



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



**М.Ю.Овчинников, В.И.Пеньков,
Д.С.Ролдугин, Д.С.Иванов**

**Магнитные системы
ориентации
малых спутников**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. Магнитные системы ориентации малых спутников. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2016. 366 с.

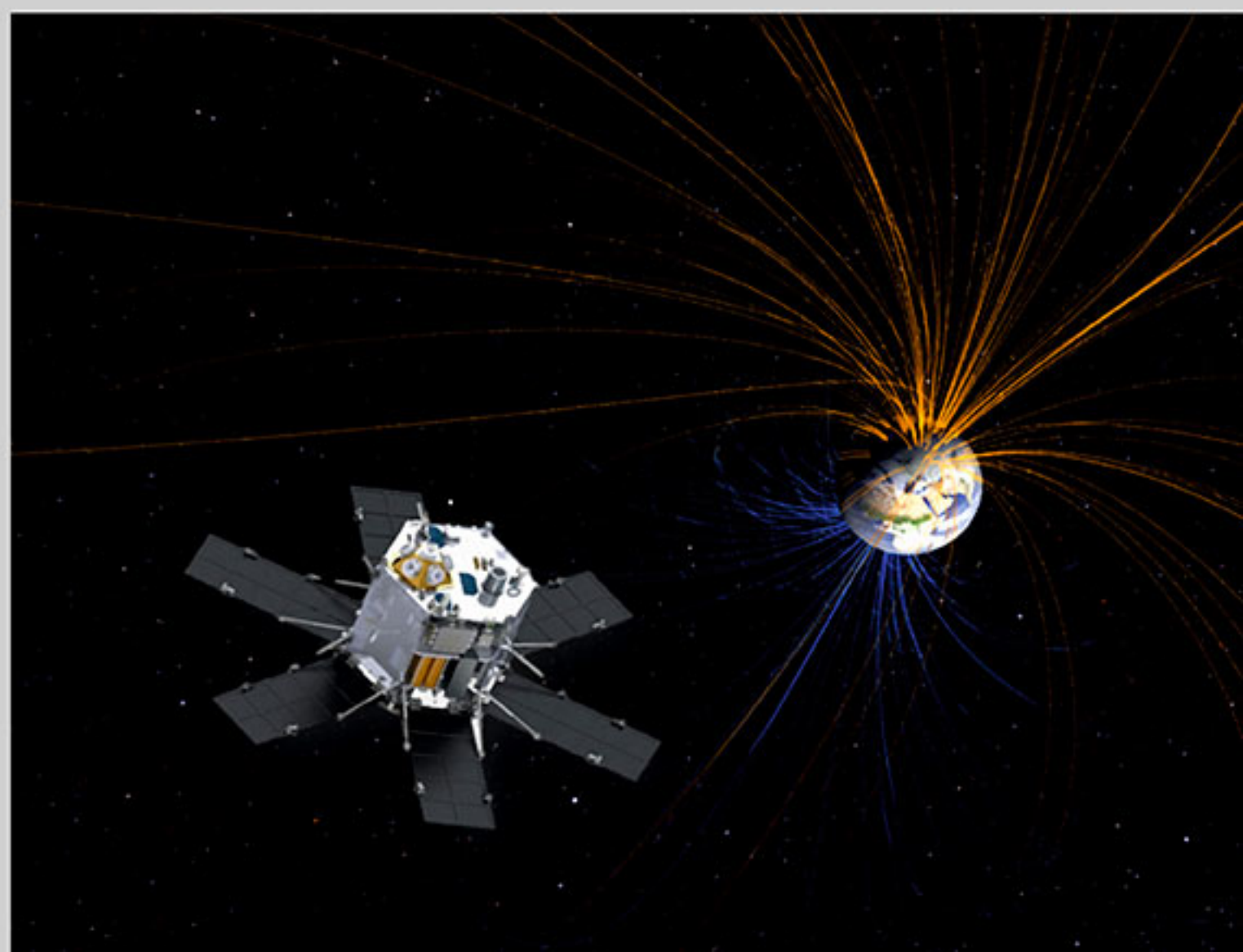
doi:[10.20948/mono-2016-ovchinnikov](https://doi.org/10.20948/mono-2016-ovchinnikov)

URL: <http://keldysh.ru/e-biblio/ovchinnikov>



М.Ю. Овчинников
В. И. Пеньков
Д. С. Ролдугин
Д. С. Иванов

МАГНИТНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ МАЛЫХ СПУТНИКОВ



“... Книга написана простым и ясным языком, снабжена множеством полезных ссылок, предметным указателем, содержит разделы, посвященные краткому изложению математических методов, применяемых для исследования динамических систем, в том числе и дифференциальных уравнений движения спутников с магнитными системами ориентации. Все это позволяет рекомендовать данную монографию не только специалистам в области динамики космических аппаратов, но также студентам и аспирантам физико-технических вузов, изучающим механику космического полета. ...”

Профессор, д.ф.-м.н. А.А. Тихонов



М.Ю. Овчинников — д.ф.-м.н., профессор, заведующий сектором ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, профессор МФТИ, действительный член Международной академии астронавтики.



В.И. Пеньков — к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, доцент МАИ.



Д.С. Ролдугин — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, лауреат премии Правительства Москвы молодым ученым за 2015 год, стипендиат Президента Российской Федерации.



Д.С. Иванов — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, доцент МФТИ, лауреат премии Правительства Москвы молодым ученым за 2015 год, стипендиат Президента Российской Федерации.

**М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков,
Д.С. Ролдугин, Д.С. Иванов**

**МАГНИТНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ
МАЛЫХ СПУТНИКОВ**

*Рекомендовано к изданию
редакционно-издательским советом
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*

**ИПМ им. М.В. Келдыша
Москва 2016**

УДК 629.783
ББК 22.213+39.62
М 126

Магнитные системы ориентации малых спутников.
М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин, Д.С. Иванов. – М.:
ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. – 366 с.

В книге рассматриваются магнитные системы ориентации, в первую очередь – для малых спутников. Приводятся результаты исследования динамики спутников, оснащенных постоянным магнитом, гистерезисными стержнями, сферическим магнитным демпфером, магнитными катушками и дополнительными исполнительными элементами – тангажным маховиком, гравитационной штангой. Аналитические исследования, проведенные с помощью асимптотических методов, теории устойчивости, теории Флоке, дополняются численными расчетами, результатами лабораторных и летных испытаний.

Книга предназначена для специалистов, занятых в исследовании, разработке и создании спутников, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор
А.А. Тихонов

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00621)

© М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин, Д.С. Иванов, 2016
© ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016

ISBN 978-5-98354-028-6

Оглавление

Предисловие.....	6
Введение.....	10
Глава I. Основные предположения, определения, соотношения	15
1 Системы координат и уравнения движения.....	15
1.1 Системы координат	15
1.2 Уравнения движения	17
2 Модели геомагнитного поля.....	26
2.1 International geomagnetic reference field/World magnetic model.....	26
2.2 Наклонный диполь.....	27
2.3 Прямой диполь.....	28
2.4 Осредненная модель	29
3 Модели гистерезиса	33
4 Асимптотические методы	37
Глава II. Пассивные магнитные системы ориентации	40
5 Спутник с постоянным магнитом.....	40
5.1 Уравнения движения	40
5.2 Движение оси симметрии спутника в плоскости полярной орбиты.....	45
5.3 Пространственное движение оси симметрии спутника	53
6 Спутник с постоянным магнитом и гистерезисными стержнями	58
6.1 Уравнения движения	58
6.2 Быстрое время. Уравнения движения в стандартном виде	61
6.3 Усреднение уравнений движения	64
6.4 Исследование усредненных уравнений.....	66
7 Спутник со сферическим магнитным демпфером.....	71
7.1 Исследование движения спутника в режиме магнитной ориентации	73

7.2	Движение спутника в плоскости полярной орбиты	76
7.3	Численное исследование движений спутника с магнитной пружиной в плоскости полярной орбиты ...	84
8	Пассивная магнитная система ориентации наноспутника <i>Munin</i>	88
8.1	Оценка параметров и расположение гистерезисных стержней в теле спутника	90
8.2	Результаты численного моделирования	96
8.3	Учет суточного вращения Земли.....	100
8.4	Результаты летных испытаний	102
9	Ориентация наноспутника <i>THC-0</i>	105
9.1	Интерпретация углового движения наноспутника <i>THC-0</i>	105
9.2	Обработка кратковременных измерений при быстром вращении спутника	113
Глава III. Активные магнитные системы ориентации.....		120
10	Алгоритм демпфирования угловой скорости	120
10.1	Варианты алгоритма демпфирования.....	121
10.2	Переходные процессы	122
10.3	Установившееся движение	131
10.4	Моделирование работы алгоритма <i>-Bdot</i>	142
10.5	Лабораторные испытания алгоритма демпфирования угловой скорости	145
10.6	Результаты летных испытаний алгоритма демпфирования угловой скорости	150
11	Одноосная ориентация осесимметричного спутника	155
11.1	Построение алгоритмов стабилизации собственным вращением.....	155
11.2	Исследование традиционной связки алгоритмов.....	157
11.3	Исследование алгоритмов предварительной переориентации.....	174
11.4	Алгоритм <i>Sdot</i>	183
12	Использование дополнительных исполнительных элементов...	196
12.1	Использование магнитной системы совместно с тангажным маховиком	196

12.2	Использование гравитационной штанги	212
13	Трехосная ориентация	219
13.1	Построение алгоритмов управления.....	219
13.2	Ориентация в инерциальном пространстве без учета гравитационного момента.....	225
13.3	Ориентация в инерциальном пространстве с учетом гравитационного момента.....	235
13.4	Ориентация в орбитальных осях	251
13.5	Использование скользящего управления	253
Глава IV. Определение углового движения		259
14	Реконструкция движения	260
15	Определение ориентации с помощью локальных алгоритмов ..	263
15.1	Алгоритм <i>TRIAD</i>	264
15.2	Ковариационная матрица алгоритма <i>TRIAD</i>	265
15.3	Определение ориентации микроспутника <i>Чибис-М</i> ...	267
16	Определение ориентации с помощью рекурсивных алгоритмов.....	269
16.1	Принцип работы фильтра Калмана.....	269
16.2	Фильтр Калмана с использованием измерений солнечного датчика и магнитометра	271
16.3	Реализация фильтра Калмана на борту микроспутника <i>Чибис-М</i>	277
16.4	Фильтр Калмана с использованием измерений магнитометра.....	280
Приложение I. Системы ориентации, используемые для малых спутников		287
Приложение II. Улучшенная модель гистерезиса, лабораторное исследование свойств стержней.....		301
Приложение III. Гистерезисные стержни в составе других пассивных систем ориентации.....		330
Приложение IV. Методы исследования		342
Библиография		351
Предметный указатель.....		363

Предисловие

Искусственные спутники Земли практически всегда оснащены системой ориентации для обеспечения требуемого углового движения вокруг своего центра масс. В связи с этим возникает задача выбора исполнительных элементов системы ориентации. При этом необходимо опираться на широкий ряд критериев, например, эффективность, надежность, массу, стоимость, энергопотребление. Стоит отметить, что выбор исполнительных элементов и алгоритмов управления также влечет за собой необходимость выбора датчиков определения ориентации и, опять же, алгоритмов для обработки измерительной информации и определения фактического углового движения. Среди различных типов систем ориентации особое место занимают магнитные системы, принцип действия которых основывается на взаимодействии собственного магнитного момента спутника – управляемого или пассивного – с внешним магнитным полем, что приводит к созданию управляющего механического момента.

Магнитные системы ориентации позволяют получить лучшие результаты по отдельным критериям – они дешевые, надежные, небольшие и потребляют мало энергии или даже совсем ее не потребляют. Эти особенности магнитных систем стали причиной двух всплесков их популярности. Первый пришелся на 60-е годы прошлого века, когда только начиналось освоение космического пространства. Вторым наблюдается сейчас и связан с подъемом популярности и научного потенциала миниатюрных или, как говорят, микро- (до 100 кг) и нано- (до 10 килограмм) спутников. Отдельно стоит выделить популярные в США и Европе спутники стандарта *CubeSat*, составленные из одного или нескольких кубиков с ребром 10 см и массой до одного килограмма. Платой за многие преимущества, даваемые магнитными системами малым аппаратам, служит ограничение на управление, обусловленное природой возникновения управляющего момента.

Существуют три основных исполнительных элемента, обеспечивающих спутник собственным управляемым или хотя бы прогнозируемым дипольным моментом: магнитные катушки, постоянные магниты и пассивные демпфирующие устройства. В качестве демпфирующего устройства обычно используется набор гистерезисных стержней. В составе гравитационных систем ориентации также широко применялся сферический магнитный демпфер.

В настоящей книге рассмотрены вопросы создания математических моделей движения спутников с магнитными системами ориентации, исследования их динамики, разработки алгоритмов управления угловым движением, выбора параметров магнитных исполнительных элементов, лабораторных и летных испытаний. Первая глава книги посвящена постановке задачи исследования динамики спутника с магнитной системой ориентации. Вводятся системы координат, переменные, описывающие угловое положение (ориентацию) спутника, и уравнения его движения. Положение задается относительно системы координат, отвечающей номинальному движению спутника. Для описания ориентации спутника используются эйлеровы или самолетные углы, кватернионы или элементы матрицы направляющих косинусов. Соответственно, изменение углового положения спутника описывается динамическими уравнениями Эйлера, дополненными подходящими кинематическими уравнениями. Приводятся различные модели геомагнитного поля, кратко обсуждается их удобство на разных этапах создания спутника: при аналитическом исследовании, численном, лабораторном моделировании и в полете. Наконец, кратко описаны методы исследования динамики спутника.

Вторая глава книги посвящена работе пассивных исполнительных элементов и вопросам, связанным с исследованием динамики спутников, снабженных такими элементами. Гистерезисные стержни, изготовленные из магнитомягкого материала, в основном лишь обеспечивают гашение угловой скорости спутника за счет перемагничивания по петле гистерезиса. То же относится к сферическому магнитному демпферу, рассеивающему энергию за счет вращения поплавка демпфера с собственным дипольным моментом в вязкой жидкости. Постоянные магниты не позволяют и этого, обладая лишь постоянным дипольным моментом и обеспечивая восстанавливающий момент¹. Тем не менее эти два пассивных исполнительных элемента позволяют с незначительными затратами в цене и массе спутника

¹ В англоязычной литературе в первом случае – для обозначения дипольного момента – используется термин *moment*, во втором случае – для обозначения механического момента – используется термин *torque*, а исполнительный элемент, его создающий, именуется *torquer*. Чтобы избежать возможной путаницы, в русскоязычной литературе используются термины «управляющий момент» или «механический момент» в отличие от дипольного момента или магнитного момента. Хотя с магнитным моментом не все так однозначно – иногда, чтобы подчеркнуть природу механического момента, используют термин «магнитный момент» в отличие, скажем, от гравитационного или аэродинамического момента.

обеспечить гашение его начальной угловой скорости и ориентацию вдоль вектора геомагнитной индукции.

Использованию магнитных катушек – активных исполнительных элементов – посвящена третья глава книги. Магнитная катушка представляет собой ряд компланарных витков проводника (обычно из меди или алюминия) на каркасе с намагничиваемым сердечником или без него. Иногда магнитные катушки изготавливаются прямо на электронной плате или с использованием 3D-принтера. При приложении напряжения к катушкам возникает ток, создающий магнитный дипольный момент. Величина и ориентация дипольного момента зависят от силы тока, его направления, числа витков и площади витка. Таким образом, есть возможность создать любой по направлению дипольный момент, но не любой механический момент – его невозможно создать вдоль вектора геомагнитной индукции. Эта проблема решается за счет выбора отдельных реализуемых режимов движения, установки дополнительных исполнительных элементов и использования факта вращения вектора геомагнитной индукции в пространстве при движении спутника по орбите. Вначале обсуждается широко известный алгоритм гашения угловой скорости $-B\dot{\theta}$. Далее прослеживается развитие возможностей активных магнитных систем для обеспечения требуемой ориентации спутника. Так, рассматривается одноосная ориентация спутника, стабилизируемого собственным вращением. Следующий шаг связан с использованием дополнительных исполнительных элементов (тангажный маховик и гравитационная штанга), позволяющих обеспечить уже трехосную ориентацию спутника, хотя и весьма ограниченную в своих возможностях. Наконец, рассматривается трехосная ориентация с использованием только магнитных катушек.

Четвертая глава посвящена направлению, тесно примыкающему к основной тематике книги. В ней рассматривается проблема определения ориентации искусственных спутников, и она содержит две части, посвященные определению ориентации с помощью локальных методов и динамической фильтрации, в том числе и с использованием геомагнитного поля. Задача этого раздела – дать читателю общее представление о методах определения ориентации.

В приложения вынесены вопросы реализуемости магнитных систем ориентации в рамках конкретных проектов микроспутников, результаты их лабораторных и летных испытаний, отдельные вопросы

математических моделей магнитного гистерезиса, описание методов исследования. Приложение I несет еще одну смысловую нагрузку – оно играет роль введения в проблему обеспечения ориентации малых спутников. Приложение будет полезно для первоначального чтения студентам и аспирантам, только начинающим заниматься вопросами ориентации искусственных спутников.

Книга по большей части основана на результатах, полученных авторами. Тем не менее авторы приложили все возможные усилия, чтобы не упустить важные результаты и подходы, относящиеся к обеспечению ориентации спутников с помощью магнитных систем управления, полученные другими исследователями. Книга предназначена для специалистов, занятых в исследовании, разработке и создании спутников, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Введение

Последнее десятилетие прошлого столетия и в особенности начало нынешнего столетия ознаменовались всплеском интереса к недорогим и надежным способам обеспечения ориентации спутников с использованием простых и удобных методов. Этот всплеск обусловлен интенсивным развитием и массовым использованием *малых спутников*, основная идея создания и развития которых ассоциируется не только и не столько с их геометрическими и весовыми характеристиками, сколько с менталитетом разработчиков таких аппаратов. Малый спутник – это недорогой аппарат, который может быть разработан, изготовлен и выведен на орбиту за короткое время (за один-два года, а то и быстрее) небольшой командой без использования дорогостоящего оборудования и полного цикла наземных испытаний [1]. Желательно найти недорогой способ вывода на орбиту. Эта же команда обеспечивает управление спутником на орбите, прием и обработку информации от полезной нагрузки, распространение тематически обработанного материала среди потребителей. Появлению малых спутников способствовали следующие факторы [2]:

- достижения в электронике и компьютерной технике, позволившие создать миниатюрные и потребляющие мало энергии средства связи, управления, вычисления, энергопитания;

- снятие с боевых дежурств отслуживших свой срок комплексов баллистических ракет, которые при соответствующей доработке способны выводить на низкие орбиты легкую нагрузку (хотя опыт показал, что в этом направлении в 90-х годах прошлого столетия было больше эйфории, чем результатов, которых в дальнейшем все же удалось достичь);

- снижение массы спутников, что однозначно влечет уменьшение стоимости запуска как напрямую из расчета цены вывода килограмма на орбиту, так и из-за возможности попутного запуска совместно с основными спутниками, используя запас мощности ракеты-носителя;

- понимание, что альтернативой высокой надежности, достигаемой многократным дублированием, сложными испытаниями, выбраковкой комплектующих и элементов, может быть в некоторых случаях относительно простой аппарат, надежность которого ниже,

что компенсируется резким удешевлением спутника и сокращением времени от идеи до запуска, что позволяет при выходе спутника из строя заменять его на орбите другим, изготовленным с использованием технологий, достигнутых к моменту вывода замещающего спутника;

— наличие на рынке коммерческих компонент – *COTS (Commercial Off-The-Shelf)*, которые вполне могут быть использованы для создания спутников, например, таких традиционно дорогостоящих элементов, как солнечные батареи, ПЗС-камеры, электронные компоненты;

— понимание, что космическая индустрия является эффективным полигоном для отработки многих научных, технологических, инженерных решений и обучения студентов и специалистов в этих областях;

— наличие «свободных» специалистов в рассматриваемой области, уже получивших опыт и знания, но *еще* обладающих свежестью восприятия.

Классификация спутников, ставшая уже общепринятой, в соответствии с типовой массой в килограммах, приведена в следующей таблице:

1000-500	500-100	100-10	10-1	1	1-0.1	<0.1
миди	мини	микро	нано	1U- кубсат	пико	фемто

Здесь для краткости оставлена лишь приставка и опущено слово спутник в полном названии¹.

Особняком стоит кубсат (*CubeSat*), идеологическими отцами которого являются профессор Стэнфордского университета Боб Твиггс (Bob Twiggs) и профессор Калифорнийского политехнического университета Джорди Пуиг-Суари (Jordi Puig-Suari). Наиболее популярны аппараты формата 1U (1 Unit) размером 10 см × 10 см × 10 см и построенные на базе модульного принципа 3U

¹ В последние годы пришло понимание, что термин «малый спутник» требует пояснения, что не размер и масса определяют его в первую очередь. В англоязычной литературе появился термин *lean* (скромный, небольшой, экономный, бережливый) *satellite*. Односложного термина в русскоязычной литературе пока не появилось и по-прежнему используется термин «малый спутник» или его разновидности в соответствии с делением семейства малых спутников на подсемейства.

и 6U. Последние два составлены соответственно из трех и шести «кубиков» с необходимым распределением аппаратуры и служебных систем.

Масса и габариты малых спутников обычно позволяют запускать их в качестве попутной (*piggy-back*) нагрузки. Первые попутные запуски микроспутников были осуществлены на ракете *Ариан-4* в 90-х годах. Затем стали использоваться легкие конверсионные носители, специальные устройства на Международной космической станции, грузовые корабли и даже экзотический способ, когда космонавт во время выхода в открытый космос выбрасывает спутник рукой. В результате малые спутники обычно движутся по околокруговым орбитам.

Следующей ступенью развития малых спутников, пока еще не освоенной в полной мере, явилось создание на их базе многоэлементных космических систем, состоящих из нескольких аппаратов, движущихся по близким орбитам и решающих единую задачу, с различными формами организации их взаимодействия между собой и с наземными станциями управления [3].

Хотя поначалу интерес к кубсатам и вообще аппаратам нанокласса и меньше наблюдался в основном в университетах, сейчас ими активно занимаются коммерческие компании и даже ведущие космические агентства. Царящее разнообразие подходов при разработке, создании и эксплуатации малых спутников привело к пониманию, что необходима стандартизация. Это нашло свое отражение в подготовке¹ стандарта *ISO-20991 «Space Systems – Requirements for Small Spacecraft»*.

Магнитные катушки и пассивная магнитная система, состоящая из постоянного магнита, гистерезисных стержней, сферического магнитного демпфера, активно используются с начала космической эры. Первый спутник с пассивной магнитной системой *Transit 1B* [4] запущен 13 апреля 1960 года. Первый спутник с активной системой *Tiros II* [5] запущен 23 ноября 1960 года. С целью определения ориентации магнитное поле впервые использовалось на третьем советском спутнике, запущенном 15 мая 1958 года [6]. В настоящее время такие системы вновь стали особенно востребованными

¹ <http://iaaweb.org/content/view/609/796/> (здесь и далее дата обращения – октябрь 2016 года).

благодаря малым спутникам. Отметим несколько актуальных исследований в этой области.

Демпфирование угловой скорости спутника – задача, наиболее часто решаемая магнитной системой. Гашение угловой скорости с помощью гистерезисных стержней было предложено и развито в [4,7–12]. Среди современных работ, посвященных исследованию или применению гистерезисных стержней, выделим [13–17]. Описание сферического магнитного демпфера и анализ динамики гравитационно-ориентированного спутника даны в [18,19].

Активные системы в большинстве случаев предпочтительны, так как магнитные катушки, имеющие невысокие энергопотребление, массу, стоимость, доступны даже для кубсатов. Наиболее распространен алгоритм демпфирования \dot{B} ¹ [20,21]. Работа магнитной системы в случае быстро вращающегося спутника аналогична действию вихревых токов [22–24]. Исследование алгоритма \dot{B} и анализ его работы на борту малых спутников являются актуальными и сейчас [25–30].

Направления использования магнитной системы для обеспечения конкретной ориентации аппарата можно разделить на три группы: спутники, стабилизируемые вращением, использующие дополнительные исполнительные элементы и использующие лишь магнитную систему. Приобретение быстро вращающимся осесимметричным спутником специфического свойства – аппарат ведет себя как гироскоп – позволяет решить проблему направления механического момента (невозможно создать момент вдоль вектора индукции) при обеспечении ориентации оси закрутки спутника. Обычно для управления применяются схемы, предложенные в [31,32]. Показательные примеры применения или анализа работы системы управления представлены в [5,20,33–40], отдельный интерес

¹ Впервые алгоритм опубликован в доступном источнике [20]. Поэтому его автором обычно считают К. Алфренда (K.T. Alfriend). Однако первое упоминание алгоритма содержится в отчете компании *Ithaco* [21], который подготовил А.С. Stickler, один из соавторов [20]. Он называет автором алгоритма инженера Центра космических исследований им. Годдарда Сеймора Канта (Seymor Kant), «чрезвычайно талантливого инженера, специалиста по системам ориентации и системотехника. Он был столь талантлив, что в течение последних десяти лет в Центре Годдарда ему позволили заниматься любыми собственными исследованиями. Он, возможно, поставил рекорд по продолжительности государственной службы – 64 года, включая 13 лет на артиллерийском заводе ВМС США» (R. Shapiro).

представляют подходы к оптимальной переориентации оси вращения спутника [41–43].

Использование иных исполнительных элементов, обычно гравитационной штанги [44,45] или тангажного маховика с постоянной скоростью вращения [45–49], а также дополнительных физических принципов [50,51], позволяет обеспечить заданную ориентацию в орбитальных осях. При необходимости обеспечить произвольную ориентацию может быть использована только магнитная система [52–58]. Это относительно новое направление исследований особенно актуально для миниатюрных спутников.

Глава I. Основные предположения, определения, соотношения

Спутник считаем твердым телом, не имеющим ни подвижных и/или гибких частей, ни баков с топливом. Его центр масс движется по круговой околоземной орбите. Мы не будем рассматривать спутники специфических конструкций, например, имеющие солнечные панели большой площади, что могло бы привести к возникновению значительного по величине момента от сил давления солнечной радиации или сопротивления атмосферы. Поэтому кроме управляющего момента, создаваемого действием магнитной системы ориентации, будет учитываться лишь гравитационный момент, который может играть роль как возмущающего, так и основного момента, и иногда будем учитывать возмущающий момент неизвестной природы.

1 Системы координат и уравнения движения

1.1 Системы координат

Equation Section 1 Введем основные системы координат, используемые далее при описании движения спутника относительно центра масс (рис. 1.1).

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ – инерциальная¹ система координат (ИСК), связанная с положением восходящего узла орбиты спутника. O_a – центр масс Земли, ось $O_a Y_3$ направлена по оси вращения Земли, $O_a Y_1$ лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты, $O_a Y_2$ дополняет систему до правой.

$O_a S_1 S_2 S_3$ – инерциальная система, связанная с положением орбиты спутника в инерциальном пространстве. Ось $O_a S_1$ направлена в восходящий узел орбиты, ось $O_a S_3$ направлена по нормали² к плоскости орбиты, ось $O_a S_2$ дополняет систему до правой.

¹ Предположение о том, что связанная с центром масс Земли система является инерциальной, вполне оправдано. Переходные процессы в угловом движении спутников редко занимают более суток. Подобные упрощающие предположения, принятые в среде прикладных исследователей и разработчиков спутников, далее оговариваться не будут.

² С положительного направления оси $O_a S_3$ движение спутника по орбите наблюдается против часовой стрелки.

$O_a J_1 J_2 J_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ поворотом на угол Θ вокруг оси $O_a Y_1$. Величина этого угла определяется в зависимости от наклона орбиты и привязана к используемой модели геомагнитного поля. Ось $O_a J_3$ фактически является осью симметрии конической поверхности, по которой движется вектор напряженности геомагнитного поля в центре масс спутника при его перемещении по орбите.

$O X_1 X_2 X_3$ – орбитальная система координат (ОСК), O – центр масс спутника, ось $O X_1$ лежит в плоскости орбиты и перпендикулярно радиус-вектору центра масс спутника в сторону его движения, ось $O X_3$ – по радиус-вектору, $O X_2$ дополняет систему до правой.

$O Z_1 Z_2 Z_3$ – магнитная система координат (МСК). Ось $O Z_1$ совпадает с направлением вектора местной (в центре масс спутника) геомагнитной индукции \mathbf{B} , ось $O Z_3$ определяется векторным произведением $O Z_1 \times O X_2$, ось $O Z_2$ дополняет систему до правой.

$O L_1 L_2 L_3$ – система, связанная с кинетическим моментом спутника. Ось $O L_3$ направлена по вектору кинетического момента, ось $O L_2$ – перпендикулярно $O L_3$ и лежит в плоскости, параллельной $O_a Y_1 Y_2$, $O L_1$ дополняет систему до правой.

$O x_1 x_2 x_3$ – связанная со спутником система координат (ССК), ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Систему, относительно которой описывается движение спутника, будем называть опорной. Ее выбор зависит от исследуемого режима углового движения. Далее будут использоваться и другие вспомогательные системы координат, если их применение ограничено рамками одной главы.

Матрицу перехода от опорной системы (в качестве такой может выступать инерциальная, орбитальная или магнитная система) к связанной будем обозначать \mathbb{A} . Таким образом, в рамках разных глав или разделов вид матрицы \mathbb{A} может изменяться, но при этом при изложении каждого режима ориентации (в рамках одной главы или раздела) сохраняется логическая последовательность в изложении и отпадает необходимость вводить дополнительные «экзотические» обозначения матриц перехода.

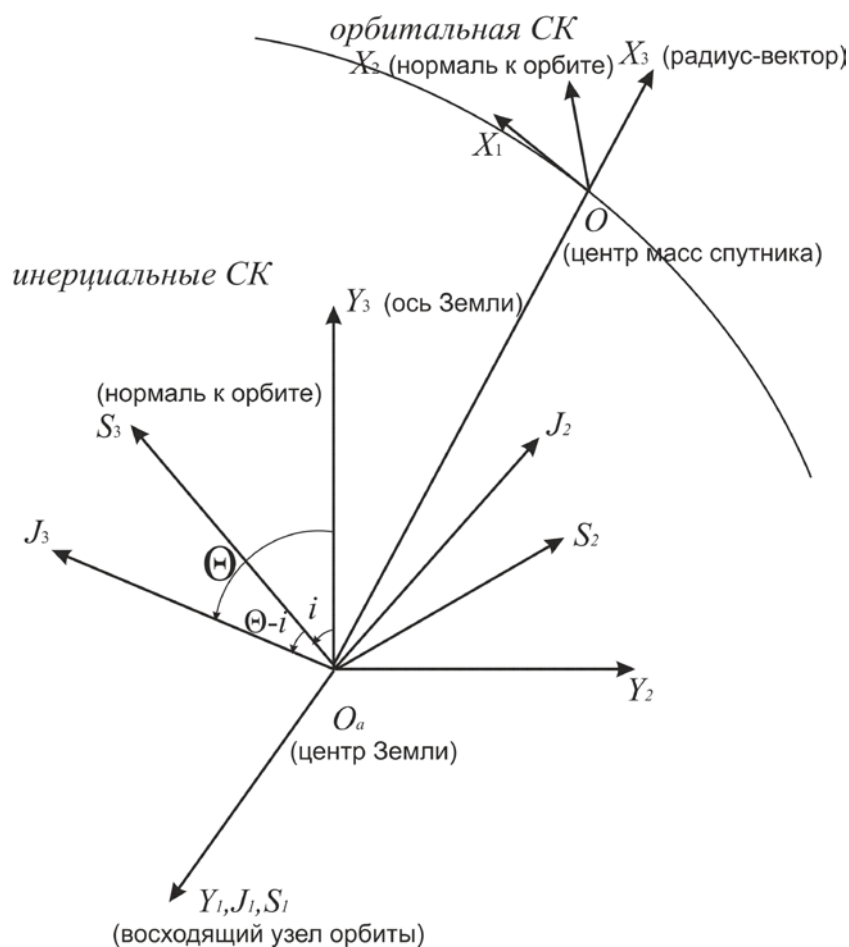


Рис. 1.1. Системы координат

1.2 Уравнения движения

Уравнения Эйлера в инерциальном пространстве

Наиболее распространенный способ описания углового движения спутника – использование уравнений Эйлера. В этом случае переменные можно разделить на две группы. Первую группу составляют компоненты угловой скорости спутника. Скорость может описывать как движение относительно инерциального пространства (абсолютная угловая скорость ω и ее проекции на оси связанной системы координат $\omega_1, \omega_2, \omega_3$), так и движение относительно орбитальной системы координат (относительная угловая скорость Ω и ее проекции на оси связанной системы координат $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$). Вторую группу составляют переменные, характеризующие ориентацию спутника. Это могут быть

самолетные углы α, β, γ или углы Эйлера φ, ψ, θ ¹; кватернион (\mathbf{q}, q_0) , где \mathbf{q} – векторная часть кватерниона [59], q_0 – скалярная; матрица направляющих косинусов \mathbb{A} и ее элементы a_{ij} . Каждый из способов задания ориентации при этом имеет свои преимущества и область применения. Например, самолетные углы удобно использовать при рассмотрении движения спутника вблизи требуемой ориентации. В этом случае углы оказываются малыми и уравнения движения допускают удобную линеаризацию. Кинематические уравнения для элементов матрицы направляющих косинусов не вырождаются, что позволяет считать матрицу универсальным средством для численного моделирования. Кватернион также используется обычно при численном моделировании, так как соответствующие кинематические уравнения не имеют вырождения и они компактнее, чем кинематические уравнения для матрицы направляющих косинусов.

Введем тензор инерции спутника $\mathbb{J} = \text{diag}(A, B, C)$, где A, B, C – главные центральные моменты инерции. Динамические уравнения движения спутника имеют вид

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad (1.1)$$

где механический момент может содержать как управление $\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}$, так и возмущающие моменты, то есть $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{упр}} + \mathbf{M}_{\text{возм}}$.

Динамические уравнения (1.1) дополняются кинематическими уравнениями. При использовании кватерниона (\mathbf{q}, q_0) это векторное уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ \frac{dq_0}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ q_0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

При использовании матрицы направляющих косинусов \mathbb{A} кинематические уравнения имеют вид

¹ В русскоязычной литературе принято называть самолетными углами последовательность поворотов, в которой все повороты производятся вокруг разных осей, тогда как в углах Эйлера два поворота производятся вокруг одной оси. В англоязычной литературе такого разделения нет и углы ориентации твердого тела называют *Euler angles*.

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \mathbb{W}_{\omega} \mathbb{A}, \quad (1.3)$$

где \mathbb{W}_{ω} – кососимметрическая матрица¹ угловой скорости,

$$\mathbb{W}_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Использование самолетных углов не предполагает единого вида кинематических соотношений в настоящей работе. В зависимости от режима движения может быть удобно использовать ту или иную последовательность поворотов, описывающую движение связанной системы координат относительно опорной. В качестве примера рассмотрим широко распространенную и наиболее используемую далее в нашей работе последовательность поворотов 2-3-1. В этом случае первый поворот на угол α производится вокруг второй оси опорной системы, второй поворот на угол β производится вокруг третьей оси новой системы, последний поворот на угол γ производится вокруг первой оси. Последовательность поворотов представлена на рис. 1.2, где в качестве опорной системы используется инерциальная $O_a Y_1 Y_2 Y_3$. Кинематические уравнения для такой последовательности поворотов имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma).$$

Матрица перехода \mathbb{A} от опорной к связанной системе координат, отвечающая введенным таким образом самолетным углам α , β , γ , имеет вид

¹ По сути это – матрица векторного произведения: $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbb{W}_{\mathbf{x}} \mathbf{y}$, где $\mathbb{W}_{\mathbf{x}}$ – кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора \mathbf{x} . Обозначение для кососимметрической матрицы, использующее нижний индекс для идентификации соответствующего вектора, будет и далее использоваться в книге.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

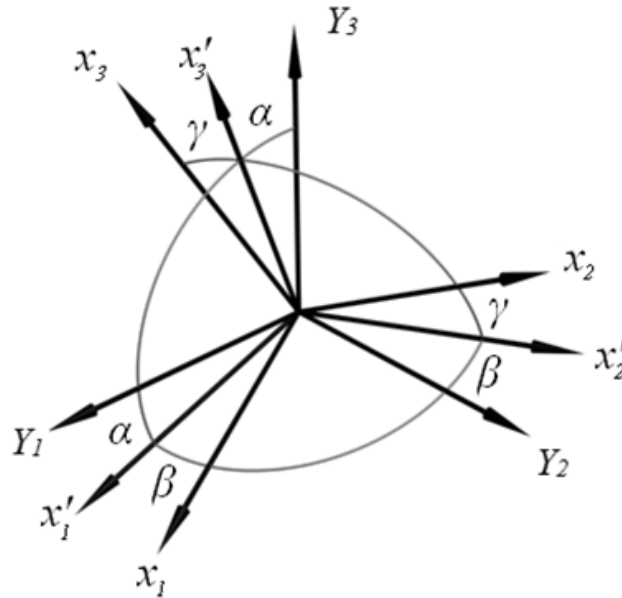


Рис. 1.2. Самолетные углы

Выделим два важных случая использования уравнений Эйлера для описания движения спутника относительно различных систем координат.

Уравнения Эйлера, описывающие движение относительно орбитальной системы координат

При описании углового движения спутника относительно орбитальной системы координат (здесь это – опорная система координат) в поле притягивающего центра возможна компактная запись гравитационного момента. Запишем в проекциях на оси связанной со спутником системы координат уравнения (1.1) для этого случая

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= 3\omega_0^2 (C - B)a_{23}a_{33} + M_1, \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= 3\omega_0^2 (A - C)a_{13}a_{33} + M_2, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_2\omega_1 &= 3\omega_0^2 (B - A)a_{13}a_{23} + M_3, \end{aligned}$$

где M_1, M_2, M_3 – компоненты вектора момента (кроме гравитационного) в системе $Ox_1x_2x_3$, a_{13}, a_{23}, a_{33} – направляющие косинусы радиус-вектора, то есть оси Ox_3 , на оси связанной системы координат. Считаем, что орбита спутника – круговая кеплерова. Тогда ω_0 – орбитальная скорость (угловая скорость движения центра масс спутника вокруг Земли). При описании движения спутника в орбитальной системе координат удобно использовать относительную угловую скорость. В этом случае при точной ориентации в орбитальных осях вектор относительной скорости оказывается нулевым. Угловая скорость спутника в инерциальном пространстве может быть представлена так:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{орб}.$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ – скорость спутника относительно орбитальной системы координат, $\boldsymbol{\omega}_{орб}$ – угловая скорость вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной. Динамические уравнения в обозначениях для относительной угловой скорости спутника записываются в виде

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}, \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{унр} + \mathbf{M}_{возм} + \mathbf{M}_{нер},$$

$$\mathbf{M}_{нер} = -\mathbb{J} \mathbb{W} \mathbb{A} \boldsymbol{\omega}_{орб} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbb{J} \mathbb{A} \boldsymbol{\omega}_{орб} - \mathbb{A} \boldsymbol{\omega}_{орб} \times \mathbb{J} (\boldsymbol{\Omega} + \mathbb{A} \boldsymbol{\omega}_{орб}).$$

Вид кинематических уравнений (1.4) сохраняется, при использовании относительной угловой скорости они приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Наконец, возможен «смешанный» вариант, когда углы α, β, γ задают ориентацию спутника относительно орбитальной системы, но используется абсолютная угловая скорость. Тогда кинематические уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos\beta}(\omega_2 \cos\gamma - \omega_3 \sin\gamma) - \omega_0, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin\gamma + \omega_3 \cos\gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos\gamma - \omega_3 \sin\gamma). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отметим, что уравнения (1.8) для другой последовательности поворотов могут иметь заметно более громоздкий вид.

Уравнения Эйлера, описывающие движение относительно магнитной системы координат

Опишем еще один частный случай использования уравнений Эйлера. Углы ориентации теперь будут задавать положение спутника относительно МСК. Это может быть удобно, если рассматривается спутник, ориентированный по вектору местной геомагнитной индукции (в случае использования пассивной магнитной системы ориентации). Для описания ориентации ССК относительно МСК используем самолетные углы α, β, γ и последовательность поворотов 2-3-1, показанную на рис. 1.2.

Введем промежуточную матрицу перехода \mathbb{H} из орбитальной в магнитную систему координат. Элементы матрицы легко получаются из определения ортов магнитной системы координат $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ и \mathfrak{e}_3 ,

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}, \quad \mathfrak{e}_3 = \frac{\mathfrak{e}_1 \times \mathbf{E}_2}{|\mathfrak{e}_1 \times \mathbf{E}_2|}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1,$$

где \mathbf{E}_2 – орт оси Ox_2 орбитальной системы координат, \mathbf{B} – вектор геомагнитной индукции¹. Матрица \mathbb{H} имеет вид [10]

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{B_1}{B_0} & -\frac{B_1 B_2}{B_0 B} & -\frac{B_3}{B} \\ \frac{B_2}{B_0} & \frac{B_1^2 + B_3^2}{B_0 B} & 0 \\ \frac{B_3}{B_0} & -\frac{B_2 B_3}{B_0 B} & \frac{B_1}{B} \end{pmatrix}.$$

¹ Систему нельзя определить, если вектор геомагнитной индукции направлен по нормали к плоскости орбиты. Такая ситуация может наблюдаться только на экваториальной орбите при использовании упрощенных моделей геомагнитного поля.

Здесь B_0 – модуль вектора геомагнитной индукции, $B = \sqrt{B_1^2 + B_3^2}$, B_i ($i = 1, 2, 3$) суть проекции вектора индукции геомагнитного поля в ОСК. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
 A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\
 B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\
 C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= M_3, \\
 \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos\beta} (\bar{\omega}_2 \cos\gamma - \bar{\omega}_3 \sin\gamma), \\
 \frac{d\beta}{dt} &= \bar{\omega}_2 \sin\gamma + \bar{\omega}_3 \cos\gamma, \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \bar{\omega}_1 - \operatorname{tg}\beta (\bar{\omega}_2 \cos\gamma - \bar{\omega}_3 \sin\gamma).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь M_1, M_2, M_3 – компоненты момента внешних сил в системе $Ox_1x_2x_3$,

$$\bar{\omega}_i = \omega_i - \sum_{j=1}^3 \bar{\Phi}_j a_{ji} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\bar{\Phi}_1 = \omega_0 h_{21} + \sum_{j=1}^3 h_{j3} \frac{dh_{j2}}{dt}, \bar{\Phi}_2 = \omega_0 h_{22} + \sum_{j=1}^3 h_{j2} \frac{dh_{j3}}{dt}, \bar{\Phi}_3 = \omega_0 h_{23} + \sum_{j=1}^3 h_{j2} \frac{dh_{j1}}{dt},$$

h_{ij} – элементы матрицы \mathbb{H} . Заметим, что в (1.9) гравитационный момент не выделен из общего механического момента. В разделе 5.1 описано получение этих уравнений.

Уравнения в оскулирующих переменных

В некоторых задачах можно считать, что действующие на спутник моменты малы, то есть кинетическая энергия вращательного движения много больше работы моментов на рассматриваемом интервале времени. В этом случае движение спутника относительно центра масс близко к невозмущенному движению Эйлера-Пуансо, в котором твердое тело вращается вокруг неподвижного в абсолютном пространстве и постоянного по величине вектора кинетического момента. Наличие малых возмущений приводит к тому, что вектор кинетического момента меняется со временем. Поэтому удобно ввести переменные, ха-

характеризующие величину вектора кинетического момента и его направление в пространстве. Эти переменные в невозмущенном движении остаются постоянными, тогда как в возмущенном движении являются медленными по сравнению с переменными, характеризующими ориентацию спутника. Это позволяет использовать методы разделения движений.

В качестве таких переменных будем использовать оскулирующие переменные. Это набор $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$, где L – модуль вектора кинетического момента, углы ρ, σ определяют его ориентацию относительно наперед выбранной инерциальной системы, например, $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ (опорная система) в соответствии с рис. 1.3.

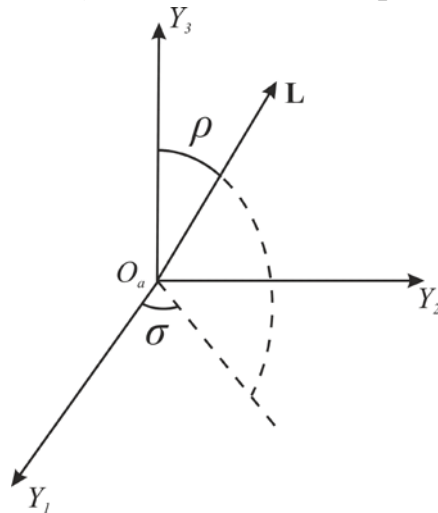


Рис. 1.3. Углы ориентации вектора кинетического момента

Ориентация осей системы $Ox_1 x_2 x_3$ относительно системы $OL_1 L_2 L_3$ задается углами Эйлера φ, ψ, θ . Оскулирующие переменные, часто называемые переменными Белецкого-Черноуцкого, впервые ввел Булгаков [60] применительно к задаче движения гироскопа. Система уравнений для осесимметричного спутника была получена Белецким [61], для спутника с трехосным эллипсоидом инерции – Черноуцко [62]. Кинематические уравнения в переменных φ, ψ, θ впервые получил Уиттекер [63], однако уравнения, описывающие изменение вектора кинетического момента, им не рассматривались.

Ориентацию кинетического момента относительно опорной системы и связанной системы относительно кинетического момента будем определять матрицами направляющих косинусов \mathbb{Q}, \mathbb{D} , имеющими вид

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Угловое движение спутника описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_3, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_1, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_2, \\ \frac{d\theta}{dt} &= L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{1}{L} (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \\ &+ \frac{1}{L \sin \theta} (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \\ &- \frac{1}{L} M_1 \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_2 (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где M_1, M_2, M_3 – компоненты вектора момента в системе $OL_1L_2L_3$.

В случае осесимметричного спутника с тензором инерции $\mathbb{J} = \operatorname{diag}(A, A, C)$ уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L} (M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Именно эти уравнения и будут использоваться далее.

2 Модели геомагнитного поля

Сложность исследования и достоверность описания углового движения спутника в магнитном поле во многом определяется выбранной моделью поля. Чем проще модель, тем больше возможностей у исследователя в части использования методов исследования, но тем менее достоверно описание переходных и установившихся движений. Установить компромисс между сложностью и достоверностью – непростая задача исследователя, тем более что требуемая достоверность описания определяется целью исследования. Скажем, для получения общих представлений о поведении спутника необходимо получить максимально универсальное описание без излишней детализации, что заставляет использовать более простую модель. Для расчета же конкретной системы ориентации такая общность не нужна, но необходимы подробные результаты. Это заставляет использовать более точную модель поля.

2.1 International geomagnetic reference field/World magnetic model

Equation Section (Next) Наиболее полно геомагнитное поле описывают модели *IGRF* (*International Geomagnetic Reference Field*) и *WMM* (*World Magnetic Model*). Обе модели используют разложение потенциала внутреннего поля в ряд Гаусса [64]

$$V = -R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left(g_n^m(t) \cos m\lambda_0 + h_n^m(t) \sin m\lambda_0 \right) P_n^m(\cos \vartheta_0),$$

где λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор индукции поля, $\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта, r – расстояние от центра Земли, R – средний радиус Земли, g_n^m и h_n^m – коэффициенты (заданы в нТл), определяемые из таблицы [65], P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра. Векторы индукции и напряженности поля определяются выражением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \nabla V,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ кг·м·А⁻²·с⁻² – магнитная постоянная (или магнитная проницаемость вакуума). Величины коэффициентов в представленном разложении определяются эмпирически с помощью статистической обработки многочисленных измерений геомагнитного поля. Обе мо-

дели отличаются лишь наборами коэффициентов и имеют общие ограничения. Они могут использоваться для высот до 600 километров над поверхностью Земли (*WGS84*) и применимы до определенного года. В последний год действия модели Международный геодезический и геофизический союз публикует новые коэффициенты *IGRF*, действующие следующие пять лет. То же продельывает Национальное управление океанических и атмосферных исследований США для модели *WMM*. Такие сложные модели обычно используются на борту спутника для достижения максимально возможной точности и при численном моделировании его движения на этапе разработки, но не используются при аналитических исследованиях. Стоит отметить, что в части обеспечения ориентации спутников обычно используется модель *IGRF*.

2.2 Наклонный диполь

Модель наклонного диполя, получающаяся из гауссовой модели при учете первых трех слагаемых, описывает поле диполя, наклоненного под углом около 9-12 градусов¹ к оси вращения Земли. Точное значение угла наклона постоянно меняется из-за перемещения северного и южного магнитных полюсов, в настоящее время угол наклона составляет около 9.35°². Поскольку вклад дипольной части в разложение составляет на низких орбитах более 90% [66], такое допущение вполне оправдано. Оно позволяет учесть два основных эффекта, вызывающих изменение геомагнитного поля в точке нахождения спутника, – движение последнего по орбите и суточное вращение Земли. Учитываются лишь регулярные эффекты. Например, не учитывается пролет спутника над магнитными аномалиями, что приводит к искажению индукции геомагнитного поля в их окрестностях по сравнению с дипольным приближением. Вектор индукции в модели наклонного диполя можно для любой системы координат задать выражением³

¹ Вообще говоря, 168-171°, так как диполь и вектор угловой скорости Земли разнонаправлены, магнитный северный полюс находится в окрестности южного географического полюса.

² Числовые значения, связанные с геомагнитным полем (величина и углы ориентации диполя) даны в книге для модели *IGRF12*, соответствующей 2015-2020 годам.

³ В книге не используется операция транспонирования для разделения вектор-столбцов и вектор-строк. Эта работа возлагается на читателя. Соответственно, выражение \mathbf{ab} означает скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Единственное исключение – выделение операции \mathbf{ab}^T , результатом которой является матрица.

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_e}{r^5}(\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где \mathbf{k} – единичный вектор в направлении диполя, \mathbf{r} – радиус-вектор центра масс спутника, $\mu_e = \mu_0\mu_m/4\pi$ – величина, определяемая по трем первым слагаемым разложения, $\mu_m = 7.7245 \cdot 10^6$ Тл·км³ – величина диполя Земли. В инерциальной системе координат $O_aY_1Y_2Y_3$ это выражение можно представить в покомпонентном виде

$$\mathbf{B}_Y = -\frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin \lambda_2 \sin \delta_1 - 3\xi \cos u \\ -\cos \lambda_2 \sin \delta_1 + 3\xi \cos i \sin u \\ \cos \delta_1 - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Здесь r – величина радиус-вектора точки, в которой вычисляется индукция. Углы λ_2, δ_1 задают ориентацию диполя относительно системы $O_aY_1Y_2Y_3$. Угол $\lambda_2 = \omega_E t + \lambda_{20}$, где ω_E – угловая скорость вращения Земли, показывает вращение диполя относительно $O_aY_1Y_2Y_3$ вместе с Землей, $\lambda_{20} = 106.83^\circ$, $\xi = \cos u \sin \delta_1 \sin \lambda_2 - \sin u \cos i \sin \delta_1 \cos \lambda_2 + \sin u \cos \delta_1 \sin i$, $\delta_1 \approx 170.65^\circ$, i – наклонение орбиты.

2.3 Прямой диполь

В дальнейшем упрощении – модели прямого диполя – геомагнитное поле аппроксимируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. В этом случае выражение (2.1) остается верным. При этом в системе $O_aY_1Y_2Y_3$ вектор направления диполя имеет вид $\mathbf{k} = (0, 0, -1)$. Соответственно, выражение для вектора геомагнитной индукции в системе $O_aY_1Y_2Y_3$ можно получить из (2.2), положив $\lambda_2 = \delta_1 = 0$,

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin i \sin 2u \\ -3/2 \sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Величина вектора индукции B_0 изменяется при движении спутника по орбите и составляет

$$B_0 = \frac{\mu_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}. \quad (2.4)$$

В системе координат $OX_1X_2X_3$ геомагнитное поле записывается особенно компактно,

$$\mathbf{B}_X = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.4 Осредненная модель

В модели прямого диполя вектор индукции неравномерно вращается по поверхности практически кругового конуса, иногда именуемого **H**-конусом. Поэтому логично ввести следующее упрощение, фактически усредняя колебания вектора индукции в модели прямого диполя при движении спутника по орбите [67]. В осредненной модели геомагнитного поля¹ [67,68], вектор индукции имеет постоянную величину и равномерно движется по поверхности кругового конуса (Θ -конус). Конус касается оси $O_a Y_3$ системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, его ось лежит в плоскости $O_a Y_2 Y_3$ (рис. 2.1).

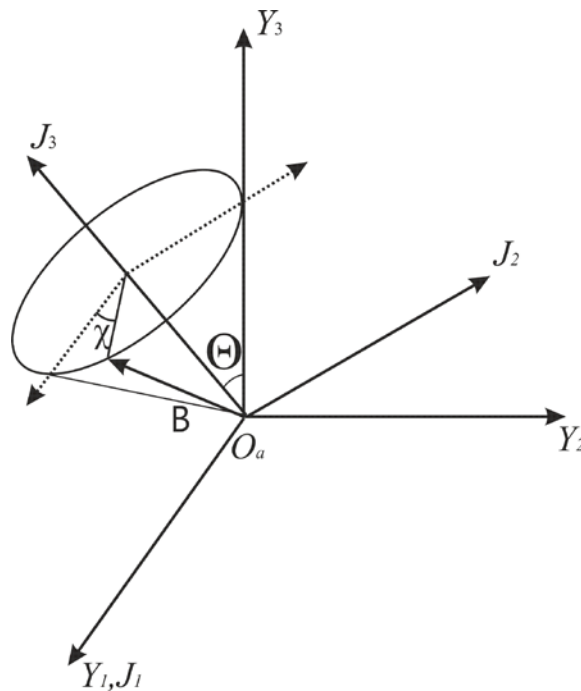


Рис. 2.1. Осредненная модель геомагнитного поля

Угол полураствора конуса вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2 \left(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right)}. \quad (2.6)$$

¹ Автор модели – Пол Донохо (Paul Donoho), сотрудник Лаборатории Белла.

Вектор геомагнитной индукции в рамках этой модели движется по поверхности конуса равномерно с удвоенной орбитальной скоростью, то есть

$$\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi_0.$$

В системе $O_a J_1 J_2 J_3$ компоненты вектора индукции имеют вид

$$\mathbf{B}_z = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin \chi \\ \sin \Theta \cos \chi \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Чтобы определить χ_0 , достаточно сравнить векторы геомагнитной индукции при использовании осредненной модели и модели прямого диполя в случае, когда этот вектор направлен по оси $O_a Y_3$. Это достигается при $\chi = 0$ в осредненной модели и при $u = 0$ в модели прямого диполя, откуда $\chi_0 = 0$.

Перейдем к более детальному сравнению модели прямого диполя и осредненной модели геомагнитного поля. Величину B_0 вектора индукции для осредненной модели обычно находят, опираясь на величину поля в модели прямого диполя. Она принимается равной либо среднему арифметическому максимального и минимального значений

$$B_0 = \frac{1}{2} \left(B_{0\text{дип}}(0) + B_{0\text{дип}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i} \right),$$

либо интегральному среднему, взятому за половину витка на орбите,

$$B_0 = \int_0^\pi B_{0\text{дип}}(u) du = \frac{\mu_e}{\pi r^3} \int_0^\pi \sqrt{1 + 3\sin^2 i} \sin^2 u du.$$

Оказывается, что образующие кругового Θ -конуса почти в точности совпадают с образующими \mathbf{H} -конуса. Основания конусов при этом заметно различаются (рис. 2.2). Пусть δ – угловое отклонение вектора \mathbf{B} от оси $O_a J_3$ в системе координат $O_a J_1 J_2 J_3$. Тогда $\delta \geq \Theta$ при любом u ($\delta = \Theta$ при $u = 0$ и $u = \pi/2$). Иначе говоря, круговой Θ -конус лежит целиком внутри \mathbf{H} -конуса, имея с ним две общие, диаметрально противоположные образующие. Однако разность $\delta - \Theta$ всегда весьма мала и не превышает величины $1^\circ 11'$ (это максимальное отклонение \mathbf{H} -конуса от кругового достигается на орбите с $i \sim 52^\circ 6'$; на орбитах с другими наклонениями максимальное значение разности $\delta - \Theta$ будет еще меньше).

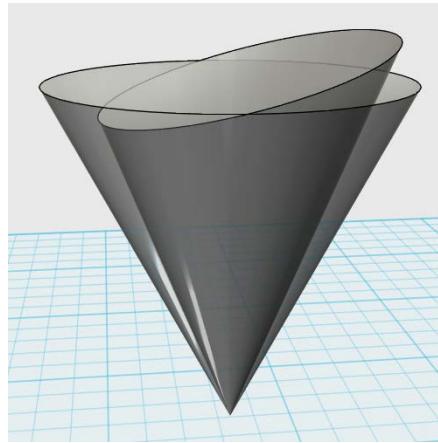


Рис. 2.2. Сравнение **H**- и **Θ**-конусов (**Θ**-конус лежит внутри **H**-конуса)

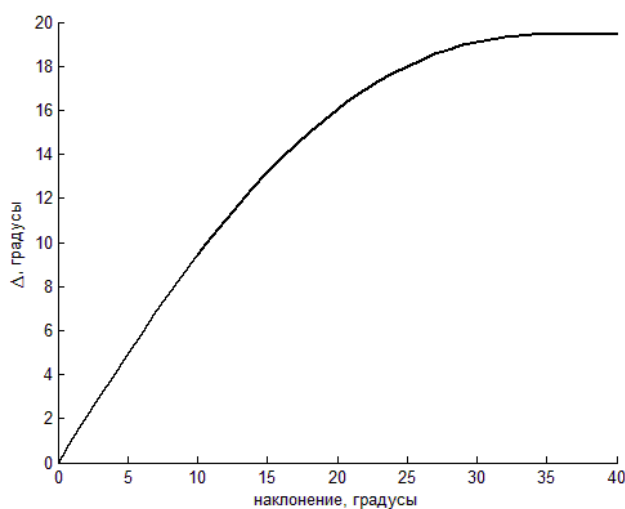
Скорость движения вектора геомагнитной индукции по **H**-конусу непостоянна. При $u = 0$, $u = \pi/2$ и $u = \pi$ вектор геомагнитной индукции совпадает по направлению с вектором, движущимся по **Θ**-конусу. В течение первой четверти витка вектор в модели прямого диполя «обгоняет» вектор индукции осредненной модели. На второй четверти он «запаздывает», пока через половину витка они не совпадут по направлению. При этом угол между векторами не превышает Δ (рис. 2.3). Чтобы определить этот угол Δ , необходимо использовать выражения, задающие векторы индукции в одной, например, орбитальной системе. Скалярное произведение этих векторов дает

$$\cos \Delta = \frac{1 + \sin^2 i \sin^2 u}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}}$$

Производная этого выражения есть

$$\frac{d \cos \Delta}{di} = \frac{\sin^2 u \sin i \cos i (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1)}{(1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{3/2}}$$

Нули производной достигаются при $\sin i = 0$, $\cos i = 0$ и при $3 \sin^2 i \sin^2 u - 1 = 0$. Отсюда получаем, что $\sin^2 u = 1/3 \sin^2 i$. Так как $\sin^2 u \leq 1$, то $1/3 \sin^2 i \leq 1$, откуда следует, что $1/\sqrt{3} \leq |\sin i|$. При $\sin i = 1/\sqrt{3}$ угол $i \approx 35^\circ$, при наклонении больше 35° величина Δ выходит на свое стационарное значение.

Рис. 2.3. Зависимость угла Δ от наклона орбиты

Хотя осредненная модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает, например, модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя), тем не менее, она позволяет достаточно верно описать основные свойства магнитного поля, влияющие на «вековую» динамику спутника, то есть учесть эволюционные изменения параметров движения спутника.

3 Модели гистерезиса

Equation Section (Next) К демпфирующим устройствам, не имеющим подвижных частей, можно отнести *магнитогистерезисные* (или просто гистерезисные) *стержни*, изготовленные из магнитомягкого материала и прошедшие специальную термообработку. Взаимодействие стержней с внешним геомагнитным полем приводит к их перемагничиванию и, как следствие, рассеянию тепла от движения элементов стержня на доменном уровне. Тем самым, рассеивается кинетическая энергия вращения стержней, а вместе с ними и кинетическая энергия спутника. Достоинства такого демпфирующего устройства заключаются в отсутствии движущихся частей и устройств управления, простоте и надежности конструкции, малых массе и занимаемом объеме, высокой стабильности характеристик. Недостатки – весьма трудоемкая технология изготовления, высокая чувствительность по отношению к даже слабым деформациям, сложное математическое моделирование процесса гистерезиса в материале стержня и, как следствие, невысокая достоверность результатов такого моделирования. Желательна лабораторная верификация полученных характеристик стержней. Кроме того, высокое быстродействие системы демпфирования достигается усилением связи стержней с геомагнитным полем, что приводит к возрастанию возмущающего влияния поля на характеристики установившегося движения спутника, то есть к возрастанию амплитуды его колебаний относительно расчетного положения. Приходится искать разумный компромисс.

В ряду сложностей, которые приходится преодолевать при моделировании динамики спутника с гистерезисными стержнями и определении их параметров, стоит проблема выбора адекватной модели гистерезиса. Используемая модель должна, учитывая основные свойства гистерезиса, допускать получение достаточно наглядных и обозримых результатов.

Для аналитического исследования следует подбирать максимально простую (назовем ее *упрощенной*) модель, с помощью которой можно получить общие зависимости характеристик движения спутника от параметров его системы ориентации. Выводы, сделанные на основе использования упрощенной модели, следует проверять и

при необходимости корректировать с помощью, быть может, сложной, но более адекватной реальному процессу в стержнях модели (ее назовем *улучшенной моделью*). Обычно исследование динамики спутника на основе *улучшенной модели* приходится выполнять с использованием ЭВМ.

Модель, которая хоть как-то отражает потери при изменении магнитного поля в материале, – *модель вязкого трения* или *модель Аркадьева*, согласно которой магнитная индукция стержня B_τ зависит линейно от скорости изменения проекции H_τ вектора напряженности геомагнитного поля на направление стержня

$$B_\tau = \mu \left(H_\tau - k \frac{dH_\tau}{dt} \right)$$

и, следовательно демпфирующий момент также пропорционален первой степени скорости изменения напряженности поля. Здесь μ – магнитная проницаемость стержня. Основная проблема при использовании этой модели – определить коэффициент пропорциональности k и установить его зависимость от всевозможных влияющих на процесс факторов.

Следующей по сложности и достоверности является *модель параллелограмма*, вид которой в простом представлении приведен на рис. 3.1.

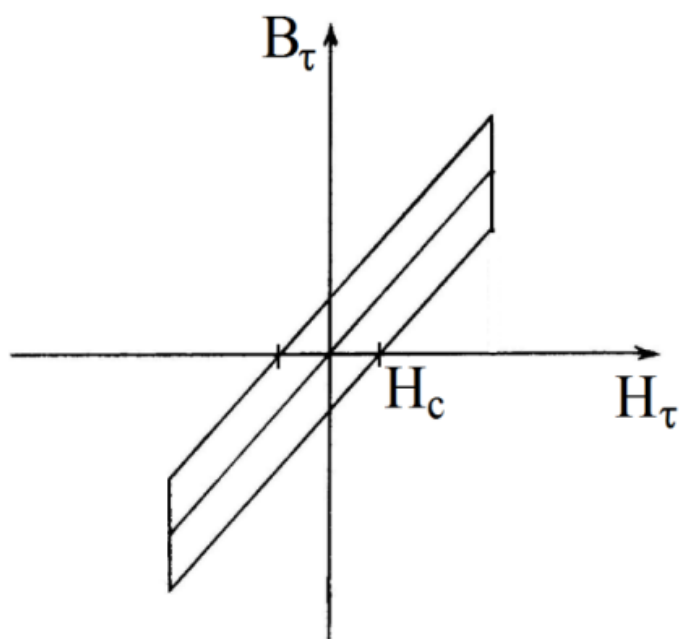


Рис. 3.1. Модель параллелограмма

Согласно этой модели

$$B_{\tau} = \mu \left(H_{\tau} - \frac{H_c}{2} \operatorname{sign} \frac{dH_{\tau}}{dt} \right). \quad (3.1)$$

Здесь H_c – коэрцитивная сила, полагаемая наряду с μ постоянными. Эта модель отражает важное свойство гистерезиса – слабую зависимость индукции стержня от величины скорости перемагничивания (в модели эта зависимость вовсе отсутствует), но существенную ее зависимость от знака этой скорости. Модель можно использовать при аналитических исследованиях и для численного анализа на ЭВМ. Некоторые сложности при ее использовании могут возникать из-за разрывности правых частей дифференциальных уравнений. Однако можно корректно [69] использовать метод усреднения для исследования динамики спутника при отсутствии «застревания» на поверхностях разрыва ($dH_{\tau}/dt = 0$). При численной реализации боковые стороны обычно выбираются наклонными с тем, чтобы сохранить непрерывность зависимости B_{τ} от H_{τ} .

При исследовании динамики спутника методом усреднения иногда используется модель Релея, согласно которой

$$B_{\tau} = (\mu_{in} + \alpha_R H_{tm}) H_{\tau} - \frac{\alpha_R}{2} (H_{tm}^2 - H_{\tau}^2) \operatorname{sign} \frac{dH_{\tau}}{dt}, \quad (3.2)$$

где μ_{in} – начальная магнитная проницаемость стержня, α_R – постоянная Релея, H_{tm} – амплитуда перемагничивающего поля. Эта модель правильно отражает поведение петли гистерезиса в окрестности начала координат (в плоскости H_{τ} и B_{τ}) при симметричном перемагничивании как по форме петли, так и по зависимости ее площади от амплитуды перемагничивающего поля. Ее использование можно рассматривать как следующий шаг по сравнению с моделью параллелограмма. Фигура петли образована ветвями двух парабол (рис. 3.2). Модель также не учитывает зависимость намагничиваемости стержня от величины скорости перемагничивания, а принимает во внимание зависимость ее от знака этой скорости и достоверно отражает зависимость потерь от амплитуды перемагничивающего поля.

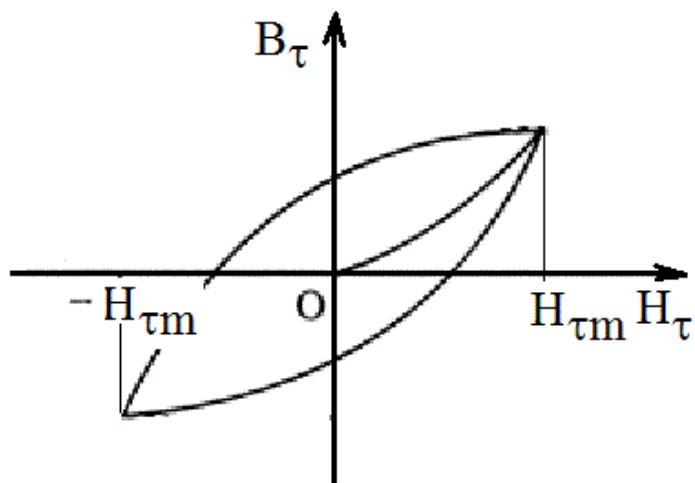


Рис. 3.2. Модель Релея

Таким образом, при проведении аналитических исследований можно использовать как минимум две модели. Обзор аналитических моделей гистерезиса приведен, например, в [70]. Для уточнения полученных результатов при численном исследовании на ЭВМ необходима более точная улучшенная модель, описание которой приведено в Приложении II. Там же описываются методика и результаты лабораторных испытаний типового гистерезисного демпфера в виде гистерезисных стержней и весьма экзотического в виде гистерезисной пластины.

4 Асимптотические методы

Equation Section (Next) Кратко изложим применяемые далее методы асимптотического анализа. При рассмотрении переходных процессов используется метод усреднения [71], при этом интерес представляют уравнения первого приближения. Для описания динамики аппарата удобно использовать оскулирующие переменные. Предположим, что момент, создаваемый взаимодействием магнитной системы ориентации с геомагнитным полем, мал настолько, что изменение модуля кинетического момента аппарата за один его оборот вокруг центра масс и за один виток по орбите незначительно по сравнению с величиной кинетического момента. Тогда можно ввести малый параметр ε , отражающий этот факт (его конкретное выражение выбирается для каждого алгоритма управления, что будет указано в соответствующих разделах). Уравнения (1.13) тогда записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t),$$

где $\mathbf{y} = (\varphi, \psi, u)$ – быстрые переменные, а $\mathbf{x} = (l, \rho, \sigma, \theta)$ – медленные переменные. Эти уравнения позволяют использовать метод усреднения для исследования эволюции медленных переменных. Однако усреднение вдоль порождающего решения – движения Эйлера-Пуансо – приводит к громоздким уравнениям. Значительно упростить анализ позволяет рассмотрение осесимметричного спутника. Уравнения (1.12) тогда могут быть представлены так:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t).$$

Порождающим решением для этих уравнений является регулярная прецессия. В этом случае среднее по времени совпадает с пространственным средним и для получения усредненных уравнений для медленных переменных достаточно независимо усреднить правые части уравнений по быстрым переменным при условии отсутствия резонанса. В результате на временном интервале порядка $1/\varepsilon$ решение может быть найдено с точностью порядка ε . Рассмотрение осесимметричного спутника и использование осредненной модели магнитного поля позволило в некоторых случаях получить достаточно простые эволюционные уравнения, решения которых могут быть найдены в квадратурах.

Другой способ изучения переходных процессов базируется на методе Артемьева по оценке характеристических показателей системы. Если движение спутника происходит в гравитационном поле с дополнительным малым управляющим моментом, то линеаризованные уравнения Эйлера представляются в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbb{A}_0\mathbf{x} + \varepsilon\mathbb{A}_1(t)\mathbf{x},$$

где \mathbb{A}_0 – постоянная матрица, $\mathbb{A}_1(t)$ – периодическая матрица. В этом случае, рассматривая порождающее уравнение при $\varepsilon = 0$, можно получить нулевое приближение решения системы. Для получения первого приближения решение представляется в виде [72]

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^n \left(\boldsymbol{\Phi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\Psi}_{kj}(u) \right) \exp \left(\lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} \right) u + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $\lambda_k, \boldsymbol{\Phi}_k$ – характеристические числа и собственные векторы порождающей системы, n – порядок системы. Величины чисел μ_{kj} , которые можно найти из условия периодичности $\boldsymbol{\Psi}_{kj}$, позволяют оценить скорость переходных процессов – затухания соответствующих колебаний в случае асимптотической устойчивости.

При анализе установившихся движений используется метод Пуанкаре [73] в предположении либо малого магнитного момента в смысле превалирования над ним других моментов – гравитационного, переносных сил инерции, гироскопических сил, либо в условиях преобладания магнитного момента. Тогда нелинейные уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

могут быть решены с точностью порядка ε , если известно периодическое решение порождающей системы, из которого «рождаются» периодические решения исходной системы. В частности, это позволяет найти отклонение от стационарного решения, зачастую соответствующего требуемой ориентации спутника (например, гравитационная ориентация), вызванное действием магнитной системы, или, наоборот, действие на обеспечиваемый ею режим движения других моментов.

При исследовании устойчивости будет использоваться теория Флоке [74] в тех случаях, когда линеаризованные уравнения имеют периодические коэффициенты. Тогда можно численно получить мат-

рицу монодромии и определить характеристические показатели системы в зависимости от параметров спутника и его системы управления.

Глава II. Пассивные магнитные системы ориентации

Рассмотрим наиболее простой с точки зрения инженерной реализации режим пассивной ориентации по вектору \mathbf{H} напряженности геомагнитного поля в текущей точке орбиты спутника. В этом случае восстанавливающий момент обеспечивается установкой на спутнике постоянного магнита, дипольный момент которого выбирается достаточно большим, чтобы механический момент от взаимодействия постоянного магнита с геомагнитным полем был определяющим в угловом движении спутника, то есть превалировал над остальными моментами. В качестве демпфирующего устройства могут быть использованы, например, гистерезисные стержни из магнитомягкого материала.

5 Спутник с постоянным магнитом

Equation Section (Next) Обратимся вначале к рассмотрению движения спутника с постоянным магнитом без демпфирующего устройства. Это позволит понять, какие движения присущи столь простой механической системе, какие из них и при каких условиях можно использовать в качестве номинальных (рабочих) движений спутника с пассивной магнитной системой ориентации.

5.1 Уравнения движения

Будем рассматривать спутник, представляющий собой твердое тело с постоянным магнитом. Гравитационное поле Земли центральное, ньютоново. Геомагнитное поле аппроксимируется моделью прямого диполя. Для описания движения спутника относительно центра масс используем уравнения (1.9). Получим явные выражения для элементов матрицы перехода \mathbb{H} из магнитной системы координат в орбитальную, используя модель прямого диполя и выражения для ее элементов через проекции вектора \mathbf{H} на оси орбитальной системы координат, принимая, что $\mathbf{H} = H_1\mathbf{E}_1 + H_2\mathbf{E}_2 + H_3\mathbf{E}_3$ и сообразуясь с выражениями (2.5). Вычислим элементы матрицы \mathbb{H} по формуле $h_{jk} = \mathbf{E}_j \mathbf{e}_k$ ($j, k=1,2,3$),

$$h_{11} = \frac{H_1}{|\mathbf{H}|} = \frac{\sin i \cos u}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}},$$

$$\begin{aligned}
h_{21} &= \mathbf{E}_2 \mathfrak{a}_1 = \frac{H_2}{|\mathbf{H}|} = \frac{\cos i}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u}}, \\
h_{31} &= \frac{H_3}{|\mathbf{H}|} = -\frac{2\sin i \sin u}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u}}, \\
h_{12} &= -\frac{(\mathbf{E}_1 \mathfrak{a}_1)(\mathbf{E}_2 \mathfrak{a}_1)}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathbf{E}_2|} = -\frac{\cos u \cos i}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u} \sqrt{1+3\sin^2 u}}, \\
h_{22} &= \frac{|\mathbf{H}|^2 - H_2^2}{|\mathbf{H}|^2 |\mathfrak{a}_1 \times \mathbf{E}_2|} = \frac{\sqrt{H_1^2 + H_3^2}}{|\mathbf{H}|} = \frac{\sin i \sqrt{1+3\sin^2 u}}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u}}, \\
h_{32} &= -\frac{(\mathbf{E}_3 \mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_1 \mathbf{E}_2)}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathbf{E}_2|} = \frac{2\cos i \sin u}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u} \sqrt{1+3\sin^2 u}}, \\
h_{13} &= -\frac{H_3}{\sqrt{H_1^2 + H_3^2}} = \frac{2\sin u}{\sqrt{1+3\sin^2 u}}, \\
h_{23} &= \mathbf{E}_2 \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{E}_2}{|\mathbf{H} \times \mathbf{E}_2|} = 0, \\
h_{33} &= \frac{H_1}{\sqrt{H_1^2 + H_3^2}} = \frac{\cos u}{\sqrt{1+3\sin^2 u}}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Перепишем элементы матрицы \mathbb{H} в удобном виде

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{\sin i \cos u}{N}, \quad h_{12} = -\frac{\cos u \cos i}{NN_1}, \quad h_{13} = \frac{2\sin u}{N_1}, \\
h_{21} &= \frac{\cos i}{N}, \quad h_{22} = \frac{\sin i \cdot N_1}{N}, \quad h_{23} = 0, \\
h_{31} &= -\frac{2\sin i \sin u}{N}, \quad h_{32} = \frac{2\cos i \sin u}{NN_1}, \quad h_{33} = \frac{\cos u}{N_1}.
\end{aligned}$$

Здесь $N = \sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u}$ и $N_1 = \sqrt{1+3\sin^2 u}$.

Положение связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно магнитной системы координат $OZ_1Z_2Z_3$ зададим с помощью углов α , β , γ (последовательность поворотов 2-3-1, см. рис. 1.2). Соответствующая матрица перехода \mathbb{A} имеет вид (1.5).

Получим кинематические соотношения, входящие в (1.9). Вектор абсолютной угловой скорости спутника относительно инерциальной системы координат имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{orb} + \boldsymbol{\omega}_m + \boldsymbol{\omega}_{отн}, \tag{5.2}$$

где $\omega_{орб}$ – угловая скорость ОСК относительно ИСК, ω_m – угловая скорость МСК относительно ОСК, $\omega_{омн}$ – угловая скорость спутника (то есть ССК) относительно МСК. Рассмотрим подробно первые два слагаемых в правой части (5.2). Компоненты угловой скорости магнитной системы координат относительно орбитальной системы имеет вид

$$\omega_{m,1} = \sum_{k=1}^3 \frac{dh_{k2}}{dt} h_{k3}, \quad \omega_{m,2} = \sum_{k=1}^3 \frac{dh_{k3}}{dt} h_{k1}, \quad \omega_{m,3} = \sum_{k=1}^3 \frac{dh_{k1}}{dt} h_{k2}. \quad (5.3)$$

Получим выражения для угловой скорости магнитной системы координат относительно инерциальной системы координат в проекциях $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ и $\bar{\Phi}_3$ на оси магнитной системы координат, то есть $\omega_{орб} + \omega_m = (\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3)_Z$, в зависимости от ω_0 , i и u . Учтем, что орт \mathbf{E}_2 имеет проекции (h_{21}, h_{22}, h_{23}) на оси магнитной системы координат, и выражения (5.3), в результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= h_{21}\omega_0 + \sum_{k=1}^3 \frac{dh_{k2}}{dt} h_{k3} = \frac{3\omega_0(1 + \sin^2 u) \cos i}{NN_1}, \\ \bar{\Phi}_2 &= h_{22}\omega_0 + \sum_{k=1}^3 \frac{dh_{k3}}{dt} h_{k1} = \frac{3\omega_0(1 + \sin^2 u) \sin i}{NN_1}, \\ \bar{\Phi}_3 &= h_{23}\omega_0 + \sum_{k=1}^3 \frac{dh_{k3}}{dt} h_{k2} = -\frac{3\omega_0 \sin 2u \sin 2i}{4N^2 N_1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из внешних моментов, действующих на спутник, будем учитывать магнитный восстанавливающий (создаваемый постоянным магнитом) и гравитационный моменты. Тогда уравнения движения спутника имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= 3\omega_0^2(C - B)b_{32}b_{33} + H(m_{s2}a_{31} - m_{s3}a_{21}), \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= 3\omega_0^2(A - C)b_{31}b_{33} + H(m_{s3}a_{11} - m_{s1}a_{31}), \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= 3\omega_0^2(B - A)b_{31}b_{32} + H(m_{s1}a_{21} - m_{s2}a_{11}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos\beta} (\bar{\omega}_2 \cos\gamma - \bar{\omega}_3 \sin\gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= (\bar{\omega}_2 \sin\gamma + \bar{\omega}_3 \cos\gamma), \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \bar{\omega}_1 - (\bar{\omega}_2 \cos\gamma - \bar{\omega}_3 \sin\gamma) \operatorname{tg}\beta,\end{aligned}\quad (5.6)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на оси связанной системы координат, A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, $\mathbf{m}_s = (m_{s1}, m_{s2}, m_{s3})_x$ – дипольный магнитный момент спутника, $H = |\mathbf{H}| = \mu_m N / r^3$, $\mathbf{H} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})_x$, так как орт \mathbf{e}_1 направлен вдоль \mathbf{H} , $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)_x$ – угловая скорость спутника относительно магнитной системы координат в проекциях на оси связанной системы координат, что обозначается нижним индексом «х» у скобки. Она связана с абсолютной угловой скоростью спутника с учетом матрицы \mathbb{A} соотношениями

$$\bar{\omega}_j = \omega_j - \sum_{k=1}^3 a_{jk} \bar{\Phi}_k \quad (j = 1, 2, 3). \quad (5.7)$$

Уравнения (5.5) представляют собой динамические уравнения движения спутника, уравнения (5.6) с учетом (5.7) – кинематические уравнения. Вместе они представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих угловое движение спутника. Коэффициенты b_{jk} образуют матрицу перехода \mathbb{B} из связанной системы координат в орбитальную систему координат. Ясно, что $\mathbb{B} = \mathbb{H}\mathbb{A}^T$, или $b_{jk} = \sum_{n=1}^3 h_{jn} a_{kn}$ ($j, k = 1, 2, 3$).

Принятая здесь форма представления движения спутника относительно магнитной системы координат предпочтительна при исследовании с применением асимптотических методов, если требуется линеаризация уравнений в окрестности номинального движения. В этом случае малым отклонениям от номинального движения соответствуют малые углы отклонения спутника от магнитной системы координат.

Используя безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{A}{B}, \quad \mu = \frac{B-C}{A}, \quad \eta = \frac{m_{s1}\mu_m}{B\mu_g}, \quad u = u_0 + \omega_0 t$$

и переменные

$$\bar{W}_k = \frac{\omega_k}{\omega_0}, \quad \bar{\Phi}_k = \frac{\bar{\Phi}_k}{\omega_0} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5.8)$$

уравнения (5.5), (5.6) в предположении, что постоянный магнит расположен вдоль оси Ox_1 , то есть $m_{s2} = m_{s3} = 0$, а орбита круговая, запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_1}{du} &= \mu(\bar{W}_2\bar{W}_3 - 3a_{32}a_{33}), \\ \frac{d\bar{W}_2}{du} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\bar{W}_1\bar{W}_3 - 3a_{31}a_{33}) - \eta Nb_{13}, \\ \frac{d\bar{W}_3}{du} &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\bar{W}_1\bar{W}_2 - 3a_{31}a_{32}) + \eta(1+\lambda\mu)Nb_{12}, \\ \frac{d\gamma}{du} &= \bar{W}_1 - (\bar{W}_2 \cos \gamma - \bar{W}_3 \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta - (\Phi_1 \cos \alpha - \Phi_3 \sin \alpha), \\ \frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos \beta} (\bar{W}_2 \cos \gamma - \bar{W}_3 \sin \gamma) + (\Phi_1 \cos \alpha - \Phi_3 \sin \alpha) - \Phi_2, \\ \frac{d\beta}{du} &= (\bar{W}_2 \sin \gamma + \bar{W}_3 \cos \gamma) - (\Phi_1 \sin \alpha + \Phi_3 \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Движение спутника рассмотрим на примере динамически осесимметричного аппарата. Это предположение отражает тенденции в конструировании спутников, требующих ориентации лишь одной оси в пространстве – они, как правило, близки к динамически осесимметричным. Полагая $B = C$ и вводя новые переменные

$$W_1 = \bar{W}_1, \quad W_2 = \bar{W}_2 \cos \gamma - \bar{W}_3 \sin \gamma, \quad W_3 = \bar{W}_2 \sin \gamma + \bar{W}_3 \cos \gamma,$$

что означает переход к полусвязанным осям или осям Резаля, перепишем уравнения (5.9) в виде

$$\dot{W}_1 = 0, \quad \dot{\gamma} = W_1 - W_2 \operatorname{tg} \beta - \frac{\Pi_2}{\cos \beta}, \quad (5.10)$$

и

$$\begin{aligned}
\dot{W}_2 &= - \left(\lambda W_1 - W_2 \operatorname{tg} \beta - \frac{\Pi_2}{\cos \beta} \right) W_3 - \eta N \sin \alpha - \\
&\quad - 3(1 - \lambda)(\Lambda_2 \cos \beta + h_{32}), \\
\dot{W}_3 &= \left(\lambda W_1 - W_2 \operatorname{tg} \beta - \frac{\Pi_2}{\cos \beta} \right) W_2 - \eta N \cos \alpha \sin \beta + \\
&\quad + 3(1 - \lambda)(\Lambda_2 \cos \beta + h_{32} \sin \beta)(-\Lambda_2 \sin \beta + h_{32} \cos \beta), \\
\dot{\alpha} &= \frac{W_2}{\cos \beta} + \Pi_2 \operatorname{tg} \beta - \Phi_2, \quad \dot{\beta} = W_3 - \Pi_1,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

где

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \Phi_1 \sin \alpha + \Phi_3 \cos \alpha, \quad \Pi_2 = \Phi_1 \cos \alpha - \Phi_3 \sin \alpha; \\
\Lambda_1 &= h_{31} \sin \alpha + h_{33} \cos \alpha, \quad \Lambda_2 = h_{31} \cos \alpha - h_{33} \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Точкой обозначено дифференцирование по аргументу широты u ¹. Система (5.11) описывает движение оси симметрии спутника. Величина W_1 входит в (5.11) как параметр. Система (5.10) допускает первый интеграл $W_1 = \text{const}$ и описывает движение спутника вокруг оси симметрии Ox_1 . При этом W_2, W_3, α, β считаются известными из (5.11).

5.2 Движение оси симметрии спутника в плоскости полярной орбиты

Перейдем к построению и исследованию таких движений, которые можно было бы в дальнейшем использовать в качестве номинальных движений спутника в режиме одноосной ориентации по вектору \mathbf{H} . При изложении будем опираться на материалы, опубликованные в [75,76]. Вначале рассмотрим частный случай движения оси симметрии спутника, когда эта ось не выходит из плоскости полярной орбиты.

На полярной орбите ($i = \pi/2$) при $W_1 = 0$ существует частное движение

$$W_2 = W_2(u), \quad \alpha = \alpha(u), \quad W_3 = 0, \quad \beta = 0, \tag{5.12}$$

¹Здесь и далее точка и штрих обозначают дифференцирование по безразмерному времени. Точка соответствует аргументу широты u , штрих любому другому времени τ .

где функции $W_2(u)$, $\alpha(u)$ удовлетворяют системе уравнений с π -периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= -\eta N \sin \alpha - 3 \frac{1-\lambda}{N^2} \left(\frac{1-5\sin^2 u}{2} \sin 2\alpha + \sin 2u \cos 2\alpha \right), \\ \dot{\alpha} &= W_2 - \frac{3(1+\sin^2 u)}{N^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Частное решение (5.12) соответствует движению оси симметрии спутника в плоскости полярной орбиты. Будем называть его *плоским движением* в отличие от *пространственного движения*, которое характеризуется неравенством $W_3^2 + \sin^2 \beta > 0$. Построим асимптотическое решение указанной системы, описывающее движение оси симметрии спутника. При $\eta \gg 1$, когда магнитный восстанавливающий момент является определяющим в движении спутника, можно ожидать, что система (5.13) допускает решение, амплитуда которого тем меньше, чем больше дипольный момент постоянного магнита. Это решение можно попытаться построить в виде формальных¹ рядов по отрицательным степеням параметра η с π -периодическими коэффициентами

$$W_2(u) = 3 \frac{1+\sin^2 u}{N^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{-k} W_{2k}(u), \quad \alpha(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{-k} \alpha_k(u). \quad (5.14)$$

Коэффициенты $W_{2k}(u)$, $\alpha_k(u)$, входящие в (5.14), определяются бесконечной цепочкой рекуррентных соотношений, получающихся в результате подстановки рядов (5.14) в уравнения (5.13) и приравнивания выражений при одинаковых степенях параметра η . Из двух возможных положений спутника при бесконечно большом дипольном моменте здесь выбрано решение, описываемое выражениями

$$W_{20} = 3 \frac{1+\sin^2 u}{N^2}, \quad \alpha_0 = 0.$$

Ясно, что должно существовать и второе решение

$$W_{20} = 3 \frac{1+\sin^2 u}{N^2}, \quad \alpha_0 = \pi.$$

¹То есть не заботясь об их сходимости.

Ограничимся рассмотрением первого решения. Цепочка уравнений имеет единственное по построению π -периодическое решение, которое удовлетворяет соотношениям

$$W_2(-u) = W_2(u), \quad \alpha(-u) = -\alpha(u). \quad (5.15)$$

С помощью (5.15) условие

$$W_2(\pi) - W_2(0) = 0, \quad \alpha(\pi) - \alpha(0) = 0$$

π -периодичности решений системы (5.13) сводится к условиям

$$\alpha(0) = \alpha(\pi/2) = 0. \quad (5.16)$$

В силу инвариантности уравнений (5.13) относительно преобразования $u \rightarrow -u$, $\alpha \rightarrow -\alpha$ всякое решение краевой задачи (5.13), (5.16) удовлетворяет соотношениям (5.15), соотношениям $-\alpha(-u + \pi/2) = \alpha(u + \pi/2)$, $W_2(-u + \pi/2) = -W_2(u + \pi/2)$ и, следовательно, является π -периодическим.

Численное построение периодического решения (5.14) свелось к решению краевой задачи (5.13), (5.16). С этой целью *методом Ньютона* решалось уравнение $\alpha(W_2(0), \pi/2) = 0$ относительно $W_2(0)$ при $\alpha(0) = 0$ и фиксированном η по известной из численных методов итерационной формуле

$$W_2^{(n+1)}(0) = W_2^{(n)}(0) - \alpha(W_2^{(n)}(0), \pi/2) \left(\frac{\partial \alpha(W_2(0), \pi/2)}{\partial W_2(0)} \right)^{-1} \Big|_{W_2(0)=W_2^{(n)}(0)}.$$

В качестве начального приближения выбиралась величина $W_2^{(0)}(0) = W_{20}$. Результаты численных расчетов при $\lambda = 1$ показаны на рис. 5.1 и рис. 5.2 в виде зависимостей начального условия $W_2(0)$ и амплитуды $\text{Am}_\alpha = \max_{0 \leq u \leq \pi} |\alpha(u)|$ от магнитного параметра η . Каждая точка графика определяет (рис. 5.1) и характеризует (рис. 5.2) периодическое движение.

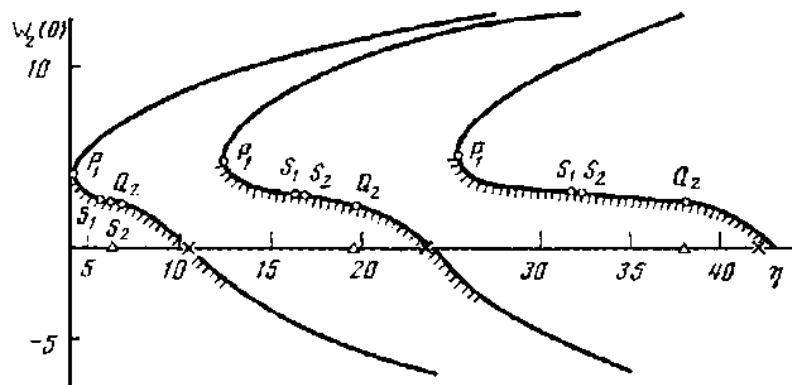


Рис. 5.1. Начальные условия решений краевой задачи (5.13), (5.16)

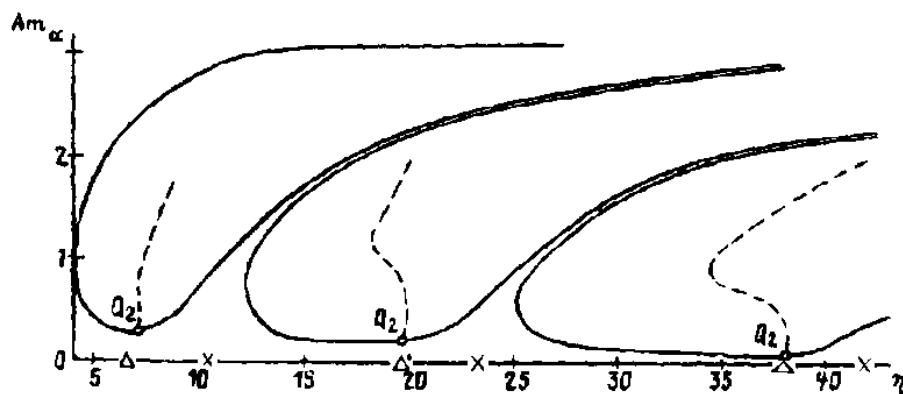


Рис. 5.2. Амплитудные характеристики решения краевой задачи (5.13), (5.16)

График на рис. 5.1 состоит из отдельных ветвей. Для начальных условий, принадлежащих одной и той же пологой части ветви, величина $J = \partial \alpha(\pi/2) / \partial W_2(0)$ имеет одинаковый знак, при переходе на пологую часть соседней ветви знак J меняется на противоположный. Расчеты, определяющие поведение кривых в окрестности точек смены знака J («точек разрыва»), проводились *методом продолжения по параметру*, описанным в Приложении IV. В пространстве размерности $n+1$ (искомых n начальных условий краевой задачи и параметра) по известным трем точкам с помощью квадратичной параболы строится прогноз четвертой точки, которая уточняется итерационным методом Ньютона. Пологие участки кривых на рисунках, лежащие между точками разрыва, соответствуют при $\eta \gg 1$ решению в виде формальных рядов (5.14). Разрывы между пологими участками вызваны ветвлением решений краевой задачи (5.13), (5.16), обусловленным резонансом между орбитальным

движением спутника и собственными колебаниями его оси симметрии в плоскости орбиты. Такое ветвление говорит о расходимости рядов (5.14).

Найдем резонансные точки η_k . Уравнения в вариациях для решения (5.14) имеют вид

$$\Delta \dot{W}_2 = \left[-\eta N + 3 \frac{1-\lambda}{N_1} (1-5\sin^2 u) + O(1/\eta) \right] \Delta \alpha, \quad (5.17)$$

$$\Delta \dot{\alpha} = \Delta W_2.$$

Значения параметра η , при которых система (5.17) с краевыми условиями

$$\Delta W_2(0) = \Delta W_2(\pi), \quad \Delta \alpha(0) = \Delta \alpha(\pi)$$

имеет нетривиальное решение, являются бифуркационными.

Бифуркационные значения параметра η , то есть абсциссы η_k тех точек кривых на рис. 5.1, в которых касательная к кривой вертикальна, в области $\eta \gg 1$ определяются приближенной формулой (см. Приложение IV)

$$\eta_k \approx p_a n^2 - r_0 + r_1 \lambda, \quad (5.18)$$

где

$$p_a = \frac{\pi^2}{a_a^2} \approx 2.63, \quad a_a = \int_0^{\pi/2} \sqrt{N_1} du, \quad r_1 = -\frac{3}{a_a} \int_0^{\pi/2} \frac{1-5\sin^2 u}{N_1^{5/2}} du \approx 0.51,$$

$$r_0 = -\frac{1}{a_a} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{16N_1} \dot{N}_1^2 + 3 \frac{1-5\sin^2 u}{N_1^2} \right] \frac{du}{\sqrt{N_1}} \approx -0.49.$$

Несколько точек (5.18) отмечены значком «х» на оси абсцисс (рис. 5.1). Способ получения асимптотической формулы (5.18) и ей подобных для определения точек ветвления периодических решений по сути заключается в следующем. При $\eta \gg 1$ система (5.13) удовлетворяет условиям теоремы [77] о периодических решениях дифференциального уравнения второго порядка, содержащего большой параметр. В соответствии с этой теоремой система (5.13) имеет единственное π -периодическое решение (5.14), удовлетворяющее условию $\alpha(u) = O(1/\eta)$ при всех достаточно больших значениях η , кроме окрестностей резонансных точек η_k .

Представление о явном виде решения $\alpha = \alpha(u)$ дает рис. 5.3, полученный при моделировании плоского движения немецкого

спутника *AZUR*, выведенного на орбиту в 1967 году. Эксцентриситет орбиты $e = 0.17$.

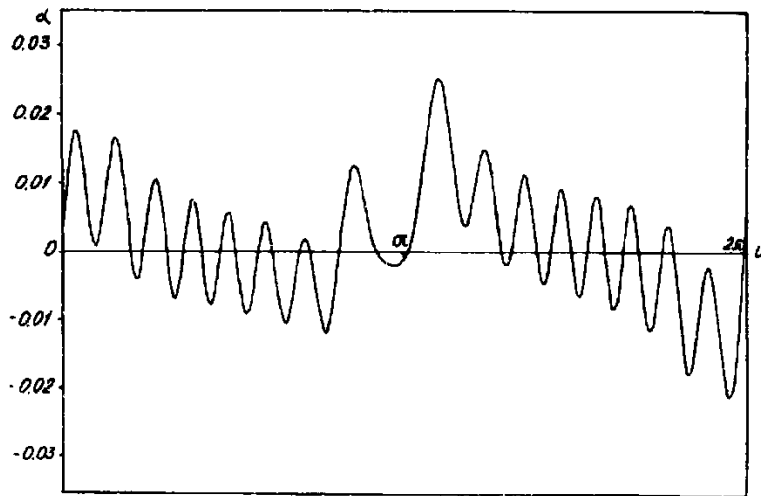


Рис. 5.3. Явный вид периодического движения спутника на эллиптической орбите

Из-за эксцентриситета π -периодическая зависимость огибающей, вызванная изменением длины вектора \mathbf{H} при движении спутника по орбите, становится 2π -периодической. Быстрые колебания – это собственные колебания спутника, поддерживаемые вынуждающими гармониками с частотами, близкими собственной. Речь идет о гармониках, получаемых разложением правой части уравнений движения в ряд Фурье.

Исследование устойчивости

Исследование устойчивости полученных решений проводится в линейном приближении с использованием уравнений в вариациях

$$\Delta \dot{W}_2 = -\left[\eta N_1 \cos \alpha_{(*)} - 3(1-\lambda)(\tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1) \right] \Delta \alpha, \quad \Delta \dot{\alpha} = \Delta W_2, \quad (5.19)$$

$$\Delta \dot{W}_3 = -\left[\eta N_1 \cos \alpha_{(*)} + W_{2(*)}^2 - 3(1-\lambda)\tilde{\Lambda}_2^2 \right] \Delta \beta, \quad \Delta \dot{\beta} = \Delta W_3, \quad (5.20)$$

где $W_{2(*)}, \alpha_{(*)}$ – решение из (5.12), устойчивость которого исследуется, $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2$ – это Λ_1, Λ_2 , вычисленные при $i = \pi/2$ и $W_2 = W_{2(*)}, \alpha = \alpha_{(*)}$, значком « Δ » обозначена вариация соответствующей переменной. Уравнения в вариациях получены подстановкой $\alpha = \alpha_{(*)} + \Delta \alpha$, $\beta = \Delta \beta$, $W_2 = W_{2(*)} + \Delta W_2$, $W_3 = \Delta W_3$ в уравнения (5.11) и сохранением линейных по вариациям членов.

Уравнения в вариациях распадаются на две независимые системы. Система (5.19) описывает возмущенное в плоскости орбиты движение оси симметрии спутника. Система (5.20) описывает ее движение, возмущенное в перпендикулярном плоскости орбиты направлении. Заметим, что эти же уравнения могут быть использованы для оценки частот и малых амплитуд собственных колебаний оси симметрии в зависимости от начальных условий движения и параметров спутника. Характеристические уравнения для систем (5.19) и (5.20) имеют идентичный вид

$$\xi^2 - 2A_k \xi + 1 = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (5.21)$$

Коэффициенты A_1 и A_2 определяются решением систем (5.19) и (5.20) следующим образом. Вычисляется матрица монодромии решений системы (5.19) $\mathbb{X}(\pi)$, составленная из столбцов ее решений $(x_{11}(\pi), x_{21}(\pi))$, $(x_{12}(\pi), x_{22}(\pi))$ на периоде π со столбцами единичной матрицы \mathbb{E} в качестве начальных условий. Составляем характеристическое уравнение в виде $|\mathbb{X}(\pi) - \xi \mathbb{E}| = 0$ или

$$\xi^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} (x_{11}(\pi) + x_{22}(\pi)) \xi + x_{11}(\pi)x_{22}(\pi) - x_{12}(\pi)x_{21}(\pi) = 0. \quad (5.22)$$

В уравнениях (5.21) A_k обозначает коэффициент $(x_{11}(\pi) + x_{22}(\pi))/2$. Что касается коэффициента $x_{11}(\pi)x_{22}(\pi) - x_{12}(\pi)x_{21}(\pi)$, то он обращается в единицу в силу выбора начальных условий. Степень близости его к единице можно использовать для контроля точности вычислений.

Если $|A_1| \leq 1$ и $|A_2| \leq 1$, то все корни уравнений (5.21) лежат на окружности $|\xi| = 1$ и выполнены необходимые условия устойчивости исследуемого периодического решения. Для краткости будем говорить, что имеет место плоская (пространственная) устойчивость, если выполнено условие $|A_1| \leq 1$ ($|A_2| \leq 1$). Если выполнены оба неравенства, то будем говорить, что решение устойчиво. Участки кривых, где выполнены необходимые условия устойчивости, на рис. 5.1 отмечены штриховкой.

При $A_1 = -1$ система (5.19) имеет нетривиальное 2π -периодическое решение. Если $\text{rank} \|\mathbb{X}(\pi) + \mathbb{E}\| \neq 0$, то такое решение единственно с точностью до постоянного множителя. Анализ

коэффициентов фундаментальной матрицы показывает, что в точке S_1 (рис. 5.4) на границе области $A_1 = -1$ система (5.19) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям симметрии

$$\Delta W_2(-u) = \Delta W_2(u), \quad \Delta \alpha(-u) = -\Delta \alpha(u). \quad (5.23)$$

В точке S_2 на границе указанной области нетривиальное решение системы (5.19) удовлетворяет условиям

$$\Delta W_2(-u) = -\Delta W_2(u), \quad \Delta \alpha(-u) = \Delta \alpha(u). \quad (5.24)$$

В точке S_1 из π -периодического решения (5.14) рождается нечетное по α симметричное (удовлетворяющее условиям (5.15)) 2π -периодическое решение системы (5.13). Это решение удовлетворяет условиям

$$\alpha(0) = \alpha(\pi) = 0. \quad (5.25)$$

Его начальные условия представлены на рис. 5.4 (кривые 1).

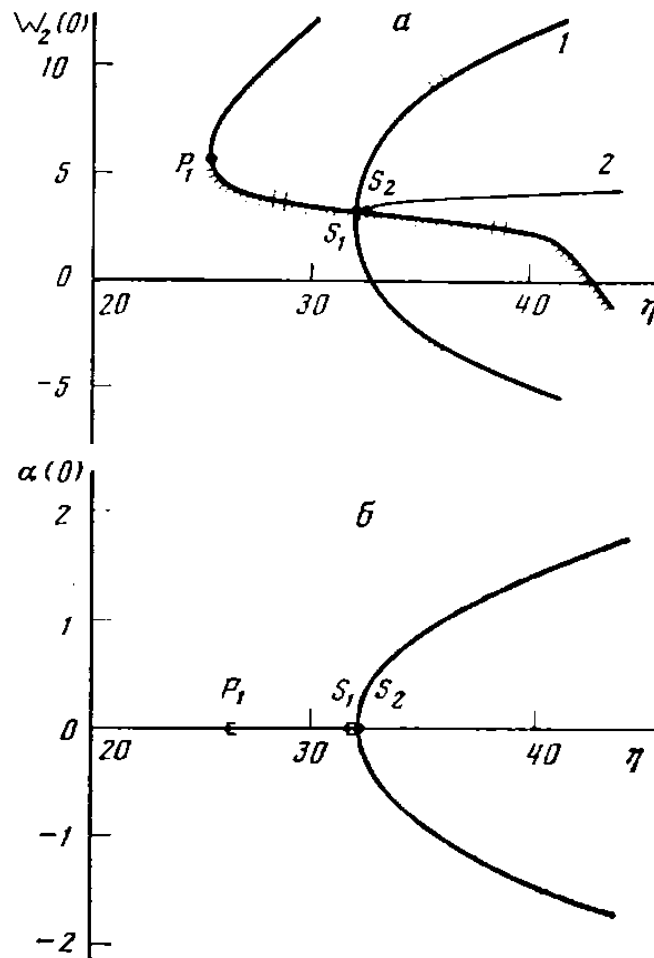


Рис. 5.4. Начальные условия π - и 2π -периодических решений системы (5.13)

В точке S_2 рождается несимметричное 2π -периодическое решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$W_2(2\pi) - W_2(0) = 0, \quad \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 0. \quad (5.26)$$

Начальные условия этого решения представлены кривыми 2 на рис. 5.4, где изображены и графики начальных π -периодических решений, перенесенные с рис. 5.1. Штриховкой отмечены устойчивые решения.

5.3 Пространственное движение оси симметрии спутника

В рассматриваемом случае коэффициенты уравнений (5.11) имеют по u период π и построение π -периодических движений этой системы эквивалентно решению для нее краевой задачи с условиями

$$\begin{aligned} W_2(\pi) - W_2(0) = 0, \quad W_3(\pi) - W_3(0) = 0, \\ \alpha(\pi) - \alpha(0) = 0, \quad \beta(\pi) - \beta(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

При $i = \pi/2$, $W_1 = 0$ краевая задача (5.11), (5.27) допускает плоское движение (5.12), для которого коэффициенты A_1 и A_2 в уравнениях (5.21) отличны от 1. Тогда, согласно теореме Пуанкаре [73], при достаточно малых $|W_1|$, $|i - \pi/2|$ краевая задача (5.11), (5.27) имеет единственное аналитически зависящее от W_1 и i решение, которое переходит при $i = \pi/2$, $W_1 = 0$ в плоское решение. Используя свойство системы (5.11) не менять своего вида при замене переменных

$$u \rightarrow -u, \quad W_3 \rightarrow -W_3, \quad \alpha \rightarrow -\alpha, \quad (5.28)$$

краевые условия (5.27) сводятся к условиям

$$W_3(0) = W_3(\pi/2) = \alpha(0) = \alpha(\pi/2) = 0. \quad (5.29)$$

Всякое решение краевой задачи (5.9), (5.29) является π -периодическим и удовлетворяет условиям (5.28). Движение, полученное решением краевой задачи (5.11), (5.29) имеет расширенную по сравнению с решением краевой задачи (5.11), (5.27) область определения: решение краевой задачи (5.11), (5.29) при достаточно малых $|W_1|$, $|i - \pi/2|$ и плоском порождающем решении (5.12) определено всюду, за исключением точек P_1 и Q_1 (рис. 5.1). Абсциссы точек Q_2 приближенно определяются выражением, аналогичным выражению для плоского движения

$$\eta_k \approx p_a n^2 - r_0 + r_1 \lambda, \quad (5.30)$$

с той лишь разницей, что величины r_1 и r_0 , входящие сюда, вычисляются по формулам

$$r_1 = -\frac{12}{a_a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{N_1^{5/2}} du \approx 1.25,$$

$$r_0 = -\frac{1}{a_a} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{16N_1} \dot{N}_1^2 - 12 \frac{\sin^2 u}{N_1^2} - 1 \right] \frac{du}{\sqrt{N_1}} \approx -4.25.$$

Несколько точек, полученных по этой приближенной формуле, отмечены значком « Δ » на оси абсцисс (рис. 5.1).

