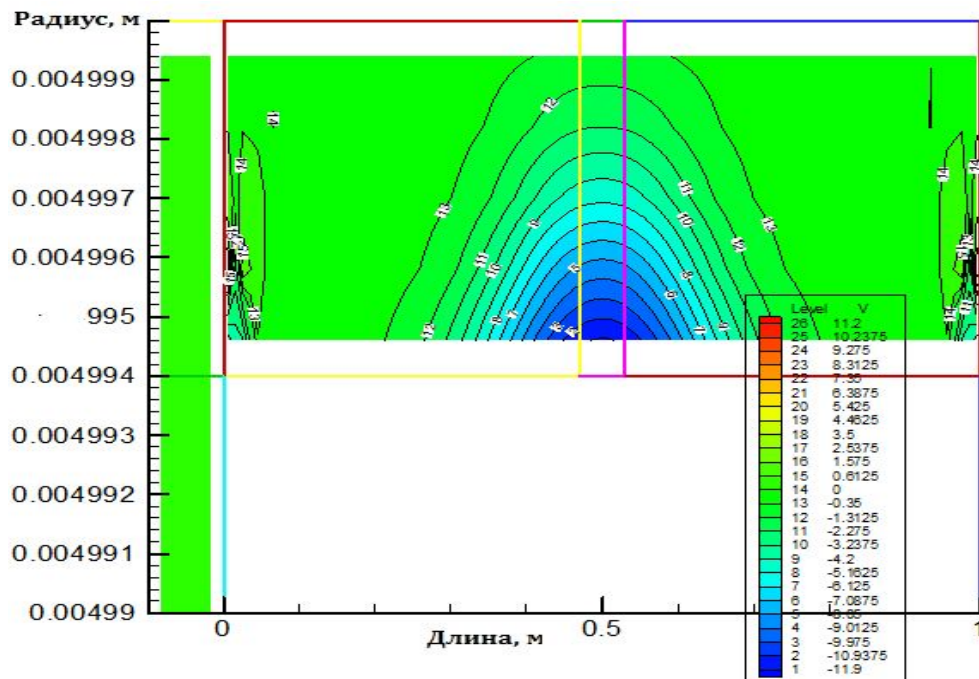


Рис. 30. Радиальная скорость в погранслое по мБарнетту при $t = 10^{-8}$ с ($\rho(t = 0) = \rho_0^{(2)}$).

баланса температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) T^{-1} + T \operatorname{div} \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) T + \frac{2}{3} T \nabla (\lambda \nabla T),$$

откуда имеем: $\frac{3}{2} \nabla \mathbf{v} = \nabla \lambda \cdot \nabla T + \lambda \Delta T$. При интегрировании последнего

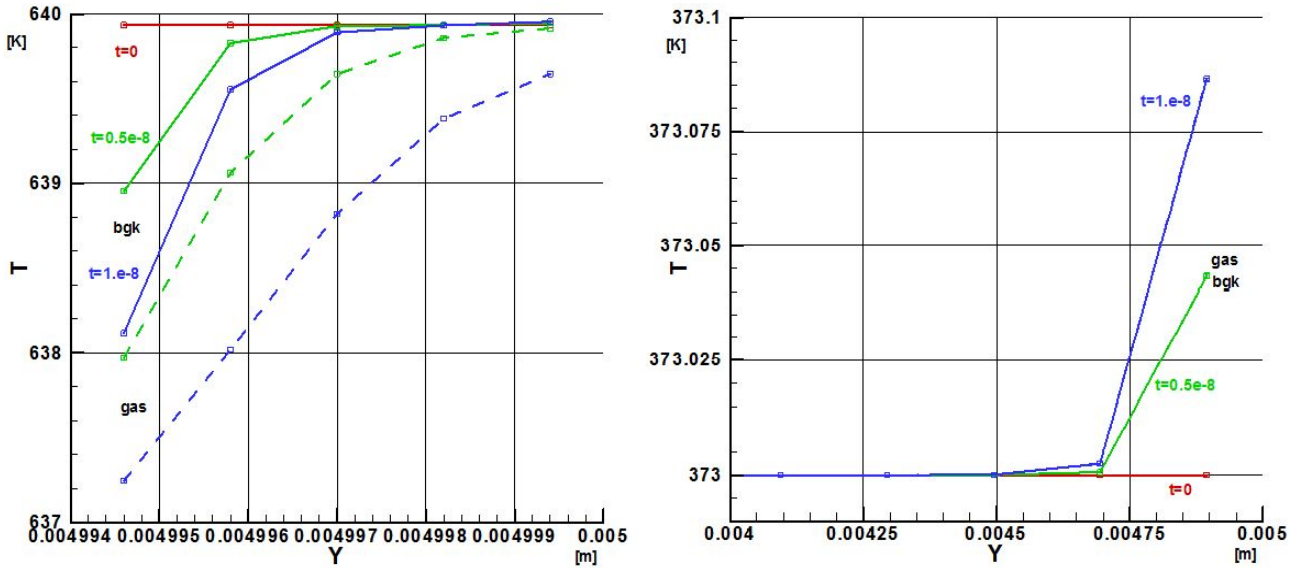


Рис. 31. Температура T ([K]) в зависимости от радиуса (Y , [м]) в погранслое (слева) и температура в газодинамической области вблизи границы с погранслоем (справа) для моментов времени 0 (красные линии), $0.5 \cdot 10^{-8}$ с (зеленые) и 10^{-8} с (синие).

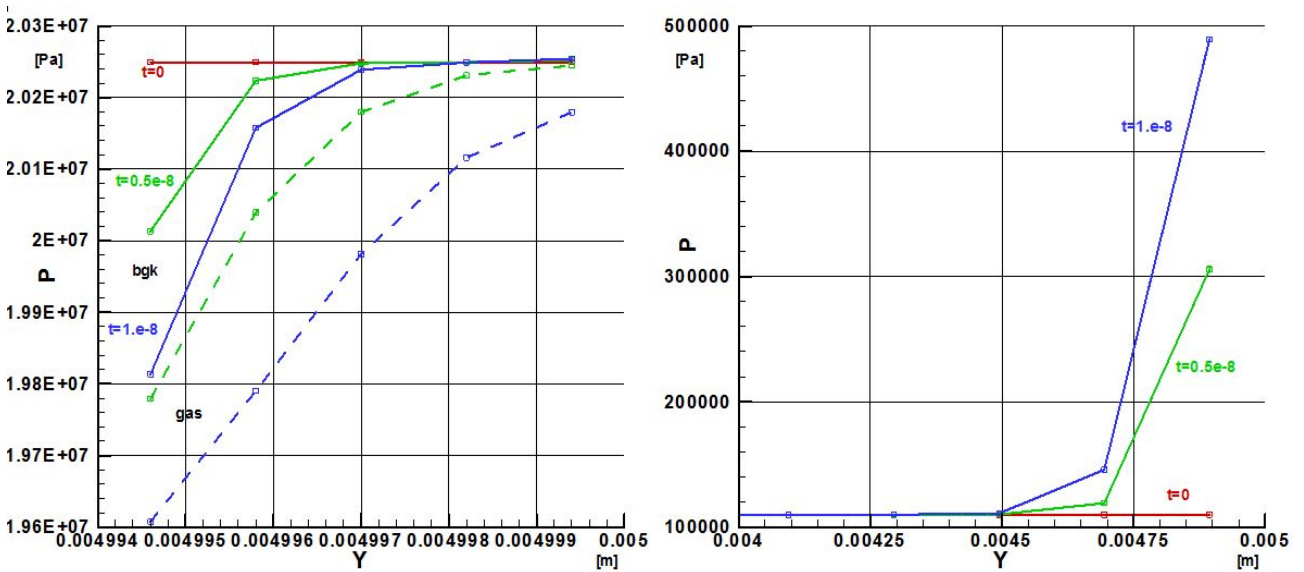


Рис. 32. Давление p ([Па]) в зависимости от радиуса (Y , [м]) в погранслое (слева) и давление в газодинамической области вблизи границы с погранслоем (справа) (времена те же).