В случае $\eta \gg 1$ пространственные π -периодические решения системы (5.11) строятся в виде формальных рядов

$$W_3(u, W_1, i) = \Phi_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{-k} W_{3k}(u, W_1, i),$$

$$\alpha(u, W_1, i) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(u, W_1, i), \quad \beta(u, W_1, i) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(u, W_1, i), \quad (5.31)$$

$$W_2(u, W_1, i) = \Phi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{-k} W_{2k}(u, W_1, i),$$

аналогичных рядам (5.14). По построению эти ряды переходят при $i = \pi/2$, $W_1 = 0$ в плоское нечетное по α решение (5.14). Краевая задача (5.11), (5.29) для численного исследования пространственных π -периодических решений свелась к следующим уравнениям:

$$g_1(a_1, a_2, \eta, W_1, i) = \alpha(\pi/2, a_1, a_2, \eta, W_1, i) = 0,$$

$$g_2(a_1, a_2, \eta, W_1, i) = W_3(\pi/2, a_1, a_2, \eta, W_1, i) = 0, \quad (5.32)$$

где $a_1 \equiv \beta(0)$, $a_2 \equiv W_3(0)$. При заданных значениях η , W_1 , i эти уравнения образуют замкнутую систему относительно неизвестных a_1 , a_2 . Уравнения (5.32) рассматриваются как уравнения двумерной поверхности в пространстве параметров (a_1, a_2, η, W_1, i) . Численное исследование этой поверхности свелось к построению ее сечений трехмерными гиперплоскостями $i = \pi/2$, $W_1 = 0$. Графики функций a_1 , a_2 в зависимости от η приведены на рис. 5.5, где штриховая линия отвечает плоским периодическим движениям.

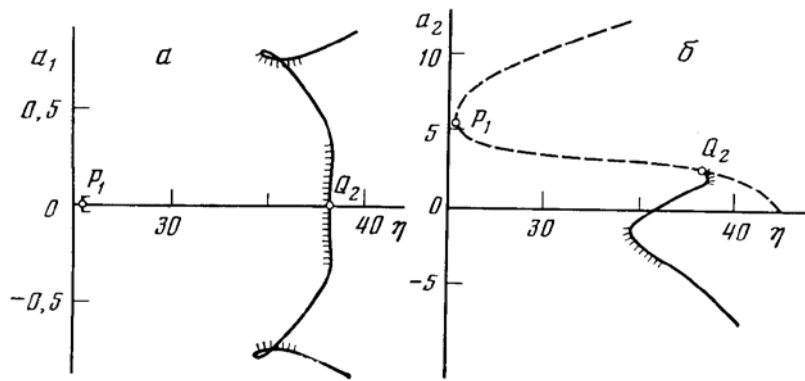


Рис. 5.5. Начальные условия пространственных периодических решений при $i = \pi/2, W_1 = 0$

Представляет интерес построение кривых ветвления, вдоль которых происходит рождение пары новых решений. Кривые ветвления представляют собой проекции кривых, задаваемых в плоскости двух входящих в систему (5.32) параметров a_1, a_2 уравнениями (5.32) и уравнением

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(a_1, a_2)} = 0.$$

На рис. 5.6 в качестве примера приведены полученные численно кривые ветвления на плоскости (η, i) при $W_1 = 0$. В их окрестности наблюдается значительный рост амплитуды периодических движений для приведенного интервала изменения параметра η . Выбранный интервал является характерным для спутника с магнитной системой ориентации. Сплошными линиями изображены кривые ветвления решений, амплитуды которых малы при фиксированном i . Штриховыми линиями обозначены участки кривых ветвления в тех областях, где соответствующие решения имеют большие амплитуды.

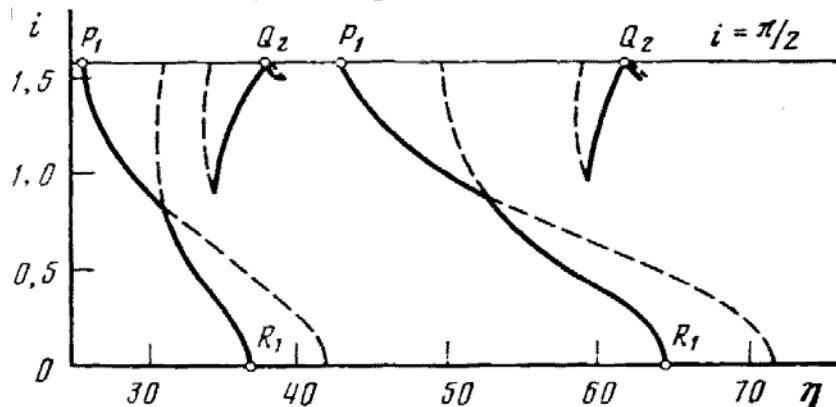


Рис. 5.6. Кривые ветвления периодических решений при $W_1 = 0$

Бифуркационные значения параметров η , W_1 , i найдем так же, как это было сделано выше для определения точек ветвления плоских движений при $\eta \gg 1$. С этой целью запишем уравнения в вариациях для решения (5.31) системы (5.11)

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_2 - [p + O(\eta^{-1})] \Delta W_3 + [\eta N + O(1)] \Delta \alpha &= 0, \quad \Delta \dot{\alpha} = \Delta W_2, \\ \Delta \dot{W}_3 + [p + O(\eta^{-1})] \Delta W_2 + [\eta N + O(1)] \Delta \beta &= 0, \quad \Delta \dot{\beta} = \Delta W_3, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где $p = 2\Phi_1 - \lambda W_1$ и явно выписаны те члены, которые при переходе к быстрому времени $u\sqrt{\eta}$ сохраняют порядок не выше $O(\eta^{-1/2})$.

Рассмотрим для уравнений (5.33) краевую задачу

$$\Delta W_3(0) = \Delta W_3(\pi/2) = \Delta \alpha(0) = \Delta \alpha(\pi/2) = 0. \quad (5.34)$$

Определим значения η , W_1 , i , доставляющие такой задаче нетривиальные решения. Вводя комплексную переменную $z = \Delta \alpha + j \Delta \beta$ ($j^2 = -1$), систему (5.33) перепишем в виде одного уравнения

$$\ddot{z} + jp\dot{z} + \eta Nz = 0. \quad (5.35)$$

Выполним замену переменных

$$\tau = \int_0^u \sqrt{N(s)} ds, \quad z = \frac{x}{N^{1/4} \exp(j\bar{p}/2)}, \quad \bar{p} = \int_0^u \sqrt{p(s)} ds.$$

Тогда уравнение (5.35) принимает вид

$$x'' + \eta x = (q_1 + jq_2)x. \quad (5.36)$$

Здесь введены обозначения

$$q_1 = \frac{d^2 \sqrt{N}/du^2}{N^{3/2}} - \frac{3(d\sqrt{N}/du)^2}{N^2} - \frac{p^2}{4N}, \quad q_2 = \frac{\dot{p}}{N}.$$

Уравнение (5.36) решается методом последовательных приближений (см. Приложение IV). Условие существования его нетривиальных решений с учетом преобразованных краевых условий (5.34) можно записать так:

$$\begin{aligned} 4 \sin \left(a_s \sqrt{\eta} + \frac{1}{2} \bar{p}(\pi/2) \right) \sin \left(a_s \sqrt{\eta} - \frac{1}{2} \bar{p}(\pi/2) \right) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \bar{q}_1(\pi/2) \sin(a_s \sqrt{\eta}) = O(\eta^{-1}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Здесь $a_s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{N(s)} ds$, $\bar{q}_1(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} q_1 du$. Решение уравнения (5.37)

имеет вид

$$\eta = \frac{\pi^2 k^2}{a_s^2} \pm \frac{\pi \bar{p}(\pi/2) k}{a_s^2} + \frac{\bar{p}^2(\pi/2)}{4a_s^2} + \frac{\bar{q}_1(\pi/2)}{4a_s^2} + O(k^{-1}). \quad (k - \text{целое}) \quad (5.38)$$

Коэффициенты a_s , $\bar{p}(\pi/2)$, $\bar{q}_1(\pi/2)$ зависят от наклона орбиты, а коэффициент $\bar{p}(\pi/2)$ – еще и от произведения λW_1 .

Те участки кривых ветвления, которые изображены на рис. 5.6 «опирающимися» на ось $i = 0$ сплошными линиями, пересекают ось $i = 0$ в точках R_1 (рис. 5.7).

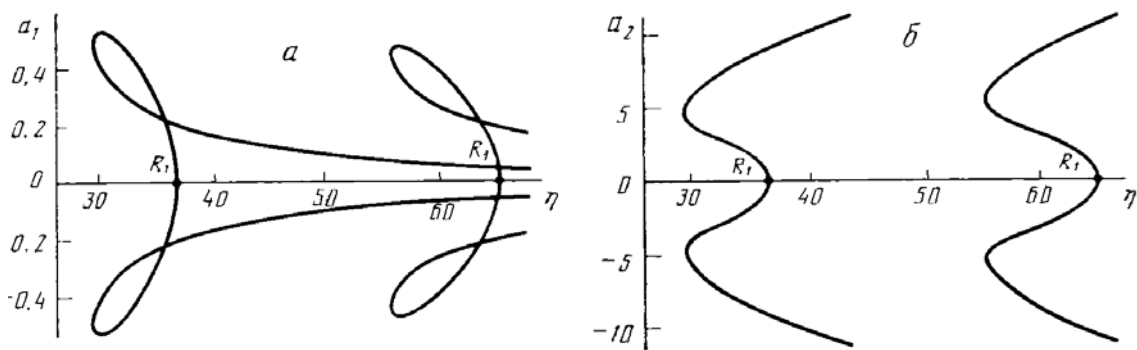


Рис. 5.7. Начальные условия периодических решений на экваториальной орбите

В точках R_1 происходит ветвление тривиального решения, соответствующего совпадению ориентируемой оси спутника с вектором \mathbf{H} на экваториальной орбите, и рождение нетривиального периодического решения с крайвыми условиями (5.27).

С помощью теорем существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром [78] полученные выше результаты для малых отклонений оси ориентации спутника от вектора \mathbf{H} проинтерпретированы в работе [79].

6 Спутник с постоянным магнитом и гистерезисными стержнями

Equation Section (Next) Рассмотрим динамику осесимметричного спутника с пассивной магнитной системой ориентации, состоящей из сильного магнита из магнитотвердого материала и гистерезисных стержней из магнитомягкого материала, в режиме магнитной ориентации. Стержни применяются для демпфирования возмущенных движений спутника. Используя модель Релея для аппроксимации петли гистерезиса, изучим с помощью метода усреднения переходные движения вблизи его номинального движения. В качестве такого движения выберем устойчивые периодические решения, полученные в предыдущем разделе. Определим характер и зависимость амплитуды колебаний оси симметрии спутника относительно вектора напряженности геомагнитного поля от времени и параметров системы ориентации.

6.1 Уравнения движения

Рассмотрим спутник, представляющий собой динамически осесимметричное твердое тело с постоянным магнитом и гистерезисными стержнями. Схематично такой спутник показан на рис. 6.1.

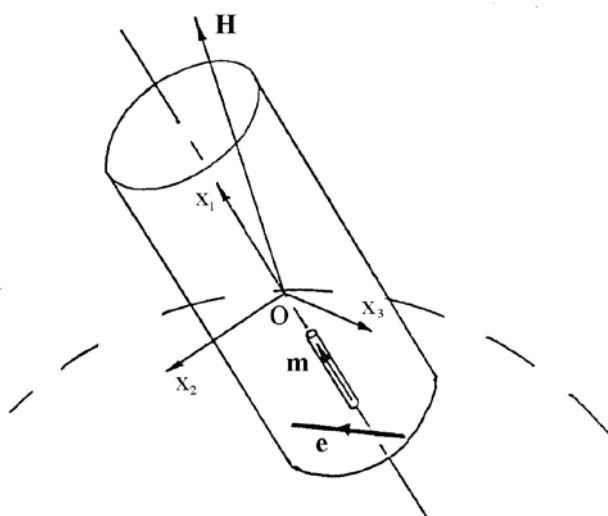


Рис. 6.1. Спутник с пассивной магнитной системой ориентации

Полагаем, что дипольный момент \mathbf{m} постоянного магнита параллелен оси симметрии спутника, гистерезисный стержень с

единичным вектором e расположен перпендикулярно дипольному моменту постоянного магнита. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс будем использовать связанную, орбитальную и магнитную системы координат. Положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OZ_1Z_2Z_3$ зададим с помощью углов α, β, γ (последовательность поворотов 2-3-1). Соответствующая матрица перехода \mathbb{A} имеет вид (1.5). Элементы матрицы \mathbb{H} перехода от системы $OZ_1Z_2Z_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$ (5.1) и проекции вектора $\omega_0\Phi_1, \omega_0\Phi_2, \omega_0\Phi_3$ абсолютной угловой скорости магнитной системы координат на ее оси (5.4), (5.8) определены в разделе 5.1. По-прежнему принята модель прямого диполя для описания геомагнитного поля.

Из внешних моментов, действующих на спутник, будем учитывать гравитационный, магнитные восстанавливающий (создаваемый постоянным магнитом) и демпфирующий (создаваемый гистерезисными стержнями) моменты. В этом случае уравнения движения динамически осесимметричного ($B = C$) спутника относительно центра масс имеют вид

$$\begin{aligned}
 A \frac{d\omega_1}{dt} &= \mu_0 H V_b \bar{W} (e_2 a_{31} - e_3 a_{21}), \\
 B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - B) \omega_3 \omega_1 &= 3\omega_0^2 \xi_3 \xi_1 + \mu_0 H V_b \bar{W} (e_3 a_{11} - e_1 a_{31}) - m H a_{31}, \\
 B \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A) \omega_1 \omega_2 &= 3\omega_0^2 \xi_1 \xi_2 + \mu_0 H V_b \bar{W} (e_1 a_{21} - e_2 a_{11}) + m H a_{21}, \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \bar{\omega}_1 - (\bar{\omega}_2 \cos \gamma - \bar{\omega}_3 \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta, \\
 \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\bar{\omega}_2 \cos \gamma - \bar{\omega}_3 \sin \gamma), \\
 \frac{d\beta}{dt} &= \bar{\omega}_2 \sin \gamma + \bar{\omega}_3 \cos \gamma.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь A и B – осевой и экваториальный моменты инерции; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции вектора абсолютной угловой скорости спутника на оси связанной системы координат; $H = H_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}$; $H_0 = \mu_m / 4\pi r^3$; r – радиус орбиты спутника; V_b – объем гистерезисного стержня, $\bar{W}(\bar{H}_\tau, d\bar{H}_\tau/dt)$ – гистерезисная функция,

описывающая намагниченность стержня и зависящая от материала, отношения длины к диаметру и напряженности внешнего поля, $\bar{H}_\tau = \mathbf{He}$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)_x$ – орт продольной оси стержня в проекциях на оси ССК, m – модуль дипольного момента \mathbf{m} магнита, установленного на спутнике, $\bar{\omega}_j = \omega_j - \omega_0 \sum_{n=1}^3 \Phi_n a_{jn}$ ($j = 1, 2, 3$),

$\xi_j = \sum_{n=1}^3 h_{3n} a_{jn}$ – компоненты единичного вектора оси Ox_3 в системе

координат $Ox_1x_2x_3$. Использована система единиц СИ. Отметим, что в (6.1) не учитывается взаимодействие гистерезисных стержней с полем постоянного магнита¹ и друг с другом. Уравнения записаны с учетом действия одного гистерезисного стержня. При наличии нескольких стержней необходимо просуммировать в правых частях уравнений (6.1) моменты от их взаимодействия с геомагнитным полем. Напомним, что согласно модели Релея (Раздел 3), используемой ниже при проведении аналитических исследований,

$$\bar{W} \left(\bar{H}_\tau, \frac{d\bar{H}_\tau}{dt} \right) = (\mu_{in} + \alpha_R \bar{H}_{\tau m}) \bar{H}_\tau - \frac{\alpha_R}{2} (\bar{H}_{\tau m}^2 - \bar{H}_\tau^2) \text{sign} \frac{d\bar{H}_\tau}{dt},$$

где μ_{in} – начальная магнитная проницаемость стержня, α_R – постоянная Релея, $\bar{H}_{\tau m}$ – амплитуда перемагничивающего поля.

Введем безразмерные параметры и переменные

$$\lambda = \frac{A}{B}, \quad \eta = \frac{mH_0}{B\omega_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{\mu_0 \alpha_R V_b H_0^3}{B\omega_0^2}, \quad \nu = \frac{\mu_{in}}{\alpha_R H_0}, \quad \Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad u = \omega_0 (t - t_0),$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{\omega_0} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \quad \Omega_3 = \frac{1}{\omega_0} (\omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma),$$

$$N = H/H_0, \quad H_\tau = \bar{H}_\tau/H_0,$$

$$\Pi_1 = \Phi_1 \sin \alpha + \Phi_3 \cos \alpha, \quad \Pi_2 = \Phi_1 \cos \alpha - \Phi_3 \sin \alpha,$$

$$\Lambda_1 = h_{31} \sin \alpha + h_{33} \cos \alpha, \quad \Lambda_2 = h_{31} \cos \alpha - h_{33} \sin \alpha,$$

$$z = \gamma + \varphi, \quad \sin \varphi = e_3 / \sqrt{1 - e_1^2}, \quad \cos \varphi = e_2 / \sqrt{1 - e_1^2},$$

$$W(\dot{H}_\tau, H_\tau) = (\nu + H_{\tau m}) H_\tau - \frac{1}{2} (H_{\tau m}^2 - H_\tau^2) \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt}.$$

¹ Один из способов обеспечить это требование – поместить стержень в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{m} и проходящей через центр магнита. Необходимым условием выполнения этого требования является $e_1 = 0$.

Перепишем систему (6.1) в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega}_1 &= \frac{\varepsilon\sqrt{1-e_1^2}}{\lambda} NW (\sin \alpha \cos z + \cos \alpha \sin \beta \sin z), \\
 \dot{\gamma} &= \Omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta - \Pi_2 / \cos \beta, \\
 \dot{\Omega}_2 &= -(\lambda\Omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta - \Pi_2 / \cos \beta)\Omega_3 - \eta N \sin \alpha - \\
 &\quad -3(1-\lambda)\Lambda_1(\Lambda_2 \cos \beta + h_{32} \sin \beta) + \\
 &\quad + \varepsilon NW \left(\sqrt{1-e_1^2} \cos \alpha \cos \beta \sin z - e_1 \sin \alpha \right), \\
 \dot{\Omega}_3 &= (\lambda\Omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta - \Pi_2 / \cos \beta)\Omega_2 - \eta N \cos \alpha \sin \beta + \\
 &\quad + 3(1-\lambda)(\Lambda_2 \cos \beta + h_{32} \sin \beta)(-\Lambda_2 \sin \beta + h_{32} \cos \beta) - \\
 &\quad - \varepsilon NW \left(\sqrt{1-e_1^2} \cos \alpha \cos z + e_1 \sin \beta \right) \cos \alpha, \\
 \dot{\alpha} &= \Omega_2 / \cos \beta + \Pi_2 \operatorname{tg} \beta - \Phi_2, \\
 \dot{\beta} &= \Omega_3 - \Pi_1.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Для применения метода усреднения перейдем к так называемому «быстрому» времени, характерный масштаб которого соизмерим с периодом собственных колебаний спутника.

6.2 Быстрое время. Уравнения движения в стандартном виде

Будем считать, что на спутнике установлен сильный постоянный магнит и определяющим в движении спутника является магнитный восстанавливающий момент из-за взаимодействия дипольного момента постоянного магнита с геомагнитным полем. Это позволяет ввести малый безразмерный параметр $\delta = 1/\sqrt{\eta} \ll 1$ и перейти к быстрому времени $\tau = (u - u_0)/\delta$, где u_0 – значение аргумента широты в начальный момент времени. Собственное осевое вращение считаем достаточно медленным, $\Omega_1 \sim 1$. Перепишем уравнения (6.2) в быстром времени:

$$\begin{aligned}
 \Omega'_1 &= \delta \frac{\varepsilon}{\lambda} \sqrt{1-e_1^2} NW (\sin \alpha \cos z + \cos \alpha \sin \beta \sin z), \\
 \gamma' &= \alpha' \sin \beta + \delta (\Omega_1 - \Phi_2 \sin \beta - \Pi_2 \cos \beta), \\
 \alpha'' \cos \beta &= 2\alpha'\beta' \sin \beta - N \sin \alpha + \delta (-\lambda\Omega_1 + 2\Pi_2 \cos \beta)\beta' + \\
 &\quad + \delta^2 [-3(1-\lambda)\Lambda_1(\Lambda_2 \cos \beta + h_{32} \sin \beta) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon NW \left(\sqrt{1-e_1^2} \cos \alpha \cos \beta \sin z + e_1 \sin \alpha \right) + \\
& + \frac{\partial \Pi_2}{\partial u} \sin \beta - \Phi_2 \cos \beta - \left(\lambda \Omega_1 - \Phi_2 \operatorname{tg} \beta - \frac{\Pi_2}{\cos \beta} \right) \Pi_1 \Big], \quad (6.3) \\
& \beta'' = \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta - N \sin \alpha \sin \beta + \\
& + \delta (\lambda \Omega_1 - 2 \Pi_2 \cos \beta - 2 \Phi_2 \sin \beta) \alpha' \cos \beta + \\
& + \delta^2 \left[3(1-\lambda)(\Lambda_2 \cos \beta + h_{32} \sin \beta)(-\Lambda_2 \sin \beta + h_{32} \cos \beta) - \right. \\
& - \varepsilon NW \left(\sqrt{1-e_1^2} \cos \beta \cos z + e_1 \sin \beta \right) \cos \alpha - \\
& \left. - \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} + (\lambda \Omega_1 - \Phi_2 \operatorname{tg} \beta - \Pi_2 \cos \beta)(\Pi_2 \cos \beta - \Pi_2 \sin \beta) \right].
\end{aligned}$$

При $\delta = 0$ система (6.3) описывает движение твердого тела в случае Лагранжа, допуская три первых интеграла

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= C_1, \\
(\alpha' \cos \beta)^2 + \beta'^2 - N \cos \alpha \cos \beta &= C_2, \\
\alpha' \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \beta' \sin \alpha &= C_3,
\end{aligned}$$

где C_j – постоянные этих интегралов ($j = 1, 2, 3$).

В частном случае решение системы (6.3) имеет вид $\Omega_1 = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, $\alpha = \beta = 0$. Выполним замену переменных $\alpha = \delta \bar{\alpha}$, $\beta = \delta \bar{\beta}$. Сохранив слагаемые при первой степени в разложении по целым неотрицательным степеням параметра δ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\Omega_1' &= 0, \quad \gamma' = \delta (\Omega_1 - \Phi_1), \\
\bar{\alpha}'' + N \bar{\alpha} &= \delta G_1, \quad \bar{\beta}'' + N \bar{\beta} = \delta G_2,
\end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned}
G_1 &= (-\lambda \Omega_1 + 2 \Phi_1) \bar{\beta}' - 3(1-\lambda) h_{31} h_{33} - \dot{\Phi}_2 - (\lambda \Omega_1 - \Phi_1) \Phi_3 + \\
& + \varepsilon NW \sqrt{1-e_1^2} \sin z, \\
G_2 &= -(-\lambda \Omega_1 + 2 \Phi_1) \bar{\alpha}' - 3(1-\lambda) h_{31} h_{32} - \dot{\Phi}_3 - (\lambda \Omega_1 - \Phi_1) \Phi_1 - \\
& - \varepsilon NW \sqrt{1-e_1^2} \cos z, \\
H_r' &= N \left[e_2 (\bar{\alpha}' \sin \gamma - \bar{\beta}' \cos \gamma) + e_3 (\bar{\alpha}' \cos \gamma + \bar{\beta}' \sin \gamma) \right].
\end{aligned}$$

При $\delta = 0$ последние два уравнения из (6.3) допускают решение

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= A_1 \cos \psi_1, & \bar{\alpha}' &= -\rho A_1 \sin \psi_1, \\ \bar{\beta} &= A_2 \cos \psi_2, & \bar{\beta}' &= -\rho A_2 \sin \psi_2,\end{aligned}\tag{6.5}$$

где $\psi_j = \rho \tau + \zeta_j, (j=1,2)$; A_j и ζ_j суть постоянные интегрирования; $\rho = \sqrt{N}$.

Используем формулы (6.5) для перехода от переменных $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}', \bar{\beta}'$ к переменным A_1, A_2, ψ_1, ψ_2 . Разрешая получающиеся в результате преобразований уравнения относительно производных, получаем систему уравнений в стандартном виде для использования метода усреднения Крылова–Боголюбова (тривиальное уравнение для Ω_1 не рассматриваем).

$$\begin{aligned}A_j' &= -\delta(\rho' A_j \sin \psi_j + G_j) \sin \psi_j / \rho, \\ \psi_j' &= \rho - \delta(\rho' \sin \psi_j + G_j / A_j) \cos \psi_j / \rho, \quad (j=1,2) \\ \gamma' &= \delta(\Omega_1 - \Phi_1),\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$H'_\tau = \rho N \sqrt{1 - e_1^2} (-A_1 \sin \psi_1 \sin z + A_2 \sin \psi_2 \cos z).$$

Частоты изменения быстрых переменных ψ_1, ψ_2 в асимптотическом смысле совпадают, равны ρ , и заметим, что ρ не мало. Следуя схеме усреднения Крылова–Боголюбова в резонансном случае, введем переменную θ как разность фаз

$$\theta = \psi_2 - \psi_1.$$

Выразим отсюда ψ_2 и подставим в систему в стандартном виде (6.6). В результате преобразований получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}A_1' &= -\delta(\rho' A_1 \sin^2 \psi_1 + \bar{G}_1 \sin \psi_1) / \rho, \\ A_2' &= -\delta[\rho' A_2 \sin^2(\psi_1 + \theta) + \bar{G}_2 \sin(\psi_1 + \theta)] / \rho, \\ \theta' &= -\delta[\bar{G}_2 \cos(\psi_1 + \theta) / A_2 - \bar{G}_1 \cos \psi_1 / A_1] / \rho, \\ \gamma' &= \delta(\Omega_1 - \Phi_1).\end{aligned}\tag{6.7}$$

$$\psi_1' = \rho - \delta(\rho' \sin \psi_1 + G_1 / A_1) \cos \psi_1 / \rho.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{G}_j &= G_j \big|_{\psi_2=\psi_1+\theta} \quad (j=1,2), \\ H'_\tau &= \rho N \sqrt{1-e_1^2} \Phi \sin(\psi_1 + \psi_1^*), \\ \sin \psi_1^* &= A_2 \cos z \sin \theta / \Phi, \quad \cos \psi_1^* = (-A_1 \sin z + A_2 \sin z \cos \theta) / \Phi, \\ \Phi &= \sqrt{A_1^2 \sin^2 z + A_2^2 \cos^2 z - A_1 A_2 \sin 2z \cos \theta}.\end{aligned}$$

6.3 Усреднение уравнений движения

Применяя метод усреднения Крылова–Боголюбова, адаптированный для уравнений с разрывными правыми частями [69], строим решение системы (6.7) в виде

$$y = \bar{y} + \delta Y(\bar{y}, u_0, \delta),$$

где $y = (\gamma, A_1, A_2, \theta)$ – вектор медленных переменных, $\bar{y} = (\bar{\gamma}, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{\theta})$ – вектор новых переменных, Y – неизвестная вектор-функция. Тогда для новых переменных \bar{y} в первом приближении по малому параметру δ имеем векторное уравнение

$$\bar{y}' = \delta \bar{Y}.$$

Здесь \bar{Y} – вектор-функция правых частей системы (6.7), отнесенных к параметру δ и усредненных по быстрой фазе ψ_1 , $\bar{Y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y d\psi_1$. В дальнейшем черту над новыми медленными переменными будем опускать.

Уравнение $H'_\tau = 0$ имеет с точностью до 2π два корня

$$\psi_1^{(0)} = -\psi_1^*, \quad \psi_1^{(0)} = 2\pi - \psi_1^*,$$

если $N\Phi(1-e_1^2) \neq 0$. В противном случае, который реализуется при $e_1^2 = 1$ или $A_1 = A_2 = 0$, или $\operatorname{tg} z = \pm A_2/A_1$, решением указанного уравнения является любое значение переменной ψ_1 . Выше уже говорилось, что для исключения влияния поля постоянного магнита на демпфирующие свойства гистерезисных стержней последние должны лежать в плоскости, перпендикулярной оси магнита и проходящей через его середину. Это исключает возможность выполнения равенства $e_1^2 = 1$.

Усредняя правые части уравнений (6.7) по ψ_1 , возвращаясь к независимой переменной u и обозначая $\chi = (2\Phi_1 - \lambda\Omega_1)/2$, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\frac{\dot{\rho}A_1}{2\rho} + \chi A_2 \cos \theta - \frac{\varepsilon\delta N^2 \sin z}{2\rho} \left[\nu A_2 \cos z \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \delta N \Phi \left(\frac{4}{3\pi} A_1 \sin z - A_2 \cos z \left(\frac{4}{3\pi} \cos \theta - \sin \theta \right) \right) \right], \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\dot{\rho}A_2}{2\rho} - \chi A_1 \cos \theta - \frac{\varepsilon\delta N^2 \cos z}{2\rho} \left[\nu A_1 \sin z \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \delta N \Phi \left(A_1 \sin z \left(\sin \theta + \frac{4}{3\pi} \cos \theta \right) - \frac{4}{3\pi} A_2 \cos z \right) \right], \\ \dot{\theta} &= - \left\{ \chi \left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) + \frac{\varepsilon\delta N^2}{2\rho} \left[\nu \left(\cos 2z + \sin z \cos z \cos \theta \left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta N \Phi \left(\cos 2z + \sin z \cos z \left(\frac{4}{3\pi} \sin \theta \left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_1}{A_2} \right) + \cos \theta \left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) \right) \right) \right] \right\}, \\ \dot{z} &= \Omega_1 - \Phi_1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Пусть на спутнике установлены два идентичных взаимно ортогональных стержня. Тогда система (6.8) после суммирования в правых частях слагаемых от двух стержней принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\frac{\dot{\rho}A_1}{2\rho} + \chi A_2 \cos \theta - \frac{\bar{\varepsilon}N^3}{2\rho} \left[\frac{4}{3\pi} A_1 (\Phi_{(1)} \sin^2 z + \Phi_{(2)} \cos^2 z) - \right. \\ &\quad \left. - A_2 \sin z \cos z (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}) \left(\frac{4}{3\pi} \cos \theta - \sin \theta \right) \right], \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\dot{\rho}A_2}{2\rho} - \chi A_1 \cos \theta + \\ &\quad + \frac{\bar{\varepsilon}N^3}{2\rho} \left[A_1 \sin z \cos z (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}) \left(\sin \theta + \frac{4}{3\pi} \cos \theta \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3\pi} A_2 (\Phi_{(1)} \cos^2 z + \Phi_{(2)} \sin^2 z) \right], \\ \dot{\theta} &= - \left\{ \chi \left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) + \frac{\bar{\varepsilon}N^3}{2\rho} (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}) [\cos 2z + \right. \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$+ \sin z \cos z \left(\frac{4}{3\pi} \sin \theta \left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_1}{A_2} \right) + \cos \theta \left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) \right) \Bigg] \Bigg\},$$

$$\dot{z} = \Omega_1 - \Phi_1,$$

где

$$\Phi_{(1)} = \sqrt{A_1^2 \sin^2 z + A_2^2 \cos^2 z - A_1 A_2 \sin 2z \cos \theta},$$

$$\Phi_{(2)} = \sqrt{A_1^2 \cos^2 z + A_2^2 \sin^2 z + A_1 A_2 \sin 2z \cos \theta},$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \delta^2.$$

Из системы (6.9) следует, что установка двух идентичных взаимно ортогональных стержней в экваториальной плоскости магнита приводит к взаимному уничтожению слагаемых, пропорциональных ν . Эти слагаемые представляют собой линейно зависящую от напряженности приложенного к стержню поля намагниченность. В уравнениях остаются слагаемые, определяемые нелинейной намагниченностью и смещением кривой намагничения за счет гистерезиса.

6.4 Исследование усредненных уравнений

В случае $\bar{\varepsilon} = 0$ система (6.8) имеет два первых интеграла

$$\rho(A_1^2 + A_2^2) = c_1 \quad 2\rho A_1^2 A_2^2 \sin \theta = c_2. \quad (6.10)$$

Из выражения для c_1 следует, что угол отклонения оси симметрии спутника от \mathbf{H} имеет максимальную амплитуду над экватором, отличающуюся в $\sqrt{2}$ раз от минимальной амплитуды, достигаемой над полюсами.

Разрешая соотношения (6.10) относительно амплитуд и подставляя их в третье уравнение системы (6.8) при $\bar{\varepsilon} = 0$, получаем уравнение

$$\dot{\theta} = - \frac{2\chi \sin \theta \sqrt{c_1^2 \sin^2 \theta - c_2^2}}{c_2},$$

решение которого принимает вид [12]

$$\operatorname{ctg} \theta = \sqrt{p^2 - 1} \sin(s + c_3), \quad (6.11)$$

где $p = c_1/c_2$, $s = 2 \int_0^u \chi du$; а c_3 – постоянная интегрирования.

Перепишем выражения для A_1, A_2 в виде

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{1}{2\rho} \left[c_1 - \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \cos(s + c_3) \right], \\ A_2^2 &= \frac{1}{2\rho} \left[c_1 + \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \cos(s + c_3) \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь $\Phi = \left\{ \left[c_1 + (c_1^2 - c_2^2)^{1/2} \cos(s + c_3 + 2z) \right] / 2\rho \right\}^{1/2}$. Выберем c_1, c_2, c_3

в качестве новых переменных. Используем соотношения (6.11), (6.12) для перехода от переменных A_1, A_2, θ к новым переменным c_1, c_2, c_3 .

В результате преобразований имеем

$$\dot{c}_1 = -\bar{\varepsilon} \frac{4}{3\pi} \frac{N^3}{\rho} c_1, \quad \dot{c}_2 = -\frac{\bar{\varepsilon} c_2}{\rho \Phi}, \quad \dot{c}_3 = \frac{\bar{\varepsilon} c_1 \sin(s + c_3 + 2z)}{\rho \Phi (c_1^2 - c_2^2)^{1/2}}. \quad (6.13)$$

Обратим внимание на то, что уравнение для c_1 отделяется и не содержит быстрой переменной z . Это позволяет в дальнейшем легко выписать решение для c_1 в виде квадратуры.

Рассмотрим случай $\bar{\varepsilon} \ll 1$. Необходимо усреднение правых частей уравнений (6.13) по быстрой переменной z . Первое уравнение не содержит переменной z и поэтому усреднение не требуется. Интегрируя уравнение для c_1 , получаем его решение в виде квадратуры

$$c_1(u) = c_1(u_0) \exp \left(-\frac{4}{3\pi} \bar{\varepsilon} \int_{u_0}^u (1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{5/4} du \right). \quad (6.14)$$

Тогда зависимость усредненного по быстрым колебаниям угла отклонения Θ оси ориентации спутника от вектора \mathbf{H} от аргумента широты u , описывается цепочкой выражений, полученных из (6.10) и (6.14),

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= \delta \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \delta \sqrt{c_1/\rho} = \\ &= \delta \frac{\sqrt{c_1(u_0)}}{(1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{1/8}} \exp \left(-\frac{2}{3\pi} \bar{\varepsilon} \int_{u_0}^u (1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{5/4} du \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

В рамках модели Релея площадь гистерезисной петли S_h выражается через постоянную Релея α_R и амплитуду перемагничивающего поля по формуле $S_h = 16\alpha_R \bar{H}_{m}^3 / 3$. При малых \bar{H}_{m} величина α_R остается постоянной. Поэтому по результатам экспериментов можно определить S_h и вычислить α_R . Коэффициент $\bar{\varepsilon}$, входящий в (6.15), определяется по формуле $\bar{\varepsilon} = \alpha_R V_b H_0^2 / m$. Имея экспериментальные данные по петлям, можно количественно описать переходный процесс, используя эти формулы.

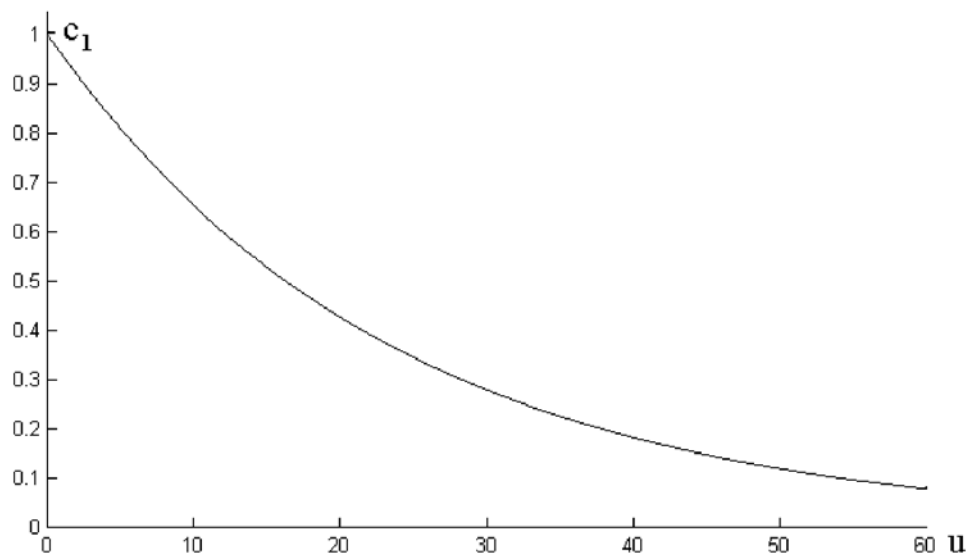


Рис. 6.2. Зависимость c_1 от u при $i = \pi/2$

Интегрирование системы (6.9) усредненных уравнений и вычисление квадратур (6.14), (6.15) стандартными методами не вызывают каких-либо затруднений. Приведем характерный пример вычисления этих квадратур. График изменения c_1 в зависимости от u , для $c_1(0) = 1$, изображен на рис. 6.2. График изменения Θ в зависимости от u приведен на рис. 6.3. Для удобства представления результатов используем величину, отнесенную к δ , и выберем начальные данные $\Theta(0)/\delta = 1$. Орбита полагается полярная. На спутнике установлены два идентичных взаимно ортогональных стержня в экваториальной плоскости постоянного магнита, параметры которых обеспечивают величину безразмерного параметра $\bar{\varepsilon} = 0.1$.

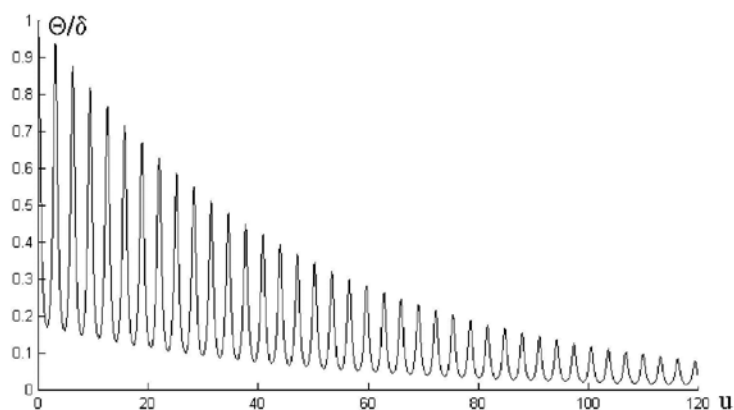


Рис. 6.3. Зависимость угла Θ от u при $i = \pi/2$

Отметим, что результаты, представленные на рис. 6.2 и рис. 6.3, получены в рамках модели Релея.

Результаты, представленные на рис. 6.4, получены аналитически и численно в рамках модели параллелограмма. Для сравнения приведены два графика, дающие представление об амплитуде отклонения оси симметрии спутника от \mathbf{H} на витке. Выбор модели параллелограмма вызван желанием сравнить результаты численных для исходных уравнений и аналитических полученных по асимптотическим формулам расчетов, выполненных для одной и той же модели гистерезиса. Но численные расчеты приходится проводить именно с этой моделью, так как она допускает моделирование произвольных движений спутника, влекущие перемагничивание стержней вдоль нерегулярных петель. Кривая 1, полученная вычислением квадратуры, аналогичной (6.15), но полученной для модели параллелограмма [80], описывает поведение амплитуды $\bar{\Theta} = \delta \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ от времени при $\sin i = 1$, $\delta = 0.17$ и $\bar{\varepsilon} = 0.06$. По сути амплитуда $\bar{\Theta}$ представляет собой огибающую быстрых колебаний оси симметрии спутника с частотой порядка $\sqrt{\eta}$. Ломаная линия 2 в своих узлах описывает поведение дискретной функции

$$\Theta_n = \max_{2\pi(n-1) < u < 2\pi n} \left| \arccos(\cos \alpha(u) \cos \beta(u)) \right|.$$

Это максимальное на витке отклонение оси симметрии от \mathbf{H} ($n = 1, 2, 3, \dots$), полученное интегрированием исходной нелинейной системы уравнений (6.1) с моделью параллелограмма (3.1) с выходом на ограничение $\dot{H}_\tau = 0$. Значения входящих в эту систему параметров выбирались следующими: $\sin i = 1$, $\eta = 36$, $\lambda = 0.2$. Параметры ε , k и

e_1 при наличии двух взаимно ортогональных идентичных гистерезисных стержней доставляют параметру $\bar{\varepsilon}$ значение 0.06. Начальные условия подобраны такими, чтобы начальные амплитуды $\bar{\Theta}$ и Θ_1 были одинаковыми. Знаком * на кривой 1 обозначены максимальные значения $\bar{\Theta}$ на соответствующем витке. Именно их надо сравнивать с узлами ломаной линии. Совпадение результатов можно считать удовлетворительным до того момента, когда ломаная линия 2 становится полой, что объясняется выходом спутника на установившееся движение, когда амплитуда определяется неравномерностью изменения \mathbf{H} , остаточной намагниченностью гистерезисных стержней, неопределяемой моделью параллелограмма, остаточным вращением спутника вокруг оси симметрии.

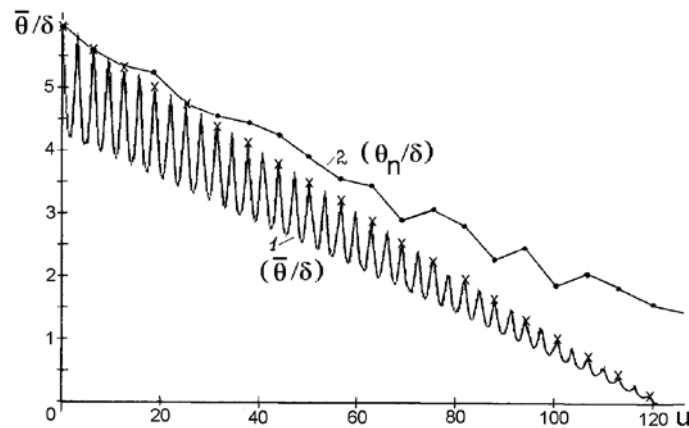


Рис. 6.4. Результаты интегрирования усредненных уравнений (кривая 1) и исходных уравнений (линия 2) с моделью параллелограмма

Экспоненциальное по времени затухание (рис. 6.3) присуще окончанию переходного процесса, когда амплитуда колебаний спутника мала и перемагничивание происходит вблизи нулевого значения перемагничивающего поля. Линейное затухание (рис. 6.4) отражает процесс, происходящий при больших амплитудах колебаний спутника и при его вращении, когда потери энергии за счет гистерезиса пропорциональны амплитуде перемагничивающего поля. Именно на этом этапе проявляется аналог гистерезисного демпфирования сухому трению. Примеры переходных процессов с использованием улучшенной модели гистерезиса будут показаны при изложении результатов моделирования движения спутников *Munin* и *ТНС-0*.

7 Спутник со сферическим магнитным демпфером

Equation Section (Next) Еще один пассивный исполнительный орган для обеспечения магнитной ориентации спутника является сферический магнитный демпфер. Он состоит из двух концентрических сфер – внутренней сплошной, обладающей достаточно сильным постоянным дипольным магнитным полем, и внешней полой, изготовленной из хорошо проводящего электрический ток немагнитного материала. Внешняя сфера крепится на конце гравитационной штанги, обеспечивающей вместе с демпфером перераспределение массы спутника для достижения требуемого для создания необходимого восстанавливающего гравитационного момента тензора инерции. При относительном вращении внутренней и внешней сфер в последней наводятся вихревые токи, при протекании которых по замкнутым проводникам (внешняя сфера – проводящая) происходит нагревание последних и, тем самым, рассеяние кинетической энергии относительного вращения сфер в тепло. Иногда зазор между сферами заполняли вязкой жидкостью, поэтому иное название внутренней сферы – поплавок. Детальный обзор исследований по динамике спутников с гравитационной системой ориентации, включая и технические приложения сферического магнитного демпфера, дан в [45]. В качестве примера на рис. 7.1 изображен малый спутник *Гонец* с магнитным демпфером и приведенной в рабочее состояние гравитационной штангой.

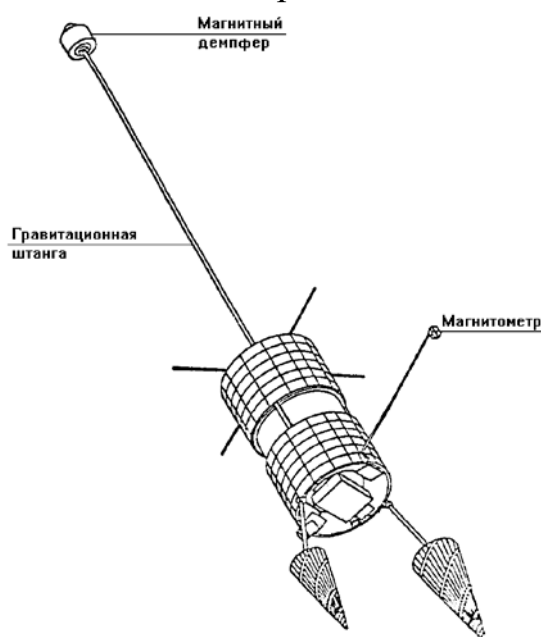


Рис. 7.1. Спутник *Гонец* с гравитационной системой ориентации

Типовое использование демпфера – обеспечение демпфирования возмущенного движения спутника в режиме пассивной гравитационной ориентации. Однако режим гравитационной ориентации, будь то трехосная ориентация в орбитальной системе координат или одноосная ориентация осесимметричного спутника вдоль местной вертикали, характеризуется неоднозначным расположением спутника вдоль градиента гравитационного поля. Существует несколько способов обеспечения нужного расположения спутника относительно направления надир-зенит: установка механизма управляемого выдвижения гравитационной штанги, установка управляемого тангажного маховика, ось вращения которого направлена вдоль нормали к плоскости орбиты, в конце концов, установка пары реактивных двигателей, создающих момент вокруг нормали к плоскости орбиты. Все эти способы требуют систему определения углового положения и закладки на борт алгоритмов управления. Поскольку в состав системы ориентации уже входит сферический магнитный демпфер, то можно попытаться использовать наличие сильного магнита в составе демпфера для обеспечения однозначности ориентации. Действительно, если обеспечить ориентацию оси выдвижения гравитационной штанги по вектору индукции геомагнитного поля, то выбирая подходящим образом геомагнитный полюс, в окрестности которого этот вектор почти вертикален, можно гарантировать выдвижение штанги в нужном направлении в пространстве (вверх или вниз) и в дальнейшем ориентацию спутника нужной стороной к Земле. Степень взаимодействия сфер характеризуется коэффициентом демпфирования k_f . При правильном выборе соотношения между моментами инерции спутника, дипольным магнитным моментом внутренней сферы и коэффициентом демпфирования может быть реализовано движение, при котором магнитный диполь внутренней сферы отслеживает вектор индукции геомагнитного поля, а сам спутник ориентируется относительно орбитальной системы координат. Это соответствует режиму гравитационной ориентации. Если же коэффициент демпфирования достаточно велик, а гравитационный момент, действующий на спутник, мал, то возможен режим движения, когда поплавков увлечен геомагнитным полем, а спутник увлечен поплавком. В этом случае говорят о магнитной ориентации спутника.

7.1 Исследование движения спутника в режиме магнитной ориентации

Если на внутренней сфере демпфера установлен достаточно сильный магнит, то определяющим в движении спутника является момент трения, действующий со стороны поплавка. Спутник (со штангой, находящейся в транспортном положении) увлекается во вращение поплавком демпфера. Поплавок в силу превалирования действующего на него магнитного восстанавливающего момента над моментом сил трения ориентируется по вектору \mathbf{H} . По истечении времени переходного процесса среднее значение угловой скорости спутника относительно поплавка становится близким к нулю. При правильном выборе параметров системы ориентации нулевое значение угловой скорости является асимптотически устойчивым, а относительное угловое положение безразличным, то есть он может занять произвольное угловое положение. Факт увлечения спутника во вращение вместе с \mathbf{H} поплавком демпфера можно с успехом использовать для обеспечения его магнитной ориентации. Остается лишь обеспечить однозначное асимптотически устойчивое угловое положение спутника относительно поплавка. С этой целью поплавок помещается в связанное со спутником магнитное поле, например, вблизи установленной на спутнике катушки с током. Поле должно быть сформировано так, чтобы минимум потенциальной энергии поплавка в нем (или минимум потенциальной энергии дипольного момента катушки в поле магнита поплавка) достигался при нужном взаимном угловом положении поплавка и спутника. Такое устройство иногда называют *магнитной пружинкой* или *токовой катушкой ориентации (ТКО)*. Схематично сферический магнитный демпфер и ТКО изображены на рис. 7.2. Описанное устройство было предложено в [81].

Используем последовательность углов α, β, γ , которые задают ориентацию системы координат, связанной со спутником, относительно магнитной системы координат (см. раздел 5.1). Элементы $a_{jn} = \cos(Z_j, x_n)$ соответствующей матрицы перехода \mathbb{A} имеют вид (1.5).

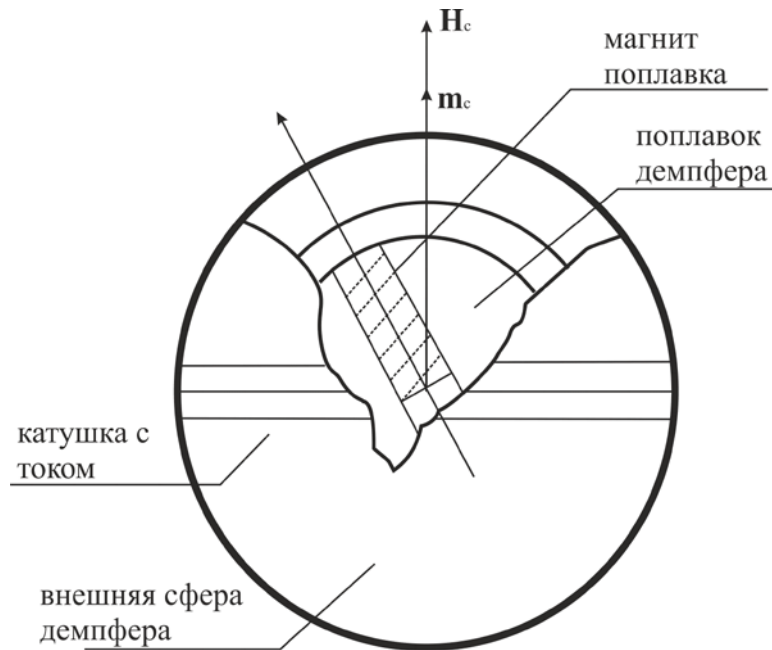


Рис. 7.2. Демпфер и ТКО (гравитационная штанга сложена)

Ориентацию дипольного момента магнита, установленного на поплавке демпфера, относительно магнитной системы координат определим с помощью углов α_1, β_1 , аналогичных углам α, β . Моменты инерции поплавка считаем пренебрежимо малыми по сравнению с моментами инерции спутника, центр масс поплавка – неподвижным относительно спутника. Поплавок помещен в связанное со спутником магнитное поле катушки, которое считаем дипольным с моментом m_c . Напряженность поля катушки в ее центре, совпадающем с центром поплавка, равна H_c . Векторы H_c и m_c параллельны оси Ox_1 спутника, она же является ориентируемой осью. Взаимодействие спутника и поплавка реализуется через момент сил вязкого трения и восстанавливающий момент от взаимодействия магнита поплавка с H_c .

В векторном виде динамические уравнения движения спутника и поплавка демпфера под действием магнитного, гравитационного и момента трения записываются так:

$$\frac{d\mathbf{K}_s}{dt} = \mathbf{M}_g - \mathbf{D} + \mathbf{M}_c, \quad \frac{d\mathbf{K}_d}{dt} = \mathbf{M}_d + \mathbf{D}. \quad (7.1)$$

Здесь $\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_d$ – кинетические моменты спутника и поплавка демпфера соответственно (при вычислении моментов инерции спутника поплавок считается неподвижной относительно спутника материальной

точкой); \mathbf{M}_g – гравитационный момент, действующий на спутник; $\mathbf{D} = -k_v \boldsymbol{\Omega}_r + k_f \mathbf{e}_d \times (\mathbf{e}_d \times \boldsymbol{\Omega}_r) + \mathbf{m}_d \times \mathbf{H}_c$ – момент, действующий на поплавок со стороны спутника и представляющий собой сумму момента сил вязкого трения (если промежуток между поплавком и внешней сферой заполнен вязкой жидкостью и происходит вращение поплавка относительно спутника со скоростью $\boldsymbol{\Omega}_r$ с коэффициентом трения k_v); момента, вызванного наведенными во внешней сфере демпфера вихревыми токами Фуко при их взаимном вращении с коэффициентом пропорциональности k_f ; восстанавливающего момента от взаимодействия магнита поплавок с полем токовой катушки, установленной на корпусе спутника; $\mathbf{M}_c = \mathbf{m}_c \times \mathbf{H}$ – момент, действующий на катушку со стороны геомагнитного поля; $\mathbf{M}_d = \mathbf{m}_d \times \mathbf{H}$ – момент, действующий на поплавок со стороны геомагнитного поля. Полагая, что жидкости в зазоре поплавок нет, а моменты инерции поплавка значительно меньше моментов инерции спутника, перейдем к приближению безынерционного поплавка. Это приближение справедливо после истечения времени переходного процесса после разарретирования (освобождения) поплавка на начальном этапе функционирования системы ориентации. После окончания этого переходного процесса движение поплавка фактически определяется динамическим равновесием магнитного восстанавливающего момента и момента от взаимодействия поплавка со спутником. Формально для перехода к указанному приближению полагаем левую часть второго уравнения равной нулю. Тогда получим (см. [82] и обозначения раздела 5.1) уравнения движения системы спутник-поплавок в безразмерных переменных и параметрах в виде

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= \mu(\Omega_2 \Omega_3 - 3b_{32} b_{33}) - \mu_2 \frac{1 + \lambda \mu}{\lambda} N(a_{31} \sin \beta_1 + a_{21} \sin \alpha_1 \cos \beta_1), \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} (\Omega_3 \Omega_1 - 3b_{33} b_{31}) - \mu_1 N b_{13} - \mu_2 N (a_{23} \sin \beta_1 + a_{22} \sin \alpha_1 \cos \beta_1), \\ \dot{\Omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda \mu) (\Omega_1 \Omega_2 - 3b_{31} b_{32}) + \mu_1 (1 + \lambda \mu) N a_{12} - \\ &\quad - \mu_2 (1 + \lambda \mu) N (a_{33} \sin \beta_1 + a_{32} \sin \alpha_1 \cos \beta_1), \\ \dot{\gamma} &= \Omega_1 - (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\cos \beta} (\Phi_1 \cos \alpha - \Phi_3 \sin \alpha),\end{aligned}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) + (\Phi_1 \cos \alpha - \Phi_3 \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \Phi_2, \quad (7.2)$$

$$\dot{\beta} = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma - \Phi_2 \sin \alpha - \Phi_3 \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 = & -\frac{1}{\cos \beta_1} \left[\mu_3 N \sin \alpha_1 - \mu_4 (a_{11} \sin \alpha_1 + a_{13} \cos \alpha_1) + \right. \\ & \left. + \left(\sum_j \Omega_j a_{j1} - \Phi_1 \right) \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \right. \\ & \left. - \left(\sum_j \Omega_j a_{j2} - \Phi_2 \right) \cos \beta_1 - \left(\sum_j \Omega_j a_{j3} - \Phi_3 \right) \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 = & -\mu_3 N \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + \mu_4 \left[a_{12} \cos \beta_1 - (a_{11} \cos \alpha_1 - a_{13} \sin \alpha_1) \sin \beta_1 \right] + \\ & + \left(\sum_j \Omega_j a_{j1} - \Phi_1 \right) \sin \alpha_1 + \left(\sum_j \Omega_j a_{j3} - \Phi_3 \right) \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu = \frac{B-C}{A}, \quad \lambda = \frac{A}{C}, \quad \mu_1 = \frac{m_c H_0}{B \omega_0^2}, \\ \mu_2 = \frac{m_d H_0}{B \omega_0^2}, \quad \mu_3 = \frac{m_d H_0}{k_f \omega_0}, \quad \mu_4 = \frac{m_d H_c}{k_f \omega_0}, \end{aligned}$$

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – отнесенные к ω_0 проекции вектора абсолютной угловой скорости спутника на оси системы координат $Ox_1x_2x_3$. В этом разделе A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника со сложенной гравитационной штангой. Правые части уравнений (7.2) суть π -периодические функции u и не меняют своего вида при следующих заменах переменных:

$$\begin{aligned} i \rightarrow -i, \quad \Omega_1 \rightarrow \Omega_1, \quad \Omega_2 \rightarrow -\Omega_2, \quad \Omega_3 \rightarrow -\Omega_3, \\ \gamma \rightarrow \gamma, \quad \alpha \rightarrow -\alpha, \quad \beta \rightarrow -\beta, \quad \alpha_1 \rightarrow -\alpha_1, \quad \beta_1 \rightarrow -\beta_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} i \rightarrow \pi - i, \quad \Omega_1 \rightarrow -\Omega_1, \quad \Omega_2 \rightarrow \Omega_2, \quad \Omega_3 \rightarrow -\Omega_3, \\ \gamma \rightarrow -\gamma, \quad \alpha \rightarrow \alpha, \quad \beta \rightarrow -\beta, \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_1, \quad \beta_1 \rightarrow -\beta_1. \end{aligned}$$

7.2 Движение спутника в плоскости полярной орбиты

Система уравнений (7.2) допускает частное решение

$$\Omega_1 = \Omega_3 = \gamma = \beta = \beta_1 = 0,$$

соответствующее движению спутника и поплавок демпфера в плоскости полярной орбиты, а переменные $\Omega_2, \alpha, \alpha_1$ при этом удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\Omega}_2 = 3 \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (a \cos \alpha - b \sin \alpha) (a \sin \alpha + b \cos \alpha) - \mu_1 N_1 \sin \alpha - \mu_2 N_1 \sin \alpha_1,$$

$$\dot{\alpha} = \Omega_2 - 3 \frac{1+\sin^2 u}{N_1^2}, \quad (7.3)$$

$$\dot{\alpha}_1 = -\mu_3 N_1 \sin \alpha_1 + \mu_4 \sin(\alpha - \alpha_1) + \Omega_2 - 3 \frac{1+\sin^2 u}{N_1^2},$$

где $a = \cos u / N_1$, $b = \sin u / N_1$, $N_1 = \sqrt{1 + 3 \sin^2 u}$.

Быстрые вращения спутника исследовались в [83]. С помощью асимптотических методов было показано, что в первом приближении магнитная пружина не влияет на характер переходного процесса. Поплавок демпфера увлекается во вращение спутником, совершая в зависимости от знака μ_4 малые колебания в окрестности одного из положений равновесия $\alpha - \alpha_1 = 0$ или $\alpha - \alpha_1 = \pi$. Проведенный анализ показывает, что использование магнитной пружины в процессе гашения быстрых вращений спутника целесообразно лишь при $\mu_4 \leq \mu_3$. Даже в оптимальном случае ($\mu_4 \approx \mu_3$) пружина не дает ощутимого сокращения времени переходного процесса. Вместе с тем неудачный выбор значения μ_4 ($\mu_4 \gg \mu_3$) приводит к существенному увеличению этого времени.

Рассмотрим плоское движение в предположении, что на поплавке установлен сильный магнит и тогда выполняются неравенства $\mu_2, \mu_3 \gg 1$, но $\mu_4 \sim 1$. Эти неравенства означают, что определяющим в движении спутника и поплавок является восстанавливающий момент от взаимодействия магнита поплавка с геомагнитным полем, то есть $H_c \ll H_0$. Пренебрегая в этом случае взаимодействием катушки с геомагнитным полем, полагаем $\mu_1 = 0$, а именно, в выполнении этого предположения и состоит преимущество использования описываемой системы (иначе необходимо было бы устанавливать сильную токовую катушку, а не использовать сильный магнит, установленный на поплавке), строим формальное решение системы (7.3) в виде рядов по степеням параметра μ_3^{-1} . Для определения искомых коэффициентов в рядах приравняем члены

при одинаковых степенях этого параметра. Для определения коэффициентов при нулевой и первой степени параметра получаем уравнения

$$\sin \alpha_1^{(0)} = 0, \quad \alpha^{(0)} = \Omega_{2(0)} - 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2}, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{2(0)} = & 3 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} (a \cos \alpha^{(0)} - b \sin \alpha^{(0)}) \times \\ & \times (a \sin \alpha^{(0)} + b \cos \alpha^{(0)}) - k_d N_1 \alpha_1^{(1)} \cos \alpha_1^{(0)}, \\ \dot{\alpha}_1^{(0)} = & -N_1 \alpha_1^{(1)} \cos \alpha_1^{(0)} + \mu_4 \sin(\alpha^{(0)} - \alpha_1^{(0)}) + \\ & + \Omega_{2(0)} - 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

В первом уравнении в (7.5) уже учтено первое равенство из (7.4), в результате чего слагаемое $\mu_2 N_1 \sin \alpha_1^{(0)}$ обращается в нуль. Так как по предположению μ_2 и μ_3 имеют один порядок из-за сильного магнита, установленного на поплавке, то последнее слагаемое в первом уравнении из (7.5) приобретает указанный вид и попадает в члены нулевого порядка по μ_3^{-1} . Введено обозначение для безразмерного коэффициента демпфирования $k_d = k_f / B \omega_0$.

Из первого уравнения (7.4) следует

$$\alpha_1^{(0)} = \pi k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.6)$$

Используя третье уравнение из (7.3), запишем уравнения в вариациях для полученного решения:

$$\Delta \dot{\alpha}_1 = \left[(-1)^{k+1} \mu_3 N_1 + O(1) \right] \Delta \alpha.$$

Отбрасывая члены порядка $O(1)$ по μ_3 , имеем решение этого уравнения

$$\Delta \alpha_1 = c_0 \exp \left[(-1)^{k+1} \mu_3 \int_0^u N_1(\tau) d\tau \right], \quad c_0 = const.$$

Так как $\int_0^u N_1(\tau) d\tau > 0$ при $u > 0$, то решение (7.6) устойчиво (неустойчиво), если k четное (нечетное). Далее считаем k четным. Тогда из второго и третьего уравнений системы (7.5) с учетом первого уравнения, опуская нулевые индексы у переменных, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (a \cos \alpha - b \sin \alpha)(a \sin \alpha + b \cos \alpha) - \\ &\quad - k_d \left(\mu_4 \sin \alpha + \Omega_2 - 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2} \right), \\ \dot{\alpha} &= \Omega_2 - 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2}.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Функция $\alpha_1^{(1)}$ определяется по второй формуле из (7.5), если принять во внимание, что $\dot{\alpha}_1^{(0)} = 0$ согласно первому уравнению из (7.4),

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{N_1} \left(\mu_4 \sin \alpha^{(0)} + \Omega_{2(0)} - 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2} \right).$$

Далее рассмотрим систему (7.7). При $\mu_4 = 0$ (катушка выключена) и $k_d \gg 1$ система (7.7) была исследована в [82,84]. Если коэффициент k_d достаточно велик, то система (7.7) допускает четыре π -периодических решения, два из которых устойчивы, два – нет. Эти решения соответствуют отслеживанию вектора \mathbf{H} одной из двух главных осей инерции, лежащих в плоскости орбиты. В [84] показано, что при $k_d > 1.5$ существуют только такие решения. Пару устойчивых решений можно использовать в качестве номинальных движений спутника в режиме магнитной ориентации. Однако указанный способ ориентации спутника по вектору \mathbf{H} имеет существенный недостаток. При $\mu_4 = 0$ система (7.7) инвариантна по отношению к замене

$$\alpha \rightarrow \alpha + \pi.\tag{7.8}$$

Поэтому после окончания переходного процесса спутник может оказаться ориентирован как параллельно, так и антипараллельно вектору \mathbf{H} . Если же параметр $\mu_4 \neq 0$, то выбором его знака одно из положений равновесия можно сделать асимптотически устойчивым, а другое – неустойчивым и тем самым обеспечить однозначную ориентацию по вектору \mathbf{H} .

Пусть выполняется неравенство $k_d \gg 1$, тогда существуют, как было указано выше, лишь колебательные относительно \mathbf{H} π -периодические движения спутника. Рассмотрим два случая.

Токовая катушка выключена ($\mu_4 = 0$).

Формальное решение системы (7.7) ищем в виде рядов по степеням параметра k_d^{-1}

$$\Omega_2 = \Omega_2^{(0)} + k_d^{-1}\Omega_2^{(1)} + \dots, \quad \alpha = \alpha_{(0)} + k_d^{-1}\alpha_{(1)} + \dots, \quad (7.9)$$

где $\Omega_2^{(k)}$, $\alpha_{(k)}$ ($k=0,1,\dots$) – искомые функции u . Для определения получаем цепочку систем уравнений, первые элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{(0)} &= 0, \\ \dot{\alpha}_{(0)} &= \Omega_2^{(0)} - 3\frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2}, \\ \dot{\Omega}_2^{(0)} &= 3\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} (a \cos \alpha_{(0)} - b \sin \alpha_{(0)}) (a \sin \alpha_{(0)} + b \cos \alpha_{(0)}) - \dot{\alpha}_{(1)}, \\ \dot{\alpha}_{(1)} &= \Omega_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Решаем выписанную часть цепочки:

$$\begin{aligned} \alpha_{(0)} &= \alpha_{(0)}^{(0)}, \quad \Omega_2^{(0)} = 3\frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2}, \\ \alpha_{(1)} &= 3\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} \int_0^u \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2\alpha_{(0)} + ab \cos 2\alpha_{(0)} \right) du - \Omega_2^{(0)} + \alpha_{(1)}^{(0)}, \quad (7.10) \\ \Omega_2^{(1)} &= 3\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2\alpha_{(0)} + ab \cos 2\alpha_{(0)} \right) - \Omega_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_{(0)}^{(0)}$, $\alpha_{(1)}^{(0)}$ – постоянные интегрирования. Величину $\alpha_{(0)}$ получаем из условия π -периодичности функции $\alpha_{(1)}$:

$$\alpha_{(0)} = \pi n / 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.11)$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)} &= (-1)^n \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} \ln N_1^2 - 3\frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2} + \alpha_{(1)}^{(0)}, \\ \Omega_2^{(1)} &= 3(-1)^n \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} ab + \frac{6 \sin 2u}{N_1^4}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Величина $\alpha_{(1)}^{(0)}$ находится из условия π -периодичности функции $\alpha_{(2)}(u)$. Таким образом получаем решение системы (7.7) в виде формальных рядов с периодическими по u коэффициентами.

Исследуем устойчивость решения (7.9), первые члены которого задаются выражениями (7.10) с учетом (7.11) и (7.12). Уравнение в вариациях для исследуемого решения запишем в виде

$$\Delta\ddot{\alpha} + k_d\Delta\dot{\alpha} - p\Delta\alpha = 0, \quad (7.13)$$

где

$$p = 3\frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} \left[(-1)^n (a^2 - b^2) + O\left(\frac{1}{k_d}\right) \right].$$

Пусть ν – характеристический показатель этого уравнения и оно допускает нетривиальное решение

$$\Delta\alpha = x(u)\exp(\nu u), \quad x(u + \pi) = x(u).$$

Выполним в уравнении в вариациях эту замену и определим ν из условия существования π -периодического решения полученного в результате такой замены уравнения

$$\ddot{x} + (2\nu + k_d)\dot{x} + (\nu^2 + k_d\nu - p) = 0. \quad (7.14)$$

Показатель ν и решение x ищем в виде рядов по степеням параметра k_d^{-1}

$$x = x_0 + k_d^{-1}x_1 + \dots, \quad \nu = k_d\nu_{-1} + \nu_0 + k_d^{-1}\nu_1 + \dots \quad (7.15)$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях k_d^{-1} , после подстановки этих рядов в уравнение (7.14) получаем цепочку уравнений. Устойчивость определяется первым ненулевым коэффициентом в разложении показателя ν . Уравнение (7.14) имеет два линейно-независимых решения. Для одного из них – первый ненулевой коэффициент в разложении ν есть $\nu_{-1} = -1$, для другого –

$$\nu_{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(\tau) d\tau = (-1)^{n+1} \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}.$$

Поэтому условие устойчивости решения линейного уравнения (7.13) сводится к неравенству

$$(-1)^n (1-\lambda) > 0,$$

которое означает следующее. Спутник устойчиво отслеживает вектор **H** той из двух лежащих в плоскости орбиты осей, которая соответствует меньшему моменту инерции. Так реализуется магнитная ориентация спутника, но не обеспечивается ее однозначность. Рассмотрим, как, используя простой и надежный способ, о котором говорилось выше, обеспечить однозначность.

Токовая катушка включена ($\mu_4 \neq 0$).

В этом случае система (7.7) не инварианта к замене (7.8). Ее решение при $k_d \gg 1$ опять ищем в виде рядов (7.9). Для определения коэффициентов этих рядов получаем цепочку систем, первые элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{(0)} + \mu_4 \sin \alpha_{(0)} &= 0, & \dot{\alpha}_{(0)} &= \Omega_2^{(0)} - 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2}, \\ \dot{\alpha}_{(1)} + \mu_4 \alpha_{(1)} \sin \alpha_{(0)} &= \\ &= 3 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} (a \cos \alpha_{(0)} - b \sin \alpha_{(0)}) (a \sin \alpha_{(0)} + b \cos \alpha_{(0)}) - \dot{\Omega}_2^{(0)}, \\ \dot{\alpha}_{(1)} &= \Omega_2^{(1)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Общее решение первого уравнения записывается следующим образом:

$$\alpha_{(0)} = 2 \operatorname{arctg} [c_0 \exp(-\mu_4 u)], \quad c_0 = \text{const}.$$

Его стационарное решение –

$$\alpha_{(0)} = \pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.17)$$

Тогда из второго уравнения (7.16) следует

$$\Omega_2^{(0)} = 3 \frac{1 + \sin^2 u}{N_1^2},$$

и для определения $\alpha_{(1)}$ получаем уравнение

$$\dot{\alpha}_{(1)} + (-1)^m \mu_4 \alpha_{(1)} = 3 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} \frac{\sin 2u}{N_1^2} + \frac{6 \sin 2u}{N_1^4}. \quad (7.18)$$

Используя разложение функций, входящих в правую часть этого уравнения, в ряды Фурье, запишем его вынужденное решение

$$\alpha_{(1)} = 12 \sum_{s=1}^{\infty} \left(s + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} \right) \frac{1}{3^{s+1} (\mu_4^s + 4s^2)} \left[(-1)^{m+1} \mu_4 \sin 2su - 2s \cos 2su \right].$$

Из четвертого уравнения (7.16) имеем

$$\Omega_2^{(1)} = 24 \sum_{s=1}^{\infty} \left(s + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} \right) \frac{1}{3^{s+1} (\mu_4^s + 4s^2)} \left[(-1)^{m+1} \mu_4 \cos 2su - 2s \sin 2su \right].$$

Уравнение в вариациях для решения (7.17) имеет вид (7.13), где

$$p = 3 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} (a^2 - b^2) + (-1)^m \mu_4 + O\left(\frac{1}{k_d}\right).$$

Тогда интересующий нас коэффициент ν_{-1} в разложении ν по степеням k_d^{-1} можно записать следующим образом:

$$\nu_{-1} = - \left[\frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} + (-1)^m \mu_4 \right].$$

Условие устойчивости решения (7.17) сводится к неравенству

$$1 - \lambda + (-1)^n \mu_4 (1 + \lambda\mu) > 0, \quad (7.19)$$

где n четное (нечетное) соответствует отслеживанию вектора \mathbf{H} осью Ox_1 ($-Ox_1$) спутника.

Если выполнено неравенство $\mu_4 > (1-\lambda)/(1+\lambda\mu)$ ($\mu_4 < (1-\lambda)/(1+\lambda\mu)$), то ось Ox_1 ($-Ox_1$) спутника отслеживает вектор \mathbf{H} с точностью $O(1/k_d)$ и такой режим движения устойчивый.

Для комбинации параметров $(1-\lambda)/(1+\lambda\mu)$ справедливы неравенства $-1 \leq (1-\lambda)/(1+\lambda\mu) \leq 1$. Области устойчивости решения (7.17) в плоскости $((1-\lambda)/(1+\lambda\mu), \mu_4)$ обозначены вертикальной штриховкой (m – четное) и горизонтальной штриховкой (m – нечетное) на рис. 7.3.

Неравенство (7.19) дает условие устойчивости выбранного положения спутника относительно \mathbf{H} , но не определяет и, тем более, не дает возможности минимизировать время выхода спутника на расчетный режим движения. Например, если $|\mu_4|$ велико, то спутник с демпфером и пружиной подобен спутнику с фиксированным в его теле постоянным магнитом. Движения такого спутника уже подробно исследовались ранее (раздел 5). В этом случае нужное нам решение устойчиво, его амплитуда мала, но время выхода на режим может оказаться непомерно большим, ибо практически нет относительного движения поплавка и корпуса демпфера и, следовательно, энергия относительного движения практически не рассеивается.

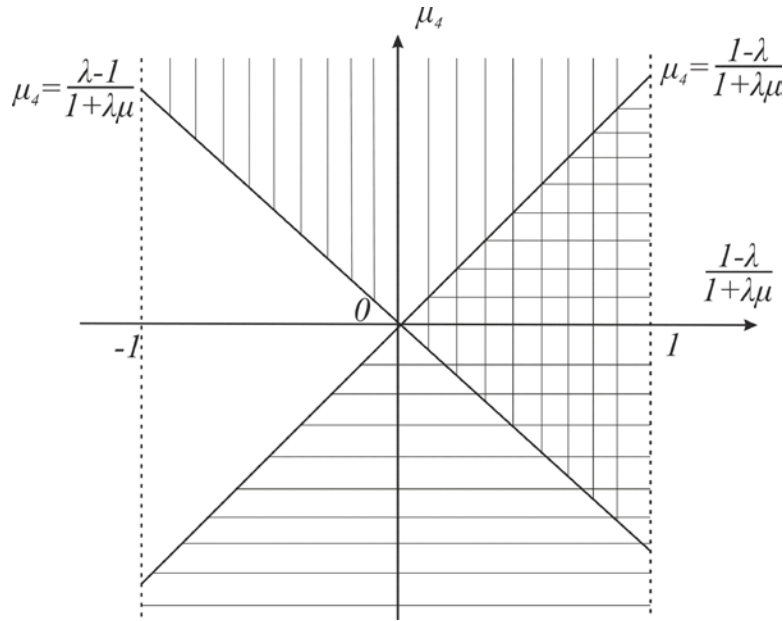


Рис. 7.3. Области устойчивости решения (7.17)

7.3 Численное исследование движений спутника с магнитной пружиной в плоскости полярной орбиты

Содержательные результаты, позволяющие оценить продолжительность переходного процесса, можно получить построением периодических движений. По степени устойчивости этих решений можно судить о продолжительности, а по амплитуде колебаний относительно \mathbf{H} – о возможности использования этих решений в качестве номинальных движений спутника. Если орбита близка к полярной, то может оказаться достаточным исследовать плоские периодические движения, естественно с определением степени устойчивости по отношению как к плоским, так и пространственным возмущениям.

Вычисление π -периодических решений системы (7.3) эквивалентно ее решению с краевыми условиями

$$\Omega_2(0) = \Omega_2(\pi), \quad \alpha(0) = \alpha(\pi), \quad \alpha_1(0) = \alpha_1(\pi). \quad (7.20)$$

Пусть $\Omega_2(u, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi})$, $\alpha(u, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi})$, $\alpha_1(u, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi})$ суть решение системы (7.3) с начальными условиями $\Omega_2(0, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) = a_1$, $\alpha(0, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) = a_2$, $\alpha_1(0, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) = a_3$, где \mathbf{a} – вектор начальных условий с компонентами a_1, a_2, a_3 и $\boldsymbol{\chi}$ – вектор параметров с компонентами k_d, μ_4, λ, μ . Тогда краевую задачу (7.3), (7.20) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) &\equiv \Omega_2(\pi, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) - \Omega_2(0, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) = 0, \\
 g_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) &\equiv \alpha(\pi, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) - \alpha(0, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) = 0, \\
 g_3(\mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) &\equiv \alpha_1(\pi, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) - \alpha_1(0, \mathbf{a}, \boldsymbol{\chi}) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

При заданных значениях векторного параметра $\boldsymbol{\chi}$ эти уравнения образуют замкнутую систему относительно неизвестного векторного параметра \mathbf{a} . В тех случаях, когда имелось хорошее первое приближение, указанная система уравнений решалась методом Ньютона. Для вычисления функций g_k , $\partial g_k / \partial a_k$ ($k = 1, 2, 3$), используемых в методе Ньютона, на отрезке $0 \leq u \leq \pi$ выполняется интегрирование уравнений (7.3) и соответствующих им уравнений в вариациях с начальными условиями, задаваемыми единичной матрицей. Там, где хорошего первого приближения не было, использовался метод продолжения по параметру (Приложение IV), согласно которому система (7.21) рассматривается как система уравнений, задающих кривую в пространстве $R^4(\mathbf{a}, \chi_j)$ при фиксированных компонентах вектора $\boldsymbol{\chi}$, отличных от χ_j .

При $\mu_4 = 0$ (магнитная пружина выключена) для нескольких фиксированных значений параметра μ_3 и $\lambda = 0.2$, $\mu = 0.5$ решения краевой задачи (7.3), (7.20) вычислялись на отрезке $0 \leq \mu_2 \leq 80$. Результаты расчетов приведены на рис. 7.4.

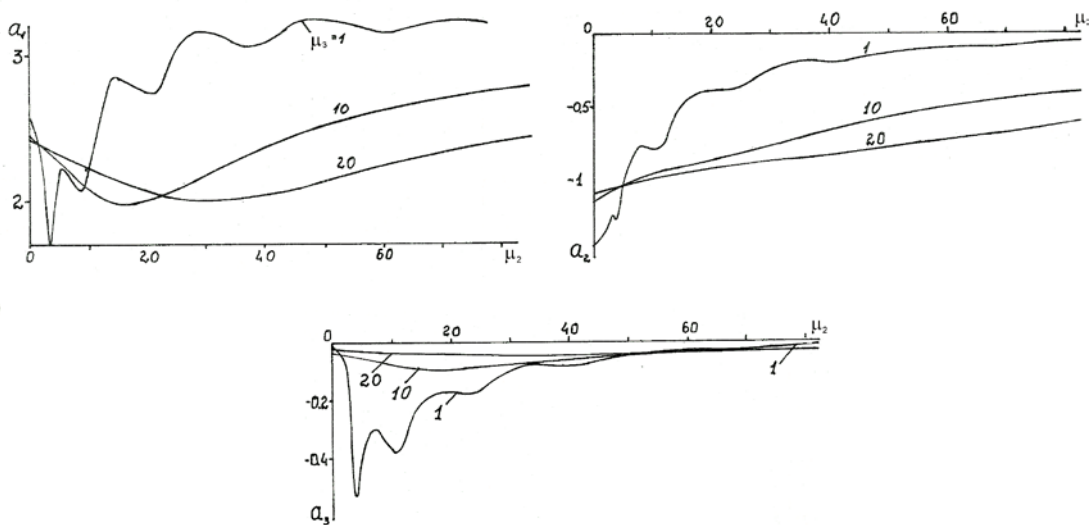


Рис. 7.4. Зависимость начальных условий π -периодических решений от μ_2 при фиксированных значениях μ_3 и выключенной магнитной пружине ($\mu_4 = 0$)

Если $\mu_4 \gg \mu_3$ и $\mu_4 \gg 1$, то в первом приближении по параметру μ_4^{-1} движение спутника описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 &= 3 \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (a \cos \alpha - b \sin \alpha) (a \sin \alpha + b \cos \alpha) - \mu_2 N_1 \sin \alpha, \\ \dot{\alpha} &= \Omega_2 - 3 \frac{1+\sin^2 u}{N_1^2}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

которые получаются из уравнений (7.3) при $\mu_4 \rightarrow \infty$ и описывают движение спутника с постоянным магнитом. Параметр μ_2 по физическому смыслу тем ближе к ранее введенному в разделе 5.1 скалярному магнитному параметру η , чем больше величина параметра μ_4 . Сравнение амплитудных характеристик π -периодических решений системы (7.22) (фактически это характеристики, представленные на рис. 5.2) с амплитудными характеристиками π -периодических решений системы (7.3), представленными на рис. 7.5 при достаточно больших значениях μ_4 (выбрано значение $\mu_4 = 50$), показывает, что увеличение последних происходит вблизи точек ветвления π -периодических решений системы (7.22). Другими словами, наличие магнитной пружины приводит к появлению областей, где амплитуда возрастает, а влияние демпфирования сказывается в замене разрывов в графиках начальных условий и амплитудных кривых конечными пиками.

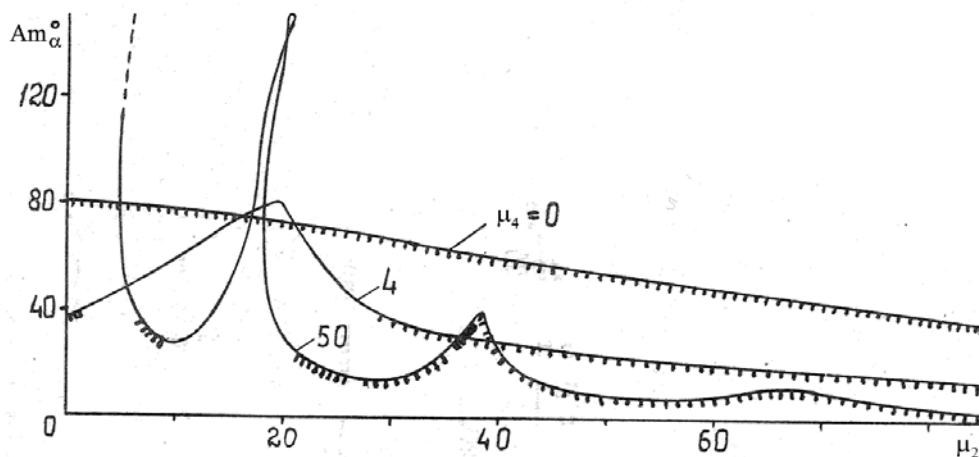


Рис. 7.5. Зависимость амплитуды π -периодических решений от μ_2 при фиксированных значениях параметра μ_4

Устойчивость периодических движений спутника и поплавка демпфера исследовалась с помощью системы в вариациях. Напомним,

что если для всех корней ρ_j характеристического уравнения справедливы неравенства $|\rho_j| < 1$, то условия асимптотической устойчивости выполнены согласно теореме Ляпунова об устойчивости в линейном приближении. Участки графиков, соответствующие устойчивым движениям, на рис. 7.5 заштрихованы.

Периодические движения спутника со сферическим магнитным демпфером и магнитной пружиной на орбитах с произвольным наклоном исследованы по приведенной схеме в [82] и более подробно, но и более громоздко в [85].

8 Пассивная магнитная система ориентации наноспутника *Munin*

Equation Section (Next) Проиллюстрируем практическое применение пассивной магнитной системы ориентации на примере наноспутника *Munin* [86], созданного в *IRF* – Институте космической физики (Кируна, Швеция). Спутник массой около 6 кг был снабжен комбинированным спектрометром электронов и ионов *MEDUSA* и твердотельным детектором *DINA*, а также веб-камерой для сбора данных об авроральных эффектах в верхних слоях атмосферы в Северном и Южном полушариях таким образом, чтобы они были доступны в режиме реального времени через Интернет. На спутнике были установлены два одноосных магнитометра, и была возможность контролировать токосъем с каждой из шести панелей солнечной батареи. Спутник имеет форму куба с ребром длиной 21 см. Панели кремниевой солнечной батареи покрывают все шесть граней спутника. В качестве попутной нагрузки *Munin* был успешно выведен на орбиту ракетой-носителем *Delta-II* с космодрома Ванденберг (США) 21 ноября 2001 г. Внешний вид спутника приведен на рис. 8.1.

Исходя из требований со стороны научной аппаратуры, наиболее предпочтительным режимом углового движения спутника *Munin* оказалась ориентация его продольной оси вдоль вектора **H**. Отклонение от **H** не должно было превышать $10-15^\circ$ в течение всего времени полета. Допустимое время выхода на номинальное движение 2-3 недели, система не должна содержать подвижные магнитные элементы, потреблять энергетические и информационные ресурсы спутника, и, наконец, эта система должна быть максимально дешевой. Поэтому вопрос о типе его системы ориентации однозначно был решен в пользу пассивной магнитной.

Переходные движения спутника, снабженного магнитной системой ориентации, исследованы в разделе 6 в рамках простой модели гистерезиса методом усреднения при небольших отклонениях оси ориентации, вдоль которой установлен постоянный магнит. Пренебрегая влиянием гистерезисных стержней на установившееся движение, в качестве таковых можно рассматривать периодические движения спутника с постоянным магнитом, полученные в разделе 5.

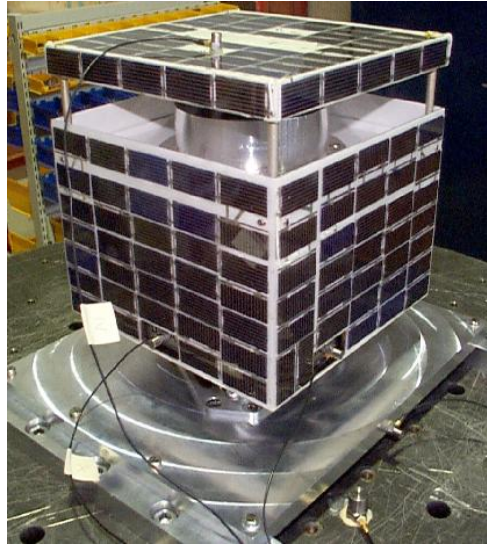


Рис. 8.1. Наноспутник *Munin* (фото *IRF*)

Возвращаясь к обозначениям разделов 5.1 и 6.2, отметим, что выбранная для спутника величина дипольного момента постоянного магнита $0.3 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ обеспечивает значение безразмерного магнитного параметра спутника η , равное 120, а параметра $\delta \approx 0.09$. При прохождении спутником магнитного экватора величина $\sqrt{\eta}/2\pi$ близка к угловой частоте колебаний ориентируемой оси спутника относительно вектора \mathbf{H} . Вблизи полюсов частота увеличивается приблизительно в $\sqrt{2}$ раз. Амплитуда вынужденных колебаний спутника относительно вектора \mathbf{H} убывает обратно пропорционально величине параметра η . Зависимость амплитуды вынужденных периодических колебаний оси симметрии спутника относительно вектора \mathbf{H} в плоскости полярной орбиты от параметра η изображена на рис. 5.2. Значения точек кривых получены как $\text{Am}_\alpha = \max_{0 \leq u \leq \pi} |\alpha(u)|$, где $\alpha(u)$ – угол между вектором \mathbf{H} и осью симметрии спутника. Видны разрывы из-за резонансов, вблизи которых нарушается монотонность убывания амплитуды вынужденных колебаний спутника с ростом параметра η . Пунктиром показаны амплитуды пространственных решений, ответвляющихся в резонансных точках Q_2 . Значками «x» и «Δ» обозначены точки ветвления плоских движений и ответвления от них пространственных движений, определяемые с помощью асимптотических формул.

Казалось бы, увеличение η способствует уменьшению амплитуды. Однако практика показывает, что начиная с амплитуд порядка $5-10^\circ$ основной вклад в амплитуду дают остаточное вращение вокруг оси ориентации и нескомпенсированный остаточный магнитный момент гистерезисных стержней. Увеличение η не способствует снижению этих факторов, потому что чем меньше амплитуда колебаний относительно вектора \mathbf{H} , тем хуже демпфируется скорость собственного вращения и тем сильнее влияние постоянного магнита на гистерезисные стержни из-за малых размеров спутника. Представляется, что магнит с дипольным моментом $0.3 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ($\eta = 120$) вполне обеспечивает заданные характеристики движения спутника. Ближайшие резонансные точки по параметру η на полярной орбите, вблизи которых может иметь место резонанс «в плоскости орбиты» – это 95 и 130, а в движениях «из плоскости орбиты» – 92 и 126. Резонансные зоны в окрестности этих точек достаточно узкие, и остается возможность непосредственной проверки появления резонанса численным моделированием динамики спутника.

8.1 Оценка параметров и расположение гистерезисных стержней в теле спутника

Прежде чем переходить к моделированию динамики спутника необходимо, решить вопрос о параметрах стержней и их расположении. В отличие от постоянного магнита, эффективность которого фактически пропорциональна величине его дипольного момента, эффективность стержней, то есть способность демпфировать начальное движение и вносить минимальные возмущения в установившееся движение спутника, определяется не только их объемом, но и используемым материалом, схемой размещения, способом термообработки и в значительной мере – их удлинением. Под удлинением стержня p понимается отношение его длины l к диаметру d . В частности, объем установленных на одном из первых спутников с пассивной магнитной системой ориентации *Transit-2A* стержней был в 4 раза меньше, чем на спутнике *Transit-1B* [10], а площадь петли гистерезиса, которую можно увязывать с эффективностью демпфирования, была в пять раз больше. Основное

отличие стержней заключалось в их удлинении – у стержней на спутнике *Transit-2A* оно было в два раза больше. Известно, что существует оптимальное удлинение, которое зависит не только от материала стержня, но и от их взаимного влияния из-за эффекта размагничивания. Обычно оптимальное значение p лежит в диапазоне 200-300 [87]. Для проведения оптимизации требуются точная математическая модель гистерезиса и модель взаимного влияния стержней. На начальном этапе исследования ограничимся оценкой требуемого суммарного объема стержней V_{rod} .

Из имеющихся на рынке магнитомягких материалов выберем один из наиболее доступных – молибденовый пермаллой марки 79 НМ, содержащий 79% Ni, 4% Mo, 17% Fe. При толщине ленты 1.0 мм материал имеет характеристики, приведенные в таблице 8.1.

Таблица 8.1. Параметры молибденового пермаллоя марки 79 НМ

начальная магнитная проницаемость, $\mu_{r\ in}$	максимальная магнитная проницаемость, $\mu_{r\ max}$	коэрцитивная сила, H_c , А/м	индукция насыщения, B_s , Т
60000	164000	0.96	0.74

В рамках дипольной модели геомагнитного поля его напряженность на круговой орбите высотой 700 км меняется от 18.1 А/м до 36.2 А/м при движении от экватора к полюсу. Даже при максимальной напряженности внешнего поля индукция стержня равна 0.4 Т, что почти в два раза меньше индукции насыщения. Поэтому при полном перемагничивании стержня (по главной петле) приближенно можно аппроксимировать главную петлю гистерезиса параллелограммом. Выбирая в качестве амплитуды перемагничивающего поля арифметическое среднее между его минимальным и максимальным значениями, а в качестве магнитной проницаемости – ее начальное значение $\mu_{r\ in}$, получим для средней площади петли гистерезиса $(\oint HdB)_{cp} \approx 8\ \text{Т} \cdot \text{А/м}$. Приближенное уравнение для скорости ω вращательного движения спутника в плоскости орбиты имеет следующий вид:

$$B \frac{d\omega}{dt} = -\frac{V_{rod}}{2\pi} (\oint HdB)_{cp}.$$

Вводя начальную угловую скорость $\omega(0)$, запишем его решение

$$\omega(t) = \omega(0) - \frac{V_{rod} (\oint H dB)_{cp}}{2\pi B} t.$$

Откуда следует, что скорость вращения затухает за конечное время

$$t_{fin} = \frac{2\pi B \omega(0)}{V_{rod} (\oint H dB)_{cp}}.$$

Предположим, что на спутнике установлено шесть гистерезисных стержней (по три в двух взаимно перпендикулярных плоскостях). При толщине 0.1 см материала 79 НМ и максимальной допустимой длине стержней 15.5 см, определяемой размером спутника, получаем объем одного стержня $V = 0.155 \text{ см}^3$. Тогда при объеме $V_{rod} \sim 0.5 \text{ см}^3$ в каждой плоскости и начальной угловой скорости $\omega(0) \sim 10^\circ/\text{с}$ получаем оценку времени переходного процесса $t_{fin} \sim 4$ часа. Сразу следует сказать, что это очень оптимистичная оценка. Здесь не учитывается реальная площадь петли, на которую влияют близость постоянного магнита и других намагниченных элементов спутника и приборов к стержням; взаимное положение стержней; осевое вращение спутника, сильно затрудняющее рассеяние его кинетической энергии вращательного движения; переходный процесс при колебательном относительно вектора **H** движении спутника и так далее.

Оцененный суммарный объем стержней $V_{rod} \sim 1 \text{ см}^3$, каждый из которых имеет длину 15.5 см и толщину 0.1 см при квадратном сечении, реализуется при установке двух «троек» стержней во взаимно перпендикулярных плоскостях. Стержни должны быть расположены в плоскости P (рис. 8.2), перпендикулярной оси магнита и проходящей через его центр, или, в крайнем случае, в параллельных и немного отстоящих от нее плоскостях. В этом случае проекция вектора индукции при дипольном представлении поля постоянного магнита на эту плоскость минимальна. Для окончательного решения этого вопроса должна решаться задача, учитывающая взаимное влияние стержней (см. Приложение II), влияние постоянного магнита и других намагниченных элементов спутника.

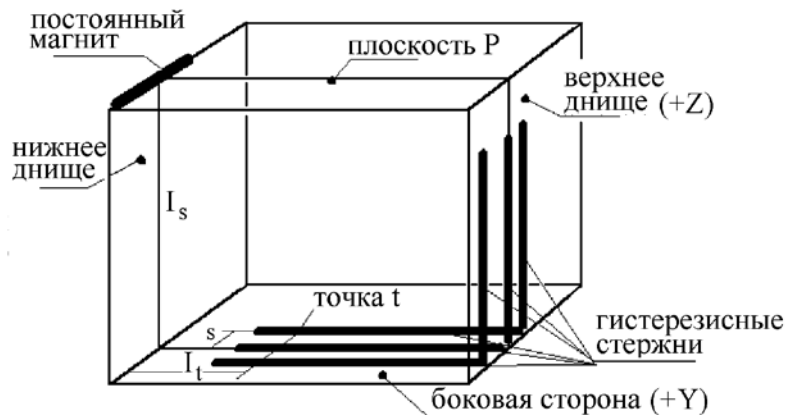


Рис. 8.2. К вычислению составляющей H_{sr} вектора \mathbf{H}_s вдоль гистерезисного стержня, выведенного из плоскости P

При этом сами тройки должны быть перпендикулярны друг другу. Это значит, что идеальное место стержней – пересечение плоскости P с двумя примыкающими друг к другу боковыми гранями спутника, наиболее удаленными от постоянного магнита. Магнит расположен в вершине двугранного угла, образованного двумя другими боковыми гранями спутника. Определим допустимое расстояние между стержнями в тройках, так как, с одной стороны, их желательно разнести как можно дальше друг от друга, а с другой стороны, смещение стержней из плоскости P приводит к появлению составляющей вектора \mathbf{H}_s от постоянного магнита, направленной вдоль стержня. Ее наличие приводит к начальной намагниченности стержня и может отрицательно сказаться на его эффективности.

Получим выражение для составляющей H_{sr} вектора \mathbf{H}_s вдоль стержня. Введем обозначения (рис. 8.2): l_s – расстояние от магнита до грани S со стержнями, l_t – расстояние от проекции O_s центра магнита на грань S до проекции точки t стержня, в которой вычисляется составляющая H_{sr} , на ту же грань, s – расстояние от точки t стержня до плоскости P . Тогда из соответствующих треугольников в предположении дипольности магнитного поля постоянного магнита имеем выражение

$$H_{sr} = \frac{3msl_t}{4\pi(l_s^2 + l_t^2 + s^2)^{5/2}}.$$

Полагая $s \ll \sqrt{l_s^2 + l_t^2}$, перепишем предыдущее выражение, опуская слагаемые порядка $O\left(\left(s/\sqrt{l_s^2 + l_t^2}\right)^3\right)$, в виде

$$H_{st} = \frac{3msl_t}{4\pi(l_s^2 + l_t^2)^{5/2}}. \quad (8.1)$$

Известно [87], что при расстоянии между параллельными идентичными стержнями более 0.3-0.4 их длины их взаимным влиянием можно пренебречь. Это влияние сказывается во взаимном размагничивании стержней и, как следствие, снижении эффективности демпфирования. При расстоянии, равном 0.02 длины, два стержня эквивалентны фактически одному. При расстоянии, равном 0.2 длины, эффективность падает на 12.5%. Это значит, что вместо двух стержней будут работать как бы 1.75 стержня. Ограничимся расстоянием, равным 0.2 длины, и оценим, используя формулу (8.1), влияние поля постоянного магнита. Согласно конструкционным ограничениям на длину стержня максимально допустимая длина $l=15.5$ см, тогда $s \approx 3$ см. Три параллельных стержня размещаются так, чтобы один из них лежал на пересечении плоскости P и грани $+Z$, а два других лежали на грани $+Z$ параллельно первому стержню на расстоянии s по разные стороны от него. Другая тройка стержней будет лежать на грани $+Y$. Согласно формуле (8.1), максимальное по l_t значение $H_{st} \approx 0.4$ А/м достигается при $l_t = l_s/2$. Считается, что все грани спутника одинаковые, то есть ширина грани равна l_s . На концах стержня $H_{st} \approx 0.28$ А/м (при $l_t = 4.5$ см) и $H_{st} \approx 0.25$ А/м (при $l_t = 20$ см).

Каждый стержень помещается между двумя узкими полосками немагнитного материала несколько длиннее, чем стержень, имеющими на внутренних сторонах небольшие углубления. Стержень в мягкой тонкой оболочке с небольшим усилием зажимается между этими пластинами. Пластины, в свою очередь, крепятся к корпусу спутника. Такой способ позволяет предохранить стержни от деформаций и возникновения механических напряжений вследствие крепления к корпусу спутника, а также вибраций на этапе вывода и термической деформации в течение полета.

Проанализируем степень влияния напряженности поля на стержни. Коэффициент размагничивания N вычислим по

приближенной эмпирической формуле [87] $N = \ln(1.2p - 1)/p^2$. Подставляя сюда $p = 155$, получаем $N = 1.75 \cdot 10^{-4}$. Магнитная проницаемость стержня $\mu_r = \mu/(1 + N\mu) \approx 5.5 \cdot 10^3$ и мало зависит от магнитной проницаемости материала μ . Вариация магнитной проницаемости стержня при изменении магнитной проницаемости материала от начального значения до максимального составляет лишь 6%. Поэтому при вычислении μ_r для определенности была выбрана проницаемость $\mu \approx 10^5$, близкая средней проницаемости.

Вернемся к вопросу о влиянии поля магнита на гистерезисные стержни. На расчетном установившемся режиме при амплитуде колебаний спутника относительно вектора **H** порядка 0.2 радиан амплитуда перемагничивающего стержень поля $H_{mr} \sim 3.6$ А/м. Сравнивая эту величину с коэрцитивной силой материала стержней ($H_c = 0.96$ А/м), получаем, что их перемагничивание, вероятно, будет проходить по предельной петле. Среднее значение проекции $H_{sr} \approx 0.3$ А/м приводит к начальной намагниченности стержня и смещению центра петли гистерезиса на диаграмме перемагничивания (так называемому смещению рабочей точки) на H_{sr}/H_c , то есть приблизительно на 30%, что можно считать допустимым и лежащим в пределах точности моделирования.

Другим источником паразитного влияния на гистерезисные стержни являются постоянные магниты приборов спутника. Величина напряженности поля от этих магнитов в месте расположения стержней сравнима с коэрцитивной силой материала ($H_c = 0.96$ А/м), что может повлечь нежелательное смещение рабочей точки стержней и снизить их эффективность.

Магнитная восприимчивость уменьшается с увеличением температуры. Падает значение магнитной проницаемости ферромагнетиков, ослабляется эффект гистерезиса и уменьшается намагничивание насыщения. При температуре T_k , называемой *температурой Кюри*, ферромагнитные свойства исчезают. Для используемых при демпфировании движений спутника материалов значения температуры Кюри приведены в таблице 8.2.

материал	Базовый состав, %	T, °
79 НМ	79 Ni, 4 Mo, остаток Fe	450
50 Н	50 Ni, остаток Fe	500

Выбранный в качестве материала стержней молибденовый пермаллой 79 НМ сохраняет магнитные свойства в заданных пределах изменения температуры $\pm 30^\circ \text{C}$ на панелях, используемых для размещения стержней на борту спутника.

8.2 Результаты численного моделирования

Перейдем к численному исследованию динамики спутника. Требуется выяснить влияние на характеристики установившегося и переходного движений спутника его начальной скорости вращения, тензора инерции, наклона орбиты. Для аппроксимации геомагнитного поля использовались три модели: модель прямого диполя, модель наклонного диполя, *IGRF*. Попытки использования простых моделей гистерезиса – модели параллелограмма или Релея приводят к результатам, которые носят или качественный характер (модель параллелограмма), или допускают использование лишь в окрестности начала координат (модели Релея). Сложный характер гистерезиса требует применения более совершенной модели. Используемая далее численная модель гистерезиса, названная *улучшенной*, подробно описана в Приложении II.

Вначале приведем результаты для спутника со сферически симметричным тензором инерции (моменты инерции спутника равны $0.046 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$), наклоном орбиты 98° , размещенным параллельно оси Ox_3 постоянным магнитом с моментом $m = 0.3 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ и двумя тройками стержней длиной 15.5 см, параметры которых определены по ГОСТ 10160-75 (таблица 8.3).

Таблица 8.3. Параметры гистерезисных стержней в соответствии с ГОСТ 10160-75

начальная магнитная проницаемость, $\mu_{r \text{ in}}$	максимальная магнитная проницаемость, $\mu_{r \text{ max}}$	коэрцитивная сила, H_c , А/м	индукция насыщения, B_s , Т
25000	180000	1.6	0.74

Соответствующие им параметры улучшенной модели гистерезиса имеют вид $k = 0.23$, $a = 0.12$, $R_s = 4.6$. Серия расчетов показала, что наиболее существенным фактором, влияющим на длительность переходного движения и на точность ориентации в течение длительного времени, является начальная угловая скорость вращения спутника. При начальной скорости порядка $50\omega_0 - 100\omega_0$ по каждому из каналов (тангаж, рыскание и крен) спутник за сутки–двое выходит на установившееся движение с амплитудой $5-7^\circ$ колебаний относительно вектора **H**.

При начальной угловой скорости $30^\circ/\text{с}$ ($500\omega_0$) по каждому из трех каналов процесс успокоения занимает чуть больше недели. Спутник выходит на движение, при котором ориентируемая ось движется по конической поверхности вокруг вектора **H** с амплитудой $15-20^\circ$ и далее эта амплитуда медленно убывает до $10-12^\circ$ еще за двое суток, имея тенденцию к дальнейшему уменьшению. Медленное убывание амплитуды обусловлено чрезвычайно медленным демпфированием скорости вращения спутника вокруг ориентируемой оси, что вызвано перемагничиванием стержней по *частным* петлям, имеющим весьма малую площадь. Этот факт отмечался также в [88].

Пример переходного процесса с начальными условиями $500\omega_0$ по каждому каналу приведен на рис. 8.3 (θ – угол отклонения оси ориентации спутника от вектора **H**) и рис. 8.4 (проекции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора абсолютной угловой скорости на главные оси инерции спутника, третья ось ориентируемая) в зависимости от аргумента широты u .

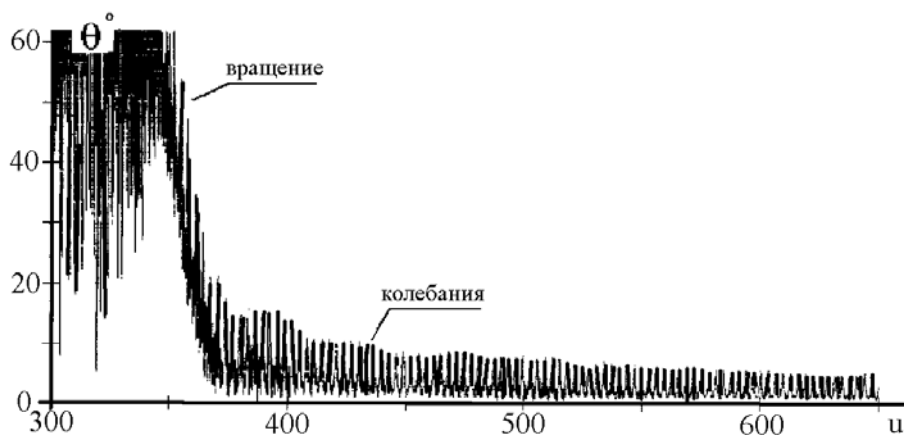


Рис. 8.3. Угол θ отклонения оси ориентации спутника от вектора **H**.
Начальная угловая скорость $500\omega_0$ по каждому каналу

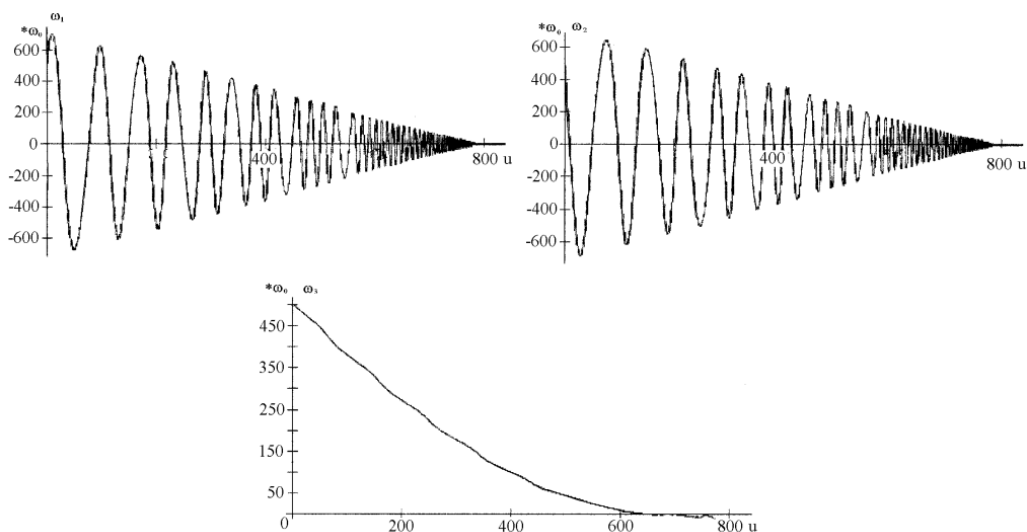


Рис. 8.4. Проекция ω_1 , ω_2 , ω_3 вектора абсолютной угловой скорости на главные оси инерции спутника

Для этих начальных условий и параметров спутника график угла θ на 145-м витке приведен на рис. 8.5. Видны собственные колебания спутника, которые наложены на медленные почти периодические с периодом в полвитка по орбите колебания. Здесь и далее на оси абсцисс значком «x» отмечены моменты прохождения спутником экватора. На 145-м витке величина проекции ω_3 вектора абсолютной угловой скорости близка $11\omega_0$.