соотношения имеем $\mathbf{v} = \frac{2}{3} \lambda \nabla T + \mathbf{f}(t)$ (соответствующий режим течения реализуется вплоть до границ области, где отвечает общим условиям скольжения за счет термического градиента: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{n=0} \sim O(\text{Kn}^2) \approx 0$, $v_\tau|_{n=0} \propto \partial \ln T / \partial \tau$). Уравнение переноса импульса можно записать в следующей форме:

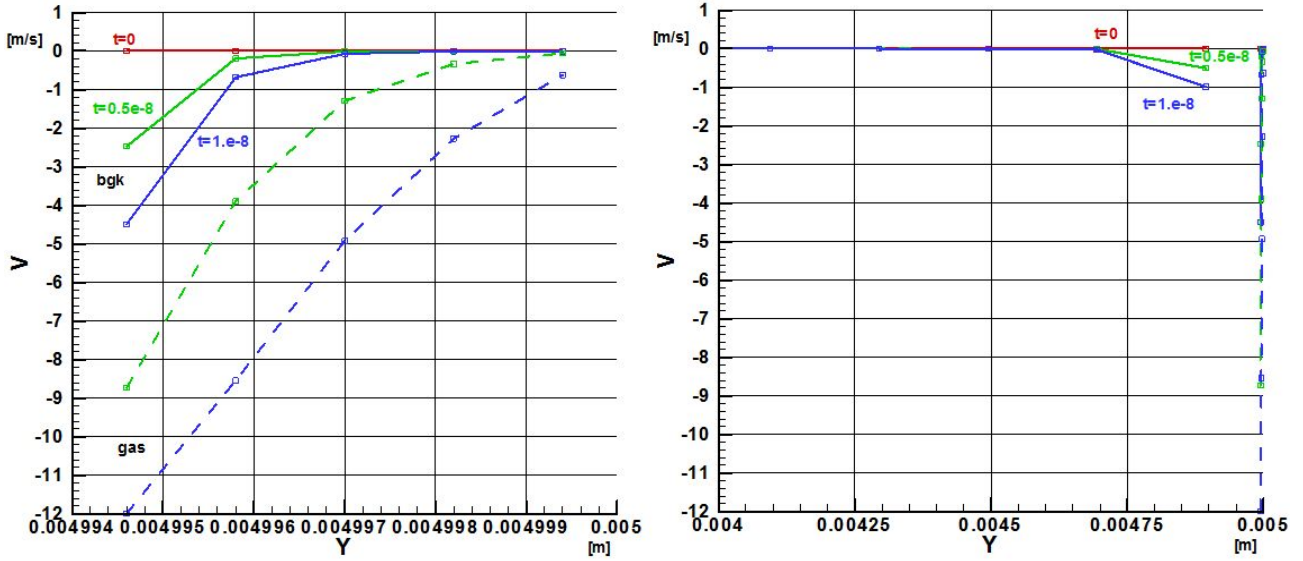


Рис. 33. Радиальная скорость v_r ([м/с]) в зависимости от радиуса (Y , [м]) в погранслое (слева) и давление в газодинамической области вблизи границы с погранслоем (справа) (времена те же).

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \widehat{B}(v, T; \mu, \mathfrak{s}_{1,2}) = 0, \quad (14)$$

$$\widehat{B}(v, T; \mu, \mathfrak{s}_{1,2}) \equiv \widehat{F}^{(1)}(v, T; \mu) +$$

$$\widehat{F}_j^{(2)}(T; \mathfrak{s}_{1,2}), \quad \widehat{F}_j^{(2)}(T; \mathfrak{s}_{1,2}) \equiv \sum_k \frac{\partial \widehat{F}_{jk}^{(2)}(T; \mathfrak{s}_{1,2})}{\partial x_k},$$

$$\widehat{F}^{(1)}(v, T; \mu) = T^{-1}((v \cdot \nabla)v)_j - 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu(T) \left\langle \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\rangle \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_j},$$

$$\widehat{F}_{jk}^{(2)}(T; \mathfrak{s}_{1,2}) = \mathfrak{s}_1 \langle T_{x_j x_k} \rangle + \mathfrak{s}_2 \langle T_{x_j} T_{x_k} \rangle, \quad j, k = 1, 2.$$

Коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаем заданными функциями температуры (допущение, приводящее к получению в явном виде величин $\xi_{i=1,2} = \xi_i(\kappa_1, \kappa_2)$ в барнеттовском уравнении [2]): $\mu(T) = \alpha_1 T^\beta$, $\lambda(T) = \alpha_2 T^\beta$ ($\alpha_{1,2} \geq 0$, случай $0 < \beta < 1$ отвечает степенному межмолекулярному потенциалу взаимодействия, $\beta = 1$ — условным “максвелловским” молекулам), при этом параметры $\mathfrak{s}_{1,2}$ имеют смысл функций

$$\mathfrak{s}_1(\mu, T) = \alpha_1^2 \kappa_1 T^{2\beta}, \quad \mathfrak{s}_2(\mu, T) = \frac{\mu^2}{T} \xi_2 = \alpha_2^2 (\kappa_1 \beta - \kappa_2) T^{2\beta-1}, \quad \kappa_1, \kappa_2 \geq 0.$$

Система гидродинамических уравнений Навье–Стокса для сжимаемой среды (при $T_t \equiv 0$ и с учетом введенного выше линеаризованного УРС) и $\widehat{F}^{(1)}(v, T; \mu) = 0$, в соответствии с результатами работ [20]–[24],

при надлежащем граничном режиме имеет локально в пространстве макропараметров (ρ, T, μ) классическое решение, соответствующее стационарному течению в рассматриваемой области Ω . Ориентируясь на эти результаты, рассмотрим некоторые аспекты теории редуцированных уравнений Барнетта. Примеры неизотермических течений, рассмотренные в работах [16], [17], [25], приводят к заключению о существовании (при выполнении соответствующих дополнительных условий) единственного нетривиального стационарного решения $\{v_*(x), T_*(x), \rho_*(x)\}$ системы уравнений (14).

Чтобы верифицировать данное предположение, целесообразно рассмотреть возможность распространения области локального существования решения нелинейного уравнения, возмущенного слагаемым с барнеттовскими производными от температуры, через посредство применения свойства устойчивости соответствующих условий теоремы о неявной абстрактной функции [26]–[27].

Можно выявить условия, при которых вышеупомянутое нетривиальное стационарное решение может переходить в “составное”, включающее нестационарную ветвь, вида $v(x, t) = v_*(x) + v^\dagger(x, t)$, где функция $v^\dagger(x, t) = v^\dagger(x, t + \mathfrak{T})$ предполагается периодической по переменной t с периодом $\mathfrak{T} = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$ (предположение о существовании составного решения является очевидным выводом из общей методики исследования эволюционных гидродинамических уравнений [28]–[30]). Слагаемое $v^\dagger(x, t)$ можно ассоциировать с нестационарным вихревым течением в исследуемой гидродинамической системе, описываемой с помощью редуцированных уравнений Барнетта, представляющих собой УНС с дополнительным операторным слагаемым $\widehat{F}_j^{(2)}$. Возникновение таких частотно-зависимых течений обусловлено ветвлением решений стационарных решений уравнения $\widehat{V}(v, T; \mu, \mathfrak{s}_{1,2}) = 0$ за счет бифуркации Хопфа (возможно, многократной); при этом стационарное решение $v_*(x)$ может терять устойчивость в зависимости от набора термодинамических параметров (α_1, α_2) и локальной температуры потока T (ситуация здесь по сути является прямым обобщением случая гидродинамического течения несжимаемой жидкости, где устойчивость стационарного режима характеризуется параметром Рейнольдса $Re \sim \mu^{-1}$).