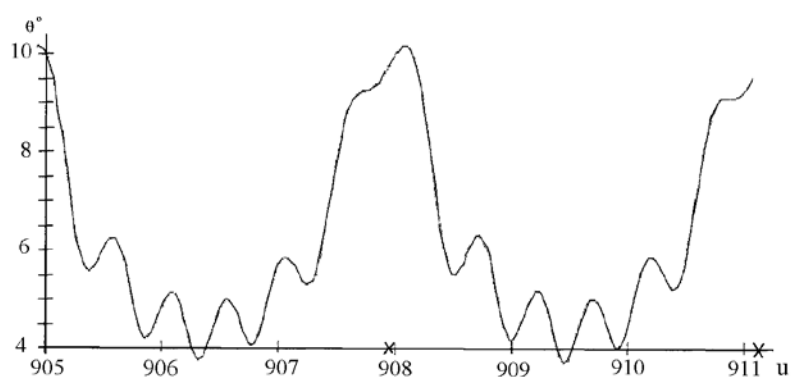


Рис. 8.5. Зависимость угла θ на 145-м витке

Окончательные расчеты проводились с тензором инерции, соответствующим финальной компоновке спутника *Munin*

$$\begin{pmatrix} 0.05283 & -0.0000678 & -0.0000230 \\ -0.0000678 & 0.05053 & -0.0000459 \\ -0.0000230 & -0.0000459 & 0.05283 \end{pmatrix} [\text{кг} \cdot \text{м}^2],$$

постоянным магнитом с моментом $m = 0.3 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, двумя «тройками» стержней длиной 15.5 см, параметры которых определены Сертификатом изготовителя (таблица 8.1), начальной скоростью вращения $10^\circ/\text{с}$ ($175\omega_0$) по каждому каналу, высотой орбиты 705 км и наклоном 98° . Необходимые для проведения численных расчетов с использованием уточненной модели гистерезиса входные параметры в соответствии с приведенными значениями характеристик имеют следующие значения для каждой тройки стержней: $k = 0.11$, $a = 0.17$, $R_s = 4.6$. Пример переходного процесса приведен на рис. 8.6, где изображен график угла θ .

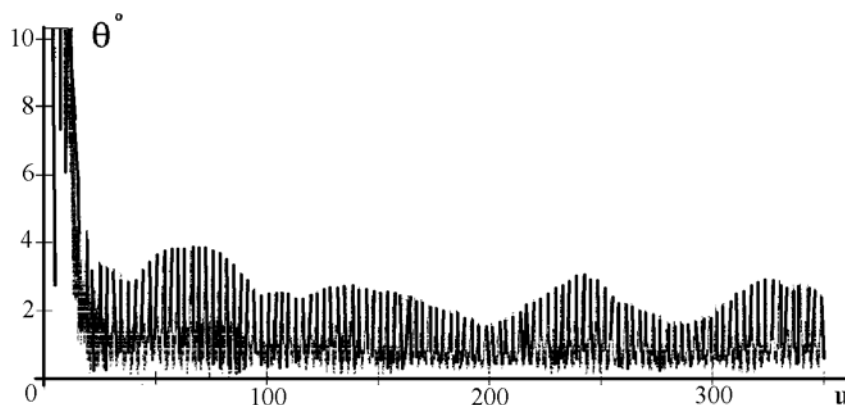


Рис. 8.6. Угол θ отклонения оси ориентации спутника от вектора **Н**.
Начальная угловая скорость равна $175 \omega_0$ по каждому каналу

График изображен, начиная с момента времени, предшествующего переходу от вращения к колебаниям относительно вектора **Н**. Безразмерное время u отсчитывается с момента отделения спутника от носителя. График угла θ на 105-м витке в укрупненном масштабе изображен на рис. 8.7.

Приблизительно через 60 витков (чуть менее четырех суток) спутник прекратил вращение и вышел на режим колебаний относительно вектора **Н** с амплитудой около 20° . Как и в предыдущих вариантах, темпы дальнейшего снижения этой амплитуды обусловлены уменьшением осевой скорости вращения. На 105-м витке амплитуда колебаний уменьшилась до 4.7° при угловой

скорости вращения около $3\omega_0$, которая имеет тенденцию к дальнейшему уменьшению.

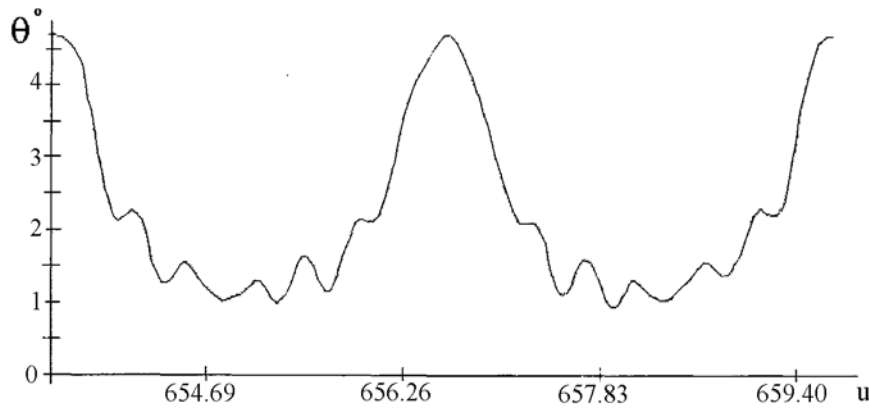


Рис. 8.7. Зависимость угла θ на 105-м витке

Были опасения, что эффективность стержней с более узкой петлей (таблица 8.1 в сравнении с таблицей 8.3) будет ниже, но они оказались напрасными.

8.3 Учет суточного вращения Земли

Результаты, приведенные выше, были получены в рамках модели прямого диполя (раздел 2.3). В модели наклонного диполя в результате суточного вращения Земли угол между диполем и его проекцией на плоскость орбиты непрерывно меняется. Влияние этого эффекта на угол θ показано на рис. 8.8. Зависимость от времени имеет периодический характер с периодом, равным приблизительно 16 виткам ($\Delta u \sim 100$), что составляет одни сутки.

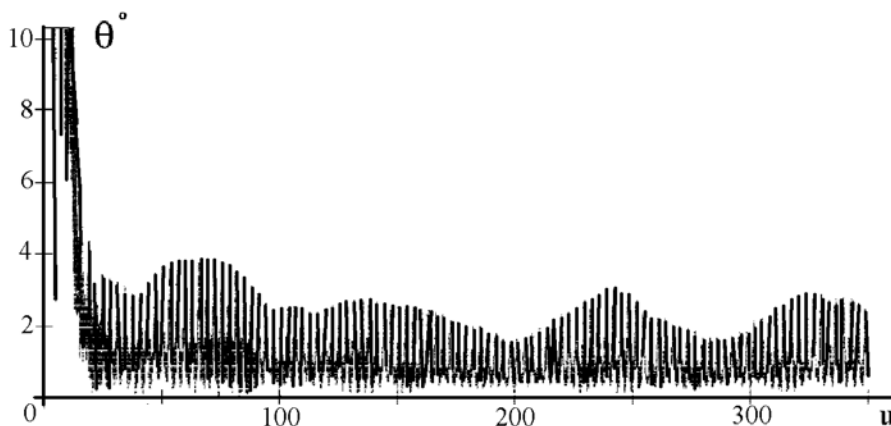


Рис. 8.8. Зависимость угла θ от времени при учете суточного вращения Земли

Зависимость намагниченности стержней вдоль оси Ox_2 , перпендикулярной оси ориентации и отнесенной к индукции насыщения, равной 0.74 Тл, от величины проекций вектора напряженности геомагнитного поля на стержень приведена на рис. 8.9.

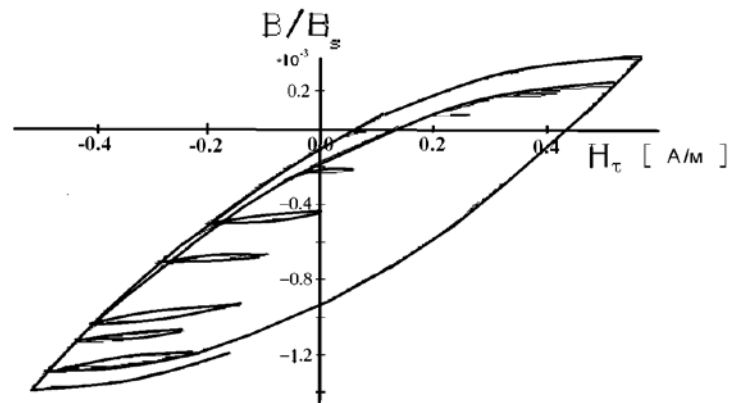


Рис. 8.9. Зависимость намагниченности на витке для стержня, установленного вдоль оси Ox_2

Частные петли соответствуют перемагничиванию стержня при вынужденных колебаниях с частотой, близкой собственной частоте спутника. Проведенные исследования показали хорошее совпадение петель и, что особенно важно, частных и несимметричных петель гистерезиса при сравнении кривых перемагничивания, полученных экспериментально и расчетным путем с использованием улучшенной модели. Приведенные выше параметры модели k, a, R_s рассчитываются, исходя из геометрических и магнитных параметров стержней [89].

Пример расчетов, проведенных с использованием модели *IGRF* (коэффициенты 1995 года с экстраполяцией на декабрь 1999 года), приведен на рис. 8.10, где изображена зависимость угла θ на двух витках, когда переходный процесс уже близок к завершению. Качественно, по наличию двух характерных времен, равных половине витка и периоду собственных колебаний; и количественно, по величине максимального отклонения на витке, можно считать совпадение результатов удовлетворительным.

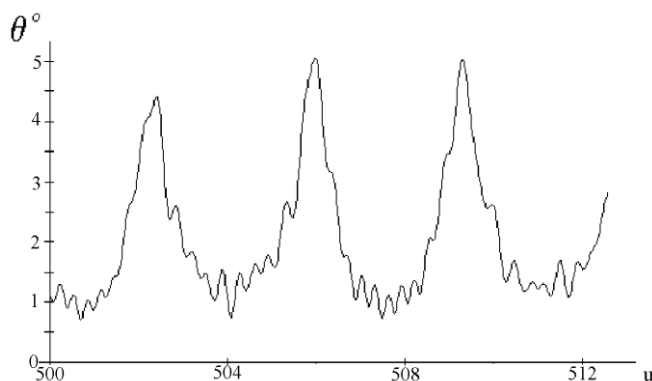


Рис. 8.10. Зависимость угла θ на двух витках при использовании гауссовой модели геомагнитного поля

Следует отметить, что смысл предварительных и окончательных расчетов заключается еще и в том, чтобы оценить «грубость» полученных результатов по отношению к параметрам стержней, которые выдерживаются при изготовлении с не очень высокой точностью, ибо допускают лишь косвенное измерение магнитных свойств материала. Проведенные расчеты с различными значениями параметров стержней (по ГОСТ и сертифицированные) демонстрируют приемлемую «грубость» результатов.

8.4 Результаты летных испытаний

Выход из строя магнитометра сделал невозможным использование штатных методов определения фактического движения спутника *Munin* по данным телеметрии. В процессе анализа поступающей телеметрии оказалось, что наиболее достоверной информацией о движении аппарата стали данные токосъема солнечной батареи. Данные магнитометра и камеры – штатных датчиков ориентации, использовать для количественной оценки точности ориентации не удавалось. Камера лишь показала, что аппарат делает два оборота вокруг центра масс за оборот по орбите и камера направлена к Земле над северным полушарием, что косвенно подтверждало, что аппарат находится в режиме магнитной ориентации.

В процессе наземных испытаний калибровку прошла лишь одна из солнечных панелей. Задача определения ориентации в некотором смысле стала похожа на задачу определения движения по данным солнечного датчика. Однако отсутствие калибровки каждой панели, отсутствие информации о режиме заряда аккумуляторной батареи, расположение батареи, не оптимизированное для работы в комплексе

определения ориентации, наконец, их чувствительность к отраженной Землей солнечной радиации (альбедо) заметно усложнило решение задачи.

Первым вопросом при определении ориентации статистическим методом является вопрос о выборе временного промежутка и, соответственно, количестве точек, используемых для формирования функционала. Ясно, что при малом количестве точек может быть достигнуто лучшее совпадение расчетных и реальных значений токов. Однако полученная при этом информация об ориентации будет менее достоверной, чем при использовании большего количества точек. Это объясняется тем, что измеренные значения токов возмущены процедурами измерения и передачи данных и порождены не только прямым излучением Солнца, но и током от альбедо Земли. Поэтому можно ожидать, что увеличение количества точек приведет к уменьшению влияния шумов и токов от альбедо.

На большом промежутке времени значительную погрешность в функционал может вносить неточность динамической модели, учитывающей только основные факторы. В используемой динамической модели гистерезисные стержни рассматриваются как перпендикулярные постоянному магниту и обладающие линейным коэффициентом намагниченности с магнитными моментами, пропорциональными проекциям вектора магнитного поля на их продольные оси. Помимо гистерезисных стержней системы ориентации неточность в динамическую модель вносит наличие постоянного магнита, создающего восстанавливающий момент. Нет уверенности в том, что постоянный дипольный магнитный момент спутника направлен по его продольной геометрической оси и что он имеет номинальную величину $0.3 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, поэтому была предусмотрена возможность уточнения величины дипольного момента и ориентации магнита в теле спутника. Аналогично могут уточняться моменты инерции спутника.

Типовой сеанс определения ориентации статистическим методом включал следующие действия:

- Подготовка и визуализация исходных данных (за исключением начальной точки оптимизации). Если в результате визуального анализа графических результатов обнаружатся выпадающие точки, то следует скорректировать исходный файл телеметрических данных.

- Определение ориентации и формирование файла, состоящего из направляющих косинусов осей спутника в соответствующие моменты времени.

- Определение угловой скорости. Пробный запуск программы определения угловой скорости с небольшим количеством итераций и шагов оптимизации. Если на графиках токов панелей +Y, -Y, +Z, -Z не наблюдается фазовое совпадение расчетных и экспериментальных зависимостей, то можно считать, что начальная точка оптимизации находится в области притяжения локального минимума. В этом случае следует скорректировать угловую скорость.

Пример результатов обработки измерений токосъема на интервале 4500 с, полученных 18.01.2001 г., приведен на рис. 8.11. Максимальное отклонение оси ориентации от **Н** составляет 22° и видны вариации отклонения, вызванные собственными колебаниями спутника и изменением величины **Н** при движении спутника по орбите.

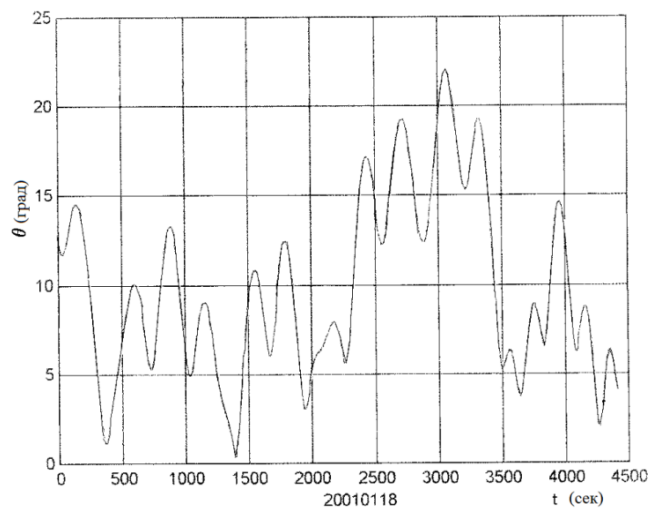


Рис. 8.11. Результаты обработки токосъема со спутника *Munin*

9 Ориентация наноспутника ТНС-0

Equation Section (Next) Летные испытания первого российского наноспутника ТНС-0 №1 [90], снабженного постоянным магнитом и гистерезисными стержнями (описание его системы ориентации приведено в [91]), показали, что рассмотренные выше движения спутника с постоянным магнитом в виде периодических колебаний относительно вектора \mathbf{H} , подверженные начальным возмущениям, трансформируются в более сложные движения в процессе полета. Проинтерпретируем движение, наблюдавшееся в ходе летных испытаний этого спутника [92].

9.1 Интерпретация углового движения наноспутника ТНС-0

Для записи уравнений движения спутника воспользуемся оскулирующими переменными (раздел 1.2, уравнения (1.13)). В качестве опорной используем систему $O_a J_1 J_2 J_3$ и, соответственно, осредненную модель геомагнитного поля.

Полагаем, что спутник осесимметричный ($A = B \neq C$). Введем безразмерный кинетический момент l ($L = L_0 l$) и безразмерное время $\tau = 2\omega_0 \eta t$, где $\eta = L_0 / (2\omega_0 A)$, ω_0 – угловая скорость обращения спутника по орбите, L_0 – величина кинетического момента в начальный момент времени ($\tau = 0$). В этом случае $\chi = \chi_0 + \tau/\eta$. Дипольный момент спутника – \mathbf{m} , его величина – m_0 . Безразмерный механический момент $\mathbf{N} = \mathbf{M}/B_0 m_0$, где \mathbf{M} – механический момент, действующий на спутник.

Уравнения динамики спутника в безразмерных переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 l' &= \varepsilon \bar{N}_3, & \rho' &= \frac{\varepsilon}{l} \bar{N}_1, & \sigma' &= \frac{\varepsilon}{l \sin \rho} \bar{N}_2, \\
 \theta' &= \frac{\varepsilon}{l} (\bar{N}_2 \cos \psi - \bar{N}_1 \sin \psi), \\
 \varphi' &= \kappa l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{l \sin \theta} (\bar{N}_1 \cos \psi + \bar{N}_2 \sin \psi), \\
 \psi' &= l - \frac{\varepsilon}{l} \bar{N}_1 \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{\varepsilon}{l} \bar{N}_2 (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta),
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $\kappa = (A/C - 1)$ и $\varepsilon = m_0 B_0 A / L_0^2$ – безразмерные параметры, штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному времени τ .

*Движение быстро вращающегося спутника
с постоянным магнитом*

Рассмотрим сначала движение спутника, снабженного только постоянным магнитом. Безразмерный механический момент от постоянного магнита в системе координат $OL_1L_2L_3$ запишется в виде [93]

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= -(B_4 \cos \theta + \sin \theta (B_2 \cos \rho + B_5 \sin \rho) \cos \psi), \\ \bar{N}_2 &= (\cos \theta (-B_2 \sin \rho + B_5 \cos \rho) - \\ &\quad - \sin \theta (B_2 \cos \rho + B_5 \sin \rho) \sin \psi), \\ \bar{N}_3 &= \sin \theta ((-B_2 \sin \rho + B_5 \cos \rho) \cos \psi + B_4 \sin \psi).\end{aligned}$$

Здесь

$$B_4 = B_1 \cos \sigma - B_3 \sin \sigma, \quad B_5 = B_1 \sin \sigma + B_3 \cos \sigma,$$

B_i ($i = 1, 2, 3$) – безразмерные компоненты вектора индукции. В уравнениях с безразмерными переменными, описывающими вращение спутника, они разделяются на быстрые и медленные. Быстрыми переменными являются углы ψ и φ , а медленными – безразмерный кинетический момент l и углы ρ , σ , θ . Проведем усреднение правых частей уравнений для медленных переменных по быстрым переменным [94]. Заметим, что при интересующем нас режиме движения спутника – отслеживании вектора индукции поля – $\rho \approx \Theta$, а на орбите спутника *ТНС-0* $\Theta_B = 59.9^\circ$ и следовательно $\operatorname{ctg} \rho \approx 0.5 - 0.6$, то есть величина $\operatorname{ctg} \rho$ ограничена, что необходимо для корректного проведения усреднения по переменной ψ . Усредненные по быстрым переменным уравнения движения принимают вид

$$\rho' = a \sin \Sigma, \quad \Sigma' = a \operatorname{ctg} \rho \cos \Sigma - b, \quad l' = 0, \quad \theta' = 0, \quad (9.2)$$

где $\Sigma = \sigma - \chi$ – угол отклонения кинетического момента спутника от магнитного поля в плоскости первой и второй осей опорной инерциальной системы координат; a и b – коэффициенты, определяемые по формулам

$$a = (\varepsilon / l_0) \sin \Theta \cos \theta_0, \quad b = (\varepsilon / l_0) \sin \Theta \cos \theta_0 + 1 / \eta.$$

Отметим, что система уравнений, аналогичная (9.2), исследована в [22]. Такая система допускает интеграл движения $f = a \cos \Sigma \sin \rho + b \cos \rho$, используемый авторами для построения функций Ляпунова при доказательстве устойчивости решений. Однако из-за усреднения по орбитальному движению спутника полученные в [22] и [95] результаты не могут быть распространены на рассматриваемый нами случай.

Уравнения (9.2) имеют две стационарные точки. Первая из них $\Sigma = 0$, $\rho = \arctg(a/b) = \rho_0$ соответствует тому, что кинетический момент отслеживает вектор магнитной индукции \mathbf{B} . Вторая стационарная точка $\Sigma = \pi$, $\rho = \pi - \arctg(a/b) = \pi - \rho_0$ соответствует тому, что кинетический момент отслеживает вектор $(-\mathbf{B})$. Такое отслеживание возможно, если $\varepsilon \cos \Theta \cos \theta_0 \gg (1/\eta)$. Если это неравенство выполняется, то $\Theta \approx \rho$. Заметим, что $l_0 = 1$. С другой стороны, параметр ε должен удовлетворять неравенству $\varepsilon \ll 1$. В результате приходим к условию

$$\frac{L_0^2}{A} \gg m_0 B_0 \gg \frac{2L_0 \omega_0}{\cos \Theta \cos \theta_0},$$

когда описанное отслеживание может иметь место.

Обе стационарные точки являются устойчивыми, но не асимптотически, так как в системе отсутствует демпфирование. В качестве примера рассмотрим первую стационарную точку. Возьмем функцию $V = a\sqrt{a^2 + b^2} - a f$ и перепишем ее с учетом вида f так: $V = a\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 \cos \Sigma \sin \rho - ab \cos \rho$. Легко видеть, что $V' = 0$. Докажем, что V – положительно определенная в окрестности $\Sigma = 0$, $\rho = \rho_0$ функция. В самой этой точке функция принимает нулевое значение. Частные производные этой функции в стационарной точке $V'_\rho = V'_\Sigma = 0$. Далее рассмотрим вторые производные этой функции V в стационарной точке

$$V''_{\Sigma\Sigma} = a^2 \sin \rho_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} V''_{\Sigma\Sigma} & V''_{\rho\Sigma} \\ V''_{\Sigma\rho} & V''_{\rho\rho} \end{vmatrix} = a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sin \rho_0 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра в стационарной точке функция V имеет строгий локальный минимум с нулевым значением. Следовательно, эту функцию можно использовать в качестве функции Ляпу-

нова. Существование такой функции доказывает устойчивость стационарной точки. Для второй стационарной точки $\Sigma = \pi$, $\rho = \pi - \rho_0$ доказательство устойчивости проводится аналогично. В качестве функции Ляпунова используется $V = a\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \cos \Sigma \sin \rho + abc \cos \rho$. Поскольку угол θ в этом случае может быть любым, то в движении, усредненном по углу прецессии, дипольный момент спутника устойчиво может отслеживать как вектор \mathbf{B} , так и вектор $(-\mathbf{B})$. Заметим, что это отслеживание неточное. Существует отличный от нуля угол между кинетическим моментом спутника и вектором \mathbf{B} (или $(-\mathbf{B})$). Чем медленнее скорость изменения магнитного поля, тем меньше этот угол. Если же считать магнитное поле постоянным, то в стационарных точках кинетический момент направлен точно по вектору магнитной индукции \mathbf{B} или противоположен ему.

На рис. 9.1 представлено описанное выше стационарное движение спутника. Вектор индукции геомагнитного поля заметает конус за половину оборота спутника по орбите. Кинетический момент спутника отслеживает вектор индукции геомагнитного поля. Ось симметрии спутника прецессирует вокруг вектора кинетического момента.

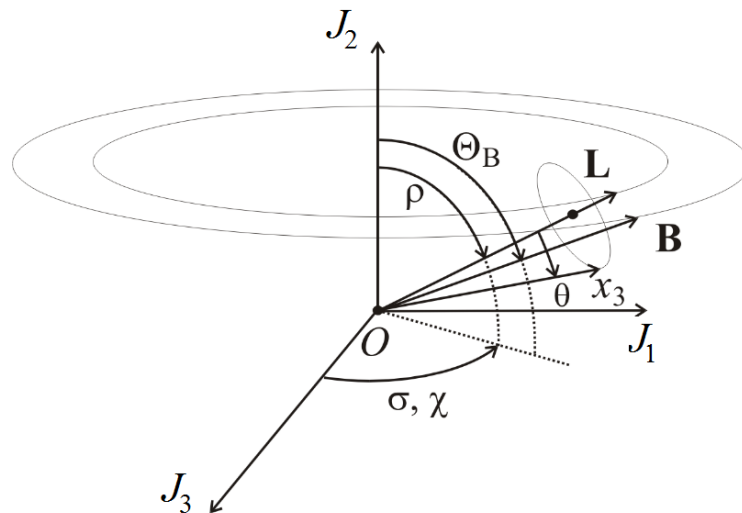


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация усредненного стационарного движения оси ориентации спутника с постоянным магнитом

Асимптотическая устойчивость вращающегося спутника с постоянным магнитом и гистерезисными стержнями

Чтобы проверить асимптотическую устойчивость полученных стационарных точек, введем в систему демпфирование. Рассмотрим упомянутый выше частный случай постоянного внешнего магнитного

поля. Для моделирования гистерезиса в стержнях введем малое запаздывание по времени в намагничивании стержня. Тогда дипольный момент гистерезисных стержней определяется выражением $\mathbf{m}_{hyst} = \tilde{k} \mathbf{V}_{\perp}(t - \Delta t)$, где \tilde{k} – постоянная, $\mathbf{V}_{\perp}(t - \Delta t)$ – проекция индукции магнитного поля на экваториальную плоскость спутника с запаздыванием на время Δt . Предполагая, что запаздывание Δt мало, представим $\mathbf{V}_{\perp}(t - \Delta t) \approx \mathbf{V}_{\perp}(t) - \Delta t \mathbf{V}'_{\perp}(t)$. Тогда предположение, что дипольный момент \mathbf{m} постоянного магнита намного сильнее наведенного момента $\tilde{k} \mathbf{V}_{\perp}(t)$ от гистерезисных стержней, позволяет пренебречь последним. В результате выражение для действующего на спутник механического момента со стороны геомагнитного поля имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 \times \mathbf{V} - k \mathbf{V}'_{\perp} \times \mathbf{V}.$$

Здесь первое слагаемое отвечает моменту от постоянного магнита, а второе слагаемое – моменту от гистерезисного демпфирования, $k = \tilde{k} \Delta t$, \mathbf{V}'_{\perp} – производная проекции индукции магнитного поля на экваториальную плоскость относительно связанной со спутником системы координат, но заданная при этом в проекциях на оси $OL_1L_2L_3$. Поскольку необходимо получить механический момент в $OL_1L_2L_3$, то для этого следует использовать соотношение

$$\mathbf{V}'_{\perp(L)} = \mathbf{V}'_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{\perp}, \quad (9.3)$$

где $\mathbf{V}'_{\perp(L)}$ – производная индукции магнитного поля в $OL_1L_2L_3$, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость связанной системы координат относительно $OL_1L_2L_3$ в проекциях на оси этой же системы координат. Учитывая соотношение (9.3), получаем механический момент от гистерезисных стержней в системе координат $OL_1L_2L_3$ в виде

$$\mathbf{M}_{hyst} = -k \left(\mathbf{V}'_{\perp(L)} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{\perp} \right) \times \mathbf{V}.$$

Выражение для проекции магнитного поля на экваториальную плоскость можно получить по формуле $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V} - (\mathbf{V}, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3$, где \mathbf{e}_3 – вектор, направленный по оси симметрии спутника, который в системе координат $OL_1L_2L_3$ записывается как $\mathbf{e}_3 = (\sin \psi \sin \theta, -\cos \psi \sin \theta, \cos \theta)$. Угловую скорость связанной системы координат относительно $OL_1L_2L_3$ в

проекциях на оси этой же системы координат приближенно запишем в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \psi'(0,0,1) + \varphi' \mathbf{e}_3. \quad (9.4)$$

Эта формула учитывает только члены нулевого и первого порядка по ε для двух случаев, которые будут рассмотрены ниже. Она верна для рассматриваемых стационарных движений. В случае произвольного движения выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ имеет более сложный вид, чем (9.4).

Исследуем на асимптотическую устойчивость стационарные точки в постоянном магнитном поле. Считаем, что в стационарных точках кинетический момент направлен по \mathbf{B} или по $(-\mathbf{B})$. Пусть вектор кинетического момента параллелен вектору \mathbf{B} . В этом случае момент от постоянного магнита будет отсутствовать, а момент, создаваемый гистерезисными стержнями, будет влиять только на изменение угла θ . Рассмотрим изменение угла θ при фиксированном направлении вектора кинетического момента.

Пусть вектор кинетического момента направлен по вектору индукции магнитного поля. Тогда дифференциальное уравнение для угла θ будет выглядеть следующим образом:

$$\theta' = k \frac{\varepsilon}{l} \sin \theta \left(\kappa l \cos \theta - \frac{\varepsilon}{l} \right). \quad (9.5)$$

Стационарной точкой уравнения (9.5) будет решение $\theta_0 = \arccos(\varepsilon/\kappa l^2)$. Его асимптотическую устойчивость легко показать, если ввести переменную $\tilde{\theta} = \theta - \theta_0$ и рассмотреть функцию $V = \tilde{\theta}^2$. Функция V удовлетворяет требованиям, накладываемым на функцию Ляпунова. Она положительно определенная и в окрестности нуля $V' < 0$, что является достаточным условием для асимптотической устойчивости.

Далее, пусть вектор кинетического момента направлен противоположно вектору индукции магнитного поля. Тогда дифференциальное уравнение для угла θ имеет вид

$$\theta' = k \frac{\varepsilon}{l} \sin \theta \left(\kappa l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{l} \right). \quad (9.6)$$

Асимптотически устойчивая стационарная точка имеет вид $\theta_0 = \pi - \arccos(\varepsilon/\kappa l^2)$.

Полученные стационарные точки говорят о том, что в случае гистерезисного демпфирования существует только одно значение угла θ , при котором возможно стационарное вращение. В осредненном по углу прецессии движении дипольный момент спутника теперь может отслеживать только вектор \mathbf{B} , а не вектор $(-\mathbf{B})$, как это было ранее. Из уравнений движения спутника видно, что при стационарном значении угла нутации отсутствуют собственные вращения спутника. В работе [96] такое движение названо резонансом $\omega_1 = 0$, что указывает на отсутствие у твердого тела собственного вращения вокруг оси симметрии.

Рассмотрим изменение углов ρ и σ , определяющих направление кинетического момента. Исследуем устойчивость положения кинетического момента вдоль вектора индукции магнитного поля. Для доказательства устойчивости этого положения будем использовать $V = 1 - (\sin \Theta \cos \Sigma \sin \rho + \cos \Theta \cos \rho)$ в качестве функции Ляпунова. Аналогично приведенному ранее рассуждению можно получить, что эта функция в точке $\Sigma = 0$, $\rho = \Theta$ имеет строгий локальный минимум, значение в котором равно нулю. Вычислим полную производную функции V с учетом уравнений движения:

$$\begin{aligned} V' = & -\frac{1}{8}k \left[8 \sin^2 \Sigma \sin^2 \Theta (\cos \Theta \cos \rho + \cos \Sigma \sin \Theta \sin \rho) - \right. \\ & \left. - (-\cos \Theta \sin \rho + \cos \Sigma \sin \Theta \cos \rho) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \sin 2\rho \left((3 + \cos 2\Sigma) \cos 2\Theta_B + 2 \sin^2 \Sigma \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4 \cos 2\rho \cos \Sigma \sin 2\Theta_B \right\} \right] (\psi' (3 + \cos 2\theta) / 4 + \varphi' \cos \theta). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Проанализируем зависимость от переменных ρ и Σ первого сомножителя в выражении (9.7), который далее обозначим v . В стационарной точке значение этого сомножителя равно нулю. Первые частные производные этой функции в стационарной точке также равны нулю: $v'_\rho = v'_\Sigma = 0$. Далее, запишем вторые производные функции v в стационарной точке: $v''_{\Sigma\Sigma} = 16 \sin^2 \Theta$, $v''_{\Sigma\rho} = v''_{\rho\Sigma} = 0$, $v''_{\rho\rho} = 16$. Определим знаки миноров у матрицы вторых производных:

$$v''_{\Sigma\Sigma} = 16 \sin^2 \Theta > 0, \quad \begin{vmatrix} v''_{\Sigma\Sigma} & v''_{\rho\Sigma} \\ v''_{\Sigma\rho} & v''_{\rho\rho} \end{vmatrix} = 256 \sin^2 \Theta > 0$$

Согласно критерию Сильвестра получаем, что в стационарной точке функция v имеет строгий локальный минимум с нулевым значением. Для отрицательно определенной исходной функции V в окрестности стационарной точки достаточно, чтобы второй сомножитель был положительным:

$$\psi'(3 + \cos 2\theta)/4 + \varphi' \cos \theta > 0. \quad (9.8)$$

Подставим в (9.8) выражения для ψ' и φ' из (9.1), удержав в них выражения нулевого и первого порядка малости по параметру ε . Будем предполагать, что угол θ находится вблизи стационарной точки и, следовательно, $\cos \theta$ имеет порядок ε . Пренебрежем также членами $k\varepsilon$, что справедливо, если влияние гистерезисных стержней мало по сравнению с влиянием постоянного магнита, т.е. если k мало. В результате получим условие на величину безразмерного кинетического момента l :

$$l^2 + \frac{\varepsilon^2}{\kappa^2 l^2} + \frac{\varepsilon^4}{\kappa^3 l^6} > 0.$$

Это неравенство может не выполняться, только если $\kappa < 0$ и величина безразмерного кинетического момента l мала. Но случай малого l здесь не рассматривается, поскольку в этом случае переменная ψ не является быстрой переменной и проводить по ней усреднение уравнений движения нельзя. Таким образом, при устойчивом значении угла θ ориентация кинетического момента спутника также асимптотически устойчива.

В итоге, показано, что функция V удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Ляпунова. Существование такой функции и выполнение условия $V' < 0$ в «выколотой» окрестности стационарной точки доказывает асимптотическую устойчивость этой точки.

Для доказательства асимптотической устойчивости стационарной точки $\Sigma = \pi$, $\rho = \pi - \Theta$ используется кандидат в функцию Ляпунова $V = 1 + (\sin \Theta \cos \Sigma \sin \rho + \cos \Theta \cos \rho)$. Она является положительно определенной в окрестности $\Sigma = \pi$, $\rho = \pi - \Theta$. Ее полная производная будет отрицательно знакоопределенной при выполнении того же неравенства на угол θ , что и для предыдущей стационарной точки. Проверив выполнение этого неравенства для стационарной точки θ_0 уравнения (9.6), получаем, что в реализуемой ситуации оно выполне-

но. Следовательно, такое направление кинетического момента также асимптотически устойчиво.

Анализ уравнений показывает, что при описанном стационарном режиме отсутствует уменьшение кинетического момента, даже при наличии на спутнике гистерезисных стержней. Это движение реализуется из-за того, что не происходит их перемагничивания. Наличие же на спутнике гистерезисных стержней делает этот режим асимптотически устойчивым. При наличии осевой начальной закрутки, как это случилось с ТНС-0, возможен выход спутника на режим перманентного вращения, когда не происходит перемагничивания стержней. В итоге, за счет «игры» магнитного и гироскопического момента, вдоль вектора \mathbf{B} ориентируется вектор кинетического момента, а ось ориентации спутника прецессирует вокруг этого вектора.

9.2 Обработка кратковременных измерений при быстром вращении спутника

Измерения, получаемые со спутника, покрывали время порядка нескольких минут. Обработка представляла собой предварительный логический анализ измерения, составление простой модели движения и последующее определение параметров этой простой модели путем сопоставления реальных и моделируемых измерений. Каждый кратковременный сеанс измерений анализировался отдельно. Однако на всех измерениях видно нечто общее – быстрое вращение спутника. Определяя период изменения сигнала на измерениях, можно сделать вывод о скорости вращения спутника.

Спутник ТНС-0 имеет форму цилиндра и в дальнейшем опять будем считать, что он обладает осевой динамической симметрией ($A = B > C$). Динамику спутника будем описывать с помощью уравнений в оскулирующих переменных (1.13). Вследствие того, что спутник быстро вращается, можно ввести малый безразмерный параметр ε . Поскольку мы рассматриваем движение спутника на достаточно коротком интервале времени, то положим переменные l, ρ, σ, θ постоянными, так как их производные пропорциональны ε . В выражениях производных для переменных φ, ψ также сохраним только не малые члены. Фактически – это предположение о том, что в движении спутника реализуется случай Эйлера вращения твердого тела и уравнения движения легко интегрируются

$$L = L_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad \theta = \theta_0,$$

$$\phi = L_0 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \cos \theta_0 (t - t_0) + \phi_0, \quad \psi = \frac{L_0}{A} (t - t_0) + \psi_0.$$

Здесь введен момент начала измерения t_0 . При принятых допущениях получаем, что система $OL_1L_2L_3$ является инерциальной. Поскольку теперь имеется некий произвол в задании системы координат $OL_1L_2L_3$, то определим ее следующим образом: начало, как и раньше, поместим в центр масс спутника; ось OL_3 совпадает с вектором кинетического момента спутника; ось OL_1 определим так, чтобы направление на Солнце лежало в плоскости OL_1L_3 ; ось OL_2 дополняет систему координат до правой ортогональной.

Направление на Солнце в системе $OL_1L_2L_3$ будем задавать углом β , а направления на Землю двумя углами – α и γ (рис. 9.2). По причине небольшой продолжительности каждого сеанса измерений также будем считать, что направления на Солнце и Землю остаются постоянными в течение одного сеанса.

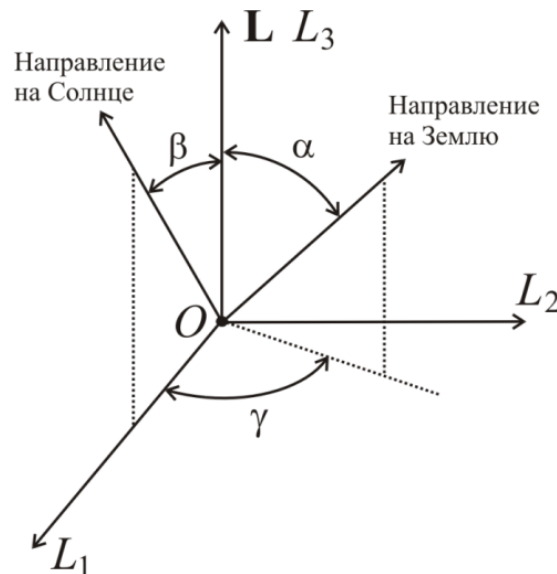


Рис. 9.2. Направление на Солнце и на Землю в системе координат $OL_1L_2L_3$

Таким образом, для того чтобы моделировать измерения солнечных датчиков за время одного сеанса, необходимо знать набор постоянных величин $L_0, \theta_0, \psi_0, \phi_0, t_0, \beta$ при отсутствии альбедо Земли и $L_0, \theta_0, \psi_0, \phi_0, t_0, \beta, \alpha, \gamma, k$ – при его наличии. Здесь k – коэффициент, указывающий, во сколько раз альбедо Земли меньше излучения от Солнца. Поскольку альбедо Земли зависит от положения

спутника на орбите, то этот коэффициент может быть различным для разных сеансов измерений.

Задавая определенным образом набор постоянных величин, можно моделировать измерения солнечных датчиков. Реальные и моделируемые измерения можно сравнить и вычислить среднеквадратичное отклонение. Если набор постоянных величин неизвестен, то для их определения следует ввести среднеквадратичное отклонение как функцию этих параметров и найти его минимум. Точка минимума среднеквадратичного отклонения укажет искомые значения неизвестных параметров. Именно таким образом производилось определение параметров движения на основании измерений солнечных датчиков.

Поскольку среднеквадратичное отклонение имеет множество локальных минимумов, найти глобальный минимум методом градиентного спуска не представляется возможным. Для нахождения минимума в данном случае строилась сетка значений по каждой переменной в пределах ее изменения. Для углов θ_0 , ψ_0 , φ_0 , пределы изменения – $[0; \pi]$, $[0; 2\pi)$, $[0; 2\pi)$ соответственно. Предел изменения величины кинетического момента определяется следующим образом. По двум ближайшим пикам измерений в одном сеансе определялось максимально возможное значение кинетического момента (по одному из датчиков) $L = 2\pi A / \min t$, где A – максимальный из главных центральных моментов инерции, $\min t$ – время между ближайшими пиками. После этого методом полного перебора по узлам сетки отыскивался минимум. Далее выбиралась некоторая окрестность точки минимума. В этой окрестности также строилась уже более мелкая сетка, и отыскивался минимум. Описанная последовательность действий повторялась до достижения заданной точности определения параметров. В некоторых случаях оказывалось возможным сначала построить сетку и произвести минимизацию по одним параметрам, а потом по другим поочередно. Это заметно упрощало вычисления.

В таблице 9.1 приводятся результаты определения постоянных величин; время измеряется в секундах, углы – в радианах, кинетический момент – в $[\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}]$. На рис. 9.3 – рис. 9.6 приводятся результаты обработки данных для разных сеансов измерений. На графиках изображены расчетные и измеренные зависимости косинусов углов между направлением на Солнце и плоскостью соответствующих солнечных датчиков.

Далее опишем особенности каждой серии измерений. На рис. 9.6 показано изменение величины кинетического момента за время проводившихся измерений. Здесь время измеряется в часах, ноль соответствует первому сеансу измерений.

Таблица 9.1. Найденные значения постоянных величин для каждого сеанса измерений

	L_0 кг·м/с ²	θ_0	ψ_0	ϕ_0	t_0 с	β	α	γ	k
1	0.0936	1.086	5.952	1.653	20.36	0.80	-	-	-
2	0.0644	1.571	3.968	3.968	0	0.99	1.819	2.417	0.6
3	0.0562	1.571	3.942	4.028	2.143	0.80	1.984	2.094	0.16
4	0.0535	1.571	1.396	0.9	0	3.14	0.33	1.77	0.7
5	0.0517	1.571	0.698	4.188	0	0.524	2.14	0.16	0.2
6	0.0431	1.571	1.653	0.992	0	1.772	1.32	4.188	0.2
7	0.017	1.571	5.925	3.968	0	2.314	1.984	2.416	0.6

Данные от 28.03.2005, 09:42 (рис. 9.3)

Это первый сеанс измерений. Видно, что спутник вращается с довольно большой скоростью. На измерениях отсутствуют локальные максимумы, которые не достигали бы значений, близких к максимальным. Из этого факта можно сделать вывод, что на этих измерениях, скорее всего, отсутствует альbedo Земли. Поэтому для обработки этих измерений использовался соответствующий этому случаю набор определяемых величин.

Данные от 06.04.2005, 14:05 (рис. 9.4)

На этом рисунке отчетливо видны пики локальных максимумов, которые не достигают значений, близких к максимальным. Это говорит о присутствии на измерениях альbedo Земли. Для обработки измерений использовался набор определяемых величин, содержащий углы направления на Землю.

Необходимо отметить, что в силу расположения первый и третий солнечные датчики не могут одновременно засвечиваться одним источником. То есть при наличии ненулевых данных с этих двух датчиков в одно и то же время можно говорить, что один из них засвечивается Солнцем, другой – Землей. По значению измеряемых величин определялось, какой именно датчик засвечивается тем или иным источником. То, что в показаниях первого датчика за все время измерений ни разу не появилось Солнце, говорит об отсутствии собственно го вращения спутника. При движении твердого тела в случае Эйлера

его собственное вращение (при наличии прецессионного движения) может отсутствовать, только если угол нутации θ_0 равен $\pi/2$.

Для того чтобы легче определить параметры, сначала из исходных измерений «удалялись» локальные максимумы, полученные от альбедо Земли. В местах, где располагались эти максимумы, значения сигнала полагались равными нулю. Это позволило сначала определить некоторые величины, не зависящие от альбедо, а потом, не изменяя уже найденные величины, определить оставшиеся.

Данные от 09.04.2005, 03:04 (рис. 9.5)

На этих измерениях второй и третий датчики полностью засвечены Солнцем. Первый датчик видит альбедо Земли. Аналогично обработке измерений от 06.04.2005, 14:05 из этих измерений исключались сигналы от альбедо Земли, то есть показания первого датчика полагались нулевыми. Сначала определялись некоторые величины, не зависящие от альбедо, а потом, без изменения уже найденных величин, определялись оставшиеся.

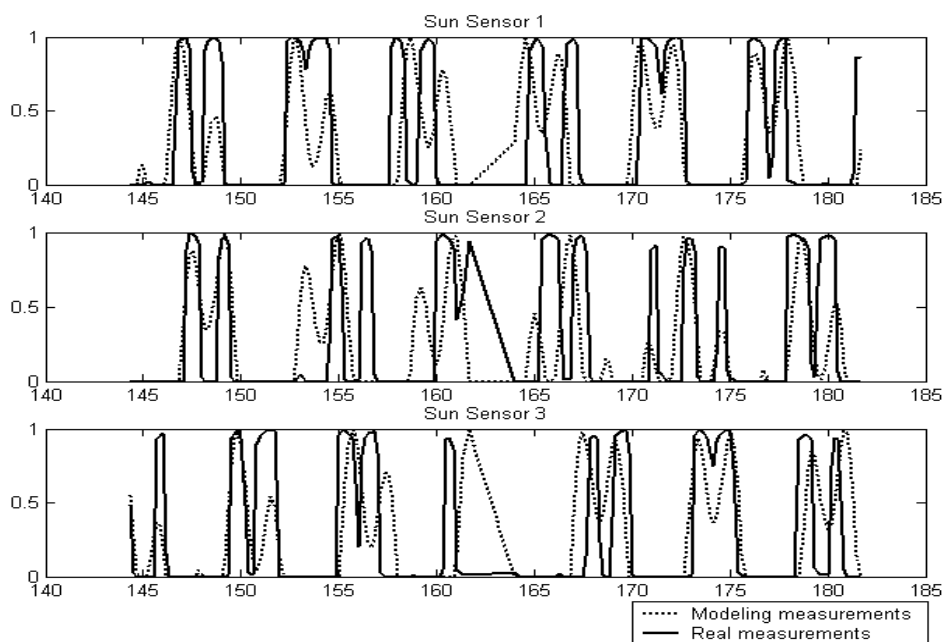


Рис. 9.3. Зависимость косинуса угла между нормалью к плоскости датчика и направлением на Солнце для датчиков 1, 2, 3 соответственно.

Данные от 28.03.2005, 09:42

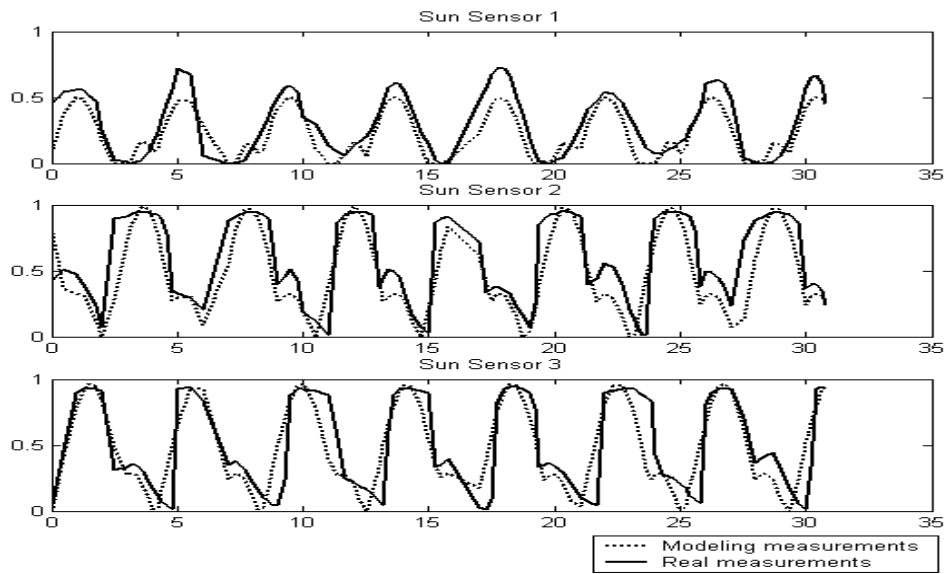


Рис. 9.4. Зависимость косинуса угла между нормалью к плоскости датчика и направлением на Солнце для датчиков 1, 2, 3 соответственно.
Данные от 06.04.2005, 14:05

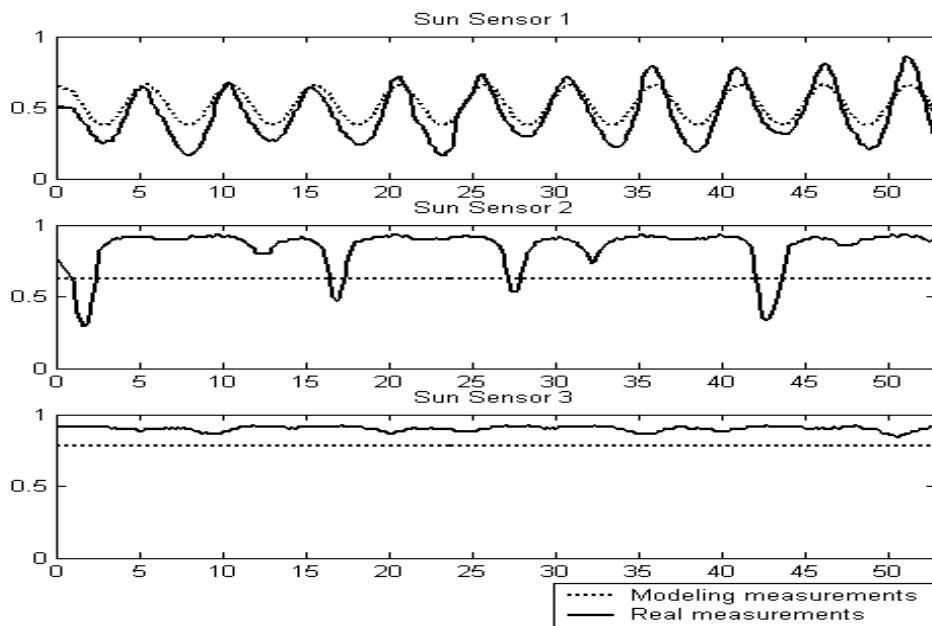


Рис. 9.5. Зависимость косинуса угла между нормалью к плоскости датчика и направлением на Солнце для датчиков 1, 2, 3 соответственно.
Данные от 09.04.2005, 03:04

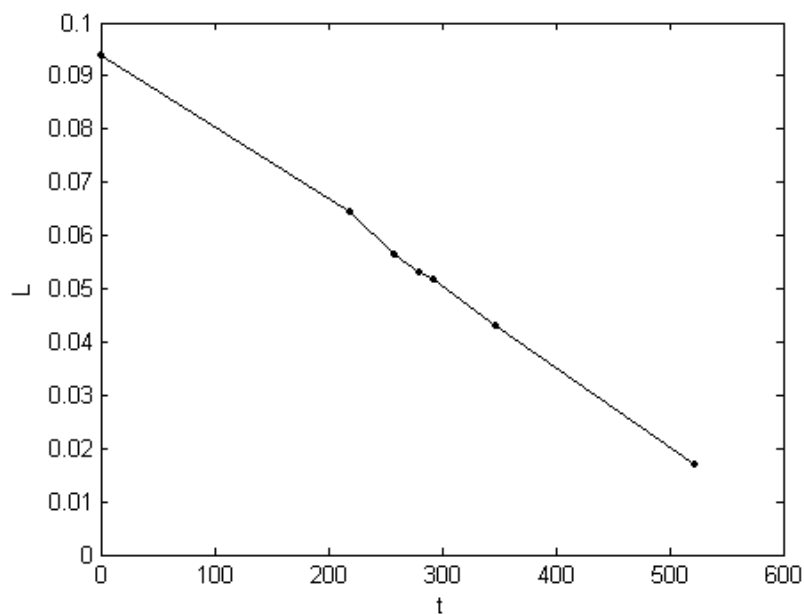


Рис. 9.6. Изменение величины кинетического момента спутника ТНС-0 от времени (кинетический момент измеряется в [кг м²/с], время – в [ч])

Вычисления по определению фактической ориентации наноспутника *ТНС-0* по результатам летных испытаний и интерпретации его движения были выполнены А.А. Ильиным и опубликованы в [97].

Глава III. Активные магнитные системы ориентации

Область применения активных магнитных систем ориентации, использующих показания датчиков для формирования управляющих воздействий, заметно шире, чем пассивных систем. Далее алгоритмы ориентации будут рассмотрены в порядке усложнения реализуемого ими режима.

Так, вначале будет рассмотрен алгоритм демпфирования угловой скорости колебаний. В этом случае оказывается, что проблема ограничения на направление механического момента¹ не возникает: может быть построен алгоритм управления, уменьшающий угловую скорость спутника до нуля (в отсутствие внешних возмущений). Более того, упрощенная версия этого алгоритма может быть реализована на бортовом компьютере особенно просто и требует лишь двух последовательных измерений магнитометра.

Затем будет рассмотрена одноосная ориентация спутника, стабилизируемого собственным вращением. Ограничение на управление при этом компенсируется собственными свойствами спутника, ведущего себя подобно гироскопу в инерциальном пространстве. Использование дополнительных пассивных исполнительных элементов – гравитационной штанги и тангажного маховика – делает возможным обеспечение трехосной ориентации аппарата, но лишь в определенных положениях.

Наконец, рассматривается произвольная трехосная ориентация аппарата, обеспечиваемая с помощью одной магнитной системы ориентации.

10 Алгоритм демпфирования угловой скорости

Equation Section (Next) Алгоритмы демпфирования, в частности - *Bdot*, часто используются на начальном этапе движения спутника, даже если магнитная система ориентации не включена в контур управления при обеспечении точной требуемой ориентации. Это связано с простотой и надежностью алгоритма, большими точностью и быстродействием по сравнению с пассивными системами, а также использо-

¹ В англоязычной литературе принято говорить о неуправляемости (*underactuation*), хотя на самом деле подразумевается лишь ограничение на направление момента, что необязательно влечет неуправляемость.

ванием измерений всего одного датчика – трехосного магнитометра, к тому же не требующих обработки.

10.1 Варианты алгоритма демпфирования

Дипольный магнитный момент спутника согласно закону управления $-B\dot{\omega}$ задается выражением

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (10.1)$$

где k – постоянный положительный коэффициент. При наличии информации об угловой скорости спутника (за счет установки датчика угловой скорости или динамической фильтрации показаний датчиков) возможно использование алгоритма

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}) \quad (10.2)$$

или, если речь идет о гашении относительной угловой скорости,

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}). \quad (10.3)$$

Последние два алгоритма представляются предпочтительными, так как позволяют демпфировать угловую скорость до нуля (в отсутствие возмущающих моментов), тогда как закон управления (10.1) позволяет гасить угловую скорость до величины порядка двух орбитальных, то есть собственной скорости вращения вектора геомагнитной индукции.

Построение алгоритма управления

Покажем, что алгоритм демпфирования может эффективно использоваться для обеспечения стабилизации в орбитальных осях, если на спутник действует гравитационный момент. Уравнения (1.1) в случае действия только гравитационного момента допускают обобщенный интеграл энергии¹

$$J = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + 3\omega_0^2 \mathbf{e}_3 \mathbb{J} \mathbf{e}_3 - \omega_0 \mathbf{e}_2 \mathbb{J} \boldsymbol{\omega}) = const, \quad (10.4)$$

где $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$ – орты радиус-вектора центра масс спутника и нормали к плоскости орбиты в ССК. В том случае, когда на спутник также действует магнитный момент, выражение в (10.4) уже не будет сохраняться. Рассмотрим

¹ Далее в записи *const* будем опускать.

$$V = J - \omega_0^2 (3C - B)/2$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова и найдем производную этого выражения в силу уравнений движения,

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^3 (\omega_i - \omega_0 a_{2i}) M_{y_{np}i} = \mathbf{M}_{y_{np}} (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_3).$$

Так как $\mathbf{M}_{y_{np}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, то последнее выражение можно переписать в виде

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{m} (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega}),$$

что позволяет определить момент (10.3), обеспечивающий асимптотическую устойчивость орбитальной ориентации спутника.

Другой подход к построению алгоритма демпфирования основан на рассмотрении изменения кинетической энергии вращательного движения спутника

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} \right) = \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} < 0.$$

Если на спутник действует только магнитный момент, это условие означает $\boldsymbol{\omega} (\mathbf{m} \times \mathbf{B}) < 0$. После преобразований получаем $\mathbf{m} (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}) < 0$. Этому условию удовлетворяет управление (10.2), аналогичное (10.3) в инерциальном пространстве.

10.2 Переходные процессы

Наибольший интерес при исследовании алгоритма демпфирования представляют переходные процессы. Основная задача здесь – выяснить, как быстро происходит уменьшение угловой скорости, какие параметры спутника влияют на скорость демпфирования. Вычислим производную вектора геомагнитной индукции в системе $Ox_1x_2x_3$ через его производную в инерциальной системе $O_aJ_1J_2J_3$ (опорная система координат) по следующей формуле [29]:

$$\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \frac{d\mathbf{B}_J}{dt} - \boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x. \quad (10.5)$$

Рассмотрим теперь быстрые вращения спутника, при которых первым слагаемым, описывающим вращение вектора \mathbf{B} относительно инерциального пространства, в правой части (10.5) можно пренебречь, то есть считаем, что угловая скорость спутника намного больше его

орбитальной скорости. Такой режим может иметь место на начальном этапе движения спутника, когда он имеет большую угловую скорость, полученную при отделении от носителя. В этом случае использование магнитной системы позволяет демпфировать начальную угловую скорость, после чего управление движением спутника может быть организовано с использованием другого алгоритма или даже другой системы ориентации. Итак, будем рассматривать движение спутника под действием управления (10.2) и, соответственно, момента

$$\mathbf{M}_x = k(\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{V}_x) \times \mathbf{V}_x. \quad (10.6)$$

Выразим угловую скорость спутника через его кинетический момент: $\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{L}_x$, откуда

$$\boldsymbol{\omega}_x = L(a_{31}/A, a_{32}/A, a_{33}/C).$$

Будем рассматривать осесимметричный спутник, опираясь на уравнения (1.13). В этих уравнениях присутствуют компоненты внешнего момента, которые необходимо задать в системе $OL_1L_2L_3$, учитывая $\boldsymbol{\omega}_L = \mathbb{D}\boldsymbol{\omega}_x$ и $\mathbf{V}_L = \mathbb{Q}^T \mathbf{V}_x$,

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} \omega_{3L} B_{1L} B_{3L} - \omega_{1L} B_{3L}^2 - \omega_{1L} B_{2L}^2 + \omega_{2L} B_{1L} B_{2L} \\ \omega_{1L} B_{1L} B_{2L} - \omega_{2L} B_{1L}^2 - \omega_{2L} B_{3L}^2 + \omega_{3L} B_{2L} B_{3L} \\ \omega_{2L} B_{2L} B_{3L} - \omega_{3L} B_{2L}^2 - \omega_{3L} B_{1L}^2 + \omega_{1L} B_{1L} B_{3L} \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь уравнения движения спутника в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерный момент $\bar{\mathbf{M}}_L$, определяемый выражением

$$\mathbf{M}_L = \frac{kB_0^2 L}{C} \bar{\mathbf{M}}_L. \quad (10.7)$$

Перейдем в (1.13) к дифференцированию по аргументу широты $u = \omega_0(t - t_0)$, где t_0 – начальный момент времени. Введем безразмерный кинетический момент l по формуле $L = L_0 l$, где L_0 – начальный кинетический момент спутника. Все это позволяет записать уравнения движения (1.13) в виде

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \varepsilon l \bar{M}_{3L}, & \dot{\rho} &= \varepsilon \bar{M}_{1L}, & \dot{\sigma} &= \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \bar{M}_{2L}, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon (\bar{M}_{2L} \cos \psi - \bar{M}_{1L} \sin \psi), \\ \dot{\phi} &= \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\bar{M}_{1L} \cos \psi + \bar{M}_{2L} \sin \psi), \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\dot{\psi} = \eta_2 l - \varepsilon \bar{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \bar{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta).$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{\omega_0 C}$, $\eta_1 = \frac{L_0}{\omega_0} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$, $\eta_2 = \frac{L_0}{A\omega_0}$. Па-

раметр ε имеет смысл отношения изменения вектора кинетического момента за виток вокруг Земли к его значению. В случае слабого магнитного момента параметр ε и отношения $\varepsilon/\eta_i \sim kB_0^2/L_0$ малы (если спутник не близок к сферически-симметричному и не является вытянутым стержнем или диском). Эти отношения имеют смысл отношения изменения вектора кинетического момента за оборот спутника вокруг центра масс к его значению. В этом случае, как следует из вида уравнений (10.8), переменные φ, ψ, u можно считать быстрыми по сравнению с переменными l, ρ, σ, θ .

Разделение переменных на медленные и быстрые позволяет использовать известные методы усреднения [71]. Поскольку наибольший интерес представляет в первую очередь эволюция медленных переменных, к которым относится модуль вектора кинетического момента, будем рассматривать первое приближение по степеням параметра ε . Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения. Порождающим решением является регулярная прецессия вокруг вектора кинетического момента. Поскольку при $\varepsilon = 0$ быстрые переменные изменяются равномерно, при усреднении временное и пространственное средние совпадают, поэтому достаточно усреднить правую часть уравнений для медленных переменных независимо по всем быстрым переменным. Для этого также будем считать, что моменты инерции A и C выбраны так, что η_1, η_2 и 1 (скорость изменения u) рационально несоизмеримы. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u, \varphi, \psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u, \varphi, \psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u, \varphi, \psi}$. Для усреднения (10.8) по u необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_i B_j du \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (10.9)$$

где B_i – компоненты безразмерного геомагнитного поля в системе $O_a J_1 J_2 J_3$, определяемые выражениями (2.7). В результате получаем

$B_{11} = B_{22} = p = 1/2 \sin^2 \Theta$, $B_{33} = q = \cos^2 \Theta$, $B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0$. Усредняя, получаем уравнения, описывающие эволюцию переменных l , ρ , σ , θ ,

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -\varepsilon l \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \left[(1 - q_{13}^2) B_{11} + (1 - q_{23}^2) B_{22} + (1 - q_{33}^2) B_{33} \right], \\ \dot{\rho} &= \varepsilon \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] [q_{11} q_{13} B_{11} + q_{21} q_{23} B_{22} + q_{31} q_{33} B_{33}], \\ \dot{\sigma} &= \varepsilon \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \frac{1}{\sin \rho} [q_{12} q_{13} B_{11} + q_{22} q_{23} B_{22}], \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta \left[B_{11} (1 + q_{13}^2) + B_{22} (1 + q_{23}^2) + B_{33} (1 + q_{33}^2) \right], \end{aligned} \quad (10.10)$$

где $\lambda = 1/2(1 - C/A)$. Учитывая выражения для B_{ij} , получаем окончательно

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -\varepsilon l \left[2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\rho} &= \varepsilon (3p - 1) \sin \rho \cos \rho \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\sigma} &= 0, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \lambda \left[2(1 - p) + (3p - 1) \sin^2 \rho \right] \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Решение полученной системы уравнений удастся найти в квадратурах. Рассмотрим сначала два частных случая.

1. Спутник сферически-симметричный, то есть $A = B = C$. Тогда все рассуждения о разделении переменных остаются в силе (φ становится медленной переменной, но усреднение по ней не требуется), а усредненная система первого приближения для медленных переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -\varepsilon l \left[2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho \right], \\ \dot{\rho} &= \varepsilon (3p - 1) \sin \rho \cos \rho, \\ \dot{\sigma} &= 0, \quad \dot{\theta} = 0. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Интегрируя эту систему и учитывая, что $l(0) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} l &= \exp \left[-2\varepsilon p u + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \exp(2\varepsilon(3p - 1)u + 2c_0)}{1 + \exp 2c_0} \right) \right], \\ \rho &= \arctg \left[\exp(\varepsilon(3p - 1)u + c_0) \right], \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\sigma = \sigma_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где $c_0 = \ln \operatorname{tg} \rho_0$. В результате имеем зависимость модуля вектора кинетического момента спутника от наклона орбиты i . На рис. 10.1 представлены графики уменьшения модуля кинетического момента для разных наклонов орбиты.

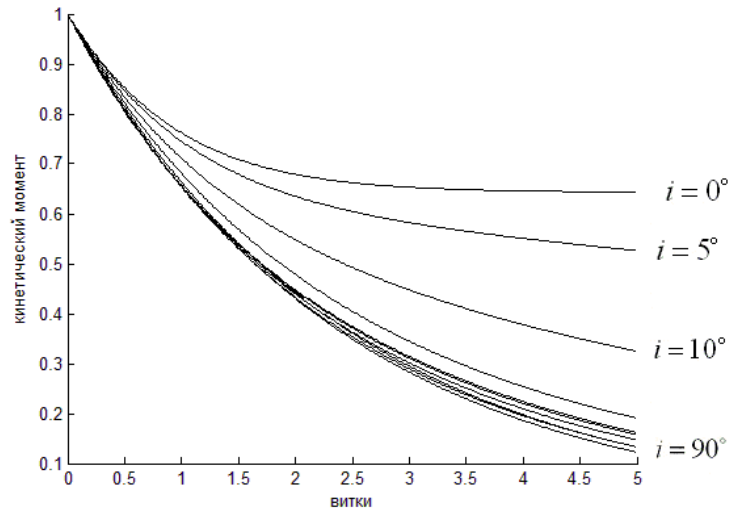


Рис. 10.1. Демпфирование в случае сферически-симметричного спутника

2. Случай $3p - 1 = 0$, то есть $i = i_0 \approx 46^\circ$. При этом наклонении $B_{11} = B_{22} = B_{33}$. При меньших наклонениях проекция среднего вектора геомагнитной индукции на ось $O_a J_3$ больше, чем на плоскость $O_a J_1 J_2$, при больших наклонениях — меньше. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{2}{3} \varepsilon l \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\rho} &= 0, \quad \dot{\sigma} = 0, \\ \dot{\theta} &= \frac{4}{3} \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Интегрируя последнее выражение в (10.14), получаем

$$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \theta| - c_0 = \frac{2}{3} \varepsilon \lambda u,$$

где $c_0 = 1/2 \ln |\operatorname{tg} \theta_0|$. Отсюда $\operatorname{tg}^2 \theta = \exp(8/2 \varepsilon \lambda u + 4c_0) = f(u)$ и для l получаем уравнение

$$\dot{i} = -\frac{2}{3} \varepsilon l \frac{A + Cf(u)}{A + Af(u)},$$

откуда

$$l = \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\exp \left(\frac{8}{3} \varepsilon \lambda u + 4c_0 \right) + 1}{\exp(4c_0) + 1} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon u \right]. \quad (10.15)$$

Рассмотрим теперь общий случай. Разделим в (10.11) первое уравнение на второе и сгруппируем одноименные переменные. Тогда получим уравнение

$$\frac{dl}{l} = - \frac{2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho.$$

Знаменатель в правой части не равен нулю (иначе, см. выше случай 2). Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln l = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho| - c_0,$$

где $c_0 = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho_0 + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho_0|$. Таким образом, имеем первый интеграл уравнений (10.11)

$$I_1(l, \rho) = \ln l - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho|.$$

Этот интеграл можно представить в виде

$$I_1(l, \rho) = (3p - 1) \ln l - \frac{1}{2} (3p - 1) \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + 2p \ln |\operatorname{tg} \rho|. \quad (10.16)$$

Тогда при $3p - 1 = 0$ получаем $\rho = \rho_0$ (случай 2).

Разделим теперь второе уравнение на третье из (10.11) и получим

$$\frac{2(1 - p) + (3p - 1) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho = \frac{1}{\lambda} \frac{\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta. \quad (10.17)$$

Знаменатели в выражениях слева и справа не равны нулю (иначе, см. случаи 2 и 1 соответственно). Интегрирование уравнения (10.17) дает еще один первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = \frac{\lambda}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \lambda \frac{2 - 2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho| - \ln |\sin \theta| + \frac{C}{A} \ln |\cos \theta|.$$

Аналогично интеграл представим в виде

$$I_2(\rho, \theta) = (3p-1) \left(\frac{\lambda}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \ln|\sin \theta| + \frac{C}{A} \ln|\cos \theta| \right) + \lambda(2-2p) \ln|\operatorname{tg} \rho| \quad (10.18)$$

и при $3p-1=0$ получаем $\rho = \rho_0$ (случай 2).

Интеграл $I_2(\rho, \theta)$ задает θ как неявную функцию ρ . Из (10.18) видно, что $I_2(\rho, \theta)$ на некоторых интервалах (например, $\theta \in (0, \pi/2)$) удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции [98], так как существует производная по θ и первый интеграл непрерывен, тогда можно определить θ как функцию ρ . Аналогичные рассуждения можно применить к (10.16) и записать ρ как функцию l . Тем самым, решение уравнений (10.11) находится в квадратурах.

Кинетический момент является функцией трех параметров: $l = l(i, \rho_0, \theta_0)$. Тогда на быстродействие алгоритма могут оказать влияние наклонение орбиты и начальные условия – угол между вектором кинетического момента и осью конуса осредненной модели и угол между осью симметрии спутника и вектором кинетического момента. На рис. 10.2 и рис. 10.3 показано влияние наклонения орбиты и ρ_0 .

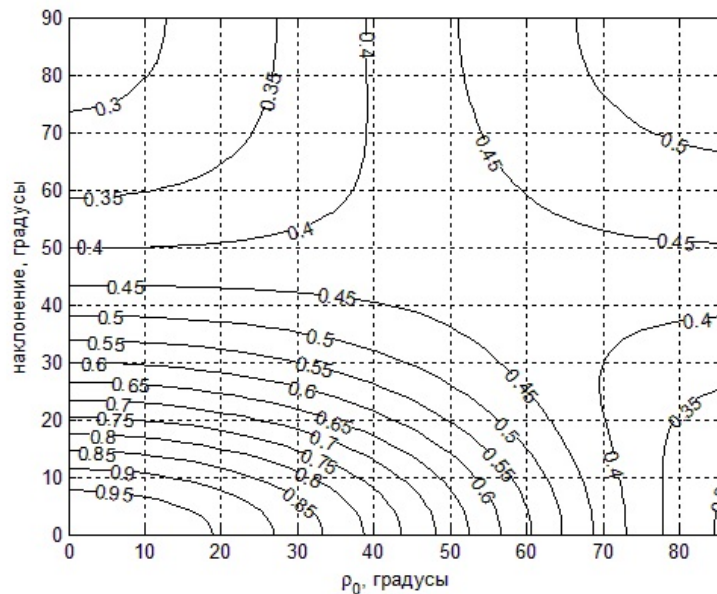


Рис. 10.2. Значение кинетического момента через 2 витка

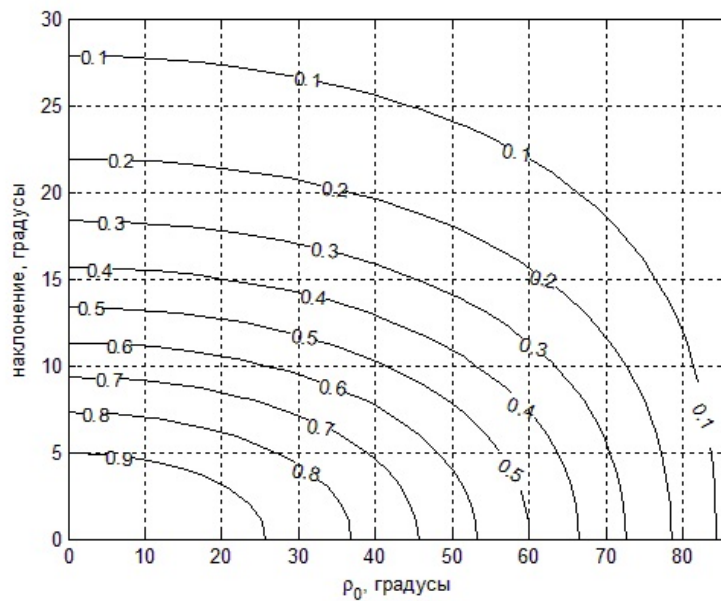


Рис. 10.3. Значение кинетического момента через 10 витков

На рис. 10.2 и рис. 10.3 представлены изолинии, соответствующие значению кинетического момента через два (рис. 10.2) и через десять (рис. 10.3) витков в зависимости от наклона орбиты и ρ_0 (на изолиниях нанесены значения безразмерного кинетического момента). При этом учтено, что уравнения (10.11) симметричны относительно $\rho = 0$ и $\rho = \pi/2$. Рис. 10.2 и рис. 10.3 практически не изменяются при изменении θ_0 . Как видно из рис. 10.2, при ρ_0 , близких к π (отметим, что при $\rho = \pi/2$ уравнения (1.13) не имеют смысла, так как не имеет смысла угол σ), кинетический момент демпфируется быстрее при меньших наклонах. Однако рис. 10.3 позволяет заключить, что быстродействие алгоритма растет с увеличением наклона. Для объяснения этого расхождения обратимся к соотношениям (10.13). При ρ_0 , близких к 90° , в течение некоторого небольшого времени (это время увеличивается с уменьшением наклона) в показателе экспоненты превалирует второе слагаемое, зависящее от ρ_0 . Через некоторое время превалировать начинает первое слагаемое, которое монотонно убывает, тогда как второе либо ограничено (при $3p - 1 < 0$), либо возрастает медленнее. Анализ уравнений показал, что влияние θ_0 аналогично влиянию ρ_0 . В течение некоторого времени также может наблюдаться большее быстродействие при меньшем наклоне орбиты (влияние первого слагаемого в (10.15)). В [99] было показано,

что кинетический момент спутника под действием момента (10.6) стремится к определенному положению в инерциальном пространстве. Полученное решение позволяет найти это направление. Действительно, найдем наклонение i_0 , определяющее ориентацию вектора кинетического момента в инерциальном пространстве. Значение i_0 , как следует из (10.13), определяется из знака выражения $\varepsilon(3p-1)u$, то есть $i_0 \approx 46^\circ$. При наклонении, меньшем, чем i_0 , кинетический момент спутника стремится ориентироваться вдоль оси конуса осредненной модели геомагнитного поля, при наклонении более i_0 – перпендикулярно ей. При $i = i_0$ направление вектора кинетического момента в инерциальном пространстве не изменяется (см. случай 2). Анализ общего случая подтверждает существование полученного «пограничного» значения i_0 .

На рис. 10.4 приведено сравнение результатов интегрирования системы (10.11) с контролем точности и интегрирования исходной системы (10.8) при $\varepsilon = 0.1$, $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 5$ (при таких параметрах η_1, η_2 , моментах инерции спутника $A = 3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, орбитальной скорости $\omega_0 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, угловая скорость спутника в начальный момент времени на порядок больше его орбитальной скорости), $\rho_0 = 1$, $\theta_0 = 1$, $i = 80^\circ$. Сплошная линия соответствует решению исходной системы, штриховая – решению усредненной. Как видно из рис. 10.4, решения исходных и усредненных уравнений совпадают с точностью до $O(\varepsilon)$.

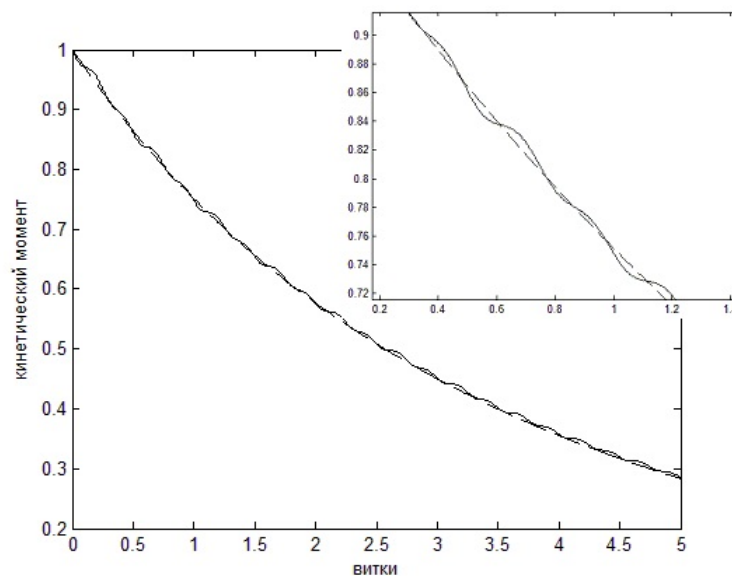


Рис. 10.4. Сравнение решения исходных и усредненных уравнений

Рассмотрим теперь установившееся движение спутника под управлением алгоритма $-V\dot{dot}$.

10.3 Установившееся движение

Традиционно при исследовании алгоритма демпфирования предполагается, что спутник вращается с высокой скоростью, значительно превосходящей орбитальную, $\omega \gg \omega_0$. В этом случае управление (10.1) «переходит» в (10.2), что и было использовано в предыдущем разделе. Если же принять во внимание собственную скорость вращения вектора индукции, следует ожидать, что демпфирование возможно лишь до величины, примерно равной двойной орбитальной – скорости вращения вектора геомагнитной индукции в инерциальном пространстве. Покажем, что это вращение происходит вокруг оси максимального момента инерции и найдем величину скорости.

Устойчивость вращения спутника

Для решения первой проблемы используем осредненную модель геомагнитного поля. Точность аппроксимации поля в этом случае должна позволить выявить качественную характеристику движения – выделенное в теле спутника направление, вдоль которого происходит вращение. Ориентация спутника описывается с помощью углов α, β, γ (последовательность поворотов 3-1-2) и компонент абсолютной $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ угловой скорости. Для выбранной последовательности поворотов матрица перехода от опорной системы к связанной имеет вид

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Кинематические уравнения –

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_1 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_1 \cos \gamma + \omega_3 \sin \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_2 + \operatorname{tg} \beta (\omega_1 \sin \gamma - \omega_3 \cos \gamma).\end{aligned}\tag{10.20}$$

Предположим, что вращение происходит вдоль третьей оси спутника, и найдем условия, при которых существует положение равновесия $\beta = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Принимая во внимания последние условия, для дипольного момента получаем

$$\mathbf{m} = k \sin \Theta \begin{pmatrix} -\omega_3 \cos(\alpha - 2u) + 2\omega_0 \cos(\alpha - 2u) \\ \omega_3 \sin(\alpha - 2u) - 2\omega_0 \sin(\alpha - 2u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что $\omega_3 = 2\omega_0$ и $\alpha = 2u + \alpha_0$, то есть спутник вращается с той же скоростью, что и вектор геомагнитной индукции. Положим $\alpha_0 = 0$ и линеаризуем уравнения движения в окрестности $\alpha = 2u$, $\beta = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = 2\omega_0$. Заметим, что матрица направляющих косинусов в этом случае имеет вид

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos 2u - \alpha \sin 2u & \sin 2u + \alpha \cos 2u & -\gamma \\ -\sin 2u - \alpha \cos 2u & \cos 2u - \alpha \sin 2u & \beta \\ \gamma \cos 2u + \beta \sin 2u & \gamma \sin 2u - \beta \cos 2u & 1 \end{pmatrix},$$

вектор геомагнитной индукции в связанной системе

$$\mathbf{B}_x = B_0 \begin{pmatrix} \alpha \sin \Theta - \gamma \cos \Theta \\ \sin \Theta + \beta \cos \Theta \\ -\beta \sin \Theta + \cos \Theta \end{pmatrix},$$

компоненты управляющего дипольного момента, соответствующие изменению геомагнитного поля в связанных осях за счет вращения спутника и за счет собственного вращения вектора индукции, соответственно,

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1 &= kB_0 \begin{pmatrix} \omega_2 \cos \Theta - \omega_3 \sin \Theta - 2\omega_0 \sin \Theta - 2\omega_0 \cos \Theta \beta \\ 2\omega_0 \sin \Theta \alpha - 2\omega_0 \cos \Theta \gamma - \omega_1 \cos \Theta \\ \omega_1 \sin \Theta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{m}_2 &= 2\omega_0 kB_0 \sin \Theta (1, -\alpha, \gamma).\end{aligned}$$

После этого можно выписать безразмерные линеаризованные уравнения движения (1.1), (10.20),

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= 2\lambda_A \omega_2 - \theta_A \varepsilon (\omega_1 + 2\gamma), \\ \dot{\omega}_2 &= 2\lambda_B \omega_1 + \theta_B \varepsilon (-\omega_2 \cos^2 \Theta + \omega_3 \sin \Theta \cos \Theta + 2 \cos^2 \Theta \beta), \\ \dot{\omega}_3 &= \varepsilon (\omega_2 \cos \Theta \sin \Theta - \omega_3 \sin^2 \Theta - 2 \sin \Theta \cos \Theta \beta), \\ \dot{\alpha} &= \omega_3, \quad \dot{\beta} = \omega_1 + 2\gamma, \quad \dot{\gamma} = \omega_2 - 2\beta.\end{aligned}\quad (10.21)$$

Здесь использовано дифференцирование по аргументу широты, отнесенные к орбитальной компоненты угловой скорости, $\varepsilon = kB_0^2 / C\omega_0$, $\theta_A = C/A$, $\theta_B = C/B$, $\lambda_A = (B-C)/A$, $\lambda_B = (C-A)/B$. Уравнение для α отделилось, его далее рассматривать не будем.

Запишем характеристическое уравнение для (10.21),

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^5 C_j \lambda^j = 0, \quad (10.22)$$

где коэффициенты уравнения задаются выражениями

$$\begin{aligned}C_5 &= 1, \\ C_4 &= \theta_B \varepsilon \cos^2 \Theta + \varepsilon \sin^2 \Theta + \theta_A \varepsilon, \\ C_3 &= \theta_A \theta_B \varepsilon^2 \cos^2 \Theta + \theta_A \varepsilon^2 \sin^2 \Theta - 4\lambda_A \lambda_B + 4, \\ C_2 &= 4\theta_A \varepsilon \lambda_B - 4\lambda_A \lambda_B \varepsilon \sin^2 \Theta + 4\varepsilon \sin^2 \Theta - 4\lambda_A \theta_B \varepsilon \cos^2 \Theta, \\ C_1 &= 4\theta_A \lambda_B \varepsilon^2 \sin^2 \Theta - 16\lambda_A \lambda_B, \\ C_0 &= -16\lambda_A \lambda_B \varepsilon \sin^2 \Theta.\end{aligned}$$

Для удовлетворения необходимых условий устойчивости определим, когда все $C_j > 0$. Для C_4 и C_5 это условие верно. $C_0 > 0$ если $\lambda_A \lambda_B < 0$, то есть C является максимальным или минимальным моментом инерции. В этом случае оставшиеся C_j также положительны. Дальнейшее исследование характеристического уравнения (10.22), например с помощью критерия Рауса-Гурвица, затрудняется громоздким видом коэффициентов C_j . Заметим, что уравнения (10.21) имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}_0 \mathbf{x} + \varepsilon \mathbb{A}_1 \mathbf{x},$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \beta, \gamma)$, параметр ε можно считать малым, что зачастую верно для магнитной системы управления. Характеристические показатели также представим в виде $\lambda_j = \mu_j + \varepsilon \eta_j$. Характеристиче-

ские показатели нулевого приближения (при $\varepsilon = 0$) можно легко найти,

$$\mu_{1,2} = \pm 2\sqrt{-\lambda_A \lambda_B} i, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_{4,5} = \pm 2i \quad (i^2 = -1).$$

При этом использовалось необходимое условие устойчивости $\lambda_A \lambda_B < 0$. Коэффициенты характеристического уравнения также представим в виде $C_j = A_j + \varepsilon B_j$, где

$$\begin{aligned} A_5 &= 1, & B_5 &= 0, \\ A_4 &= 0, & B_4 &= \theta_B \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta + \theta_A, \\ A_3 &= -4\lambda_A \lambda_B + 4, & B_3 &= 0, \\ A_2 &= 0, & B_2 &= 4\theta_A \lambda_B - 4\lambda_A \lambda_B \sin^2 \Theta + 4\sin^2 \Theta - 4\lambda_A \theta_B \cos^2 \Theta, \\ A_1 &= -16\lambda_A \lambda_B, & B_1 &= 0, \\ A_0 &= 0, & B_0 &= -16\lambda_A \lambda_B \sin^2 \Theta. \end{aligned}$$

Членами порядка $O(\varepsilon^2)$ в коэффициентах пренебрегаем. Характеристическое уравнение принимает вид

$$P(\mu + \varepsilon\eta) = \sum_{j=0}^5 (A_j + \varepsilon B_j) (\mu + \varepsilon\eta)^j = 0.$$

Учитывая, что μ_j удовлетворяют (10.22), для первого приближения характеристических чисел получаем

$$\eta_j = - \frac{\sum_{k=0}^5 \mu_j^k B_k}{\sum_{k=0}^4 (k+1) \mu_j^k A_{k+1}}.$$

Принимая во внимание выражения для коэффициентов и характеристических чисел нулевого приближения, получаем первое приближение

$$\begin{aligned} \eta_{1,2} &= - \frac{\theta_A \lambda_B (1 + \lambda_A) + \theta_B \cos^2 \Theta \lambda_A (\lambda_B - 1)}{2(\lambda_A \lambda_B + 1)}, \\ \eta_3 &= - \sin^2 \Theta, \\ \eta_{4,5} &= - \frac{\theta_A (1 - \lambda_B) + \theta_B \cos^2 \Theta (\lambda_A + 1)}{2(\lambda_A \lambda_B + 1)}. \end{aligned}$$

В силу свойств тензора инерции $|\lambda_A| < 1$, поэтому $\eta_{4,5} < 0$. Однако $\eta_{1,2} < 0$, только если $\lambda_B > 0$, $\lambda_A < 0$. Таким образом, асимптотически

устойчиво лишь вращение с удвоенной орбитальной скоростью вокруг оси максимального момента инерции.

Точность стабилизации

Осредненное поле позволяет определить качественный режим движения спутника – направление и примерную скорость вращения спутника. Используем более точную модель прямого диполя. Ее основное отличие – неравномерное вращение вектора геомагнитной индукции. Это позволит уточнить направление и скорость вращения спутника вокруг оси максимального момента инерции. Чтобы уточнить ориентацию оси максимального момента инерции, используем метод Пуанкаре поиска периодических решений [73].

Рассмотрим движение спутника на приэкваториальной орбите. В качестве опорной системы используем $O_a S_1 S_2 S_3$, в качестве малого параметра – наклонение i . Ограничиваясь вторым приближением, вектор индукции можно записать в виде

$$\mathbf{B}_s = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} i + \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} i^2.$$

Уравнения движения представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + i \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + i^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad (10.23)$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда периодическое решение уравнения (10.23) можно искать в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + i \mathbf{x}_1 + i^2 \mathbf{x}_2, \quad (10.24)$$

причем \mathbf{x}_0 – решение (10.23) при $i = 0$ (периодическое порождающее решение). Проведя рассуждения, аналогичные использованным при анализе движения в осредненном поле, можно показать, что решение $\mathbf{x}_0 = (\Omega u, 0, 0, 0, 0, \Omega)$ является асимптотически устойчивым для порождающей системы при любом Ω , а значит, это – единственное периодическое решение порождающей системы. Подставляя разложение (10.24) в (10.23) и группируя члены при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 \quad & \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \\
\varepsilon^1 \quad & \dot{\mathbf{x}}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0), \\
\varepsilon^2 \quad & \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0).
\end{aligned}$$

Уравнения для определения первого приближения разбиваются на две подсистемы:

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbb{F} \mathbf{z}_1 + \varepsilon \begin{pmatrix} \theta_A [3/2(\Omega - 2) \sin(\Omega - 2)u - 1/2 \sin \Omega u] \\ \theta_B [3/2(\Omega - 2) \cos(\Omega - 2)u - 1/2 \cos \Omega u] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10.25)$$

$$\dot{\omega}_3^{(1)} = 0, \quad \dot{\alpha}^{(1)} = \omega_3^{(1)},$$

где $\mathbf{z}_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)})$,

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \theta_A & \Omega \lambda_A & 0 & -\varepsilon \Omega \theta_A \\ \Omega \lambda_B & -\varepsilon \theta_B & \varepsilon \Omega \theta_B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 1 & -\Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое приближение не позволяет определить конкретное значение величины Ω . Для этого необходимо записать уравнения второго приближения

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbb{F} \mathbf{z}_2 + \mathbb{G}(u) \mathbf{z}_1, \\
\dot{\omega}_3^{(2)} &= 3\varepsilon(\Omega - 1) \cos 2u - 5\Omega + 9, \quad \dot{\alpha}^{(2)} = \omega_3^{(2)},
\end{aligned}$$

где $\mathbb{G}(u)$ – периодическая матрица. Из всех уравнений для второго приближения интерес представляет только уравнение для $\omega_3^{(2)}$. Из него определяется условие существования периодического решения $\Omega = 9/5$. Скорость закрутки несколько меньше удвоенной орбитальной – результата, полученного в осредненной модели.

Возмущение положения равновесия определяется системой (10.25). Так как положение равновесия невозмущенной системы асимптотически устойчиво, общее решение однородной системы в (10.25) стремится к нулю. Определяющим является частное решение неоднородной системы, которое представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_p &= \mathbf{a}_\Omega \cos \Omega u + \mathbf{b}_\Omega \sin \Omega u + \\ &+ \mathbf{a}_{\Omega-2} \cos(\Omega - 2)u + \mathbf{b}_{\Omega-2} \sin(\Omega - 2)u. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} определяются из систем, полученных подстановкой (10.26) в (10.25),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\Omega \\ \mathbf{b}_\Omega \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Omega \mathbb{E}_{4 \times 4} & -\mathbb{F} \\ -\mathbb{F} & -\Omega \mathbb{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\Omega \\ \mathbf{p}_\Omega \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\Omega-2} \\ \mathbf{b}_{\Omega-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\Omega - 2) \mathbb{E}_{4 \times 4} & -\mathbb{F} \\ -\mathbb{F} & -(\Omega - 2) \mathbb{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\Omega-2} \\ \mathbf{p}_{\Omega-2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\Omega &= (0, -1/2 \theta_B \varepsilon, 0, 0), \quad \mathbf{p}_\Omega = (-1/2 \theta_B \varepsilon, 0, 0, 0), \\ \mathbf{q}_{\Omega-2} &= -3(\Omega - 2) \mathbf{q}_\Omega, \quad \mathbf{p}_{\Omega-2} = -3(\Omega - 2) \mathbf{p}_\Omega. \end{aligned}$$

После вычислений \mathbf{a}_Ω и \mathbf{b}_Ω записываются в виде

$$\mathbf{a}_\Omega = (0, 0, 0, -1/2), \quad \mathbf{b}_\Omega = (0, 0, 1/2, 0).$$

Для определения $\mathbf{q}_{\Omega-2}$ и $\mathbf{p}_{\Omega-2}$ можно воспользоваться формулой Фробениуса обращения блочной матрицы [100]

$$\begin{pmatrix} \kappa \mathbb{E}_{4 \times 4} & -\mathbb{F} \\ -\mathbb{F} & -\kappa \mathbb{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} \left(\mathbb{E}_{4 \times 4} - (\mathbb{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbb{F}^{-2})^{-1} \right) & -(\mathbb{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbb{F}^{-2})^{-1} \mathbb{F}^{-1} \\ -\mathbb{F}^{-1} (\mathbb{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbb{F}^{-2})^{-1} & -\kappa \mathbb{F}^{-1} (\mathbb{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbb{F}^{-2})^{-1} \mathbb{F}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10.27)$$

Так как $\kappa = \Omega - 2 \ll 1$, (10.27) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \kappa \mathbb{E}_{4 \times 4} & -\mathbb{F} \\ -\mathbb{F} & -\kappa \mathbb{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} \kappa^2 \mathbb{F}^{-2} & -\mathbb{F}^{-1} \\ -\mathbb{F}^{-1} & -\kappa \mathbb{F}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \sin \Omega u \\ -1/2 \cos \Omega u \end{pmatrix} - 3(\kappa^3 \mathbb{F}^{-2} \mathbf{q}_\Omega - \kappa \mathbb{F}^{-1} \mathbf{p}_\Omega) \cos \kappa u + 3(\kappa \mathbb{F}^{-1} \mathbf{q}_\Omega + \kappa^2 \mathbb{F}^{-2} \mathbf{p}_\Omega) \sin \kappa u.$$

В силу малости κ решение для $\beta^{(1)}$ и $\gamma^{(1)}$ определяется в основном \mathbf{a}_Ω и \mathbf{b}_Ω , а именно

$$\beta^{(1)} \approx 1/2 \sin \Omega u, \quad \gamma^{(1)} \approx -1/2 \cos \Omega u.$$

Отклонение $\Delta\gamma_{33}$ оси вращения от нормали к плоскости приэкваториальной орбиты задается выражением

$$\Delta\gamma_{33} = a \cos \left[\cos \left(\frac{1}{2} i \sin \frac{9}{5} u \right) \cos \left(-\frac{1}{2} i \cos \frac{9}{5} u \right) \right].$$

После разложения до второго порядка i получим $\Delta\gamma_{33} \approx i/2$. Ось максимального момента инерции отклоняется от нормали к плоскости орбиты на угол, примерно вдвое меньший наклона орбиты.

Спутники, оснащенные магнитной системой ориентации, редко выводятся на приэкваториальные орбиты. Намного больший интерес представляет движение по орбитам с высоким наклоном, практически значимым и естественным для использования магнитной системы. Рассмотрим движение на приполярной орбите и используем в качестве малого параметра $\delta = \pi/2 - i$. Тогда

$$\mathbf{B}_s = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta + \frac{\mu_e}{2r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} \delta^2 + \dots$$

При поиске порождающего решения уравнения разделяются. Система, описывающая колебания вне плоскости орбиты, снова имеет устойчивое тривиальное решение $\beta = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Вращение вокруг оси максимального момента инерции, однако, происходит с переменной скоростью. Уравнение, задающее скорость вращения, имеет вид

$$\dot{\omega}_3 + f_1(u) \omega_3 = f_2(u), \quad (10.28)$$

где

$$f_1(u) = \varepsilon (1 + 3 \sin^2 u), \quad f_2(u) = 3\varepsilon (1 + \sin^2 u).$$

Для (10.28) можно записать общий вид решения (предполагая $u(0) = 0$),

$$\omega_3 = e^{-F(u)} \left(\omega_3(0) + \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx \right), \quad (10.29)$$

где

$$F(u) = \int_0^u f_1(x) dx = \varepsilon \left(\frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right). \quad (10.30)$$

Чтобы вычислить интеграл в (10.29), представим его в виде

$$g(u) = \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx = \varepsilon \int_0^u 2e^{\varepsilon\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x\right)} dx + \varepsilon \int_0^u (1 + 3\sin^2 x) e^{\varepsilon\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x\right)} dx =$$

$$= e^{\varepsilon\left(\frac{5}{2}u - \frac{3}{4}\sin 2u\right)} + 2\varepsilon \int_0^u e^{\frac{5}{2}\varepsilon x} e^{-\frac{3}{4}\varepsilon \sin 2x} dx.$$

Тогда

$$\omega_3 = e^{-F(u)} \left(\omega_3(0) + e^{F(u)} + 2\varepsilon \int_0^u e^{\frac{5}{2}\varepsilon x} e^{-\frac{3}{4}\varepsilon \sin 2x} dx \right).$$

Принимая во внимание $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, можем ограничить величину угловой скорости выражениями

$$\omega_3 \geq e^{-\varepsilon\left(\frac{5}{2}u - \frac{3}{4}\sin 2u\right)} \omega_3(0) + 1 + \frac{4}{5} e^{-\frac{3}{4}\varepsilon} e^{\frac{3}{4}\varepsilon \sin 2u},$$

$$\omega_3 \leq e^{-\varepsilon\left(\frac{5}{2}u - \frac{3}{4}\sin 2u\right)} \omega_3(0) + 1 + \frac{4}{5} e^{\frac{3}{4}\varepsilon} e^{\frac{3}{4}\varepsilon \sin 2u}.$$
(10.31)

Приближенное значение скорости, удовлетворяющее этим ограничениям, можно найти, заметив, что с ростом аргумента широты второе слагаемое в (10.30) играет все меньшую роль. Рассматривая задачу на достаточно большом интервале времени, можно считать, что

$$g(u) = \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx \approx 3\varepsilon \int_0^u (1 + \sin^2 x) e^{5/2\varepsilon x} dx =$$

$$= 6\varepsilon \left[\frac{e^{5/2\varepsilon u} \sin u}{25\varepsilon^2 + 16} (5\varepsilon \sin u - 4 \cos u) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{8}{125\varepsilon^2 + 80} + \frac{1}{5} \right) (e^{5/2\varepsilon u} - 1) \right].$$

Это совместно с (10.30) и (10.29) дает выражение для угловой скорости вращения спутника вокруг оси максимального момента инерции,

$$\omega_3 \approx e^{-\varepsilon(5/2u - 3/4\sin 2u)} \times$$

$$\left(\omega_3(0) + 6\varepsilon \left[\frac{e^{5/2\varepsilon u} \sin u}{25\varepsilon^2 + 16} (5\varepsilon \sin u - 4 \cos u) + \right. \right.$$
(10.32)

$$\left. \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{8}{125\varepsilon^2 + 80} + \frac{1}{5} \right) (e^{5/2\varepsilon u} - 1) \right] \right).$$

Значение угла α в порождающем решении можно найти, интегрируя (10.32).

Система уравнений первого приближения имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbb{F}(u) \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(u),$$

где $F_{ij} = F_{ij}(\omega_3, \varphi(2u - \alpha), \varphi(4u - 2\alpha), \varphi(2u - 2\alpha), \varphi(2\alpha), \varphi(2u))$,
 φ – тригонометрические функции (синус, косинус), входящие в выражения для компонент \mathbb{F} линейно,

$$\mathbb{F}(u) = \begin{pmatrix} -\varepsilon\theta_A \left(\frac{5}{4} + f_1\right) & \lambda_A \omega_3 + \varepsilon\theta_A f_2 & 0 & 0 & -\varepsilon\theta_A \omega_3 f_2 & -\varepsilon\theta_A f_3 \\ \lambda_B \omega_3 + \varepsilon\theta_B f_2 & -\varepsilon\theta_B \left(\frac{5}{4} - f_1\right) & 0 & 0 & \varepsilon\theta_B f_3 & \varepsilon\theta_B \omega_3 f_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon \left(\frac{3}{2} \cos 2u - \frac{5}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \frac{9}{8} \cos 2(\alpha - 2u) + \frac{1}{8} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \cos 2(\alpha - u) - \frac{3}{4} \cos 2u,$$

$$f_2 = -\frac{3}{4} \sin 2(\alpha - u) + \frac{9}{8} \sin 2(\alpha - 2u) + \frac{1}{8} \sin 2\alpha,$$

$$f_3 = \frac{3}{4} \omega_3 \cos 2u - \frac{3}{2} \cos 2u - \frac{5}{4} \omega_3 - \frac{3}{4} \omega_3 \cos 2(\alpha - u) + \\ + \frac{9}{8} \omega_3 \cos 2(\alpha - 2u) + \frac{1}{8} \omega_3 \cos 2\alpha + \frac{9}{2}.$$

Вообще говоря, эту систему решить не удастся. Чтобы найти приближенное решение уравнений первого приближения, обратимся еще раз к методу поиска периодических решений. В качестве малого параметра будем использовать ε , то есть характеристику величины управляющего момента. Тогда решение исходного уравнения ищем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta(\mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}_1),$$

$\mathbf{x}_0 = (0, 0, \omega_3(u), \alpha(u), 0, 0)$, а матрица \mathbb{F} в виде $\mathbb{F}(u) = \mathbb{F}_0 + \varepsilon \mathbb{F}_1(u)$.

Порождающее решение \mathbf{y}_0 и первое приближение \mathbf{y}_1 находятся из уравнений

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \mathbb{F}_0 \mathbf{z}_0, \quad (10.33)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbb{F}_0 \mathbf{z}_1 + \mathbb{F}_1(u) \mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u). \quad (10.34)$$

и

$$\dot{\omega}_3^{(0)} = 0, \quad \dot{\alpha}^{(0)} = \omega_3^{(0)}, \\ \dot{\omega}_3^{(1)} = (3/2 \cos 2u - 5/2) \omega_3^{(0)}, \quad \dot{\alpha}^{(1)} = 0,$$

где $\mathbf{z}_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)})$. Отделившиеся пары уравнений дают $\omega_3^{(0)} = 0$, $\omega_3^{(1)}$, $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$ – постоянные.

При определении матриц и векторов, входящих в (10.33), (10.34), необходимо принять во внимание выражение для $\omega_3(u)$. Используем (10.32) и разложим его до первой степени малого параметра ε в предположении большого интервала времени,

$$\omega_3 = 9/5 + 3/5 \varepsilon \sin 2u. \quad (10.35)$$

Тогда

$$\mathbb{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 9/5 \lambda_A & 0 & 0 \\ 9/5 \lambda_B & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & -9/5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_1(u) = \begin{pmatrix} \theta_A (3/10 \sin 0.2u - 9/10 \sin 1.8u) \\ \theta_B (-3/10 \cos 0.2u - 9/10 \cos 1.8u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\mathbb{F}_1(u)$ представим в виде $\mathbb{F}_1(u) = \mathbb{G}_1(u) + \mathbb{G}_2(u)$,

$$\mathbb{G}_1(u) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \theta_A - \frac{1}{8} \theta_A \cos 3.6u & \frac{1}{8} \theta_A \sin 3.6u & -\frac{9}{40} \theta_A \sin 3.6u & -\frac{9}{4} \theta_A - \frac{9}{40} \theta_A \cos 3.6u \\ \frac{1}{8} \theta_B \sin 3.6u & -\frac{5}{4} \theta_B + \frac{1}{8} \theta_B \sin 3.6u & \frac{9}{4} \theta_B - \frac{9}{40} \theta_B \cos 3.6u & \frac{9}{40} \theta_B \sin 3.6u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

компоненты $G_{2ij} = G_{2ij}(\varphi(0.2u), \varphi(0.4u), \varphi(1.6u), \varphi(2u))$.

Решение порождающего уравнения (10.33) имеет вид

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} A \cos \lambda u + B \sin \lambda u \\ -A \mu \sin \lambda u + B \mu \cos \lambda u \\ D \cos 1.8u + E \sin 1.8u + B \chi_2 \cos \lambda u + A \chi_4 \sin \lambda u \\ -D \sin 1.8u + E \cos 1.8u + A \chi_3 \cos \lambda u + B \chi_1 \sin \lambda u \end{pmatrix},$$

где $\lambda = 1.8 \sqrt{-\lambda_A \lambda_B}$, $\mu = \sqrt{-\lambda_B / \lambda_A}$, $\chi_i = \chi_i(\lambda, \mu)$, A, B, D, E – постоянные. Найдем их из условия существования периодического решения уравнения (10.34). Для этого необходимо и достаточно, чтобы вынуж-

дающая сила $\mathbb{F}_1(u)\mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u)$ не имела частот λ и 1.8 (собственные частоты \mathbb{F}_0). Поскольку $\mathbb{F}_1(u)$ и $\mathbf{g}_1(u)$ содержат лишь рациональные частоты, сразу получаем $A = B = 0$. Постоянные D, E находятся из условия отсутствия в $\mathbb{G}_1(u)\mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u)$ частот 1.8 (матрицу $\mathbb{G}_2(u)$ можно не принимать во внимание), откуда $E = 0, D = 4/9$.

Таким образом, ограничиваясь лишь порождающим решением в системе первого приближения, можем записать решение исходных уравнений

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$

$$\beta = 4/9(\pi/2 - i)\cos 1.8u, \gamma = -4/9(\pi/2 - i)\sin 1.8u,$$

ω_3 задается одним из выражений (10.31), (10.32), (10.35), α получается интегрированием ω_3 . Отклонение оси максимального момента инерции от нормали к плоскости орбиты задается выражением

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{33} &= \text{acos} \left[\cos \left(4/9(\pi/2 - i)\cos 1.8u \right) \cos \left(-4/9(\pi/2 - i)\sin 1.8u \right) \right] = \\ &= 2 \text{asin} \sqrt{\frac{1 - \cos \left(4/9(\pi/2 - i)\cos 1.8u \right) \cos \left(-4/9(\pi/2 - i)\sin 1.8u \right)}{2}} \approx \\ &\approx 2 \text{asin} \left[4/18(\pi/2 - i) \right] \approx 4/9(\pi/2 - i). \end{aligned}$$

Отклонение на приполярной орбите несколько меньше такового на приэкваториальной орбите. Этот результат, равно как полученный на приэкваториальной орбите, хорошо согласуется с численными расчетами.

10.4 Моделирование работы алгоритма *-Bdot*

Перейдем к вопросу реализации алгоритма демпфирования на бортовом компьютере спутника *Чибис-М*. Для этого вначале проведем моделирование работы алгоритма (10.1), предполагая точные измерения магнитометра и непрерывный закон управления. Такое моделирование представляет интерес в силу того, что алгоритм использует лишь два показания магнитометра, без подключения средств обработки измерений. Дипольный момент (10.1) нормируется таким образом, что максимальный момент катушек составляет 3.2 А·м². В качестве тензора инерции возьмем тензор микроспутника *Чибис-М*, наклонение орбиты – 60°, величина $B_{incl} = 3.1 \cdot 10^{-5}$ Тл (примерно соответствует

высоте орбиты Международной космической станции). На рис. 10.5 представлен процесс демпфирования абсолютной угловой скорости.

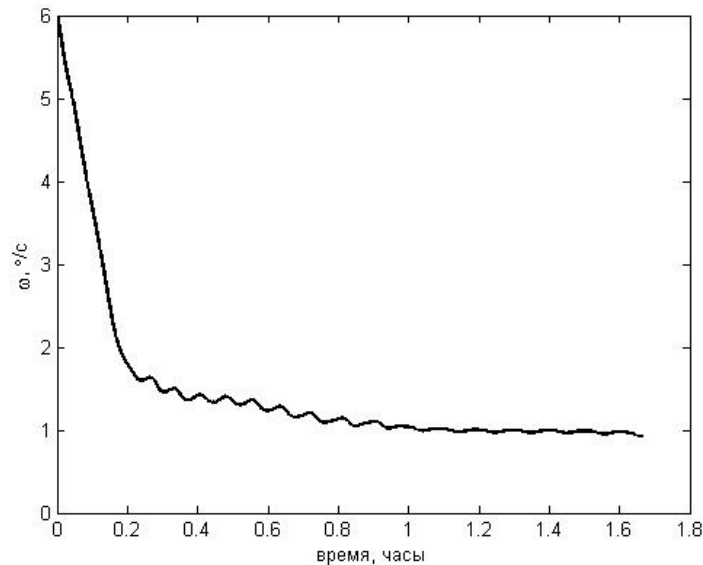


Рис. 10.5. Демпфирование угловой скорости при непрерывном управлении

Из рис. 10.5 видно, что угловая скорость в течение четверти часа уменьшается с 6 до 1 °/с, однако в течение полутора часов достигается величина лишь в 0.8 °/с. В течение суток достигается величина угловой скорости 0.25 °/с.

Сравним непрерывный подход к реализации управления с дискретным, в котором магнитные катушки могут реализовать только три значения дипольного момента: 0 и $\pm 3.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$. В этом случае определяющее значение имеет порог η – величина расчетного дипольного момента, отнесенного к его максимальному значению, при превышении которой реализуется момент. При выборе $\eta = 0.5$ работа закона управления аналогична (рис. 10.6).

На рис. 10.7 представлена угловая скорость для значительно большего порога демпфирования. Как видно из рис. 10.7, быстродействие системы ориентации заметно снижается в переходном процессе – скорость падает с 6 °/с до 1 °/с в два раза дольше. Это связано с тем, что часть итераций выпадает из управления из-за очень высокого порога η . Однако при рассмотрении переходного процесса при демпфировании скорости до 0.5 °/с быстродействие увеличивается.

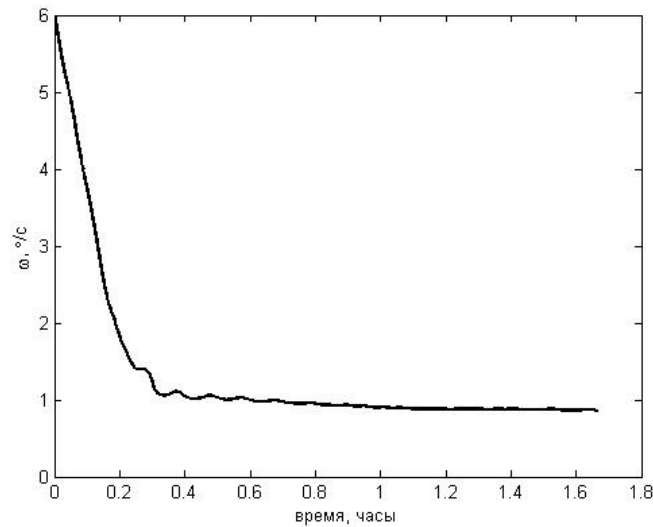


Рис. 10.6. Дискретный закон управления, порог 0.5

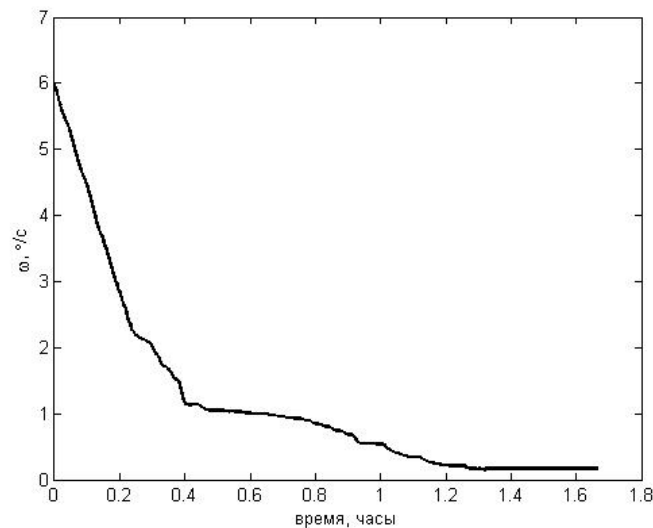


Рис. 10.7. Дискретный закон управления, порог 0.8

Рассмотрение различных величин порога управления η показало, что предпочтительно использовать значение 0.8. Хотя в этом случае возможно уменьшение быстродействия системы ориентации для некоторых наборов начальных данных, практически исчезает опасность особенно низкого быстродействия.

Перейдем к вопросу о влиянии на быстродействие и достижимую угловую скорость ошибки показаний магнитометра (± 100 нТл и дискретность 6.67 нТл), частоты его опроса (5 Гц) и частоты выдачи управляющих воздействий (5 Гц). Будем считать, что сначала проводятся два сеанса измерений для определения необходимого дипольного момента

$$\mathbf{m}_j = -k \frac{\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_{j-1}}{t_j - t_{j-1}},$$

за которыми следует его реализация. Результат моделирования в этом случае представлен на рис. 10.8.

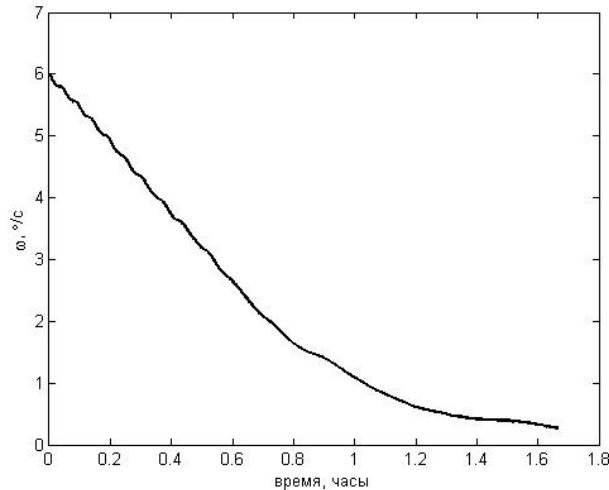


Рис. 10.8. Моделирование демпфирования скорости при использовании показаний магнитометра

Сравнение рис. 10.7 и рис. 10.8 показывает заметное падение быстродействия. Скорость 0.5 °/с достигается в течение полутора часов. Таким образом, релейный закон управления справляется с поставленной задачей демпфирования угловой скорости. Стоит, однако, отметить, что в силу возмущающих токов в приборах и корпусе спутника показания магнитометра могут иметь заметно большую ошибку, при которой эффективность демпфирования упадет.

10.5 Лабораторные испытания алгоритма демпфирования угловой скорости

Остановимся кратко на вопросе проверки работоспособности алгоритма на лабораторном оборудовании и на проблеме его адаптации для применения в составе макета системы ориентации и на борту спутника. Рассматриваемые здесь испытания алгоритмов управления ориентацией спутника проводились на лабораторном стенде, разработанном в ИТЦ «СканЭкс» [101] и развитом в ООО «Спутникс». В состав стенда входит макет системы ориентации, датчики и исполнительные органы которого идентичны тем, что использовались на спутнике *Чибис-М* [102]. Кроме этого, в состав стенда входят имита-

торы геомагнитного поля, Солнца и аэродинамический подвес. Кроме системы ориентации и стабилизации, макет микроспутника *Чибис-М* состоит из одноплатного компьютера с беспроводным каналом связи, аккумуляторов, системы балансировки платформы, на которой установлены все системы (рис. 10.9).

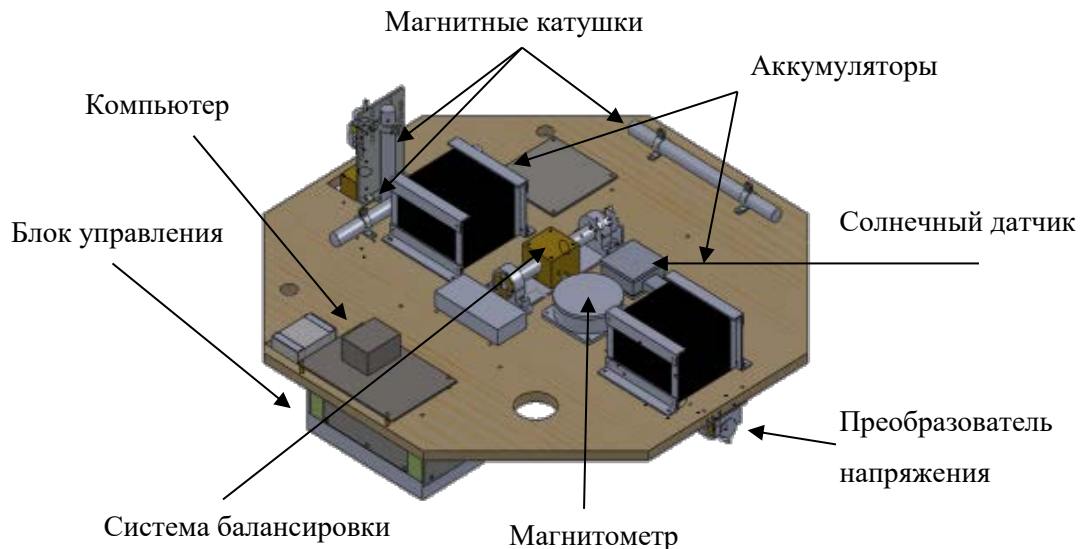


Рис. 10.9. Макет системы ориентации

В качестве датчиков определения ориентации в составе системы ориентации используются магнитометр *HMR 2300R*, солнечный датчик *DSS3* и датчики угловой скорости *ADIS 16130*.

В качестве исполнительных элементов системы управления ориентацией на макете используются электромагнитные катушки (рис. 10.10) и управляющие двигатели-маховики.

Катушки представляют собой соленоид с обмоткой из медной проволоки и пермалловым сердечником. Максимальный магнитный момент катушек составляет $3.2 \text{ A}\cdot\text{м}^2$. Основной частью блока управления системой является бортовой компьютер на плате *LPC112294*, содержащей процессор, внешнюю память емкостью 1 Мб, энергонезависимую флэш-память емкостью 4 Мб.

Рис. 10.10. Токовая катушка микроспутника *Чибис-М*

Для имитации геомагнитного поля в составе стенда используется система из трех пар квадратных катушек, установленных взаимно перпендикулярно (аналог колец Гельмгольца). Стороны квадратов пар катушек – 2 м, 1,9 м, 1,8 м. Данная система способна создавать практически однородное магнитное поле в заданной области, которая представляет собой шар диаметром 0.650 м. Имитатор солнца создает постоянный параллельный световой поток на расстоянии до 1.5 м, мощностью не менее 80000 лк. Аэродинамический подвес обеспечивает макету три степени свободы, а именно вращение вокруг трех осей с минимальным трением. По вертикальной оси существует возможность поворота на 360° , по горизонтальным – на $\pm 30^\circ$. Максимальная грузоподъемность подвеса – 25 кг.

Суммарная наихудшая погрешность определения углового положения макета составляет до 5° . Однако, когда все приборы на макете работают непрерывно (именно при включении и выключении они могут создавать возмущения магнитного поля), нет магнитных бурь, то направление вектора магнитного поля определяется с точностью до $0.1-0.2^\circ$. При стабилизации макета, когда солнечный датчик практически не перемещается по конусу луча имитатора Солнца, точность определения доходит до 0.1° . Таким образом, в режиме стабилизации может достигаться точность определения ориентации до $0.1-0.2^\circ$.

В таблице 10.1 сведены оценки всех возмущающих моментов, действующих на макет. Следует отметить, что оценка возмущающих моментов производилась сверху, то есть рассматривался худший случай: из возможных значений параметров макета (угловая скорость, отражающие свойства, нежелательный магнитный момент и т.д.) выбирались те, которые дадут наибольшее значение возмущающего момента.

Таблица 10.1. Возмущающие моменты

Источник возмущающего момента	Значение максимального момента, Н·м
Вязкость при движении подшипника	$3 \cdot 10^{-7}$
Неидеальность поверхностей чаши и подшипника	$3 \cdot 10^{-5}$
Вязкость при движении платформы макета	$1 \cdot 10^{-6}$
Лобовое сопротивление элементов макета о воздух	$2 \cdot 10^{-6}$
Возмущающий магнитный момент на макете	$2 \cdot 10^{-5}$
Давление потока света от имитатора Солнца	$2 \cdot 10^{-8}$
Влияние вращения Земли (гироскопический момент)	$6 \cdot 10^{-6}$
Несбалансированность макета	$4 \cdot 10^{-4}$
Нагрев элементов макета, вызывающий разбалансировку	$4 \cdot 10^{-4}$

На стенде были проведены испытания работы закона управления (10.1) [101]. Магнитное поле поддерживалось постоянным во время проведения эксперимента. Это означает, что законы управления (10.1) и (10.2) идентичны, поскольку производная вектора \mathbf{B} в инерциальной системе координат практически равна нулю. Индукция поля, создаваемого при помощи катушек стенда, составляет порядка 10^5 нТл, то есть примерно в десять раз превышает величину индукции геомагнитного поля. Кроме геомагнитного поля на точность формирования магнитного поля влияют и другие возмущения, в частности, токи в аппаратуре и проводах стенда. Результаты испытаний показали, что во время их проведения ошибка формирования магнитного поля составила не более 10%. На рис. 10.11 представлен результат одного из испытаний. В начальный момент времени угловая скорость составляет 15 °/с, причем вектор скорости направлен практически вертикально (макет закручен вокруг местной вертикали) [101]. Демпфирование происходит примерно за 700 с при использовании токовых катушек с дипольным магнитным моментом $3.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Однако угловая скорость выходит на ненулевое значение, составляющее около 0.6 °/с.

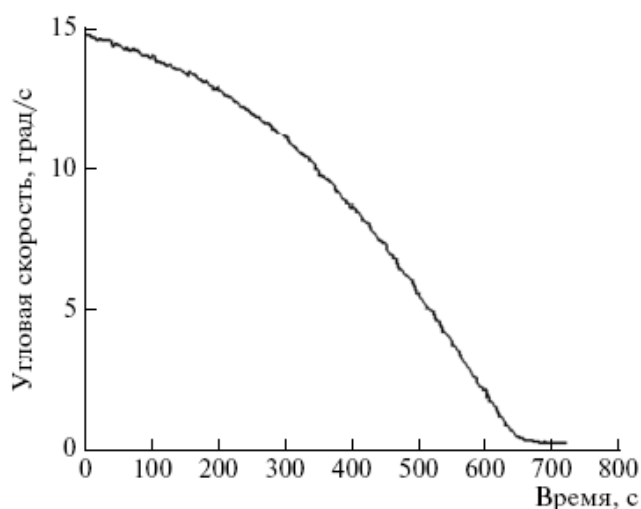


Рис. 10.11. Демпфирование угловой скорости

На рис. 10.12 представлена величина дипольного магнитного момента всех трех катушек. Темно-серый цвет соответствует катушке, расположенной изначально практически вертикально. Черный и светло-серый соответствуют катушкам, расположенным в горизонтальной плоскости. Как видно из рис. 10.12, до момента выхода угловой скорости на примерно постоянное значение работали в основном горизонтальные катушки. С их помощью создавался момент, направленный вертикально (так как магнитное поле направлено горизонтально, как и катушки). Это позволило демпфировать начальную закрутку вокруг местной вертикали [103]. Также из рис. 10.12 видно, что с уменьшением угловой скорости спутника уменьшается и частота изменения тока катушек. Включение вертикальной катушки говорит о том, что началось демпфирование колебаний вне горизонтальной плоскости. Их возникновение вызвано тем, что центр вращения макета не совпадает с его центром масс. В результате макет испытывает воздействие возмущающего гравитационного момента. Возникающую при этом скорость (фактически, скорость, с которой макет «валится» на бок) и пытается демпфировать катушка, расположенная вертикально. Кроме возмущающего момента, работе магнитных катушек мешают токи, возникающие в макете, из-за которых показания магнитометра оказываются неточными. Все это и приводит к тому, что скорость удается демпфировать не до нулевого значения. Однако достигнутые точность и быстродействие вполне можно считать достаточными для этапа гашения начальной скорости.

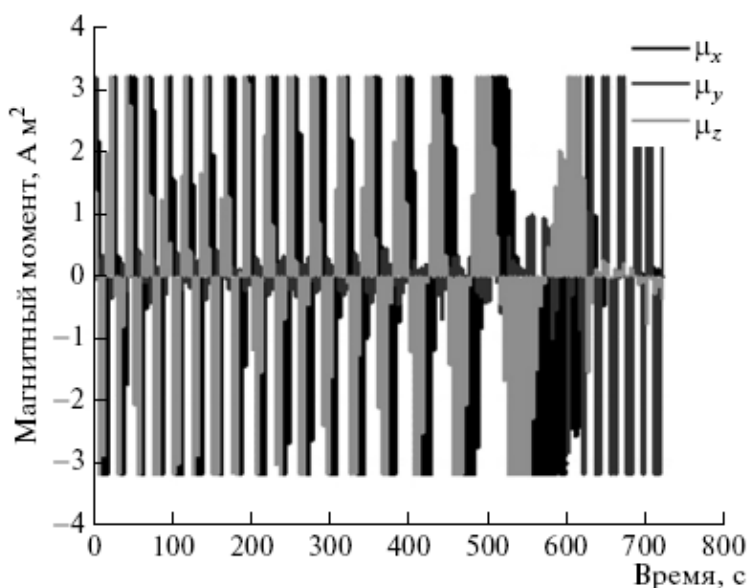


Рис. 10.12. Токи катушек

Если в лабораторных условиях, где магнитное поле превышает примерно в 10 раз магнитное поле Земли на круговой орбите высотой 500 км, начальная угловая скорость $15^\circ/\text{с}$ демпфируется за 10 мин, то на орбите с учетом того, что моменты инерции макета и спутника отличаются примерно в 4 раза, та же угловая скорость будет демпфироваться примерно 400 мин (около четырех витков).

10.6 Результаты летных испытаний алгоритма демпфирования угловой скорости

Алгоритм демпфирования угловой скорости \dot{B} был реализован на борту научного микроспутника *Чибис-М*, разработанного и изготовленного в ИКИ РАН и выведенного на орбиту 25 января 2012 года [102]. Этот алгоритм использовался на начальном этапе движения спутника для гашения угловой скорости аппарата после отделения, а также и при дальнейшем движении в случае возникновения такой необходимости. Основными исполнительными элементами аппарата являются маховики, поддерживающие его в орбитальной ориентации, основываясь на показаниях магнитометра и солнечных датчиков, обрабатываемых с помощью локального метода и фильтра Калмана [104] (а также датчиков угловой скорости при использовании фильтра Калмана).

Для наглядности полученных данных был проведен сеанс демпфирования угловой скорости при помощи алгоритма \dot{B} после того,

как спутник был намеренно раскручен. Данные были получены 4 марта 2012 года в период времени с 14:31:47 до 15:32:05 по московскому времени, при этом примерно с 14:33:00 до 15:09:00 аппарат находился в тени. На каждом этапе управления в течение 6 секунд проводились и обрабатывались измерения, затем в течение 3 секунд реализовывалось управляющее воздействие. Скважность сбора данных – около 30 секунд (30-32 секунды). Из телеметрических данных были удалены две точки, в которых магнитометр или датчик угловой скорости дали сбой. В таблице 10.2 приведен пример телеметрических данных с датчика угловой скорости.

Таблица 10.2. Телеметрия с датчика угловой скорости

01:58:39.000	14:33:50.000	0.1738	0.2119	0.0803
01:58:39.000	14:34:21.000	0.1706	0.2464	0.0752
01:58:39.000	14:34:52.000	0.1784	0.2454	0.0151
01:58:39.000	14:35:23.000	0.1812	0.2275	0.0084
01:58:39.000	14:35:55.000	0.1931	0.2216	-0.0121
01:58:39.000	14:36:25.000	0.2390	0.1969	-0.0178
01:58:39.000	14:36:56.000	0.1373	0.2031	-0.0357

В этих данных указываются время получения в пункте связи, время получения данных с датчика и их записи в долговременную память бортового компьютера и три компоненты угловой скорости. Для формирования управляющего момента используются данные магнитометра, приведенные на рис. 10.13.

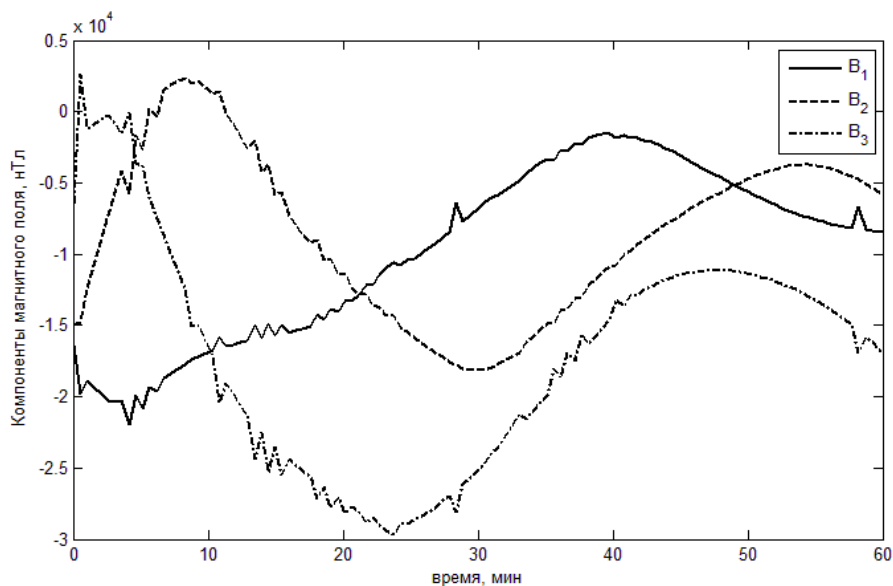


Рис. 10.13. Показания магнитометра

Контроль точности полученных данных можно провести при помощи информации о положении центра масс спутника, что для каждой точки измерений магнитного поля на борту позволяет вычислить вектор напряженности магнитного поля при помощи модели *IGRF*. В таблице 10.3 представлены двухстрочные элементы спутника *Чибис-М*, соответствующие времени сбора рассматриваемых телеметрических данных.

Таблица 10.3. Двухстрочные элементы

CHIBIS-M								
1	38051U	11062C	12058.91450162	.00007227	00000-0	32146-3	0	1024
2	38051	51.6521	324.5583	0011559	6.4829	88.0894	15.22465494	5160

Поскольку для оценки точности измерения компонент магнитного поля необходимо знать трехосную ориентацию спутника, контроль точности может быть осуществлен только по величине измеряемого вектора. На рис. 10.14 представлена разница между измеренной и вычисленной величиной модуля вектора геомагнитного поля.

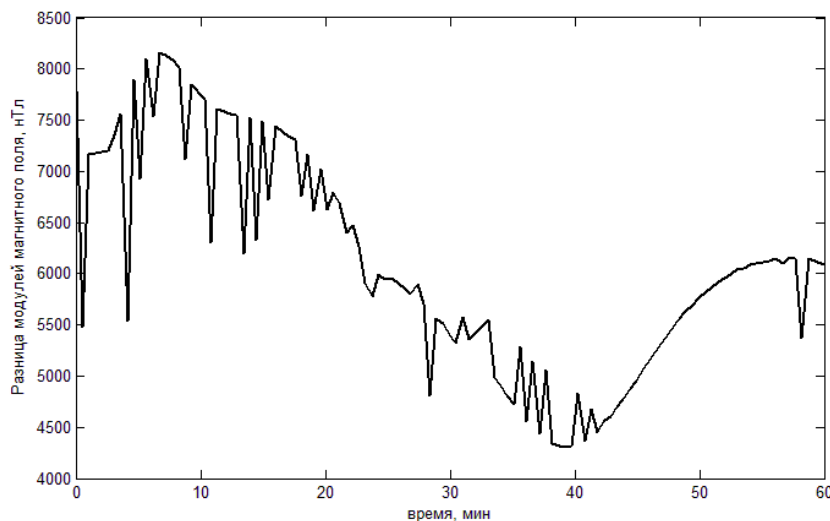


Рис. 10.14. Разница модулей вектора геомагнитной индукции, измеренного при помощи магнитометра, и вычисленного с использованием модели *IGRF*

Можно видеть, что в показаниях магнитометра присутствует сдвиг нуля. Однако в силу способа построения алгоритма $-B\dot{\text{dot}}$ этот сдвиг не играет роли. На каждой итерации измерений вычисляется разность измерений на текущем и на предыдущем шаге, в результате сдвиг нуля не оказывает влияния на управляющий дипольный момент. Для оценки точности магнитометра, тем не менее, удобнее использо-

вать метод наименьших квадратов, при помощи которого можно найти примерное смещение нуля, имевшее место в ходе измерений. Результат корректировки показаний магнитометра с учетом постоянного смещения нуля по каждому каналу приведен на рис. 10.15.

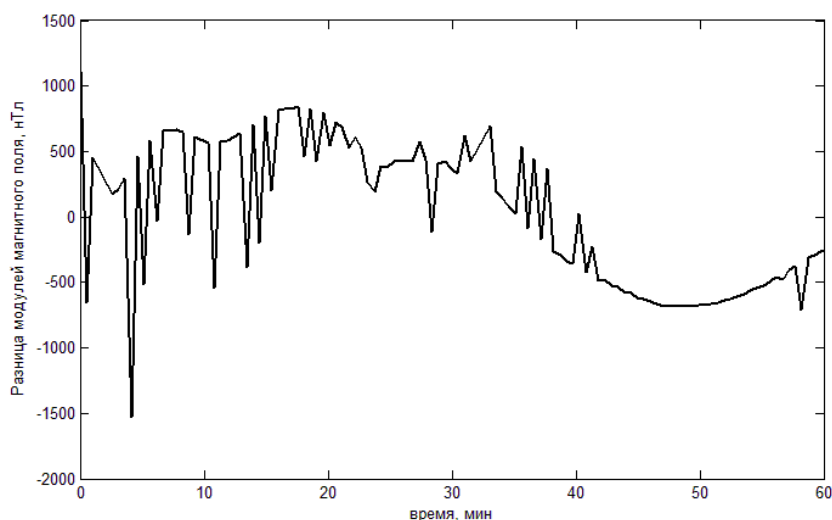


Рис. 10.15. Разница модулей вектора магнитной индукции после определения смещении нуля по методу наименьших квадратов

Из рис. 10.15 видно, что магнитометр имеет ошибку до 1500 нТл, причем в основном она не превышает 1000 нТл. При характерной величине вектора индукции геомагнитного поля около 40000 нТл это хорошая точность. На рис. 10.16 приведены компоненты угловой скорости аппарата, определенные при помощи датчиков угловой скорости.

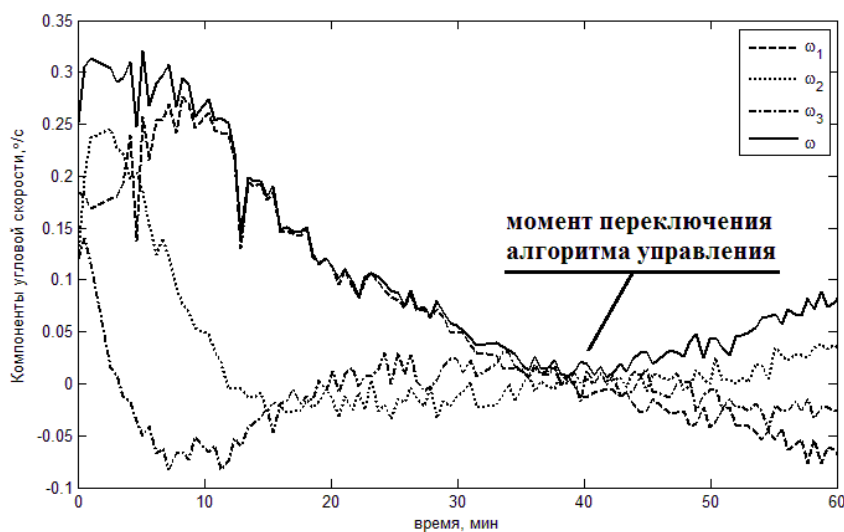


Рис. 10.16. Гашение угловой скорости аппарата

Рис. 10.16 показывает эффективное гашение угловой скорости спутника. Скорость уменьшилась примерно в пять раз за 30 минут. Примерно через 40 минут скорость начала возрастать из-за перехода аппарата в другой режим ориентации. Это связано с двумя факторами. Во-первых, аппарат достиг значения угловой скорости, приемлемого для переключения на другой режим – обеспечения номинальной ориентации. Во-вторых, спутник вышел из зоны тени, в результате начали работу солнечные датчики, что позволило запустить алгоритм определения ориентации *TRIAD* и маховики. По достижении точности ориентации в 10° алгоритм определения ориентации изменяется на фильтр Калмана. Оба используемых алгоритма описаны в Главе IV.

Рассмотрим теперь работу алгоритма *-Bdot* в рамках штатного функционирования системы ориентации и стабилизации спутника *Чубис-М*. На рис. 10.17 представлен результат демпфирования угловой скорости спутника 11.03.2012 г.

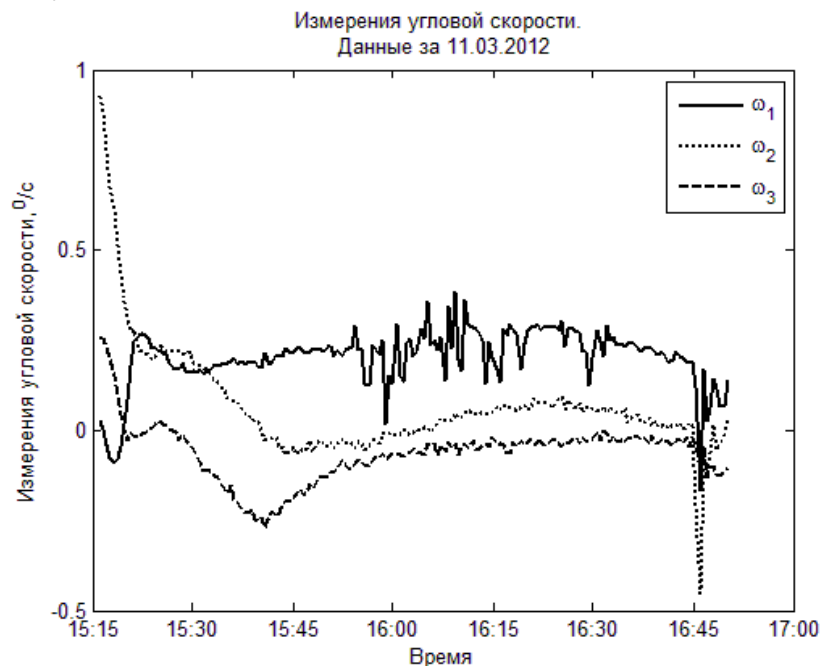


Рис. 10.17. Показания датчиков угловой скорости

Из рис. 10.17 видно, что после включения алгоритма *-Bdot* скорость быстро (за 5 минут) уменьшается до значения, близкого к орбитальному, но все же несколько превышающего его.

11 Одноосная ориентация осесимметричного спутника

Equation Section (Next) Снижение требований к ориентации аппарата, например, необходимость ориентировать в пространстве лишь одну его ось, может снять проблему ограничения направления момента при использовании магнитной системы ориентации. Стабилизация собственным вращением является одним из часто используемых способов поддержания одноосной ориентации спутника. Аппарат, будучи быстро закрученным вокруг оси симметрии, приобретает свойства гироскопа и в течение длительного времени сохраняет ориентацию этой оси в инерциальном пространстве. Магнитное управление позволяет менять направление оси симметрии. Ниже рассматриваются также дополнительные алгоритмы режимы их работы, позволяющие начать процесс переориентации без предварительного успокоения и закрутки, за счет чего значительно увеличивается быстродействие системы.

11.1 Построение алгоритмов стабилизации собственным вращением

Рассмотрим вопрос построения трех основных алгоритмов цикла управления ориентацией стабилизированного вращением спутника. Для реализации режима стабилизации собственным вращением необходимо иметь алгоритм, предназначенный для гашения нутационных колебаний. Использовать для этого алгоритм демпфирования (10.2) нецелесообразно, так как при этом происходит гашение всех компонент угловой скорости, в том числе и скорости закрутки вокруг оси симметрии. Тем не менее, поскольку алгоритм (10.2) обеспечивает уменьшение кинетической энергии спутника, его можно использовать для гашения нутационных колебаний, активируя только катушку, расположенную на оси симметрии. Очевидно, скорость закрутки при этом останется неизменной. Дипольный магнитный момент спутника \mathbf{m}_x в этом случае имеет вид

$$\mathbf{m}_x = k(0, 0, \mathbf{e}_3(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})), \quad (11.1)$$

где k – положительный коэффициент, \mathbf{e}_3 – орт оси симметрии спутника. Далее будем полагать, что тензор инерции спутника задается выражением $\mathbb{J} = \text{diag}(A, A, C)$.

Несмотря на то что алгоритм гашения нутационных колебаний не изменяет скорости закрутки спутника вокруг оси симметрии, необходимо иметь алгоритм, позволяющий увеличить скорость собственного вращения спутника. Для этого используется закон управления¹

$$\mathbf{m} = k (B_{2x}, -B_{1x}, 0). \quad (11.2)$$

Момент, действующий на спутник, в этом случае задается выражением

$$\mathbf{M}_x = k (-B_{x1} B_{3x}, -B_{2x} B_{3x}, B_{1x}^2 + B_{2x}^2).$$

Таким образом, третья компонента угловой скорости, направленная по оси симметрии, заведомо возрастает, так как соответствующая компонента механического момента положительна. Другие две компоненты могут принимать разные знаки. Возникающие в результате нутационные колебания должны гаситься с помощью управления (11.1).

Алгоритм переориентации оси симметрии получим, опираясь на подход, предложенный в [32]. Введем рассогласование $\Delta \mathbf{L}$ между требуемым (номинальным) кинетическим моментом \mathbf{L}_f и фактическим на текущий момент времени кинетическим моментом \mathbf{L} следующим образом:

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}.$$

В качестве требуемого кинетического момента будем использовать величину

$$\mathbf{L}_f = C \omega_{3f} \mathbf{e}_{3f},$$

где ω_{3f} – требуемая скорость вращения спутника вокруг оси симметрии, \mathbf{e}_{3f} – требуемое направление оси спутника в инерциальном пространстве. Величина \mathbf{L}_f является постоянной. Управление величиной дипольного момента m_3 будем выполнять так, чтобы минимизировать величину рассогласования по кинетическому моменту $\Delta \mathbf{L}$. Учитывая, что \mathbf{L}_f неизменно в инерциальном пространстве, запишем производную квадрата $\Delta \mathbf{L}$ по времени в силу уравнений движения,

¹ В книге используется одно обозначение k для коэффициентов усиления в нескольких законах управления. При этом могут оказаться разными размерность коэффициентов и выражения для малых параметров ε . Тем не менее, единообразие изложения хода исследований и их результатов представляются предпочтительными строгости этого изложения.

$$\frac{d(\Delta\mathbf{L})^2}{dt} = 2\Delta\mathbf{L} \frac{d\Delta\mathbf{L}}{dt} = -2\Delta\mathbf{L} (m_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}).$$

Отсюда, требуя для производной $d(\Delta\mathbf{L})^2/dt$ отрицательного значения, получаем выражения для искомого дипольного момента m_3 ,

$$m_3 = k\Delta\mathbf{L} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}). \quad (11.3)$$

Будем использовать еще один алгоритм переориентации в предварительном режиме, предложенный в [105],

$$m_3 = k\mathbf{e}_3 (\mathbf{B} \times \mathbf{L}_f). \quad (11.4)$$

Управление (11.4) можно получить из (11.3) путем циклической перестановки и игнорирования кинетического момента спутника.

11.2 Исследование традиционной связки алгоритмов

Алгоритм гашения нутационных колебаний

Будем, как в разделе 10.2, рассматривать быстрые вращения спутника, при которых первым слагаемым, описывающим вращение вектора \mathbf{B} относительно инерциального пространства, в правой части (10.5) можно пренебречь. Такое предположение оправдывается тем, что гашение нутационных колебаний в первую очередь используется сразу после отделения от ракеты-носителя. Третья компонента дипольного магнитного момента в связанной системе координат есть $m_{3x} = k(\omega_{1x} B_{2x} - \omega_{2x} B_{1x})$. Это позволяет записать ее через компоненты векторов в системе $OL_1L_2L_3$

$$m_{3x} = \frac{L}{A} k_2 [B_{1L} (d_{31}d_{12} - d_{32}d_{11}) + B_{2L} (d_{31}d_{22} - d_{32}d_{21})].$$

Механический момент в системе $OL_1L_2L_3$ имеет вид

$$\mathbf{M}_L = m \begin{pmatrix} d_{23}B_{3L} - d_{33}B_{2L} \\ d_{33}B_{1L} - d_{13}B_{3L} \\ d_{13}B_{2L} - d_{23}B_{1L} \end{pmatrix}.$$

Снова будем использовать безразмерные эволюционные уравнения (10.8), в которых введен малый параметр $\varepsilon = kB_0^2/\omega_0 A$. Повторяя рассуждения о разделении переменных, приведенные в разделе 10.2, получаем систему усредненных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{i} &= -\frac{1}{2}\varepsilon l [2p + (1-3p)\sin^2 \rho] \sin^2 \theta, \\
\dot{\rho} &= \frac{1}{2}\varepsilon (3p-1) \sin \rho \cos \rho \sin^2 \theta, \\
\dot{\theta} &= -\frac{1}{2}\varepsilon [2p + (1-3p)\sin^2 \rho] \sin \theta \cos \theta, \\
\dot{\sigma} &= 0,
\end{aligned} \tag{11.5}$$

где $p = 1/2 \sin^2 \Theta$. Уравнения (11.5) допускают замену $\rho \rightarrow -\rho$, $\rho \rightarrow \pi - \rho$ и $\theta \rightarrow -\theta$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Решение уравнений (11.5) удается найти в квадратурах. Остановимся сначала на двух частных случаях. Рассмотрим два стационарных решения для ρ .

1. Начальное значение ρ_0 близко к нулю (в нуле уравнения (1.13) не имеют смысла). Тогда при наклонении менее 46° уравнения (11.5) принимают вид (здесь и далее тривиальные уравнения опускаем)

$$\begin{aligned}
\dot{i} &= -\varepsilon p l \sin^2 \theta, \\
\dot{\theta} &= -\varepsilon p \sin \theta \cos \theta.
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Их решение

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tg} \theta| &= \exp(-\varepsilon p u + c_0), \\
l &= \frac{1 + \exp(-2p\varepsilon u + 2c_0)}{1 + \exp(2c_0)},
\end{aligned}$$

где $c_0 = \ln |\operatorname{tg} \theta_0|$. Из этих выражений видно, что чем больше наклонение орбиты (а значит, и больше p), тем выше быстродействие алгоритма. Заметим, что при интегрировании (11.6) в выражении $\ln |\operatorname{tg} \theta|$ можно раскрыть модуль, так как θ монотонно стремится к нулю или π . Будем далее считать, что $\theta \in (0, \pi/2)$, что не приведет к потере общности в силу возможности замены $\theta \rightarrow -\theta$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ в уравнениях (11.5), так же поступим с переменной ρ . Границы интервала не рассматриваются, так как соответствуют частным случаям, не представляющим интереса (в частности, тривиальные уравнения при $\theta = 0$).

2. При $\rho_0 = \pi/2$ уравнения аналогичны (11.6), их решение

$$\operatorname{tg} \theta = \exp[-\varepsilon(1-p)u + c_0],$$

$$l = \frac{1 + \exp[-2(1-p)\varepsilon u + 2c_0]}{1 + \exp(2c_0)}.$$

В этом случае, напротив, быстродействие падает с ростом наклона орбиты.

Рассмотрим общий случай. Разделим первое уравнение (11.5) на третье,

$$\frac{dl}{l} = \operatorname{tg} \theta d\theta.$$

Интегрирование этого выражения приводит к

$$\ln l = \ln \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta},$$

откуда $l \cos \theta = \cos \theta_0$. Тем самым, получен первый интеграл $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$, выражающий сохранение третьей компоненты угловой скорости в связанной системе координат. Разделим второе уравнение (11.5) на третье, получим

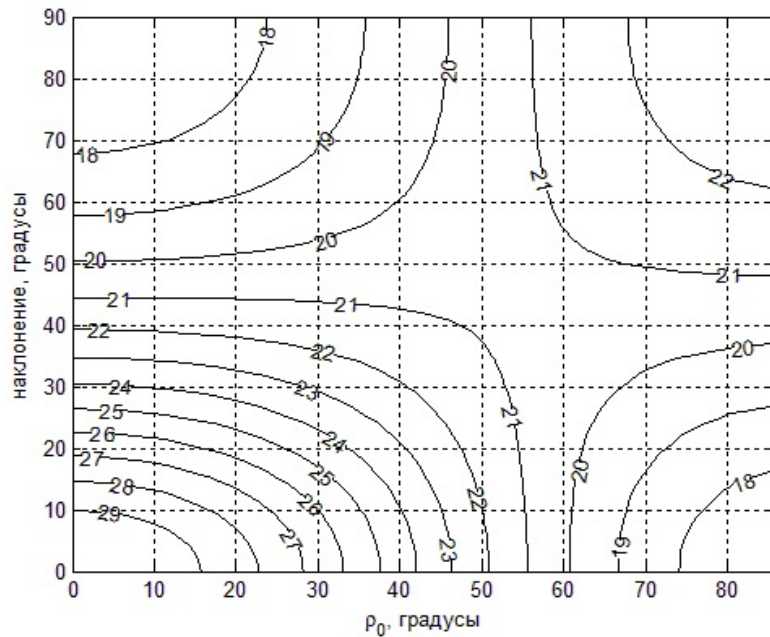
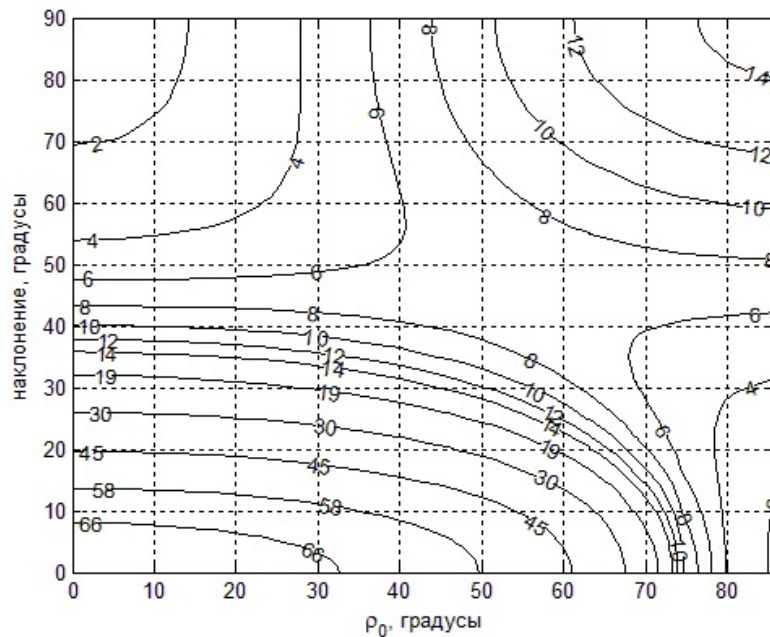
$$-\frac{2p + (1-3p)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho = \operatorname{tg} \theta d\theta,$$

откуда определяем первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = \frac{1}{2}(3p-1)\ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - 2p \ln \operatorname{tg} \rho + (3p-1)\ln \cos \theta.$$

Заметим, что случай $3p-1=0$ может быть рассмотрен аналогично случаям 1 и 2. Найденные первые интегралы, удовлетворяющие условиям теоремы о неявной функции, позволяют получить решение системы (11.5) в квадратурах.

Для анализа системы (11.5) применялось численное интегрирование с контролем точности по первым интегралам [106]. На быстродействие системы оказывают влияние три параметра: i , ρ_0 , θ_0 . Как и следовало ожидать, с ростом θ_0 быстродействие системы (время уменьшения угла θ , а значит, и экваториальной компоненты угловой скорости спутника $l \sin \theta / A$) падает. Влияние i и ρ_0 отражено на рис. 11.1 и рис. 11.2.

Рис. 11.1. Угол θ через 2 витка, $\theta_0 = 30^\circ$ Рис. 11.2. Угол θ через 15 витков, $\theta_0 = 70^\circ$

На рис. 11.1 и рис. 11.2 представлено значение угла θ через 2 и 15 витков соответственно (указано на изолиниях). Как видно из рис. 11.1, при величинах ρ_0 , меньших приблизительно 50° , быстрое действие растёт с ростом наклона орбиты, при больших – падает (см. частные случаи 1 и 2). Рис. 11.2 показывает, что при увеличении времени работы алгоритма появляется область, в которой большее

быстродействие достигается при наклонении около 45° . Однако, как видно из рис. 11.2, при выборе большого наклонения угол θ в худшем случае не превысит 14° , тогда как при выборе малого наклонения он может практически не измениться. Таким образом, для работы алгоритма гашения нутационных колебаний представляется предпочтительной орбита с большим наклонением.

Рассмотренный алгоритм имеет более общее применение. Фактически, использование одной токовой катушки позволяет демпфировать компоненту угловой скорости, перпендикулярную ей. Использование двух взаимно перпендикулярных катушек, таким образом, позволяет полностью демпфировать угловую скорость (в рамках осредненной модели магнитного поля – кроме экваториальной орбиты). Для использования алгоритма $-B\dot{\omega}$ достаточно иметь две, а не три токовые катушки. Этот вывод для спутника с произвольным тензором инерции подтверждается результатами численного моделирования. На рис. 11.3 представлено демпфирование угловой скорости спутника с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1.02, 1.51, 1.73)$ кг·м². Орбита спутника – круговая с радиусом 6850 километров и наклонением 51.7° . Дипольный момент катушек – $3.2 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ (параметры микроспутника *Чибис-М*), катушка, расположенная на третьей оси, не используется.

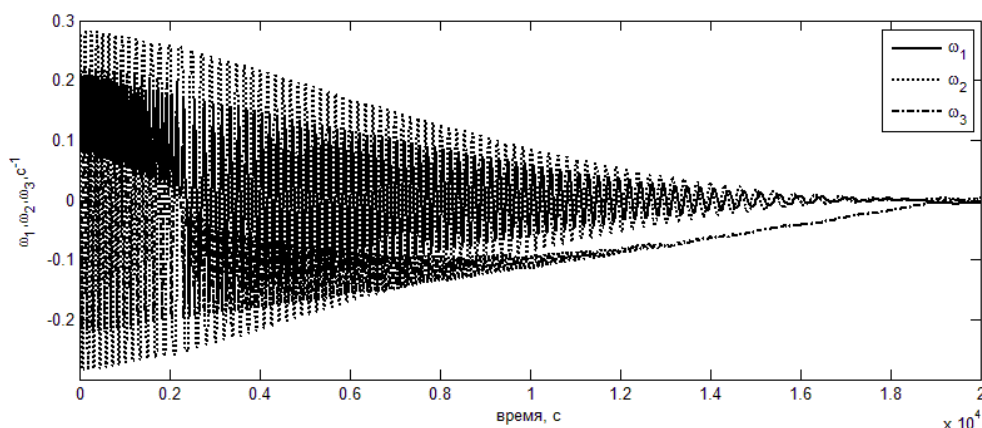


Рис. 11.3. Отключена третья катушка, дипольный момент катушек $3.2 \text{ A}\cdot\text{m}^2$.
Начальные условия $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10 \text{ }^\circ/\text{с}$

Результаты численного моделирования показывают, что быстродействие алгоритма может снизиться (одна из компонент угловой скорости демпфируется медленнее). Тем не менее, в случае отказа одной из токовых катушек демпфирование угловой скорости все еще возможно.

Алгоритм раскрутки вокруг оси симметрии

Проведем исследование динамики спутника при помощи оскулирующих переменных при использовании управления (11.2). Для этого перепишем дипольный момент (11.2) в виде

$$\mathbf{m}_x = -k\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_x,$$

где \mathbf{e}_3 – орт оси симметрии спутника. Тогда механический момент в связанной системе задается выражением

$$\mathbf{M}_x = k \left(B_0^2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{B}_x (\mathbf{B}_x \mathbf{e}_3) \right).$$

Учитывая, что $\mathbf{B}_x = \mathbb{D}^T \mathbf{B}_L$, получаем выражение для момента в системе $OL_1L_2L_3$

$$\mathbf{M}_L = k \begin{pmatrix} d_{13}B_0^2 - d_{13}B_{1L}^2 - d_{23}B_{1L}B_{2L} - d_{33}B_{1L}B_{3L} \\ d_{23}B_0^2 - d_{13}B_{1L}B_{2L} - d_{23}B_{2L}^2 - d_{33}B_{2L}B_{3L} \\ d_{33}B_0^2 - d_{13}B_{1L}B_{3L} - d_{23}B_{2L}B_{3L} - d_{33}B_{3L}^2 \end{pmatrix}.$$

Усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \varepsilon \left[2p + (1-3p)\sin^2 \rho \right] \cos \theta, \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon \frac{1}{l} (3p-1) \sin \rho \cos \rho \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{2l} \varepsilon \left[2 - 2p - (1-3p)\sin^2 \rho \right] \sin \theta, \\ \dot{\sigma} &= 0, \end{aligned} \tag{11.7}$$

где $\varepsilon = kB_0^2 / \omega_0 L_0$ – новый малый параметр. Поскольку алгоритм гашения нутационных колебаний не затрагивает скорости вращения вокруг оси симметрии, кинетический момент в уравнениях (11.7) не мал и правые части не оказываются большими величинами (в этом случае переменные ρ, σ не будут медленными). Заметим, что при выводе уравнений (11.7) не использовалось предположение малости угла θ . Предположим теперь, что в результате работы алгоритма гашения нутационных колебаний угол θ мал. Тогда уравнения (11.7) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \varepsilon \left[2p + (1-3p)\sin^2 \rho \right], \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon \frac{1}{l} (3p-1) \sin \rho \cos \rho, \end{aligned} \tag{11.8}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2l} \varepsilon [2 - 2p - (1 - 3p) \sin^2 \rho] \theta.$$

Если же в результате работы алгоритма гашения нутационных колебаний угол θ близок к π , то необходимо проводить раскрутку в другую сторону, так как $\omega_3(0) < 0$. В этом случае правые части уравнений (11.7) поменяют знак, первые два уравнения (11.8) останутся в силе. Уравнение для θ отделяется. Разделив первое уравнение из (11.8) на второе, получим

$$\frac{dl}{l} = -\frac{2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho,$$

откуда находим первый интеграл

$$I_1(l, \rho) = (3p - 1) \ln l - \frac{1}{2} (3p - 1) \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + 2p \ln \operatorname{tg} \rho.$$

Заметим, что в случае $3p - 1 = 0$ последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется и дает $l = 2/3 \varepsilon u$, $\rho = \rho_0$. Аналогично предыдущему разделу считаем, что $\rho \in (0, \pi/2)$. Рассмотрим также два частных случая.

1. Если ρ_0 близко к нулю, то на всем движении $l = 2\varepsilon p u$ при наклонении орбиты более 46° и быстродействие алгоритма растет с увеличением наклонения орбиты.

2. Если $\rho_0 = \pi/2$, то аналогично $l = \varepsilon(1 - p)u$ и быстродействие алгоритма падает с увеличением наклонения орбиты.

Первый интеграл позволяет найти решение первых двух уравнений (11.8) в квадратурах, после чего третье уравнение также интегрируется. Влияние ρ_0 и i на быстродействие алгоритма раскрутки аналогично их влиянию на быстродействие алгоритма гашения нутаций (рис. 11.4). На рис. 11.4 представлено значение кинетического момента спутника через 5 витков при $\varepsilon = 0.1$, $\theta_0 = 1^\circ$. При небольших ρ_0 увеличение наклонения приводит к увеличению быстродействия (частный случай 1), при ρ_0 , близких к 90° , быстродействие падает с увеличением наклонения (частный случай 2). Однако при больших наклонениях орбиты низкое быстродействие наблюдается при большом отклонении вектора кинетического момента от требуемого направления в инерциальном пространстве. Поскольку в результате работы одного из алгоритмов грубой переориентации этот угол на са-

мом деле мал, такой режим нереализуем. Напротив, в случае малого наклона орбиты спутник попадает в область с низким быстродействием. При малых ρ быстродействие растет с ростом наклона орбиты.

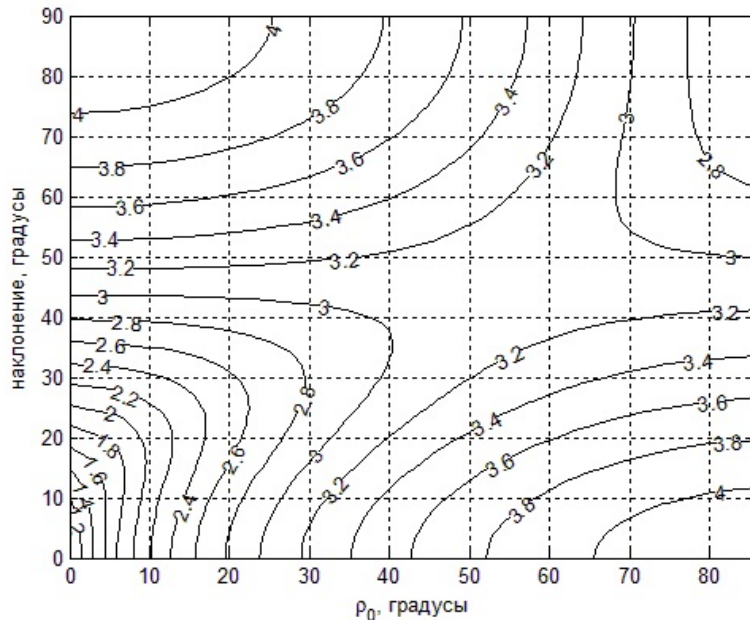


Рис. 11.4. Увеличение кинетического момента в результате раскрытия спутника

Экваториальная компонента угловой скорости не возрастает. Ее производная имеет вид

$$\frac{d(l \sin \theta)}{du} = \varepsilon \left[-2 + 2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho \right] \sin \theta \cos \theta.$$

Поскольку угол θ близок к нулю, в ходе раскрытия экваториальная компонента скорости уменьшается. Заметим, что одновременно с алгоритмом раскрытия может работать алгоритм гашения нутационных колебаний.

Работу алгоритма (11.2) можно также рассмотреть на примере модельной задачи о движении спутника под действием постоянного механического момента $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. При этом компонента, действующая вдоль оси симметрии, много больше двух других: $|M_1| \ll |M_3|$, $|M_2| \ll |M_3|$, что должно обеспечить раскрытие вокруг оси симметрии. Уравнения Эйлера (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} - (A - C)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ A \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} &= M_3. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Отсюда сразу, интегрируя последнее уравнение, получаем выражение

$$\omega_3 = \omega_{30} + \frac{M_3}{C} t$$

и время, необходимое для раскрутки спутника до заданной скорости вращения ω_f ,

$$t_{rot} = \frac{C}{M_3} (\omega_f - \omega_{30}).$$

Для нахождения первых двух компонент угловой скорости проведем замену независимой переменной t по формуле

$$\tau = \frac{C}{2M_3} \left(\omega_{30} + \frac{M_3}{C} t \right)^2$$

и введем обозначения $a = \frac{M_1}{A} \sqrt{\frac{C}{2M_3}}$, $b = \frac{M_2}{A} \sqrt{\frac{C}{2M_3}}$. Тогда уравнения

(11.9) запишутся в виде

$$\omega'_1 - \lambda\omega_2 = \frac{a}{\sqrt{\tau}}, \quad \omega'_2 + \lambda\omega_1 = \frac{b}{\sqrt{\tau}},$$

где $\lambda = (A - C)/A$. Решение однородной системы имеет вид

$$\omega_1 = c_1 \cos \lambda\tau + c_2 \sin \lambda\tau, \quad \omega_2 = -c_1 \sin \lambda\tau + c_2 \cos \lambda\tau.$$

Варьируя постоянные c_1 и c_2 , получаем для их определения систему уравнений

$$c'_1 = a \frac{\cos \lambda\tau}{\sqrt{\tau}} - b \frac{\sin \lambda\tau}{\sqrt{\tau}}, \quad c'_2 = a \frac{\sin \lambda\tau}{\sqrt{\tau}} + b \frac{\cos \lambda\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 &= a \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} C(\lambda\tau) - b \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} S(\lambda\tau) + c_{10}, \\ c_2 &= a \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} S(\lambda\tau) + b \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} C(\lambda\tau) + c_{20}, \end{aligned}$$

где $C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$, $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$ – интегралы Френеля

[107], c_{10} , c_{20} – постоянные интегрирования. Заметим, что интегралы Френеля – нечетные функции. Поэтому если $\lambda < 0$, то $S(\lambda\tau) = -S(|\lambda|\tau)$, $C(\lambda\tau) = -C(|\lambda|\tau)$. Знак λ не влияет на дальнейшие рассуждения. Введем обозначения

$$b_1 = a\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}C(\lambda\tau) - b\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}S(\lambda\tau), \quad b = a\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}S(\lambda\tau) + b\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}C(\lambda\tau),$$

$$d_1 = a\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}C(\lambda\tau_0) - b\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}S(\lambda\tau_0), \quad d_2 = a\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}S(\lambda\tau_0) + b\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}C(\lambda\tau_0).$$

Тогда из начальных условий имеем

$$\omega_{10} = (d_1 + c_{10})\cos \lambda\tau_0 + (d_2 + c_{20})\sin \lambda\tau_0,$$

$$\omega_{20} = -(d_1 + c_{20})\sin \lambda\tau_0 + (d_2 + c_{20})\cos \lambda\tau_0,$$

откуда

$$c_{10} = (\omega_{10} \cos \lambda\tau_0 - \omega_{20} \sin \lambda\tau_0) - d_1,$$

$$c_{20} = (\omega_{10} \sin \lambda\tau_0 + \omega_{20} \cos \lambda\tau_0) - d_2.$$

Так как по предположению $|\omega_{10}| \ll |\omega_f|$, $|\omega_{20}| \ll |\omega_f|$, то для сравнения ω_1 и ω_2 с ω_f достаточно сравнить выражения $b_1 - d_1$ и $b_2 - d_2$ с ω_f . Поскольку интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$ по величине не превышают единицу, необходимо рассмотреть соотношения вида

$$\varepsilon_i = \frac{M_i}{A\omega_f} \sqrt{\frac{C}{2M_3}} \quad (i = 1, 2).$$

Справедливо $\varepsilon_i = o(1)$ в силу предположения малости моментов M_1, M_2 по сравнению с M_3 . Таким образом, при малых начальных угловых скоростях и при малых проекциях механического момента, направленных перпендикулярно оси симметрии спутника, условия $|\omega_1| \ll |\omega_3|$, $|\omega_2| \ll |\omega_3|$ выполняются и спутник можно считать закрученным вокруг оси симметрии. На рис. 11.5 представлена зависимость компонент угловой скорости спутника от времени. На рис. 11.6 представлена проекция вектора угловой скорости на экваториальную плоскость.

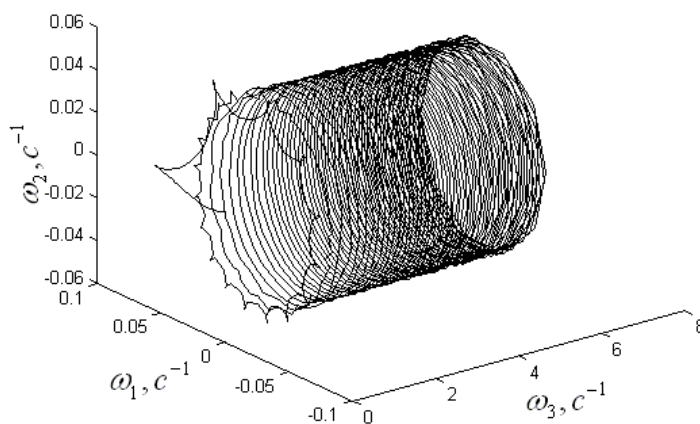


Рис. 11.5. Годограф вектора угловой скорости

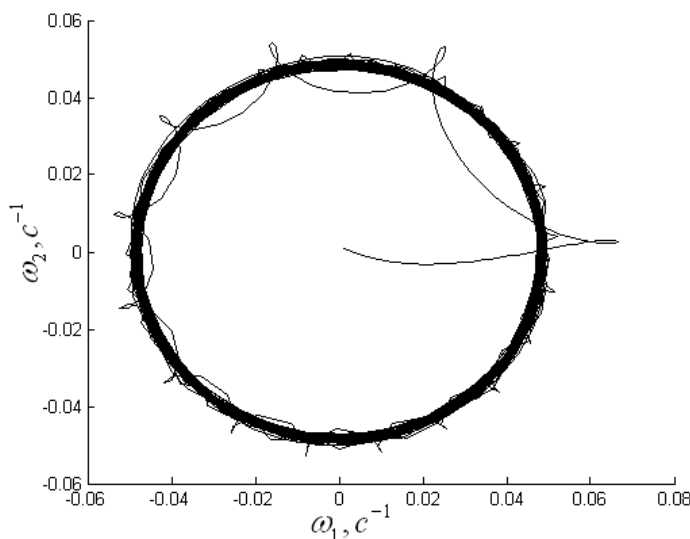


Рис. 11.6. Проекция угловой скорости на экваториальную плоскость

Компонента угловой скорости ω_{\perp} , лежащая в экваториальной плоскости, ограничена, и чем больше отношения M_1/M_3 , M_2/M_3 , тем большие значения приобретает ω_{\perp} . На представленных рисунках $M_i/M_3 = o(1)$, ($i = 1, 2$).

Алгоритм точной переориентации

Дипольный магнитный момент $\mathbf{m}_x = (0, 0, m)$, создаваемый катушками, имеет вид (11.3). В данном случае спутник считается быстро вращающимся вокруг оси симметрии. Динамику спутника опишем при помощи оскулирующих переменных. Для этого необходимо за-

дать механический момент в системе $OL_1L_2L_3$. Определим в этой системе все необходимые выражения. Требуемое значение кинетического момента $\mathbf{L}_f = \mathbb{Q}^T(L_1, L_2, L_3)$, где компоненты L_i задают конечное положение вектора кинетического момента в инерциальном пространстве; $\mathbf{e}_{3L} \approx (0, 0, 1)$, так как спутник закручен вдоль оси симметрии, то есть $A|\omega_i| \ll C|\omega_3|$, ($i = 1, 2$), это замечание позволяет значительно упростить исследование алгоритма; $\mathbf{L}_L = L_0(0, 0, l)$, где L_0 – модуль кинетического момента в начальный момент времени, l – безразмерный кинетический момент, определяемый по формуле $L = L_0 l$; $\mathbf{B}_L = B_0(B_{1L}, B_{2L}, B_{3L})$.

Поскольку спутник закручен вокруг оси симметрии и дипольный момент в системе $Ox_1x_2x_3$ имеет вид $(0, 0, m)$, то в системе $OL_1L_2L_3$ момент \mathbf{m}_L имеет практически тот же вид. Отсюда

$$\mathbf{M}_L = B_0(-B_{2L}m, B_{1L}m, 0),$$

где $m = k\Delta\mathbf{L}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) = kL_0B_0(L_{2L}B_{1L} - L_{1L}B_{2L})$.

Проведя разделение переменных, запишем снова уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных, в предположении слабого механического момента,

$$\dot{l} = 0, \quad \dot{\theta} = 0,$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2 \Theta \frac{1}{l}(L_1 \cos \rho \cos \sigma + L_2 \cos \rho \sin \sigma - L_3 \sin \rho), \quad (11.10)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2 \Theta \frac{1}{l \sin \rho}(-L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma),$$

где $\varepsilon = kB_0^2/\omega_0$ – малый параметр. Уравнения (11.10) удастся проинтегрировать, если ось симметрии спутника требуется выставить вдоль оси конуса осредненной модели геомагнитного поля. В этом случае уравнение для ρ принимает вид (тривиальные уравнения для l , σ и θ опускаем)

$$\dot{\rho} = -\eta \sin \rho,$$

где $\eta = 1/2 \varepsilon L_3 \sin^2 \Theta$, так как из первого уравнения (11.10) следует, что $l \equiv 1$. Решение этого уравнения получается в виде конечной формулы

$$\rho = 2 \arctg [c_0 \exp(-\eta u)],$$

где $c_0 = \text{tg } \rho_0 / 2$. На рис. 11.7 представлен график изменения угла ρ для различных наклонений орбиты в диапазоне от 0 до $\pi / 2$.

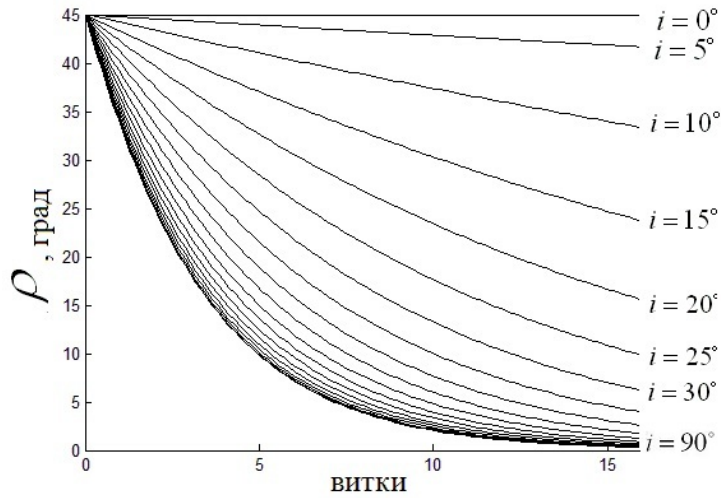


Рис. 11.7. Изменение угла ρ при разных наклонениях

Видно, что быстродействие алгоритма, то есть скорость переориентации спутника в необходимом направлении, возрастает с ростом наклона орбиты. Угол ρ стремится к нулю, что асимптотически соответствует требуемой ориентации $\mathbf{L}_f = (0, 0, L_3)$. График построен для $\varepsilon = 0.1$.

Вообще, $\dot{\rho} \sim \sin^2 \Theta$, $\dot{\sigma} \sim \sin^2 \Theta$ (если ρ не мало). Поскольку разница между i и Θ составляет не более 11° , будем считать, что $\dot{\rho} \sim \sin^2 i$, $\dot{\sigma} \sim \sin^2 i$, и тогда скорость изменения углов растет с увеличением наклона, значит, и быстродействие алгоритма переориентации оси симметрии растет с увеличением наклона.

В случае $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, то есть когда требуемое направление совпадает с направлением в восходящий узел орбиты, удастся найти первый интеграл системы (11.10). Разделим второе уравнение (11.10) на третье,

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{\sin \rho (L_1 \cos \rho \cos \sigma + L_2 \cos \rho \sin \sigma - L_3 \sin \rho)}{-L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma}.$$

Для выбранного направления в инерциальном пространстве

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = -\frac{\sin \rho \cos \rho \cos \sigma}{\sin \sigma},$$

откуда, после интегрирования, имеем

$$\ln |\text{tg } \rho / \text{tg } \rho_0| = \ln |\sin \sigma_0 / \sin \sigma|.$$

Окончательно получаем первый интеграл

$$I_0 = \operatorname{tg} \rho \sin \sigma. \quad (11.11)$$

Наличие этого первого интеграла позволяет проинтегрировать систему (11.10). Обозначая $f(\rho, I_0) = \sqrt{1 - I_0^2 \operatorname{ctg}^2 \rho}$, из (11.10) получаем

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho, I_0) \cos \rho} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta u \quad \text{при } \sigma = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho, I_0) \cos \rho} = -\frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta u \quad \text{при } \sigma = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right],$$

что совместно с (11.11) позволяет найти решение системы (11.10) в квадратурах.

Приведем теперь результаты численного моделирования динамики спутника с последовательным использованием трех рассмотренных алгоритмов. Численное моделирование проводилось при учете влияния на спутник как магнитного, так и гравитационного моментов. Управление дипольным магнитным моментом катушек формировалось на основе моделирования показаний датчиков спутника, имеющих определенную погрешность. Вместо непрерывного закона управления током катушек использовался дискретный, который, как правило, и реализуется на борту. То есть вместо закона вида \mathbf{m} использовался закон $m_0 \operatorname{sign}(\mathbf{m})$. При численном моделировании были приняты следующие предположения:

- спутник оснащен магнитометром и солнечным датчиком. Максимальная ошибка определения направления на Солнце составляет 1° , ошибка определения направления геомагнитного поля – 0.5° ;
- тензор инерции спутника $\mathbb{J} = \operatorname{diag}(0.011, 0.011, 0.02)$ кг·м²;
- дипольные моменты катушек, применяемых для гашения нутаций – $0.8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, для раскрутки – $0.1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, для ориентации оси симметрии – $0.8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, для гашения нутаций во время раскрутки – $0.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$;
- требуемое положение оси симметрии в системе $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ – $(1, 1, 0)$;
- вектор начальной угловой скорости спутника имеет компоненты – $(0.1, 0.1, 0.01) \text{ с}^{-1}$;
- наклонение орбиты – 60° ;
- модель геомагнитного поля – прямой диполь.

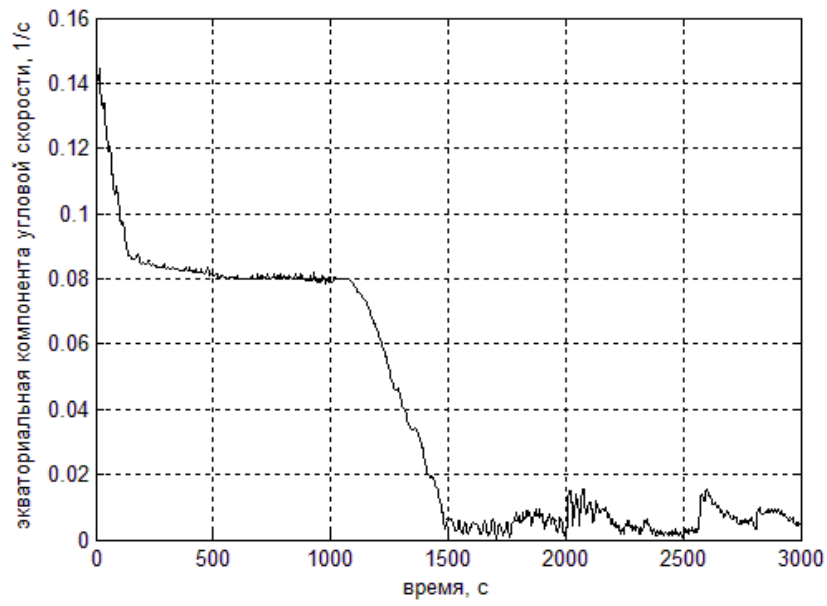


Рис. 11.8. Гашение нутационных колебаний

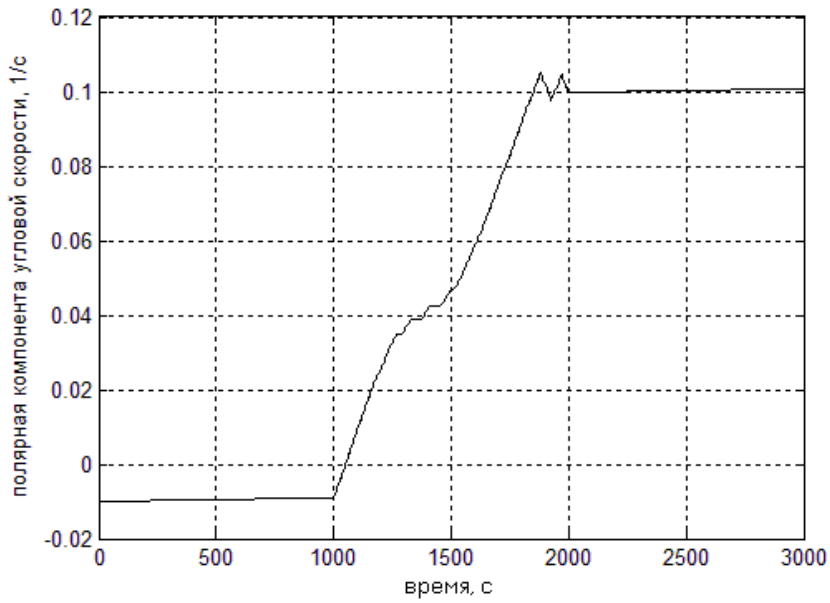


Рис. 11.9. Раскрутка вокруг оси симметрии

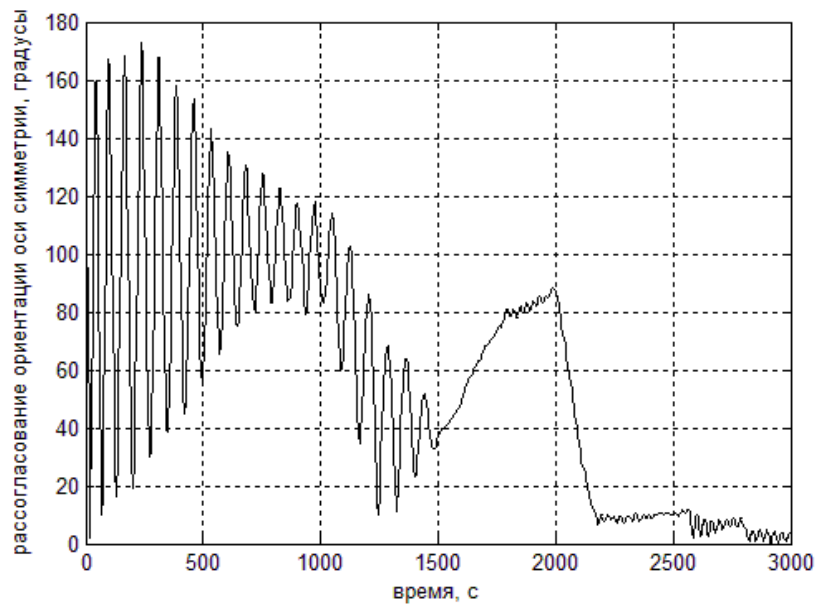


Рис. 11.10. Переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве

Результаты численного моделирования (три этапа движения представлены соответственно на рис. 11.8, рис. 11.9 и рис. 11.10) показывают, что при выбранных параметрах гашение нутационных колебаний происходит примерно за 1500 с, раскрутка – за 1000 с и переориентация оси симметрии – за 1000 с. Приведем результаты расчетов в теми же параметрами и начальными данными, но при наклонении орбиты 10° .

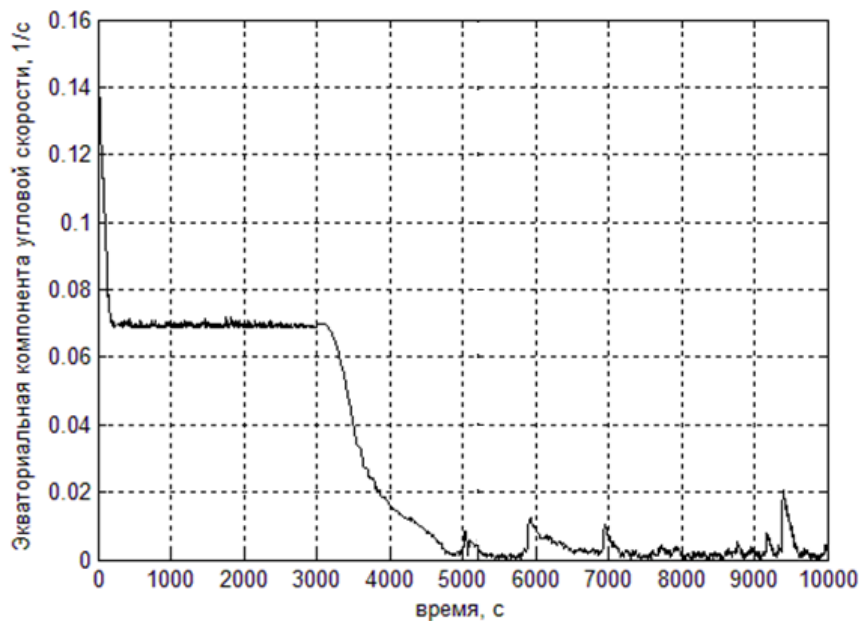


Рис. 11.11. Гашение нутационных колебаний

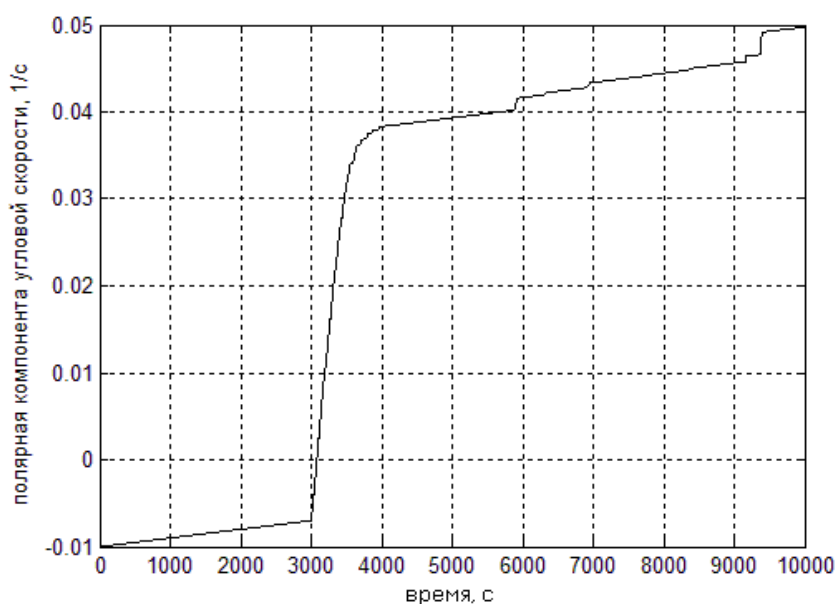


Рис. 11.12. Раскрутка вокруг оси симметрии

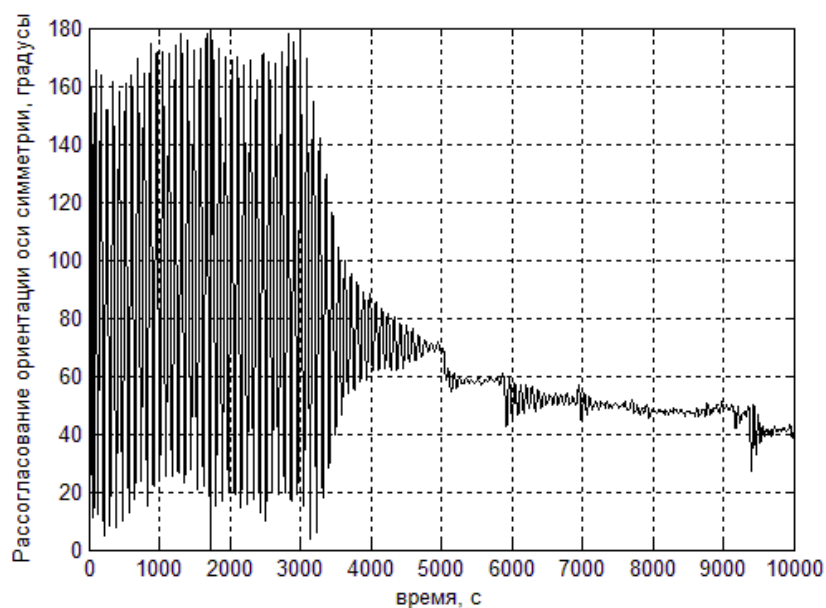


Рис. 11.13. Переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве

Из рис. 11.11, рис. 11.12 и рис. 11.13 видно, что гашение нутационных колебаний происходит примерно за 5000 с, раскрутка – практически полностью за 1000 с, переориентация оси симметрии происходит очень медленно. Результаты численного моделирования полностью согласуются со сделанными ранее выводами о том, что алгоритм раскрутки мало чувствителен к наклонению орбиты (хотя он лучше работает на орбитах с высоким наклонением), алгоритм гашения нутационных колебаний имеет заметно большее быстродействие

на орбитах с высоким наклоном, а алгоритм переориентации практически не работает на приэкваториальных орбитах.

11.3 Исследование алгоритмов предварительной переориентации

Обычно одноосная ориентация осуществляется последовательно. Вначале происходит гашение нутационных колебаний (при необходимости – гашение всех компонент угловой скорости), затем раскрутка спутника (если требуется) и только после этого – переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве. Эта схема была рассмотрена в предыдущем разделе. Теперь рассмотрим два алгоритма предварительной переориентации, которые могут использоваться сразу после отделения от ракеты-носителя [108]. Несмотря на то что спутник еще не является быстро закрученным вокруг оси симметрии, их использование позволяет перевести его в необходимое направление одновременно с гашением нутационных колебаний.

Первый алгоритм предварительной переориентации

Рассмотрим первый алгоритм предварительной переориентации, задаваемый соотношением [105]

$$\mathbf{m} = k(0, 0, \mathbf{e}_3(\mathbf{B} \times \mathbf{L}_f)). \quad (11.12)$$

Исследование динамики спутника под управлением алгоритма (11.12) аналитически удастся провести лишь для одного выделенного направления в инерциальном пространстве, $\mathbf{L}_{fZ} = (0, 0, 1)$. После усреднения получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \varepsilon p \sin^2 \theta \cos \rho, \\ \dot{\rho} &= \varepsilon p (0.5 \sin^2 \theta - 1) \sin \rho / l, \\ \dot{\sigma} &= 0, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon p \sin \theta \cos \theta \cos \rho / l, \end{aligned} \quad (11.13)$$

где $\varepsilon = kB_0^2 / L_0 \omega_0$. Уравнения (11.13) сразу дают первый интеграл $\sigma = const$ (уравнение для σ далее не рассматриваем). Разделив первое уравнение (11.13) на последнее, получим первый интеграл $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$, выражающий постоянство скорости закрутки вокруг оси симметрии (дипольный момент (11.12) направлен вдоль оси симметрии). Таким образом, при использовании алгоритма (11.12) не воз-

никает опасности гашения закрутки или, наоборот, ее возрастания выше необходимого значения. О нутационных колебаниях при этом ничего сказать нельзя, и они требуют рассмотрения. Для того, чтобы получить еще один первый интеграл, разделим второе уравнение в (11.13) на последнее, в результате получаем

$$I_2(\rho, \theta) = 0.25 \ln(\operatorname{tg}^2 \theta + 1) - \ln|\operatorname{tg} \theta| - \ln|\sin \rho|.$$

Два первых интеграла дают решения уравнения (11.13) в квадратурах.

Уравнения (11.13) имеют два положения равновесия, $(\theta = 0, \rho = 0 \text{ или } \pi)$ и $(\theta = \pi/2, \rho = 0 \text{ или } \pi)$. Уравнение для величины кинетического момента отделяется. Устойчивым положением равновесия является только $(\theta = \pi/2, \rho = 0)$, то есть угол ρ стремится к нулю. Величина модуля кинетического момента растет. Возрастание угла θ говорит о росте экваториальной компоненты угловой скорости, так как полярная компонента сохраняется. Поведение угла ρ может быть использовано для определения быстродействия алгоритма. Обратимся к виду дипольного магнитного момента (11.12). Действие магнитной системы, реализующей такой момент, приводит спутник в одно из двух положений, определяемых выражением $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{V} = 0$, что соответствует ориентации оси симметрии по вектору индукции геомагнитного поля, или $\mathbf{e}_3 (\mathbf{V} \times \mathbf{L}_f) = 0$, что соответствует приведению оси симметрии в плоскость $(\mathbf{V}, \mathbf{L}_f)$. Положение $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{V} = 0$ при этом является лишь частным случаем положения оси симметрии в плоскости $(\mathbf{V}, \mathbf{L}_f)$. В рассматриваемом случае вектор \mathbf{L}_f совпадает с осью конуса в осредненной модели геомагнитного поля. Применение алгоритма (11.12) сопровождается гашением нутационных колебаний. Подбирая токи в катушках так, чтобы гашение нутаций превалировало над «разбалтыванием», вызываемым алгоритмом (11.12), можно добиться выхода на требуемый режим ориентации, когда нутационные колебания малы, а ось симметрии близка к требуемому направлению. Фактически, чтобы не допустить уменьшения быстродействия системы, алгоритм грубой переориентации должен реализовываться меньшими токами в катушках, так как главная задача на начальном этапе движения – обеспечение стабилизации собственным вращением. Применение алгоритма гашения нутационных колебаний приводит к совпадению кинетического момента и оси симметрии спутника. По-

этому совпадение вектора кинетического момента с осью конуса, что соответствует $\rho = 0$, означает совпадение оси симметрии аппарата с требуемым направлением. Таким образом, скорость уменьшения угла ρ может рассматриваться как мера эффективности работы алгоритма.

На рис. 11.14 представлено влияние на быстродействие наклона орбиты и угла θ_0 .

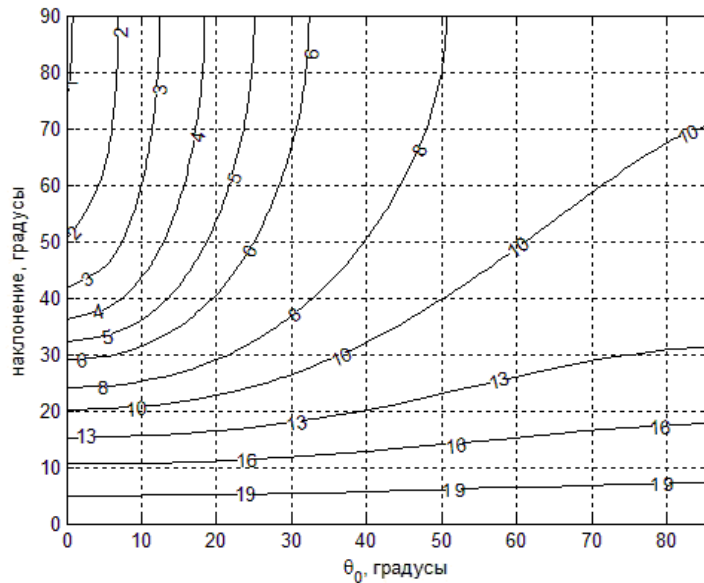


Рис. 11.14. Угол ρ через 10 витков, $\rho_0 = 20^\circ$

Из рис. 11.14 видно, что повышение наклона увеличивает быстродействие алгоритма. На околоэкваториальной орбите алгоритм практически не работает. Рис. 11.14 также показывает, что чем меньше угол θ_0 (спутник «ближе» к состоянию вращения вокруг оси симметрии), тем лучше работает алгоритм. Тем не менее, даже если спутник практически не имеет закрутки, но характеризуется значительными нутационными колебаниями, алгоритм позволяет «приблизить» аппарат к требуемой ориентации в случае не околоэкваториальной орбиты. На рис. 11.15 представлен график изменения угла ρ для нескольких наклонений орбиты.

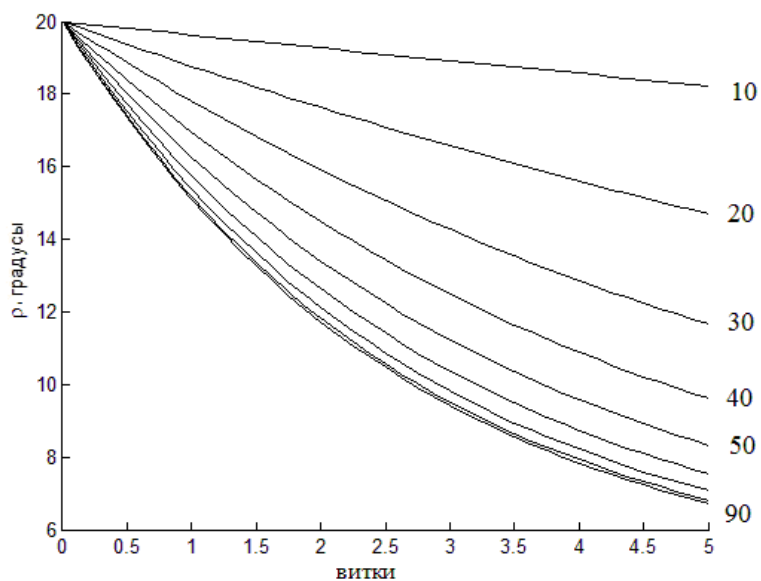


Рис. 11.15. Изменение угла ρ при разных наклонениях

Численное моделирование общего случая подтверждает справедливость сделанных выводов.

На рис. 11.16 и рис. 11.17 представлены результаты численного моделирования совместной работы алгоритмов (11.12) и (11.1).

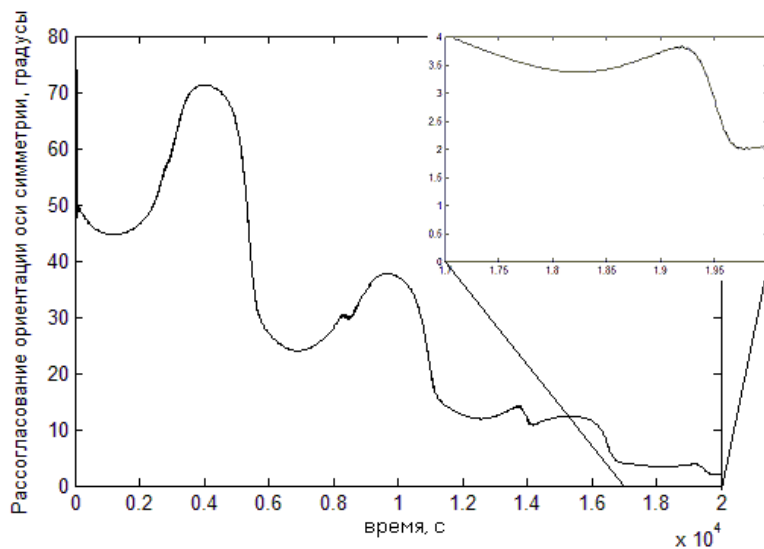


Рис. 11.16. Эволюция угла между осью симметрии спутника и требуемым направлением в инерциальном пространстве

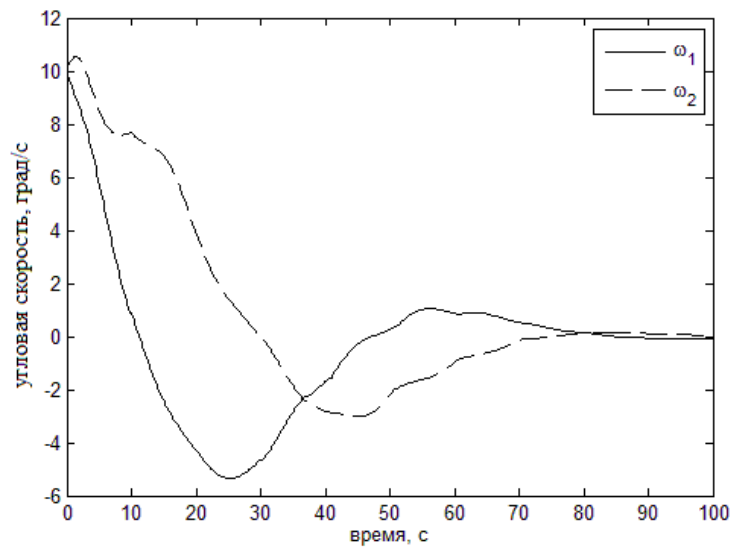


Рис. 11.17. Гашение нутационных колебаний совместно с переориентацией

При построении рис. 11.16 и рис. 11.17 использовалась модель *IGRF*, начальное отклонение от требуемой ориентации составляет 12° , начальные угловые скорости $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10^\circ/\text{с}$, коэффициенты усиления алгоритмов гашения нутационных колебаний и предварительной переориентации, соответственно, $k = 5 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{Тл}^2\cdot\text{с}$ и $k = 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{Тл}^2\cdot\text{с}^2$.

Второй алгоритм предварительной переориентации

Если кинетический момент спутника и его ось симметрии практически совпадают, то (11.3) можно переписать так:

$$\mathbf{m} \approx k(0, 0, (\mathbf{L}_f - \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B})).$$

Принимая во внимание $\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) = 0$, получаем закон управления (11.12). Таким образом, для закрученного вокруг оси симметрии спутника оба алгоритма предварительной переориентации становятся идентичными алгоритму точной переориентации. Поэтому полученные для него результаты верны для любого алгоритма.

Рассмотрим здесь использование (11.3) в качестве предварительного алгоритма переориентации, применяемого для произвольно вращающегося аппарата [108]. Дипольный момент третьей катушки задается выражением

$$m_3 = kB_0 \left[L_1 (d_{23}B_3 - d_{33}B_2) + (L_3 - 1)(d_{13}B_2 - d_{23}B_1) \right],$$

где L_i – компоненты вектора требуемой ориентации оси симметрии в системе $OL_1L_2L_3$. Усредненные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{l} &= 1/2 \varepsilon \sin^2 \theta [2p(\cos \rho - 1) + (3p - 1)\sin^2 \rho], \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon p \sin \rho / l + \\ &+ 1/2 \varepsilon \sin^2 \theta [p \sin \rho + (3p - 1)\sin \rho \cos \rho] / l, \\ \dot{\sigma} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1/2 \varepsilon \sin \theta \cos \theta [2p(\cos \rho - 1) + (3p - 1)\sin^2 \rho] / l, \end{aligned} \quad (11.14)$$

где $\varepsilon = kB_0^2 / \omega_0$. Уравнения снова имеют первый интеграл $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$. Других первых интегралов найти не удастся. Тем не менее, уравнения (11.14) удобнее для численного решения, чем исходные уравнения, так как все переменные имеют скорость изменения одного порядка. Это значительно ускоряет численное моделирование, а первый интеграл может использоваться для контроля точности. Скорость уменьшения угла ρ будем снова рассматривать как меру быстрой работы алгоритма. Рис. 11.18 показывает уменьшение величины этого угла для различных наклонений и начальных значений угла θ .

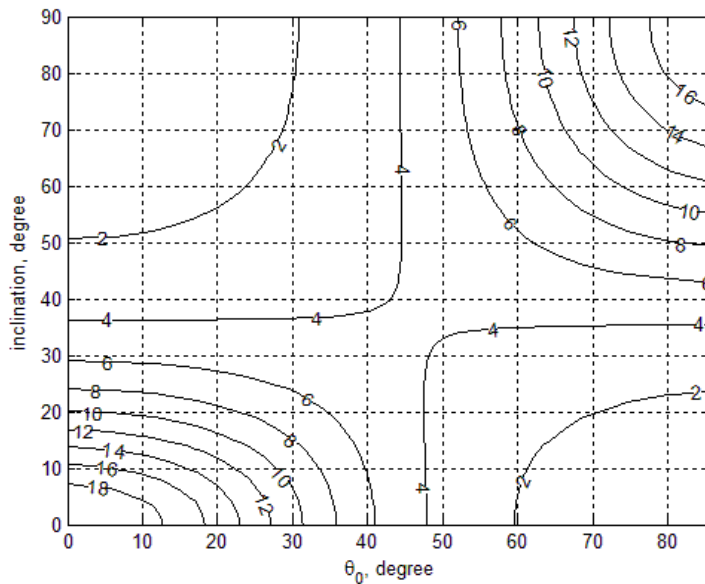


Рис. 11.18. Угол ρ через 10 витков, $\rho_0 = 20^\circ$

Время расчета и начальное значение угла ρ те же, что были выбраны при анализе первого алгоритма грубой переориентации. Это позволяет сравнить их работу. Как видно из рис. 11.18, при $\theta_0 > 45^\circ$ низкое наклонение орбиты предпочтительно. Все другие алгоритмы

показывают большее быстроедействие при высоких наклонениях, так что высокое быстроедействие этого алгоритма на приэкваториальной орбите при значительной величине нутационных колебаний не представляет интереса. В случае высокого наклонения для работы алгоритма предпочтительна ситуация $\theta_0 < 45^\circ$, при этом быстроедействие оказывается выше, чем у первого алгоритма грубой переориентации. Поэтому если спутник изначально «далек» от вращающегося вокруг оси симметрии ($\theta_0 > 45^\circ$), желательно использовать алгоритм (11.12). По мере гашения нутационных колебаний следует переключиться на алгоритм (11.3).

В отличие от первого алгоритма грубой переориентации, алгоритм (11.3) приводит к гашению нутационных колебаний. Это отражено на рис. 11.19. На рис. 11.19 представлена величина угла θ через 10 витков. Видно, что для орбит с высоким наклонением эффект гашения нутационных колебаний пренебрежимо мал. Гашение нутационных колебаний алгоритмом (11.3) следует принимать во внимание только на околоэкваториальных орбитах при большом угле между вектором кинетического момента и требуемым направлением в инерциальном пространстве. Этот выделенный случай обычно не представляет интереса, так как конечное положение вектора кинетического момента соответствует его совпадению с требуемым направлением в инерциальном пространстве.

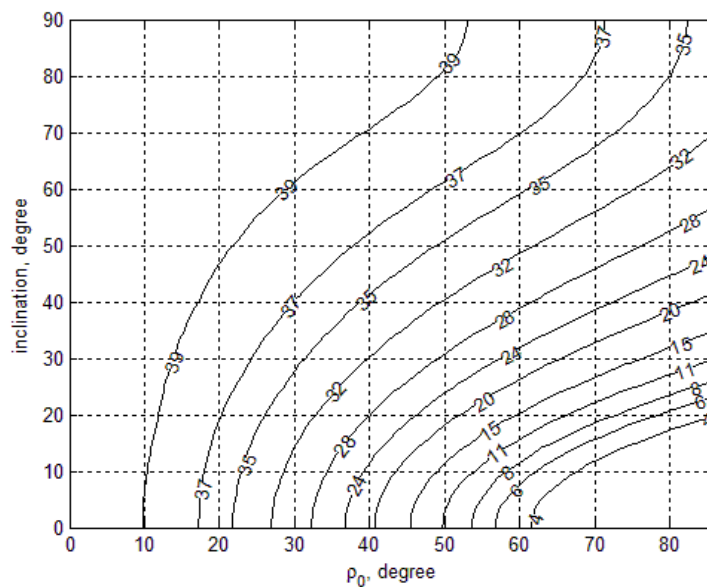


Рис. 11.19. Угол θ через 10 витков, $\theta_0 = 40^\circ$

На основе рассмотренных алгоритмов можно предложить схему управления как для приэкваториальной орбиты, так и для орбиты с умеренным и высоким наклоном (таблица 11.1).

Таблица 11.1. Схема управления

Низкое наклонение	Второй алгоритм предварительной переориентации + гашение нутационных колебаний → раскрутка → переориентация
Умеренное, высокое наклонение	Первый алгоритм предварительной переориентации + гашение нутационных колебаний → гашение нутационных колебаний → раскрутка → переориентация

Проведем численное моделирование, позволяющее сравнить работу стандартной (гашение нутационных колебаний – раскрутка – переориентация) и улучшенной (гашение нутационных колебаний и предварительная переориентация – раскрутка – переориентация) схемы переориентации, а также оценить достижимую точность ориентации. При моделировании учитывались следующие факторы.

- Гравитационный момент.
- Несимметричность тензора инерции. Использовался тензор инерции

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1.49 & 0.054 & 0.0442 \\ 0.054 & 1.51 & 0 \\ 0.0442 & 0 & 1.56 \end{pmatrix} \left[\text{кг} \cdot \text{м}^2 \right],$$

относящийся к микроспутнику *UniSat-5*, разработанному и изготовленному итальянской компанией *GAUSS Srl*. Чтобы подчеркнуть малый вклад недиагональности, тензор инерции можно переписать в виде

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.56 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 5.4 & 4.42 \\ 5.4 & 1 & 0 \\ 4.42 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\text{кг} \cdot \text{м}^2 \right],$$

где $\mu = 0.01$. Масса аппарата – около 30 кг.

- Аэродинамический момент.
- Орбита спутника – эллиптическая (перицентр около 300 км, апоцентр – 450 км), наклонение – 50°.

- Модель геомагнитного поля – *IGRF*. В этом случае все возмущения создают механический момент примерно на порядок меньше, чем управляющий (дипольный момент катушек – $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$).

Начальные данные:

- ошибка ориентации оси симметрии 19.6° ;
- угловые скорости $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 6^\circ/\text{с}$, требуемая скорость закрутки $\omega_3 = 10^\circ/\text{с}$;
- коэффициенты усиления при гашении нутационных колебаний $k = 5 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{Тл}^2\cdot\text{с}$, алгоритмов переориентации $k = 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{Тл}^2\cdot\text{с}^2$ и раскрутки $k = 5 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{Тл}^2\cdot\text{с}^2$.

На рис. 11.20 и рис. 11.21 представлены результаты моделирования для стандартной и улучшенной схем управления.

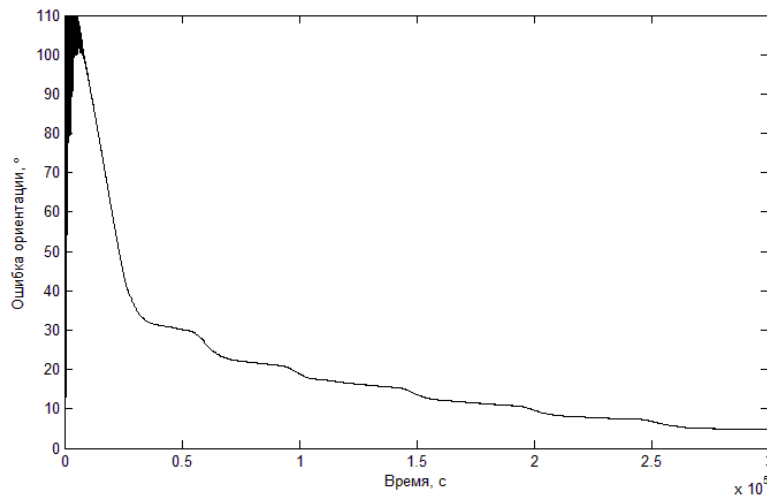


Рис. 11.20. Стандартная схема переориентации

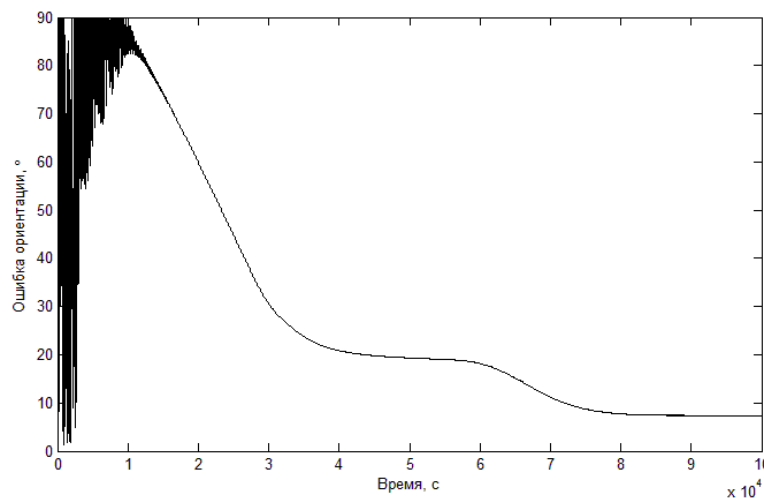


Рис. 11.21. Схема переориентации с предварительным алгоритмом

Из рис. 11.20 и рис. 11.21 видно, что в предложенной схеме переориентации время, требуемое для ее достижения с некоторой точностью, меньше, чем в стандартной схеме. После завершения работы алгоритмов гашения нутационных колебаний и раскрутки вокруг оси симметрии начальная ошибка ориентации без предварительного успокоения составляет около 106° , тогда как при использовании предварительного алгоритма переориентации эта ошибка составляет около 85° . Фактически, на последнем этапе необходимо парировать меньшее рассогласование по углу ориентации, за счет чего возникает выигрыш в быстродействии всей схемы. Достижимая точность ориентации – несколько градусов.

Таким образом, получена зависимость быстродействия пяти алгоритмов ориентации спутника, стабилизируемого собственным вращением, от наклона орбиты. В некоторых случаях может быть выгоднее иметь орбиту с низким наклоном. Однако представляются предпочтительными орбиты с высоким наклоном, так как для них нет опасности необоснованно низкого быстродействия, а для части алгоритмов быстродействие заведомо выше, чем для орбит с низким наклоном.

11.4 Алгоритм *Sdot*

Традиционно, для работы системы определения ориентации используются несколько датчиков. В случае отказа части датчиков может оказаться невозможным определение ориентации, и как следствие, произойдет потеря управления спутником. Исследуем алгоритм *Sdot* [109,110], использующий показания углового датчика, то есть датчика, измеряющего определенное направление в инерциальном пространстве относительно связанных осей, для ориентации аппарата вдоль этой оси. Заметим, что магнитометр может рассматриваться как частный случай такого датчика. Тогда этот алгоритм совпадает с алгоритмом *-Bdot*. Если же доступен солнечный датчик, спутник сохраняет возможность ориентации на Солнце. При удачной компоновке аппарата это может означать возможность заряда батарей и спасение аппарата.

Формирование закона управления

Получим закон управления, опирающийся на (10.2), но использующий не вектор \mathbf{B} , а некоторый другой вектор \mathbf{S} . Обозначение \mathbf{S} выбрано потому, что вектор направления на Солнце – наиболее важный случай применения алгоритма *Sdot*.