Заключение

Был разработан и реализован универсальный алгоритм расчета течений в каналах и трубах при наличии значительного теплового потока от стенки, учитывающий возможность введения кинетического расчета в погранслое. Установлено, что течение в погранслое существенно зависит от формы уравнения среды в основной области расчета и метода учета вязкости там же. При этом успешно внедрен программный подход перехода от области

кинетических расчетов по БГК–методике к области гидродинамических расчетов по модифицированному Барнетту или по Навье–Стоксу. Было высказано предположение о частичном несовпадении термодинамических величин канонического ансамбля жидкости и микроканонического ансамбля в погранслое (связанное с появлением вихревых структур и фазовым переходом в жидкости). В расчетах это предположение явного подтверждения не нашло, хотя тенденции были намечены — для точных заключений требуется продолжение расчетов на большие времена.

Приложение

Коэффициенты Φ_{ij} , содержащиеся в тензоре вязких напряжений

$$\begin{aligned} \Phi_{rr} = & -2\xi^2 T^2 \left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \right\rangle + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \right\rangle + \frac{2-4\beta}{3} p \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial r} \right\rangle \nabla_{\mathbf{v}} - \\ & -2\xi^2 T \left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \right\rangle + 2p \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \right\rangle + 2\beta \rho \xi^2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi\varphi} = & -2\xi^2 T^2 \left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \right\rangle + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle - 2\xi^2 T \left\langle \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle + \\ & + 2p \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{2-4\beta}{3} p \left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right\rangle \nabla_{\mathbf{v}} + 2\beta \rho \xi^2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{zz} = & -2\xi^2 T^2 \left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right\rangle + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\rangle - 2\xi^2 T \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\rangle + \\ & + 2p \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{2-4\beta}{3} p \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\rangle \nabla_{\mathbf{v}} + 2\beta \rho \xi^2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\Phi_{r\varphi} = -2\xi^2 T^2 \left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial \varphi} \right\rangle + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle - 2\xi^2 T \left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle +$$

$$+2p \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{2-4\beta}{3} p \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right\rangle \nabla v + 2\beta \rho \xi^2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\rangle$$

$$\Phi_{z\varphi} = -2\xi^2 T^2 \left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \varphi} \right\rangle + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle - 2\xi^2 T \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle +$$

$$+2p \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{2-4\beta}{3} p \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right\rangle \nabla v + 2\beta \rho \xi^2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\rangle$$

Здесь:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial r} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \right\rangle = \frac{2}{3r^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3r^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3r^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{v_z}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2r} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right\rangle = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{2}{3r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2r} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right\rangle = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} \right\rangle = \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\rangle = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right\rangle = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_r}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

В 2-мерном осесимметричном случае ($\partial/\partial\varphi = 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\Phi_{rr} &= -2\xi^2 T^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 - 2\xi^2 T \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} + \\
&+ \frac{1-2\beta}{3} p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}\right) \nabla v + p \left(\left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2\right) + \beta \rho \xi^2 \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 \\
\frac{3}{4}\Phi_{zz} &= -\xi^2 T^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{\xi^2 T^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 - \xi^2 T \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \\
&+ \frac{1-2\beta}{3} p \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_z}{z}\right) \nabla v + p \left(\left(\frac{v_z}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right) + \beta \rho \xi^2 \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 \\
\Phi_{rz} &= -2\xi^2 T^2 \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} + \frac{2\xi^2 T^2}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} - \xi^2 T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \\
&+ 2p \cdot \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}\right) \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r}\right) + \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{1-2\beta}{3} p \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r}\right) \cdot \mathbf{div} v + 2\beta \rho \xi^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \Phi_{\varphi\varphi} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\{x_k\}|_{k=1,2,3} = \{r, \theta, \varphi\}$, $\beta = 0, 8$, $\xi = 459, 3$.