Представим $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{B} в виде суммы компонент вдоль и перпендикулярно вектору \mathbf{S} (рис. 11.22),

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\perp} + \boldsymbol{\omega}_{\parallel}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_{\parallel}.$$

Закон управления (10.2) тогда записывается в виде

$$\mathbf{m} = k(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} \times \mathbf{B}_{\perp}) + k(\boldsymbol{\omega}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel}).$$

Будем рассматривать только слагаемое

$$\mathbf{m} = k(\boldsymbol{\omega}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel})$$

в качестве закона управления. Тогда

$$\mathbf{m} = kB_0 \cos \alpha (\boldsymbol{\omega}_{\perp} \times \mathbf{S}).$$

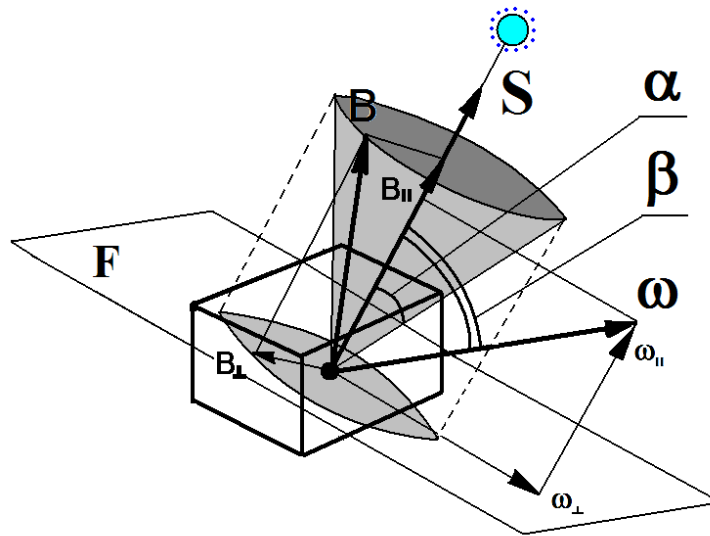


Рис. 11.22. К формированию закона управления

Поскольку $\boldsymbol{\omega}_{\parallel} \times \mathbf{S} = 0$, это выражение можно записать так:

$$\mathbf{m} = kB_0 \cos \alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}). \quad (11.15)$$

В случае использования магнитометра $\mathbf{S} = \mathbf{B}$ и, следовательно, $\alpha = 0$. Тогда закон управления (11.15) принимает вид (10.2). Закон управления (11.15) можно рассматривать как общий алгоритм демпфирования угловой скорости, если имеются измерения какого-либо вектора \mathbf{S} . Угол α между \mathbf{S} и \mathbf{B} вычисляется при помощи моделей, задающих их в инерциальном пространстве для любой точки орбиты.

Эволюционные уравнения осесимметричного спутника

Запишем механический момент, действующий на спутник при реализации закона управления (11.15),

$$\mathbf{M} = kB_0^2 \cos \alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) \times \mathbf{B}.$$

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{M}_L = kB_0^2 \left[-\cos^2 \alpha \boldsymbol{\omega}_L + \mathbf{S}_L (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{B}_L) \cos \alpha \right].$$

Выражение для $\cos \alpha$ может быть записано как

$$\cos \alpha = B_{1Z} S_{1Z} + B_{2Z} S_{2Z} + B_{3Z} S_{3Z},$$

где S_{iZ} ($i=1,2,3$) предполагаются постоянными, так как \mathbf{S}_Z – направление на удаленное Солнце в инерциальном пространстве. \mathbf{B}_Z и $\cos \alpha$ теперь являются функциями быстрой переменной u . Следуя методу усреднения, как это было сделано в разделе 10.2, запишем выражения для осредненных компонент механического момента

$$\begin{aligned} \langle M_{1L} \rangle &= \varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j1} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}), \\ \langle M_{2L} \rangle &= \varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j2} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}), \\ \langle M_{3L} \rangle &= -\varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j2} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{12} + p S_{2Z} q_{22} + q S_{3Z} q_{32}) - \\ &\quad - \varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j1} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{11} + p S_{2Z} q_{21} + q S_{3Z} q_{31}), \end{aligned} \quad (11.16)$$

где p заданы выражениями (10.9), черта обозначает усреднение по φ и ψ . Введем новую переменную γ вместо σ . Это угол между \mathbf{S} и \mathbf{L} , то есть

$$\cos \gamma = S_{1Z} q_{13} + S_{2Z} q_{23} + S_{3Z} q_{33}. \quad (11.17)$$

Найдем явный вид выражений (11.16) для того, чтобы получить новые уравнения, содержащие переменную γ , вместо (1.13). Перепишем $\langle M_{3L} \rangle$ в виде $\langle M_{3L} \rangle = \varepsilon \bar{\omega} (a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta)$. Далее,

$$\begin{aligned} a &= (q_{12} S_{1Z} + q_{22} S_{2Z} + q_{32} S_{3Z}) S_{3Z} q_{32} + (q_{11} S_{1Z} + q_{21} S_{2Z} + q_{31} S_{3Z}) S_{3Z} q_{31} = \\ &= q_{12} S_{1Z} S_{3Z} q_{32} + q_{22} S_{2Z} S_{3Z} q_{32} + (q_{32} S_{3Z})^2 + q_{11} S_{1Z} S_{3Z} q_{31} + q_{21} S_{2Z} S_{3Z} q_{31} + (S_{3Z} q_{31})^2. \end{aligned}$$

Так как $q_{11} q_{31} + q_{12} q_{32} + q_{13} q_{33} = 0$ и $q_{21} q_{31} + q_{22} q_{32} + q_{23} q_{33} = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} a &= -S_{1Z} S_{3Z} q_{13} q_{33} - S_{2Z} S_{3Z} q_{23} q_{33} + S_{3Z}^2 - (S_{3Z} q_{33})^2 = \\ &= S_{3Z}^2 - S_{3Z} q_{33} (S_{1Z} q_{13} + S_{2Z} q_{23} + S_{3Z} q_{33}). \end{aligned}$$

С учетом (11.17), окончательно имеем

$$a = (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma).$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$b = 1/2(S_{1Z}^2 - S_{1Z}q_{13} \cos \gamma + S_{2Z}^2 - S_{2Z}q_{23} \cos \gamma)$$

и $\langle M_{3L} \rangle$ принимает вид

$$\langle M_{3L} \rangle = \varepsilon \bar{\omega} p (S_{1Z}^2 - S_{1Z}q_{13} \cos \gamma + S_{2Z}^2 - S_{2Z}q_{23} \cos \gamma) + \varepsilon \bar{\omega} q (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma).$$

Так как $S_{1Z}q_{13} \cos \gamma + S_{2Z}q_{23} \cos \gamma + S_{3Z}q_{33} \cos \gamma = \cos^2 \gamma$ можно записать

$$\begin{aligned} -\langle M_{L3} \rangle &= \varepsilon \bar{\omega} p (1 - S_{3Z}^2 + S_{3Z}q_{33} \cos \gamma - \cos^2 \gamma) + \varepsilon \bar{\omega} q (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma) = \\ &= \varepsilon \bar{\omega} p \sin^2 \gamma + \varepsilon \bar{\omega} (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma). \end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнение для γ , рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} -\dot{\gamma} \sin \gamma &= (\cos \rho \cos \sigma S_{1Z} + \cos \rho \sin \sigma S_{2Z} - S_{3Z} \sin \rho) \dot{\rho} + \\ &+ \sin \rho (-\sin \sigma S_{1Z} + \cos \sigma S_{2Z}) \dot{\sigma} = \varepsilon \langle M_{1L} \rangle (\cos \rho \cos \sigma S_{1Z} + \cos \rho \sin \sigma S_{2Z} - S_{2Z} \sin \rho) + \\ &+ \varepsilon \langle M_{2L} \rangle (-\sin \sigma + \cos \sigma) = \varepsilon \langle M_{1L} \rangle S_{1L} + \varepsilon \langle M_{2L} \rangle S_{2L} = \\ &= \varepsilon \bar{\omega} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}) (S_{1L}^2 + S_{2L}^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{\gamma} = -\frac{\varepsilon \bar{\omega}}{\sin \gamma} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}) (S_{1L}^2 + S_{2L}^2). \quad (11.18)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33} &= p (\cos \gamma - S_{3Z} q_{33}) + q S_{3Z} q_{33} = \\ &= p \cos \gamma + S_{3Z} q_{33} (q - p) \end{aligned} \quad (11.19)$$

и

$$S_{1L}^2 + S_{2L}^2 = 1 - S_{3L}^2 = 1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma, \quad (11.20)$$

(11.18) принимает вид

$$\dot{\gamma} = -\varepsilon \bar{\omega} \sin \gamma (p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p)).$$

Рассматривая $\langle M_{1L} \rangle$ с учетом (11.19), получаем

$$\dot{\rho} = \varepsilon \bar{\omega} (q_{11} S_{1Z} + q_{21} S_{2Z} + q_{31} S_{3Z}) (p \cos \gamma + S_{3Z} q_{33} (q - p)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} q_{11} S_{1Z} + q_{21} S_{2Z} + q_{31} S_{3Z} &= \frac{1}{q_{31}} (q_{11} q_{31} S_{1Z} + q_{21} q_{31} S_{2Z} + q_{31}^2 S_{3Z}) = \\ &= \frac{1}{q_{31}} ((q_{13} S_{1Z} + q_{23} S_{2Z} + q_{33} S_{3Z}) - q_{12} q_{32} S_{1Z} - q_{22} q_{32} S_{2Z} + (q_{31}^2 + q_{33}^2) S_{3Z}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q_{13}} \left(-q_{33} \cos \gamma + S_{3Z} (1 - q_{32}^2) \right) = \frac{\cos \gamma \cos \rho - S_{3Z}}{\sin \rho}.$$

Окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \varepsilon \bar{\omega} \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} \left[p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right], \\ \dot{\gamma} &= -\varepsilon \bar{\omega} \sin \gamma \left[p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right], \\ \dot{l} &= -\varepsilon \bar{\omega} l \left[p \sin^2 \gamma + (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Чтобы найти уравнение для θ , необходимо определить выражение

$$\langle M_{2L} \cos \psi \rangle - \langle M_{1L} \sin \psi \rangle.$$

Найдем оба слагаемых.

$$\langle M_{2L} \cos \psi \rangle = \varepsilon l \mu g(\Theta) + \varepsilon l S_{2L} \langle (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{B}_L) \cos \alpha \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} g(\Theta) &= \langle \cos^2 \alpha \rangle = (1 - S_{3Z}^2) p + S_{3Z}^2 q, \\ \langle \omega_{1L} \sin \psi \rangle &= -\langle \omega_{2L} \cos \psi \rangle = \\ &= L \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

и

$$\mu = 1/2 \lambda \sin \theta \cos \theta,$$

где $\lambda = 1 - C / A$. Далее,

$$\langle (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{B}_L) \cos \alpha \rangle = -\mu \langle B_{2L} \cos \alpha \rangle = -\mu (q_{12} S_{1Z} + q_{22} S_{2Z} + q_{32} S_{3Z}) p = -\mu p S_{2L},$$

так как $q_{32} = 0$. Отсюда

$$\langle M_{2L} \cos \psi \rangle = \varepsilon l \mu g(\Theta) - \varepsilon l \mu p S_{2L}^2.$$

Для второго слагаемого аналогично имеем

$$\begin{aligned} \langle M_{1L} \sin \psi \rangle &= -\varepsilon l \mu g(\Theta) + \\ &+ \varepsilon l \mu S_{1L} (p q_{11} S_{1Z} + p q_{21} S_{2Z} + p q_{31} S_{3Z} + (q - p) q_{31} S_{3Z}) = \\ &= -\varepsilon l \mu g(\Theta) + \varepsilon l \mu S_{1L} (p S_{1L} + (q - p) q_{31} S_{3Z}). \end{aligned}$$

В результате правая часть уравнения для θ принимает вид

$$\langle M_\theta \rangle = 2\varepsilon l \mu g(\Theta) - \varepsilon l \mu p (S_{2L}^2 + S_{1L}^2) - \varepsilon l \mu (q - p) q_{31} S_{3Z} S_{1L}.$$

Далее, поскольку $q_{32} = 0$,

$$q_{31} S_{1L} = q_{31} S_{1L} + q_{32} S_{2L} = S_{3Z} - q_{33} S_{3L} = S_{3Z} - \cos \rho \cos \gamma.$$

Это позволяет записать уравнение для θ :

$$\dot{\theta} = \varepsilon \mu \left[2 \left((1 - S_{3Z}^2) p + S_{3Z}^2 q \right) - p \sin^2 \gamma + (q - p) S_{3Z} (\cos \gamma \cos \rho - S_{3Z}) \right]. \quad (11.22)$$

Объединяя (11.21) и (11.22), для осесимметричного спутника получаем эволюционную систему

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} \left[p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right] \times \\ &\quad \times \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\gamma} &= -\varepsilon \sin \gamma \left[p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{i} &= -\varepsilon l \left[p \sin^2 \gamma + (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \gamma) \right] \times \\ &\quad \times \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[2 \left((1 - S_{3Z}^2) p + S_{3Z}^2 q \right) - p \sin^2 \gamma + \right. \\ &\quad \left. + (q - p) S_{3Z} (\cos \gamma \cos \rho - S_{3Z}) \right] \times \\ &\quad \times \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Перейдем к анализу полученной системы.

Первые интегралы усредненных уравнений

Для поиска первых интегралов разделим первое уравнение из системы (11.23) на второе,

$$\frac{d\rho}{d\gamma} = -\frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho \sin \gamma}.$$

После интегрирования получаем

$$\cos \rho = I_1 \sin \gamma + \cos \gamma S_{3Z},$$

и первый интеграл имеет вид

$$I_1 = \frac{\cos \rho - \cos \gamma S_{3Z}}{\sin \gamma}. \quad (11.24)$$

Чтобы найти l , введем новую переменную

$$\delta = p \cos \gamma + (q - p) S_{3Z} \cos \rho.$$

Далее,

$$\dot{\delta} = -p \sin \gamma \dot{\gamma} - S_{3Z} \sin \rho (q - p) \dot{\rho} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon \delta p \sin^2 \gamma - \varepsilon \delta S_{3Z} (\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}) (q - p) = \\
 &= \varepsilon \delta \left(p \sin^2 \gamma + (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \gamma) \right) = -\delta i/l,
 \end{aligned}$$

то есть

$$\dot{\delta} + \delta i/l = 0,$$

откуда

$$l = \frac{I_2}{|\delta|} = \frac{I_2}{|p \cos \gamma + S_{3Z} (q - p) \cos \rho|}$$

и первый интеграл

$$I_2 = l |p \cos \gamma + S_{3Z} (q - p) \cos \rho|. \quad (11.25)$$

Для поиска интеграла, связывающего θ и γ , сначала упростим последнее уравнение в (11.23), используя (11.24). Подставляя выражение для $\cos \rho$, получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[2p + 2S_{3Z}^2 (q - p) - p \sin^2 \gamma + \right. \\
 &\left. + (q - p) (I_1 S_{3Z} \cos \gamma \sin \gamma - S_{3Z}^2 \sin^2 \gamma) \right] \sin \theta \cos \theta,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma \right] \sin \theta \cos \theta, \quad (11.26)$$

где $A_1 = p + (q - p) S_{3Z}^2$, $A_2 = I_1 S_{3Z} (q - p)$. Заметим, что $A_1 > 0$. Подставляя во второе уравнение системы (11.23) выражение для $\cos \rho$, получаем

$$\dot{\gamma} = -\varepsilon \sin \gamma \left[p \cos \gamma + S_{3Z} (q - p) (I_1 \sin \gamma + S_{3Z} \cos \gamma) \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

откуда

$$\dot{\gamma} = -\varepsilon \sin \gamma \left[A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right). \quad (11.27)$$

Разделив (11.27) на (11.26), получаем

$$\frac{A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma (A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma)} d\gamma = -2 \frac{\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta}{\lambda \sin \theta \cos \theta} d\theta,$$

откуда определяем первый интеграл

$$I_3 = \ln \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} - \ln \frac{4(A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma)}{(1 + \cos \gamma)^2} - \frac{2}{\lambda} \left[\ln(\sin \theta) - \frac{C}{A} \ln(\cos \theta) \right].$$

Таким образом, для системы (11.23) получен полный набор независимых первых интегралов.

Положения равновесия и их устойчивость

Найдем положения равновесия оси симметрии спутника. Для этого перепишем уравнения (11.23), опуская уравнение для l ,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\varepsilon \sin \gamma [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \varepsilon \lambda [A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma] \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{\rho} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right).\end{aligned}\quad (11.28)$$

Выпишем положения равновесия:

1. $\sin \gamma = 0$, $\theta = 0$ или $\theta = \pi / 2$, $\cos \rho - S_{3Z} = 0$.
2. $A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma = 0$, $\theta = 0$ или $\theta = \pi / 2$.

Рассмотрим второй случай и линеаризуем уравнения движения (11.28) в окрестности $\gamma_0 = \arctg(-A_1/A_2)$

$$\dot{\gamma} = -\varepsilon \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \frac{A_1^2 + A_2^2}{A_2} \bar{\omega} \gamma$$

Заметим, что поскольку $A_1 > 0$, то $\text{sign } A_2 = -\text{sign}(\sin \gamma_0 \cos \gamma_0)$, откуда следует, что положение равновесия $\gamma_0 = \arctg(-A_1/A_2)$ неустойчиво ($\bar{\omega} > 0$).

Для положения равновесия $\sin \gamma = 0$, $\theta = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\varepsilon A_1 \gamma, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \lambda A_1 \theta, \\ \dot{\rho} &= \varepsilon A_1 \frac{\cos \rho - S_{3Z}}{\sin \rho}.\end{aligned}\quad (11.29)$$

Из уравнений (11.29) видно, что асимптотически устойчиво положение равновесия $\gamma = 0$, $\theta = 0$ (если $\lambda < 0$, то есть $C > A$), $\cos \rho - S_{3Z} = 0$. Аналогично можно получить асимптотическую устойчивость $\gamma = 0$, $\theta = \pi / 2$ (при $C < A$), а также $\gamma = \pi$, $\theta = 0$ и $\gamma = \pi$, $\theta = \pi / 2$. В случае совпадения вектора кинетического момента с направлением на Солнце ($\gamma = 0$) угол между кинетическим моментом

и осью конуса совпадает с углом между направлением на Солнце и осью конуса, что и выражается соотношением $\cos \rho - S_{3Z} = 0$.

Из (11.25) следует, что

$$l_{term} = \frac{|p \cos \gamma_0 + S_{3Z} (q - p) \cos \rho_0|}{p + S_{3Z}^2 (q - p)}. \quad (11.30)$$

Таким образом, первый интеграл I_2 позволяет определить значение величины кинетического момента в результате работы алгоритма.

Анализ динамики спутника, близкого к осесимметричному

Рассмотрим теперь, как будет влиять слабая несимметричность на динамику аппарата. Введем малый параметр

$$\eta = \frac{B - A}{C} \ll 1.$$

Будем считать, что произведение величин η и ε является величиной более высокого порядка малости по сравнению с ε . Они учитываться не будет. После усреднения по u и по ψ уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= -\varepsilon \sin \gamma [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\rho} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{l} &= -\varepsilon l [A_1 \sin^2 \gamma - A_2 \cos \gamma \sin \gamma] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda [A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma] \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{\varphi} &= \frac{L_0}{\omega_0} \lambda l \cos \theta + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \cos^2 \varphi \cos \theta - \varepsilon S_{3Z} \lambda (q - p) \cos \theta \sin \rho S_{2L}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Первые три уравнения системы (11.31) идентичны уравнениям для осесимметричного спутника. В двух последних появляются слагаемые, пропорциональные η . Следовательно, значения γ , ρ , l , соответствующие положениям равновесия, не изменятся. Найдем θ и φ .

Из четвертого уравнения (11.31) получаем, что должно выполняться одно из условий:

$$\begin{cases} \sin \theta = 0, \\ \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma \right] \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (11.32)$$

Из пятого уравнения аналогично имеем

$$\begin{cases} \frac{L_0}{\omega_0} \lambda l + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \cos^2 \varphi - \varepsilon S_{3Z} \lambda (q - p) \sin \rho S_{2L} = 0, \\ \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (11.33)$$

Соответственно, в положении равновесия должны одновременно выполняться одно из уравнений (11.32) и одно из уравнений (11.33).

Если $\sin \theta = 0$, то переменная φ является быстрой и равновесия по ней не существует. В этом случае четвертое уравнение (11.31) можно усреднить дополнительно по φ и получить уравнение, идентичное второму уравнению из системы (11.28). Значит, для случая, когда $\sin \theta = 0$ является асимптотически устойчивым ($C > A$), результаты, полученные в предыдущем разделе, будут справедливы. Если $\cos \theta = 0$, из второго уравнения (11.32) получим $\sin \varphi \cos \varphi = 0$.

Для исследования асимптотической устойчивости линеаризуем четвертое и пятое уравнения системы (11.31) в окрестности положения равновесия $\cos \theta = 0$, $\sin \varphi = 0$ (значения остальных переменных в положении равновесия используются те же, что и в предыдущем разделе). Ограничимся значениями $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, для значений $\theta = 3\pi/2$ и $\varphi = \pi$ результаты будут аналогичны. Сделаем замену $\beta = \pi/2 - \theta$ и учтем, что величина S_{2L} согласно (11.20) по порядку малости не выше γ . Линеаризованные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda A_1 \beta, \\ \dot{\varphi} &= \frac{L_0}{\omega_0} \lambda l \beta + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \beta. \end{aligned}$$

Если $\eta > 0$ ($B > A$), то рассматриваемое положение равновесия будет асимптотически устойчивым, в противном случае – неустойчиво.

Аналогично можно показать, что при $\eta < 0$ ($B < A$) асимптотически устойчивыми положениями равновесия будут $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$. Все случаи собраны в таблице 11.2.

Таблица 11.2. Устойчивость положений равновесия

Соотношения моментов инерции		θ	φ	ρ	γ
C, A	B, A				
$C > A$	любые	0 и π	н/д	$\cos \rho + (-1)^{k+1} S_{3z} = 0$	πk
$C < A$	$B > A$	$\pi/2$ и $3\pi/2$	0 и π		
	$B < A$	$\pi/2$ и $3\pi/2$	$\pi/2$ и $3\pi/2$		
	$B = A$	$\pi/2$ и $3\pi/2$	н/а		

Согласно последнему столбцу в таблице 11.2, ось максимального момента инерции всегда совпадает с осью кинетического момента аппарата, будучи либо сонаправлена с ней ($\gamma = 0$), либо антипараллельна ($\gamma = \pi$). В случае $C > A$ это определяется соотношениями $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ (третья ось вдоль кинетического момента). В случае $C < A$ (третья ось перпендикулярна кинетическому моменту) следует принимать во внимание угол собственного вращения, в результате первая или вторая связанная оси направлены вдоль вектора кинетического момента.

Результаты летных испытаний

При удачной динамической конфигурации спутника с помощью алгоритма *Sdot* его можно ориентировать на Солнце, осуществляя зарядку батарей в случае нештатной ситуации (выход из строя основных исполнительных элементов или датчиков ориентации). В таком качестве алгоритм *Sdot* использовался на спутнике *Чибис-М* в последние месяцы работы аппарата. Спутник успешно завершил свою научную миссию после запланированных двух лет полета, но уже после этого вышли из строя два из трех маховиков системы ориентации. Посколь-

ку научная аппаратура продолжала собирать данные, требовалось обеспечить зарядку батарей и работу аппарата «до последнего» – до разрушения в атмосфере.

Согласно таблице 11.2 третья ось спутника (ось максимального момента инерции) должна ориентироваться вдоль вектора кинетического момента ($\cos \theta = 1$ или $\cos \theta = -1$). Кинетический момент направлен вдоль направления на Солнце ($\cos \gamma = 1$ и $\cos \gamma = -1$). Такая конфигурация позволяет ориентировать спутник солнечными панелями либо на Солнце, либо в обратном направлении. В случае неудачи использовался последний рабочий маховик, раскручивавший аппарат, после чего заново включался алгоритм *Sdot*. На рис. 11.23 и рис. 11.24 представлена ориентация вектора кинетического момента и оси максимального момента инерции 9 ноября 2013 года. Алгоритм *Sdot* работал в течение 25 минут и привел аппарат в положение $\gamma \approx \pi$, $\theta \approx \pi$. После этого телеметрия была получена только через 70 минут, спутник оставался в указанном положении.

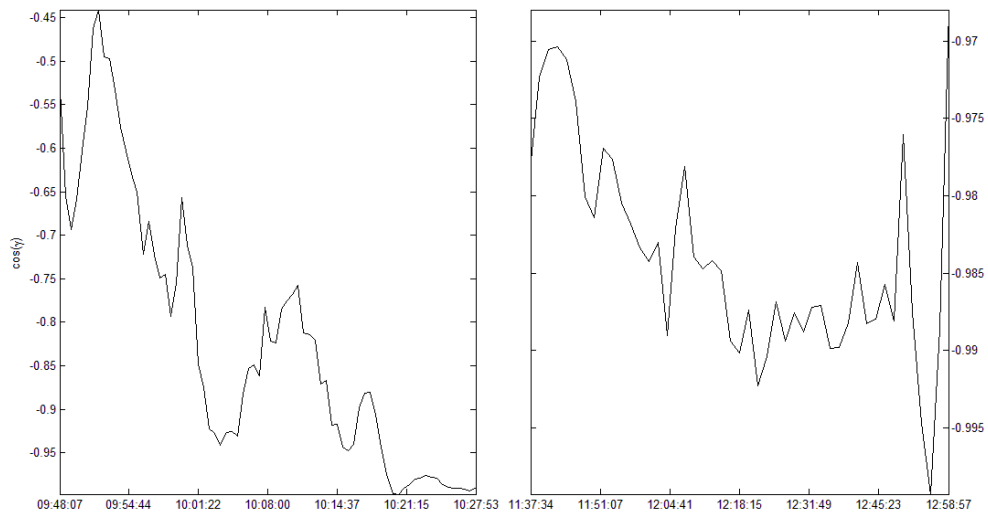


Рис. 11.23. Ориентация вектора кинетического момента

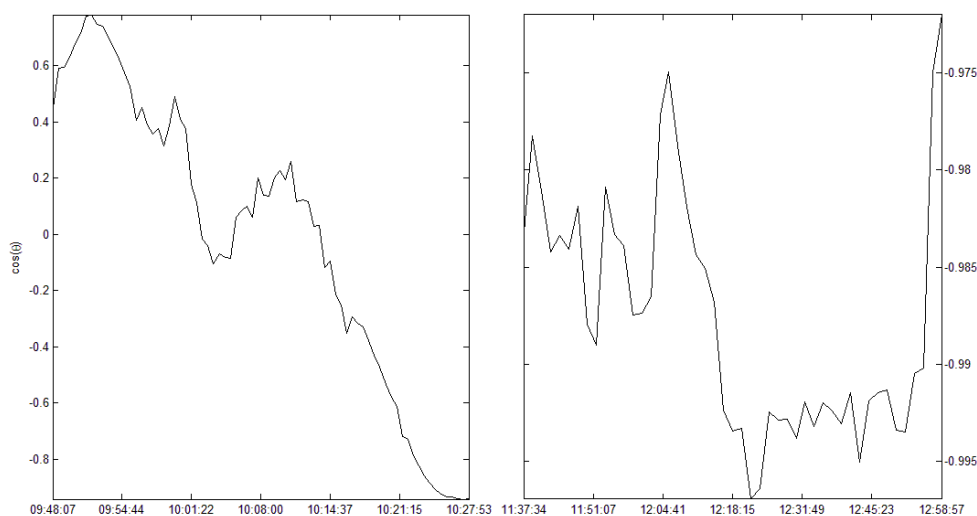


Рис. 11.24. Ориентация оси максимального момента инерции

Летные данные также частично подтверждают теоретический результат (11.30). На рис. 11.25 представлена величина кинетического момента (данные 8 ноября 2013 года).

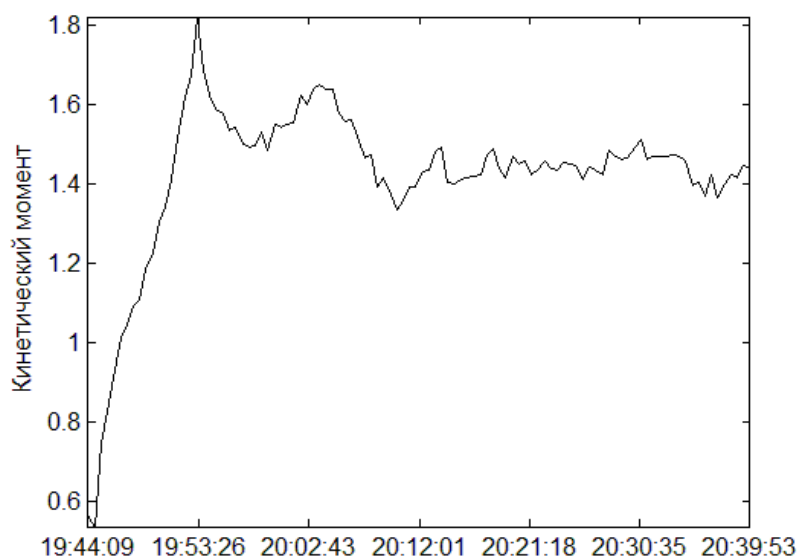


Рис. 11.25. Величина кинетического момента

Величина кинетического момента стремится к постоянному значению. Однако приближенное соотношение (11.30), полученное для осесимметричного спутника, дает слишком грубую оценку этого значения.

12 Использование дополнительных исполнительных элементов

Equation Section (Next) Стабилизация собственным вращением позволяет спутнику приобрести дополнительные динамические свойства – он становится гироскопом в инерциальном пространстве. За счет этого удастся частично решить проблему ограничения на направление момента при использовании магнитной системы ориентации. Так, становится доступной одноосная ориентация. Аналогичного результата можно добиться, устанавливая на спутнике активные или пассивные дополнительные исполнительные элементы. Далее в качестве таких дополнений будут рассмотрены тангажный маховик и гравитационная штанга.

12.1 Использование магнитной системы совместно с тангажным маховиком

Рассматривается движение спутника–твердого тела вокруг центра масс по круговой околоземной орбите в дипольном магнитном поле. Спутник оснащен тангажным маховиком (маховик с постоянной скоростью вращения) и тремя взаимно перпендикулярными магнитными катушками в качестве исполнительных элементов. Текущая ориентация предполагается известной. Ориентация спутника описывается с помощью самолетных углов с последовательностью поворотов 2-3-1 и компонент абсолютной или относительной угловой скорости. Опорная система – орбитальная. В случае проведения численного моделирования вместо углов ориентации используется кватернион. Для выбранной последовательности поворотов матрица перехода от орбитальной системы к связанной имеет вид (1.5).

Динамические уравнения Эйлера движения спутника (1.1) с учетом влияния тангажного маховика имеют вид

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{M}_{gp} + \mathbf{M}_{упр}, \quad (12.1)$$

где $\mathbf{h} = (0, h, 0)$ – кинетический момент тангажного маховика, \mathbf{M}_{gp} , $\mathbf{M}_{упр}$ – гравитационный и управляющий магнитный моменты. Динамические уравнения для относительной угловой скорости (1.6) записываются в виде

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{h} = -\mathbb{A} \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \mathbf{h} + \mathbf{M}_{отн} + \mathbf{M}_{gp} + \mathbf{M}_{yup}. \quad (12.2)$$

Переходные процессы

Перейдем к исследованию переходных процессов с целью выяснить быстродействие системы ориентации. При этом будем предполагать, что для спутника, движущегося только под действием гравитационного момента, выполнены условия

$$A - C > 0, \quad B - A + h/\omega_0 > 0, \quad 4(B - C) + h/\omega_0 > 0, \quad (12.3)$$

обеспечивающие устойчивость орбитальной ориентации, при которой одноименные оси орбитальной и связанной систем совпадают. В случае установки массивного и/или быстро вращающегося тангажного маховика он имеет большой кинетический момент и второе и третье условия выполняются независимо от величин моментов инерции. Фактически, кинетический момент маховика обеспечивает совпадение оси его установки (в рассматриваемом случае оси Ox_2) с нормалью к плоскости орбиты (ось Ox_2). Первое условие означает совпадение одноименных осей в плоскости орбиты. На движение в плоскости орбиты тангажный маховик не оказывает влияния, устойчивость обеспечивается действием гравитационного момента.

При исследовании переходных процессов нас будет особенно интересовать время, затрачиваемое на приведение оси вращения маховика к нормали к плоскости орбиты, после чего с помощью гравитационного или управляющего магнитного моментов можно обеспечить требуемую ориентацию в плоскости. В качестве меры быстродействия системы ориентации будем использовать характеристические показатели линеаризованной системы уравнений движения (12.2), (1.7), имеющей вид в безразмерных переменных и параметрах

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} + \dot{\beta} - (\lambda_A + h_A)(\dot{\beta} - \gamma) &= \frac{1}{A\omega_0^2} M_1, \\ \ddot{\alpha} &= \frac{1}{B\omega_0^2} M_2, \\ \ddot{\beta} - \dot{\gamma} + (\lambda_C + h_C)(\dot{\gamma} + \beta) &= \frac{1}{C\omega_0^2} M_3, \end{aligned} \quad (12.4)$$

где $\lambda_A = \frac{B-C}{A}$, $\lambda_C = \frac{B-A}{C}$, $h_A = \frac{h}{A\omega_0}$, $h_C = \frac{h}{C\omega_0}$. Далее необходимо

принять во внимание гравитационный момент

$$\mathbf{M}_{gp} = 3\omega_0^2 \mathbf{e}_3 \times \mathbb{J} \mathbf{e}_3 = 3\omega_0^2 (-(B-C)\gamma, (A-C)\alpha, 0)$$

и управляющий магнитный момент. В переходных процессах будем использовать алгоритм гашения угловой скорости (10.3)

$$\mathbf{M}_{упр} = k(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = k\omega_0 B_0^2 \begin{pmatrix} \dot{\beta} B_1 B_3 - \dot{\gamma} (B_2^2 + B_3^2) + \dot{\alpha} B_1 B_2 \\ \dot{\gamma} B_1 B_2 - \dot{\alpha} (B_1^2 + B_3^2) + \dot{\beta} B_2 B_3 \\ \dot{\alpha} B_2 B_3 - \dot{\beta} (B_2^2 + B_1^2) + \dot{\gamma} B_1 B_3 \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

Линеаризованные уравнения движения окончательно имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + \dot{\beta} - (\lambda_A + h_A)(\dot{\beta} - \gamma) + 3\lambda_A \gamma &= \\ &= \varepsilon \xi (\dot{\beta} B_1 B_3 - \dot{\gamma} (B_2^2 + B_3^2) + \dot{\alpha} B_1 B_2), \\ \ddot{\alpha} &= \varepsilon \frac{C}{B} (\dot{\gamma} B_1 B_2 - \dot{\alpha} (B_1^2 + B_3^2) + \dot{\beta} B_2 B_3), \\ \ddot{\beta} - \dot{\gamma} + (\lambda_C + h_C)(\dot{\gamma} + \beta) &= \\ &= \varepsilon (\dot{\alpha} B_2 B_3 - \dot{\beta} (B_2^2 + B_1^2) + \dot{\gamma} B_1 B_3), \end{aligned} \quad (12.6)$$

где $\xi = C/A$, $\varepsilon = kB_0^2/C\omega_0$.

Как было замечено ранее, особый интерес в переходных процессах представляет приведение оси вращения маховика к нормали к плоскости орбиты, то есть поведение углов β и γ . Поэтому логично упростить систему (12.6), отделив движение в плоскости орбиты. Для этого в первом и третьем уравнениях системы (12.6) необходимо избавиться от слагаемых, содержащих $\dot{\alpha}$. Этого можно добиться, положив $B_2 = 0$, что имеет место при $i = 90^\circ$. Далее будем рассматривать спутник на полярной орбите. Уравнения движения аппарата вне плоскости орбиты принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \varepsilon \cos^2 u \dot{\beta} + (2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \theta_C) \dot{\gamma} + \theta_C \beta &= 0, \\ \ddot{\gamma} + (2\varepsilon \xi \sin u \cos u + 1 - \theta_A) \dot{\beta} + 4\varepsilon \xi \sin^2 u \dot{\gamma} + (3\lambda_A + \theta_A) \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где $\theta_A = h_A + \lambda_A$, $\theta_C = h_C + \lambda_C$. Введем обозначение $\mathbf{x} = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$. Тогда систему (12.7) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}_0 \mathbf{x} + \varepsilon \mathbb{A}_1(u) \mathbf{x}, \quad (12.8)$$

где

$$\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \theta_C & -\theta_C & 0 \\ \theta_A - 1 & 0 & 0 & -3\lambda_A - \theta_A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} -\cos^2 u & -2 \sin u \cos u & 0 & 0 \\ -2\xi \sin u \cos u & -4\xi \sin^2 u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{A}_0 \mathbf{x}_0,$$

соответствующую движению спутника, оснащенного тангажным маховиком, в гравитационном поле, без учета действия демпфирующего управляющего момента. Ее характеристические числа λ_i определяются из уравнения

$$\lambda^4 + (3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C) \lambda^2 + (3\lambda_A + \theta_A) \theta_C = 0 \quad (12.9)$$

и равны

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C)^2 + 12\lambda_A \theta_C (\theta_A - 1)} \right)},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(-3\lambda_A - 1 - \theta_A \theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A \theta_C)^2 + 12\lambda_A \theta_C (\theta_A - 1)} \right)},$$

где i – мнимая единица. Собственные векторы, соответствующие числам λ_k , суть

$$\Phi_k = A_k \begin{pmatrix} \lambda_k & \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{1 - \theta_C} & 1 & \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{\lambda_k (1 - \theta_C)} \end{pmatrix},$$

где A_k – произвольные постоянные. Запишем решение системы (12.7) при $\varepsilon = 0$ в виде

$$\begin{aligned} \beta_0 &= A_1 \exp(\lambda_1 u) + A_2 \exp(-\lambda_1 u) + A_3 \exp(\lambda_3 u) + A_4 \exp(-\lambda_3 u), \\ \gamma_0 &= B_1 \exp(\lambda_1 u) + B_2 \exp(-\lambda_1 u) + B_3 \exp(\lambda_3 u) + B_4 \exp(-\lambda_3 u), \end{aligned} \quad (12.10)$$

где $B_j = \chi A_j$, $\chi = \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{\lambda_k (1 - \theta_C)}$. Обратимся к методу, предложенному

Артемьевым [72,111]. Чтобы уточнить (12.10) с учетом действия

демпфирующего момента, представим решение уравнения (12.8) в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^4 \left(\boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u) \right) \exp \left(\lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} \right) u + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (12.11)$$

Подставляя это выражение в (12.8) и группируя члены при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 & \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}_k + (\lambda_k \mathbb{E} - \mathbb{A}_0) \boldsymbol{\varphi}_k = 0, \\ \varepsilon^1 & \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{k1} + (\lambda_k \mathbb{E} - \mathbb{A}_0) \boldsymbol{\psi}_{k1} = -\mu_{k1} \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbb{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_k, \\ \varepsilon^2 & \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{k2} + (\lambda_k \mathbb{E} - \mathbb{A}_0) \boldsymbol{\psi}_{k2} = -\mu_{k1} \boldsymbol{\psi}_{k1} - \mu_{k2} \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbb{A}_1 \boldsymbol{\psi}_{k1}, \\ \varepsilon^j & \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{kj} + (\lambda_k \mathbb{E} - \mathbb{A}_0) \boldsymbol{\psi}_{kj} = \mathbf{f}_j(u, \mu_{k1}, \dots, \mu_{kj-1}, \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\psi}_{k1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{kj-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения очередного приближения $\boldsymbol{\psi}_{kj}$ ($\boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u)$ уже не является собственным вектором, так как матрица \mathbb{A}_1 зависит от времени) необходимо решать неоднородные уравнения, которые, вообще говоря, могут оказаться сложнее исходных уравнений движения. Характеристические показатели Ляпунова соответствующего приближения находятся из условия периодичности функций $\boldsymbol{\psi}_{kj}(u) = \boldsymbol{\psi}_{kj}(u + 2\pi)$. Зачастую можно утверждать [72], что такие решения найти можно, а ряд (12.11) сходится. Для этого достаточно, чтобы ни одна из разностей $\lambda_{kj} - \lambda_{kl}$ не была равна im при $j \neq l$, где m – целое число. Эти разности являются собственными числами матрицы $(\lambda_k \mathbb{E} - \mathbb{A}_0)$ однородной части уравнений для определения $\boldsymbol{\psi}_{kj}$. Фактически это означает, что общее решение однородных уравнений имеет период, отличный от 2π , и возникает необходимость определения частного решения таким образом, чтобы получить $\boldsymbol{\psi}_{kj}$ требуемой периодичности. В рассматриваемом случае разности характеристических чисел нулевого приближения удовлетворяют представленному условию, что позволяет перейти к поиску характеристических показателей системы (12.8) в первом приближении. Для этого обратимся к системе (12.7) и представим ее решение, соответствующее k -му собственному числу, в виде

$$\beta = (A_k + \varepsilon \tau_k(u)) \exp(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) u,$$

$$\gamma = (B_k + \varepsilon \vartheta_k(u)) \exp(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) u.$$

Подставляя это выражение в систему (12.7), получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \ddot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k)^2 + \varepsilon \cos^2 u \left[\varepsilon \dot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + \\ & + (2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \theta_C) \left[\varepsilon \dot{\vartheta}_k + (B_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + \theta_C (A_k + \varepsilon \tau_k) = 0, \\ & \varepsilon \ddot{\vartheta}_k + (B_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k)^2 + \\ & + (2\varepsilon \xi \sin u \cos u + 1 - \theta_A) \left[\varepsilon \dot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + \\ & + 4\varepsilon \xi \sin^2 u \left[\varepsilon \dot{\vartheta}_k + (B_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \sigma_k) \right] + (3\lambda_A + \theta_A)(B_k + \varepsilon \vartheta_k) = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем члены при ε^0 :

$$\begin{aligned} & (\lambda_k^2 + \theta_C) A_k + (\theta_C - 1) \lambda_k B_k = 0, \\ & (1 - \theta_A) \lambda_k A_k + (\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \theta_A) B_k = 0. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Определитель системы (12.12) совпадает с характеристическим уравнением (12.9) и потому нулевой. Сгруппируем члены при ε :

$$\begin{aligned} & \ddot{\tau}_k + 2A_k \lambda_k \sigma_k + \lambda_k^2 \tau_k + \cos^2 u A_k \lambda_k + 2 \sin u \cos u B_k \lambda_k + \\ & + (\theta_C - 1) B_k \lambda_k + (\theta_C - 1) \lambda_k \vartheta_k + \theta_C \tau_k = 0, \\ & \ddot{\vartheta}_k + 2B_k \lambda_k \sigma_k + \lambda_k^2 \vartheta_k + 2\xi \sin u \cos u A_k \lambda_k + (1 - \theta_A) \dot{\tau}_k + \\ & + (1 - \theta_A) A_k \lambda_k + (1 - \theta_A) \lambda_k \tau_k + 4\xi \sin^2 u B_k \lambda_k + (3\lambda_A + \theta_A) \vartheta_k = 0. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} & F_1 - f_1 + C_1 \sigma_k = 0, \\ & F_2 - f_2 + C_2 \sigma_k = 0, \end{aligned} \tag{12.14}$$

где

$$\begin{aligned} & F_1 = \ddot{\tau}_k + (\theta_C - 1) \dot{\vartheta}_k + (\theta_C - 1) \lambda_k \vartheta_k + (\theta_C + \lambda_k^2) \tau_k, \\ & F_2 = \ddot{\vartheta}_k + (1 - \theta_A) \dot{\tau}_k + (1 - \theta_A) \lambda_k \tau_k + (3\lambda_A + \theta_A + \lambda_k^2) \vartheta_k, \\ & f_1(u) = -\cos^2 u A_k \lambda_k - 2 \sin u \cos u B_k \lambda_k, \\ & f_2(u) = -4\xi \sin^2 u B_k \lambda_k - 2\xi \sin u \cos u A_k \lambda_k, \\ & C_1 = 2A_k \lambda_k + (\theta_C - 1) B_k, \\ & C_2 = 2B_k \lambda_k + (1 - \theta_A) A_k. \end{aligned}$$

Умножим теперь первое уравнение (12.14) на $\lambda_k^2 + \theta_C$, второе на $-(\theta_C - 1)\lambda_k$ и сложим, затем первое на $1 - \theta_A$, второе на $-(\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \theta_A)$ и сложим. Получим систему

$$\begin{aligned} & (\lambda_k^2 + \theta_C)(F_1 - f_1 + C_1\sigma_k) - \\ & - (\theta_C - 1)\lambda_k(F_2 - f_2 + C_2\sigma_k) = 0, \\ & (1 - \theta_A)\lambda_k(F_1 - f_1 + C_1\sigma_k) - \\ & - (\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \theta_A)(F_2 - f_2 + C_2\sigma_k) = 0. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Определитель этой системы, совпадающий с определителем (12.12), нулевой. Система (12.15) имеет отличное от нуля решение. В частности, при любом значении $F_2 - f_2 + C_2\sigma_k$ можно найти $F_1 - f_1 + C_1\sigma_k$, такое, что выполняется

$$(\lambda_k^2 + \theta_C)(F_1 - f_1 + C_1\sigma_k) - (\theta_C - 1)\lambda_k(F_2 - f_2 + C_2\sigma_k) = 0. \quad (12.16)$$

Используем последнее выражение, чтобы найти первое приближение характеристического показателя σ_k . При этом первое приближение соответствующего ему собственного вектора нас не интересует. Имеют значение его свойства – величины τ_k и \mathcal{G}_k и их производные периодичны, что обеспечивается подбором постоянных интегрирования уравнения (12.13) и σ_k . Проинтегрируем соотношение (12.16) от 0 до 2π , принимая во внимание периодичность τ_k и \mathcal{G}_k и их производ-

ных, откуда $\int_0^{2\pi} F_j(u) du = 0$,

$$(\lambda_k^2 + \theta_C)(-\bar{f}_1 + 2\pi C_1\sigma_k) - (\theta_C - 1)\lambda_k(-\bar{f}_2 + 2\pi C_2\sigma_k) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \int_0^{2\pi} f_1(u) du = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} A_k \lambda_k (1 + \cos 2u) - B_k \lambda_k \sin 2u \right] du = -\pi A_k \lambda_k, \\ \bar{f}_2 &= \int_0^{2\pi} f_2(u) du = \int_0^{2\pi} \left[2B_k \lambda_k (-1 + \cos 2u) - A_k \lambda_k \sin 2u \right] \xi du = -4\pi \xi \chi A_k \lambda_k. \end{aligned}$$

Это позволяет записать первое приближение k -го характеристического показателя

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \frac{4\xi\chi\lambda_k^2(\theta_C - 1) - \lambda_k(\lambda_k^2 + \theta_C)}{(\lambda_k^2 + \theta_C)[2\lambda_k + \chi(\theta_C - 1)] - \lambda_k(\theta_C - 1)[2\chi\lambda_k + (1 - \theta_A)]}. \quad (12.17)$$

Наибольший интерес с точки зрения переходных процессов представляет вещественная часть σ_k , характеризующая их скорость.

Обозначим $\lambda_k = i\eta_k$ и $\chi = \frac{\theta_C - \eta_k^2}{\eta_k(\theta_C - 1)}i = \chi_r i$. Тогда (12.17) можно записать в виде

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \frac{4\xi\chi_r\eta_k^2(1 - \theta_C) + \eta_k(\eta_k^2 - \theta_C)}{(\theta_C - \eta_k^2)[2\eta_k + \chi_r(\theta_C - 1)] + \eta_k(\theta_C - 1)[2\chi_r\eta_k + (\theta_A - 1)]}.$$

При этом $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = \sigma_4$. Окончательно получаем характеристические показатели (12.7) в первом приближении

$$\begin{aligned} v_1 &= i\eta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon(1 + 4\xi) \frac{\eta_1^2(\eta_1^2 - \theta_C)}{-3\eta_1^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_1^2 + \theta_C^2}, \\ v_2 &= -i\eta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon(1 + 4\xi) \frac{\eta_1^2(\eta_1^2 - \theta_C)}{-3\eta_1^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_1^2 + \theta_C^2}, \\ v_3 &= i\eta_3 + \frac{1}{2}\varepsilon(1 + 4\xi) \frac{\eta_3^2(\eta_3^2 - \theta_C)}{-3\eta_3^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_3^2 + \theta_C^2}, \\ v_4 &= -i\eta_3 + \frac{1}{2}\varepsilon(1 + 4\xi) \frac{\eta_3^2(\eta_3^2 - \theta_C)}{-3\eta_3^4 + [2\theta_C + (\theta_A - 1)(\theta_C - 1)]\eta_3^2 + \theta_C^2}, \end{aligned} \quad (12.18)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= i\sqrt{\frac{1}{2}\left(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C)^2 + 12\lambda_A\theta_C(\theta_A - 1)}\right)}, \\ \eta_3 &= i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-3\lambda_A - 1 - \theta_A\theta_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C)^2 + 12\lambda_A\theta_C(\theta_A - 1)}\right)}. \end{aligned}$$

Для определения степени устойчивости¹ системы (12.7) в первом приближении необходимо сравнить $-\varepsilon\sigma_1$ и $-\varepsilon\sigma_3$, соотношение между которыми зависит от параметров спутника и управления. Рассмотрим в качестве примера спутник с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1.5, 1.8, 1.1)$ кг·м² на орбите высотой 1000 км и с коэффициентом усиления в управлении $k = 5 \cdot 10^5$ Н·м·с/Гл² ($\varepsilon \approx 0.18$). На рис. 12.1 представлена зависимость степени устойчивости ζ (в дан-

¹ Расстояние до ближайшего к мнимой оси характеристического показателя с отрицательной действительной частью.

ном случае $\zeta = -\varepsilon\sigma_3$) от величины кинетического момента тангажного маховика.

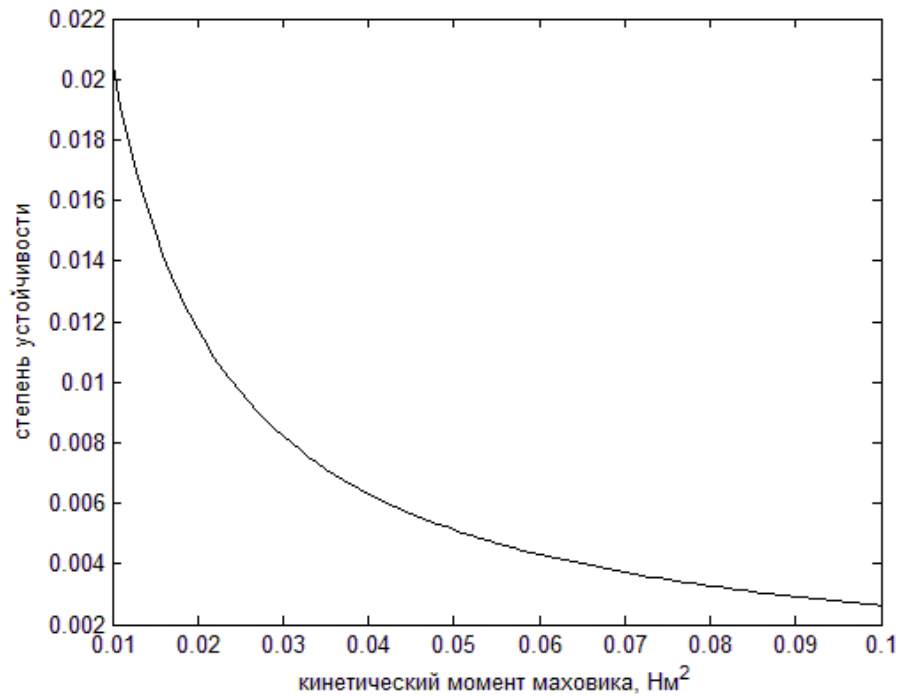


Рис. 12.1. Степень устойчивости в зависимости от кинетического момента маховика

Уменьшение степени устойчивости означает увеличение времени, затрачиваемого на поворот маховика при возрастании его кинетического момента. Так, при величине кинетического момента 0.01 Н·м степень устойчивости равна $\zeta \approx 0.02$. Численное моделирование, проведенное с теми же параметрами, показывает падение угла между осями Ox_2 и Ox_2 с 9.2° до 1.1° за 10^5 секунд, при этом степень устойчивости указывает на конечное значение 0.8° . Для тангажного маховика с кинетическим моментом 0.05 Н·м степень устойчивости равна $\zeta \approx 0.005$. В этом случае угол между одноименными осями составляет 5.6° при проведении моделирования и 5.8° при использовании примерных значений степени устойчивости. Приближенный результат (12.18) представляется потому полезным при оценке времени переходных процессов.

Номинальный режим гравитационной ориентации

Перейдем к рассмотрению номинального режима движения спутника, когда его угловая скорость мала, а оси системы $Ox_1x_2x_3$ практически совпадают с осями системы $OX_1X_2X_3$ и выполнены условия устойчивости (12.3). Будем считать, что на спутник действуют гравитационный восстанавливающий и магнитный демпфирующий моменты (положение равновесия, заданное условиями (12.3), становится асимптотически устойчивым). Устойчивость в плоскости орбиты обеспечивается лишь действием гравитационного момента, для большинства компоновок спутников имеющего небольшую величину. В случае использования алгоритма демпфирования (10.3) без учета возмущающих моментов возможна точная ориентация аппарата. Однако зачастую используется упрощенный алгоритм демпфирования (10.1). Определим, как скажется на точности ориентации использование простого алгоритма. Перепишем систему (12.1), (1.7), введя дифференцирование по аргументу широты,

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= h_A \omega_3 + \lambda_A (\omega_2 \omega_3 - 3a_{23}a_{33}) + \varepsilon \frac{C}{A} \bar{M}_{1x}, \\ \dot{\omega}_2 &= \lambda_B (\omega_1 \omega_3 - 3a_{13}a_{33}) + \frac{C}{B} \varepsilon \bar{M}_{2x}, \\ \dot{\omega}_3 &= -h_C \omega_1 - \lambda_C (\omega_1 \omega_2 - 3a_{13}a_{23}) + \varepsilon \bar{M}_{3x}, \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) - 1, \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma),\end{aligned}\tag{12.19}$$

где $\lambda_A = \frac{B-C}{A}$, $\lambda_B = \frac{C-A}{B}$, $\lambda_C = \frac{B-A}{C}$, $h_A = \frac{h}{A\omega_0}$, $h_C = \frac{h}{C\omega_0}$, $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{C\omega_0}$,

\bar{M}_{ix} – компоненты безразмерного демпфирующего момента. Обозначения, введенные при записи системы (12.4), сохранены.

Система (12.19) при отсутствии магнитного момента допускает стационарное решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = 1$. Будем искать решения, рождающиеся из него при действии слабого магнитного момента, при помощи метода Пуанкаре [73]. Представим уравнения движения (12.19) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$. Решение ищем в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + O(\varepsilon^2)$, где $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ – стационарное решение. Тогда

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbb{F}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2),$$

где $F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ и в нашем случае

$$\mathbb{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_A & 0 & 0 & -3\lambda_A \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda_B & 0 & 0 \\ -\theta_C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \left(-2 \frac{C}{A} \cos u \sin i \cos i, -2 \frac{C}{B} \sin^2 i, \sin u \sin i \cos i, 0, 0, 0 \right).$$

Группируя члены при ε , для определения \mathbf{x}_1 получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \theta_A x_3 - 3\lambda_A x_6 - 2 \frac{C}{A} \sin i \cos i \cos u, \\ \dot{x}_2 &= 3\lambda_B x_4 - 2 \frac{C}{B} \sin^2 i, \\ \dot{x}_3 &= -\theta_C x_1 + \sin i \cos i \sin u, \\ \dot{x}_4 &= x_2, \quad \dot{x}_5 = x_3 + x_6, \quad \dot{x}_6 = x_1 - x_5. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Уравнения для x_2 и x_4 (движение в плоскости орбиты) отделяются. Запишем их в виде

$$\ddot{x}_4 - 3\lambda_B x_4 = -2 \frac{C}{B} \sin^2 i.$$

Из условий (12.3) следует $\lambda_B < 0$, а значит общее решение последнего уравнения – колебания в окрестности нуля. Точность ориентации определяется в первую очередь частным решением

$$x_2 = \frac{2C \sin^2 i}{3(C - A)}. \tag{12.21}$$

Выпишем матрицу однородной системы для определения x_1, x_3, x_5, x_6 ,

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_A & 0 & -3\lambda_A \\ -\theta_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем ее собственные числа:

$$\det(\mathbb{K} - \lambda \mathbb{E}) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0,$$

где $a = 1 + 3\lambda_A + \theta_A\theta_C$, $b = \theta_C(3\lambda_A + \theta_A)$. Тогда

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Здесь, как и при рассмотрении переходного режима, предполагаем, что кинетический момент маховика велик, тогда

$$a^2 - 4b = \theta_A^2\theta_C^2 + (1 + 3\lambda_A^2) - 2\theta_A\theta_C + 6\lambda_A\theta_A(\theta_C - 2) > 0.$$

Вместе с тем, $a > 0$. Поэтому все четыре собственных значения чисто мнимые и общее решение – колебания около стационарного решения.

Частное решение будем искать в виде

$$x_5 = A_1 \sin u + A_2 \cos u, \quad x_6 = B_1 \sin u + B_2 \cos u.$$

Подставляя эти выражения в (12.20) и приравнивая коэффициенты при $\sin u$ и $\cos u$, получаем систему для определения A_1, A_2, B_1, B_2

$$(1 - \theta_A)A_1 + (-1 + \theta_A + 3\lambda_A)B_2 = -2\frac{C}{A}\sin i \cos i,$$

$$(-1 + \theta_A + 3\lambda_A)A_2 + (-1 + \theta_A)B_1 = 0,$$

$$(-1 + \theta_C)A_2 + (-1 + \theta_C)B_1 = 0,$$

$$(-1 + \theta_C)A_1 + (1 - \theta_C)B_2 = \sin i \cos i.$$

Решая ее, можем выписать вынужденное решение системы (12.20)

$$x_1 = \frac{1}{\theta_C - 1} \sin i \cos i \sin u,$$

$$x_2 = \frac{2C \sin^2 i}{3(C - A)},$$

$$x_3 = \frac{1}{\theta_C - 1} \sin i \cos i \cos u,$$

$$x_4 = 0,$$

$$x_5 = \frac{1}{3\lambda_A} \left(\frac{\theta_A - 1}{\theta_C - 1} - 2\frac{C}{A} + 3\lambda_A \right) \sin i \cos i \sin u,$$

$$x_6 = \frac{1}{3\lambda_A} \left(\frac{\theta_A - 1}{\theta_C - 1} - 2 \frac{C}{A} \right) \sin i \cos i \cos u.$$

Таким образом, найдено отклонение от стационарного решения, вызванное влиянием магнитного управления. В плоскости орбиты возникает постоянное отклонение от положения равновесия. Это отклонение увеличивается с ростом величины управляющего момента (параметр ε), наклона орбиты (общая эффективность работы магнитной системы ориентации) и уменьшается при росте гравитационного момента (разница между моментами инерции, величина восстанавливающего момента). Вне плоскости орбиты наблюдаются малые колебания с орбитальной частотой.

Заметим, что может возникнуть резонанс, если собственное число λ матрицы \mathbb{K} окажется равным $\pm i$. Найдем параметры, приводящие к таким собственным числам. Они определяются из соотношения

$$\lambda^2 = 1/2 \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right) = -1,$$

откуда $\theta_C - 1 = 0$. В рассматриваемом случае маховика с большим кинетическим моментом величина θ_C несоизмерима с единицей и резонанса не возникает.

На рис. 12.2 приведен результат численного моделирования для спутника с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1.5, 1.8, 1.1)$ кг·м² на орбите высотой 1000 км, наклоном 60° и с коэффициентом усиления в управлении $k = 5 \cdot 10^5$ Н·м·с/Тл².

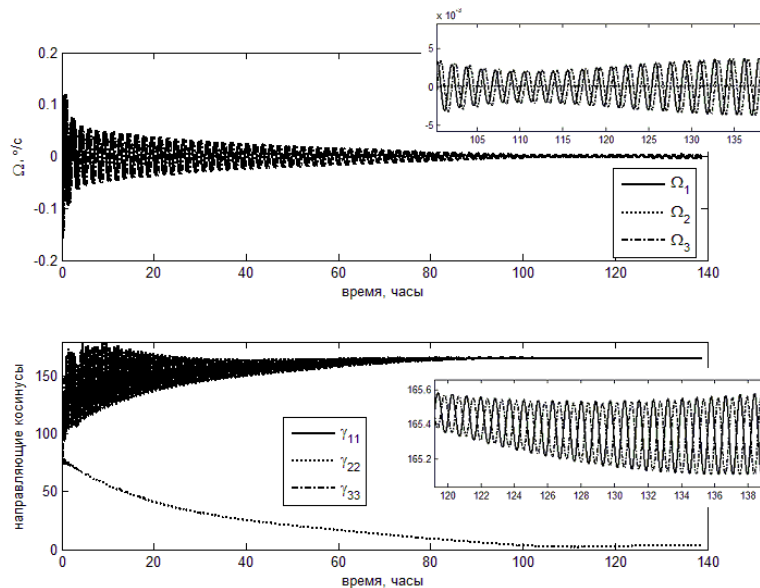


Рис. 12.2. Точность ориентации в номинальном режиме

γ_{jj} – углы между одноименными осями орбитальной и связанной систем. Согласно рис. 12.2, точность ориентации в плоскости орбиты оказывается около 14.5° , тогда как использование результата (12.21) дает величину 13.6° . Формула (12.21) оказывается удобным инструментом оценки точности ориентации аппарата. Из рис. 12.2 видно, что быстродействие системы ориентации оказывается невелико – на приведение спутника в требуемую ориентацию, даже при начальной скорости порядка орбитальной, требуется более 80 часов. Повышение коэффициента усиления до $k = 5 \cdot 10^6$ Н·м·с/Гл², однако, приводит к потере требуемой ориентации: спутник начинает отслеживать магнитное поле (согласно (12.21), точность оказывается около 130°). В этом случае необходимо либо использование закона управления (12.5) без «паразитного» члена $d\mathbf{B}_x/dt$, либо использование гравитационной штанги (рис. 12.3).

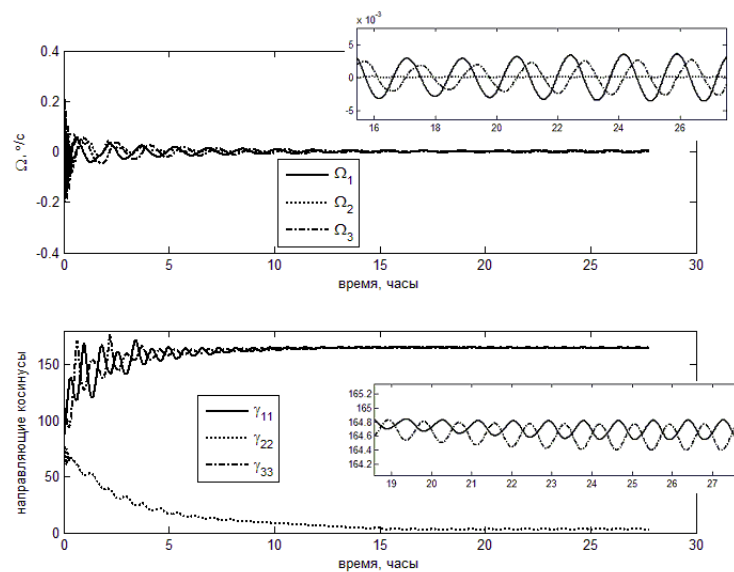


Рис. 12.3. Точность ориентации при использовании гравитационной штанги

Использование на том же спутнике гравитационной штанги длиной 1.5 метра с прикрепленной массой 1.5 кг приведет к точности около 14.5° (численный результат – 15.5°) с увеличенным коэффициентом усиления (время приведения в требуемую ориентацию – несколько часов).

Номинальный режим произвольной ориентации

Магнитная система может использоваться для того, чтобы обеспечить как существование, так и устойчивость любого наперед задан-

ного положения равновесия $\alpha = \alpha_0$ в плоскости орбиты. При этом гравитационный момент будет играть роль не восстанавливающего, а возмущающего. Предположим, что после окончания переходного режима $\beta, \gamma \sim 0$, $\omega_1, \omega_2 \sim 0$, $\omega_3 \sim 1$. Линеаризованные уравнения движения (12.2), (1.7) запишем тогда в виде

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} + (1 - \theta_A)\dot{\beta} + \theta_A\gamma &= -3\lambda_A(\beta \sin \alpha \cos \alpha + \gamma \cos^2 \alpha) + \varepsilon \frac{C}{A} \bar{M}_1, \\ \ddot{\alpha} &= 3\lambda_B \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon \frac{C}{B} \bar{M}_2, \\ \ddot{\beta} + (\theta_C - 1)\dot{\gamma} + \theta_C\beta &= -3\lambda_C \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon \bar{M}_3, \end{aligned} \quad (12.22)$$

где конкретный вид безразмерного параметра ε пока не определен, так как не определен вид закона управления.

Как видно из второго уравнения (12.22), движение в плоскости орбиты отделяется, если вторая компонента управляющего момента не зависит от β, γ . Используем это наблюдение, чтобы построить управление положением аппарата в плоскости орбиты. Пусть

$$\bar{M}_2 = k_r \sin(\alpha_0 - \alpha). \quad (12.23)$$

Тогда, вводя обозначение $\rho = \alpha - \alpha_0$, где α_0 – требуемое положение в плоскости орбиты, второе уравнение (12.22) запишем в виде

$$\ddot{\rho} + k_r \varepsilon \frac{C}{B} \sin \rho = 3\lambda_B \sin(\rho + \alpha_0) \cos(\rho + \alpha_0). \quad (12.24)$$

В отсутствие гравитационного момента ($\lambda_B = 0$) уравнение (12.24) описывает колебания около устойчивого положения равновесия $\rho = 0$. Асимптотическая устойчивость этого положения (стремление спутника занять именно это положение в плоскости орбиты) обеспечивается введением диссипативного управляющего момента согласно (12.5). Действие гравитационного момента приводит к смещению положения равновесия, которое в линейном приближении задается выражением

$$\rho_0 = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + k_r \varepsilon C / 3(C - A)}. \quad (12.25)$$

Сравнение полученного результата с моделированием сопряжено с вопросом реализации управления (12.23). При этом возникают некоторые проблемы. Во-первых, из-за особенностей магнитной системы ориентации возникает механический момент, действующий вне

плоскости орбиты, так как $M_2 = m_3 B_1 - m_1 B_3$. Предположим, что восстанавливающий момент создается первой катушкой, при этом $m_2 = m_3 = 0$. Тогда управляющий восстанавливающий момент, действующий на спутник, имеет вид

$$\mathbf{M}_r = \left(0, k_r \varepsilon \sin(\alpha_0 - \alpha), -k_r \varepsilon \sin(\alpha_0 - \alpha) \frac{B_{2x}}{B_{3x}} \right). \quad (12.26)$$

Возможен и другой выбор управляющей катушки, в особенности если B_{3x} близко к нулю. Однако при рассматриваемом режиме движения $B_{3x} \approx B_0 \sin \alpha \cos u \sin i + B_0 \cos \alpha \cos i$, причем α далеко как от 0, так и от $\pi/2$, так что B_{3x} близко к нулю только на полярной орбите при $u = \pi/2$. Поэтому управление (12.26) зачастую может быть использовано без дополнительных условий. Из (12.26) видно, что возникает паразитная третья компонента механического момента. Ее воздействие на систему (12.22) будет рассмотрено численно. Вторая проблема реализации – использование в законе управления (12.26) угла ориентации, тогда как при численном моделировании и в управляющих циклах бортовых компьютеров спутников используются кватернионы или элементы матрицы направляющих косинусов. Принимая во внимание вид этой матрицы при $\beta, \gamma \sim 0$ и отбрасывая малые слабые, можно (12.26) записать в виде

$$\mathbf{M}_r = \left(0, k_r \varepsilon (\sin \alpha_0 a_{11} + \cos \alpha_0 a_{13}), -k_r \varepsilon (\sin \alpha_0 a_{11} + \cos \alpha_0 a_{13}) \frac{B_{2x}}{B_{3x}} \right). \quad (12.27)$$

Это управление будет использоваться при численном моделировании движения спутника, в том числе в переходном режиме, когда β, γ далеки от нулевых значений. Кроме того, управляющий дипольный момент магнитных катушек, реализующий восстанавливающую и демпфирующую компоненты управления, будет приводиться к выбранному максимальному дипольному моменту катушек и его части соответственно. Использование управления (12.27) в этом случае нецелесообразно, однако величина кинетического момента тангажного маховика в любом случае обеспечивает выполнение условия $\beta, \gamma \sim 0$ после переходного режима, что позволяет упростить цикл управления, не перегружая его лишними условиями переключения.

На рис. 12.4 представлен результат моделирования движения спутника, когда требуемая ориентация в плоскости орбиты соответ-

ствуется $\alpha_0 = 40^\circ$ (вдали от гравитационного положения равновесия), дипольный восстанавливающий момент катушек – $3.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ (величина восстанавливающего дипольного момента нормируется таким образом, чтобы его максимальная компонента была равна $3.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$), демпфирующий – $1.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$, остальные параметры сохранены.

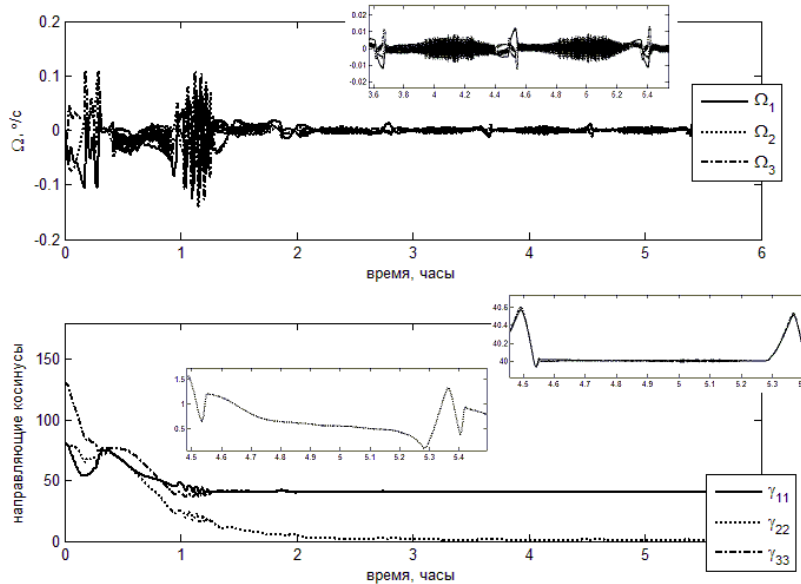


Рис. 12.4. Номинальный режим произвольной ориентации

Для выбранных параметров спутника и магнитных катушек выражение (12.25) дает (после сопоставления параметра k_r с используемым в численном моделировании подходе к реализации управления) точность ориентации в плоскости около 0.45° , что хорошо согласуется в численным результатом (0.6°). Влияние паразитной компоненты момента приводит к точности ориентации вне плоскости орбиты около 1.5° .

12.2 Использование гравитационной штанги

Выдвижение гравитационной штанги обеспечивает соотношение между моментами инерции $B > A > C$, то есть выполнение условий устойчивости орбитальной ориентации спутника. Тем не менее, из-за слабого гравитационного момента при помощи штанги можно надежно удерживать только направление местной вертикали, вокруг которого спутник может поворачиваться при наличии возмущающих моментов. Ориентация третьей – продольной оси спутника по мест-

ной вертикали зачастую обеспечивает выполнение требований полезной нагрузки.

Рассмотрим две проблемы, возникающие при использовании гравитационной штанги совместно с магнитной системой управления. Во-первых, необходимо определить предельное значение дипольного момента катушек, при котором не нарушается ориентация третьей оси аппарата по местной вертикали, то есть спутник не увлекается во вращение геомагнитным полем из-за взаимодействия с ним токовых катушек. Во-вторых, необходимо обеспечить однозначную ориентацию этой оси, при которой, например, в поле зрения полезной нагрузки находится Земля.

Рассмотрим движение спутника в гравитационном поле. Уравнения (1.1), (1.4) при движении в гравитационном поле имеют частное решение $\beta = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Уравнение плоских колебаний имеет вид

$$B\ddot{\alpha} + 3(A - C)\sin\alpha \cos\alpha = 0. \quad (12.28)$$

Для (12.28) существует интеграл энергии

$$J = \frac{1}{2}B\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{2}(A - C)\sin^2\alpha, \quad (12.29)$$

величина которого зависит от начальной скорости и начального отклонения от устойчивого положения равновесия $\alpha = 0$. Интеграл (12.29) позволяет определить критическое значение начальных условий, при которых аппарат будет колебаться в плоскости орбиты. Для этого при максимальном отклонении от положения равновесия $\alpha = 90^\circ$ скорость должна быть равна нулю, то есть при

$$\frac{1}{2}B\dot{\alpha}^2(0) + \frac{3}{2}(A - C)\sin^2\alpha(0) > \frac{3}{2}(A - C)$$

происходит вращение спутника. Критическое значение угловой скорости задается выражением [44]

$$|\dot{\alpha}(0)| = \sqrt{3\frac{(A - C)}{B}} |\cos\alpha(0)|. \quad (12.30)$$

Принимая моменты инерции, например, спутника *Чибис-М*, после выдвигания штанги (длина штанги – 1 метр, концевая масса – 3.5 кг), из (12.30) получаем, что $|\dot{\alpha}(0)| \approx 1.3$, если начальное отклонение от положения равновесия равно нулю. Применение магнитных катушек для демпфирования угловой скорости позволяет получить аб-

солотную скорость порядка двух орбитальных до выдвижения гравитационной штанги. При выдвижении штанги изменяются моменты инерции спутника, тогда как его кинетический момент остается постоянным. Это приводит к изменению его угловой скорости, кроме компоненты, направленной вдоль штанги. В случае плоского движения уменьшение скорости пропорционально увеличению момента инерции, в результате критическая скорость становится достижимой, так как скорость сразу после выдвижения штанги может быть около $0.6\omega_0$.

Применение магнитной системы приводит к появлению в (12.28) дополнительного слагаемого, которое может изменить режим движения спутника или привести к изменению критического значения угловой скорости. При максимальном дипольном моменте катушек спутник *Чибис-М* увлекается во вращение магнитной системой. Определим максимальную величину дипольного магнитного момента катушек, при котором ориентация оси выдвижения штанги по местной вертикали еще возможна.

Рассмотрим движение на полярной орбите, но с учетом действия момента, возникающего при взаимодействии магнитных катушек с геомагнитным полем. При этом используется только катушка, расположенная вдоль оси выдвижения штанги, и с ее помощью создается постоянный дипольный момент. В этом случае существует плоское движение, задаваемое уравнением

$$B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 3\omega_0^2 (A - C) \sin \alpha \cos \alpha = k B_0 (\cos u \cos \alpha + 2 \sin u \sin \alpha). \quad (12.31)$$

Рассмотрим модельную задачу, при помощи которой можно оценить влияние дипольного магнитного момента на возможность гравитационной ориентации. Упростим (12.31) так, чтобы усилить влияние момента, создаваемого при помощи магнитной системы. Для этого в правой части достаточно положить $\alpha = 90^\circ$, что приведет к увеличению величины вынуждающей силы до максимально возможной. Рассмотрим, кроме того, колебания спутника в линейном приближении. В результате получаем уравнение

$$B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 3\omega_0^2 (A - C) \alpha = 2k \sin u.$$

Поскольку рассматриваются колебания спутника около положения равновесия, общее решение однородного уравнения – колебания с амплитудой

$$\alpha_{gr} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 \dot{\alpha}^2(0)}{\lambda} + \alpha^2(0)},$$

где $\lambda = 3\omega_0^2(A - C)/B$. Вынужденное решение – колебания с амплитудой

$$\alpha_{mag} = \frac{2kB_0}{B\omega_0^2}.$$

Отклонение спутника от положения $\alpha = 0$ не превышает $\alpha_{max} = \alpha_{gr} + \alpha_{mag}$. Для реализации колебательного режима движения достаточно выполнения условия $\alpha_{max} < 90^\circ$. Это задает связь между начальными данными (скорость и отклонение) и величиной дипольного магнитного момента, при которых спутник не переходит в режим вращательного движения. Приведем линии уровня начального отклонения спутника от положения $\alpha = 0$, при которых реализуется вращательный режим, в зависимости от начальной скорости и величины дипольного магнитного момента катушек. Из рис. 12.5 видно, что при дипольном моменте, превышающем $0.35 \text{ А}\cdot\text{м}^2$, колебательный режим нереализуем с учетом ограничений на минимально возможную начальную скорость после выдвижения штанги. Вообще, исходя из рис. 12.5, можно найти компромисс между достижимостью требуемого режима движения аппарата и величиной дипольного момента катушек. Поскольку на аппарат действуют различные возмущения (аэродинамический момент, момент сил светового давления, момент, создаваемый токами в электрической схеме аппарата) угловая скорость, обеспечиваемая работой магнитной системы ориентации, будет выше теоретически достижимой. Поэтому желательно выбирать дипольный момент катушек в пределах $0.1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$. Заметим также, что при значениях дипольного момента, больших $0.5 \text{ А}\cdot\text{м}^2$, механический момент, создаваемый при помощи катушек, по примерной величине превалирует над гравитационным.

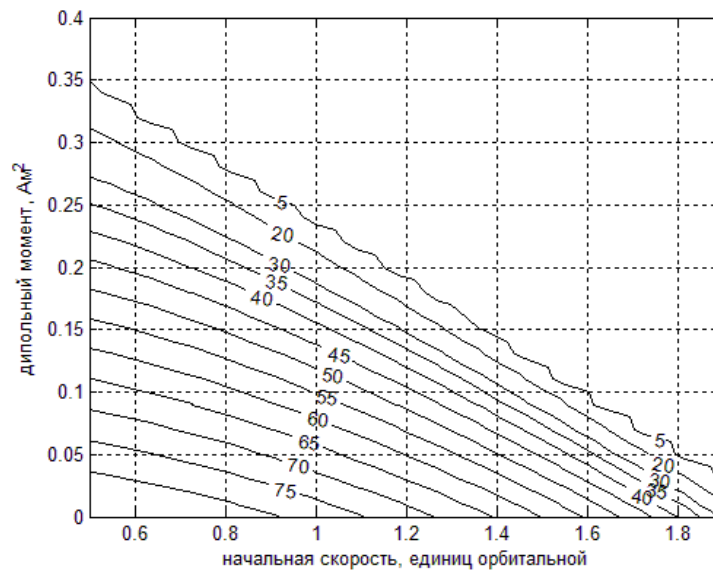


Рис. 12.5. Начальное отклонение (указано в градусах на изолиниях), при котором реализуется вращательный режим движения

Представленный на рис. 12.5 результат получен при решении модельной задачи. Численное моделирование трехмерного движения спутника показывает, что граница, разделяющая колебательный и вращательный режим движения, задается при помощи рис. 12.5 с точностью до 10° для начального угла отклонения. Приведем результаты моделирования движения спутника с граничными значениями начального отклонения и дипольного момента катушек.

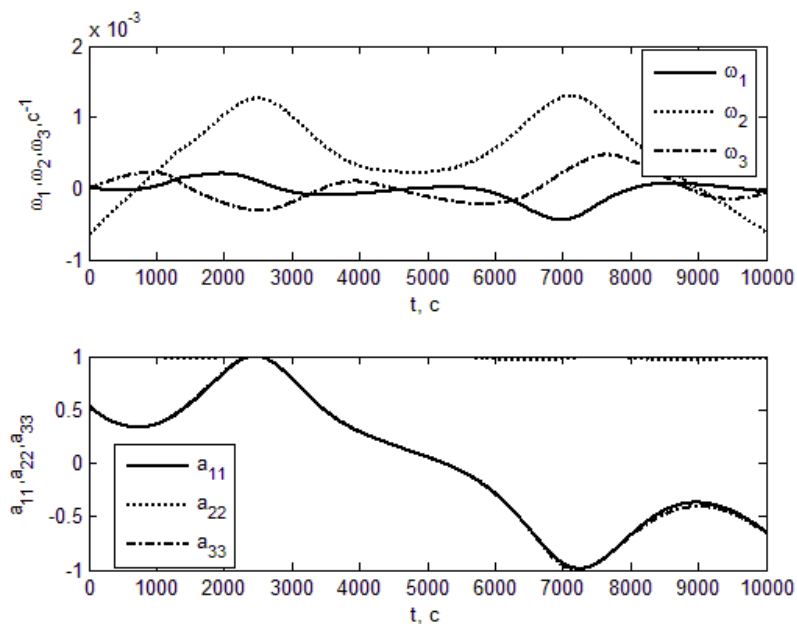


Рис. 12.6. Вращательный режим движения спутника. Дипольный момент катушек $0.1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$. Начальные условия $\alpha = 57^\circ$, $\beta = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = 0.6\omega_0$

Из рис. 12.6 видно, что аппарат сначала находится во вращательном режиме, но за счет демпфирования скорости при помощи магнитной системы управления переходит в режим колебаний около нежелательного положения равновесия. Максимальный дипольный момент, при котором еще возможны колебания, по результатам численного моделирования составляет $0.41 \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

Рассмотрим теперь проблему попадания в колебательный режим около требуемого положения равновесия. Обычная стратегия управления при выдвигании штанги – использование других исполнительных элементов для приведения спутника в положение, близкое к требуемому, и выдвигание штанги. В рассматриваемом случае для этого могли бы использоваться катушки, реализующие одновременно алгоритм демпфирования $-B\dot{\theta}$ и постоянный дипольный момент, направленный по третьей оси аппарата. В этом случае спутник будет отслеживать этой осью направление локального вектора геомагнитной индукции. В момент наименьшего расхождения между вектором геомагнитной индукции и местной вертикалью выпускается штанга. Для орбиты спутника *Чибис-М* это отклонение составляет около 20° , что позволило бы надеяться на реализацию однозначной ориентации. Но в контуре управления этого аппарата не была предусмотрена одновременная реализация постоянного и демпфирующего дипольного момента катушек, а также не было возможности выдвигания штанги по показаниям датчиков ориентации. В результате при выдвигании штанги спутник может оказаться развернут в другую сторону. Однако выше было показано, что при дипольном моменте катушек, превышающем $0.35 \text{ А}\cdot\text{м}^2$, гравитационная ориентация не сохраняется. Поэтому в случае попадания спутника в режим колебательного движения около неправильной ориентации он может быть переведен во вращательный режим при помощи увеличения дипольного магнитного момента катушек, после чего при снижении дипольного момента он снова попадет в режим колебательного движения. На рис. 12.7 представлены результаты численного моделирования движения спутника при таком подходе.

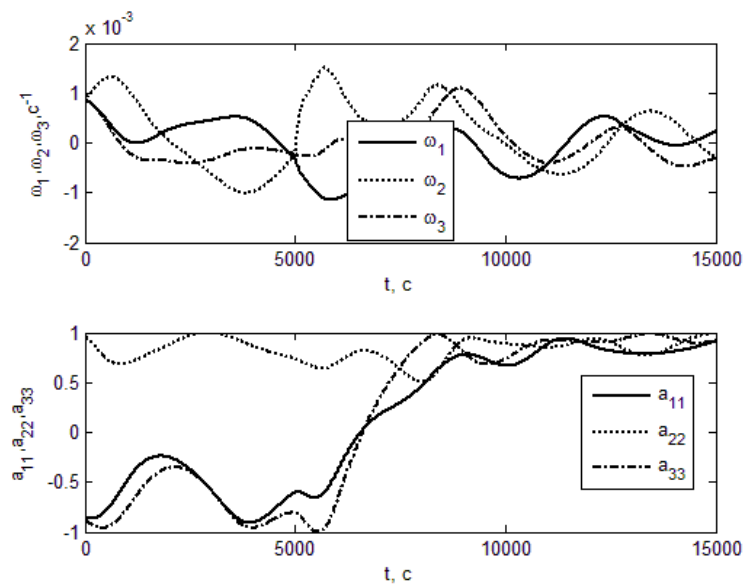


Рис. 12.7. Переход в требуемый режим колебательного движения. Дипольный момент катушек 0.1 и 3.2 А·м². Начальные условия $\alpha = 150^\circ$, $\beta = \gamma = 10^\circ$,
 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.05^\circ/\text{с}$

В течение первых 5000 сек дипольный момент катушек равен 0.1 А·м². В результате спутник попадает в колебательный режим движения с неправильной ориентацией. Поэтому в течение 3000 сек катушки включаются на полную мощность (3.2 А·м²), а затем снова переключаются на дипольный момент 0.1 А·м². После этого спутник начинает колебания около требуемого положения равновесия.

Отклонение от требуемой ориентации, вызываемое действием магнитной системы, задается выражением (12.21). Хотя указанное соотношение было получено для случая использования тангажного маховика, этот результат сохраняется, так как на движение в плоскости орбиты маховик не оказывает влияния.

13 Трехосная ориентация

Equation Section (Next)Перейдем теперь к вопросу обеспечения произвольной трехосной требуемой ориентации аппарата, используя при этом только магнитные катушки. Попытки преодоления проблемы, связанной с ограничением на направление механического момента, в такой постановке предпринимались неоднократно. Здесь будут рассмотрены два подхода. Первый основан на построении управления с использованием функции Ляпунова. Будем называть его ляпуновским управлением¹, из которого реализуется лишь доступная магнитным катушкам часть. Вторым подходом основан на скользящем управлении, в этом случае в фазовом пространстве строится траектория, доступная для реализации магнитным управлением.

13.1 Построение алгоритмов управления

Ляпуновское управление

Рассмотрим модельную задачу движения твердого тела вокруг неподвижной оси под действием механического момента. Поворот тела относительно некоторого заданного положения описывается углом φ , а уравнение движения такого тела в безразмерном времени и под управлением механического момента, нормированного на момент инерции имеет вид

$$\ddot{\varphi} = M.$$

Необходимо найти механический момент, обеспечивающий асимптотическую устойчивость положения $\varphi = 0$. Чтобы сделать это, приведем следующую цепь рассуждений. Используем невязку

$$\Delta = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi),$$

описывающую отклонение тела от требуемого положения и его скорость. Будем искать управление, обеспечивающее стремление этой невязки к нулю, что будет соответствовать требуемой ориентации.

¹ В русскоязычной литературе нет удобного термина для управления, строящегося на основе функции Ляпунова, обычно говорят об использовании прямого метода Ляпунова. В англоязычной литературе используется термин *Lyapunov control*, кальку с которого мы используем в книге. Отметим, что это управление также часто называют ПД-регулятором как в отечественной, так и зарубежной литературе. Ляпуновское управление и ПД-регулятор вообще говоря отличаются, хотя во многом схожи.

Выделим в ней позиционную и дифференциальную части Δ_2 и Δ_1 соответственно и найдем их вариации:

$$\delta\Delta_1 = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\delta u, \quad \delta\Delta_2 = \sin\varphi\dot{\varphi}\delta u.$$

Дифференциальная часть невязки может быть минимизирована, так как ее вариация содержит $\ddot{\varphi}$. Фактически это означает, что ее величиной можно управлять. Для второй невязки это сделать не удастся. Поэтому выпишем разложение невязки в ряд по степеням приращения времени,

$$\Delta(u + \delta u) = \Delta(u) + \frac{d\Delta(u)}{du}\delta u + \frac{d^2\Delta(u)}{du^2}\delta u^2 + \dots$$

Заметим теперь, что за счет минимизации невязки Δ_1 первая вариация невязки Δ_2 стремится к нулю, что позволяет переписать последнее выражение в виде

$$\Delta(u + \delta u) - \Delta(u) = \delta\Delta_1 + \frac{d^2\Delta(u)}{du^2}\delta u^2 + \dots$$

Поэтому для учета второй части невязки приходится рассматривать ее вторую вариацию,

$$\delta^2\Delta_2 = \frac{1}{2}(\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi})\delta u^2.$$

Первое слагаемое второй невязки снова мало. В результате на поведение невязки Δ_2 , начиная с какого-то момента, когда $\dot{\varphi}$ уже мало, влияние оказывает в основном выражение $\sin\varphi\ddot{\varphi}$, которым можно управлять:

$$\Delta(u + \delta u) - \Delta(u) = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\delta u + \frac{1}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi}\delta u^2 + \dots$$

В результате для минимизации невязки Δ механический момент должен подбираться исходя из одновременно выполняемых условий

$$\dot{\varphi}M < 0, \quad \sin\varphi M < 0. \quad (13.1)$$

Момент выберем как сумму моментов, удовлетворяющих каждый одному из этих условий,

$$M = -k_a \sin\varphi - k_\omega \dot{\varphi},$$

где k_a и k_ω – положительные коэффициенты. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\varphi} + k_\omega \dot{\varphi} + k_a \sin\varphi = 0 \quad (13.2)$$

и представляют собой уравнения затухающих колебаний.

Перенесем теперь эти рассуждения на случай твердого тела, вращающегося вокруг центра масс. Для компонент невязки имеем

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}[(a_{11} - 1)^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + (a_{22} - 1)^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2 + (a_{33} - 1)^2],$$

где матрица перехода \mathbb{A} описывает ориентацию относительно некоторой инерциальной системы. Нетрудно показать, что

$$\Delta_2 = 3 - a_{11} - a_{22} - a_{33}.$$

Безразмерные уравнения движения будем использовать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}_{\text{упр}} - \mathbf{M}_{\text{зур}} = \mathbf{M}, \\ \dot{\mathbb{A}} &= \mathbb{A}\mathbb{W}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Тогда

$$\delta\Delta_1 = \sum \omega_i \dot{\omega}_i \delta u = \boldsymbol{\omega} \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M} \delta u.$$

Первая часть невязки снова оказывается управляемой. Для второй – позиционной – части невязки, имеем

$$\delta\Delta_2 = -\sum \dot{a}_{ii} \delta u = [\omega_1(a_{23} - a_{32}) + \omega_2(a_{31} - a_{13}) + \omega_3(a_{12} - a_{21})] \delta u.$$

Вводя вектор

$$\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21}), \quad (13.4)$$

перепишем последнее выражение в виде $\delta\Delta_2 = \boldsymbol{\omega} \mathbf{S} \delta u$.

Вторая часть невязки не может быть минимизирована напрямую, однако мы можем воспользоваться рассуждениями, примененными для модельной задачи, и считать, что за счет минимизации Δ_1 угловая скорость падает, а потому следует рассмотреть вторую вариацию второй компоненты невязки,

$$\delta^2 \Delta_2 = (\mathbf{S} \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M} + \dot{\mathbf{S}} \boldsymbol{\omega}) \delta u^2.$$

Снова отбрасываем слагаемое, содержащее угловую скорость, и для минимизации невязки Δ получаем условия

$$\boldsymbol{\omega} \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M} < 0, \quad \mathbf{S} \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M} < 0, \quad (13.5)$$

аналогичные (13.1). Опять обращаемся к возможности демпфирования угловой скорости и в механическом моменте \mathbf{M} отбрасываем гироскопическую компоненту, опускаем также «весовую» матрицу \mathbb{J}^{-1} . Наконец, принимая во внимание, что $\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}$, и делая циклическую перестановку в (13.5), получаем

$$\mathbf{m}(\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}) < 0, \quad \mathbf{m}(\mathbf{B} \times \mathbf{S}) < 0,$$

что приводит, по аналогии с модельной задачей, к дипольному управляющему моменту

$$\mathbf{m} = -k_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}. \quad (13.6)$$

Отметим, что построение закона управления (13.6) имеет аналогии с построением ляпуновского управления. В этом случае управление можно построить следующим образом. Используем кандидата на функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + k_a \sum_{i=1}^3 (1 - a_{ii}).$$

Очевидно, положению равновесия соответствует $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbb{A} = \text{diag}(1, 1, 1)$, то есть имеет место совпадение осей инерциальной и связанной систем. Найдем производную этой функции

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}) - k_a \sum_{i=1}^3 \dot{a}_{ii}.$$

Несложно видеть, что производная V в силу уравнений движения (13.3) имеет вид

$$\dot{V} = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{M}_{\text{ynp}} + \mathbf{M}_{\text{zur}} + k_a \mathbf{S}). \quad (13.7)$$

Потребуем отрицательность производной функции везде, кроме положения равновесия, например, $\dot{V} = -k_{\omega} |\boldsymbol{\omega}|^2$. Отсюда имеем

$$\mathbf{M}_{\text{ynp}} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega},$$

так как $\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_{\text{zur}} = 0$. В результате получаем выражение для управляющего момента

$$\mathbf{M}_{\text{ynp}} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{S}. \quad (13.8)$$

Выражение (13.8) имеет ту же структуру, что и (13.6), однако задает механический, а не дипольный момент. Стандартная схема получения дипольного момента на основе (13.8) – реализация только перпендикулярной локальному вектору геомагнитной индукции компоненты. То есть вместо управляющего момента, определяемого выражением (13.8), используется момент (13.6). Подставляя дипольный момент (13.6) в выражение для производной кандидата в функцию Ляпунова, получаем выражение

$$\dot{V} = -k_{\omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_0)^2 + k_a |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{S}| \cos(\mathbf{B}_0, \boldsymbol{\omega}) \cos(\mathbf{B}_0, \mathbf{S}),$$

которое можно использовать для выяснения, когда следует применять управление – второе слагаемое должно быть отрицательным. Численное моделирование, однако, показало, что при таком подходе не наблюдается выигрыша в быстродействии алгоритма по сравнению с его непрерывной реализацией, поэтому введение дополнительных условий в алгоритм управления представляется нецелесообразным.

Рассуждения, приведенные при выводе дипольного момента (13.6), и рассуждения, касающиеся аналогии такого управления с ляпуновским управлением, не могут рассматриваться как строгое обоснование работоспособности алгоритма. Необходимо показать, что предложенный закон управления, тем не менее, позволяет добиться трехосной ориентации спутника в инерциальном пространстве, и найти ограничения, позволяющие его реализовать.

Скользящее управление

Другой подход к управлению ориентацией основан на скользящем управлении [112]. Проблема ограниченности направления управляющего момента имеет в случае использования магнитной системы ориентации важную особенность. Вектор геомагнитной индукции вращается в пространстве, так что нет выделенного направления, вдоль которого ни в какой момент времени нельзя было бы создать механический момент. Это позволяет надеяться, что можно построить траекторию, приводящую спутник к требуемой ориентации, то есть в заданное положение и с заданной скоростью, причем в каждый момент времени управляющий механический момент должен быть перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Для этого может использоваться скользящее управление.

Скользящее управление рассматривалось, например, в [113] для ориентации спутников. В [114] этот подход применяется для ограниченной в управлении системы, но при этом в теле спутника фиксируется один недоступный канал управления. Основным недостатком этих работ является использование скользящей поверхности с постоянными коэффициентами.

Перейдем к построению управления на основе скользящего режима. Управление строится в два этапа. Вначале необходимо построить скользящую плоскость – поверхность в фазовом пространстве $\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}, \mathbb{A}, u) = 0$, уравнению которой должен удовлетворять фазовый

вектор спутника. Если движение спутника удовлетворяет этому соотношению, требуемая ориентация оказывается асимптотически устойчивой. На втором этапе построения управления необходимо обеспечить движение по этой поверхности. Заметим, что обычно ее уравнение представляется в виде

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} + \mathbb{L}\mathbf{S}(\mathbb{A}) = 0,$$

где \mathbb{L} – положительно-определенная постоянная матрица, вектор \mathbf{S} характеризует отклонение спутника от требуемой ориентации и имеет тот же вид, что при построении ляпуновского управления (13.4). Уравнение поверхности не зависит от времени, а матрица \mathbb{L} не зависит от вектора состояния спутника. Однако при движении спутника в магнитном поле важна ориентация вектора геомагнитной индукции, так как от нее зависит доступное направление управляющего механического момента. Поэтому уравнение поверхности должно допускать изменение ее ориентации так, чтобы механический момент оказался перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Зададим более общую поверхность,

$$\mathbf{x} = \lambda(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, u)\boldsymbol{\omega} + \mathbb{L}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, u)\mathbf{S} = 0, \quad (13.9)$$

где \mathbb{L} также положительно-определенная, но уже переменная матрица. λ – положительное число, характеризующее вклад демпфирующей части в управление. Использование вместо числа матрицы позволило бы учитывать отдельный вклад демпфирования вдоль каждой из связанных осей. Такой подход может быть оправдан в случае специфической динамической конфигурации аппарата, однако здесь такие варианты не рассматриваются. Матрица \mathbb{L} характеризует вклад позиционной части. Покажем, что если движение спутника удовлетворяет $\mathbf{x} = 0$, то положение $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbb{A} = \mathbb{E}$ является асимптотически устойчивым (\mathbb{E} – единичная матрица). Можно показать, что

$$\mathbf{S} = 4q_0\mathbf{q}.$$

В этом случае (13.9) примет вид

$$\mathbf{x} = \lambda\boldsymbol{\omega} + 4q_0\mathbb{L}\mathbf{q} = 0. \quad (13.10)$$

Используя (1.2), можно получить

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{Q}\boldsymbol{\omega}, \quad (13.11)$$

где

$$\mathbb{Q} = q_0 \mathbb{E} + \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом (13.10) уравнение (13.11) переписывается в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = -4\lambda^{-1} q_0 \mathbb{Q} \mathbb{L} \mathbf{q}$$

или

$$\dot{\mathbf{q}} = -4\lambda^{-1} q_0^2 \mathbb{L} \mathbf{q} - 4\lambda^{-1} q_0 \mathbf{q} \times \mathbb{L} \mathbf{q}.$$

Умножая скалярно обе части этого выражения на \mathbf{q} , получаем

$$\mathbf{q} \dot{\mathbf{q}} = -4\lambda^{-1} q_0^2 \mathbf{q} \mathbb{L} \mathbf{q}$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} (\mathbf{q} \mathbf{q}) = -4\lambda^{-1} q_0^2 \mathbf{q} \mathbb{L} \mathbf{q} \leq 0.$$

Таким образом, модуль векторной части кватерниона, а согласно (13.10) и угловая скорость, при движении по скользящей плоскости уменьшается. В результате вектор состояния спутника, двигаясь по скользящей поверхности, придет в положение равновесия, а спутник – к требуемой ориентации. Задача управления при таком подходе сводится к обеспечению движения точки по поверхности. В случае же использования магнитной системы ориентации дополнительно возникает задача построения такой скользящей поверхности, движение по которой может быть обеспечено ограниченным по направлению управлением. Один из подходов к выбору параметров поверхности будет изложен в разделе 13.5.

13.2 Ориентация в инерциальном пространстве без учета гравитационного момента

Рассмотрим сначала движение спутника в инерциальном пространстве под действием ляпуновского управления и предполагая, что действием гравитационного момента на аппарат можно пренебречь. Получить аналитические результаты в общем случае движения аппарата представляется затруднительным, поэтому выделим несколько режимов движения и основных допущений, которые позволят получить представление о работе алгоритма (13.6) на всем цикле управления.

Исследование переходных процессов

Рассмотрим быстрое вращение аппарата. Перепишем закон управления (13.6) в виде

$$\mathbf{m} = -k'_\omega \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k'_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}. \quad (13.12)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – безразмерная угловая скорость движения спутника, то есть скорость, отнесенная к орбитальной. Вектор геомагнитной индукции здесь и далее считаем единичным (его величина постоянная в рамках осредненной модели). Предположим теперь, что коэффициенты k'_ω и k'_a имеют один порядок (их безразмерное отношение имеет порядок единицы, размерность обоих коэффициентов Н·м/Тл²). Вопрос наилучшего выбора этих коэффициентов будет рассмотрен далее. При таких предположениях при быстрых вращениях демпфирующая компонента момента превалирует над позиционной, так как $|\boldsymbol{\omega}| \gg 1$. Момент тогда приближенно можно представить в виде

$$\mathbf{m} = -k'_\omega \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Однако в этом случае имеем дело с движением аппарата под управлением известного алгоритма *-Bdot*. Динамика спутника в этом случае и работа алгоритма были ранее рассмотрены в разделе 10.2. Перейдем поэтому к следующему выделенному этапу движения аппарата.

Основываясь на результатах, полученных в разделе 10.3, можно утверждать, что снижение угловой скорости аппарата происходит до величины порядка двух орбитальных ($|\boldsymbol{\omega}| \sim O(1)$). В этом случае пренебрегать позиционной частью механического момента будет некорректно. Поэтому рассмотрим движение спутника с законом управления (13.6), но будем предполагать, что создаваемый при этом механический момент мал в том смысле, что изменение кинетического момента (как величины, так и направления) за оборот спутника по орбите и оборот вокруг центра масс мало по сравнению с его значением. Используем оскулирующие переменные. Не выписывая снова безразмерные уравнения (см., например, (10.8)), перейдем сразу к усреднению механического момента. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u,\varphi,\psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$. Однако момент представляет собой сумму позиционной и демпфирующей компонент. Результат усреднения демпфирую-

щей компоненты известен (см. раздел 10.2). Покажем, что позиционная компонента не оказывает эволюционного влияния на демпфирование угловой скорости аппарата, то есть

$$\langle (\mathbf{S} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{\psi, \varphi} = 0.$$

Это приводит к усреднению выражений вида $d_{ij}d_{kl}$ по быстрым углам ψ и φ . Для первой компоненты \mathbf{S}_L имеем

$$\begin{aligned} S_{1L} = & d_{11}d_{12}q_{31} + d_{11}d_{22}q_{32} + d_{11}d_{32}q_{33} - d_{11}d_{13}q_{21} - d_{11}d_{23}q_{22} - d_{11}d_{33}q_{23} + \\ & + d_{12}d_{13}q_{11} + d_{12}d_{23}q_{12} + d_{12}d_{33}q_{13} - d_{12}d_{11}q_{31} - d_{12}d_{21}q_{32} - d_{12}d_{31}q_{33} + \\ & + d_{13}d_{11}q_{21} + d_{13}d_{21}q_{22} + d_{13}d_{31}q_{23} - d_{13}d_{12}q_{11} - d_{13}d_{22}q_{12} - d_{13}d_{32}q_{13}. \end{aligned}$$

Группируя члены при q_{ij} , получаем

$$\begin{aligned} S_{1L} = & q_{32}(d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}) + q_{33}(d_{11}d_{32} - d_{12}d_{31}) + q_{22}(d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23}) + \\ & + q_{23}(d_{13}d_{31} - d_{11}d_{33}) + q_{12}(d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22}) + q_{13}(d_{12}d_{33} - d_{13}d_{32}). \end{aligned}$$

Учитывая выражения для d_{ij} (1.11) и для q_{ij} (1.10), после усреднения по ψ получаем $\langle S_{1L} \rangle_{\psi} = q_{12} \sin \varphi \sin \theta$ и окончательно $\langle S_{1L} \rangle_{\psi, \varphi} = 0$. Аналогичные выкладки нетрудно провести для S_{2L} и S_{3L} .

В результате получаем нулевое эволюционное влияние позиционной части механического момента. Эта часть не оказывает воздействия на демпфирование угловой скорости. Это позволяет перейти к следующему режиму движения спутника и исследованию устойчивости.

Исследование устойчивости

В предыдущем разделе было показано, что закон управления (13.6) приводит к демпфированию угловой скорости спутника. При этом величина его кинетического момента стремится к нулю по экспоненциальному закону (раздел 10.2). Коэффициенты k'_{ω} и k'_a теперь могут быть разного порядка, но $|\boldsymbol{\omega}| = o(1)$. Запишем уравнения движения (1.1), (1.4) в безразмерном виде, перейдя к дифференцированию по аргументу широты и безразмерному моменту,

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_1}{du} &= \frac{(B-C)}{A} \omega_2 \omega_3 + \varepsilon_1 \bar{M}_{1x}, \\
\frac{d\omega_2}{du} &= -\frac{(A-C)}{B} \omega_1 \omega_3 + \varepsilon_1 \frac{A}{B} \bar{M}_{2x}, \\
\frac{d\omega_3}{du} &= -\frac{(B-A)}{C} \omega_1 \omega_2 + \varepsilon_1 \frac{A}{C} \bar{M}_{3x}, \\
\frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_3 \sin \gamma + \omega_2 \cos \gamma), \\
\dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\
\dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma),
\end{aligned} \tag{13.13}$$

где $\varepsilon_1 = k'_a B_0^2 / A \omega_0^2$ – малый параметр. Для того чтобы сделать уравнения (13.13) удобными для анализа методами усреднения, приведем все переменные к одному порядку величины (углы имеют порядок единицы, тогда как угловые скорости малы), введя соотношение $\boldsymbol{\omega} = \varepsilon_2 \mathbf{w}$, где $\varepsilon_2 = |\boldsymbol{\omega}(0)|$. Далее, вводя вектор $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2, w_3)$, запишем уравнения (13.13) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_2 \mathbf{X}(\mathbf{x}, u, \varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{13.14}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \beta} (-w_3 \sin \gamma + w_2 \cos \gamma) \\ w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma \\ w_1 - \operatorname{tg} \beta (w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma) \\ \frac{(B-C)}{A} w_2 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \bar{M}_{1x} \\ -\frac{(A-C)}{B} w_1 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{B} \bar{M}_{2x} \\ -\frac{(B-A)}{C} w_1 w_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{C} \bar{M}_{3x} \end{pmatrix}.$$

Предположим пока, что $\varepsilon_1 / \varepsilon_2^2 = \kappa = O(1)$. Вид уравнения (13.14) позволяет использовать для его анализа формальную процедуру усреднения по явно входящему аргументу широты [115]. Однако в силу того, что усредненные уравнения затем линеаризуются для исследования устойчивости, целесообразно сначала провести линеаризацию и только потом проводить усреднение.

Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \varepsilon_2 \kappa \left(-(B_2^2 + B_3^2) \chi w_1 + B_1 B_2 \chi w_2 + B_1 B_3 \chi w_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2B_1 B_2 \alpha + 2B_1 B_3 \beta - 2(B_2^2 + B_3^2) \gamma \right), \\ \dot{w}_2 &= \varepsilon_2 \kappa \frac{A}{B} \left(B_1 B_2 \chi w_1 - (B_1^2 + B_3^2) \chi w_2 + B_2 B_3 \chi w_3 - \right. \\ &\quad \left. - 2(B_1^2 + B_3^2) \alpha + 2B_2 B_3 \beta + 2B_1 B_2 \gamma \right), \\ \dot{w}_3 &= \varepsilon_2 \kappa \frac{A}{C} \left(B_1 B_3 \chi w_1 + B_2 B_3 \chi w_2 - (B_1^2 + B_2^2) \chi w_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2B_2 B_3 \alpha - 2(B_1^2 + B_2^2) \beta + 2B_1 B_3 \gamma \right), \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon_2 w_2, \quad \dot{\beta} = \varepsilon_2 w_3, \quad \dot{\gamma} = \varepsilon_2 w_1,\end{aligned}\tag{13.15}$$

где $\mu = k'_\omega / k'_a$. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} + \varepsilon_1 \mu (p + q) \dot{\gamma} + 2\varepsilon_1 (p + q) \gamma &= 0, \\ \ddot{\alpha} + \varepsilon_1 \mu (p + q) \frac{A}{B} \dot{\alpha} + 2\varepsilon_1 (p + q) \frac{A}{B} \alpha &= 0, \\ \ddot{\beta} + 2\varepsilon_1 \mu p \frac{A}{C} \dot{\beta} + 4\varepsilon_1 p \frac{A}{C} \beta &= 0.\end{aligned}\tag{13.16}$$

где $p = 1/2 \sin^2 \Theta$, $q = \cos^2 \Theta$. Решение уравнений (13.16) приводит по каждому углу к затухающим колебаниям. Из (13.16) видно, что если k_a мало (μ велико), то степень устойчивости уменьшается – один из корней характеристического уравнения приближается к мнимой оси. Аналогично, если k_ω мало (μ мало), то степень устойчивости мала – оба корня близки к мнимой оси. Выпишем корни характеристического многочлена для всех трех уравнений

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 \mu (p + q) \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \mu^2 (p + q)^2 - 8\varepsilon_1 (p + q)} \right), \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 \mu (p + q) \frac{A}{B} \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \mu^2 (p + q)^2 \left(\frac{A}{B} \right)^2 - 8\varepsilon_1 (p + q) \frac{A}{B}} \right), \\ \lambda_{5,6} &= -\varepsilon_1 \mu p \frac{A}{C} \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \mu^2 p^2 \left(\frac{A}{C} \right)^2 - 4\varepsilon_1 p \frac{A}{C}}.\end{aligned}$$

Введем параметры

$$\theta_1 = B/A, \quad \theta_2 = C(p + q)/2pA$$

и новые коэффициенты усиления при помощи выражений

$$K_{\omega} = \frac{B_0^2}{A\omega_0^2}(p+q)k'_{\omega}, \quad K_a = \frac{B_0^2}{A\omega_0^2}(p+q)k'_a.$$

Тогда, учитывая выражения для ε_1 и μ , корни характеристического многочлена можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-K_{\omega} \pm \sqrt{K_{\omega}^2 - 8K_a} \right), \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{K_{\omega}}{\theta_1} \pm \frac{1}{\theta_1} \sqrt{K_{\omega}^2 - 8\theta_1 K_a} \right), \\ \lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{K_{\omega}}{\theta_2} \pm \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_{\omega}^2 - 8\theta_2 K_a} \right). \end{aligned} \quad (13.17)$$

Выберем моменты инерции аппарата так, чтобы $C > B > A$. В этом случае $\theta_1 > 1$. Рассмотрим далее три варианта.

И. $\theta_2 > \theta_1 > 1$. Этот случай имеет место для орбит с низким наклоном, когда q велико, а p мало. Коэффициенты усиления могут попасть в одну из трех областей.

а). $8K_a > K_{\omega}^2$. В этом случае все подкоренные выражения в (13.17) отрицательны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \min \left(\frac{1}{2} K_{\omega}, \frac{1}{2\theta_1} K_{\omega}, \frac{1}{2\theta_2} K_{\omega} \right).$$

Отсюда в силу условия, задаваемого случаем I, получаем

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_2} K_{\omega}.$$

б). $8\theta_2 K_a < K_{\omega}^2$. В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \frac{1}{2} \min \left(K_{\omega} - \sqrt{K_{\omega}^2 - 8K_a}, \frac{K_{\omega}}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_1} \sqrt{K_{\omega}^2 - 8\theta_1 K_a}, \frac{K_{\omega}}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_{\omega}^2 - 8\theta_2 K_a} \right).$$

Можно показать, что

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(K_{\omega} - \sqrt{K_{\omega}^2 - 8K_a} \right).$$

в). $8K_a < K_{\omega}^2 < 8\theta_2 K_a$. В этом случае одно или два подкоренных выражения в (13.17) положительны и степень устойчивости может

быть равна либо ξ_1 , либо ξ_2 . Однако наибольший интерес представляет случай, когда $\xi_1 = \xi_2$, что дает

$$K_\omega^2 = \frac{8\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} K_a,$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$k'_a = \frac{2\theta_2 - 1}{8\theta_2^2} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k'_\omega{}^2. \quad (13.18)$$

На рис. 13.1 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1, 1.5, 2)$ кг·м², находящегося на орбите наклонением 30° и высотой 350 км, а также парабола (13.18).

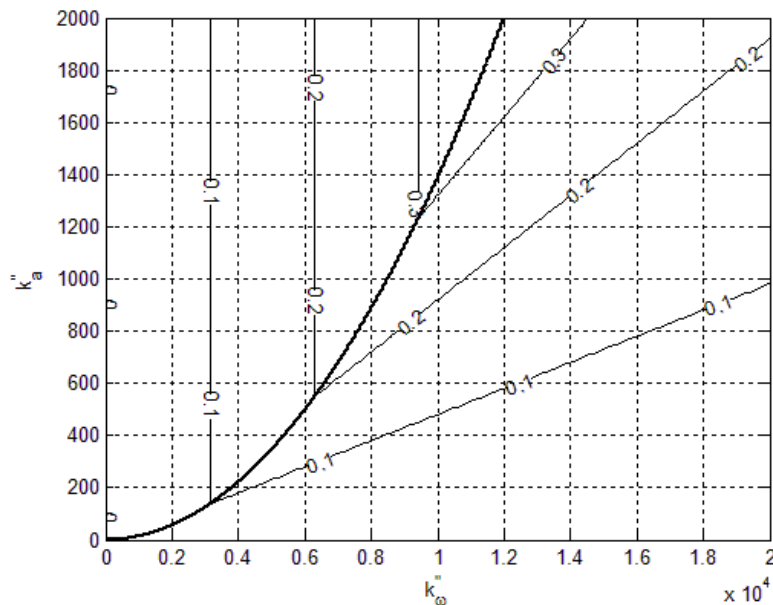


Рис. 13.1. Выбор оптимальных коэффициентов усиления

На рис. 13.1 раскрывается смысл параболы (13.18) – она указывает на оптимальное соотношение параметров k'_a и k'_ω (фиксируя один из параметров, нельзя добиться увеличения степени устойчивости при увеличении второго параметра больше значения, задаваемого параболой). Выбирая значения коэффициентов на параболе и задаваясь ограничением на величину дипольного момента катушек, можно определить степень устойчивости. Перейдем к рассмотрению других вариантов.

II. $\theta_1 > \theta_2 > 1$. В этом случае рассуждения принципиально не изменятся, оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{2\theta_1 - 1}{8\theta_1^2} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (13.19)$$

III. $\theta_1 > 1 > \theta_2$. Такое соотношение верно для орбит с высоким наклоном. Проведем рассуждения, аналогичные варианту I.

а). $8\theta_2 K_a > K_\omega^2$. Все подкоренные выражения в (13.17) отрицательны, степень устойчивости

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_1} K_\omega.$$

б). $8\theta_1 K_a < K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right).$$

в). $8\theta_1 K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$. В этом случае одно или два подкоренных выражения в (13.17) положительны и степень устойчивости может быть равна либо ξ_1 , либо ξ_2 . Оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{1}{8\theta_1} \left(2 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (13.20)$$

На рис. 13.2 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тем же тензором инерции, но на орбите наклоном 80° .

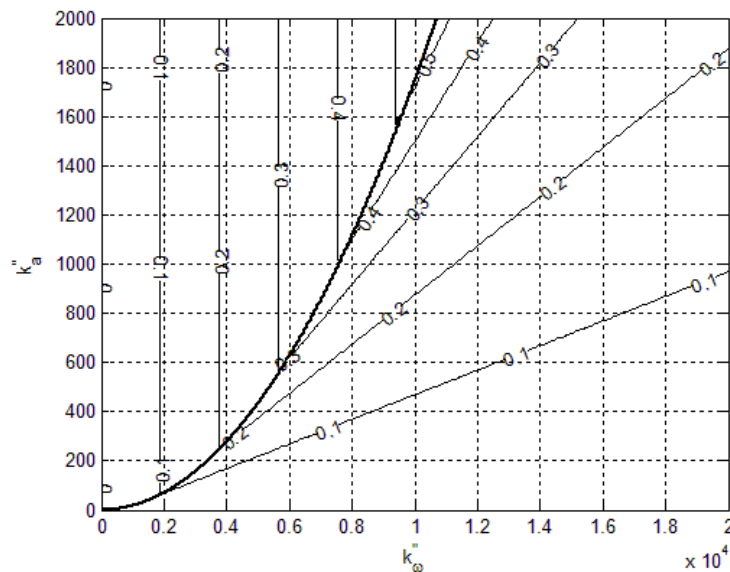


Рис. 13.2. Оптимальная парабола для орбиты с высоким наклоном

Рис. 13.1 и рис. 13.2 схожи, из них видно, что на орбитах с высоким наклоном следует несколько увеличить долю демпфирующей компоненты в управлении. В целом соотношения (13.18) и (13.20) позволяют в зависимости от тензора инерции аппарата и наклона его орбиты выбирать оптимальные коэффициенты усиления.

Вернемся теперь к уравнениям (13.14). Приведенные выше рассуждения касались случая $\varepsilon_1/\varepsilon_2^2 = \kappa = O(1)$. Предположим теперь, что это соотношение не выполняется, вместо него имеет место $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^n$, причем n может быть как больше 2, так и меньше. Обозначая $\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \gamma)$, запишем уравнения (13.14) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \varepsilon_2 \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon_2^{n-1} \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \varepsilon_2 \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Если $n > 2$, то уравнения, полученные формальным усреднением, верны с точностью до ε_2 на интервале времени $u \sim 1/\varepsilon_2$, если же $n < 2$, то усреднение верно на интервале времени $u \sim 1/\varepsilon_2^{n-1}$. В первом случае на характерном интервале времени успевают заметно (на величину порядка 1) измениться только углы (в силу незначительного влияния управляющего момента), во втором случае – только скорости. При $n = 2$ углы и скорости меняются одинаково, что и было рассмотрено выше. Однако усреднение можно провести в любом случае, и полученная система имеет положение равновесия и оказывается асимптотически устойчивой. Тогда для исходной системы существует предельный цикл (также асимптотически устойчивый) [71] и ее движение не отклоняется от положения равновесия усредненной системы более, чем на ε_2^k , где $k = \min(1, n-1)$. Это позволяет использовать формальное усреднение на бесконечном интервале времени и распространить полученный выше результат на любое значение n .

Численное моделирование

Полученные в предыдущем разделе результаты верны, если параметры k'_a и k'_ω невелики и соизмеримы. В результате удастся показать асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия и найти оптимальное соотношение между параметрами управления за счет простых формул (13.18), (13.19) или (13.20). Распространим эти результаты на общий случай, пользуясь теорией Флоке [74].

Сначала построим численно изолинии характеристических показателей системы (13.15) для тех же параметров системы, которые были использованы при построении рис. 13.1.

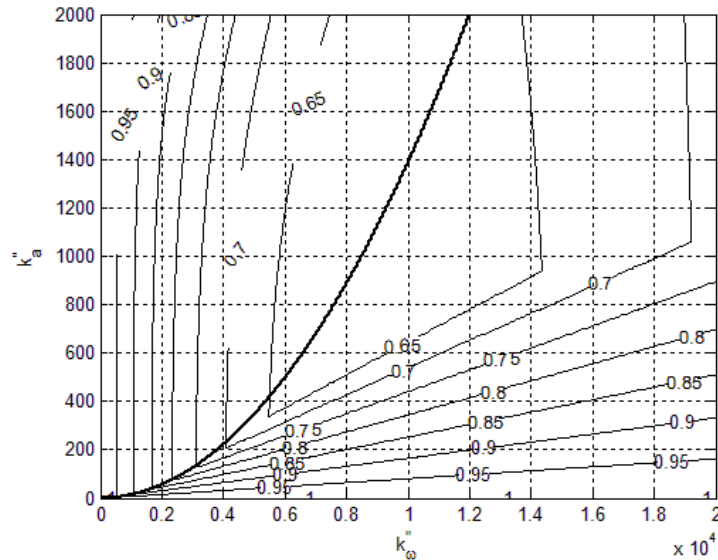


Рис. 13.3. Сравнение численных и аналитических результатов

Из рис. 13.3 видно, что с увеличением коэффициентов усиления наблюдается все увеличивающееся расхождение численных и аналитических результатов. Это объясняется тем, что по мере роста этих коэффициентов усиливается управляющий механический момент, а значит величина малого параметра и ухудшается точность определения асимптотического решения. На рис. 13.4 представлены характеристические показатели для превалирования позиционной части момента.

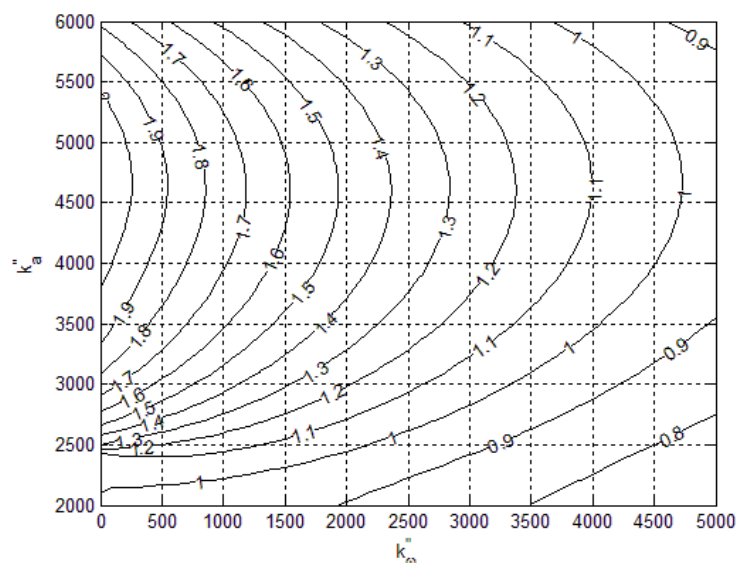


Рис. 13.4. Устойчивость при сильном позиционном моменте

Из рис. 13.4 видно, что существует область неустойчивости, которой нет в аналитических результатах. Это обусловлено тем, что численно можно рассматривать превалирование одной из компонент момента, тогда как аналитические результаты получены для примерно равных коэффициентов усиления. Неустойчивость вызвана «разбалтыванием» аппарата позиционным моментом: скорость, получаемая им на каждом этапе цикла управления, настолько велика, что демпфирующая компонента момента оказывается неспособна ее парировать. Впрочем, из рис. 13.1 и рис. 13.2 также видно, что не следует допускать превалирования одной из компонент момента. Хотя в аналитических результатах устойчивость сохраняется, но степень устойчивости уменьшается, стремясь к нулю при стремлении у нулю одного из коэффициентов усиления.

Отметим, что ограничение на величину механического момента имеет важное значение для успешности применения управления и не является искусственным ограничением, необходимым для проведения аналитического исследования (введение малого параметра). Это накладывает ограничение на достижимую точность. В частности, для спутника с рассмотренными выше параметрами управляющий механический момент должен быть не более $5 \cdot 10^{-6}$ Н·м. Этот момент оказывается лишь в несколько раз больше возмущающего гравитационного, в результате точность ориентации оказывается немногим лучше 10° . Для спутников других конфигураций, в частности для кубсатов, точность может быть выше – до нескольких градусов. Однако для аппарата малой массы величина управляющего момента также должна быть меньше, чтобы сохранялось условие малого изменения кинетического момента по сравнению с его величиной. Для разрешения этой проблемы необходима модификация закона управления (13.6) – введение «весовой» матрицы, например, \mathbb{J}^{-1} , или же применение переменных коэффициентов усиления (в этом случае с падением рассогласования по скорости и положению величина управляющего момента не будет уменьшаться) [116].

13.3 Ориентация в инерциальном пространстве с учетом гравитационного момента

Для описания движения спутника в магнитном поле удобно использовать инерциальную систему $O_a J_1 J_2 J_3$. В этой системе, однако,

неудобно описывать гравитационный момент. Компромисс представляет система $O_a S_1 S_2 S_3$, которая и будет считаться опорной в этом разделе. Решение уравнений (1.1) в случае трехмерного движения спутника представляет собой достаточно сложную задачу. Рассмотрим здесь частный случай – движение осесимметричного спутника ($A = C$) в плоскости полярной орбиты. Уравнения (1.1), (1.4) допускают движение, в котором $\alpha = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Уравнения плоского движения спутника в осредненном поле суть

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_3, \quad (13.21)$$

$$A \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{3}{2} \omega_0^2 (B - A) \sin(2u - 2\beta) - B_0^2 (k_\omega \omega_3 + 2k_a \sin \beta).$$

Перейдем к безразмерной скорости, дифференцированию по аргументу широты, введем обозначения

$$\lambda = \frac{3(B - A)}{2A} \omega_0^2, \quad \omega^2 = \frac{2k_a B_0^2}{A \omega_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{k_\omega B_0^2}{A \omega_0}$$

и перепишем уравнения (13.21) в виде

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \sin \beta + \varepsilon \dot{\beta} = \lambda \sin(2u - 2\beta). \quad (13.22)$$

Будем считать, что вклад управляющего момента в движение спутника решающий, то есть $\lambda \ll 0$, и рассмотрим порождающее уравнение

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \sin \beta + \varepsilon \dot{\beta} = 0. \quad (13.23)$$

Простейшим случаем можно считать порождающее решение в виде стационарной точки $\beta = 0$, $\dot{\beta} = 0$ или $\beta = \pi$, $\dot{\beta} = 0$. Рассмотрим сначала первый случай – устойчивую стационарную точку. Следуя методу Пуанкаре [73], будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра λ ,

$$\beta = \beta_0 + \lambda \beta_1 + O(\lambda^2).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (13.22) и группируя слагаемые по степеням малого параметра, получаем для первого приближения уравнение

$$\ddot{\beta}_1 + \omega^2 \cos \beta_0 \beta_1 + \varepsilon \dot{\beta}_1 = \sin(2u - 2\beta_0). \quad (13.24)$$

Принимая во внимание характер порождающего решения, получаем

$$\dot{\beta}_1 + \omega^2 \beta_1 + \varepsilon \dot{\beta}_1 = \sin 2u. \quad (13.25)$$

Общее решение этого уравнения представляет собой затухающие колебания математического маятника в линейном приближении. Большой интерес представляет собой вынужденное решение – вклад гравитационного момента. Разыскивая частное решение (13.25) в виде

$$\beta_1 = D_1 \sin 2u + D_2 \cos 2u,$$

приходим к решению

$$\beta_1 = -\frac{1}{(\omega^2 - 2\varepsilon - 4)(\omega^2 + 2\varepsilon - 4)} \left((4 - \omega^2) \sin 2u + 2\varepsilon \cos 2u \right), \quad (13.26)$$

описывающему колебания, вызванные действием гравитационного момента. Заметим, что в решении (13.26) нет опасности резонанса, так как интересные с практической точки зрения значения коэффициента усиления позиционной и демпфирующей частей момента приводят к $\varepsilon < 0.3$ и $\omega^2 < 0.3$.

Перейдем к следующему классу порождающих решений. Для этого разделим рассуждения на несколько этапов.

- *Этап 1.* Рассматривается уравнение (13.23). Необходимо найти его решение, которое является порождающим для (13.22). Здесь, в свою очередь, последовательно решаются две задачи.

- *Этап 1, задача 1.* Необходимо найти порождающее решение для (13.23) в предположении отсутствия демпфирующей компоненты управления ($\varepsilon = 0$).

- *Этап 1, задача 2.* Порождающее решение для (13.22) получается при анализе влияния слабого демпфирующего момента ($\varepsilon = o(1)$ в (13.23)).

В разделе 13.2 показано, что позиционная компонента момента не оказывает эволюционного влияния на демпфирование угловой скорости спутника. Демпфирующая часть в управлении рано или поздно окажется заметно меньше позиционной.

- *Этап 2.* Рассматривается уравнение (13.22). Решение, полученное на этапе 1, используется в качестве порождающего. Показывается существование периодических решений на малых интервалах времени. Ищется приближенный аналитический вид этих решений.

Этап 1, задача 1. Порождающее решение уравнения (13.23)

В отсутствие демпфирующей компоненты решение (13.23) имеет вид

$$\beta = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} \varphi), \quad (13.27)$$

$$\dot{\beta} = 2\omega k \operatorname{sn} \varphi, \quad (13.28)$$

где $\varphi = \omega t + \varphi_0$, $\operatorname{sn} \varphi$ и $\operatorname{cn} \varphi$ – эллиптические синус и косинус [117], k – модуль этих функций, равный корню из интеграла энергии уравнения (13.23) при $\varepsilon = 0$. Решение (13.27)-(13.28) периодически с периодом

$$T = \frac{4K(k)}{\omega}.$$

Таким образом, (13.27)-(13.28) задает двухпараметрическое решение уравнения (13.23) при $\varepsilon = 0$. Вращательное решение (13.23) здесь не рассматривается.

Этап 1, задача 2. Уравнения для параметров решения (13.27)-(13.28)

Введение демпфирующей компоненты в (13.23) приводит к уменьшению интеграла энергии, что отражается на решении (13.27)-(13.28). Определим это влияние, следуя методу Ван-дер-Поля. Для этого будем считать параметры решения (13.27)-(13.28) k и φ_0 переменными величинами и вычислим производную (13.27),

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= 2 \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} \left(\dot{k} \operatorname{sn} \varphi + k \frac{\partial \operatorname{sn} \varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + k \frac{\partial \operatorname{sn} \varphi}{\partial k} \dot{k} \right) = \\ &= \frac{2}{\operatorname{dn} \varphi} \left[\dot{k} (\operatorname{sn} \varphi + f \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right], \end{aligned} \quad (13.29)$$

где $f = (1-k^2)\varphi - E(\operatorname{am} \varphi) + k^2 \operatorname{cd} \varphi \operatorname{sn} \varphi$ [117]. С учетом (13.28), получаем

$$\frac{2}{\operatorname{dn} \varphi} \left[\dot{k} (\operatorname{sn} \varphi + f \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right] - 2\omega k \operatorname{sn} \varphi = 0. \quad (13.30)$$

Дифференцируем теперь (13.28),

$$\ddot{\beta} = 2\omega \left[\dot{k} (\operatorname{cn} \varphi - f \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi) - k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right].$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (13.23), получаем

$$\begin{aligned} 2\omega \left[\dot{k} (\operatorname{cn} \varphi - f \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi) - k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right] + \\ + 2\omega^2 k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi + 2\varepsilon \omega k \operatorname{sn} \varphi = 0. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Здесь был использован тот факт, что $\sin \beta = 2k \operatorname{sn} \varphi \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} = 2k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi$, так как $\operatorname{dn} \varphi > 0$. Разрешим соотношения (13.30)-(13.31) относительно старших производных. Из (13.30) получаем

$$\dot{k} = \frac{\omega k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi}}{\operatorname{sn} \varphi + f \operatorname{dn} \varphi \operatorname{cn} \varphi}. \quad (13.32)$$

Подставляя в (13.31), получаем уравнение изменения фазы

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon \left(\operatorname{cd}(\varphi, k) \operatorname{sn}(\varphi, k) + f \operatorname{cn}^2(\varphi, k) \right) \quad (13.33)$$

и, возвращаясь к (13.32), уравнение для изменения модуля

$$\dot{k} = -\varepsilon k \operatorname{cn}^2(\varphi, k). \quad (13.34)$$

Система (13.33)-(13.34) описывает изменение параметров решения при добавлении демпфирующей компоненты управляющего момента.

Этап 1, задача 2. Эволюционное уравнение (13.34)

В уравнениях (13.33)-(13.34) переменные разделяются. Фаза оказывается быстрой переменной (скорость изменения порядка ω), модуль – медленной (скорость изменения порядка ε). Для получения укороченных уравнений следует провести усреднение уравнений (13.33)-(13.34) по φ за период их правых частей $T = 2K(k)$ (период $\operatorname{cn}^2(\varphi, k)$). Однако уравнение (13.33) не удастся проинтегрировать в эллиптических функциях. Поэтому ограничимся рассмотрением уравнения (13.34), которое представляет наибольший интерес при оценке влияния демпфирующей части. Интегрирование (13.34) дает уравнение

$$\dot{k} = -\varepsilon \frac{1}{2k K(k)} \left[E(z) - (1-k^2)z \right]_0^{2K(k)}. \quad (13.35)$$

Этап 1, задача 2. Решение уравнения (13.35)

Интегрирование этого уравнения в конечном виде представляет проблему. Дальнейшее решение уравнения заключается в разложении полных эллиптических интегралов в ряды по степеням k . От выбранного числа членов в разложении зависит точность полученного решения. Раскладывая до второй степени

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right),$$

получим из (13.35)

$$\dot{k} = -\frac{\varepsilon}{\pi k \left(1 + \frac{k^2}{4} \right)} \left[E\left(\pi + \frac{k^2}{2} \right) - \pi(1-k^2) \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \right].$$

Далее используем соотношение

$$E\left(\pi + \frac{k^2}{2}\right) = 2E(k) + E\left(\frac{k^2}{2}, k\right).$$

и разложения до второй степени k

$$E\left(\frac{k^2}{2}, k\right) = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{k^2}{2}\sin\frac{k^2}{2}\right)k^2,$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{k^2}{4}\right).$$

В результате из (13.35) получаем

$$\dot{k} = -\varepsilon k \frac{1+\pi}{2\pi}$$

и экспоненциальное уменьшение корня из интеграла энергии невозмущенного уравнения (13.22)

$$k = k_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{1+\pi}{2\pi} u\right). \quad (13.36)$$

Ограничимся второй степенью модуля в разложении и не будем учитывать изменение фазы колебаний. В этом случае порождающее решение для уравнения (13.22) запишется в виде

$$\beta = 2 \arcsin\left(k_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{1+\pi}{2\pi} u\right) \operatorname{sn} \varphi\right), \quad (13.37)$$

$$\dot{\beta} = 2\omega k_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{1+\pi}{2\pi} u\right) \operatorname{cn} \varphi.$$

Этап 2. Существование периодических решений уравнения (13.22)

Использование решения (13.37) в качестве порождающего в уравнении первого приближения (13.22) не позволяет получить вид решения первого приближения. Покажем, однако, что порождаемые (13.37) периодические решения (13.22) существуют. При этом будем рассматривать задачу на небольших интервалах изменения модуля k , используя в качестве порождающего решения (13.27), (13.28). Поскольку эти выражения задают двухпараметрическое семейство решений и (13.36) показывает, что параметр k убывает, необходимо выяснить, при всех ли значениях $k \in [0, 1]$ существует периодическое ре-

шение. Уравнение (13.22) периодически по u и β , его вид не изменяется при заменах

$$\beta \rightarrow \beta + 2\pi, u \rightarrow u + \pi.$$

Периодические решения (13.22) поэтому удовлетворяют условию

$$\beta(u + \pi m) = \beta(u) + 2\pi p.$$

Вместе с тем порождающее решение (13.27)-(13.28) имеет период

$$T = \frac{4K(k)}{\omega},$$

то есть

$$\beta(u + nT) = \beta(u),$$

что при $p = 0$ дает соотношение

$$T = \pi \frac{m}{n},$$

из которого определяем значение модуля k как решение уравнения

$$K(k) = \frac{\pi \omega m}{4n}. \quad (13.38)$$

Поскольку полный эллиптический интеграл монотонно возрастает от $\pi/2$ до бесконечности при росте модуля, уравнение (13.38) имеет единственное решение k^* . Выбирая числа m и n , можно получить разные интересующие нас значения модуля. Как уже было замечено, при практически интересных параметрах управления и спутника $\omega < 0.5$. Поэтому, учитывая, что $K(k) \geq \pi/2$, получаем $m/n \geq 4$. Задав, например, $n = 1$, можно выбором m получить разные значения модуля. При выборе большего n можно получить более плотное разбиение интервала $[0,1]$, в котором задаются значения модуля k . Определив таким образом один из параметров решения (13.22), запишем уравнение фазового баланса [73] для $n = 1$

$$\int_0^{\pi m} \sin[2u - 2\beta_0(k, \varphi_0)] \dot{\beta}_0(k, \varphi_0) du = 0, \quad (13.39)$$

из которого можно определить значение второго параметра – фазы φ_0 . Численный анализ уравнения (13.39) показывает, что при любых значениях модуля существует периодическое решение, порождаемое добавлением гравитационного момента в уравнения движения. При этом существует решение для фазы φ_0 , близкое к 0 при $m/n > 4$, заметно

отличаясь от 0 лишь при $m/n = 4$. При уменьшении величины модуля эти решения переходят в (13.26). Чтобы убедиться в этом, будем считать, что k_0 мало и тогда эллиптические функции Якоби переходят в тригонометрические. В этом случае для поиска первого приближения уравнения (13.24) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 + \omega^2 \beta_1 + \varepsilon \dot{\beta}_1 = \\ = \sin 2u - 4k_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{1+\pi}{2\pi} u\right) \sin(\omega u + \varphi_0) \cos 2u. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Уравнение (13.40) представляет собой (13.25) с добавлением дополнительной малой и убывающей со временем вынуждающей силы.

Этап 2. Численный поиск периодических решений

Проведем поиск периодических решений (13.22) численно, исходя из соотношения

$$\beta(u + \pi) = \beta(u) = \beta^*.$$

Отдельно рассмотрим численное решение краевой задачи при значениях β , близких к нулю, опираясь при этом на решения (13.39), дающие нулевые значения φ_0 . При $u = 0$, $\varphi_0 = 0$ из порождающего решения (13.27) получаем $\beta(0) = 0$. Аналогично из (13.28) получаем

$$\dot{\beta}(0) = 2\omega k. \quad (13.41)$$

Однако для $\beta(0) = 0$ уже найдено периодическое решение (13.26), которым, таким образом, можно пользоваться для характеристики амплитуды периодического решения. На рис. 13.5 приведено сравнение амплитуды периодического решения (максимального отклонения β от нуля на интервале $u \in [0, \pi]$).

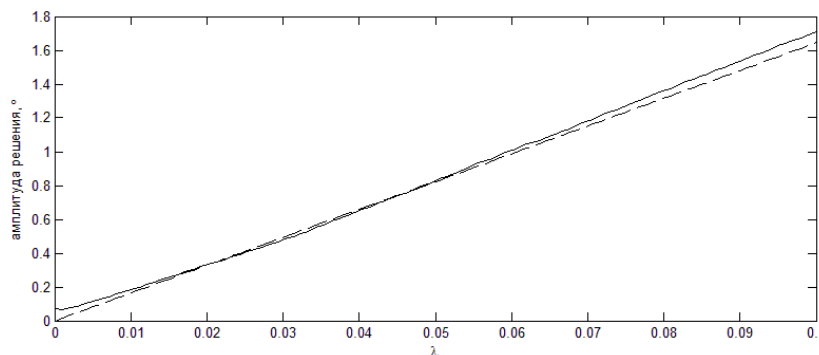


Рис. 13.5. Сравнение аналитического и численного значений амплитуды периодического решения

На рис. 13.5 сплошной линией обозначено численно полученное значение амплитуды колебаний, пунктирной – полученное с помощью формулы (13.26) значение в зависимости от характерной величины гравитационного момента.

Периодическое решение существует также при $\beta^* \neq 0$. При поиске параметров периодических решений необходимо принимать во внимание условие $k < 1$, то есть

$$\dot{\beta}(0) \leq 4\omega^2 (1 - \sin^2 \beta^*/2). \quad (13.42)$$

Фактически при выбранных параметрах это условие означает, что начальная скорость не может быть заметно выше орбитальной скорости $\omega_0 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Из (13.42) видно, что при $\beta^* = \pi$ периодическое решение существует только при $\dot{\beta}(0) = 0$. Это соответствует неустойчивой стационарной точке $\beta = \pi$, $\dot{\beta} = 0$. На рис. 13.6 представлена величина амплитуды периодических колебаний в зависимости от величины гравитационного момента и значения β^* .

Для величины амплитуды колебаний численное решение показывает аналогичную рис. 13.5 линейную зависимость от λ для различных β^* . При этом для фиксированного значения λ зависимость амплитуды от β^* имеет нелинейный вид.

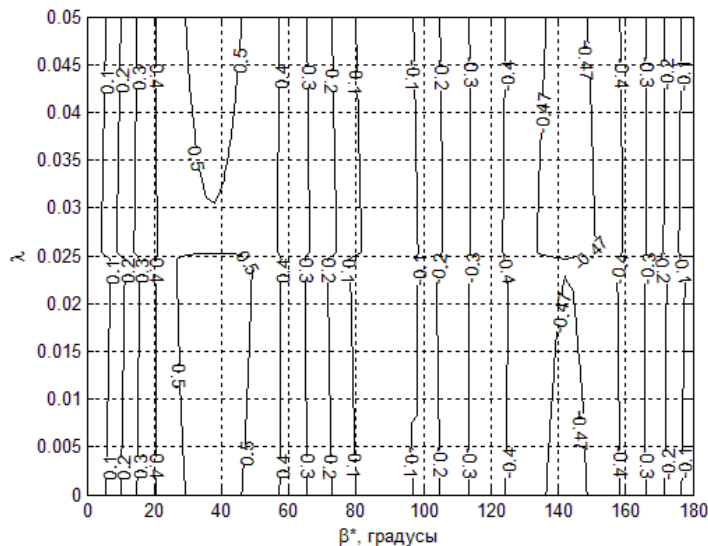


Рис. 13.6. Величина угловой скорости

Этап 2. Аппроксимация периодических решений

В целом зависимость амплитуды от β^* и λ можно представить в виде

$$\beta_{\max} = k_1(\beta^*)\lambda + k_0(\beta^*). \quad (13.43)$$

Поиск параметров $k_1(\beta^*)$ и $k_0(\beta^*)$ при $\beta^* \in [0, \pi]$ был проведен по полученным численным значениям β_{\max} с помощью метода наименьших квадратов. Полученные зависимости показали, что дальнейшую аппроксимацию целесообразно провести с помощью полиномов

$$k_1(\beta^*) = \sum_{j=0}^5 a_j \beta^{*j}, \quad k_0(\beta^*) = \sum_{j=0}^3 b_j \beta^{*j}. \quad (13.44)$$

Использование метода наименьших квадратов привело к двум выражениям

$$\begin{aligned} k_1(\beta^*) = & 0.01115\beta^{*9} - 0.21552\beta^{*8} + 1.7586\beta^{*7} - \\ & - 7.85184\beta^{*6} + 20.71312\beta^{*5} - 32.12662\beta^{*4} + \\ & + 26.42569\beta^{*3} - 7.42894\beta^{*2} - 1.72622\beta^* + 0.27445, \\ k_0(\beta^*) = & 0.03867\beta^{*3} - 0.32723\beta^{*2} + 1.65024\beta^* - 0.01085. \end{aligned} \quad (13.45)$$

При этом среднеквадратичное отклонение не превышает 0.017. Формулы (13.43), (13.44), (13.45) позволяют достаточно точно описать амплитуду периодических решений при $\beta^* \neq 0$. При β^* , близких к нулю, предпочтительнее пользоваться результатом (13.26). В качестве примера использования формул (13.43), (13.44), (13.45) на рис. 13.7 приведена амплитуда периодического решения при $\beta^* = 108^\circ$.

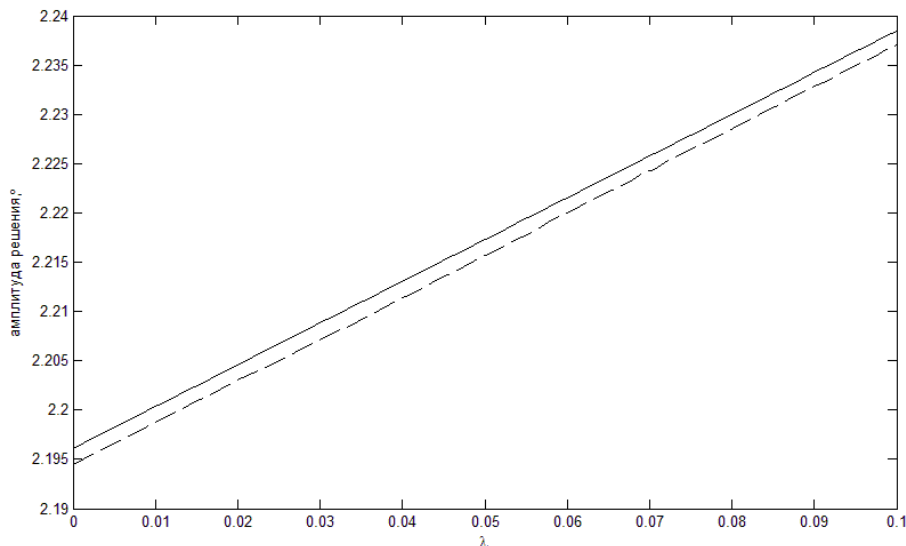


Рис. 13.7. Аппроксимация амплитуды периодического решения

На рис. 13.7 сплошной линией отмечена амплитуда, полученная при численном расчете, пунктирной – полученная по формулам

(13.43), (13.44), (13.45). При $\beta^* \in [\pi, 2\pi]$ также можно пользоваться формулами (13.43), (13.44), (13.45), сделав замену $\beta^* \rightarrow 2\pi - \beta^*$.

Пространственное движение

Перейдем к исследованию пространственного движения спутника. Для анализа поведения системы в широком диапазоне параметров управления k_a , k_ω и величины гравитационного момента используем теорию Флоке [74]. Для этого линеаризуем уравнения движения в окрестности нуля

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \eta\chi \left[-(B_2^2 + B_3^2)\omega_1 + B_1B_2\omega_2 + B_1B_3\omega_3 \right] + \\ &+ 2\eta \left[B_1B_2\alpha + B_1B_3\beta - (B_2^2 + B_3^2)\gamma \right] + 3\frac{C-B}{A}(\alpha \cos u \sin u - \gamma \sin^2 u), \\ \dot{\omega}_2 &= \eta\chi \frac{A}{B} \left[B_1B_2\omega_1 - (B_1^2 + B_3^2)\omega_2 + B_2B_3\omega_3 \right] + \\ &+ 2\eta \frac{A}{B} \left[-(B_1^2 + B_3^2)\alpha + B_2B_3\beta + B_1B_2\gamma \right] + 3\frac{A-C}{B}(\alpha \cos^2 u - \gamma \cos u \sin u), \\ \dot{\omega}_3 &= \eta\chi \frac{A}{C} \left[B_1B_3\omega_1 + B_2B_3\omega_2 - (B_1^2 + B_2^2)\omega_3 \right] + \\ &+ 2\eta \frac{A}{C} \left[B_2B_3\alpha - (B_1^2 + B_2^2)\beta + B_1B_3\gamma \right] + 3\frac{B-A}{C}(\cos u \sin u + \beta \sin^2 u - \beta \cos^2 u), \\ \dot{\alpha} &= \omega_2, \quad \dot{\beta} = \omega_3, \quad \dot{\gamma} = \omega_1, \end{aligned} \tag{13.46}$$

где $\eta = k_a B_0^2 / A \omega_0^2$, $\chi = k'_\omega / k_a$, $k'_\omega = \omega_0 k_\omega$. Для однородной части (13.46) можно применить теорию Флоке. При этом удобнее вместо параметра k_ω использовать $k'_\omega = k_\omega / \omega_0$, что соответствует безразмерной угловой скорости в законе управления (13.6). В этом случае оба коэффициента усиления имеют одну размерность, за счет чего по их величинам можно сравнивать вклад позиционной и демпфирующей компонент в управление. Результаты определения характеристических показателей системы (13.46) представлены на рис. 13.8 – рис. 13.16. Далее при моделировании орбита спутника имеет высоту 600 км. В уравнении (13.46) компоненты вектора индукции B_i могут быть записаны с помощью любой модели. Далее используется модель прямого диполя, сохраняющая периодичность (13.46) и точнее описывающая геомагнетизм, нежели осредненная модель. Сравнение областей устойчивости

показывает, что в большинстве случаев они заметно шире для модели прямого диполя. Это связано с неравномерностью вращения вектора индукции при движении спутника по орбите, из-за чего увеличивается набор направлений в пространстве, доступный для реализации управляющего механического момента.

На рис. 13.8 и рис. 13.9 представлены характеристические показатели системы для спутника с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1.0255, 1.5393, 1.8172)$ кг·м². При этом наклонение орбиты составляет соответственно 30 и 60 градусов. Величина характеристических показателей зависит от коэффициентов усиления – позиционного и демпфирующего.

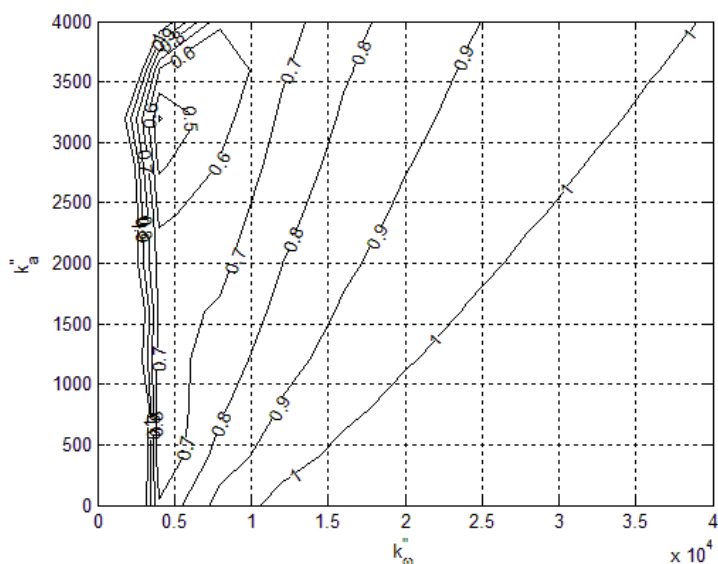


Рис. 13.8. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30°

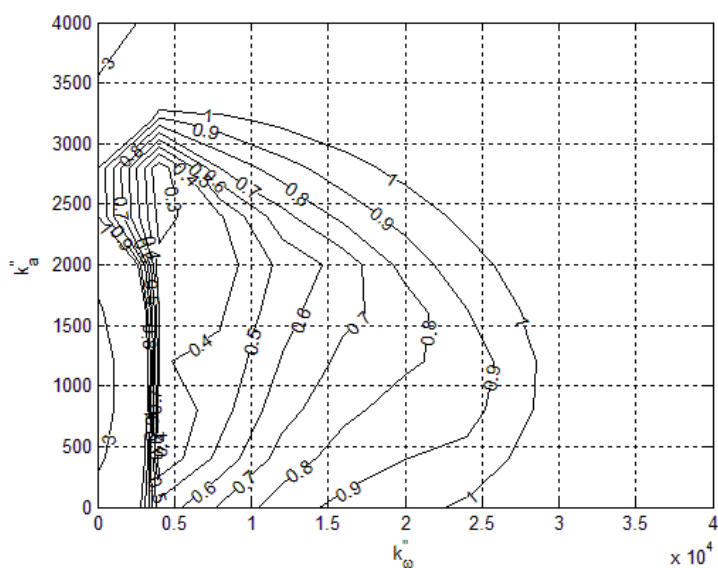


Рис. 13.9. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60°

Из рис. 13.8 и рис. 13.9 видно, что на орбите с меньшим наклоном область устойчивости больше, однако для орбиты с высоким наклоном увеличивается практически интересная область с малыми величинами характеристических показателей. Это связано с действием гравитационного момента, который для выбранной инерциальной системы и наклонов может оказывать восстанавливающее воздействие на спутник. Фактически, гравитационный момент реализует часть управляющего момента ляпуновского управления, которую нельзя реализовать с помощью магнитных катушек. При других наклонах и требуемой ориентации аппарата это воздействие может оказаться сильнее, слабее, или, наоборот, гравитация может оказывать возмущающее воздействие, если он направлен в другую сторону, нежели необходимый управляющий момент. Однако даже в этом случае действие гравитационного момента может привести к увеличению области устойчивости, так как спутник будет выводиться из положения, в котором недоступно магнитное управление. На рис. 13.10 и рис. 13.11 показаны характеристические числа при отсутствии гравитационного момента.

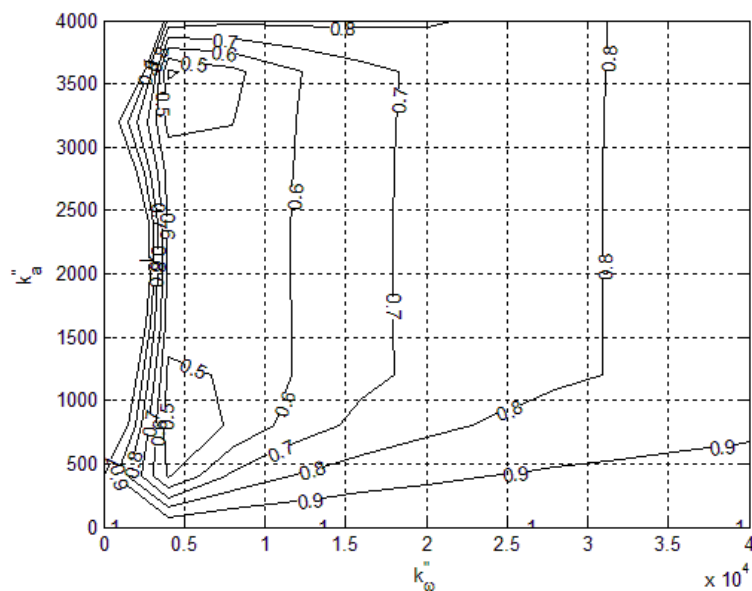


Рис. 13.10. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30° .
Без гравитационного момента

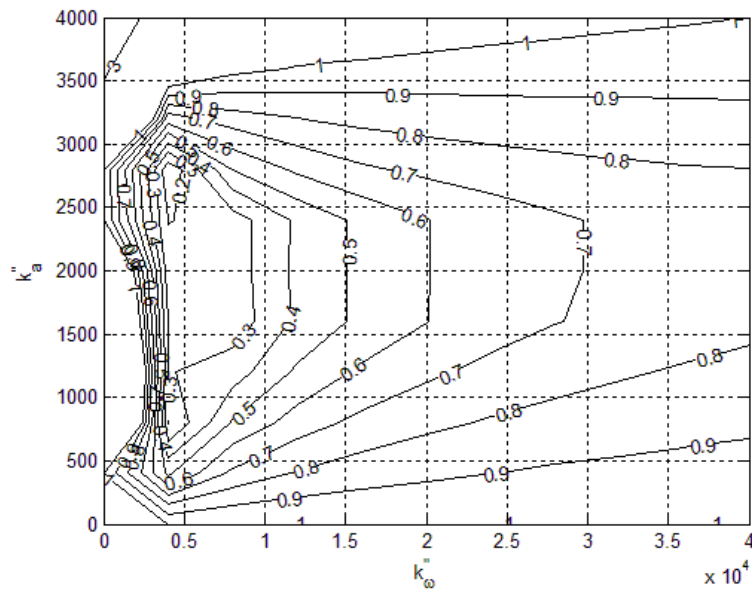


Рис. 13.11. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60° .
Без гравитационного момента

Сравнение пар рис. 13.8, рис. 13.9 и рис. 13.10, рис. 13.11 показывает, что в целом действие гравитационного момента приводит к уменьшению области устойчивости, хотя для орбит с малым наклоном это воздействие заметно меньше. На рис. 13.12 представлены полученные численно амплитуды периодических решений (при этом также используется модель прямого диполя).

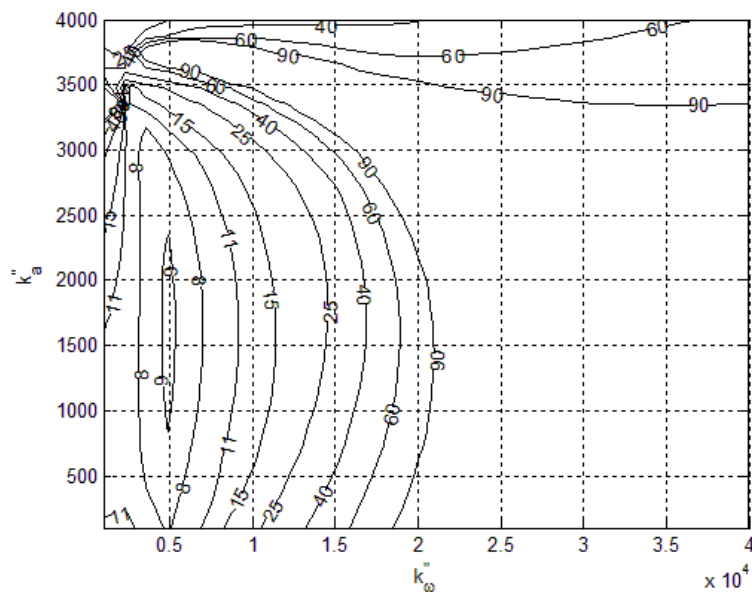


Рис. 13.12. Амплитуды периодических решений

Рис. 13.12 можно сравнить с рис. 13.9, чтобы соотнести значения характеристических показателей с достижимой точностью ориен-

тации (амплитуды периодических решений) в области устойчивости. На рис. 13.13 и рис. 13.14 представлены области устойчивости для спутника с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1,1,1,3)$ кг·м².

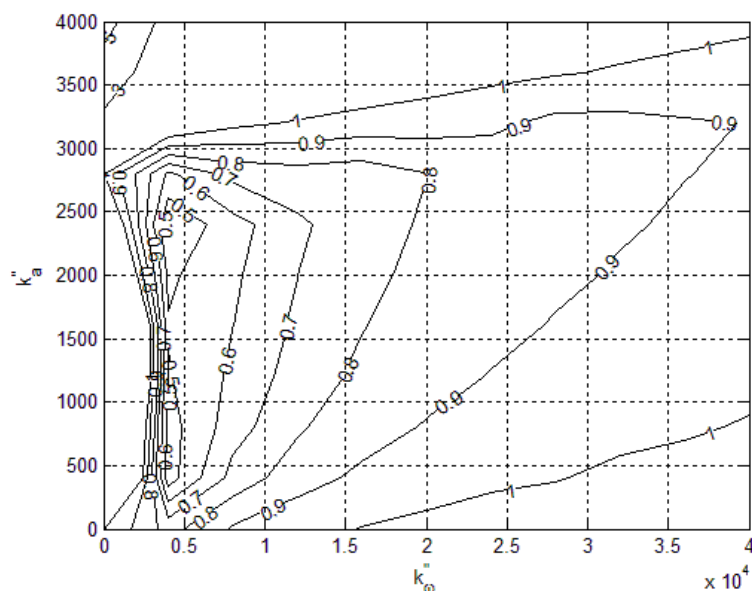


Рис. 13.13. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30°

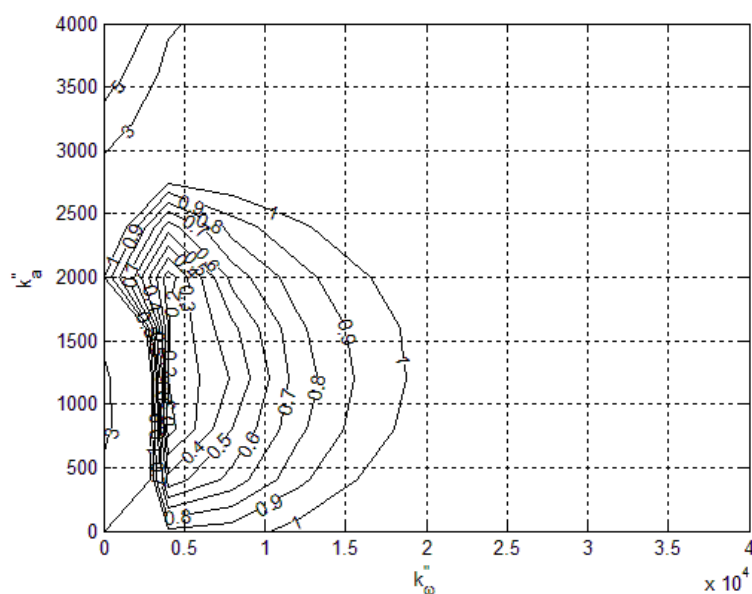


Рис. 13.14. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60°

Близость тензора инерции к сферически-симметричному приводит к незначительному влиянию гравитационного момента, однако по-прежнему сохраняется большая область устойчивости для орбиты с малым наклоном. Еще меньшее влияние гравитационный момент оказывает на спутник малых массы и размеров. На рис. 13.15 и

рис. 13.16 представлены области устойчивости для аппарата с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(0.17, 0.15, 0.2)$ кг·м².

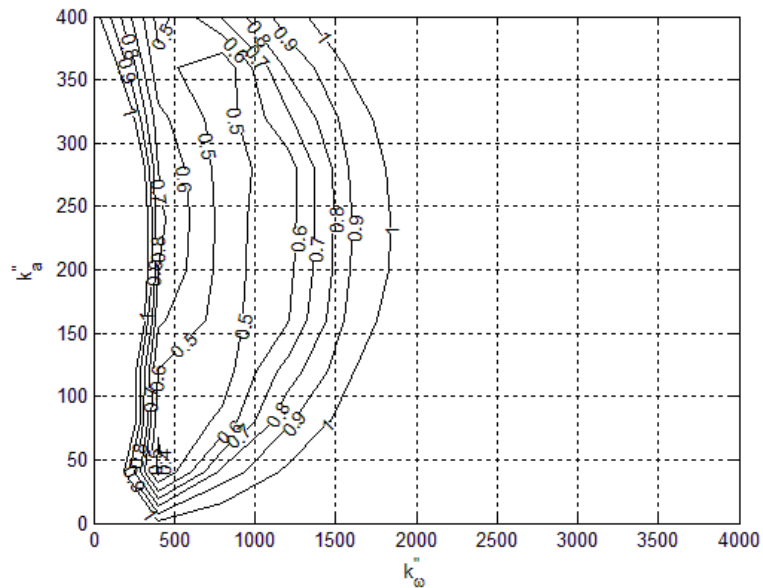


Рис. 13.15. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30°

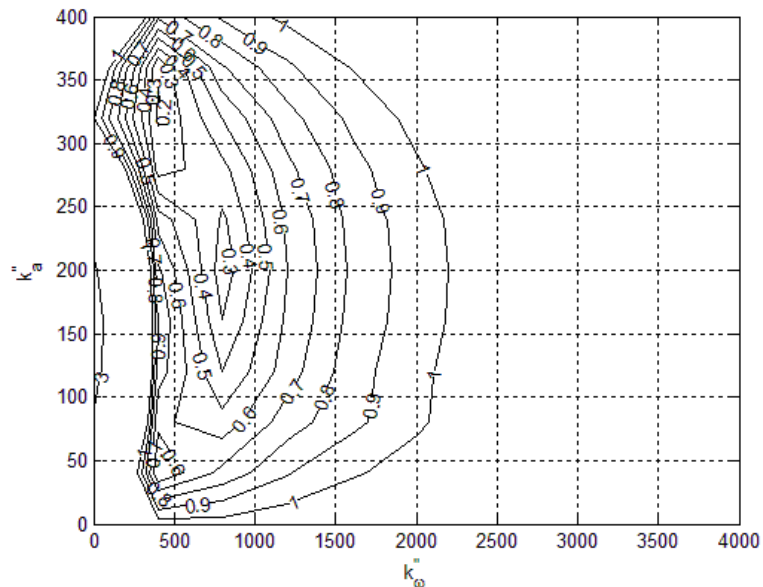


Рис. 13.16. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60°

В этом случае коэффициенты усиления управления оказываются ниже, так как уменьшается кинетический момент аппарата, а значит, и величина управляющего момента. Большая область устойчивости и большая область с малыми значениями характеристических показателей для орбиты с высоким наклоном объясняются большим разнообразием положений вектора геомагнитной индукции.

13.4 Ориентация в орбитальных осях

Приведенные в разделе 13.1 рассуждения верны для движения спутника в инерциальном пространстве. При рассмотрении его движения относительно орбитальной системы координат необходимо сделать еще одно, вообще говоря грубое, допущение. Поскольку при использовании уравнений (1.6) вместо (1.1) в выражении для \mathbf{M} появляется $\mathbf{M}_{отн}$, приходится игнорировать слагаемое $\mathbb{A}\boldsymbol{\omega}_{орб} \times \mathbb{J}\mathbb{A}\boldsymbol{\omega}_{орб}$, стремящееся к нулю в требуемом положении. Также при упрощении соотношений (13.5) приходится игнорировать гравитационный момент, хотя и стремящийся к нулю в требуемом положении (положение равновесия, хотя, возможно, и неустойчивое, в гравитационном поле), но не равный нулю. Применимость управления (13.6), где вместо абсолютной скорости используется относительная, для ориентации в орбитальных осях, следует рассмотреть отдельно.

Важным вопросом реализации описанного управления является выбор коэффициентов усиления. Для анализа поведения системы в широком диапазоне параметров управления k_a , k_ω и величины гравитационного момента используем теорию Флоке. Для этого линеаризуем уравнения движения (1.6)-(1.7) в окрестности нуля,

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= k'_\omega \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[-(B_2^2 + B_3^2)\Omega_1 + B_1B_2\Omega_2 + B_1B_3\Omega_3 \right] + \\ &+ 2k_a \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[B_1B_2\alpha + B_1B_3\beta - (B_2^2 + B_3^2)\gamma \right] + \omega_2 + \frac{B-C}{A}(\omega_2 + \gamma), \\ \dot{\Omega}_2 &= k'_\omega \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[B_1B_2\Omega_1 - (B_1^2 + B_3^2)\Omega_2 + B_2B_3\Omega_3 \right] + \\ &+ 2k_a \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[-(B_1^2 + B_3^2)\alpha + B_2B_3\beta + B_1B_2\gamma \right] - \Omega_1 + \frac{C-A}{B}(\Omega_1 - 4\alpha), \quad (13.47) \\ \dot{\Omega}_3 &= k'_\omega \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[B_1B_3\Omega_1 + B_2B_3\Omega_2 - (B_1^2 + B_2^2)\Omega_3 \right] + \\ &+ 2k_a \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[B_2B_3\alpha - (B_1^2 + B_2^2)\beta + B_1B_3\gamma \right] + 3\frac{A-B}{C}\beta, \\ \dot{\alpha} &= \Omega_2, \quad \dot{\beta} = \Omega_3, \quad \dot{\gamma} = \Omega_1. \end{aligned}$$

На рис. 13.17 представлены характеристические показатели системы вблизи области устойчивости (13.47). При этом рассматривает-

ся крупный аппарат с моментами инерции $5750 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $2450 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $4000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ на орбите высотой 1000 км , наклоном 82.5° .

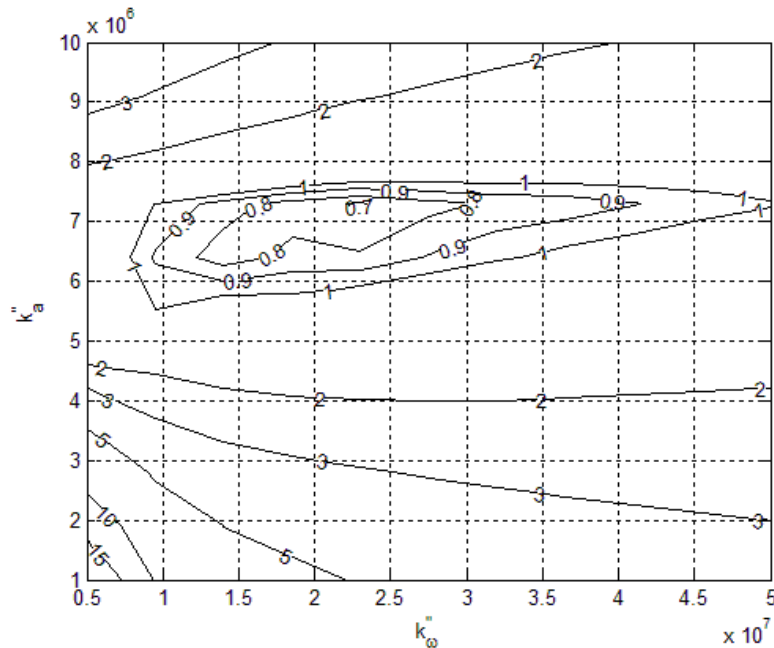


Рис. 13.17. Область устойчивости

Так как рис. 13.17 получен в упрощающих предположениях (линеаризованные уравнения движения, упрощенная дипольная модель геомагнитного поля, отсутствие ограничения на величину дипольного момента катушек), с его помощью можно лишь приблизительно определить коэффициенты управления. Тем не менее, использование такого подхода сужает область, откуда могут быть выбраны подходящие параметры управления. Как оказалось, для указанных выше параметров спутника и его орбиты наилучшие точность и быстродействие достигаются при $k_\omega = 4 \cdot 10^7 / \omega_0 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$, $k_a = 1.5 \cdot 10^7 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$. Таким образом, оба коэффициента усиления оказались примерно в два раза больше оптимальных, определяемых по рис. 13.17. Результат моделирования с этими параметрами управления в предположении идеального знания ориентации, но с учетом гравитационного и случайного неизвестного возмущающего моментов, представлен на рис. 13.18.

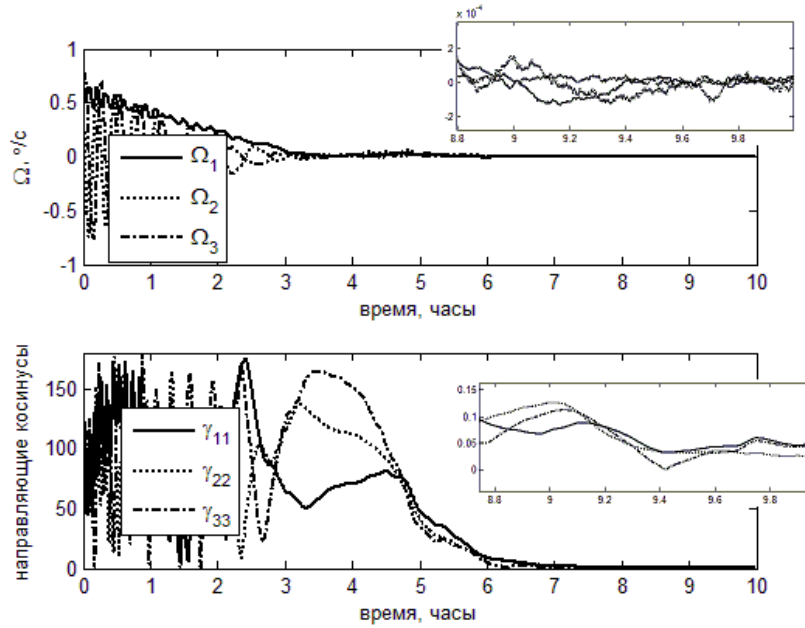


Рис. 13.18. Приведение спутника в требуемую ориентацию, случайное возмущение

Точность ориентации оказывается лучше 0.1° . Приведенный пример будет детально рассмотрен в Главе IV с привлечением методов определения ориентации. В целом же ориентация спутника в орбитальных осях с использованием управления (13.6) возможна.

13.5 Использование скользящего управления

Опишем итерационный подход для поиска параметров скользящей поверхности, введенной в разделе 13.1. Для обеспечения движения по скользящей поверхности будем искать управление, реализующее соотношение

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (13.48)$$

где \mathbf{P} – положительно-определенная матрица. Это матрица характеризует быстродействие алгоритма приведения изображающей точки к скользящей поверхности управления. Тензор инерции введен в (13.48) для удобства дальнейших выкладок. Обращаясь к (13.9), получаем из (13.48)

$$\lambda\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \lambda\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}\dot{\mathbf{L}}\mathbf{S} + \mathbf{J}\mathbf{L}\dot{\mathbf{S}} = -\lambda\mathbf{P}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{S}.$$

Выражение для $\dot{\mathbf{S}}$ определяется с помощью (13.4) и (1.3),

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -\omega_3 a_{13} + \omega_1 a_{33} - \omega_2 a_{12} + \omega_1 a_{22} \\ \omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21} - \omega_3 a_{23} + \omega_2 a_{33} \\ \omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32} - \omega_1 a_{31} + \omega_3 a_{11} \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание динамические уравнения, получаем

$$\lambda \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -\dot{\lambda} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda (\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \dot{\mathbb{L}} \mathbb{J} \mathbf{S} - \mathbb{L} (\mathbb{J} \dot{\mathbf{S}} + \mathbb{P} \mathbf{S}) - \lambda \mathbb{P} \boldsymbol{\omega}. \quad (13.49)$$

Выражение (13.49) указывает, какой дипольный момент катушек следует задавать. При этом необходимо иметь выражения для λ и \mathbb{L} . Коэффициент, задающий вклад демпфирующей компоненты, будем считать известным. В большинстве случаев это может быть постоянное значение либо выражение, задающее увеличенный, по сравнению с позиционной частью, вклад демпфирования скорости вблизи требуемой ориентации. Основная задача – поиск матрицы \mathbb{L} .

Представим производную матрицы \mathbb{L} в виде

$$\dot{\mathbb{L}} = \frac{\mathbb{L}(k+1) - \mathbb{L}(k)}{\Delta u},$$

где Δu – шаг расчета выдачи управляющего воздействия магнитными катушками. Будем считать, что на $k+1$ шаге известна матрица прошлого шага $\mathbb{L}(k)$, вектор состояния системы и ориентация вектора геомагнитной индукции. Необходимо найти матрицу $\mathbb{L}(k+1)$. Подставляя аппроксимирующую формулу в (13.49), получим, опуская индексы везде, кроме $\mathbb{L}(k+1)$,

$$\begin{aligned} \lambda \Delta u \mathbf{m} \times \mathbf{B} &= \\ &= \left(-\dot{\lambda} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda (\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \mathbb{L} (\mathbb{J} \dot{\mathbf{S}} + \mathbb{P} \mathbf{S}) - \lambda \mathbb{P} \boldsymbol{\omega} \right) \Delta t - \mathbb{L}(k+1) \mathbb{J} \mathbf{S} + \mathbb{L} \mathbb{J} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{a} = \left(-\dot{\lambda} \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda (\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \mathbb{L} (\mathbb{J} \dot{\mathbf{S}} + \mathbb{P} \mathbf{S}) - \lambda \mathbb{P} \boldsymbol{\omega} \right) \Delta u + \mathbb{L} \mathbb{J} \mathbf{S},$$

$$\mathbf{b} = -\mathbb{J} \mathbf{S}, \quad \mathbf{d} = \lambda \Delta u \mathbf{B}$$

и перепишем (13.50) в виде

$$\mathbf{a} + \mathbb{L}(k+1) \mathbf{b} = \mathbf{m} \times \mathbf{d}. \quad (13.51)$$

Чтобы определить вид матрицы $\mathbb{L}(k+1)$, перейдем в новую систему координат, задаваемую базисом

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{b}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Умножим (13.51) скалярно на \mathbf{d} ,

$$(\mathbb{L}(k+1) \mathbf{b}) \mathbf{d} = -\mathbf{a} \mathbf{d}.$$

Учитывая, что в новом базисе $\mathbf{d} = (d_1, 0, 0)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$, получаем

$$\Lambda_{11}(k+1) b_1 + \Lambda_{12}(k+1) b_2 = -a_1. \quad (13.52)$$

Для построения матрицы $\mathbb{L}(k+1)$ сначала выбираем $L_{11}(k+1) > 0$, например, $L_{11}(k+1) = L_{11}(k)$. Затем с помощью (13.52) определяется $L_{12}(k+1)$ и $L_{21}(k+1)$ и

$$L_{12}(k+1) = L_{21}(k+1) = (-a_1 - L_{11}(k+1)b_1)/b_2.$$

Величина $L_{22}(k+1)$ должна удовлетворять соотношению

$$L_{11}(k+1)L_{22}(k+1) - L_{12}^2(k+1) > 0. \quad (13.53)$$

Например, $L_{22}(k+1) = L_0 + L_{12}^2(k+1)/L_{11}(k+1)$, L_0 – положительная величина. Однако если $L_{22}(k)$ удовлетворяет (13.53), то можно использовать значение на прошлом шаге. Наконец, $L_{33}(k+1) = L_{33}(k)$. В результате получаем матрицу $\mathbb{L}(k+1)$, которая переводится в связанную систему, и с помощью (13.51) определяется управляющий механический и дипольный моменты. На первом шаге можно считать, что $\mathbb{L}(k+1) = \mathbb{L}(k) = L_0 \mathbb{E}$.

Приведенный способ построения $\mathbb{L}(k+1)$ не применим в окрестности требуемой ориентации, так как b_1 и b_2 близки к нулю. Поэтому для поиска $L_{12}(k+1)$ используется регуляризованное выражение

$$\Lambda_{12}(k+1) = -\frac{a_1 + \Lambda_{11}(k+1)b_1}{b_2 + \delta b_2},$$

где δb_2 – небольшая положительная величина. Внесение этой ошибки в конструирование матрицы $L(k+1)$ приводит к тому, что механический момент, определяемый согласно (13.51), немного отклоняется от плоскости, перпендикулярной вектору геомагнитной индукции. Магнитная система реализует проекцию этого момента на плоскость.

Численное моделирование

Реализация управления, описанного в предыдущем разделе, сопряжена с подбором коэффициента (или функции) λ , величины вклада позиционной части управления L_0 и матрицы \mathbb{P} . При подборе необходимо принимать во внимание примерную величину реализуемого магнитными катушками дипольного момента и соотношение между позиционной и демпфирующей частями управления. На

рис. 13.19 приведен результат моделирования для спутника с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(1.0255, 1.5393, 1.8172)$ кг·м². Параметры управления $L_0 = 10^{-4}$, $\delta b_2 = 0.001$, $\lambda = 0.07$, $\mathbb{P} = 10^{-3} \mathbb{E}$, магнитные катушки создают дипольный момент не более $3.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, шаг расчета и выдачи управляющих воздействий (размерный) $\Delta t = 0.1 \text{ с}$, высота круговой орбиты 400 км, наклонение 60° , модель геомагнитного поля – наклонный диполь. В управлении учитывается действие возмущающего гравитационного момента. На спутник также действует аэродинамический момент, не учтенный в управлении.

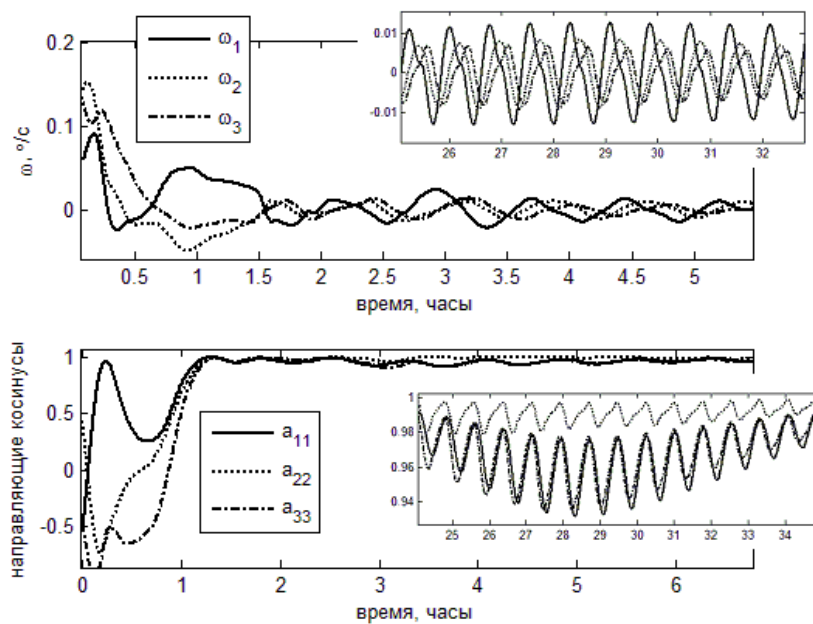


Рис. 13.19. Приведение микроспутника в инерциальную ориентацию

Итерационный метод поиска матрицы \mathbb{L} и ее производной не позволяет добиться точности выше $15\text{-}20^\circ$ для микроспутника с шагом управления 0.1 с . При использовании такого подхода для ориентации наноспутников, однако, достигается точность в несколько градусов. Для наноспутника *ТаблетСат-Аврора* с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(0.52, 0.58, 0.705)$ кг·м² при $\mathbb{P} = 5 \cdot 10^{-4} \mathbb{E}$, $\lambda = 0.15$, шаге $\Delta t = 1 \text{ с}$ и ограничении на величину дипольного момента катушек $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ достигается точность не хуже 5° (рис. 13.20). Наконец, для кубсата с тензором инерции $\mathbb{J} = \text{diag}(0.09, 0.011, 0.007)$ кг·м² при $\mathbb{P} = 10^{-5} \mathbb{E}$, $\lambda = 0.1$ шаге $\Delta t = 1 \text{ с}$ и ограничении на величину дипольного момента катушек $0.1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ в течение нескольких часов также достигается точность не хуже 5° (рис. 13.21).

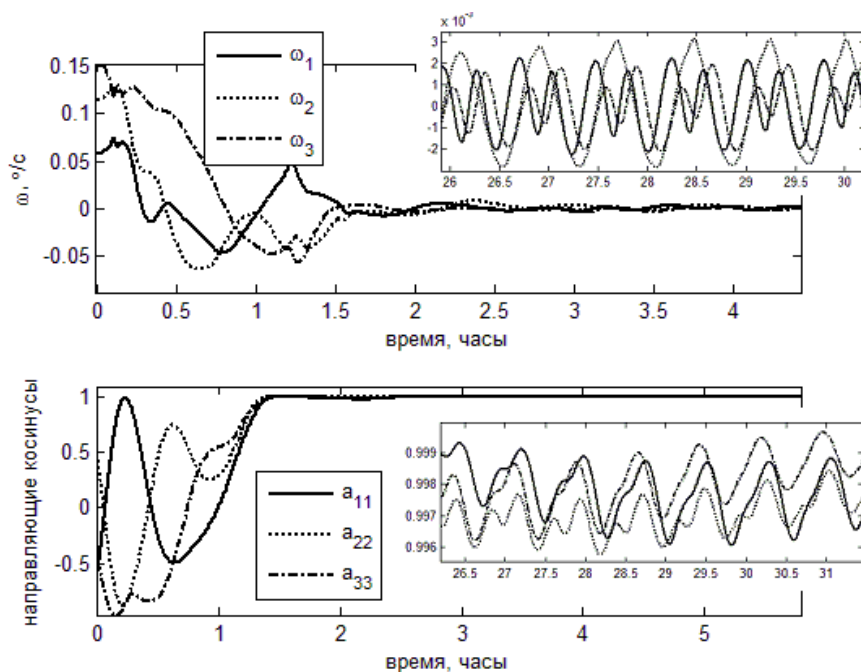


Рис. 13.20. Приведение наноспутника в инерциальную ориентацию

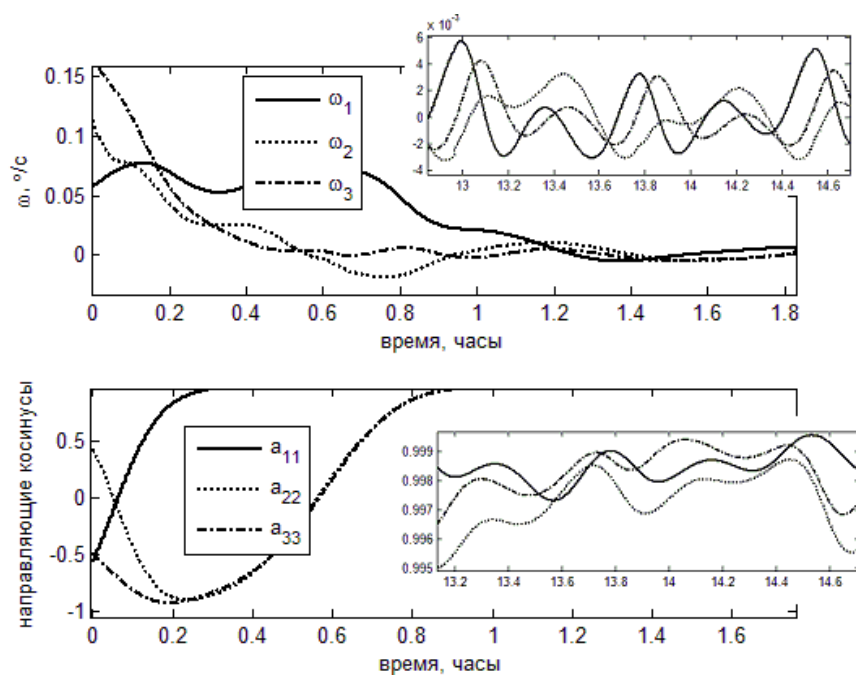


Рис. 13.21. Приведение кубсата в инерциальную ориентацию

В случае кубсата на рис. 13.22 также представлен результат приведения к орбитальной системе координат.

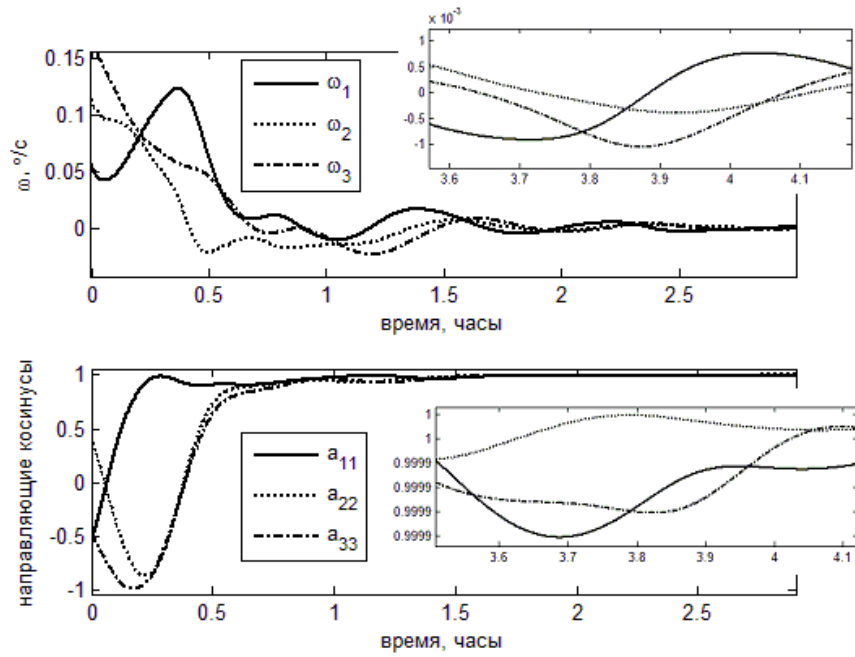


Рис. 13.22. Приведение кубсата в орбитальную ориентацию

В этом случае точность оказывается лучше одного градуса, так как гравитационный момент практически перестает действовать в требуемом положении (хотя оно и не является устойчивым в гравитационном поле).

Глава IV. Определение углового движения

Для работы активных систем ориентации требуется знание углового движения спутника на каждом шаге управления. Для оценки текущей ориентации и угловой скорости используются измерения бортовых датчиков. Наиболее часто используемые – солнечные датчики, магнитометр, звездный датчик и датчик угловой скорости. В случае малых спутников из стандартного набора датчиков обычно выбирается лишь необходимый минимум, который будет в состоянии обеспечить необходимую точность определения углового движения. На микро и наноспутниках, как правило, отказываются от применения звездного датчика, наиболее точного из перечисленных выше, особенно в случае использования только магнитной системы ориентации, так как точность обеспечения ориентации будет значительно хуже точности определения ориентации звездным датчиком.

Необходимым атрибутом активных магнитных систем ориентации является магнитометр, так как в алгоритмах управления часто требуется знание магнитного поля Земли в связанной с аппаратом системе координат. Но в отличие от крупногабаритных аппаратов, где можно позволить установить магнитометр на штанге вне корпуса спутника, для микроспутников магнитометр находится в непосредственной близости от имеющих магнитное поле бортовых приборов, что обуславливает систематические ошибки в измерениях. Кроме того, во время работы магнитных катушек из измерений магнитометра крайне сложно получить магнитное поле Земли. На простых микроспутниках зачастую устанавливают недорогие солнечные датчики на светодиодах или не устанавливают их вовсе, а определяют направление на Солнце с помощью токосъема с солнечных панелей. Широкое применение на микроспутниках получили миниатюрные микроэлектронно-механические датчики угловой скорости, которые при всех своих плюсах имеют недостаток – значительно плавающее смещение нуля измерений.

В настоящем разделе приводится описание популярных методов определения углового движения: метода наименьших квадратов для задач калибровки бортовых датчиков и для реконструкции полета по данным телеметрии, локальных алгоритмов определения углового движения и статистических алгоритмов на основе фильтра Калмана.

Приводятся примеры их реального использования для определения углового движения микро и наноспутников, приводятся результаты исследований точности работы этих алгоритмов.

14 Реконструкция движения

Рассмотрим пример использования метода наименьших квадратов для реконструкции углового движения по измерениям магнитного поля Земли с помощью бортового магнитометра.

Суть метода наименьших квадратов сводится к нахождению таких параметров моделей движения (это могут быть начальные условия движения на анализируемом интервале времени и/или параметры спутника) и измерений магнитометра, которые минимизируют квадрат разности измерений магнитометра и магнитной индукции Земли в связанной со спутником системе координат. Подробно решение задачи реконструкции движения описано в работах В.В. Сазонова по обработке измерений со спутников *Фотон* [118–120], *Бион-М-1* [121] и *Аист* [122]. Теоретический экскурс в теорию обработки измерений можно найти в методической работе авторов [123]. В настоящем же разделе мы остановимся на общей схеме методики реконструкции движения с помощью метода наименьших квадратов по измерениям магнитометра с использованием решений уравнений вращательного движения спутника.

Модель измерений магнитометра без учета неортогональности чувствительных осей может быть записана в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}_x + \boldsymbol{\mu}. \quad (14.1)$$

Здесь \mathbf{b} – вектор измерений магнитометра; \mathbf{B}_x – вектор индукции магнитного поля Земли в связанной системе координат; $\boldsymbol{\mu}$ – вектор смещения поля магнитометра.

Смещение в измерениях магнитометра может быть вызвано магнитными полями бортовых приборов. В общем случае эти «возмущающие» поля могут быть непостоянными и зависеть, например, от величины токов с солнечных батарей, от степени заряда аккумуляторной батареи, от режима работы конкретного бортового прибора. Несмотря на то что разработчики космических аппаратов стараются уменьшить бортовые магнитные поля путем экранирования приборов, специальной разводки проводов, полностью их устранить не удастся.

Поэтому наряду с оценкой вращательного движения возникает задача оценки бортовых магнитных полей.

Используя модель магнитного поля Земли (как правило, используется модель *IGRF*) и зная местонахождение спутника в моменты времени (по модели орбитального движения), для которых доступна телеметрия, можно вычислить величину вектора индукции магнитного поля Земли в ОСК.

Для оценки вектора состояния спутника (кватернион поворота ССК относительно ОСК и вектор угловой скорости) можно воспользоваться уравнениями движения и проинтегрировать их с некоторыми начальными условиями до момента получения измерений. Рассмотрим уравнения движения

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J}\boldsymbol{\omega} = 3\omega_0^2 (\boldsymbol{\eta} \times \mathbb{J}\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{m} \times \mathbf{B}_x, \quad (14.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости ССК относительно ИСК, \mathbb{J} – тензор инерции, $\boldsymbol{\eta}$ – единичный вектор направления местной вертикали, записанный в ССК. В общем случае дипольный момент спутника или неизвестен, или известен с некоторой точностью, поэтому во время реконструкции движения он является параметром модели движения и подлежит оценке. Тензор инерции аппарата в случае сомнений разработчиков также может быть определяемой величиной.

В результате интегрирования уравнений движения для каждого момента t_k , к которому привязан кадр телеметрии, будет найден кватернион поворота Λ_{t_k} . Зная ориентацию спутника в пространстве в эти моменты времени, используя модель магнитного поля Земли, определяется вектор магнитного поля в ОСК \mathbf{B}_x . Тогда величина этого вектора в ССК вычисляется по формуле

$$\mathbf{B}_x(t_k) = \mathbb{A}(t_k) \mathbf{B}_x(t_k).$$

Чтобы получить прогнозируемый вектор измерений, необходимо воспользоваться моделью измерений магнитометра:

$$\mathbf{b}(t_k) = \mathbf{B}_x(t_k) + \boldsymbol{\mu}.$$

Далее, когда последовательность ожидаемых векторов измерения \mathbf{b}_{t_k} сформирована, можно составить функционал

$$\Phi = \sum_{k=1}^K (\mathbf{b}(t_k) - \tilde{\mathbf{b}}(t_k))^2, \quad (14.3)$$

где $\tilde{\mathbf{b}}_{t_k}$ – вектор измерения, взятый из кадра телеметрии, привязанного ко времени $t = t_k$, K – количество кадров телеметрии. Функционал Φ необходимо минимизировать по компонентам вектора начальных условий, вектора смещения нуля и вектора магнитного момента спутника:

$$\mathbf{f} = [\lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0), \lambda_3(t_0), \omega_1(t_0), \omega_2(t_0), \omega_3(t_0), \mu_1, \mu_2, \mu_3, m_1, m_2, m_3].$$

Для минимизации функционала (14.3) необходимо решить систему нелинейных уравнений

$$\partial\Phi/\partial f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где f_i – i -я компонента вектора параметров. Обычно эта система решается итерационным методом Ньютона по формуле

$$\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}_i - \mathbb{F}^{-1}(\mathbf{f}_i)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{f}_i),$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \partial\Phi/\partial f_i$, $\mathbb{F} = \partial\varphi_i/\partial f_j$ – якобиан. Итерационный процесс заканчивается, когда $|\mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i| < \varepsilon$, где ε – некоторая заданная величина, которая выбирается эмпирически. Решение задачи минимизации функционала может быть чувствительно к выбору начального вектора \mathbf{f}_0 .

Отдельной проблемой при реконструкции движения является предобработка телеметрии для «отсеивания» измерений с аномальными ошибками, которые в силу ряда причин (среди которых может быть просто ошибка во время передачи данных) сильно отличаются по величине по сравнению с остальными измерениями. Таким образом, перед решением задачи реконструкции необходимо сделать выборку измерений. Как правило, предположение о постоянности вектора смещения нуля магнитометра и вектора магнитного диполя спутника справедливо лишь на относительно небольших промежутках времени, поэтому выборки измерений соответствуют небольшим участкам (как правило, до витка) орбитального движения.

Следует отметить, что реконструкция углового движения спутника, оснащенного магнитной системой ориентации, не обязательно связана с обработкой измерений магнитометра. Например, для наноспутника *ТНС-0 №1* были доступны измерения токов с солнечных датчиков, и по этим данным удалось восстановить его угловое движение. Обработка измерений с этого спутника представлена в разделе 9.2.

15 Определение ориентации с помощью локальных алгоритмов

Equation Section (Next) Активное управление ориентацией микроспутников требует определения движения аппарата относительно центра масс в режиме реального времени. Соответствующие алгоритмы можно разделить на два типа – локальные, которые используют только текущие измерения и не используют модель ошибок измерений, и рекурсивные, использующие модель ошибок измерений. Для определения углового движения микроспутников наиболее популярным из локальных алгоритмов является алгоритм *TRIAD*, а из рекурсивных – алгоритмы на основе фильтра Калмана.

Задача определения ориентации спутника состоит в определении ортогональной матрицы направляющих косинусов \mathbb{A} , для которой

$$\mathbb{A}\mathbf{V}_i = \mathbf{W}_i,$$

где $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ – набор единичных векторов или n направлений (например, на Землю, Солнце, звезду, геомагнитное поле); $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n$ – те же измеряемые векторы-направления на те же объекты в связанной системе координат. Так как измерения подвержены ошибкам, решения данной задачи в общем случае не существует в силу несовместности системы уравнений. Однако имеется несколько способов разрешения этой проблемы, два из которых следующие: детерминированный метод и оптимальный в смысле минимизации некоторого функционала.

Детерминированный метод (алгоритм *TRIAD*) позволяет определить ориентацию по первым измерениям, для которых решение существует, то есть система уравнений совместна. Алгоритм отличается простотой, поэтому является самым популярным методом определения ориентации спутников. Известно аналитическое выражения для вычисления матрицы ковариаций, позволяющее при ограничениях не вычислять множество частных производных, усложняющих вычисления.

Основной недостаток метода *TRIAD* состоит в том, что он восстанавливает матрицу ориентации всего по двум наблюдениям. Этого недостатка лишен оптимальный метод *QUEST*, вычисляющий лучшую оценку, основанную на минимизации функции потерь, используя все множество доступных измерений. Однако этот алгоритм работает

медленнее, чем *TRIAD*. Среди функций потерь, подходящих для решения поставленной задачи, наиболее известна функция, предложенная G. Wahba [124],

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\mathbf{W}_i - \mathbb{A} \mathbf{V}_i|^2,$$

где n – количество измерений. Преимущество использования этой функции состоит в возможности сведения задачи к кватернионам, что значительно упрощает решение проблемы. В свою очередь, это позволяет свести искомую задачу к нахождению собственного числа и собственного вектора некоторой матрицы. Более того, существует схема, которая позволяет вычислять кватернион, соответствующий оптимальному решению, для произвольной точности без полного нахождения всех собственных чисел этой матрицы. В этом и заключается алгоритм метода *QUEST*.

15.1 Алгоритм *TRIAD*

Остановимся на описании наиболее популярного локального алгоритма *TRIAD*. Пусть даны два непараллельных единичных вектора \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 и соответствующие им измерения (тоже единичные векторы) \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 . Задача состоит в поиске ортогональной матрицы \mathbb{A} , удовлетворяющей условиям

$$\mathbb{A} \mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_1, \quad \mathbb{A} \mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_2. \quad (15.1)$$

Как правило, единичные векторы \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 определяются из моделей, реализованных на бортовом компьютере, например, модели направления на Солнце и направления вектора геомагнитного поля в орбитальной системе координат. Векторы же \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 являются измерениями датчиков в связанной со спутником системе координат, например, измерениями солнечного датчика и магнитометра.

Матрица \mathbb{A} переопределена уравнениями (15.1). Построим два ортонормированных базиса по следующим формулам:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2}{|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2|}, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)|},$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{W}_1, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2}{|\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2|}, \quad \mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{W}_1 \times (\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2)}{|\mathbf{W}_1 \times (\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2)|}.$$

Существует единственная ортогональная матрица \mathbb{A} , которая удовлетворяет уравнениям

$$\mathbb{A}\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i.$$

Она выражается формулой

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_i \mathbf{r}_i^T \quad (15.2)$$

Это и есть решение *TRIAD*. Для того чтобы матрица \mathbb{A} , определенная по формуле (15.2), удовлетворяла исходным уравнениям (15.1), необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2.$$

Заметим, что решение метода *TRIAD* несимметрично относительно индексов 1 и 2, так как часть информации, содержащаяся во втором векторе, отбрасывается. Следовательно, решение будет точнее, если пара $(\mathbf{W}_1, \mathbf{V}_1)$ будет обладать большей точностью по сравнению с парой $(\mathbf{W}_2, \mathbf{V}_2)$. Поэтому если в качестве векторов \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 используются измерения солнечного датчика и магнитометра соответственно, то, как правило, выбирают более точные измерения солнечного датчика для вычисления пары $(\mathbf{W}_1, \mathbf{V}_1)$.

15.2 Ковариационная матрица алгоритма *TRIAD*

Для расчета точности алгоритма *TRIAD* представляется удобным воспользоваться ковариационной матрицей, которая определяет эллипсоид ошибок определения углов ориентации [125]. Условно ковариационной матрицей угловой ориентации называется ковариационная матрица набора углов ориентации, параметризующих ориентацию. Вектор ошибок

$$\delta\boldsymbol{\theta} = (\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3)$$

определяется как набор углов, соответствующих малому повороту, который переводит истинную матрицу ориентации в измеренную. Связь между ошибкой в углах с малым изменением в матрице направляющих косинусов с точностью до первого порядка записывается следующим образом:

$$\delta\mathbb{A} = \mathbb{E} + \mathbb{W}_{\delta\boldsymbol{\theta}}, \quad (15.3)$$

Ошибка в матрице направляющих косинусов определяется как

$$\Delta\mathbb{A} = \hat{\mathbb{A}} - \mathbb{A}, \quad (15.4)$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ – оценка матрицы направляющих косинусов по измерениям, \mathbf{A} – истинное значение матрицы. Так как оценку матрицы ориентации можно представить как

$$\hat{\mathbf{A}} = \delta \mathbf{A} (\delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{A},$$

то, используя (15.3) и (15.4), получаем

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbb{W}_{\delta \boldsymbol{\theta}} \mathbf{A}.$$

Матрицы ковариации для углов ориентации и матрицы ориентации определяются по формулам

$$\mathbb{P}_{\theta\theta} = \langle \delta \boldsymbol{\theta} \delta \boldsymbol{\theta}^T \rangle, \quad \mathbb{P} = \langle \Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{A}^T \rangle,$$

где угловые скобки означают математическое ожидание. Связь между ковариационными матрицами записывается следующим образом:

$$\mathbb{P}_{\theta\theta} = (1/2 \operatorname{tr} \mathbb{P}) \mathbb{E} - \mathbb{P},$$

где tr обозначает операцию вычисления следа матрицы, \mathbb{E} – единичная матрица. Далее, можно показать, что $\mathbb{P} = \langle \delta \mathbf{M}_s \delta \mathbf{M}_s^T \rangle + \mathbf{A} \langle \delta \mathbf{M}_r \delta \mathbf{M}_r^T \rangle \mathbf{A}^T$, или

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_s + \mathbf{A} \mathbb{P}_r \mathbf{A}^T,$$

где $\mathbf{M}_s = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3]$, $\mathbf{M}_r = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$, $\mathbb{P}_s = \langle \delta \mathbf{M}_s \delta \mathbf{M}_s^T \rangle$, $\mathbb{P}_r = \langle \delta \mathbf{M}_r \delta \mathbf{M}_r^T \rangle$.

Так как векторы \mathbf{V}_m и \mathbf{W}_m нормированы на единицу, ошибки их определения в первом приближении ортогональны им, то есть

$$\delta \mathbf{W}_m \mathbf{W}_m = 0 \text{ и } \delta \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m = 0 \quad (m = 1, 2).$$

Таким образом, векторы $\delta \mathbf{W}_m$ и $\delta \mathbf{V}_m$ имеют две «степени свободы». Мы будем предполагать, что они имеют осесимметричное распределение по отношению к соответствующему единичному вектору. Также предположим, что разные векторы не коррелируют друг с другом

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{W}_m \delta \mathbf{W}_n^T \rangle &= \sigma_{\mathbf{W}_m}^2 \delta_{mn} (\mathbb{E} - \mathbf{W}_m \mathbf{W}_m^T), \\ \langle \delta \mathbf{V}_m \delta \mathbf{V}_n^T \rangle &= \sigma_{\mathbf{V}_m}^2 \delta_{mn} (\mathbb{E} - \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T), \\ \langle \delta \mathbf{V}_m \delta \mathbf{W}_n^T \rangle &= 0, \end{aligned}$$

где $\sigma_{\mathbf{X}}^2$ обозначает дисперсию компоненты соответствующего вектора \mathbf{X} вдоль нормали к $\langle \mathbf{X} \rangle$, δ_{mn} – символ Кронекера, $m, n = 1, 2$. Предположение об осесимметричном виде распределения, как правило, оказывается выполненным для датчиков направления.

Приведем, наконец, конечные формулы для расчета декартовой матрицы ковариации

$$\mathbb{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2 \mathbb{E} + \frac{\left[(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^T + \sigma_1^2 (\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2) (\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2^T + \mathbf{W}_2 \mathbf{W}_1^T) \right]}{|\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2|}.$$

Здесь $\sigma_1^2 = \sigma_{V_1}^2 + \sigma_{W_1}^2$, $\sigma_2^2 = \sigma_{V_2}^2 + \sigma_{W_2}^2$. Обратная к $\mathbb{P}_{\theta\theta}$ матрица может быть вычислена по формуле

$$\mathbb{P}_{\theta\theta}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2} (\mathbb{E} - \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^T) + \frac{1}{\sigma_2^2} \mathbf{s}_4 \mathbf{s}_4^T, \quad \mathbf{s}_4 = \frac{\mathbf{W}_2 \times (\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2)}{|\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2|}.$$

15.3 Определение ориентации микроспутника Чибис-М

На рис. 15.1 приведен график углов ориентации во время стабилизации микроспутника Чибис-М с помощью алгоритма TRIAD, а на рис. 15.2 – график оценки угловой скорости с помощью этого алгоритма. Микроспутник стабилизировался за 15 мин. При этом точность стабилизации с помощью грубого алгоритма составляет порядка 1° (σ). Точность же определения угловой скорости, которая вычисляется методом дифференцирования матрицы направляющих косинусов на двух соседних шагах, составляет 0.5 °/с.

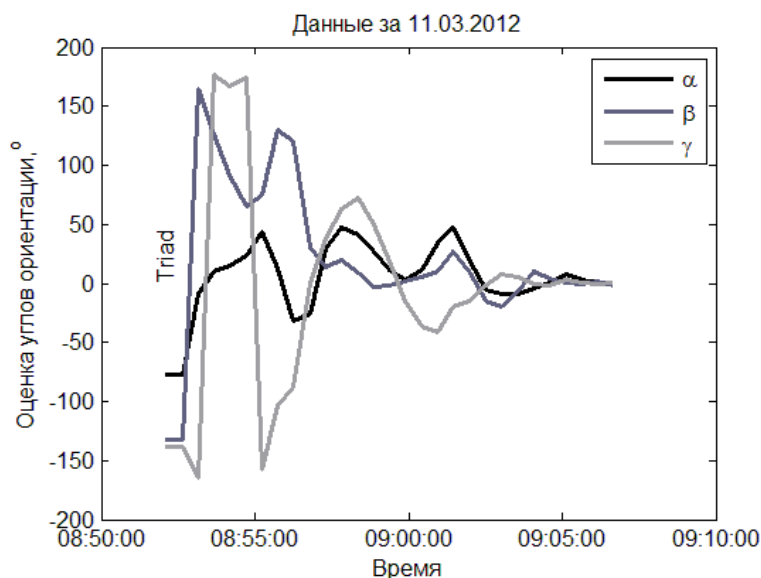


Рис. 15.1. Оценка углов ориентации во время стабилизации аппарата

При этом во время стабилизации из-за ошибок измерений возможны аномальные значения при определении угловой скорости и ориентации, вследствие чего микроспутник может начать двигаться

неадекватно. Такое аномальное значение было получено, например, в 8 часов 55 минут, как можно судить из рис. 15.2.

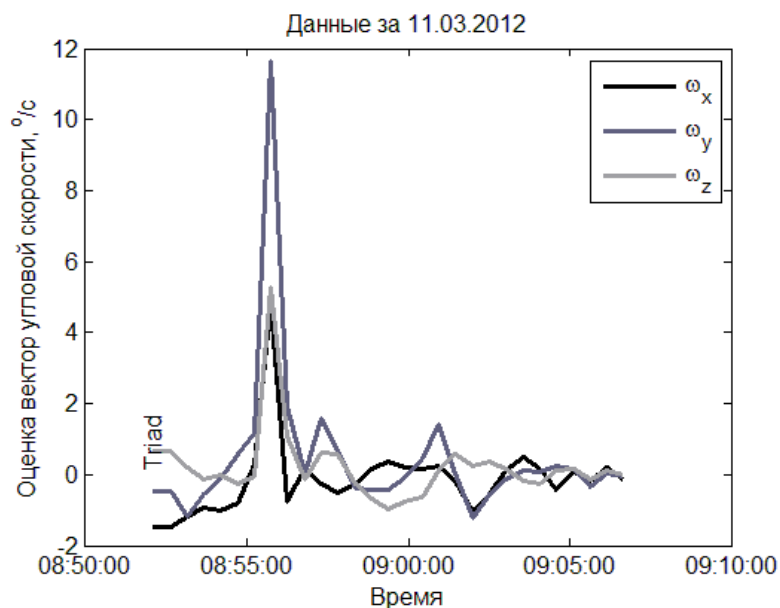


Рис. 15.2. Оценка угловой скорости во время стабилизации аппарата

На графике измерений угловой скорости с ДУСов (рис. 15.3) такой большой угловой скорости не наблюдается. Во время поддержания ориентации из-за ошибок измерений микроспутник «покачивается» с амплитудой порядка 1° и амплитудой угловой скорости порядка 0.5 %/с.

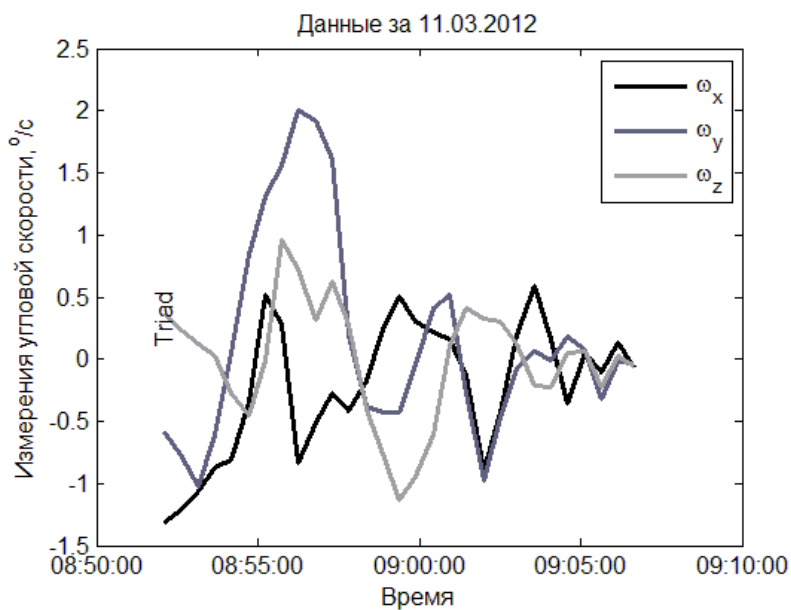


Рис. 15.3. Измерения угловой скорости во время стабилизации

16 Определение ориентации с помощью рекурсивных алгоритмов

Equation Section (Next) Рекурсивные алгоритмы оценивания параметров движения по типу фильтра Калмана [126,127] позволяют на основе измерений датчиков ориентации и модели движения аппарата получить наилучшую по среднеквадратическому критерию оценку вектора состояния относительно его центра масс.

Фильтр Калмана – последовательный рекурсивный алгоритм, использующий принятую модель динамической системы и измерения датчиков для получения оценки вектора состояния системы. Этот алгоритм находит применение в процессе управления многими сложными динамическими системами, например, непрерывными производственными процессами, самолетами, кораблями и космическими аппаратами. При управлении некоторыми динамическими системами необходимо полностью знать ее фазовое состояние в каждый момент времени. Но прямое измерение всех переменных, которыми необходимо управлять, не всегда возможно. В этих случаях фильтр Калмана является тем средством, которое позволяет восстановить недостающую информацию посредством имеющихся зашумленных косвенных измерений [128].

Фильтр Калмана, несмотря на ограничения по бортовым вычислительным мощностям, широко используется на малогабаритных космических аппаратах. В качестве примера можно привести португальский микроспутник *PoSAT-1* [129]: фильтр строится на измерениях солнечного датчика, звездного датчика и магнитометра. Некоторые миссии используют фильтр, основанный только на измерениях магнитометра [130]. В работах [131,132] также магнитометр рассматривается как единственный источник измерений для определения движения относительно центра масс. Рассмотрим различные варианты построения фильтра Калмана с использованием измерений магнитометра.

16.1 Принцип работы фильтра Калмана

В случае если измерения поступают дискретно в некоторые моменты времени t_k , то для этих моментов времени необходимо сделать оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(t_k)$. Дискретный фильтр Калмана работает по системе прогноз-коррекция [126,127]. Пусть на некотором

шаге $k-1$ известна оценка $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ и ковариационная матрица ошибки \mathbb{P}_{k-1}^+ . Требуется найти оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. Для этого на этапе прогноза путем интегрирования модели движения вычисляется априорная оценка $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, а на этапе коррекции с помощью обработки вектора измерений \mathbf{z}_k вычисляется апостериорная оценка $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. Ковариационная матрица ошибок вектора состояния \mathbb{P}_k^- прогнозируется с помощью дискретного уравнения Риккати. После получения измерений вычисляется апостериорная матрица \mathbb{P}_k^+ .

Фильтр Калмана находит наилучшую по среднеквадратическому критерию оценку вектора состояния для линейных систем, но может быть построен и в случае, если уравнения движения и уравнения измерений являются нелинейными функциями времени и вектора состояния,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(t), \quad (16.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t), \quad (16.2)$$

где $\mathbf{w}(t)$ – нормально распределенная ошибка модели движения с ковариационной матрицей \mathbb{Q} , $\mathbf{v}(t)$ – нормально распределенная ошибка измерений с ковариационной матрицей \mathbb{R} .

Для построения фильтра функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ представляются в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности оценки текущего вектора состояния. После этого удерживаются только линейные члены разложения. Матрица динамики системы и матрица модели измерений вычисляются как

$$\mathbb{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}, \quad \mathbb{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}. \quad (16.3)$$

Для расширенного фильтра Калмана при дискретно поступающих измерениях вектор состояния на этапе прогноза вычисляется путем интегрирования нелинейных уравнений движения (16.1), и на этапе коррекции используется нелинейная модель измерений (16.2) [133]. Этап прогноза:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, t) dt, \quad (16.4)$$

$$\mathbb{P}_k^- = \mathbb{U}_k \mathbb{P}_{k-1}^+ \mathbb{U}_k^T + \mathbb{Q}_k.$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_k &= \mathbb{P}_k^- \mathbb{H}_k^T \left(\mathbb{H}_k \mathbb{P}_k^- \mathbb{H}_k^T + \mathbb{R}_k \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbb{K}_k \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{h} \left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t_k \right) \right], \\ \mathbb{P}_k^+ &= \left[\mathbb{E} - \mathbb{K}_k \mathbb{H}_k \right] \mathbb{P}_k^-, \end{aligned} \quad (16.5)$$

где \mathbb{U}_k – матрица перехода из состояния $k-1$ в состояние k , \mathbb{E} – единичная матрица, \mathbb{K} – весовая матрица.

16.2 Фильтр Калмана с использованием измерений солнечного датчика и магнитометра

Динамическая модель движения микроспутника, используемая фильтром Калмана и учитывающая гравитационный и управляющий моменты со стороны маховиков, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 3\omega_0^2 (\boldsymbol{\eta} \times \mathbb{J}\boldsymbol{\eta}) + k_\omega \boldsymbol{\Omega} + k_a \mathbf{q}. \quad (16.6)$$

Здесь \mathbf{K} – суммарный кинетический момент спутника и маховиков, реализуется ляпуновское управление (использующее относительную угловую скорость и векторную часть кватерниона). Для фильтра, основанного на измерениях солнечного датчика и магнитометра, в качестве вектора оцениваемых величин возьмем векторную часть кватерниона перехода из ОСК в ССК и угловую скорость ССК относительно ИСК – $\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}]$. Теперь линеаризуем динамические и кинематические уравнения движения в окрестности текущего положения. Запишем уравнения (16.6), (1.2) в виде

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbb{F}(t) \delta \mathbf{x}(t),$$

где $\delta \mathbf{x}(t)$ – малое приращение вектора состояния, а $\mathbb{F}(t)$ – линеаризованная матрица уравнений движения в окрестности состояния $\mathbf{x}(t)$.

Тогда получим

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{W}_\omega(t) & 1/2 \mathbb{E} \\ \mathbb{J}^{-1} (6\omega_0^2 \mathbb{F}_g(t) - \mathbb{E}k_a) & -\mathbb{J}^{-1}k_\omega \end{pmatrix}, \quad (16.7)$$

где \mathbb{F}_g – матрица линеаризованного гравитационного момента.

Вектор измерений состоит из вектора магнитного поля и вектора направления на Солнце в связанной системе координат:

$$\mathbf{z}_k = [\mathbf{b}_k, \mathbf{s}_k].$$

Вектор \mathbf{h} из (16.2) можно записать в виде

$$\mathbf{h} = \left[\left(\mathbb{A}(\mathbf{q}_k^-) \mathbf{B}_x \right), \left(\mathbb{A}(\mathbf{q}_k^-) \mathbf{S}_x \right) \right],$$

где \mathbb{A} – матрица перехода из орбитальной системы координат в связанную с микроспутником систему координат, записанная через оценку кватерниона \mathbf{q}_k^- , \mathbf{B}_x и \mathbf{S}_x – векторы магнитного поля и направления на Солнце, записанные в ОСК.

Линеаризованная модель измерений записывается следующим образом:

$$\delta \mathbf{z}(t) = \mathbb{H}(t) \delta \mathbf{x}(t).$$

Здесь $\delta \mathbf{z}(t)$ – малое изменение измерений при малом изменении вектора состояния $\delta \mathbf{x}(t)$ в момент времени t . Матрица чувствительности \mathbb{H} имеет вид

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -2\mathbb{W}_{\mathbf{B}_x} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -2\mathbb{W}_{\mathbf{S}_x} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (16.8)$$

Влияние неучтенных в модели движения возмущений

Рассмотрим матрицу шумов системы вида

$$\mathbb{Q} = \text{diag} \left(q_\lambda^2, q_\lambda^2, q_\lambda^2, q_\omega^2, q_\omega^2, q_\omega^2 \right),$$

то есть будем предполагать, что шумы уравнений движения не коррелируют между собой и одинаковы для всех компонент векторной части кватерниона, среднеквадратическая ошибка которых равна q_λ , и для компонент вектора угловой скорости со среднеквадратической ошибкой q_ω . Для вычисления оценки точности определения ориентации по элементам матрицы \mathbb{P} будем рассматривать диагональные члены, соответствующие ошибке определения кватернионов. Среднеквадратическую ошибку определения компонент кватерниона оценим как наихудшую – $\sigma_\lambda = \sqrt{\max(p_{11}, p_{22}, p_{33})}$, где p_{ii} – диагональные элементы матрицы \mathbb{P} . Аналогично среднеквадратическую ошибку определения угловой скорости оценим как $\sigma_\omega = \sqrt{\max(p_{44}, p_{55}, p_{66})}$.

Рассмотрим матрицу шумов измерений вида

$$\mathbb{R} = \text{diag} \left(r_b^2, r_b^2, r_b^2, r_s^2, r_s^2, r_s^2 \right),$$

где r_b и r_s – среднеквадратические ошибки измерения направления геомагнитного поля и на Солнце. Ошибку измерений магнитометра будем записывать в терминах ошибки определения направления магнитного поля. Рассмотрим снова спутник *Чибис-М*. Заметим, что используемая на бортовом компьютере аналитическая модель геомагнитного поля *IGRF* отличается от реального геомагнитного поля в среднем на величину около 200 нТ на орбите Международной космической станции, как показано в работе [134]. Тогда, чтобы учесть эту ошибку модели, будем считать, что магнитометр измеряет с ошибкой 250 нТ, равной сумме среднеквадратических ошибок измерений самого магнитометра (50 нТ) и ошибок модели *IGRF*. Учитывая, что модуль напряженности геомагнитного поля на орбите высотой 500 км примерно равен 40000 нТ, можно оценить среднеквадратическую ошибку определения направления геомагнитного поля как $r_b = 0.35^\circ$. Ошибка определения направления на Солнце равна $r_s = 0.1^\circ$. Частота измерений составляет 5 Гц. Коэффициенты ляпуновского управления равны $k_a = 0.00053 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $k_\omega = 0.07 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Теперь рассмотрим, как зависит точность определения движения от возмущений, действующих на микроспутник и неучтенных в модели движения, используемой фильтром Калмана. Возмущения на микроспутник действуют преимущественно со стороны приборов, создающих магнитный момент, который, взаимодействуя с магнитным полем Земли, порождает механический момент. Также возмущения возникают за счет ошибок исполнения управляющих команд, вызванных дискретизацией, неточностью знания управляющего момента, а также ошибок управления, вызванных ошибкой знания вектора состояния. Будем рассматривать уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbb{U}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\chi}_k, \\ \boldsymbol{\chi}_{k+1} &= \mathbb{E} \boldsymbol{\chi}_k + \boldsymbol{\theta}_k, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – случайная составляющая возмущения. Пусть вектор возмущений $\boldsymbol{\chi}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\chi} = [d\Delta t^2 / 2, d\Delta t^2 / 2, d\Delta t^2 / 2, d\Delta t, d\Delta t, d\Delta t].$$

Здесь d – константа, определяющая величину возмущения. В качестве примера рассмотрим, как изменится точность определения движения при конкретном значении возмущения. Пусть $d = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$ (что

соответствует возмущающему моменту $8 \cdot 10^{-7}$ Н·м для микроспутника *Чибис-М*), а дисперсия случайной составляющей возмущений равна

$$M[\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T] = \text{diag}(10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}).$$

Рассмотрим вначале случай, когда вектор магнитного поля перпендикулярен направлению на Солнце, $\mathbf{V}_X \perp \mathbf{S}_X$. На рис. 16.1 и рис. 16.2 изображены графики точности определения ориентации и угловой скорости в зависимости от параметров q_λ и q_ω , которые уже не являются характеристиками шумов уравнений движения. Ниже черной линии находится область параметров, при которых движение можно считать квазистационарным (изменения матрицы перехода и матрицы чувствительности за шаг по времени пренебрежимо малы и $\mathbb{U}_k = \mathbb{U} \approx \text{const}$, $\mathbb{H}_k = \mathbb{H} \approx \text{const}$) [135]. Наилучшая точность определения движения достигается на границе области квазистационарности при параметрах $q_\lambda = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $q_\omega = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-2}$, точность определения ориентации при этом составляет $\sigma_\varphi = 0.09^\circ$, точность определения угловой скорости $\sigma_\omega = 0.007^\circ/\text{с}$.

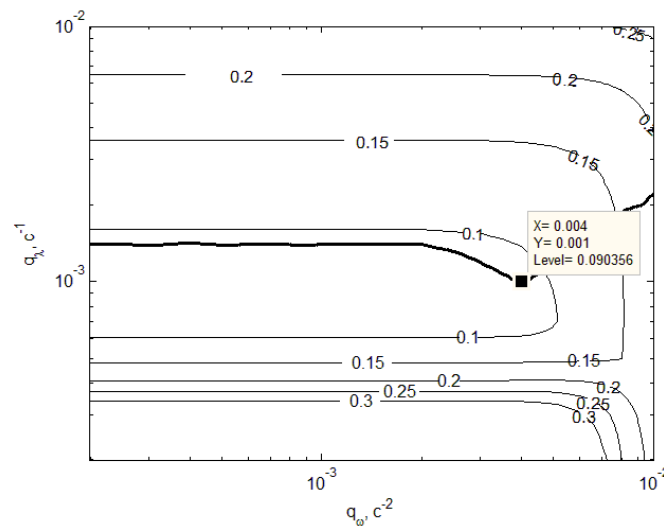


Рис. 16.1. Зависимость точности определения ориентации ($^\circ$) от параметров q_λ и q_ω при возмущающем моменте $8 \cdot 10^{-7}$ Н·м

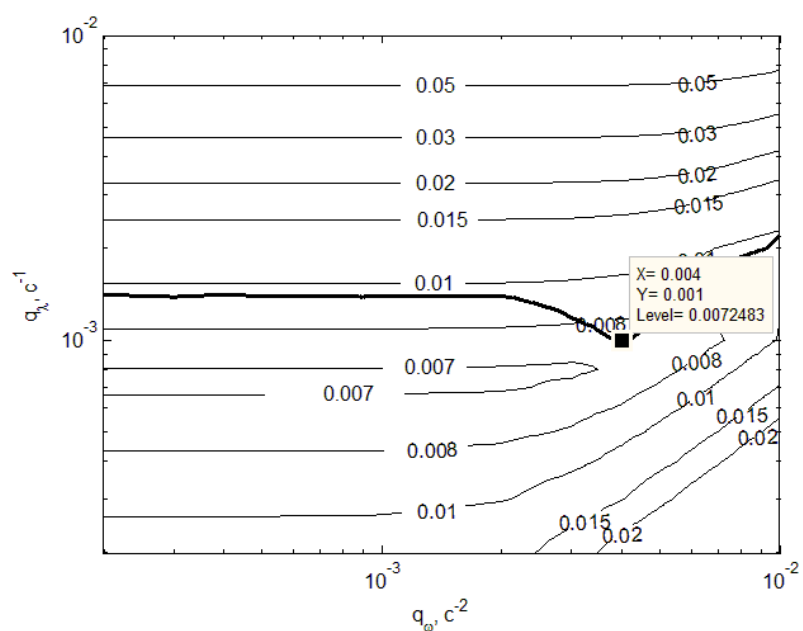


Рис. 16.2. Зависимость точности определения угловой скорости ($^{\circ}/c$) от параметров q_{λ} и q_{ω} при возмущающем моменте $8 \cdot 10^{-7}$ Н·м

На рис. 16.3 и рис. 16.4 приведены графики зависимости наилучшей точности определения движения в зависимости от возмущающего ускорения при $\mathbf{V}_x \perp \mathbf{S}_x$.

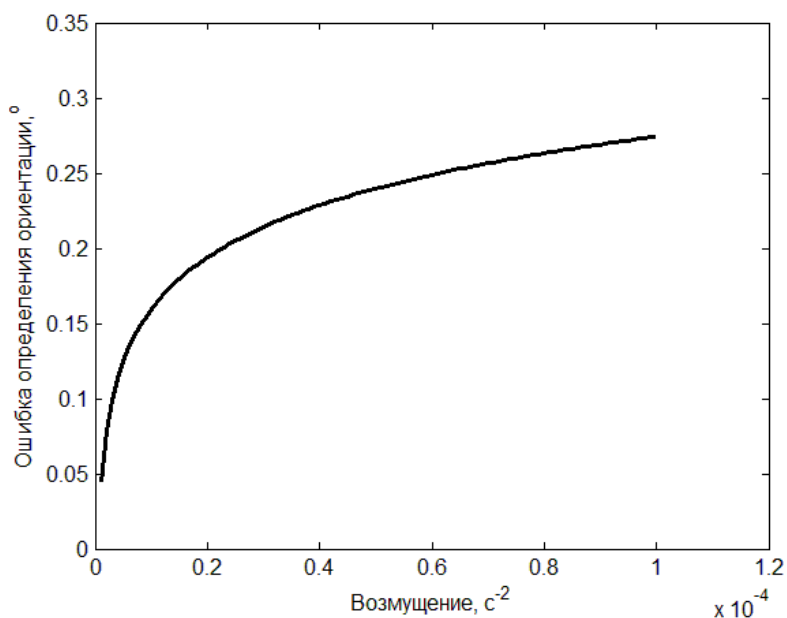


Рис. 16.3. Зависимость наилучшей точности определения ориентации в зависимости от возмущающего ускорения при $\mathbf{V}_x \perp \mathbf{S}_x$

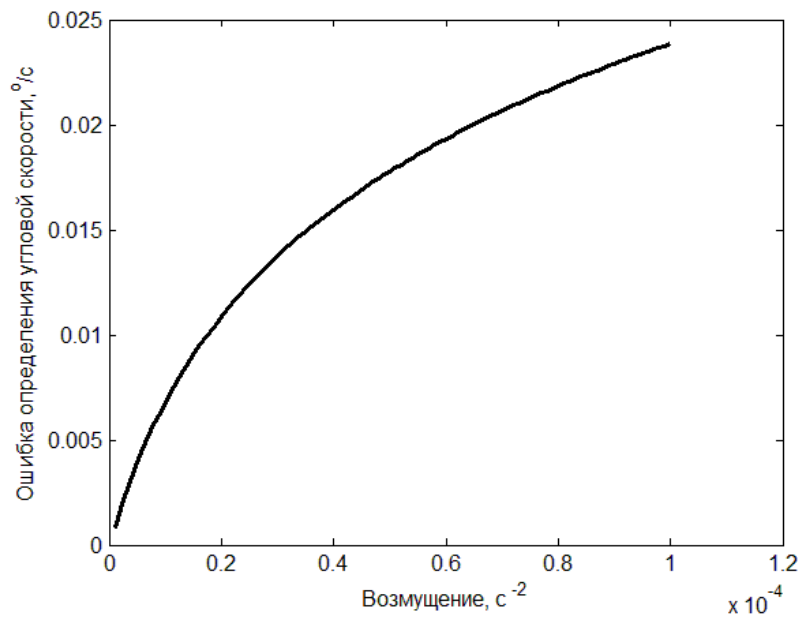


Рис. 16.4. Зависимость наилучшей точности определения угловой скорости в зависимости от возмущающего ускорения при $\mathbf{V}_x \perp \mathbf{S}_x$

Влияние угла между измеряемыми векторами

Обратим особое внимание на то, что прежде рассматривалась точность определения движения в случае, когда вектор направления геомагнитного поля и вектор направления на Солнце перпендикулярны. Точность сильно зависит от угла между этими векторами и падает по мере того, как векторы \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x становятся параллельными друг другу. В предельном случае, когда эти векторы коллинеарны, матрица чувствительности вырождается, пропадает наблюдаемость, а ошибка определения движения стремится к бесконечности. Это все следствия того факта, что по измерению одного направления в пространстве невозможно определить трехосную ориентацию космического аппарата.

Таким образом, возникает задача оценки точности определения движения в зависимости от угла между \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x . Она решается следующим образом. Варьируется величина угла между \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x и при заданном уровне возмущения вычисляется ошибка определения движения по методике, изложенной выше. Рассмотрим в качестве примера зависимость определения движения от угла при возмущении $d = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$ и при параметрах настройки $q_\lambda = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $q_\omega = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-2}$, которые обеспечивают наилучшую точность при этом возмущении, как показано выше.

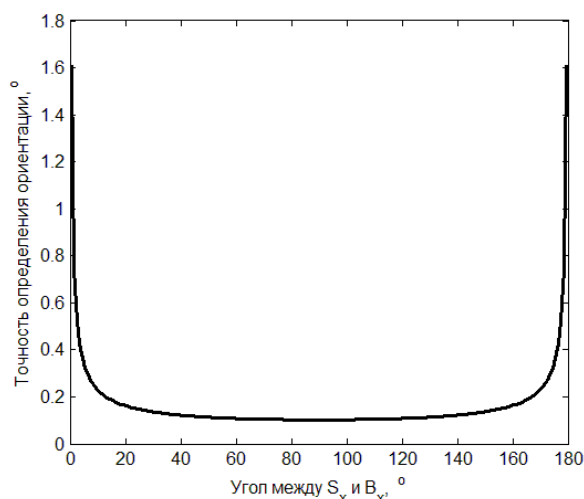


Рис. 16.5. Зависимость точности определения ориентации от угла между B_x и S_x

На рис. 16.5 и рис. 16.6 приведены графики зависимости определения ориентации и угловой скорости от угла между B_x и S_x . Из графиков видно, что при углах меньше 10° и больше 170° точность определения движения резко ухудшается. В диапазонах этих углов лучше не использовать оценки вектора состояния, получаемые с помощью фильтра Калмана, а переключаться, например, в режим одноосной ориентации солнечными батареями на Солнце, в котором используются измерения только солнечных датчиков.

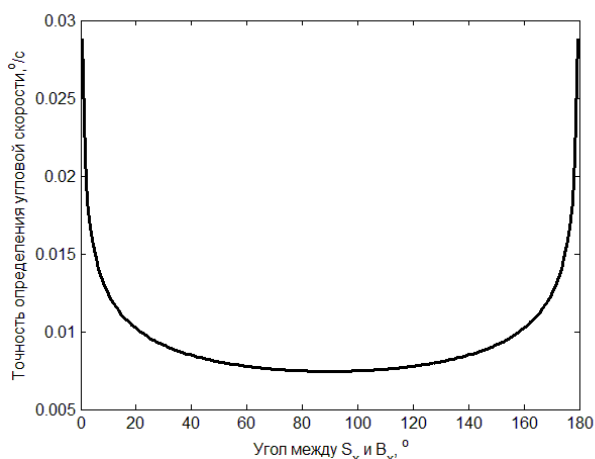


Рис. 16.6. Зависимость точности определения угловой скорости от угла между B_x и S_x

16.3 Реализация фильтра Калмана на борту микроспутника Чибис-М

Рассмотрим летные данные с микроспутника *Чибис-М*, на котором был реализован алгоритм на основе фильтра Калмана с использо-

ванием измерений магнитометра и солнечного датчика. После того как система ориентации с помощью алгоритма *TRIAD* приводит спутник в некоторую окрестность орбитальной ориентации, включается рекурсивный алгоритм определения ориентации на основе фильтра Калмана. На солнечной стороне орбиты работает фильтр Калмана, который использует измерения солнечных датчиков и магнитометра. После включения алгоритма на основе фильтра Калмана фильтр начинает сходиться – ковариационная матрица ошибок уменьшается, оценки вектора состояния приближаются к истинным значениям. Оценки фильтра Калмана поступают на вход алгоритма управления маховиками, и система стабилизации приводит микроспутник в орбитальную ориентацию. На рис. 16.7 представлен график ориентации во время стабилизации, из которого следует, что алгоритм стабилизирует спутник примерно за 10 минут. Точность ориентации после стабилизации составляет $\sigma_\varphi = 0.1 - 0.2^\circ$. На рис. 16.8 представлен график угловой скорости во время стабилизации. Точность определения угловой скорости составляет $\sigma_\omega = 0.01^\circ/\text{с}$.

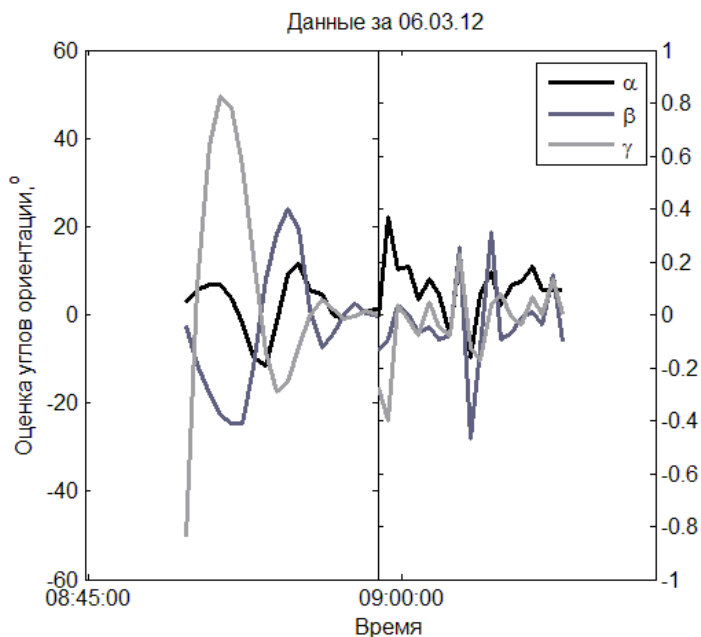


Рис. 16.7. Оценка углов ориентации во время стабилизации аппарата

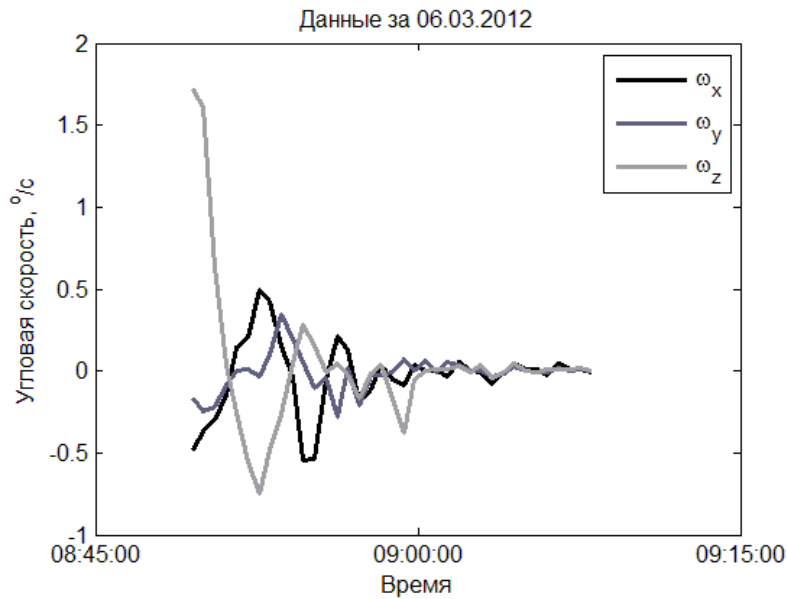


Рис. 16.8. Оценка угловой скорости во время стабилизации аппарата

В приведенном выше примере угол между направлением геомагнитного поля и направлением на Солнце составляет примерно 80° . Рассмотрим, что происходит с точностью определения движения при значениях угла между \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x , когда векторы близки коллинеарным. На рис. 16.9 представлен пример ухудшения точности определения ориентации, когда угол между \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x стал приближаться к 10° . Точность определения ориентации, как видно из графика, стала близка к $\sigma_\varphi = 1^\circ$, что несколько больше значения, которое можно получить из рис. 16.5. Однако теоретические оценки являются оценкой снизу и строятся из предположения квазистационарности, то есть медленного изменения матрицы динамики системы и матрицы измерений. Но когда эти векторы коллинеарны, время релаксации уравнений ошибок увеличивается, а значит, требуется большее время для сходимости. По всей видимости, в рассмотренном примере оценки не успели сойтись в точке с плохой точностью, угол между \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x увеличился, и оценки сошлись при этом угле достаточно быстро.

На рис. 16.10 представлен пример, когда угол между \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x стал равен почти 180° и оценки фильтра Калмана разошлись. В рассматриваемом примере проходила испытания автоматическая система переключения между алгоритмами управления, которая не учитывает случаи, когда требуется при коллинеарности векторов \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x переключиться в другой режим. Моменты, когда фильтр имеет плохую

точность, вычислялись заранее в центре управления и с учетом этого на борт закладывалась программа переключения режимов управления и определения ориентации.

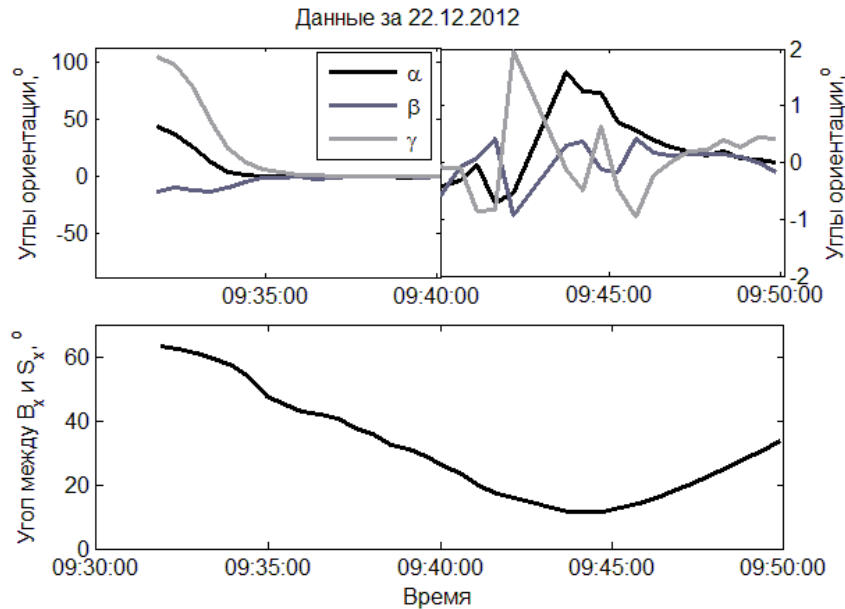


Рис. 16.9. Ухудшение точности оценок ориентации, когда \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x близки к коллинеарным

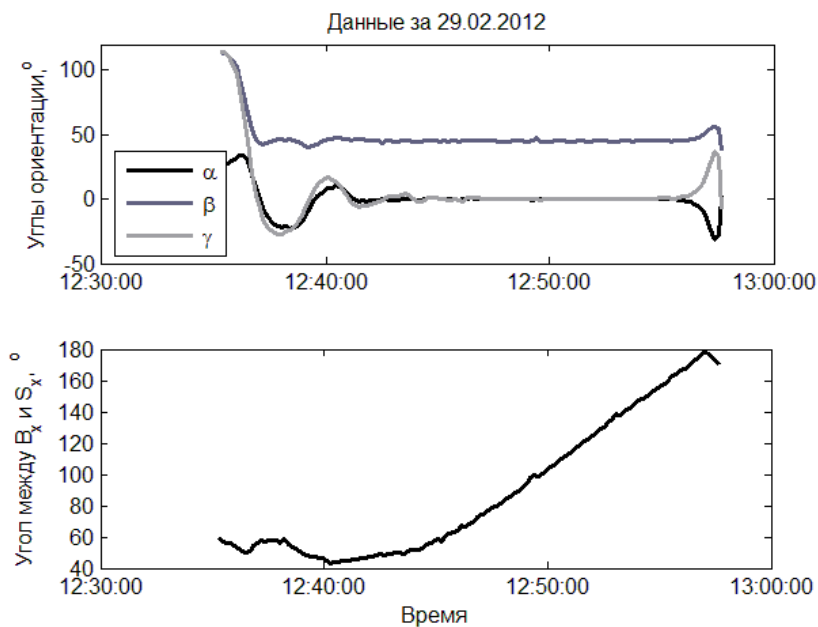


Рис. 16.10. Расхождение оценок ориентации, когда \mathbf{V}_x и \mathbf{S}_x коллинеарны

16.4 Фильтр Калмана с использованием измерений магнитометра

Задача определения трехосного углового движения с использованием измерений только магнитометра широко исследуется в лите-

ратуре. М.Л. Psiaki одним из первых предложил использовать расширенный фильтр Калмана для решения этой проблемы [132]. Кроме векторной части кватерниона и вектора угловой скорости, авторы оценивают текущий вектор возмущений для гравитационно стабилизированного спутника. Часто наряду с угловым движением оценивается и текущее орбитальное движение (в качестве примера можно привести [136]), однако такие алгоритмы требуют больших вычислительных ресурсов, зачастую недоступных для бортовых компьютеров малых спутников. Рассмотрим применение расширенного фильтра Калмана с минимальным вектором состояния, состоящим из векторной части кватерниона и вектора угловой скорости, для спутника, стабилизирующегося с помощью только магнитных катушек.

Построим фильтр Калмана для оценки кватерниона ориентации относительно ОСК и вектора угловой скорости по измерениям магнитометра. Примем вектор состояния

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}].$$

Запишем линеаризованные уравнения в виде

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbb{F}(t) \delta \mathbf{x}(t),$$

где матрица динамики \mathbb{F} записывается как

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \mathbb{W}_{\boldsymbol{\omega}} & 1/2 \mathbb{E} \\ \mathbb{J}^{-1} (6\omega_0^2 \mathbb{F}_g + 2\mathbb{W}_{\mathbf{m}} \mathbb{W}_{\mathbf{B}_x}) & \mathbb{J}^{-1} \mathbb{F}_{sup} \end{pmatrix}, \quad (16.9)$$

$\mathbb{W}_{\mathbf{m}}$ и $\mathbb{W}_{\mathbf{B}_x}$ – кососимметрические матрицы дипольного момента и оценки вектора магнитного поля в связанной системе координат, полученной с помощью модели поля.

Рассмотрим модель измерений магнитометра

$$\mathbf{z} = \mathbb{A} \mathbf{B}_x + \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{B}}, \quad (16.10)$$

где $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{B}}$ – нормально распределенный вектор магнитного поля с нулевым математическим ожиданием. Линеаризуем модель измерений (16.10), тогда матрица измерений есть

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} -2\mathbb{W}_{\mathbf{B}_x} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (16.11)$$

Промоделируем работу алгоритма определения углового движения при управлении ориентацией с помощью магнитных катушек. Для работы алгоритма необходимо, чтобы были заданы ковариацион-

ная матрица ошибок измерений \mathbb{R} , матрица ошибок модели \mathbb{Q} и матрица ошибок начальной оценки вектора состояния \mathbb{P}_0 .

Погрешность измерений магнитометра задается на уровне $\sigma_{изм}=100$ нТл. Однако известно, что ошибка модели магнитного поля Земли даже при использовании модели *IGRF* составляет около 200 нТл, поэтому разумно принять $\sigma_{изм}=300$ нТл. Матрица ошибок измерений равна

$$\mathbb{R} = \text{diag}(\sigma_{изм}^2, \sigma_{изм}^2, \sigma_{изм}^2).$$

На спутник действует возмущающий момент неизвестной природы на уровне $D = 5 \cdot 10^{-4}$ Н·м. Предположим сначала, что возмущающий момент распределен по нормальному закону. Тогда на спутник будет действовать возмущение вида

$$\sigma_{\omega} = I^{-1} \cdot D \cdot \Delta t, \quad (16.12)$$

где I – наименьший момент инерции, Δt – время между получениями измерений. Для кинематических уравнений возникает ошибка вида

$$\sigma_q = I^{-1} \cdot D \cdot \Delta t^2 / 2.$$

Предполагая, что возмущения не коррелированы, запишем матрицу ошибок модели движения

$$\mathbb{Q} = \text{diag}(\sigma_q^2, \sigma_q^2, \sigma_q^2, \sigma_{\omega}^2, \sigma_{\omega}^2, \sigma_{\omega}^2). \quad (16.13)$$

В качестве начальной оценки векторной части можно взять нулевой вектор. Предполагая, что ошибка максимальна, примем $\sigma_{q_0} = \pi / 2$. Так как вектор угловой скорости в начальный момент неизвестен, возьмем начальную оценку $\mathbf{\Omega}(0) = (0, 0, 0)$. Предположим, что ошибка в знании вектора угловой скорости в начальный момент составляет $\sigma_{\omega_0} = 10$ °/с. Зададим начальное значение матрицы ошибок \mathbb{P}_0 следующим образом:

$$\mathbb{P}_0 = (\sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2).$$

Проведем моделирование работы алгоритма определения углового движения. Особенность моделирования заключается в том, что магнитные катушки создают поле, которое вносит искажения в измеряемое магнитометром геомагнитное поле. Возможны два варианта разрешения этой проблемы. Либо измерения магнитометра проходят наземную калибровку при включенных катушках и тогда можно одновременно определять угловое движение и управлять спутником, ли-

бо определение углового движения и управление разносятся во времени. Примем второй, наиболее распространенный, вариант для моделирования управляемого движения. На интервале времени, когда катушки выключены, будет производиться оценка углового движения, управление будет использовать эту оценку для создания магнитного момента на интервале управления. Пусть интервал управления составляет 5 сек, а интервал определения – 1 сек при частоте съема измерений 1 Гц, т.е. одно измерение на интервале измерения. Пусть в начальный момент времени спутник вращается со скоростью $1^\circ/\text{с}$. Сходимость фильтра Калмана неразрывно связана с процессом стабилизации аппарата. На рис. 16.11 представлен график стабилизации спутника в ОСК под управлением магнитных катушек (γ_{ii} – углы между одноименными осями связанной и орбитальной систем). Из графика видно, что спутник стабилизировался за время около 5 часов. На рис. 16.12 представлен график ошибки оценки углов, а на рис. 16.13 – график ошибки оценки угловой скорости. Оценки фильтра Калмана сошлись примерно за 4 часа работы, причем по мере стабилизации точность значительно улучшилась и составила около $\sigma = 0.2^\circ$ по углу и $\sigma = 7 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{с}$ по скорости.

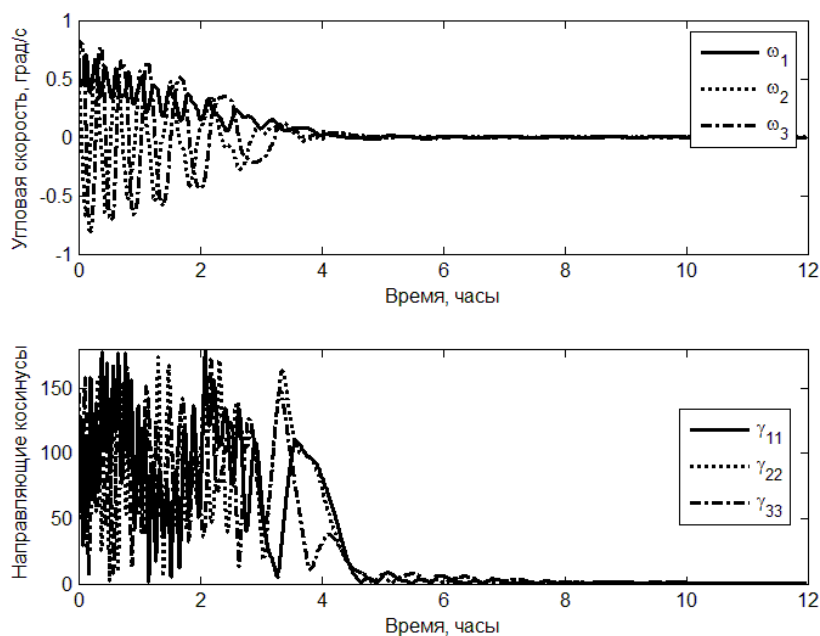


Рис. 16.11. Движение спутника во время стабилизации

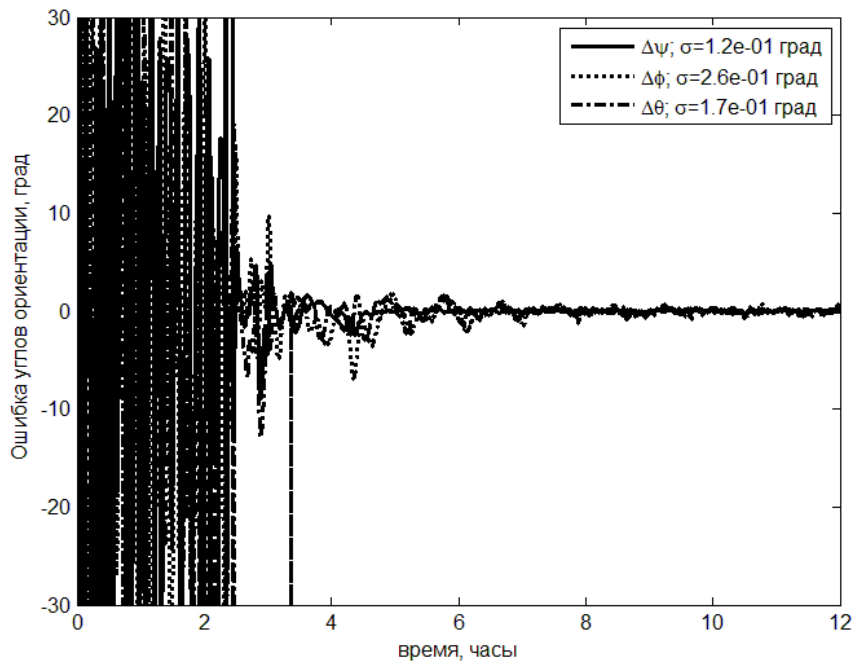


Рис. 16.12. Ошибка определения углов ориентации

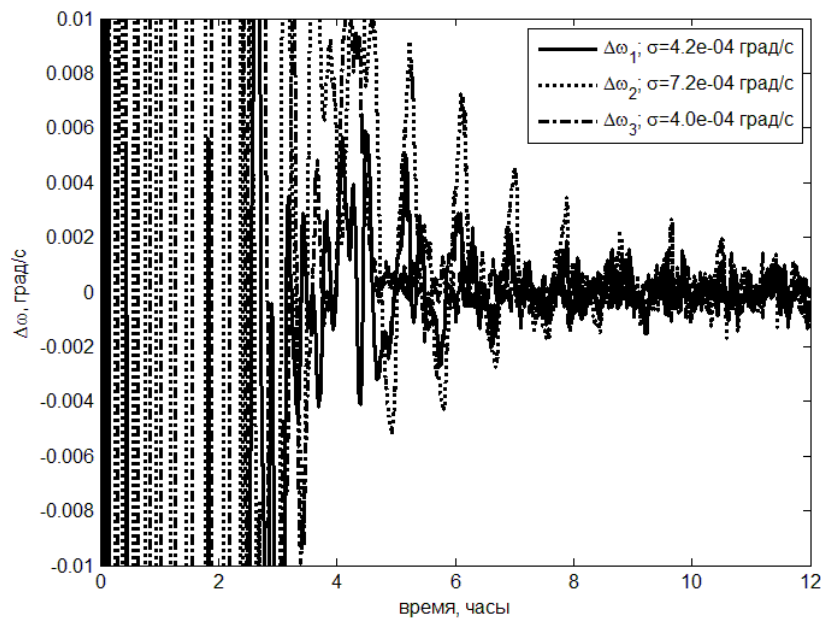


Рис. 16.13. Ошибка определения угловой скорости

Предположим теперь, что возмущающий момент $D = 5 \cdot 10^{-4}$ Н·м не распределен по нормальному закону, но имеет постоянную величину этого порядка. Проведем моделирование работы фильтра Калмана с прежними параметрами. На рис. 16.14 представлен график ошибки оценки фильтра Калмана по углу, на рис. 16.15 – по угловой скорости. На рисунках видно, что время сходимости фильтра увеличилось

до 7 часов, но точность определения движения после сходимости уменьшилась незначительно и составляет $\sigma = 0.3^\circ$ по углу и $\sigma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ/\text{с}$ по угловой скорости.

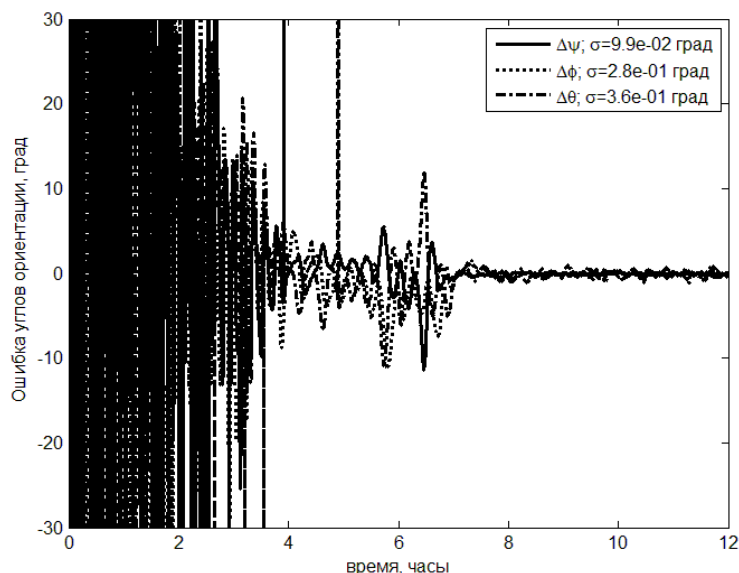


Рис. 16.14. Ошибка оценки углов при постоянном возмущении

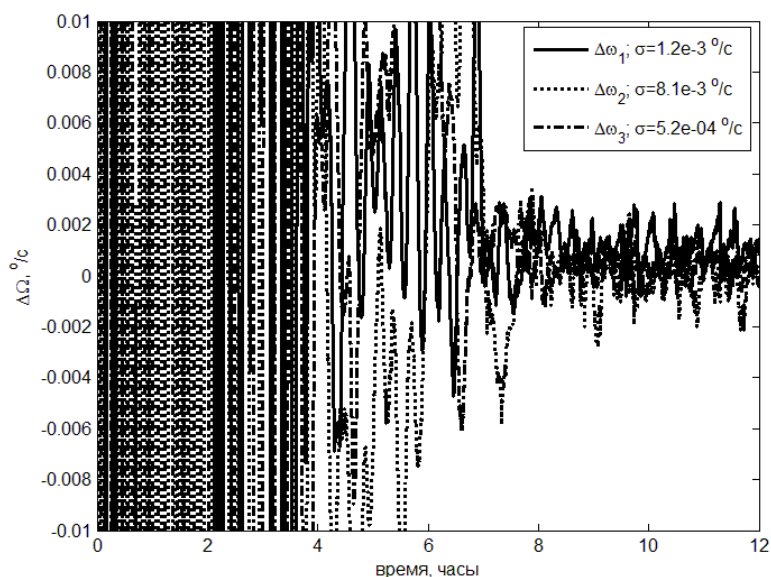


Рис. 16.15. Ошибка оценки угловой скорости при постоянном возмущении

На рис. 16.16 и рис. 16.17 представлены графики точности трехосной стабилизации с использованием магнитных катушек и графики точности определения углового движения с использованием магнитометра. Верхние графики соответствуют моделированию без возмущений, а нижние – с возмущающим моментом порядка $D = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

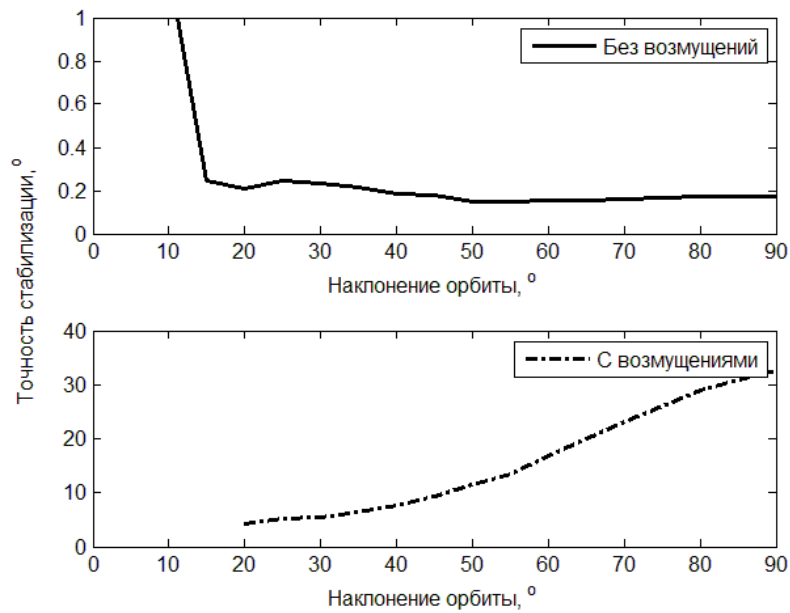


Рис. 16.16. Точность трехосной стабилизации в зависимости от наклона орбиты

Из графиков видно, что трехосная стабилизация с использованием катушек и определением ориентации по измерениям только магнитометра может работать в том числе и на орбитах с небольшим наклоном вплоть до 20° .

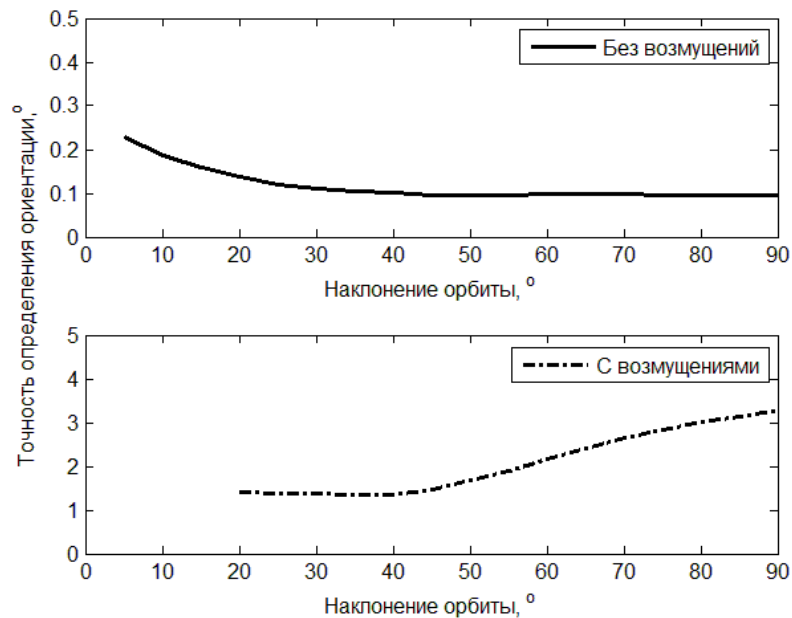


Рис. 16.17. Точность определения углового движения в зависимости от наклона

Приложение I. Системы ориентации, используемые для малых спутников

Equation Section (Next) Для успешного выполнения спутником поставленных перед ним задач требуется в большинстве случаев его определенная ориентация (угловая стабилизация). Система ориентации, решающая задачу управления угловым движением спутника, необходима для:

- обеспечения работы основных систем жизнеобеспечения спутника: энергетической и терморегулирования,
- реализации целевого назначения спутника,
- обеспечения связи и взаимодействия с пунктами управления,
- выполнения (в случае необходимости) коррекции и маневров,
- угловой привязки данных при обработке результатов наблюдений.

Требования к ориентации, вытекающие из различных задач, сильно зависят от конструкции и назначения спутника и могут быть противоречивыми. Например, работа солнечных батарей требует определенной ориентации по отношению к Солнцу, а для обеспечения связи с наземным пунктом управления иногда нужна ориентация антенны на этот пункт на земной поверхности.

Система ориентации, вообще говоря, включает в себя:

- датчики и навигационные устройства, которые выдают информацию (непосредственно или косвенно) об угловом и позиционном положении ориентируемого объекта по отношению к другим объектам;
- пассивные или активные исполнительные органы в виде, например, реактивных двигателей, токовых катушек, силовых маховиков для создания управляющих моментов;
- вычислительное устройство, основная функция которого состоит в том, чтобы на основе поступающей от датчиков ориентации и положения информации сформировать управляющие сигналы для исполнительных органов.

Таким образом, для работы системы управления требуется запас рабочего вещества или энергии для использования в исполнительных устройствах, источник энергии для обеспечения работы навигационных, измерительных и вычислительных устройств, информация о состоянии ориентации спутника и средства

преобразования ее в управляющие сигналы. В различных системах управления требования к расходу массы, энергии, обеспечению информацией и ее переработке могут быть развиты в разной степени и даже частично отсутствовать.

Системы ориентации, для работы которых необходимы расход энергии и/или рабочей массы и информация о текущей ориентации, называются *активными системами ориентации*. В противоположность им существуют *пассивные системы ориентации*, которые для своего функционирования не требуют ни энергии, ни информации о текущей ориентации. При этом управляющие моменты обеспечиваются за счет внешних силовых полей. Возможны также промежуточные типы систем, в которых отсутствует только навигационная компонента – полупассивные системы, а также разнообразные варианты комбинированных систем, в которых разные задачи ориентации решаются различными средствами.

Из многочисленных и разнообразных видов ориентированных состояний можно выделить два основных класса – одноосную и трехосную ориентации. При одноосной ориентации поддерживается заданное направление одной из связанных с ориентируемым спутником осей. Для трехосной ориентации необходимо обеспечить заданное положение в опорной системе координат всех трех осей связанной со спутником системы координат.

К основным конструктивным и эксплуатационным особенностям систем ориентации, которые учитываются при выборе системы для конкретной миссии, относятся следующие:

- возможность реализации того или иного вида ориентации,
- точность ориентации,
- быстродействие системы (характерное время приведения спутника в ориентированное состояние),
- продолжительность поддержания ориентированного состояния,
- массо- и энергопотребление,
- сложность разработки и стоимость системы,
- надежность работы системы.

Если оценить с этой точки зрения выделенные выше типы систем ориентации, то можно отметить следующее.

Активные системы позволяют, в принципе, реализовать любую стационарную, программную или следящую ориентацию в пределах

своих ресурсов. Они могут обеспечить высокую точность ориентации и высокое быстродействие ценой увеличения сложности, объема, массы и стоимости аппаратуры, а также потребления топлива и/или электроэнергии. Это значительно ограничивает возможность применения таких систем для малых спутников, для которых стоимость и размер/масса являются определяющими факторами.

Для *пассивных систем* имеется определенный набор поддерживаемых ими режимов ориентаций. Точность ориентации, обеспечиваемая пассивными системами, как правило, ограничена и невысока и в лучших случаях составляет единицы градусов. Ограничено также и их быстродействие, определяемое свойствами внешних полей. Главной особенностью пассивных систем является возможность в принципе неограниченно долго поддерживать рабочую ориентацию, поскольку пассивная система не расходует внутренних ресурсов спутника. В пассивных системах по сравнению с активными отсутствуют наиболее сложные и дорогостоящие компоненты — навигационные и вычислительные устройства. И хотя в состав пассивных систем иногда входят некоторые специфические дополнительные устройства, сложность и стоимость пассивной системы, как правило, значительно ниже аналогичных показателей для активной. Высокой оказывается и надежность системы. Естественной областью применения пассивных систем являются недорогие (в том числе малые) спутники, движущиеся преимущественно по круговым орбитам, нуждающиеся в продолжительной (от недели и более) поддерживаемой ориентации при относительно невысоких точности и быстродействии.

Из силовых факторов околоземного космического пространства практическое значение для целей *пассивной ориентации* имеют гравитационное поле Земли, геомагнитное поле, поле аэродинамических сил, действующих на спутник при движении его в верхних слоях атмосферы, поле сил светового давления. В зависимости от того, какой из этих факторов является определяющим, различают три основных типа систем пассивной ориентации: гравитационные, магнитные и аэродинамические. Принципиально возможные и полезные для некоторых приложений системы, использующие солнечное давление, пока практически реализованы лишь на технологическом уровне.

Более разнообразные возможности ориентации предоставляются *полупассивными* и *комбинированными* системами, в состав которых входят как активные, так и пассивные элементы.

Рассмотрим общие принципы реализации и используемые элементы конструкций систем ориентации

I.1. Гравитационные системы ориентации

Функционирование пассивной гравитационной системы ориентации основывается на том, что моменты гравитационных и инерционных сил стремятся ориентировать движущееся по орбите тело так, чтобы наибольшая ось его эллипсоида инерции совпала с направлением на притягивающий центр, а наименьшая – с нормалью к плоскости орбиты. В положении равновесия на круговой орбите главные оси эллипсоида инерции спутника направлены вдоль осей орбитальной системы координат. Таких положений 24, из них четыре являются устойчивыми и при введении демпфирования могут использоваться как ориентированные положения спутника с пассивной системой ориентации. Получаемый таким способом восстанавливающий момент невелик. Его компоненты по отдельным осям пропорциональны разностям моментов инерции, и для целей гравитационной ориентации необходимо иметь эллипсоид инерции с как можно больше отличающимися главными моментами инерции. Перераспределение масс осуществляется с помощью гравитационных штанг или, как их еще называют, стабилизаторов. Если два момента инерции совпадают, то эллипсоид инерции является осесимметричным и возможна только одноосная пассивная ориентация. Ось симметрии вытянутого эллипсоида инерции направлена вдоль радиус-вектора, ось симметрии сплюснутого эллипсоида направлена по нормали к плоскости орбиты.

Таким образом, гравитационная система ориентации позволяет получить на круговой орбите постоянную ориентацию в орбитальных осях. Основными компонентами такой системы являются гравитационные штанги и демпфирующее устройство. Последнее необходимо для рассеивания энергии начального движения и обеспечения асимптотической устойчивости номинального движения. В некоторых системах к ним может еще добавляться устройство, обеспечивающее однозначный выбор начальной ориентации.

Полный цикл работы системы включает в себя:

- этап предварительного успокоения для снижения начальной угловой скорости до величины порядка орбитальной,
- промежуточная ориентация для обеспечения однозначности основной ориентации (если требуется),
- разворачивание гравитационной штанги или штанг и переход к режиму гравитационной ориентации,
- программный переворот, если полученная ориентация не является рабочей,
- основной рабочий режим пассивной гравитационной ориентации.

Демпфирование в систему можно вводить пассивным или активным способом. В первом случае обычно устанавливается устройство, взаимодействующее с геомагнитным полем. Наиболее распространенный способ — установка магнитных катушек, управляемый магнитный момент которых взаимодействует с геомагнитным полем и создает демпфирующий и, если это требуется, то и дополнительный восстанавливающий момент.

Если существуют ограничения на возможность изменения формы спутника, то приходится использовать специальные штанги, на концах которых укрепляются дополнительные грузы или элементы полезной нагрузки, например магнитометры, для которых расположение в теле спутника в любом случае нежелательно из-за токов в бортовой аппаратуре. Наиболее известны четыре типа штанг.

Трубчатая штанга из предварительно напряженной стальной или медно–бериллиевой ленты. Она носит название *STEM (Storable Tubular Extendible Member)*. Под влиянием предварительной термообработки лента после схода с барабана сворачивается вокруг продольной оси, образуя трубки с перекрытием краев более, чем на 180° . Достоинство таких штанг заключается в компактности, малой погонной массе (≈ 20 г/м), возможности многократного выдвижения и складывания с помощью электромотора или однократного автоматического выдвижения, когда требуется лишь освободить конец штанги. Из недостатков следует отметить малую жесткость, особенно по отношению к крутильным нагрузкам. Неизотропность в месте перехлеста приводит к неоднородному нагреву штанги и, как следствие, к несимметричным колебаниям.

Складная штанга состоит из трубок, соединенных специальными шарнирами, которые создают моменты, выставляющие трубки вдоль продольной оси, и жестко их фиксируют относительно друг друга. Достоинство такой штанги заключается в достаточной жесткости относительно колебаний по всем осям, равномерном прогреве за счет хорошей теплопроводности и однородности структуры штанги. К недостаткам следует отнести относительно большую погонную массу (≈ 180 г/м), невозможность многократного выдвижения и низкую изгибную жесткость в плоскости трубок в момент выдвижения, до тех пор пока шарниры не зафиксировали трубки относительно друг друга.

Телескопическая штанга. Такая штанга выдвигается подобно антенне портативного радиоприемника. Штанга достаточно жесткая и однородная по отношению к изгибным и термическим нагрузкам.

Кольцевая штанга. Состоит из набора параллельных, соосных колец, соединенных предварительно напряженными синтетическими нитями. При освобождении нитей кольца поворачиваются вокруг общей оси. Нити выстраиваются по образующей цилиндра, фиксируя кольца на определенном расстоянии друг от друга и образуя вместе с кольцами жесткую конструкцию.

Иногда вытянутая конструкция самого спутника или конструкция, сформированная несколькими соединенными элементами, позволяет обойтись без специальных штанг. Рассматриваемые сейчас проекты орбитальной стыковки кубсатов вполне могут обеспечить нужный тензор инерции.

Перейдем к рассмотрению демпфирующего устройства. *Демпфирующий подвес* с вязко-упругой связью. Классическая реализация представляет собой шарнир, в котором упругая связь осуществляется с помощью торсионов, а вязкое трение — выбором трущейся пары, например, типа тефлона и металла, или магнитного подвеса на токах Фуко с жидкостью или без нее. Шарнир может быть установлен в месте крепления гравитационной штанги. Достоинство такого демпфирующего устройства заключается в отсутствии его влияния на параметры установившегося движения спутника в целом. К недостаткам можно отнести малое быстродействие и сложность конструкции.

Если восстанавливающий момент для стабилизатора обеспечивается магнитным полем, то подвес может быть установлен на конце штанги. Для создания восстанавливающего момента стабилизатора на нем устанавливается сильный постоянный магнит. В этом случае такой подвес носит название *сферический магнитный демпфер*. Он состоит из двух концентрических сфер. На внутренней сфере установлен сильный постоянный магнит. Внешняя сфера проводящая, немагнитная. Можно обойтись в этом случае и без упругой связи в подвесе. Вязкое трение обеспечивается токами Фуко, наводимыми полем внутренней сферы в теле внешней сферы.

Наличие на борту спутника полостей с жидкостью также приводит к рассеянию энергии. Для заданной толщины слоя жидкости, заключенной между сферическими оболочками, существует оптимальная вязкость, обеспечивающая максимальное быстрое действие демпфера. Основным недостатком такой системы заключается в том, что для быстрого рассеяния энергии требуется, чтобы моменты инерции корпуса спутника и жидкости были сравнимы между собой. Другой недостаток – зависимость параметров жидкости от ее температуры.

К подвижным демпфирующим устройствам можно отнести *гиродемпферы*, представляющие собой два двухстепенных гироскопа, установленных в теле спутника с помощью вязко-упругого подвеса. Оси вращения роторов гироскопов в равновесном положении расположены симметрично относительно нормали к плоскости орбиты. Собственные колебания спутника вызывают прецессию связанных с демпфирующим устройством роторов гироскопов, что приводит к рассеиванию его вращательной энергии.

К демпфирующим устройствам, не имеющим подвижных частей, можно отнести *гистерезисные стержни*, изготовленные из магнитомягкого материала. Их достоинства и недостатки отражены в разделе 1.

Если на спутник установить *магнитные катушки*, то можно создать управляющий, в том числе и демпфирующий момент. Достоинство такого устройства заключается в отсутствии движущихся частей и высоком быстродействии. Недостатки – необходимость иметь датчики ориентации, систему управления и возобновляемый источник энергии.

Следующая проблема — это необходимость обеспечения *однозначной ориентации* спутника. Спутник с тремя попарно неравными моментами инерции может занимать четыре устойчивых положения равновесия в орбитальной системе координат на круговой орбите. Обеспечить надежный выход спутника в одно из этих положений можно различными способами.

Предварительная магнитная ориентация. Заданная ось спутника ориентируется по вектору местной напряженности геомагнитного поля, при этом может использоваться одна из систем демпфирования, например, магнитные катушки или сферический магнитный демпфер с сильным постоянным магнитом. Тогда в окрестности геомагнитного полюса ось спутника, вдоль которой размещен дипольный магнитный момент, ориентируется практически по местной вертикали. Выдвижение гравитационной штанги в окрестности подходящего геомагнитного полюса приводит к тому, что спутник попадает в область влияния нужного устойчивого положения равновесия.

Если используется сферический магнитный демпфер в качестве демпфирующего устройства, то можно использовать сильный магнит, установленный на внутренней сфере, для обеспечения магнитного восстанавливающего момента в сочетании с плоской токовой катушкой, размещенной на корпусе демпфера (см. раздел 7).

Переворот спутника. Если спутник находится в нерасчетном положении равновесия, вдвигается гравитационная штанга, спутник ускоряет свое вращение вокруг оси, параллельной нормали к плоскости орбиты. В нужный момент выдвигается штанга, вращение замедляется, и спутник выходит в окрестность другого положения равновесия. Для реализации требуются система определения ориентации и устройство многократного выдвижения штанги, либо дополнительные средства системы ориентации, способные «побороть» гравитационный момент, например, магнитные катушки.

Эти способы обеспечивают однозначную ориентацию по вертикали, но не обеспечивают однозначности по углу рыскания (вокруг местной вертикали). Установка тангажного маховика с осью вращения, параллельной нормали к плоскости орбиты в номинальном движении спутника, с достаточным кинетическим моментом позволяет решить эту задачу. Кроме того, наличие тангажного

маховика с переменной скоростью вращения позволит при необходимости осуществить переворот спутника в плоскости орбиты [137].

I.2. Магнитные системы ориентации

Магнитные системы используют для обеспечения ориентации геомагнитное поле и с точки зрения конструкции являются, по-видимому, наиболее простыми системами. Для реализации управляющего магнитного момента достаточно иметь на спутнике устройство, создающее магнитный момент, например, постоянный магнит или токовую катушку.

Вращение вектора геомагнитной индукции в пространстве обуславливает весьма экзотическое угловое движение пассивно ориентируемого спутника и, как следствие, достаточно специфическую область применения систем магнитной ориентации. Тем не менее, этот режим широко используется для малых спутников. Для приведения спутника на расчетный режим движения после отделения от носителя устанавливается демпфирующее устройство, которое обычно обеспечивает демпфирующий момент за счет его взаимодействия с геомагнитным полем, что еще больше усложняет задачу исследователя.

Активное магнитное управление обеспечивается установкой на борту спутника набора токовых катушек (обычно трех, но может быть и меньше), датчиков ориентации и вычислительного устройства с алгоритмами определения ориентации и управления исполнительными устройствами. Сложность алгоритмов управления зависит от необходимого режима ориентации. Так, например, если требуется обеспечить ориентацию спутника относительно вектора \mathbf{H} , то достаточно разместить магнитометр для измерения его проекций и простейший вычислитель для формирования конечных разностей и вычисления производных вектора \mathbf{H} . Для обеспечения других режимов ориентации спутника требуется знать его положение относительно инерциальных осей, тогда используется комбинация различных датчиков и/или статистические методы обработки измерений.

Магнитные системы широко используются на малых спутниках. По устройству их можно разделить на три группы. К первой группе отнесем системы, магнитные элементы которых используются для

демпфирования возмущенного движения спутника. Основные их типы были перечислены выше: это гистерезисные стержни и магнитные подвесы с гистерезисом, сферический магнитный демпфер, активные управляемые токовые катушки, взаимодействующие с геомагнитным полем. Ко второй группе можно отнести магнитные системы как вспомогательные, для обеспечения однозначности ориентации с помощью гравитационного момента, коррекции положения и переориентации оси спутника, стабилизированного собственным вращением, обеспечения трехосной ориентации спутника с двойным вращением. И, наконец, третья группа – магнитные системы, используемые как основные в течение всего времени активного полета. При этом в качестве исполнительных органов используются постоянные магниты и токовые катушки с намагничиваемым сердечником или без такового, гистерезисные стержни и сферический магнитный демпфер.

I.3. Аэродинамическая и солнечная система ориентация

На относительно низких околоземных орбитах можно реализовать ориентацию спутника с помощью аэродинамических сил сопротивления. Под действием этих сил вытянутый осесимметричный объект стремится ориентироваться вдоль вектора относительной скорости потока $\mathbf{V} - \mathbf{V}_a$, где \mathbf{V} – скорость движения спутника по орбите в абсолютной системе координат, \mathbf{V}_a – скорость атмосферы в точке, где находится спутник, в той же системе координат. Скорость атмосферы за счет увлечения вращающейся Землей приблизительно в 20 раз меньше скорости спутника, и, если пренебречь ей в выражении для относительной скорости, то аэродинамическая ориентация на круговой орбите совпадает с ориентацией по касательной к орбите. При учете гравитационных моментов такое положение можно сделать устойчивым на достаточно низких орбитах (ниже 350–400 км), используя аэродинамический стабилизатор. Обычно это конус (усеченный конус) или сфера, изготовленные из легких материалов, отнесенные на достаточное расстояние от центра масс спутника. Демпфирование возмущений обеспечивается гироскопическими демпферами, относительной подвижностью стабилизатора и корпуса спутника и магнитными устройствами, взаимодействующими как с геомагнитным полем, так и, будучи установленными на подвижные элементы конструкции спутника, между собой.

Еще один способ обеспечения демпфирования возмущенных колебаний аэродинамически-ориентированного спутника состоит в использовании гистерезисных стержней. Примером использования этого способа является микроспутник *МАК-А*, разработанный в 90-х годах прошлого столетия в Московском авиационном институте студентами под руководством профессора Г.В. Малышева. Описание его демпфирующего устройства приведено в Приложении III.3, исследование его движения относительно центра масс изложено в [138]. Другим примером является кубсат *SamSat-QB50* стандарта 3U, разработанный в Самарском аэрокосмическом университете [139].

Ориентация спутника на Солнце обычно сопровождается его закруткой вокруг продольной оси. Такие спутники, как правило, выводятся на высокие или высокоапогейные орбиты и для демпфирования возмущенного движения в этом случае целесообразно использовать *нутационный демпфер*. Демпфер представляет собой полое кольцо, заполненное вязкой жидкостью. Плоскость кольца ортогональна оси вращения. Рассеяние энергии происходит за счет движения жидкости под действием переносных сил инерции, возникающих в результате нутационных колебаний спутника. Существует понятие резонансной настройки демпфера, когда его оптимальные, то есть доставляющие максимальное быстродействие, параметры зависят от скорости вращения. Вообще говоря, чем выше скорость собственного вращения, тем больше быстродействие. Достоинством такого демпфирующего устройства является его автономность. Аппараты, использующие силу давления солнечной радиации, обычно выводятся на высокие орбиты с тем, чтобы эта сила была доминирующей. В этом случае использование токовых катушек, для эффективной работы которых требуется магнитное поле, становится затруднительным из-за значительного удаления спутника от Земли.

Если собственная закрутка спутника отсутствует и его движение происходит далеко от Земли, то можно использовать активное демпфирование с помощью специальных солнечных рулей [140].

I.4. Стабилизация собственным вращением

Достаточно распространенным на практике является использование свойства быстро закрученного вокруг оси максимального момента инерции твердого тела сохранять свою

ориентацию в инерциальном пространстве. Основываясь на этом подходе можно обеспечить ориентацию оси вращения спутника в произвольном направлении либо, как частный случай, перпендикулярно плоскости орбиты. В первом случае переносные силы инерции, возникающие вследствие вращения центра масс спутника по орбите наряду с другими моментами, в том числе гравитационным и магнитным, приводят к нутационному движению оси вращения вокруг заданного направления ориентации. Во втором случае орбитальное движение не влияет на движение спутника относительно центра масс. Внешние, даже малые, моменты приводят к медленному нарушению ориентации вращающегося спутника. В обоих случаях необходима система (пассивная или активная), которая «гасит» нутационное движение, возникающее как в результате погрешностей при начальной раскрутке спутника, так и под действием внешних моментов. Время от времени необходимо восстанавливать величину скорости осевого вращения. Обычно для раскрутки и коррекции величины скорости и направления оси вращения используются две токовые катушки, взаимодействующие с геомагнитным полем, одна, перпендикулярная оси вращения, для раскрутки спутника, вторая, направленная вдоль оси вращения, для коррекции положения оси в пространстве. Другой способ обеспечения этого режима – раскручивать спутник с помощью реактивного двигателя, а для гашения нутационных движений использовать пассивный нутационный демпфер. Основное назначение спутников, стабилизированных собственным вращением, – наблюдение малоподвижных (в смысле изменения их углового положения) в инерциальном пространстве объектов, наблюдение ограниченной части земной поверхности, обеспечение «развертки» изображения за счет вращения спутника при размещении приборов наблюдения на его боковой поверхности. От традиционной активной системы ориентации система стабилизации вращением отличается простотой и экономичностью.

Различаются два типа спутников, стабилизированных вращением. В первом случае спутник вращается как одно целое и носит название *спутник, стабилизированный собственным вращением*. Во втором случае спутник состоит из двух соосных тел, вращающихся друг относительно друга, и носит название *спутник с*

двойным вращением. Например, одно из тел может быть быстро закрученным ротором. В обоих случаях спутник должен содержать для целей обеспечения ориентации:

- систему, обеспечивающую первоначальную закрутку спутника или маховика вокруг ориентируемой оси и поддерживающую заданную скорость вращения в течение всего периода активного существования спутника;
- устройство, демпфирующее нутационные колебания спутника;
- систему поворота и коррекции положения оси ориентации в пространстве.

Для успешного функционирования спутника с двойным вращением требуются:

- устройство раскрутки вращающейся части спутника;
- устройство устранения нутационных движений (нутационный демпфер);
- система определения ориентации оси кинетического момента и ее переориентации;
- устройство, препятствующее передаче вращения от вращающегося тела к платформе, не участвующей во вращении.

Спутник с двойным вращением допускает ориентацию оси минимального момента инерции.

I.5. Гироскопические системы ориентации

Если на спутнике установлены вращающиеся элементы, то при изменении их скорости вращения или повороте их осей вращения возникает момент, что позволяет управлять угловым положением спутника. Если пренебречь действием внешних моментов, то управление реализуется, исходя из закона сохранения кинетического момента системы спутник-элементы, и обеспечивается перераспределением кинетического момента между самим спутником и вращающимися элементами.

Гиросtabilизированные системы ориентации обычно содержат либо закрепленные в теле спутника двигатели-маховики (электродвигатель, на ось которого установлен достаточно массивный маховик для создания нужного кинетического момента), либо гироскопы (вращающийся с постоянной скоростью маховик, установленный в кардановом подвесе).

В первом случае управление осуществляется изменением скорости вращения двигателя-маховика. При угловом ускорении маховика создается момент, приложенный к спутнику. Обычно оси вращения маховиков устанавливаются параллельно главным осям инерции спутника, что позволяет обеспечить независимое управление по трем осям. Преимущества такой системы – простота конструкции и алгоритмов, использование возобновляемой электрической энергии, небольшая масса. Недостатки – при парировании постоянных возмущений маховики насыщаются и требуется отдельная система для сброса кинетического момента, ускорение и торможение маховиков приводит к расходу энергии, стоимость. Обычно дополнительно используется весьма грубая активная магнитная система, которая обеспечивает приведение спутника в окрестность рабочего положения, после чего вступает в действие гироскопическая система, и сброс накопившегося гироскопического момента маховиков.

Во втором случае управление реализуется поворотом кинетического момента маховика относительно спутника с помощью шаговых двигателей в кардановом подвесе. Преимуществами такой системы являются высокие экономичность и точность, недостатками – сложная конструкция, высокая стоимость. На микроспутниках широко применяются электродвигатели-маховики.

Приложение II. Улучшенная модель гистерезиса, лабораторное исследование свойств стержней

II.1. Улучшенная модель, основанная на магнитомеханической аналогии

Equation Chapter 2 Section 1 Рассмотрим модель гистерезиса, которая допускает механическую интерпретацию в виде работающего на растяжение и сжатие однородного стержня, находящегося под действием осевой переменной нагрузки и трущегося неподвижное шероховатое основание. Модель позволяет исследовать поведение намагниченного материала в произвольно меняющемся магнитном поле. Назовем ее *улучшенной* моделью гистерезиса. В квазистационарном приближении, когда осевая переменная нагрузка $F(t)$ меняется достаточно медленно, поведение растяжимого стержня можно описать с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= k \quad \text{при} \quad \frac{\partial W}{\partial t} > 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= -k \quad \text{при} \quad \frac{\partial W}{\partial t} < 0, \\ \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| &\leq k \quad \text{при} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Здесь $\sigma = \sigma(x, t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(x, t) = \partial W / \partial x$ – соответственно механическое напряжение и относительное удлинение в сечении стержня с координатой x ; $W(x, t)$ – перемещение сечения; k – коэффициент трения, связанный с коэффициентом \bar{k} кулонова трения стержня о шероховатое основание формулой $k = \bar{k} \rho g$, ρ – плотность материала стержня, g – ускорение свободного падения; $F(t)$ отнесена к единичной площади сечения стержня. Чтобы система (II.1) была замкнутой, необходимо ввести закон деформации, устанавливающий связь между напряжением и относительным удлинением стержня. Выберем в качестве закона деформации соотношение

$$\varepsilon = b/l \operatorname{tg} \sigma, \quad (\text{II.2})$$

где l – длина недеформированного стержня, a , b – константы. С учетом граничных условий $W(0, t) = 0$, $\sigma(l, t) = F(t)$ при постоянном

коэффициенте трения k ($\partial k / \partial x = \partial k / \partial t = 0$) построим решение системы (II.1), (II.2), в соответствии с которым на оси Ox , направленной вдоль стержня, в любой момент времени существует конечное число «промежутков непрерывности» производной $\partial\sigma/\partial x$ (рис. II.1)

$$\sigma = k_j(x - x_j) + \sigma_j,$$

$$W(x, t) = W(x_j, t) + \frac{b}{alk_j} \ln \frac{\text{ch}(a\sigma_{j+1})}{\text{ch}(a\sigma_j)}, \quad (\text{II.3})$$

$$W(l, t) = \frac{b}{al} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{k_j} \ln \frac{\text{ch}(a\sigma_{j+1})}{\text{ch}(a\sigma_j)}.$$

Здесь ch – гиперболический косинус, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, ($j = 1, \dots, n-1$), $k_j = \pm k$ или $k_j = 0$, причем знак выбирается в зависимости от истории нагружения стержня, $\sigma_n = F(t)$, $x_1 = 0$, $x_n = l$; в случае $k_j = 0$ соответствующее слагаемое в сумме следует считать равным нулю.

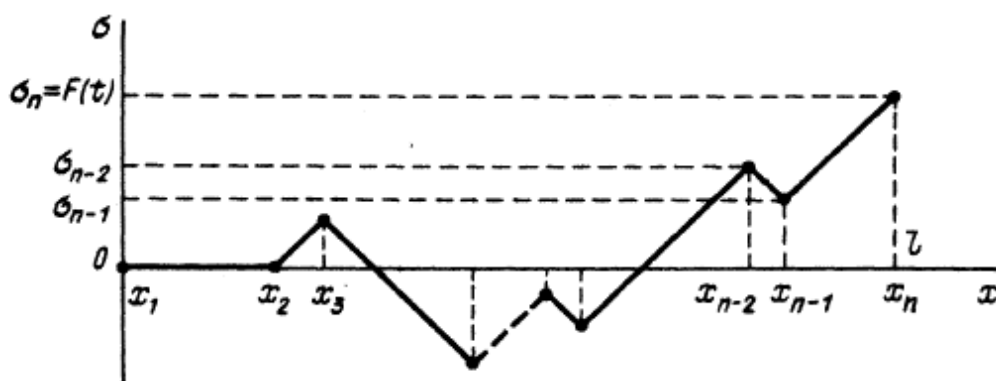


Рис. II.1. Распределение напряжений в стержне

Построение конкретного решения осуществляется отслеживанием истории нагружения стержня. Основными моментами истории являются рождение и исчезновение промежутков непрерывности производной $\partial\sigma/\partial x$. Рождение нового промежутка происходит на правом конце стержня в момент достижения нагрузкой своего максимального или минимального значения, когда dF/dt обращается в нуль. При достижении максимума нагрузки рождается промежуток с отрицательным углом наклона к оси Ox ($\partial\sigma/\partial x = -k$), при достижении минимума — с положительным углом наклона к оси Ox ($\partial\sigma/\partial x = k$). В момент рождения (при этом n увеличивается на

единицу) промежуток имеет длину, равную нулю ($x_{n-1} = x_n = l$), которая при последующем монотонном изменении нагрузки возрастает (рис. П.1), пока не произойдет новая смена знака dF/dt или не будет достигнуто наибольшее значение длины участка непрерывности, равное l . Исчезновение участка происходит в момент, когда $x_{n-1} = x_{n-2}$ ($n > 2$). Исчезновению подвержен предпоследний промежуток непрерывности. Так, участок BB_2 (рис. П.2) исчезает при $t'' \rightarrow t$. В момент t исчезновения величина n уменьшается на две единицы, если $n > 3$ и $k_{n-2} \neq 0$, а длина последнего промежутка увеличивается скачкообразно от величины, соответствующей отрезку AB , до величины AC . Дальнейшее уменьшение нагрузки приводит к распределению напряжений, показанному при $t = t'''$ штриховой линией A_3C_3 . В случае $n = 3$ или $k_{n-2} = 0$ исчезновение промежутка, очевидно, сопровождается уменьшением n на единицу. Отметим, что при указанном построении напряженного состояния изменение нагрузки $F(t)$ захватывает только последний и предпоследний участки. Напряженное состояние всех остальных участков остается неизменным. В качестве начального (при $t = 0$) выбиралось простейшее распределение напряжений в стержне, показанное при $F(t) > 0$ на рис. П.3.

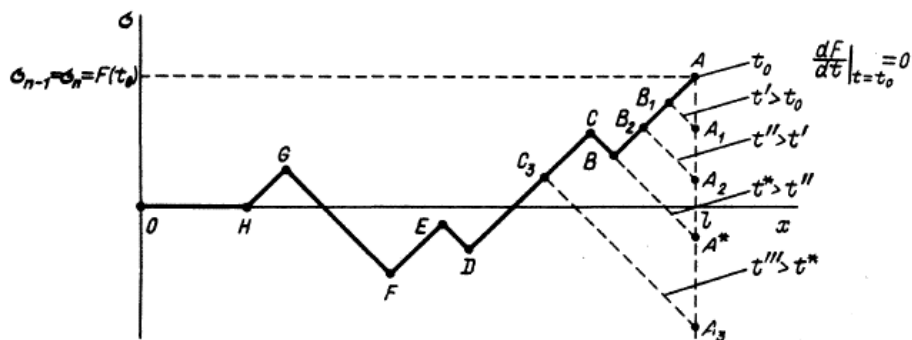


Рис. П.2. Напряженное состояние после достижения максимума нагрузки (показано для соответствующих моментов времени штриховыми линиями)

Перейдем к изложению магнитомеханической аналогии. Предполагая, что нагрузка F пропорциональна напряженности внешнего магнитного поля, а перемещение конца стержня $W(l, t)$ пропорционально магнитному моменту, получим соответственно гистерезисную зависимость магнитного момента стержня от

напряженности магнитного поля. Входными параметрами модели являются k , a , b , и l . Величина k определяет ширину петли гистерезиса (при $k=0$ площадь петли равна нулю). При $F \rightarrow \infty$ функция $W \rightarrow b$; таким образом, b характеризует магнитный момент насыщения материала, из которого изготовлен гистерезисный стержень. Величина a характеризует магнитную восприимчивость стержня. Не теряя общности, можно положить $b=l=1$. В дальнейшем удобно все величины, входящие в (II.1)-(II.3), считать безразмерными и для $W(l,t)$ использовать обозначение $W(F)$, имея ввиду при этом гистерезисную зависимость от F , определяемую решением (II.3).

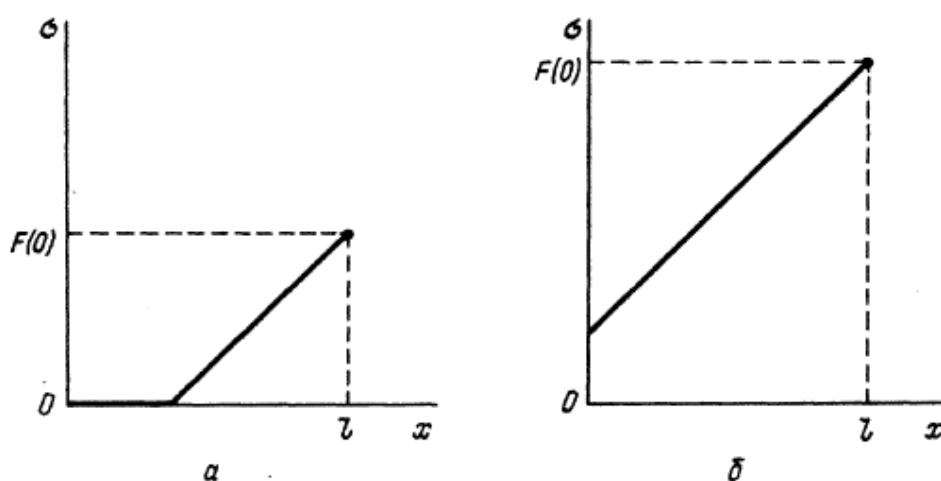


Рис. II.3. Начальное распределение напряжений при $t=0$:

(а) $F(0) \leq kl$, (б) $F(0) > kl$

Перечислим основные свойства описанной модели гистерезиса. Периодическое изменение поля вызывает периодическое изменение намагниченности (семейство симметричных петель показано на рис. II.4). Основная кривая намагничивания, проходящая через вершины симметричных петель, совпадает с кривой $D'E'OED$ первоначального намагничивания. Если переход на новую ветвь происходит в момент смены знака dF/dt , то касательная к новой ветви гистерезиса в точке пересечения с предыдущей ветвью горизонтальна. При переходе на новую ветвь вследствие исчезновения промежутка положение касательной в начале новой ветви может быть произвольным. Однако выход на предельную петлю происходит по касательной к соответствующей ветви предельной петли. Под ветвью здесь понимается кусок гистерезисной зависимости $W = W(t)$, представляемый с помощью гладкой кривой. Выход на предельную

петлю гистерезиса происходит при конечном значении F (при $F > k$). Полное размагничивание стержня может быть получено только в результате бесконечного числа перемагничиваний с непрерывно убывающей амплитудой внешнего магнитного поля.

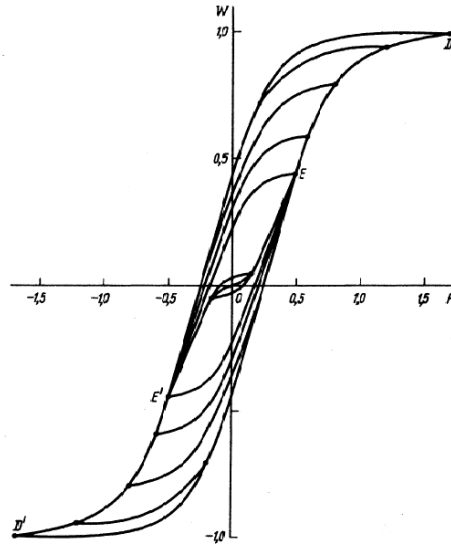


Рис. П.4. Пример симметричных гистерезисных зависимостей
 $a = 2, b = 1, k = 0.5, l = 1$

При $a \gg 1$ и достаточно большой амплитуде изменения F ($F_{max} > k$) имеем поочередно в цикле типы напряженного состояния, изображенные на рис. П.5. Из (П.3) для состояний, представленных на рис. П.5 (а) и рис. П.5 (б), полагая $\text{ch}(a\sigma) \approx \exp(a\sigma)$, получаем

$$W(l, t) = \frac{b}{l} \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) = b.$$

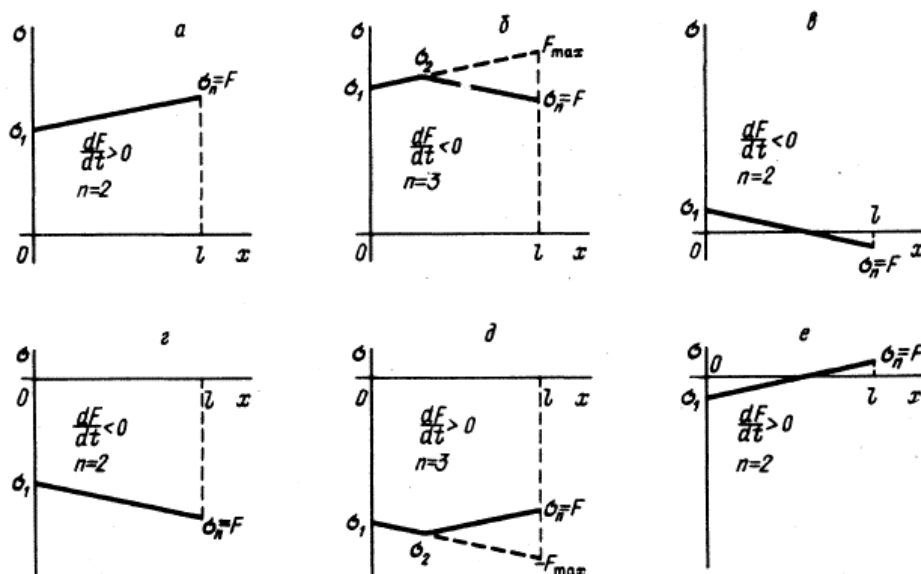


Рис. П.5. Последовательность смены напряженных состояний

Для состояния (в), полагая $\text{ch}(a\sigma_1) \approx \exp(a\sigma_1)$, ($\sigma_1 > 0$) и $\text{ch}(a\sigma_2) \approx \exp(-a\sigma_2)$, ($\sigma_2 < 0$), из (II.3) имеем

$$W(l, t) = \frac{2bF}{lk} + b, (\sigma = F + kl).$$

Аналогично для состояний (з) и (д)

$$W(l, t) = -b,$$

а для состояния (е)

$$W(l, t) = \frac{2bF}{lk} - b.$$

В выражениях, приведенных здесь и на рис. II.5, с учетом вышесказанного следует положить $b = l = 1$. В рассмотренном случае петля гистерезиса близка к параллелограмму (рис. II.6 (а)).

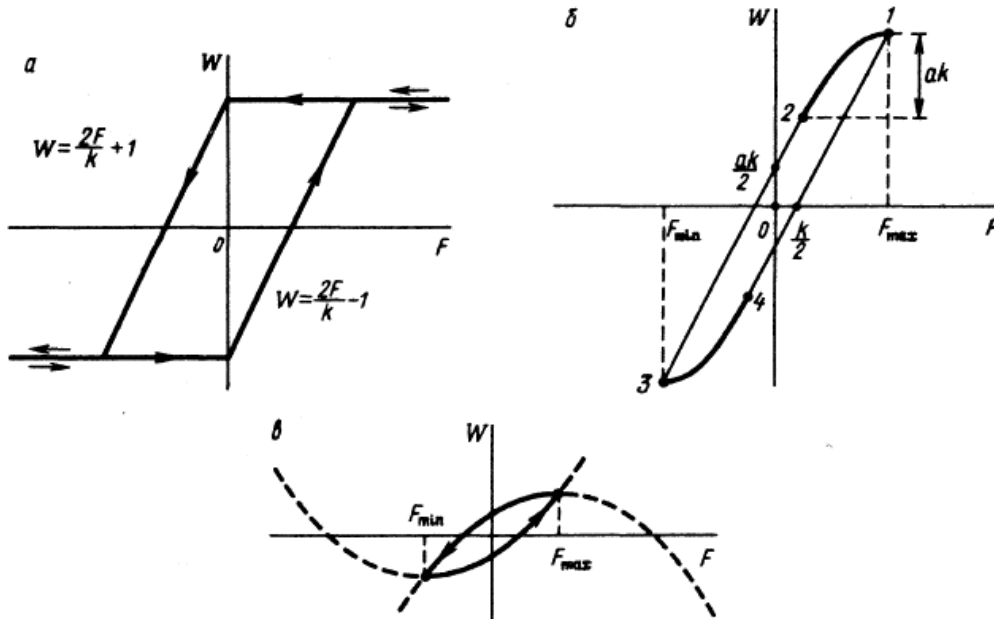


Рис. II.6. Варианты гистерезисных зависимостей

При $a|F_{max}| \ll 1$, $a|F_{min}| \ll 1$, $k \ll |F_{max}| \ll 1$, $k \ll |F_{min}|$ (случай слабых полей и узких петель) гистерезисные петли (рис. II.6 (б)) образованы из отрезков двух близко расположенных параллельных прямых

$$W = aF - \frac{ak}{2} \text{sign} \frac{dF}{dt} \tag{II.4}$$

и парабол, касающихся прямых,

$$W = aF_{max} - \frac{ak}{2} - \frac{a}{4k}(F_{max} - F)^2, \quad W = aF_{min} + \frac{ak}{2} - \frac{a}{4k}(F_{min} - F)^2.$$

Такую зависимость будем называть близкой к линейной, так как основная кривая намагничивания и линии, образующие петлю гистерезиса, почти везде имеют одинаковый наклон к оси абсцисс.

При $aF_{max} \ll 1$, $k \gg |F_{max}| \ll 1$, ($F_{min} = F_{max}$) (случай слабых магнитных полей и широких петель гистерезиса) описанная модель для материалов с невысокой начальной магнитной проницаемостью близка к модели Релея. В этом случае петли гистерезиса (рис. П.6 (в)) образованы парабололами

$$W = \frac{aF_{max}^2}{2k} - \frac{a}{4k}(F_{max} - F)^2, \quad W = \frac{aF_{min}^2}{2k} + \frac{a}{4k}(F_{min} - F)^2.$$

Площади S петли гистерезиса, характеризующие потери энергии на цикле перемагничивания, определяются для этих случаев выражениями

$$S = k, \quad S = 2akF_{max} - \frac{ak^2}{2}, \quad S = \frac{2aF_{max}^2}{3k}.$$

Говоря о недостатках предложенной модели, следует отметить невозможность получения с ее помощью прямоугольных петель гистерезиса, для которых отношение остаточной индукции к максимальной обычно принимается более 0.85. Наибольшее распространение из магнитных материалов с прямоугольной петлей получили магний-марганцевые ферриты, применяемые для устройств автоматического управления. Тем не менее, модель, содержащая петли, близкие к прямоугольным, может быть получена из предложенной, если отказаться от предположения $\partial k / \partial x = 0$. Выбор в качестве $k(x)$ функции неограниченного роста при x , стремящейся к нулю (например, $k(x) \approx 1/x$), гарантирует недостижимость предельной петли гистерезиса при конечном значении F . Допуская зависимость k от предыстории перемагничивания и полагая, скажем, что k уменьшается (что соответствует так называемому «старению» материала) с ростом пути, пройденного точкой (F, W) по ветвям гистерезиса, можно ликвидировать совпадение начальной и основной кривых намагничивания. Выбор в качестве закона деформации (П.2) иных соотношений, например, гиперболического тангенса или арктангенса $a\sigma$, позволит осуществить в случае необходимости дальнейшее уточнение модели. Это может оказаться полезным при построении модели для конкретных магнитных элементов.

Существенный недостаток подобных моделей, включая и случай $k = const$, состоит в трудности их использования в аналитических исследованиях без упрощающих предположений. Однако их реализация при численном исследовании с помощью ЭВМ не представляет принципиальных затруднений.

II.2. Связь параметров улучшенной модели и характеристик стержня

Рассмотрим входные параметры улучшенной модели гистерезиса применительно к магнитным гистерезисным стержням, используемым в составе пассивных систем ориентации. Будем считать, что отношение длины l_b стержня к его диаметру d_b велико ($l_b/d_b \gg 1$). Тогда его магнитный дипольный момент \mathbf{m} определяется выражением $\mathbf{m} = I\mathbf{e}$, где \mathbf{e} – орт продольной оси стержня, $I = I(H_\tau)$ – модуль вектора \mathbf{m} , являющийся гистерезисной функцией от проекции вектора H^e напряженности внешнего магнитного поля на продольную ось стержня. Механический момент \mathbf{M} , приложенный к стержню во внешнем магнитном поле, можно представить в виде

$$\mathbf{M} = R\tilde{I}\mathbf{e} \times \mathbf{B},$$

где $R = B_m I_s$ – коэффициент, имеющий размерность момента и вобравший в себя эффект нормировки магнитной индукции и магнитного момента \mathbf{m} , $\mathbf{B} = \mathbf{B}^e/B_m$ – безразмерная индукция внешнего магнитного поля ($B_m = \mu_e/r^3$), $\tilde{I} = I(H_\tau)/I_s$ – безразмерный магнитный момент стержня, I_s – магнитный момент насыщения стержня. Вводя вместо I_s эквивалентную величину – индукцию насыщения $B_s = \mu_0 I_s/V$, V – объем стержня, можно записать так:

$$R = \frac{B_m B_s V}{\mu_0}. \quad (\text{II.5})$$

Полезно отметить, что максимальный момент $M_{\max} = R$, действующий на намагниченный до полного насыщения стержень в магнитном поле с индукцией B_m , определяется коэффициентом R . Индукция насыщения B_s для типичных ферромагнитных материалов имеет величину порядка 1 Тл.

В качестве F принимаем нормированную напряженность внешнего магнитного поля стержня

$$F = H^e / H_m, \quad (\text{II.6})$$

где $H_m = B_m / \mu_0$, и представляем индукцию B магнитного поля внутри стержня в виде

$$B = B_s W(F), \quad (\text{II.7})$$

имея в виду предельную петлю гистерезиса. Выход на предельную петлю гистерезиса происходит при достаточно большой амплитуде изменения F ($F > kl$). Последовательность смены напряженных состояний при этом показана на рис. II.5. Для состояний (а), (в), (г), (е) ($n = 2$) из (II.1) имеем

$$W(F) = \frac{b \operatorname{sign} \frac{dF}{dt}}{alk} \ln \frac{\operatorname{ch}(aF)}{\operatorname{ch}\left(aF - ak \operatorname{sign} \frac{dF}{dt}\right)}. \quad (\text{II.8})$$

При выводе этой формулы учитывается, что $\sigma_1 = F - k \operatorname{sign} dF/dt$.

Далее, легко показать, что B обращается в нуль при $H^e = \pm H_c$, где

$$H_c = kH_m/2. \quad (\text{II.9})$$

Для однородно или почти однородно намагничивающихся тел, в частности для сильно вытянутых стержней, напряженность H магнитного поля внутри стержня связана с напряженностью H^e внешнего поля соотношением

$$H = H^e - NJ, \quad (\text{II.10})$$

где J – намагниченность, N – коэффициент размагничивания, слабо зависящий от H^e и J . Учитывая, что $B = \mu_0(J + H)$, на основании (II.10) получаем

$$H = \frac{1}{1-N} \left(H^e - \frac{NB}{\mu_0} \right).$$

Для сильно вытянутых стержней $N \ll 1$ и B/μ_0 велико по сравнению с H^e , тогда

$$H = H^e - \frac{NB}{\mu_0}. \quad (\text{II.11})$$

Отсюда следует, что $H_c^e = H_c$ и параметр k , принятый в модели в качестве входного, связан с коэрцитивной силой H_c соотношением

$$H_c = kH_m/2.$$

Дифференцируя (II.7) с учетом (II.8) и (II.9) при $dF/dt > 0$ и полагая $F = k/2$, получаем связь параметра a , также принятого в качестве входного, с крутизной предельной петли гистерезиса стержня в точке $H^e = H_c$ соотношением

$$\left. \frac{dB}{dH} \right|_{H=H_c} = \frac{2\mu_0 B_s}{kB_m} \operatorname{th} \frac{ak}{2} \quad (\text{II.12})$$

или с крутизной петли гистерезиса материала, из которого изготовлен стержень, поскольку на основании (II.11)

$$\left. \frac{dB}{dH} \right|_{H=H_c} = \frac{\left. \frac{dB}{dH^e} \right|_{H^e=H_c}}{1 - \frac{N}{\mu_0} \left. \frac{dB}{dH^e} \right|_{H^e=H_c}}. \quad (\text{II.13})$$

Для случая слабых полей и узких гистерезисных петель ($ak \ll aF_{\max} \ll 1$) соотношение (II.12) принимает вид

$$\mu_b = aB_s/B_m, \quad (\text{II.14})$$

где μ_b – относительная магнитная проницаемость стержня («кажущаяся» проницаемость, «проницаемость формы»), под которой понимается безразмерная величина

$$\frac{1}{\mu} \left. \frac{dB}{dH^e} \right|_{H^e=H_c}.$$

Выражение (II.14) можно получить также исходя из (II.4). С использованием относительной магнитной проницаемости μ_b индукцию B магнитного поля внутри стержня можно представить в виде

$$B = \mu_b \mu_0 H^e \pm \Delta B, \quad (\text{II.15})$$

где ΔB – малая (в случае узкой петли) гистерезисная добавка.

С помощью (II.11) и (II.15) легко получить зависимость B от напряженности H магнитного поля внутри стержня

$$B = \frac{1}{1 - \mu_b N} (\mu_b \mu_0 H \pm \Delta B).$$

Напомним, что в этом выражении коэффициент при $\mu_0 H$ есть относительная магнитная проницаемость μ материала стержня, то есть

$$\mu = \frac{\mu_b}{1 - \mu_b N},$$

откуда получаем

$$\mu_b = \frac{\mu}{1 + \mu N}, \quad N = \frac{1}{\mu_b} - \frac{1}{\mu}. \quad (\text{II.16})$$

Полезно отметить, что при увеличении магнитной проницаемости μ материала, из которого изготовлен стержень, магнитная проницаемость стержня μ_b остается ограниченной, то есть

$$\mu_b \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{N}.$$

Коэффициент N размагничивания стержня при $p = l_b/d_b \gg 1$ может быть найден с помощью эмпирической формулы [87]

$$N = \frac{1}{p^2} (\ln 1.2 p - 1). \quad (\text{II.17})$$

Соотношения (II.5), (II.9) вместе с соотношениями (II.12), (II.13) и (II.17) позволяют по заданным R , k , a найти параметры реального стержня, а по гистерезисной характеристике реального стержня вычислить значения параметров математической модели гистерезиса. Для узких петель вместо (II.12) и (II.13) удобнее использовать (II.14) и (II.16).

Предлагаемая интерпретация параметров, которая базируется на локальных свойствах кривых, может оказаться не самой удачной. Возможно, более подходящим является установление соответствия математической модели реальной гистерезисной характеристике не по отдельным точкам или даже кривым, а в некотором интегральном смысле. Дополнительное улучшение соответствия может быть получено с учетом реального диапазона изменений напряженности и индуктивности магнитного поля. Нет смысла требовать совпадения модели с реальной гистерезисной зависимостью во всем допустимом диапазоне изменений B и H , если процесс перемагничивания в конкретной задаче развивается, например, в окрестности начала координат (B, H) или вдали от насыщения. Привязка к истинным значениям индукции насыщения и коэрцитивной силы в таких

случаях становится необязательной, и появившийся произвол в выборе B_s и H_c можно употребить на улучшение совпадения в реальном диапазоне изменения B и H . Рассмотрим пример установления соответствия параметров модели и стержня.

Анализ динамики гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями показал [141], что наиболее подходящими для целей демпфирования возмущенного относительного движения являются стержни с гистерезисными функциями, близкими к линейным ($R \approx 10^3$, $a \approx 0.1$, $k \approx 0.1$). В качестве первого примера найдем характеристики стержня, соответствующие указанным значениям параметров модели. Полагая $B_s \approx 1$ Тл, $B_m \approx 1.77 \cdot 10^{-5}$ Тл (для высоты орбиты 600 км), из (II.5) находим объем стержня $V \approx \mu_0 R / B_m B_s \approx 71 \text{ см}^3$. С помощью (II.9) найдем коэрцитивную силу $H_c \approx 0.7$ А/м. Понимая в (II.6) под H^e напряженность магнитного поля Земли, легко показать, что $F_{\max} = 2$. Так как условия $ak \ll aF_{\max} \ll 1$ можно считать выполненными, воспользуемся соотношениями (II.14) и (II.16), справедливыми для гистерезисной зависимости, близкой к линейной. При этом $\mu_b = 0.57 \cdot 10^4$ и так как $\mu \gg 0.57 \cdot 10^4$, то $N = 1/\mu_b = 1.77 \cdot 10^{-4}$. На основании (II.17) $p = 155$. Вычисляя длину и диаметр стержня, находим $l_b = 130$ см, $d_b = 8.4$ мм. Из (II.15) следует, что максимальная индукция B магнитного поля внутри стержня равна 0.2 Тл и, следовательно, далека от насыщения.

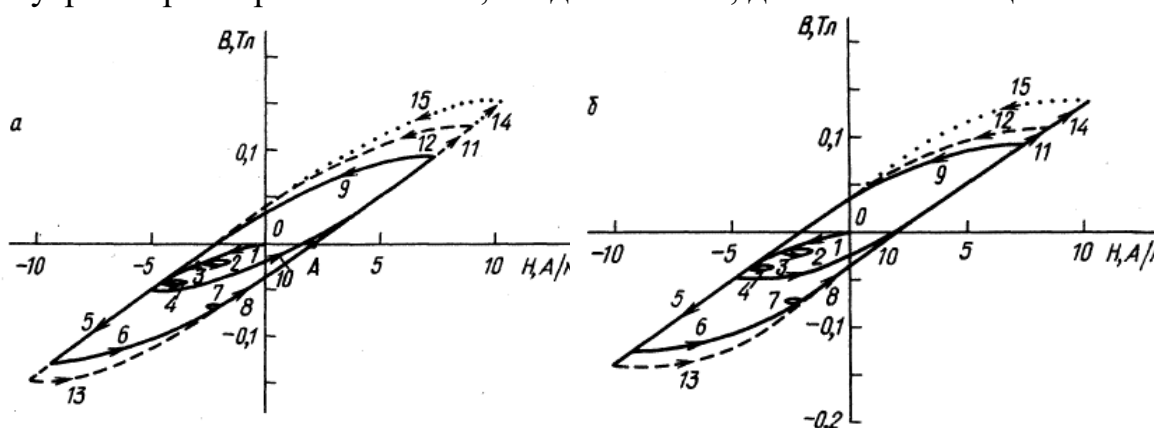


Рис. II.7. Кривая $B(H)$ при заданной форме изменения H : (а) – экспериментальная кривая (размеры стержня $l_b = 60$ см, $d = 0.2$ см, материал *Permenorm-5000*; (б) – кривая, построенная на основании улучшенной модели гистерезиса (параметры модели $a = 0.24$, $k = 0.3$, $R = 26$)

В качестве второго примера решим задачу, обратную рассмотренной в первом примере. Найдем параметры R , k , a , соответствующие экспериментальной характеристике для стержня с $l_b = 60$ см, $d_b = 2$ мм (рис. II.7 (а)), взятой из [142]. Определяя

графически $\left. \frac{dB}{dH^e} \right|_{H^e=H_c}$ в точке A , находим, что

$$\mu_b = \frac{1}{\mu_0} \left. \frac{dB}{dH^e} \right|_{H_c=H_c^e} = 1.37 \cdot 10^4.$$

Принимая абсциссу точки A экспериментальной кривой в качестве H_c , что отвечает значению $H_c \approx 2.1$ А/м, из (II.9) находим

$$k = \frac{2H_c}{H_m} = \frac{2H_c \mu_0}{B_m} = 0.3.$$

Предположим, что $B_s = 1$ Тл. Так как максимальная индукция внутри стержня равна 0.15 Тл и много меньше B_s , а петля достаточно узка, то, воспользовавшись соотношением (II.14), получаем $a = \mu_b B/B_s = 0.24$. Из формулы (II.5) находим $R = 26$. Гистерезисная зависимость, построенная при вычисленных значениях параметров на основании предложенной модели гистерезиса, показана на рис. II.7 (б).

II.3. Исследование демпфирующих характеристик гистерезисных стержней с учетом их взаимного размагничивания

В условиях ограниченности пространства, в котором могут быть размещены стержни, существенным фактором, снижающим их демпфирующие свойства, может оказаться взаимное размагничивание. Проблема размагничивания стержней и их взаимного влияния рассматривалась в [87], [143]. Приведем приближенный, основанный в значительной мере на эмпирических фактах, метод учета эффекта взаимного размагничивания произвольной стержневой системы. Приведем результаты вычислений для практически важного случая, когда система представляет собой набор «троек», составленных из идентичных взаимно ортогональных прямолинейных стержней. Существуют различные способы организации размещения стержней. Стержни могут быть размещены на поверхности усеченного кругового конуса (рис. II.8), как это было

реализовано на микроспутнике *МАК-А* [138] или на взаимно перпендикулярных пластинах – на наноспутнике *REFLECTOR* [13].

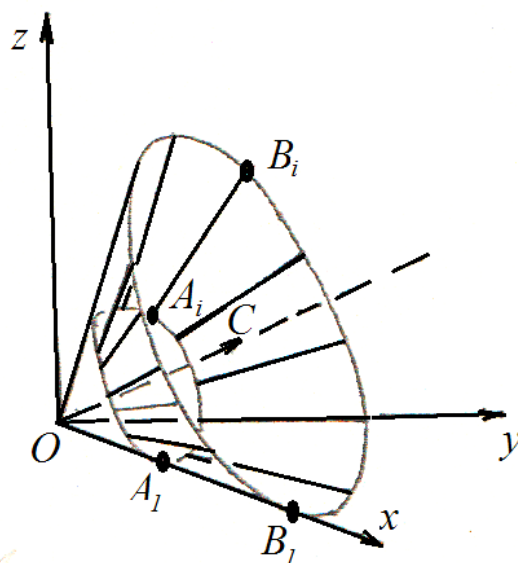


Рис. II.8. Схема размещения стержней на усеченном конусе

При определении поля намагниченного стержня удобно аппроксимировать его полем диполя, у которого магнитные заряды m и $-m$ расположены на концах стержня. При этом модуль магнитного момента стержня определяется выражением

$$I = ml, \quad (\text{II.18})$$

где l – длина стержня. Потенциал поля такого диполя в заданной точке имеет вид

$$U = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}. \quad (\text{II.19})$$

Здесь r_1 , r_2 – расстояния от соответствующих концов стержня до этой точки. Тогда напряженность магнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{H} = -\nabla U. \quad (\text{II.20})$$

Приведенные соотношения применимы для тонких стержней ($p = l_b/d_b \gg 1$), которые и являются объектом настоящего исследования. Известно [144], что стержень с характеристикой намагничивания, близкой к линейной, расположенный в однородном внешнем магнитном поле, обладает магнитным моментом

$$I = \frac{V\mu H_\tau}{1 - \mu N}, \quad (\text{II.21})$$

где V – объем стержня, N – коэффициент размагничивания, μ – магнитная проницаемость материала стержня. Коэффициент размагничивания стержня при $p \gg 1$ может быть описан с помощью эмпирической формулы (II.17).

При размещении стержня во внешнем неоднородном магнитном поле будем предполагать, что приведенные выше формулы остаются справедливыми, но H_τ определяется выражением

$$H_\tau = \frac{1}{l} \int_0^l \mathbf{H} ds$$

и представляет собой среднее значение проекции вектора напряженности \mathbf{H} внешнего магнитного поля на продольную ось стержня. Здесь ds – ориентированный элемент длины стержня. Теперь, рассматривая систему, состоящую из n стержней, и учитывая их взаимное влияние, получаем для i -го стержня следующее выражение среднего значения $H_{\tau i}$ напряженности внешнего поля

$$H_{\tau i} = \mathbf{H} \mathbf{e}_i + \frac{1}{l_i} \sum_{j \neq i}^n \int_0^{l_j} \mathbf{H}_{rj} \mathbf{e}_j ds, \tag{II.22}$$

где l_i – длина, \mathbf{e}_i – орт продольной оси i -го стержня, \mathbf{H}_{rj} – напряженность поля, наведенного j -м стержнем в текущей точке i -го стержня (рис. II.9). Тогда с учетом выражений (II.19), (II.20) формулу (II.22) можно представить в виде

$$H_{\tau i} = \mathbf{H} \mathbf{e}_i - \frac{1}{l_i} \sum_{j \neq i}^n m_j [U_j(B_i) - U_j(A_i)].$$

Здесь m_j – магнитный заряд на концах j -го стержня, $U_j(A_i)$ и $U_j(B_i)$ – значения потенциала j -го стержня на концах i -го стержня.