Библиографический список

1. Burnett D., *The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas* // Proc. Lond. Math. Soc. V. 40. P. 382–435. 1936.
2. Chapman S., Cowling T.G., *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
3. Enskog D., *The numerical calculation of phenomena in fairly dense gases* // Arkiv Mat. Astr. Fys. 1921. T. 16. P. 1–60.
4. Chapman S., *On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory of viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monatomic gas* // Phil. Trans. R. Soc. A. 1916. V. 216. P. 279–348.
5. Chapman S., *On the kinetic theory of a gas. Part II: A composite monatomic gas: diffusion, viscosity, and thermal conduction* // Phil. Trans. R. Soc. A. 1918. V. 217. P. 115–197.
6. Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлендер О.Г., *О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды* // Известия АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1970. № 2. С. 13–21.
7. Кузнецов Ю.Н., *Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов*. М.: Энергоатомиздат, 1989.
8. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А., *Теплообмен в ядерных энергетических установках*. М.: Атомиздат, 1974.
9. Стырикович М.А., Полонский В.С., Циклаури Г.В., *Тепломассообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций*. М.: Наука, 1982.
10. Шлихтинг Г., *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1974.
11. Лойцянский Л.Г., *Ламинарный пограничный слой*. М.: Физматгиз, 1962.
12. Freedlander O.G., *On thermal-stress gas flows* // Arch. Mech. 1990. V. 42. № 4–5. P. 475–482.
13. Коган М.Н., *Динамика разреженного газа*. М.: Наука. 1967.
14. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А., *Устойчивость конвективных течений*. М.: Наука, 1989.
15. Maxwell J.C., *On streded in rarefied gases arising from inequalities of temperature* // Phil. Trans. Roy. Soc. 1879. V. 170. P. 231.
16. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлендер О.Г., *О свободной конвекции в отсутствие внешних сил* // Известия АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1971. № 3. С. 98–107.
17. Жигулев В.Н., *К вопросу о движении газа около сильно нагретых тел* // ПМТФ. 1972. № 4. С. 95–95.
18. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М., *Физические процессы развития сдвиговой турбулентности* // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. Вып. 3(9). С. 577–584.
19. Belotserkovskii O.M., Oparin A.M., Chechetkin V.M., *Turbulence: New Approaches*. Cambridge (UK): Cambridge International Science Publishing. 2005.
20. Plotnikov P., Sokolowski J., *Compressible Navier–Stokes equations. Theory and shape optimization*. Basel – Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer. 2012.

21. Beirao da Veiga H., *An L_p -theory for the n -dimensional, stationary, compressible Navier–Stokes equations, and the incompressible limit for compressible fluids. The equilibrium solutions* // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109. PP. 229–248.
22. Valli A., *On the existence of stationary solutions for compressible Navier–Stokes equation* // Ann. Inst. H. Poincare. 1987. V. 4. PP. 99–113.
23. Farwig R., *Stationary solutions to compressible Navier–Stokes equations* // Comm. Part. Diff. Eqs. 1989. V. 14. PP. 1579–1506.
24. Choe H., Jin B., *Existence of solutions of stationary compressible Navier–Stokes equations with large force* // J. Func. Anal. 2000. V. 177. P 54–88.
25. Галкин В.С., Фридендер О.Г., *О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями* // ПММ. 1974. Т. 38. С. 271–283.
26. Rheinboldt W.C., *Local mapping relations and global implicit function theorems* // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 138. P. 183–198.
27. Deimling K., *Nonlinear functional analysis*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer–Verlag. 1973.
28. Sattinger D., *Stability of bifurcating solutions by Leray–Schauder degree* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1971. V. 43. № 2. P. 154–166.
29. Sattinger D., *Topics in stability and bifurcation theory*. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer–Verlag. 1985.
30. Joseph D.D., Nield D.A., *Stability of bifurcating time–periodic and steady solutions of arbitrary amplitude* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1975. V. 58. № 4. P. 369–380.

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение. Гидродинамическое приближение Барнетта и кинетическое уравнение БГК | 3 |
| 1 Физическая постановка задачи о переносе тепла от стенок к “основному холодному течению” для уравнения БГК в обобщенном погранслое..... | 4 |
| 2 Математическая постановка задачи для уравнения БГК..... | 6 |
| 3 Модифицированное барнеттовское приближение в условиях значительных температурных неоднородностей..... | 14 |
| 4 Постановка задачи о гидродинамическом расчете полной области..... | 24 |
| 5 Возникновение вихревых структур в течениях Барнетта..... | 28 |
| Заключение | 36 |
| Приложение | 37 |
| Библиографический список | 43 |