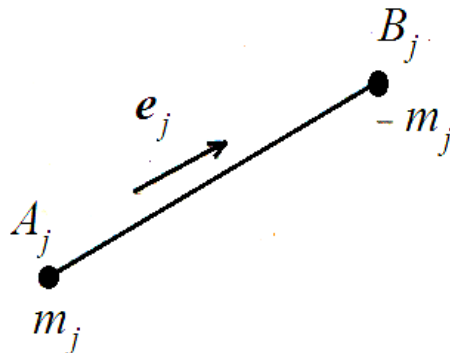


Рис. II.9. Аппроксимация стержня магнитным диполем при учете их взаимного влияния

Записывая магнитные моменты в виде (II.21) для всех стержней системы, получаем для нахождения магнитных зарядов систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} m_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Коэффициенты системы определяются следующими выражениями:

$$a_{ii} = \frac{V_i \mu_i}{l_i (1 + \mu_i N_i)},$$

$$a_{ij} = \left[U(x_{Aj}, y_{Aj}, z_{Aj}, x_{Bj}, y_{Bj}, z_{Bj}, x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai}) - \right. \\ \left. - U(x_{Aj}, y_{Aj}, z_{Aj}, x_{Bj}, y_{Bj}, z_{Bj}, x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi}) \right] / l_i, \quad (i \neq j),$$

$$b_i = \mathbf{H} e_i.$$

Напомним, что магнитный момент I связан с намагниченностью J стержня соотношением

$$I = MJ.$$

Она, в свою очередь, связана с магнитной индукцией B и истинной напряженностью H_{in} внутри стержня соотношениями

$$B = \mu_0 J, \quad B \approx \mu \mu_0 H_{in}. \quad (\text{II.23})$$

Второе соотношение из (II.23) выполняется тем точнее, чем ближе гистерезисная зависимость $B = B(H_{in})$ к линейной.

Оценка демпфирующих свойств системы стержней проводилась в предположении, что внешнее магнитное поле изменяется по синусоидальному по времени закону, а перемагничивание стержней происходит вдоль симметричных петель гистерезиса. Установление точной зависимости потерь за цикл перемагничивания представляет собой трудно выполнимую задачу. Из практики известно [145], что при малой напряженности перемагничивающего поля ($H_{in} \leq H_c$) применима модель Релея и потери пропорциональны квадрату амплитуды. Для средних значений напряженности ($H_c \leq H_{in} \leq H_s$, H_s – напряженность поля, при которой начинает сказываться насыщение материала) потери пропорциональны первой степени амплитуды. При $H_{in} \geq H_s$ потери практически не зависят от амплитуды поля. В соответствии с этим диссипативная функция $D(H_{in})$ потерь в единице объема стержня за цикл перемагничивания определяется выражениями

$$\begin{aligned}
 & \frac{D_1}{H_c^2} H_{in}^2, && \text{при } H_{in} < H_c \\
 & D_1 + \frac{D_2 - D_1}{H_s - H_c} (H_{in} - H_c), && \text{при } H_c \leq H_{in} \leq H_s \\
 & D_2, && \text{при } H_{in} > H_s
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

График таким способом введенной функции изображен на рис. II.10. Не теряя общности, полагаем $D_2 = 1$. Для получения реальной величины потерь в стержне за цикл перемагничивания диссипативную функцию необходимо умножить на объем V стержня и площадь S_{max} предельной петли гистерезиса. В системе СИ потери будут иметь размерность $\text{Тл} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^{-1}$. Приведенные соотношения (II.18)-(II.24) позволяют по заданным напряженности внешнего магнитного поля, координатам концов стержней, их объемам и магнитным проницаемостям определить уточненные значения основных характеристик магнитного состояния стержней с учетом их взаимного размагничивания. Алгоритм был реализован численно.

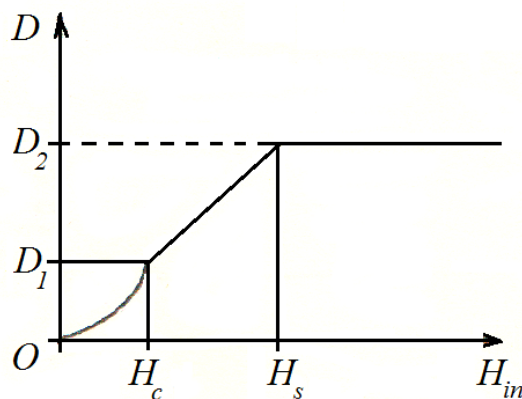


Рис. II.10. Диссипативная функция

Ранее было показано [8,146], что для уменьшения влияния остаточной намагниченности на характеристики установившегося движения спутника стержни должны быть идентичными и образовывать взаимно ортогональную «тройку». Если стержней, скажем, по требованиям объема должно быть больше трех, то их число необходимо выбрать кратным трем и разбить на тройки, удовлетворяющие вышеприведенным требованиям на идентичность и взаимное расположение.

Исходя из конструктивных ограничений стержни могут быть расположены по-другому. Так, на спутнике МАК-А они располагались

на усеченном круговом конусе вдоль его образующих (рис. II.8). Координаты концов стержней в этом случае вычисляются, исходя из угла δ_k , на который следует повернуть k -ю тройку относительно исходного положения вокруг оси конуса. Угол δ_k вычисляется по формуле

$$\delta_k = \frac{2\pi(k-1)}{3n_3}.$$

Здесь k – номер тройки, n_3 – количество троек. Угол между соседними тройками равен $120^\circ/n_3$. Введем матрицу поворота

$$\mathbb{S} = (1 - \cos \varphi) \begin{pmatrix} p_1^2 + \cos \varphi & p_1 p_2 + p_3 \sin \varphi & p_1 p_3 - p_2 \sin \varphi \\ p_1 p_2 - p_3 \sin \varphi & p_2^2 + \cos \varphi & p_2 p_3 + p_1 \sin \varphi \\ p_1 p_3 + p_2 \sin \varphi & p_2 p_3 - p_1 \sin \varphi & p_1^2 + \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Эта матрица позволяет преобразовать координаты произвольного вектора \mathbf{a}_0 при его повороте на угол φ вокруг оси с компонентами p_1, p_2, p_3 единичного вектора, направленного вдоль нее, проходящей через начало координат, по следующей формуле $\mathbf{a} = \mathbb{S}\mathbf{a}_0$.

Вычисления проводились для случая, когда стержни одинаковые, а расстояния OB_i равны 0.171 м ($i = 1, \dots, n$), расстояния OA_i также одинаковые для всех стержней и варьировались от 0.02 м в сторону возрастания с шагом 0.005 м до величины, обеспечивающей наибольшее значение суммарных потерь в стержнях. Относительная магнитная проницаемость стержней полагалась равной 10^5 , $H_c = 1.2$ А/м, $H_s = 3H_c$. Выбранные параметры приблизительно соответствуют параметрам стержней, изготовленных из пермаллоя марки 79 НМ с последующим отжигом в вакуумной печи по ГОСТ-10160-75 [147].

По результатам исследования, приведенным в таблице II.1, можно сделать следующий важный для конструктора вывод: для каждого размера поперечного сечения стержней существуют их оптимальные длина и количество. Так, для стержней с сечением 1×1 мм² их оптимальные длина $l_{\text{опт}} \approx 0.111$ м и количество $n_{\text{опт}} = 9$. В то же время для стержней с сечением 0.1×0.1 мм² их оптимальные длина $l_{\text{опт}} \approx 0.116$ м и количество $n_{\text{опт}} = 36$, но при объеме в 24 раза меньше потери в 23 раза больше, чем в предыдущем случае. В

четвертом столбце таблицы для каждой группы поперечного сечения стержней выделено для наглядности подчеркиванием максимальное значение достигаемых потерь. Имеет место тенденция увеличения потерь с уменьшением размеров поперечного сечения при одновременном возрастании количества стержней. Одно из возможных ограничений в использовании этой тенденции заключается в следующем: при толщине материала менее 0.05 мм наблюдается анизотропия его свойств.

Таблица II.1. Эффективность демпфирования в зависимости от размера и количества стержней

Размер попер. сечения, мм × мм	Длина стержня l , м	Кол-во стержней n , [штук]	Потери $\times 10^7$, S_{max} , Нм ² /Тл	Магнитная индукция, В, [Тл]	Напряженность поля Н, [А/м]	Значение функции D
	0.136	3	0.232	0.036	0.286	0.019
	0.121	6	0.229	0.023	0.181	0.008
1 × 1	0.111	9	<u>0.352</u>	0.016	0.130	0.004
	0.106	12	0.347	0.012	0.099	0.002
	0.101	15	0.331	0.010	0.079	0.001
	0.141	3	0.680	0.121	0.962	0.214
	0.123	6	1.03	0.080	0.640	0.095
0.5 × 0.5	0.116	9	1.16	0.058	0.461	0.049
	0.111	12	<u>1.18</u>	0.045	0.357	0.029
	0.106	15	1.15	0.036	0.289	0.019
	0.146	3	0.728	0.279	2.217	0.616
	0.131	6	1.78	0.190	1.509	0.419
0.3 × 0.3	0.116	9	2.67	0.147	1.167	0.315
	0.111	12	2.80	0.115	0.918	0.195
	0.106	15	2.81	0.094	0.752	0.131
	0.106	18	2.75	0.071	0.661	0.070
	0.151	3	0.136	1.14	9.072	1.0
	0.151	6	0.544	0.777	6.186	1.0
	0.146	12	2.10	0.484	3.855	1.0
0.1 × 0.1	0.126	18	4.08	0.456	3.631	1.0
	0.116	24	5.61	0.380	3.022	0.839
	0.111	30	6.95	0.315	2.503	0.695
	0.116	36	<u>8.25</u>	0.248	1.978	0.549

II.4. Лабораторное исследование магнитных свойств гистерезисных стержней

Нередки случаи, когда продолжительность выхода спутника на установившийся режим и точность ориентации в этом режиме заметно отличаются от расчетных. Причины могут быть разные. Например, для спутника с пассивной магнитной системой стабилизации это

может быть невыполнение требуемых условий при отделении от носителя, когда спутник изначально вращается вокруг оси ориентации и это вращение плохо демпфируется гистерезисными стержнями [13]. Другой причиной может быть несоответствие заявленных паспортных параметров стержней их реальным значениям. Паспортные значения этих параметров задаются расчетным путем, они отличаются от параметров исходного листового материала и зависят как от формы стержней, так и от способа их термической обработки.

Сомнения в величине коэрцитивной силы всегда сопровождают разработчиков пассивных магнитных систем, поскольку известно, что для получения малых значений коэрцитивной силы магнитный материал отжигают по весьма сложной циклограмме. Без отжига или при отжиге с даже с небольшими отклонениями от циклограммы коэрцитивная сила стержня может иметь значения на порядок больше, чем у правильно отожженного, что с высокой степенью вероятности может привести к неприемлемой погрешности ориентации спутника. Кроме того, коэрцитивная сила и другие параметры уже отожженных стержней очень чувствительны к возможным механическим деформациям стержней в процессе транспортировки или монтажа. В связи с этим возникает задача оперативного контроля их свойств с помощью лабораторного оборудования перед сборкой спутника.

Определение параметров стержней требует тщательного анализа происходящих в них явлений [10,87,148]. Существует несколько способов измерения магнитных характеристик стержней. Наиболее подходящим для их оперативного контроля представляется индукционный метод, суть которого заключается в следующем. Вытянутое тело помещается в известное периодически меняющееся поле соленоида и по электродвижущей силе (ЭДС), наведенной по закону электромагнитной индукции в размещенной на теле измерительной катушке, определяется его намагниченность. Известно, что тело в виде эллипсоида с любым соотношением осей в стационарном однородном поле намагничивается однородно. Почти однородно намагничивается круглый цилиндр с большим отношением длины к диаметру. При анализе результатов измерений обычно пренебрегают неоднородностью намагничивания, если тела имеют форму, близкую к сильно вытянутому цилиндру, что и имеет место в случае гистерезисных стержней.

Основной интегральной характеристикой демпфирующего магнитного гистерезисного стержня является петля гистерезиса. С ее помощью можно оценить потери энергии, т.е. демпфирующие свойства стержня, и остаточный магнитный момент, определяющий возмущающее воздействие стержня на установившееся движение спутника. Остаточный магнитный момент во многом обуславливается коэрцитивной силой стержня. Если эта сила меньше расчетной, то худшее, что может ожидать спутник в полете, – это его замедленный выход на номинальное (расчетное) движение, то есть увеличение времени переходного процесса. При коэрцитивной силе значительно больше расчетной, то есть при широкой главной петле гистерезиса, возникает высокая остаточная намагниченность и, как следствие, появляются большие возмущающие моменты, которые могут привести спутник на нерасчетное угловое движение. Тем самым, при сборке спутника необходимо быть уверенным, что реальная коэрцитивная сила не отличается значительно от расчетной. Отличие фактической коэрцитивной силы даже, скажем, в два раза, не приведет к катастрофическим последствиям. Хотя, конечно, такое значение коэрцитивной силы приведет к увеличению погрешности ориентации под действием остаточной намагниченности стержней.

Для экспериментального построения петли гистерезиса используется электрическая схема, представленная на рис. П.1. Первичная цепь питается от источника напряжения. В цепи первичной катушки (соленоида) последовательно включено измерительное сопротивление R_x , напряжение на котором пропорционально току и, следовательно, напряженности магнитного поля H_e .

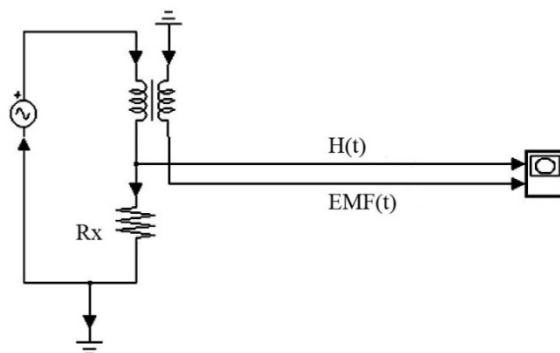


Рис. П.11. Схема измерительной установки

Напряженность магнитного поля внутри соленоида можно представить в виде

$$H_e = N_1 I_1 / l_{sol}.$$

На вход второго канала осциллографа подается сигнал

$$E_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Здесь $\Phi = BS$ – поток магнитного поля, I_1 – токи первичной катушки, N_1, N_2 – число витков катушек, S – площади сечения гистерезисного образца, B – индукция магнитного поля внутри стержня, l_{sol} – длина первичной катушки, E_2 – измеряемое напряжение на вторичной катушке. По закону Ома для участка цепи следует $I_1 = E_1 / R_x$, где E_1 – измеряемое напряжение на первичной катушке. Тогда напряженность внешнего поля H_e и магнитную индукцию B внутри образца можно вычислить следующим образом:

$$H_e = \frac{N_1 E_1}{l_{sol} R_x}, \quad (\text{II.25})$$

$$B = \frac{1}{N_2 S} \int E_2 dt. \quad (\text{II.26})$$

В состав лабораторного стенда для исследования свойств гистерезиса, как правило, входит генератор периодических сигналов, который подключен к катушке большого диаметра (рис. II.12). При изменении напряжения на концах катушки внутри нее индуцируется переменное магнитное поле, в которое помещается гистерезисный демпфер. С помощью измерительной катушки определяется величина магнитной индукции внутри гистерезисного материала. Сигнал генератора и сигнал с измерительной катушки поступают на цифровой осциллограф. Временная развертка полученных сигналов обрабатывается с помощью специального программного обеспечения на персональном компьютере. В результате обработки строится гистерезисная петля материала, по которой определяются фактическая коэрцитивная сила, магнитная проницаемость и индукция насыщения – основные параметры, характеризующие демпфирующие свойства гистерезисного демпфера [17]. В работе [149] предложен интересный метод компенсации ухода ноля при интегрировании, что позволяет получить приемлемую точность при экспериментальном определении характеристик магнитомягких материалов.

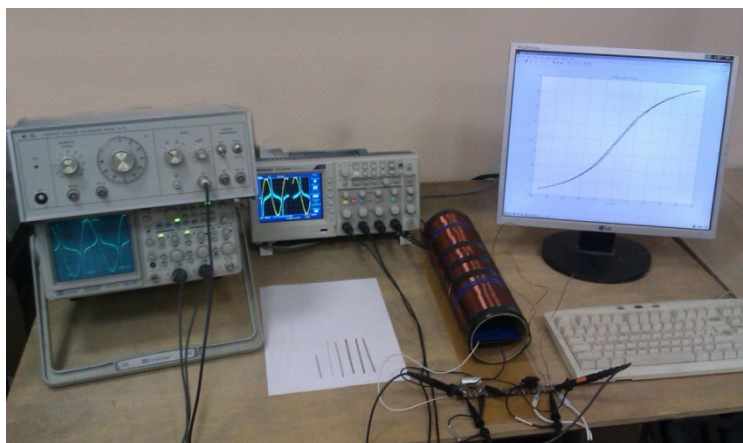


Рис. П.12. Лабораторная установка для исследования свойств гистерезисных демпферов

На рис. П.13 представлен пример зависимости измеряемых напряжений на первичной и вторичной катушках от времени для стержня размером 1x2x80 мм. Измерения сглаживаются с помощью рядов Фурье – берутся первые 10 членов разложения. Далее обработанный сигнал с измерительной катушки интегрируется численно методом трапеций. По формулам (П.25) и (П.26) вычисляются H_e и B соответственно.

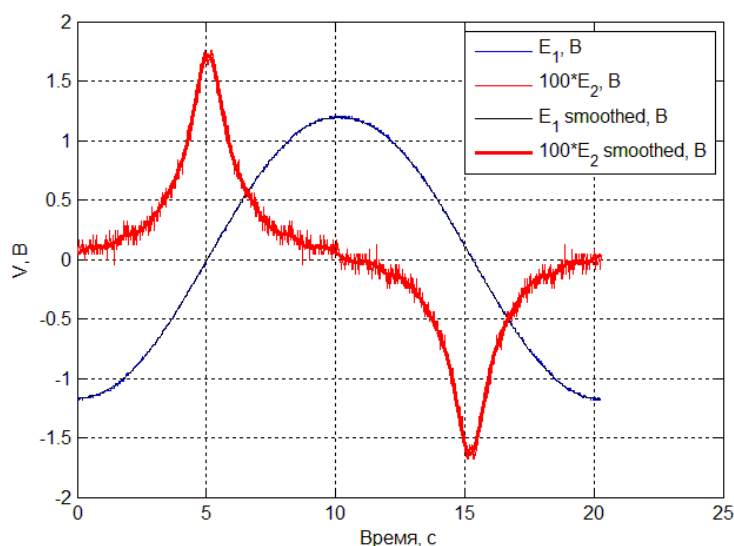


Рис. П.13. Сигналы с внешней и измерительной катушек

На рис. П.14 представлены гистерезисные петли для стержней размером 1x1x100 мм. Для них магнитная проницаемость $\mu = 5300$.

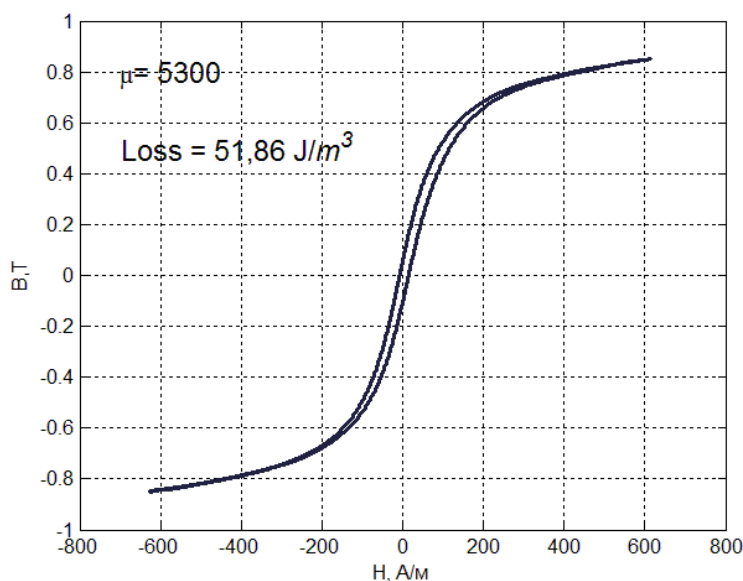


Рис. II.14. Гистерезисная петля для стержня 1x1x100 мм

Определение характеристик гистерезисных стержней для спутника SamSat-QB50

Спутник *SamSat-QB50* предназначен для мониторинга термосферы Земли. Спутник основан на стандартной технологии наноспутников типа *CubeSat*, состоит из трех блоков размером 10x10x10 см. На нем предполагается использование магнитных катушек, гистерезисных стержней и аэродинамического стабилизатора.

Площадь петли при перемагничивании в магнитном поле Земли зависит от магнитной проницаемости μ , равной тангенсу наклона петли при нулевом магнитном поле, и от коэрцитивной силы H_c – половины ширины петли при нулевом магнитном поле. Если коэрцитивная сила не зависит от формы и размеров гистерезисного материала, то магнитная проницаемость зависит от удлинения стержня – отношения его поперечного сечения к длине. Чем больше удлинение стержней, тем ближе магнитная проницаемость к паспортному значению материала. Для увеличения площади петли гистерезиса необходимо брать стержни с наибольшим удлинением, так как у таких стержней будет больше μ . Однако конструктивно количество стержней и их длина ограничены (рис. II.15). Технологически возможно установить только 8 стержней, причем их длина не должна превышать 80 мм.

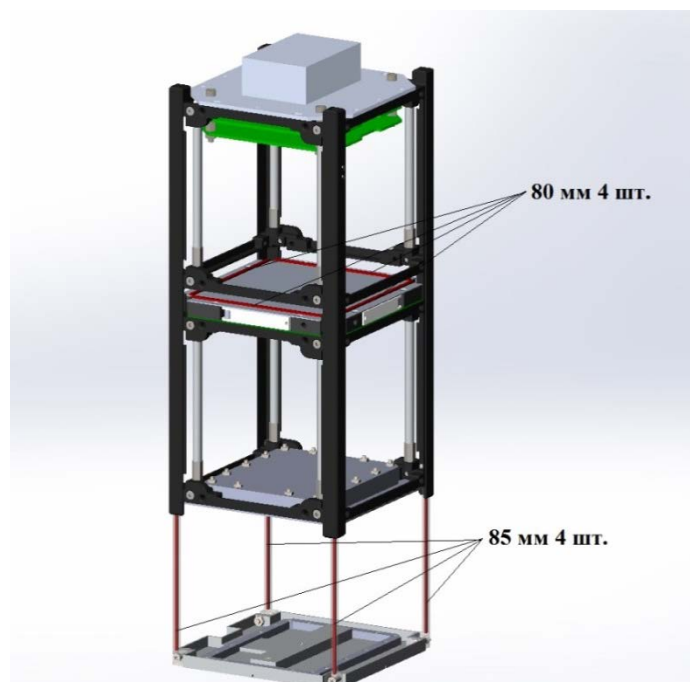


Рис. П.15. Возможное расположение стержней в теле спутника (рисунок СГАУ)

Для измерения магнитных характеристик гистерезисных стержней с размерами 1x2x80 мм (рис. П.16) были проведены лабораторные испытания.

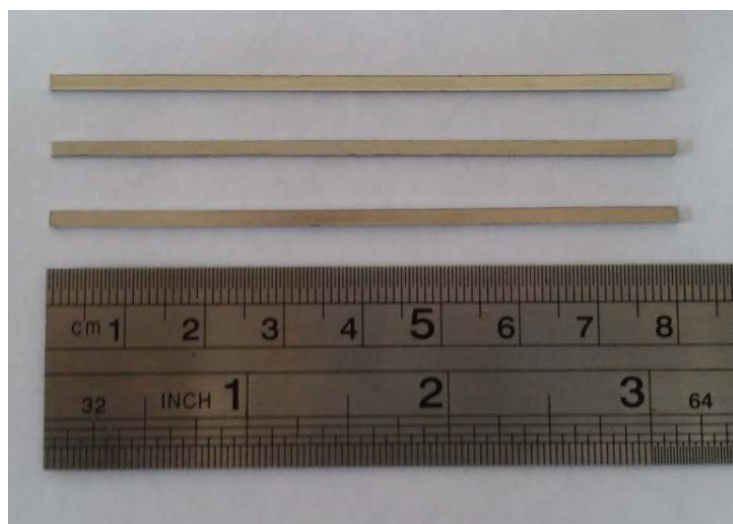


Рис. П.16. Исследуемые гистерезисные стержни

На рис. П.17 и рис. П.18 представлены гистерезисные петли для стержней размером 1x2x80 мм. Для них магнитная проницаемость $\mu = 730 \pm 30$, коэрцитивная сила составляет $H_c = 3 \pm 1$ А/м.

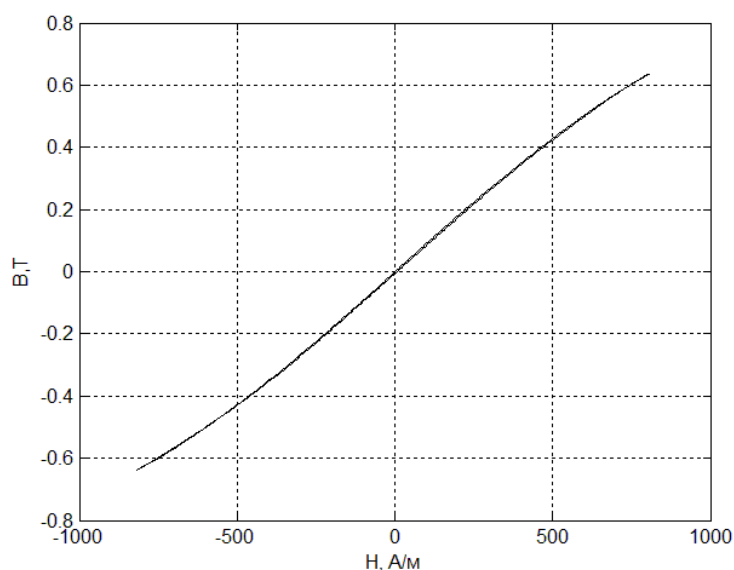


Рис. П.17. Гистерезисная петля для стержня 1x2x80 мм

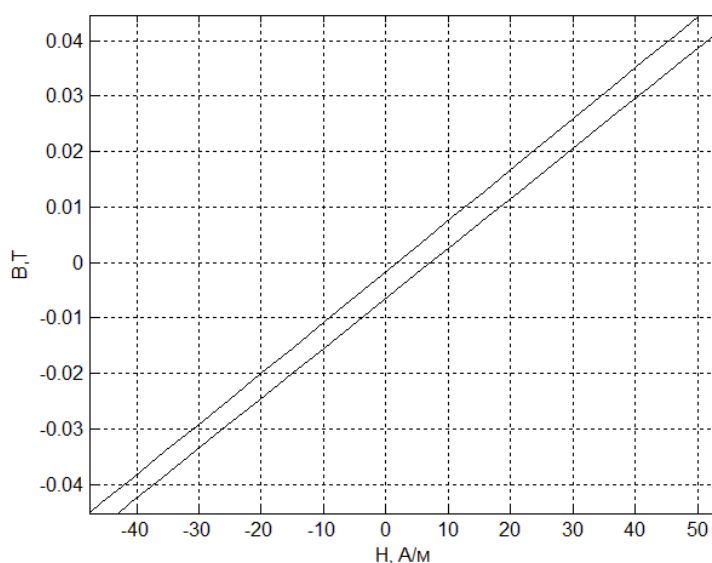


Рис. П.18. Гистерезисная петля для стержня 1x2x80 мм (увеличение)

*Определение свойств гистерезисной пластины
наноспутника Veosat-3*

На кубсате Берлинского технического университета *Veosat-3*, запущенном 21 апреля 2013 года, впервые в качестве демпфера использовалась гистерезисная пластина, которая технологически удобно вписывается в грань куба наноспутника (рис. П.19). Однако демпфирующие свойства пластины не были проверены экспериментально перед запуском. Лабораторные исследования уменьшенной копии гисте-

резинной пластины, использованной на кубсате *Beesat-3*, были проведены после того, как спутник не вышел на связь.

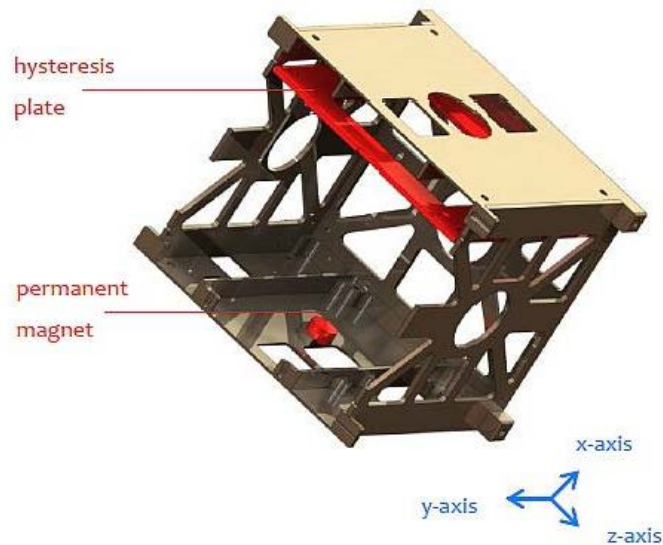


Рис. П.19. Пассивная магнитная система *Beesat-3* (рисунок *TUB*)

При лабораторном исследовании гистерезисных свойств материалов необходимо учитывать поле, которое создается самим образцом. Это поле сильно зависит от формы образца и обычно характеризуется размагничивающим фактором N . Поле внутри образца определяется формулой:

$$H = \frac{BN}{\mu_0(N-1)} - \frac{H_e}{N-1}.$$

Коэффициент размагничивания сжатого эллипсоида вращения, имеющего одну малую полуось, отношение которой к большой равно $1/m$, рассчитывается по следующей формуле:

$$N = \frac{1}{2} \left[\frac{m^2}{(m^2-1)^{3/2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\right) - \frac{1}{m^2-1} \right]. \quad (\text{П.27})$$

Размагничивание пластины можно грубо оценить с использованием формулы (П.27). Полученные экспериментальные данные показывают (рис. П.20), что измеряемая петля сильно зависит от частоты изменения внешнего поля. Это вызвано тем, что при больших частотах (больше 0.5 Гц) заметный вклад в изменение магнитного потока вносят токи Фуко.

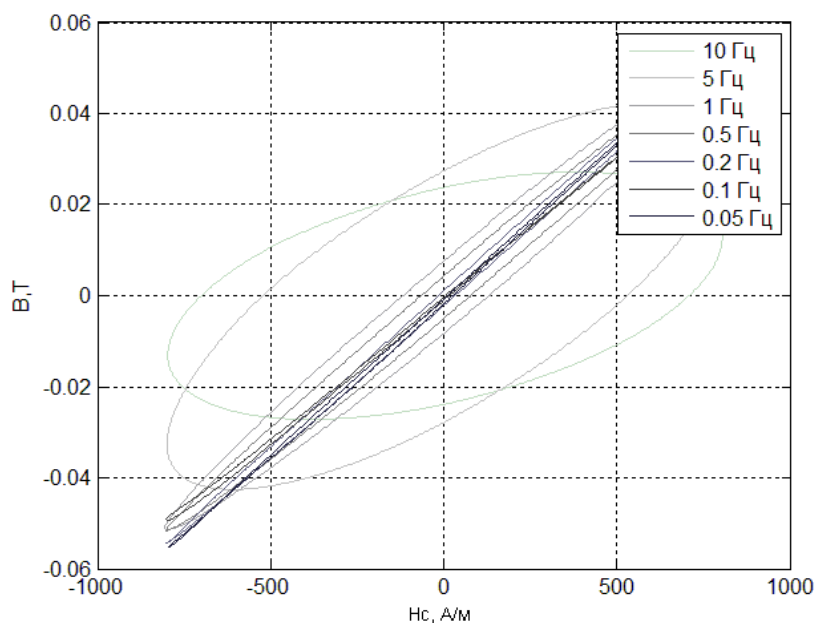


Рис. II.20. Петли для полой пластины без учета размагничивания, прогон по частотам

По формуле (II.27) можно получить оценку коэффициента размагничивания, приближая пластину эллипсоидом с отношением большой полуоси к малой $m = 28.5 \text{ мм} / 0.6 \text{ мм} = 47.5$. Коэффициент размагничивания при этом равен $N = 0.016$. При таком коэффициенте размагничивания петли полой пластины выглядят так, как показано на рис. II.21.

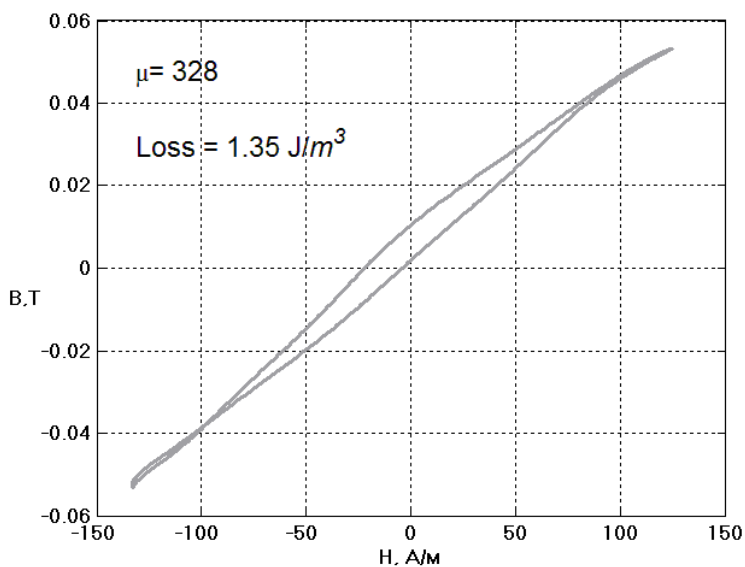


Рис. II.21. Гистерезисная петля полой пластины на частоте 0.05 Гц

На графике также приведено значение магнитной проницаемости и гистерезисные потери при перемагничивании за один период на единицу объема материала. Для сплошной пластины потери несколько меньше, так как внешнее поле меньше проникает в материал за счет размагничивания. Гистерезисные потери всей пластины можно оценить как гистерезисные потери единицы объема, умноженные на объем:

$$E_{hol} = 1.35 \text{ J / м}^3 \cdot 2.35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 3.2 \cdot 10^{-6} \text{ J} .$$

Сравним потери пластин с потерями гистерезисного стержня прямоугольной формы и размерами $1 \times 1 \times 100$ мм, изготовленного из материала пермаллой 79 НМ. Гистерезисная петля для стержня с учетом размагничивания также получена экспериментально. Гистерезисные потери такого стержня составляют

$$E_{rod} = 52 \text{ J / м}^3 \cdot 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 = 5.2 \cdot 10^{-6} \text{ J} .$$

Таким образом, один стержень по эффективности гистерезисных потерь рассеивает энергии почти в 2 раза больше за один цикл перемагничивания и можно сделать вывод, что использование пластины в качестве гистерезисного демпфера не является эффективным.

Приложение III. Гистерезисные стержни в составе других пассивных систем ориентации

В разделе 6 рассмотрено применение гистерезисных стержней в составе пассивных магнитных систем ориентации, когда геомагнитное поле используется для создания как восстанавливающего, так и демпфирующего моментов. Однако гистерезисные стержни нашли свое применение и в составе систем ориентации, где восстанавливающий момент создается другими, отличными от магнитных, устройствами. Рассмотрим примеры их применения в составе пассивных гравитационной и аэродинамической систем ориентации.

III.1. Пассивная гравитационная система ориентации с гистерезисными стержнями

Equation Chapter 3 Section 1 Пик применения гистерезисных стержней в составе гравитационной системы ориентации пришелся на 60-е и 70-е годы прошлого столетия. Примерами их использования могут служить американские спутники серии *Transit* – 1963-22A, 1964-26A [45]. Исследования динамики гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями были проведены в [150] с использованием аппроксимации петли гистерезиса эллипсом. Еще более простая модель гистерезиса в виде вязкого трения использовалась в работах [151,152]. Движение спутника в плоскости полярной орбиты в рамках модели параллелограмма, когда стержень установлен вдоль одной из главных осей инерции, изучено в [22].

Цикл работ [8,9,89,153], был посвящен анализу плоских и пространственных движений гравитационно-ориентированного спутника при произвольной ориентации стержней относительно его главных осей инерции и произвольном наклонении орбиты. В этих работах аналитические результаты получены в рамках модели параллелограмма, а численные – с использованием улучшенной модели гистерезиса. На полярной орбите рассмотрена конфигурация, когда гистерезисные стержни лежат в плоскости двух главных центральных осей инерции спутника, которые, в свою очередь, лежат в плоскости орбиты. Уравнения движения линеаризуются в окрестности устойчивого положения равновесия, существующего при отсутствии стержней, и приводятся к уравнениям в стандартном для применения метода усреднения

Крылова-Боголюбова. Предположение, что действие восстанавливающего гравитационного момента является определяющим, а влияние демпфирующего момента мало, позволяет ввести малый параметр ε и провести усреднение правых частей линеаризованных уравнений по явно входящему времени и быстрой переменной – угловой фазе колебаний. Рассмотрены два различных способа расположения стержней по отношению к главным осям инерции спутника. Если стержни установлены под углом к главным осям, то получен экспоненциальный закон изменения амплитуды малых колебаний спутника от аргумента широты u ,

$$A(u) = A(u_0) \exp \left[-\frac{9\varepsilon k \nu_p}{2\pi} (u - u_0) \right], \quad (\text{III.1})$$

где $k = H_c/H_0$ – аналог безразмерной коэрцитивной силы (параметр модели параллелограмма, см. (3.1)), u_0 – начальное значение аргумента широты, $\nu_p = e_1^2 e_3^2 \left[(e_1^2 + 4e_3^2)^{-3/2} + (4e_1^2 + e_3^2)^{-3/2} \right]$, $e_3^2 = 1 - e_1^2$ – зависящий от ориентации стержней в теле спутника безразмерный параметр для двух взаимно ортогональных стержней. Как легко видеть из приведенной формулы, при расположении стержней параллельно главным осям инерции ($e_1 = 0$) демпфирование отсутствует в рассматриваемом приближении. Это значит, что для стержней, параллельных главным осям, полученные формулы не дают ответа. Удержание следящих членов по степеням угла отклонения спутника от точной орбитальной ориентации позволяет получить выражение для зависимости амплитуды от аргумента широты при расположении стержней параллельно главным осям инерции. Зависимость амплитуды от времени в этом случае принимает степенной вид

$$A_p(u) = A_p(u_0) \left[1 + \frac{81\varepsilon k A_p^2(u_0)}{32\pi} (u - u_0) \right]^{-1/2}. \quad (\text{III.2})$$

Следует обратить внимание на то, что при исследовании колебаний спутника относительно вектора \mathbf{H} достоверные результаты получаются при использовании как модели параллелограмма (3.1), так и модели Релея (3.2). Это вызвано тем, что требование модели Релея на симметричное (или почти) перемагничивание стержней, то есть на образование симметричных петель гистерезиса, в режиме магнитной ориентации выполняется. Эта модель дает правдоподобные количе-

ственные результаты. По этой причине в разделе 6 была использована модель Релея для проведения аналитических исследований.

При аналитическом исследовании режима гравитационной ориентации с использованием метода усреднения за оборот спутника по орбите на перемагничивание стержня из-за вращения стержня относительно вектора \mathbf{H} накладывается перемагничивание за счет колебаний спутника относительно местной вертикали. Имеет место весьма сложное перемагничивание стержня. Это препятствует применению модели Релея, и пришлось ограничиться использованием модели параллелограмма, в частности, при получении зависимостей (III.1) и (III.2).

Для проведения численных расчетов при произвольных начальных условиях была использована улучшенная модель гистерезиса, дающая достоверные количественные результаты.

Оптимальное положение стержней с точки зрения быстродействия системы ориентации – под углом 45° к осям инерции. Анализ вынужденного решения линеаризованных уравнений показал, что в плоском случае для уменьшения вклада стержней в амплитуду установившегося движения необходимо установить два идентичных взаимно ортогональных стержня или группу из соответствующего количества идентичных стержней, консервативная часть суммарного вектора намагниченности которых коллинеарна местному вектору напряженности геомагнитного поля. При таком расположении лишь гистерезисная часть, а не полная намагниченность стержня, будет создавать вынужденное движение.

Нерезонансные пространственные движения трехосного спутника на орбите с произвольным наклоном исследованы в [153]. Линеаризованная в окрестности положения равновесия система уравнений приведена к уравнениям в стандартном виде. Из уравнений первого приближения для амплитуд после усреднения по явно входящему времени и трем быстрым переменным, соответствующим трем колебательным степеням свободы, получены выражения для экспоненциального по времени закона их убывания. Построено выражение для вынужденного решения и определен по аналогии с плоским случаем оптимальный состав стержневой группы – три идентичных взаимно ортогональных стержня. Из-за сложного вида показателей экспоненты потребовалась численная оптимизация степени устойчиво-

сти. Построены сечения эквиповерхности степени устойчивости. Максимальная степень устойчивости пространственных колебаний достигается при таком расположении стержней, когда каждый из них направлен по биссектрисе телесного угла, образованного главными осями инерции спутника. Причем с изменением наклона орбиты оптимальная по быстродействию ориентация стержней практически не меняется. Сравнение степеней устойчивости плоских и пространственных колебаний показывает, что в большей части зоны устойчивости быстродействие по каналам крена и рыскания существенно превышает быстродействие по тангажу. Здесь впервые были исследованы характеристики установившихся и переходных пространственных движений на орбите с произвольным наклоном в зависимости от расположения стержней в теле спутника и решен вопрос об оптимальном расположении стержней для нерезонансного случая.

При уменьшении угла между одним из стержней и осью максимального момента инерции, которая при малых отклонениях спутника близка к нормали к плоскости орбиты, происходит увеличение интенсивности демпфирования пространственных возмущений, выводящих спутник из плоскости орбиты. Результаты анализа динамики спутника с ортогональным стержнем приведены в [9]. Общий вид уравнений движения позволил сделать вывод о том, что в нерезонансном случае этот стержень не влияет на движение спутника в плоскости орбиты, поэтому для оптимизации по быстродействию системы демпфирования тангажных колебаний справедливы изложенные в [8] результаты. При исследуемом расположении демпфирующих стержней малые колебания спутника затухают за конечное время. Скорость затухания колебаний пропорциональна $\sin i$, что говорит о большей эффективности описываемой конфигурации стержней на приполярных орбитах.

Выводы, сделанные на основе анализа усредненной системы уравнений движения [9], согласуются с результатами численного интегрирования исходной нелинейной системы с использованием улучшенной модели гистерезиса. Область действия экспоненциального закона ограничивается лишь пределами справедливости принятого линейного по амплитуде пространственных колебаний приближения, в то время как в рассматриваемом здесь случае на амплитуду начальных колебаний следует наложить дополнительные условия с тем, чтобы значение амплитуды попало в область притяжения номинальным ре-

жимом. Получены достаточные условия попадания спутника в область притяжения номинального режима.

В [9] также исследуется один из возможных резонансных случаев и анализируется возможность увеличения скорости демпфирования колебаний спутника по тангажу за счет выбора его инерционных характеристик, обеспечивающих выполнение резонансных соотношений между частотой колебаний спутника в плоскости орбиты и одной из частот пространственных колебаний (так называемый внутренний резонанс). В этом случае движения по крену, рысканию и тангажу перестают быть независимыми уже в линейном приближении по углам ориентации через слагаемые, соответствующие демпфирующему моменту, и можно было бы надеяться на затухание колебаний по тангажу также за конечное время из-за «перекачки» энергии в канал, где затухание происходит по закону сухого трения. Рассмотрен случай, когда собственная частота колебаний спутника по тангажу совпадает с одной из собственных частот колебаний по крену – рысканию. Было обнаружено, что коэффициенты в уравнениях, отвечающие перекрестным членам, не превышают $5 \cdot 10^{-3}$, в то время как характерные величины коэффициентов при нерезонансных слагаемых находятся в интервале 0.4-0.6. Отсюда следует, что слагаемые, наличие которых обусловлено резонансом, на два порядка меньше слагаемых, присутствовавших в системе уравнений движения без резонанса. Поэтому в интересующем нас случае расположения гистерезисных стержней рассматриваемый резонанс не меняет на ожидаемом временном интервале характер движения спутника, существующий в отсутствии резонанса. Это подтверждается и численными расчетами.

Важный с точки зрения приложений случай осесимметричного гравитационно-ориентированного спутника, в теле которого установлены гистерезисные стержни, рассмотрен в [154]. Вводятся полусвязанные оси, что позволяет упростить уравнения движения. Аналогично тому, как это делалось для трехосного спутника, линеаризованные уравнения движения преобразуются к уравнениям в стандартном виде с той лишь разницей, что линеаризация уравнений производится в окрестности стационарного вращения вокруг оси симметрии. В рамках предположения о вытянутости эллипсоида инерции спутника на выбранном стационарном вращении его ось симметрии составляет небольшой угол с местной вертикалью. Усреднение уравнений прово-

дится по явному времени и быстрым переменным, в качестве которых выбираются фазы углов, описывающих колебания оси симметрии, и угол поворота спутника вокруг этой оси. Этому способствует предположение, что резонансное соотношение между соответствующими частотами не выполняется. Рассматриваются уравнения для медленных переменных – амплитуд A_1, A_2 колебаний оси симметрии и скорости поворота спутника вокруг этой оси.

Основная проблема при проведении усреднения заключается в отыскании решения уравнения $dH_\tau/dt = 0$, где H_τ – проекция вектора \mathbf{H} на продольную ось стержня. В двух практически важных частных случаях удастся получить усредненные уравнения движения, допускающие решение в виде квадратур либо в конечном виде. В общем случае вычисление квадратур проводилось численно. При медленном осевом вращении спутника удалось показать, что закон изменения медленных переменных носит экспоненциальный по времени характер. Были получены конечные выражения для показателей экспоненты в зависимости от ориентации стержня в теле спутника и наклона орбиты. Определены экстремумы и значения параметров, доставляющих экстремум этих показателей, установлена особенность для показателя экспоненты, определяющего осевое вращение, при расположении стержня ортогонально оси симметрии. Этот особый случай при $i = \pi/2$ и произвольной скорости осевого вращения рассмотрен отдельно.

Не останавливаясь здесь на причине вырождения, сформулируем результаты. Ортогональный оси симметрии спутника гистерезисный стержень при относительно большой угловой скорости осевого вращения эффективно гасит эту скорость практически по линейному от времени закону. Возмущенные движения оси симметрии демпфируются не столь эффективно, но с уменьшением скорости вращения эффективность демпфирования движений оси симметрии возрастает. Причем движение оси вне плоскости орбиты эффективно демпфируется и при снижении скорости до нуля. Скорость демпфирования тангажных колебаний и осевого вращения при малых скоростях вращения уменьшается. Для движения оси симметрии эти результаты совпадают с результатами, полученными при малых скоростях. Кроме того, сопоставление этих результатов позволяет сделать вывод о том, что тангажные колебания демпфируются наиболее эффективно при

установке стержня под вполне определенным (не ортогонально оси симметрии) углом к оси симметрии.

Построено вынужденное решение, обусловленное возмущающим действием гистерезисных стержней, в виде рядов Фурье. Численно построены изолинии показателей экспонент в случае трех идентичных взаимно ортогональных стержней. Получен следующий вывод: при достаточно малой скорости осевого вращения для повышения эффективности демпфирования малых колебаний по тангажу трехгранник из стержней следует установить так, чтобы их единичные векторы имели одинаковые проекции на ось симметрии спутника. Эффективность демпфирования малых колебаний по крену и малой скорости осевого вращения возрастает при установке стержней ортогонально оси симметрии.

III.2. Наноспутник *REFLECTOR* с пассивной гравитационной системой ориентации

Наноспутник *REFLECTOR* (**R**etro-**r**eflector **E**nsemble **F**or **L**aser **E**xperiments **C**alibration **T**esting **O**ptical **R**esearch, выведен на орбиту 10 декабря 2001 года) предназначен для проведения экспериментов по оптическому сопровождению космических объектов. При выполнении таких экспериментов существенным мешающим фактором является мерцание атмосферы. Для изучения способов компенсации мерцания в реальном времени требуется объект с известными оптическими свойствами. Этот спутник представляет собой предварительно тарированный объект для выполнения экспериментов с лазерными источниками излучения. Спутник разработан в НИИ прецизионного приборостроения при участии ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в части создания системы ориентации, моделирования углового движения спутника, выбора параметров системы ориентации, изготовления демпфирующего устройства, разработки методики для определения его фактического углового движения и обработки результатов внешнетраекторных измерений, проведенных с наземной лазерной станции.

Описание задач, решаемых спутником, его конструкции и обоснование выбора параметров лазерных ретрорефлекторов, составляющих полезную нагрузку, приведены в [155]. Результаты моделирования динамики спутника и вопросы выбора параметров элементов его системы ориентации изложены в [13,156]. Следует отметить, что спутник представляет собой полностью пассивное устройство. Какое-

либо изменение его геометрической конфигурации можно выполнить только одновременно с отделением спутника от носителя. Из-за отсутствия на спутнике чего-либо за исключением лазерных ретрорефлекторов невозможно изменение конфигурации и использование активных методов управления его угловым движением. Это и предопределило тип системы ориентации и методы определения его фактического углового движения.

Общая масса спутника составляет около 7 кг. Вид инженерной модели спутника без дополнительных грузов и гистерезисных стержней гравитационной системы ориентации приведен на рис. III.1. Запуск спутника осуществлен в качестве попутной нагрузки на борту российского спутника *METEOR-3M* на круговую орбиту высотой 1020 км и наклоном 99.8° .



Рис. III.1. Внешний вид инженерной модели наноспутника *REFLECTOR*

Для формирования трехосного тензора инерции на спутнике были установлены дополнительные грузы, а для демпфирования возмущенных движений установлены гистерезисные стержни.

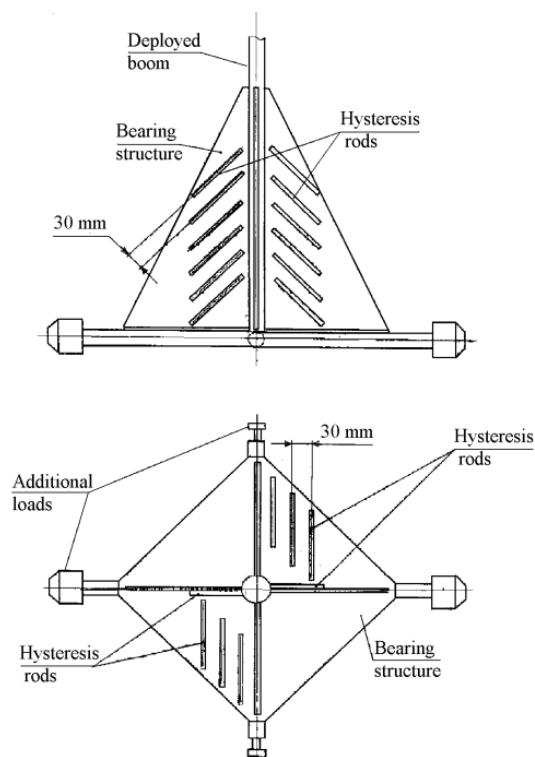


Рис. III.2. Схема размещения гистерезисных стержней и дополнительных грузов

При выборе параметров гистерезисных стержней были использованы результаты, озвученные в предыдущем разделе.

Схема размещения дополнительных грузов и гистерезисных стержней представлена на рис. III.2. Стержни, лежащие в плоскости орбиты, были установлены под углом 45° к главным осям инерции на достаточном удалении друг от друга во избежание взаимного размагничивания (верхний рисунок). Ортогональные им стержни лежат в плоскости, ортогональной местной вертикали, и параллельны третьей главной оси инерции, которая в ориентированном состоянии параллельна нормали к плоскости орбиты (нижний рисунок). Всего на спутнике было установлено 27 стержней длиной 110 мм и диаметром 0.3 мм, общим объемом 0.25 см^3 из пермаллоя марки 79 НМ.

Как уже говорилось выше, на спутнике были установлены лазерные ретрорефлекторы, а наблюдение за движением спутника велось с помощью международной сети лазерных телескопов высокого разрешения *ILRS*.

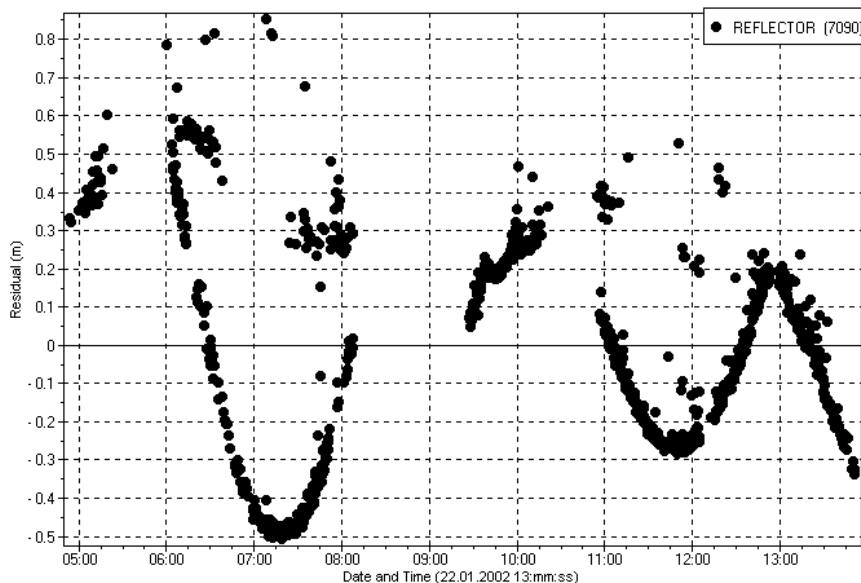


Рис. III.3. Расстояние от картинной плоскости до видимых ретрорефлекторов с соответствующим текущему расположению рефлектора знаком

Один из кадров наблюдения приведен на рис. III.3, где после предварительной обработки телеметрической информации в Центре управления полетом показаны расстояния от картинной плоскости, проходящей через центр масс спутника, до каждого видимого ретрорефлектора. После статистической обработки последовательности кадров за 50 дней полета удалось показать, что колебания спутника относительно орбитальной системы координат успешно демпфировались. Результаты анализа фактического движения спутника изложены в [157].

III.3. Аэродинамическая система ориентации с гистерезисными стержнями

Микроспутник *МАК-А* с аэродинамической системой ориентации был разработан на базе пассивного спутника-отражателя радиосигнала *ПИОН* и снабжен оригинальной пассивной аэродинамической системой ориентации. Аэродинамический восстанавливающий момент обеспечивается смещением центра масс спутника относительно центра давления. Демпфирующий момент реализуется гистерезисными стержнями. Фактическая ориентация спутника определяется на основе данных измерений магнитометра и акселерометра. Спутник был предназначен для автономного измерения плотности атмосферы в текущей точке орбиты с помощью акселерометра. Описанные в разделе II.3 результаты оптимизации количества и размеров гистерезисных

стержней относятся именно к анализу динамики этого спутника, точнее, к заключительной части этого анализа. Весьма громоздкие результаты анализа с использованием асимптотических и численных методов изложены в [138]. Отметим только, что при малой скорости вращения спутника вокруг оси симметрии, ориентируемой вдоль вектора скорости набегающего потока воздуха, закон затухания амплитуды малых колебаний оси симметрии спутника относительно этого вектора носит экспоненциальный характер, зависящий от наклона орбиты и ориентации стержней в теле спутника.

Иная конструкция спутника с аэродинамической системой ориентации предложена в проекте *SamSat-QB50*, разрабатываемом в рамках участия СГАУ в международном проекте *QB50*, предназначенном для мониторинга термосферы Земли. Спутник основан на стандартной технологии наноспутников типа *CubeSat*, состоит из трех блоков размером 10x10x10 см. На наноспутнике *SamSat-QB50* предполагается использование гибридной системы ориентации и стабилизации, состоящей из активной электромагнитной системы гашения начальной угловой скорости и из аэродинамико-гистерезисной системы. Аэродинамический момент появляется при трансформации 2U-кубсата в 3U-кубсат после отделения от ракеты-носителя. Трансформация спутника заключается в выдвигании стабилизатора, состоящего из полого 1U-блока, что приводит к смещению его центра давления относительно центра масс. Расчетная орбита спутника имеет высоту 400 км и наклонение 98° . Масса спутника составляет 1.95 кг. Схема возникновения основных сил и моментов изображена на рис. III.4.

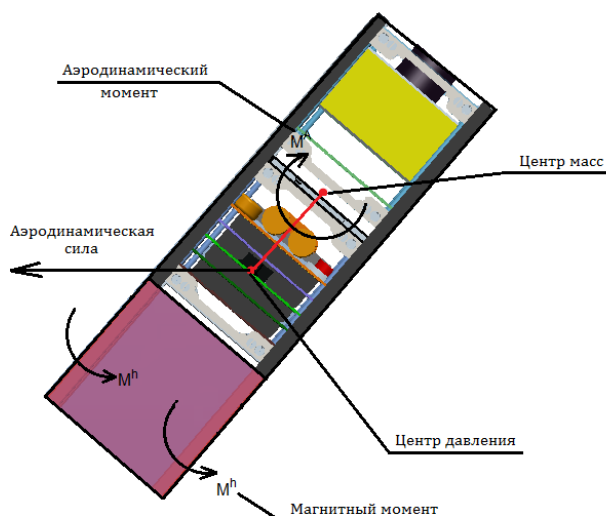


Рис. III.4. Динамическая схема наноспутника *SamSat-QB50* (рисунок СГАУ)

Угловое движение спутника моделировалось численно с использованием улучшенной модели гистерезиса. Геомагнитное поле аппроксимируется моделью прямого диполя. При вычислении восстанавливающего аэродинамического момента предполагается следующее: атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве; действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления, направленной против скорости центра масс спутника и не зависящей от его ориентации относительно набегающего потока. Плотность атмосферы вдоль орбиты спутника считается постоянной.

Требование, изложенное в разделе II.3, о взаимно ортогональном расположении идентичных гистерезисных стержней реализуется в спутнике *SamSat-QB50* по схеме, приведенной на рис. II.15. Каждый стержень изготовлен из пермаллоя 79 НМ и имеет размер 1x2x80 мм.

При начальной угловой скорости с проекциями вдоль продольной оси спутника $\pm 0.1^\circ/\text{с}$ и вдоль поперечного направления $\pm 0.5^\circ/\text{с}$ и необходимой точности ориентации в установившемся движении (не хуже $\pm 10^\circ$ относительно вектора набегающего потока воздуха) пример переходного процесса (начиная со вторых суток) имеет вид, изображенный на рис. III.5.

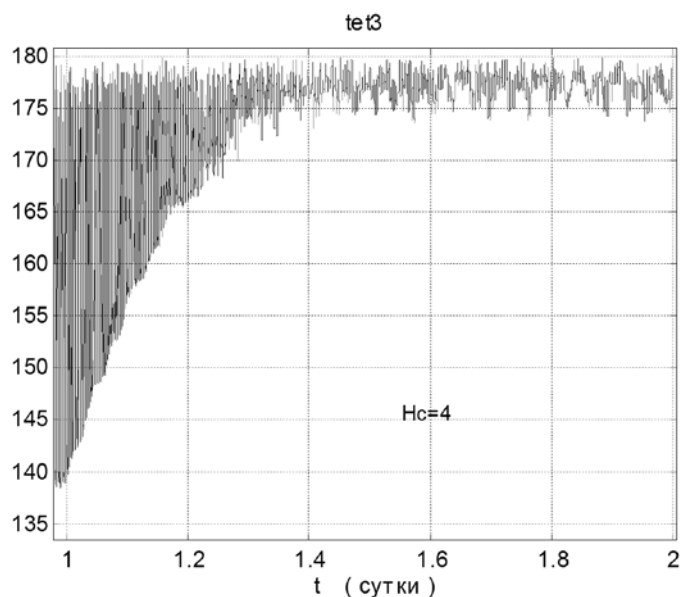


Рис. III.5. Угол между продольной осью спутника и вектором скорости.

Случай восьми стержней 1x2x80 мм с $H_c = 4 \text{ А/м}$

Результаты моделирования динамики спутника и лабораторные испытания гистерезисных стержней [139] подтверждают возможность выполнения требований полетного задания.

Приложение IV. Методы исследования

Метод усреднения

Equation Chapter 4 Section 1 Опишем метод усреднения [71], который используется для анализа переходных процессов. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= y_0(x) + \varepsilon Y(x, y),\end{aligned}\tag{IV.1}$$

параметр ε считается малым. Тогда переменные разделяются на быстрые y и медленные x , которые являются векторами. Функции X и Y 2π -периодичны по y . Будем искать замену переменных

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}), y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}),\tag{IV.2}$$

приводящую (IV.1) к системе вида

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon A_1(\bar{x}), \frac{d\bar{y}}{dt} = y_0(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon B_1(\bar{x}).\tag{IV.3}$$

Это общий путь асимптотических методов для анализа систем вида (IV.1). В общем случае замена (IV.2) содержит слагаемые большего порядка малости. В этом случае анализ усложняется, если y является вектором (в системе несколько быстрых переменных). Функции u_1, v_1 конечны. Подставляя (IV.2) в (IV.1) и учитывая (IV.3), получаем уравнения для определения u_1

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial u_1}{\partial y_i} y_{0i}(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}),\tag{IV.4}$$

где k – число быстрых переменных. Так как функция X периодична, то ее можно разложить в ряд Фурье

$$X(\bar{x}, \bar{y}) = \sum a_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) \exp i(\sum n_j \bar{y}_j).$$

Поэтому будем искать u_1 в виде

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum b_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) \exp i(\sum n_j \bar{y}_j) + \sum c_j(\bar{x}) \bar{y}_j.$$

Учитывая (IV.4), получаем

$$\begin{aligned}b_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) &= \frac{a_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x})}{i \sum n_j \bar{y}_j}, \\ \sum c_j(\bar{x}) y_{0j}(\bar{x}) &= a_{0, \dots, 0}(\bar{x}) - A_1(\bar{x}).\end{aligned}$$

Так как u_1 конечна, все c_j должны быть равны нулю, иначе при росте \bar{y} функция u_1 может неограниченно возрасти. Следовательно,

$$a_{0,\dots,0}(\bar{x}) = A_1(\bar{x}),$$

но так как $a_{0,\dots,0}(\bar{x})$ является средним значением X , то

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \underbrace{\int \dots \int}_k X(\bar{x}, \bar{y}) dy_1 \dots dy_k = \bar{X}(\bar{x}).$$

Иными словами, A_1 – усредненная по быстрым переменным функция X . Принимая во внимание только первый порядок малости, для эволюции медленных переменных получаем систему

$$\dot{x} = \bar{x}, \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon \bar{X}(\bar{x}),$$

и на временном интервале $t \sim 1/\varepsilon$ точность определения медленных переменных $|x - \bar{x}| \sim \varepsilon$. Фактически, уравнения для эволюции медленных переменных получаются осреднением правых частей уравнения по быстрым переменным.

Метод Пуанкаре

При анализе установившихся движений используется метод Пуанкаре [73]. Представим уравнения движения (1.1)-(1.4) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$, \mathbf{f} – момент переносных, гравитационных и, возможно, гироскопических сил, дополненный нулевыми компонентами для кинематических соотношений, $\varepsilon \mathbf{g}$ – момент сил, создаваемых за счет действия магнитной системы (или, наоборот, действие магнитной системы определяющее, другие моменты имеют малое влияние на движение спутника), ε – малый параметр. Таким образом, рассматривается действие слабого магнитного момента на движение системы. Решение ищем в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + O(\varepsilon^2)$, где \mathbf{x}_0 – стационарное или общее периодическое решение невозмущенной системы. Тогда

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2),$$

где $F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$. Для вклада магнитной системы в решение получаем уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

Его решение позволяет определить точность достижения стационарного решения невозмущенной задачи (требуемой ориентации) при использовании магнитной системы.

Метод Артемьева

Предположим, что линеаризованные уравнения движения можно записать в виде системы порядка K

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{A}_1(u)\mathbf{x}. \quad (\text{IV.5})$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_0, \quad (\text{IV.6})$$

соответствующую движению спутника, например, без учета действия демпфирующего управляющего момента. Пусть известно решение системы (IV.6) – ее характеристические показатели λ_k и соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{\varphi}_k$. Чтобы уточнить это решение с учетом действия демпфирующего момента, представим решение системы (IV.5) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{k=1}^K \left(\boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \exp \left(\lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} + O(\varepsilon^{n+1}) \right) u = \\ &= \sum_{k=1}^K \left(\boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u) \right) \exp \left(\lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} \right) u + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Подставляя это выражение в (IV.5) и группируя члены при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 & \quad d\boldsymbol{\varphi}_k/dt + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\boldsymbol{\varphi}_k = 0, \\ \varepsilon^1 & \quad d\boldsymbol{\psi}_{k1}/dt + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\boldsymbol{\psi}_{k1} = -\mu_{k1}\boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\varphi}_k, \\ \varepsilon^2 & \quad d\boldsymbol{\psi}_{k2}/dt + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\boldsymbol{\psi}_{k2} = -\mu_{k1}\boldsymbol{\psi}_{k1} - \mu_{k2}\boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\psi}_{k1}, \\ \varepsilon^j & \quad d\boldsymbol{\psi}_{kj}/dt + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)\boldsymbol{\psi}_{kj} = \mathbf{f}_j(u, \mu_{k1}, \dots, \mu_{kj-1}, \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\psi}_{k1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{kj-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения очередного приближения Ψ_{kj} ($\Phi_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \Psi_{kj}(u)$ уже не является собственным вектором, так как матрица \mathbf{A}_1 зависит от времени) необходимо решать неоднородные уравнения, которые, вообще говоря, могут оказаться сложнее исходных уравнений движения. Характеристические показатели Ляпунова соответствующего приближения находятся из условия периодичности функций $\Psi_{kj}(u) = \Psi_{kj}(u + 2\pi)$. Зачастую можно утверждать [72], что такие решения найти можно, а ряд (12.11) сходится. Для этого достаточно, чтобы ни одна из разностей $\lambda_{kj} - \lambda_{kl}$ не была равна im при $j \neq l$, где m – целое число. Эти разности являются собственными числами матрицы $(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)$ однородной части уравнений для определения Ψ_{kj} . Фактически это означает, что общее решение однородных уравнений имеет период, отличный от 2π , и возникает необходимость определения частного решения таким образом, чтобы получить Ψ_{kj} требуемой периодичности.

Теория Флоке

Рассмотрим линейную систему с периодическими коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(u, \mathbf{p})\mathbf{x}, \quad (\text{IV.8})$$

где $\mathbf{A}(u, \mathbf{p}) = \mathbf{A}(u + T, \mathbf{p})$, \mathbf{p} – вектор некоторых параметров (например, наклонение орбиты, коэффициенты усиления в управлении, моменты инерции и т.д.). Пусть \mathbb{X} – фундаментальная матрица системы (IV.8). Практический метод исследования устойчивости, основанный на теории Флоке [74], заключается в следующем. Проводится поочередное численное интегрирование (IV.8) со всеми нулевыми начальными данными, кроме одной переменной, имеющей единичное начальное значение, и с выбранными значениями параметров \mathbf{p}_0 . В результате находится матрица монодромии $\mathbb{X}(T)$, затем – ее собственные числа (мультипликаторы) λ_k . Если все мультипликаторы находятся внутри единичного круга, система (IV.8) асимптотически устойчива. Находя мультипликаторы при разных значениях парамет-

ров \mathbf{p} , можно исследовать зависимость степени устойчивости от этих параметров.

Метод продолжения по параметру

Для численного исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений движения, зависящих от параметра, В.В. Сазоновым был адаптирован метод продолжения по параметру. Изложим один из вариантов этого метода [158].

Пусть дано уравнение

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{IV.9})$$

где $\mathbf{g} \in R^n$, $\mathbf{x} \in R^{n+1}$. Известна точка \mathbf{x}_0 , такая, что $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$. Необходимо построить кривую L в пространстве R^{n+1} , определяемую уравнением (IV.9) и проходящую через точку \mathbf{x}_0 .

Пусть $\mathbf{x}_0 \in L$. Из уравнения

$$\mathbf{g}_x \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0$$

находим единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_0 \in R^{n+1}$, направленный вдоль касательной к кривой L в точке \mathbf{x}_0 . Полагаем, что выполняется условие

$$\text{rank } \mathbf{g}_x = n. \quad (\text{IV.10})$$

При таком условии вектор $\boldsymbol{\tau}_0$ определен с точностью до знака. Зададим направление этого вектора. Рассмотрим точку $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 h_1$, где $h_1 > 0$. Вообще говоря, $\mathbf{x}'_1 \notin L$, но при $h_1 \rightarrow 0$ расстояние между \mathbf{x}'_1 и L имеет порядок $O(h_1^2)$. Точку $\mathbf{x}_1 \in L$, ближайшую к \mathbf{x}'_1 , будем искать в виде

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'_1 + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}'_1) \mathbf{v}, \quad (\text{IV.11})$$

где $\mathbf{v} \in R_n$ — неизвестный вектор. Подставим (IV.11) вместо \mathbf{x} в (IV.9) и разложим левую часть полученного соотношения в ряд по \mathbf{v} . Сохранив в этом разложении члены нулевой и первой степени, получаем приближенное уравнение для определения \mathbf{v}

$$\left[\mathbf{g}_x(\mathbf{x}'_1) \mathbf{g}_x^T(\mathbf{x}'_1) \right] \mathbf{v} + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}'_1) = 0.$$

В силу (IV.10) определитель этого уравнения отличен от нуля. Окончательное выражение для \mathbf{x}_1 имеет вид

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'_1 + -\mathbf{g}_x(\mathbf{x}'_1) [\mathbf{g}_x(\mathbf{x}'_1) \mathbf{g}_x^T(\mathbf{x}'_1)]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}'_1). \quad (\text{IV.12})$$

Если $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1\| \geq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое наперед заданное число, характеризующее точность вычисления решений, то, взяв \mathbf{x}_1 в качестве \mathbf{x}'_1 , повторяем вычисления по формуле (IV.12) еще раз; если $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1\| < \varepsilon$, то считаем, что $\mathbf{x}_1 \in L$.

Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_1$, направленный вдоль касательной к L в точке \mathbf{x}_1 , находим из условия

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{x}_1) \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_1 = 1, \quad \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_1 = 1.$$

Если h_1 достаточно мало, то в силу последнего условия вектор $\boldsymbol{\tau}_1$ направлен в ту же сторону кривой L , что и вектор $\boldsymbol{\tau}_0$.

Обычно прогноз делается по двум точкам \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_1 по следующей формуле:

$$\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\tau}_1 h_2 + \frac{\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_0}{2h_1} h_2^2.$$

Длина шага выбирается из условия

$$h_2 = \frac{\delta h_1}{\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_0\|},$$

где $\delta > 0$ — некоторая постоянная, подбираемая экспериментально. Это условие связывает длину шага с кривизной кривой L : между точками \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_1 кривизна кривой L приблизительно равна $\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_0\|/h_1$. Если известны, например, три точки, то прогноз можно сделать точнее, используя параболическую экстраполяцию (по трем известным точкам строится аппроксимирующая парабола). Функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}_x(\mathbf{x})$ для каждого \mathbf{x} определяются интегрированием системы дифференциальных уравнений, периодические решения которой вычисляются из соответствующей системы уравнений в вариациях.

Для успешной работы алгоритма необходимо, чтобы почти во всех точках кривой L выполнялось соотношение (IV.10). Это соотношение может нарушаться лишь в отдельных точках, где соответствующая система в вариациях имеет нетривиальное периодическое решение с теми же периодом и свойствами симметрии, как и искомое периодическое решение.

*Приближенное определение абсцисс
точек бифуркации периодического решения*

Получим приближенную формулу для определения точек бифуркации, следуя работе [159]. Идея получения приближенной формулы для точек бифуркации и использования теории периодических решений для решения рассматриваемой задачи принадлежит В.В. Сазонову. Будем рассматривать уравнение вида

$$\ddot{y} + [\eta\omega^2(u) + \varphi(u)]y = 0. \quad (\text{IV.13})$$

Точкой обозначим дифференцирование по независимой переменной u , η – большой безразмерный параметр, $\omega(u)$, $\varphi(u)$ – некоторые периодические функции своего аргумента. Подстановка

$$\tau = \int_0^u \omega(s) ds \quad (\text{IV.14})$$

позволяет свести (IV.13) к уравнению

$$y'' + y' \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} + \left(\eta + \frac{\varphi}{\omega^2} \right) y = 0, \quad (\text{IV.15})$$

где штрихом обозначено дифференцирование по τ . Далее, выполняя замену

$$y = \frac{x}{\sqrt{\omega}}, \quad (\text{IV.16})$$

уравнение (IV.15) приводим к виду

$$x'' + \eta x = qx. \quad (\text{IV.17})$$

Здесь $q = -\frac{\varphi}{\omega^2} + \frac{\omega''}{2\omega} - \frac{(\omega')^2}{4\omega^2}$. Краевые условия $y(0) = y(\pi/2) = 0$,

отвечающие нечетным π -периодическим решениям, с учетом подстановок (IV.14), (IV.16) можно свести к условиям

$$x(0) = x(a) = 0, \quad (\text{IV.18})$$

где $a = \int_0^{\pi/2} \omega(s) ds$. Решение уравнения (IV.17) ищем в виде

$$x = c_1 \cos \sqrt{\eta}\tau + c_2 \sin \sqrt{\eta}\tau + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \int_0^{\pi} \sin \sqrt{\eta}(\tau - s) q(s) x(s) ds, \quad (\text{IV.19})$$

c_1, c_2 – постоянные. Такая форма решения предписывается методом последовательных приближений. Из условия $x(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Используем второе равенство из (IV.18):

$$x(a) = c_2 \sin \sqrt{\eta} a + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sin \sqrt{\eta} a \int_0^a \cos(\sqrt{\eta} s) q(s) x(s) ds - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cos \sqrt{\eta} a \int_0^a \sin(\sqrt{\eta} s) q(s) x(s) ds = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Из (IV.19) с учетом равенства $c_1 = 0$ имеем

$$x = c_2 \sin \sqrt{\eta} \tau + O(1/\sqrt{\eta}). \quad (\text{IV.21})$$

Подставляя (IV.21) в соотношение (IV.20), получаем

$$\sin \sqrt{\eta} a \left[1 + O(1/\sqrt{\eta}) \right] - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cos \sqrt{\eta} a \left[J + O(1/\sqrt{\eta}) \right] = 0. \quad (\text{IV.22})$$

Здесь $J = \frac{1}{2} \int_0^a q(s) ds$ и, не теряя общности, полагаем $c_2 = 1$. При

больших значениях параметра $\sqrt{\eta}$ уравнение (IV.22), очевидно, имеет решение, и корни $\sqrt{\eta} a$ лежат вблизи чисел πk (k – целое), то есть $\sqrt{\eta} a = \pi k + \delta_k$ и δ_k мало. Подставляя это выражение в (IV.22), определяем $\delta_k \approx J / \sqrt{\eta}$. Теперь можно записать уравнение

$$a\eta - \pi k \sqrt{\eta} - J \approx 0,$$

разрешая которое от относительно η , получаем его корни

$$\eta = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{2J}{a} + O(1/k). \quad (\text{IV.23})$$

Выражение (IV.23) определяет абсциссы искомых точек ветвления. Чтобы получить его явный вид, необходимо вычислить величины a и J . Вычисления показывают, что

$$J = \frac{1}{2} \int_0^a q(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^a \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{\ddot{\omega}}{2\omega^2} - \frac{3\dot{\omega}^2}{4\omega^3} \right) du.$$

В качестве примера обратимся к системе (5.17). Сводя ее к одному уравнению и производя замену переменных (подстановка Лиувилля)

$$x = \frac{\Delta\alpha}{N^{1/4}}, \quad \tau = \int_0^u \sqrt{N} du,$$

получаем уравнение и краевые условия:

$$x'' + \eta x = q_a x, \quad x(0) = x(a_a) = 0. \quad (\text{IV.24})$$

Здесь

$$a_a = \int_0^{\pi/2} \sqrt{N} du,$$

$$q_a = \left[\frac{1-\lambda}{N_1^2} (1-5\sin^2 u) + \frac{1}{2N_1^{3/2}} \frac{d\sqrt{N_1}}{du} - \frac{3}{4N^2} \left(\frac{d\sqrt{N_1}}{du} \right)^2 \right] \Bigg|_{u=u(\tau)},$$

и отброшены члены порядка $O(1/\eta)$. Фактически возникает задача о нахождении собственных чисел для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями периодичности, путь решения которой мы только что описали. Асимптотическая формула (5.18) для собственных чисел η_k , полученная методом последовательных приближений, справедлива с точностью до $O(1/\eta)$.

Библиография

1. Овчинников М.Ю. “Малыши” завоевывают мир // Сборник научно-популярных статей – победителей конкурса РФФИ 2007 года. Выпуск 11. М.: Октопус, 2008. с. 17–29.
2. Овчинников М.Ю. Взгляд изнутри // Бытие, уходящее в бесконечность. К столетию рождения Б.В. Раушенбаха. М.: МФТИ, 2014. с. 65–77.
3. Овчинников М.Ю. Эх, мчится тройка удалая... // Сборник научно-популярных статей – победителей конкурса РФФИ 2012 года. Выпуск 16. М.: ИТЦ МОЛНЕТ, 2013. с. 20–34.
4. Fischell R.E. Magnetic damping of the angular motions of Earth satellites // Am. Rocket Soc. J. 1961. Vol. 31, № 9. pp. 1210–1217.
5. Grasshoff L.H. A method for controlling the attitude of a spin-stabilized satellite // ARS J. 1961. Vol. 31, № 5. pp. 646–649.
6. Белецкий В.В., Зонов Ю.В. Вращение и ориентация третьего советского спутника // Сборник “Искусственные спутники Земли”. АН СССР, 1961. № 7. с. 32–55.
7. Fischell R.E. Passive magnetic attitude control for Earth satellites // Adv. Astronaut. Sci. 1963. Vol. 11. pp. 147–176.
8. Сарычев В.А. и др. Движение гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями в плоскости полярной орбиты // Космические исследования. 1988. Т. 26, № 5. с. 654–668.
9. Сарычев В.А. и др. Влияние гистерезисного стержня, установленного вдоль оси наибольшего момента инерции спутника, на его движение в режиме гравитационной ориентации // Космические исследования. 1989. Т. 27, № 6. с. 849–860.
10. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации ИСЗ // Итоги науки и техники, Серия Исследование космического пространства, Т. 23. М.: ВИНТИ, 1985. 104 с.
11. Stopfkuchen K.A. A comparison of AZUR and ESRO 1 attitude control system performance // Dornier Rep. EER-A 200/69. 1969.
12. Пивоваров М.Л. О колебаниях спутника с магнитной стабилизацией // Препринт ИКИ АН СССР. 1990. № Пр.-1685. 10 с.
13. Овчинников М.Ю. и др. Наноспутник REFLECTOR. Выбор параметров системы ориентации // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 1. с. 67–84.
14. Ovchinnikov M. et al. Attitude control system for the first swedish nanosatellite MUNIN // Acta Astronaut. 2000. Vol. 46, № 2–6. pp. 319–326.

15. Burton R., Starek J., Rock S. A new method for simulating the attitude dynamics of passively magnetically stabilized spacecraft // *Adv. Astronaut. Sci.* 2012. Vol. 143. AAS 12-169.
16. Santoni F., Zelli M. Passive magnetic attitude stabilization of the UNISAT-4 microsatellite // *Acta Astronaut.* 2009. Vol. 65, № 5–6. pp. 792–803.
17. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Иванов Д.С. Лабораторное исследование магнитных свойств гистерезисных стержней для системы ориентации малогабаритных спутников // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2013. № 1. с. 152–171.
18. Садов Ю.А. Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты // *Космические исследования.* 1969. Т. 7, № 1. с. 51–60.
19. Соколов Л.В. Магнитный демпфер для системы гравитационной стабилизации // *Сб. Управление в пространстве.* 1973. Т. 1. с. 174–179.
20. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary magnetic attitude control system // *J. Spacecr. Rockets.* 1976. Vol. 13, № 5. pp. 282–287.
21. Stickler A.C. A magnetic control system for attitude acquisition // *Ithaco, Inc., Rep. N 90345.* 1972.
22. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
23. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника // *Космические исследования.* 1982. Т. 20, № 2. с. 297–300.
24. Сазонов В.В., Сарычев В.А. Влияние диссипативного магнитного момента на вращение спутника относительно центра масс // *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела.* 1983. № 2. с. 3–12.
25. Guelman M. et al. Design and testing of magnetic controllers for Satellite stabilization // *Acta Astronaut.* 2005. Vol. 56, № 1–2. pp. 231–239.
26. Guo J., Bouwmeester J., Gill E. In-orbit results of Delfi-n3Xt: Lessons learned and move forward // *Acta Astronaut.* 2016. Vol. 121. pp. 39–50.
27. Candini G.P., Piergentili F., Santoni F. Miniaturized attitude control system for nanosatellites // *Acta Astronaut.* 2012. Vol. 81, № 1. pp. 325–334.
28. Avanzini G., Giulietti F. Magnetic detumbling of a rigid spacecraft // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 4. pp. 1326–1334.
29. Овчинников М.Ю. и др. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования.* 2012. Т. 50, № 2. с. 176–183.

30. Psiaki M.L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing // *J. Guid. Control. Dyn.* 2004. Vol. 27, № 3. pp. 347–355.
31. Renard M.L. Command laws for magnetic attitude control of spin-stabilized earth satellites // *J. Spacecr. Rockets.* 1967. Vol. 4, № 2. pp. 156–163.
32. Shigehara M. Geomagnetic attitude control of an axisymmetric spinning satellite // *J. Spacecr. Rockets.* 1972. Vol. 9, № 6. pp. 391–398.
33. Артюхин Ю.П., Каргу Л.И., Симаев В.Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. М.: Наука, 1979. 295 с.
34. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.
35. Hur P.S., Melton R.G., Spencer D.B. Meeting science requirements for attitude determination and control in a low-power, spinning satellite // *J. Aerosp. Eng. Sci. Appl.* 2008. Vol. 1, № 1. pp. 25–33.
36. Slavinskis A. et al. High spin rate magnetic controller for nanosatellites // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 95. pp. 218–226.
37. Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F. Spin-axis pointing of a magnetically actuated spacecraft // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. pp. 493–501.
38. Wheeler P.C. Spinning spacecraft attitude control via the environmental magnetic field // *J. Spacecr. Rockets.* 1967. Vol. 4, № 12. pp. 1631–1637.
39. Ergin E.I., Wheeler P.C. Magnetic attitude control of a spinning satellite // *AIAA First Annual Meeting.* 1964. AIAA Paper 64-235.
40. Sorensen J.A. A magnetic attitude control system for an axisymmetric spinning spacecraft // *J. Spacecr. Rockets.* 1971. Vol. 8, № 5. pp. 441–448.
41. Junkins J.L., Carrington C.K., Williams C.E. Time-optimal magnetic attitude maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1981. Vol. 4, № 4. pp. 363–368.
42. Sekhavat P. et al. Closed-loop time-optimal attitude maneuvering of magnetically actuated spacecraft // *J. Astronaut. Sci.* 2013. Vol. 58, № 1. pp. 81–97.
43. Biggs J.D., Horri N. Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // *Syst. Control Lett.* 2012. Vol. 61, № 4. pp. 609–616.
44. Боевкин В.И. и др. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. Москва: Наука, 1976. 304 с.
45. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // *Итоги науки и техники. Серия: Исследование космического*

- пространства. Т.11. М.: ВИНТИ, 1978. 221 с.
46. Likins P.W. Attitude stability criteria for dual spin spacecraft // *J. Spacecr. Rockets*. 1967. Vol. 4, № 12. pp. 1638–1643.
 47. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Нутационные демпферы спутников с двойным вращением // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1977. Vol. 15, № 2. pp. 225–242.
 48. Landon V.D., Stewart B. Nutational stability of an axisymmetric body containing a rotor // *J. Spacecr. Rockets*. 1964. Vol. 1, № 6. pp. 682–684.
 49. Sandfry R.A., Hall C.D. Steady spins and spinup dynamics of axisymmetric dual-spin satellites with dampers // *J. Spacecr. Rockets*. 2004. Vol. 41, № 6. pp. 948–955.
 50. Aleksandrov A.Y. et al. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame // *Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 82, № 3. pp. 1493–1505.
 51. Nobari N.A., Misra A.K. A hybrid attitude controller consisting of electromagnetic torque rods and an active fluid ring // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. pp. 470–479.
 52. Wang P., Shtessel Y., Wang Y. Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*. Morgantown, West Virginia, 1998. pp. 500–504.
 53. Psiaki M.L. Magnetic torquer attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation // *J. Guid. Control. Dyn.* 2001. Vol. 24, № 2. pp. 386–394.
 54. Jafarboland M. et al. Controlling the attitude of linear time-varying model LEO satellite using only electromagnetic actuation // *IEEE Aerospace Conference Proceedings*. Big Sky, Montana, 2002. pp. 2221–2229.
 55. Guelman M. et al. The Gurwin-Techsat microsatellite: six years successful operation in space // *4S Symposium: Small Satellites, Systems and Services*. La Rochelle. Vol. 571. 62 p.
 56. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 107. pp. 87–96.
 57. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 110. pp. 279–286.
 58. McDuffie J., Shtessel Y. A sliding mode controller and observer for satellite attitude control // *AIAA Guidance, Navigation and Control conference*. New Orleans, 1997. pp. 1613–1619.
 59. Бранец В.Н. Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. М.: МФТИ,

2009. 304 с.
60. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. М.: Гостехиздат, 1939. 258 с.
 61. Белецкий В.В. Эволюция вращения динамически-симметричного спутника // Космические исследования. 1963. Т. 1, № 3. с. 339–385.
 62. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладные математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. с. 473–483.
 63. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1937. 586 с.
 64. Гаусс К.Ф. Избранные труды по земному магнетизму. Л.: АН СССР, 1952. 343 с.
 65. Thébault E. et al. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation // Earth, Planets Sp. Springer Berlin Heidelberg, 2015. Vol. 67, № 1. 79 p.
 66. Antipov K.A., Tikhonov A.A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the Nth approximation // Geomagn. Aeron. 2013. Vol. 53, № 2. pp. 257–267.
 67. Zajac E.E. Some simple solutions relating to magnetic attitude control of satellites // 4th US National Congress on Applied Mechanics. Berkeley: Pergamon Press, 1962. pp. 449–456.
 68. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // Астрономический журнал. 1973. Т. 50, № 2. с. 327–335.
 69. Плотников В.А., Зверкова Т.С. Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями // Дифференциальные уравнения. Т. 18, № 6. с. 1076–1078.
 70. Матюк В.Ф., Осипов А.А. Математические модели кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса. Часть I. Анализ моделей // Неразрушающий контроль и диагностика. 2011. № 2. с. 3–35.
 71. Арнольд В.И., Нейштадт А.И., Козлов В.В. Динамические системы-3 // М.: ВИНТИ, 1985. 303 с.
 72. Артемьев Н.А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики // Известия АН СССР. Серия математическая. 1944. Т. 8, № 2. с. 61–100.
 73. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
 74. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.

75. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Овчинников М.Ю. Периодические колебания спутника относительно центра масс под действием магнитного момента // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 182. 27 с.
76. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Движение спутника с постоянным магнитом относительно центра масс // Космические исследования. 1986. Т. 24, № 4. с. 527–543.
77. Сазонов В.В. Периодические решения дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 143. 26 с.
78. Сазонов В.В. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, № 5. с. 707–719.
79. Сазонов В.В. Одноосная магнитная ориентация искусственных спутников // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела. 1987. № 2. с. 27–32.
80. Овчинников М.Ю. Исследование переходных движений спутника с магнитной системой ориентации в рамках простой модели гистерезиса // Космические исследования. 2000. Т. 38, № 1. с. 78–84.
81. Маркелов Г.М., Мирошниченко Л.А., Раевский В.А. Пассивная гравитационная система ориентации с промежуточной стабилизацией по магнитному полю Земли // Труды V Научных чтений по космонавтике. Секция: Прикладная небесная механика и управление движением. Москва: ИИЕТ АН СССР, 1981. с. 89–98.
82. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитная ориентация спутника со сферическим демпфером // Космические исследования. 1986. Т. 24, № 6. с. 803–815.
83. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Быстрые вращения спутника с магнитным демпфером в плоскости орбиты // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 172. 27 с.
84. Садов Ю.А., Тетерин А.Д. Исследование периодических движений спутника с магнитным демпфером // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1979. № 35. 30 с.
85. Овчинников М.Ю. Системы ориентации малых спутников, взаимодействующих с магнитным полем Земли. Автореф. дисс. доктора. физ.-мат.наук. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1994. 30 с.
86. Varabash S. et al. The nanosatellite Munin, a simple tool for auroral research // Adv. Sp. Res. 2003. Vol. 31, № 2. pp. 313–318.
87. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.

88. Horn G., Regenberг S. Zur stabilisierung eines satelliten mit hife des erdmagnetfeifides // Z. Flugwiss. 1966. Vol. 14, № 9. pp. 398–413.
89. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Овчинников М.Ю. Математическая модель гистерезиса, основанная на магнитомеханической аналогии // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 4. pp. 122–133.
90. Urlichich Y.M., Selivanov A.S., Stepanov A.A. Two nanosatellites for space experiments // Proceedings of the 5th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, 2005, Berlin, IAA-B5-1403 pp. 527–530.
91. Карпенко С.О. и др. Система ориентации первого российского нано-спутника ТНС-0 №1 // Космические исследования. 2010. Т. 48, № 6. с. 532–540.
92. Ильин А.А., Куприянова Н.В., Овчинников М.Ю. Стационарные вращательные движения твердого тела с сильным магнитом в переменном магнитном поле при наличии диссипации // Известия РАН, Серия Механика твердого тела. 2009. Т. 48, № 3. с. 12–24.
93. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Московского университета, 1975. 308 с.
94. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
95. Тихонов А.А. Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции ротационного движения заряженного тела в геомагнитном поле // Космические исследования. 2002. Т. 40, № 2. с. 171–177.
96. Сидоренко В.В. Об одном классе движений спутника, несущего сильный магнит // Космические исследования. 2002. Т. 40, № 2. с. 147 – 155.
97. Ильин А.А. и др. Анализ вращательного движения первого российского наноспутника ТНС-0 по результатам летных испытаний // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 18. 28 с.
98. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. и инж.-физ. специальностей вузов. М.: МФТИ, 2000. 716 с.
99. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 414 с.
100. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
101. Иванов Д.С. и др. Испытания алгоритмов управления ориентацией наноспутника “Чибис-М” на лабораторном стенде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 1.

- с. 118–137.
102. Ovchinnikov M.Y. et al. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 93. pp. 23–33.
 103. Иванов Д.С. и др. Аналитическое, численное и полунатурное исследование алгоритмов управления ориентацией микроспутников // *Вестник НГУ им. Н.И. Лобачевского.* № 4 (2). с. 152–154.
 104. Ovchinnikov M., Ivanov D. Approach to study satellite attitude determination algorithms // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 98. pp. 133–137.
 105. Grahn S. An On-Board Algorithm for Automatic Sun-Pointing of a Spinning Satellite // *Swedish Pat. Appl.* n. 9702333-7.
 106. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // *Acta Astronaut.* 2012. Vol. 77. pp. 48–60.
 107. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
 108. Roldugin D.S., Testani P. Spin-stabilized satellite magnetic attitude control scheme without initial detumbling // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. pp. 446–454.
 109. Karpenko S.O. et al. One-axis attitude of arbitrary satellite using magnetorquers only // *Cosm. Res.* 2013. Vol. 51, № 6. pp. 478–484.
 110. Ovchinnikov M.Y. et al. New one-axis one-sensor magnetic attitude control theoretical and in-flight performance // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 105, № 1. pp. 12–16.
 111. Артемьев Н.А. Исследование осуществимости периодических движений // *Известия АН СССР. Серия математическая.* 1941. Т. 5, № 2. с. 127–158.
 112. Slotine J.-J., Li W. *Applied nonlinear control.* Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991. 461 p.
 113. Wisniewski R. Linear time varying approach to satellite attitude control using only electromagnetic actuation // *J. Guid. Control Dyn.* 2000. Vol. 23, № 4. pp. 640–647.
 114. Kumar K.D. Robust attitude stabilization of spacecraft subject to actuator failures // *Acta Astronaut.* 2011. Vol. 68, № 7–8. pp. 1242–1259.
 115. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 408 с.
 116. Lovera M., Astolfi A. Global Magnetic Attitude Control of Spacecraft in the Presence of Gravity Gradient // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2006. Vol. 42, № 3. pp. 796–805.

117. Oldham K.B., Myland J., Spanier J. An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator. Springer Science & Business Media, 2010. 762 p.
118. Абрашкин В.И. и др. Неуправляемое вращательное движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 5. с. 450–470.
119. Бойзелинк Т. и др. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48, № 3. с. 252–265.
120. Абрашкин В.И. и др. Неуправляемое вращательное движение спутника Фотон-12 и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. с. 45–56.
121. Абрашкин В.И. и др. Определение движения спутника «Бион М-1» средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Космические исследования. 2015. Т. 53, № 4. с. 306–320.
122. Абрашкин В.И. и др. Неуправляемое вращательное движение малого спутника Аист // Космические исследования. 2015. Т. 53, № 5. с. 395–408.
123. Платонов А.К., Иванов Д.С. Методы обработки измерений: учеб. пособие // М.: МФТИ, 2013. 107 с.
124. Crassidis J.L., Markley F.L., Cheng Y. Survey of Nonlinear Attitude Estimation Methods // J. Guid. Control. Dyn. 2007. Vol. 30, № 1. pp. 12–28.
125. Cheng Y., Shuster M.D. QUEST and the anti-QUEST : good and evil attitude estimation introduction : QUEST // Adv.Astronaut.Sci. 2005. Vol. 53, № 3. pp. 337–351.
126. Kalman R.E. A New approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng. 1960. Vol. 82. pp. 35–45.
127. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng. 1961. Vol. 83. pp. 95–108.
128. Колос М.В., Колос И.В. Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Московского университета, 2000, 102 с.
129. Leitmann M. et al. Attitude and position determination using a star mapper on the small satellite platform POSAT-1 // 3rd Conference on small satellite technology and application, Orlando, FL, 1993. pp. 224–230.
130. Yefimenko N.V. Magnetic attitude control and stabilizing system of Egyptosat-1 spacecraft // J. Autom. Inf. Sci. 2010. Vol. 42, № 11. pp. 64–70.

131. Searcy J.D., Pernicka H.J. Magnetometer-only attitude determination using novel two-step kalman filter approach // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 6. pp. 1693–1701.
132. Psiaki M.L., Martel F., Pal P.K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data // *J. Guid. Control. Dyn.* 1990. Vol. 13, № 3. pp. 506–514.
133. Wertz J.R. *Spacecraft attitude determination and control.* Dordrecht/Boston, London: Acad. press, 1990. 863 p.
134. Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В. Оценка точности показаний магнитометра, установленного на Служебном модуле Международной космической станции // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2012. № 54. 33 с.
135. Ivanov D. et al. Analytical study of microsatellite attitude determination algorithms // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 116. pp. 339–348.
136. Abdelrahman M., Park S.-Y. Simultaneous spacecraft attitude and orbit estimation using magnetic field vector measurements // *Aerosp. Sci. Technol. Elsevier Masson SAS,* 2011. Vol. 15, № 8. pp. 653–669.
137. Садов Ю.А. Переворот спутника в плоскости орбиты с помощью маховичной системы // *Космические исследования.* 1986. Т. 24, № 4. с. 515–523.
138. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Аэродинамическая система ориентации с гистерезисными стержнями // *Космические исследования.* 1994. Т. 32, № 6. с. 16–33.
139. Белоконов И.В., Иванов Д.С., Овчинников, М.Ю. Пеньков В.И. Система демпфирования углового движения наноспутника SamSat-QB50 // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2015. № 59. 28 с.
140. Сидоренко В.В. О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // *Космические исследования. исслед.* 1992. Т. 30, № 6. с. 780–790.
141. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Овчинников М.Ю. Динамика спутников с магнитным демпфером. Модель гистерезиса // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР.* 1984. № 174. 27 с.
142. Frohlich H. et al. Some results of the development of the passive magnetic attitude control system for the German research satellite 625 A-1 // *Proceedings of 2nd IFAC Symposium on Automatic Control in Space.* Vienna, Austria: Русский перевод в кн.: *Управление космическими аппаратами и колебаниями.* М.: Наука. 1971. с. 299-322.
143. Ninomiya K., Takezawa S. Digital simulation of the magnetic attitude stabilization for scientific satellite EXOS-A // *Proceedings of the 11th*

- International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1975. pp. 757–763.
144. Mager A. Stabilisierung von erd-satelliten mit weichmagnetischen legierungen // Z. angew. Phys. 1967. Vol. 23, № 3. pp. 164–170.
145. Бозорт Р. Ферромагнетизм. Москва: ИИЛ, 1956. 783 с.
146. Киселев М.И., Степин А.С. Влияние дефектов гистерезисного демпфера на стабилизацию ИСЗ // Космические исследования. 1975. Т. 13, № 2. с. 147–152.
147. Карасик В.Р. Физика и техника сильных магнитных полей. М.: Наука, 1964. 346 с.
148. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I. Passive magnetic attitude control system for the Munin nanosatellite // Cosm. Res. 2002. Vol. 40, № 2. pp. 142–156.
149. Матюк В.Ф., Осипов А.А. Измерение магнитных характеристик магнитомягких материалов и изделий при квазистатическом перемагничивании // Неразрушающий контроль и диагностика. 2011. № 4. с. 3–34.
150. Вандерслайс Д.Л. Анализ динамики спутника с гравитационно-градиентной системой стабилизации и пассивным демпфированием // Проблемы ориентации искусственных спутников Земли / под ред. Сингер С.Ф. М.: Наука, 1966. с. 66–105.
151. Кузнецов Л.И., Пасынков В.Е., Товстик П.Е. О плоском движении искусственного спутника Земли // Прикладная механика. Л.: ЛГУ, 1974. № 1. с. 32–44.
152. Кузнецов Л.И., Пасынков В.Е. Динамика ИСЗ с гистерезисными стержнями // Прикладная механика. Л.: ЛГУ, 1977. № 3. с. 130–141.
153. Герман А.Д. и др. Нерезонансные движения спутника с гистерезисными стержнями в режиме гравитационной ориентации // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 6. с. 3–12.
154. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю., Борисова Ю.В. Переходные и установившиеся движения осесимметричного спутника с гистерезисными стержнями в режиме гравитационной ориентации // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1991. № 20. 36 с.
155. Sellers J.J. et al. REFLECTOR: US-Russian microsatellite for optical calibration experiments // Proceedings of the 4th International Conference on Small Satellites Systems and Services, September, 1998, Juan-les-Pins, France. 1998. 8 з.
156. Shargorodsky V. et al. Nanosatellite REFLECTOR for optical calibrations: attitude control and determination aspects // Adv. Sp.

- Res. 2002. Vol. 30, № 2. pp. 337–343.
157. Немучинский Р.Б., Овчинников М.Ю. Определение параметров углового движения пассивного наноспутника REFLECTOR по результатам лазерных внешнетраекторных измерений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 37. 22 с.
 158. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Мельник Н.В. Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс // Космические исследования. 1980. Т. 18, № 5. с. 659–677.
 159. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука, 1970. 371 с.

Предметный указатель

- CubeSat*.....6, 11, 257, 340
 акселерометр339
 алгоритм *Bdot*13, 183
 алгоритм *QUEST*.....263
 алгоритм *Sdot*183, 193
 алгоритм *TRIAD*154, 263, 264, 278
 альbedo.....103, 114
 амплитуда периодических
 решений55, 58, 84, 89, 215, 243
 бифуркация.....49, 56, 348
 ветвление периодических
 решений49, 86, 89
 вихревые токи71, 75
 вязкое трение.....74, 330
 гиродемпфер.....293
 гистерезисная пластина.....326
 гистерезисный стержень6, 7,
 13, 33, 40, 58, 64, 90, 105, 293, 308,
 313, 320, 324, 330
 гравитационная ориентация72,
 205, 312
 гравитационная штанга8, 14,
 71, 120, 209, 212, 217, 291
 гравитационный момент20, 42, 59,
 121, 170, 198, 205, 235, 241, 247, 256
 датчик угловой скорости146,
 151, 259
 двустрочные элементы.....152
 динамическая фильтрация8, 121
 динамические уравнения См.
 уравнения Эйлера
 звездный датчик.....259
 интеграл Френеля166
 интеграл энергии213, 238
 кинематические уравнения.....18,
 21, 43, 131
 кинетический момент.....24, 37, 74,
 110, 124, 130, 156, 190, 193, 214, 227
 кольца Гельмгольца.....147
 коэрцитивная сила35, 91,
 95, 309, 320, 331
 краевая задача47, 53, 56, 84
 кривая ветвления См. ветвление
 периодических решений
 критерий Рауса-Гурвица133
 кубсат..... См. *CubeSat*
 ляпуновское управление219,
 222, 247
 магнитная катушка6, 8, 13,
 143, 196, 211, 214, 219, 247, 293, 324
 магнитная пружина.....73, 77, 85
 магнитная система координат16,
 22, 41, 59
 магнитометр88, 102, 120,
 142, 146, 151, 170, 183, 259, 339
 матрица монодромии.....39, 51
 матрица направляющих
 косинусов.....16, 18, 19, 131, 211, 263
 матрица перехода..... См. матрица
 направляющих косинусов
 маховик8, 14, 72, 120,
 146, 193, 196, 204, 294
 метод Артемьева38, 199, 344
 метод Ван-дер-Поля238
 метод Крылова–Боголюбова..... См.
 метод усреднения
 метод наименьших квадратов.....153,
 244, 259
 метод Ньютона.....47, 85, 262
 метод последовательных
 приближений56
 метод продолжения по
 параметру.....48, 85, 346
 метод Пуанкаре38, 135,
 205, 236, 343
 метод разделения движений См.
 метод усреднения
 метод усреднения.....35, 37,
 58, 61, 64, 106, 124, 185, 228, 330, 342
 модель *IGRF*26, 96, 101,
 152, 178, 182, 261, 282
 модель *WMM*26
 модель Аркадьева34
 модель вязкого трения.....34
 модель гистерезиса улучшенная ...70,
 96, 301, 308, 330, 332, 333, 341
 модель наклонного диполя27,
 96, 100, 256
 модель осредненная.....37, 105,
 131, 175, 226, 245
 модель параллелограмма34,
 69, 96, 330, 331

- модель прямого диполя.....28, 40,
 59, 91, 96, 100, 135, 196, 245, 341
 модель Релея35, 58, 68,
 69, 96, 316, 331
 момент инерции. *См.* тензор инерции
 нутационные колебания.....155,
 172, 298
 нутационный демпфер297, 298
 обобщенный интеграл энергии121
 одноосная ориентация.....45,
 120, 155, 288
 опорная система координат16
 орбитальная скорость.....21
 осесимметричный спутник25,
 37, 44, 58, 113, 123, 188, 236, 334
 оси Резаля *См.* полусвязанные оси
 оскулирующие переменные.....24,
 37, 105, 113, 167, 226
 осредненная модель..... *См.* модель
 осредненная
 первый интеграл45, 62, 66,
 127, 159, 163, 170, 179, 188
 переменные Белецкого-Черноуцкого
 *См.* оскулирующие переменные
 периодическое решение38, 47, 51,
 58, 79, 81, 84, 135, 140, 238, 240, 243
 перманентное вращение.....113
 плоское движение.....46, 53,
 77, 206, 210, 213, 214, 236
 поверхность разрыва35
 полусвязанные оси.....44
 полярная орбита.....68, 84,
 198, 211, 214, 330
 порождающая система *См.*
 порождающее уравнение
 порождающее решение37,
 45, 53, 124, 135, 138, 236, 240
 порождающее уравнение38
 постоянный магнит.....6, 7, 40,
 58, 61, 64, 89, 95, 105, 217
 предельный цикл233
 приполярная орбита138
 приэкваториальная орбита....135, 180
 пространственное движение.....53
 реактивный двигатель72
 регулярная прецессия.....124
 резонанс48, 63, 89,
 111, 208, 237, 334
 ретрорефлектор.....336
 ряд Фурье.....50, 82, 323, 336, 342
 самолетные углы.....18
 сдвиг нуля152
 система ориентации активная.....288
 система ориентации
 гироскопическая299
 система ориентации магнитная ...295
 система ориентации пассивная.....288
 система ориентации пассивная
 гравитационная290
 система ориентация
 аэродинамическая296
 система ориентация солнечная.....296
 скользящее управление219,
 223, 253
 случай Лагранжа62
 солнечная панель88, 102, 194, 259
 солнечный датчик114,
 146, 154, 170, 183, 259
 стабилизация собственным
 вращением8, 13,
 120, 155, 196, 297, 298
 стационарное решение38,
 82, 107, 110, 158, 205, 236
 степень устойчивости.....84,
 203, 229, 333
 сферический магнитный
 демпфер6, 7, 13, 71, 293
 телеметрия152, 262
 температура Кюри95
 тензор инерции.....18, 71,
 155, 161, 181, 203, 214, 231
 теорема Пуанкаре *См.* метод
 Пуанкаре
 теория Флоке38, 233, 245, 251, 345
 токи Фуко *См.* вихревые токи
 токовая катушка ориентации.....73
 трехосная ориентация.....8,
 14, 120, 219, 288
 углы Эйлера.....18, 24
 улучшенная модель гистерезиса. *См.*
 модель гистерезиса улучшенная
 уравнение фазового баланса241
 уравнения в вариациях49,
 56, 78, 81, 82, 86
 уравнения Эйлера17, 196
 устойчивость50, 73,
 78, 81, 107, 122, 133, 190, 197, 205,
 209, 212, 219, 224, 227, 235
 фильтр Калмана150,
 154, 259, 269, 277

формальный ряд.....	46, 54, 77, 80	характеристические показатели	
формула Фробениуса	137	Ляпунова.....	200, 203, 345
фундаментальная матрица.....	52	характеристическое уравнение.....	51,
функция Ляпунова.....	107,	87, 133, 199, 230	
108, 111, 122, 222		эволюционные уравнения.....	37,
характеристические показатели	39,	125, 168, 188, 239	
81, 134, 197, 234, 245, 246, 251		эллиптические функции.....	238

