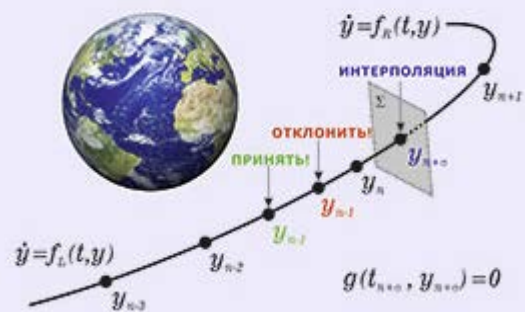




Д.С. Иванов
С.П. Трофимов
М.Г. Ширококов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОРБИТАЛЬНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ



Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Иванов Д.С., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. / под общ. ред. М.Ю. Овчинникова. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2016. 118 с.

doi:10.20948/mono-2016-trofimov

URL: <http://keldysh.ru/e-biblio/trofimov>

**Д.С. Иванов, С.П. Трофимов,
М.Г. Ширококов**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОРБИТАЛЬНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в качестве учебного пособия
для аспирантов, обучающихся по направлению подготовки
01.06.01 «Математика и механика»*

Под общей редакцией д.ф.-м.н. М.Ю. Овчинникова

**ИПМ им. М.В. Келдыша
Москва 2016**

УДК 629.78, 519.62
ББК 22.193, 22.21
Ч67

Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. Д.С. Иванов, С.П. Трофимов, М.Г. Широбоков; под общ. ред. д.ф.-м.н. М.Ю. Овчинникова. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. — 118 с.

В учебном пособии приведены основные приемы и методы, используемые при численном моделировании движения космических аппаратов. Обсуждается проблема выбора переменных с целью моделирования орбитального и углового движения спутников. Подробно описываются наиболее употребительные на практике методы численного интегрирования уравнений движения. Уделяется внимание важному в механике космического полета вопросу об интегрировании уравнений с разрывной правой частью. Кроме того, даются некоторые рекомендации относительно совместного моделирования орбитального и углового движения при быстрых вращениях космического аппарата.

Пособие предназначено главным образом для студентов и аспирантов, начинающих изучение механики космического полета, хотя будет полезным также для преподавателей и всех специалистов, кто в ходе своей работы сталкивается с задачей численного моделирования движения космических аппаратов.

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор В.В. Сазонов

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00621)

© Д.С. Иванов, С.П. Трофимов, М.Г. Широбоков, 2016
© М.Ю. Овчинников, 2016
ISBN 978-5-98354-023-1 © ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА	7
1.1 УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА. ЗАДАЧИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ	7
1.2 РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ И КООРДИНАТ: СГЛАЖИВАЮЩИЕ, ШПЕРЛИНГА-БЮРДЕ, КУСТААНХЕЙМО-ШТИФЕЛЯ	8
1.2.1 <i>Сглаживающие преобразования</i>	8
1.2.2 <i>Преобразование Шперлинга-Бюрге</i>	13
1.2.3 <i>Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля</i>	15
1.3 МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ: КОНСЕРВАТИВНЫЙ И ДИССИПАТИВНЫЙ, МЕТОДЫ ТРАЕКТОРНОЙ КОРРЕКЦИИ	20
1.3.1 <i>Принципы численной стабилизации</i>	20
1.3.2 <i>Консервативный метод стабилизации</i>	20
1.3.3 <i>Диссипативный метод стабилизации</i>	24
1.3.4 <i>Методы траекторной коррекции</i>	26
1.4 ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ЭНКЕ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КА В ФОРМЕ ЭНКЕ.....	29
1.5 МЕТОД ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ	32
2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА	40
2.1 СВЯЗАННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА	40
2.2 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА	40
2.2.1 <i>Углы Эйлера и самолетные углы</i>	40
2.2.2 <i>Кватернион поворота (верзор)</i>	46
2.2.3 <i>Матрица направляющих косинусов</i>	49
2.3 ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА	50
2.3.1 <i>Компоненты вектора кинетического момента в ИСК</i>	50
2.3.2 <i>Компоненты вектора угловой скорости в ССК</i>	51
2.3.3 <i>Производные кинематических переменных</i>	52
2.4 УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА В ОСКУЛИРУЮЩИХ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ	53

2.5	КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЙЛЕРА И АНДУАЙЕ-ДЕПРИ	55
2.6	ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА	57
2.6.1	<i>Вырождение углов Эйлера и самолетных углов</i>	57
2.6.2	<i>Нормализация и ортогонализация кватерниона</i>	58
2.6.3	<i>Проблема выбора динамических переменных</i>	59
3.	ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	62
3.1	ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ	62
3.2	ОДНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ	63
3.2.1	<i>Методы Рунге-Кутты.....</i>	63
3.2.2	<i>Вложенные методы Рунге-Кутты</i>	65
3.2.3	<i>Метод Эверхарта</i>	68
3.3	МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ АДАМСА, МЕТОДЫ ШТЕРМЕРА И КОУЭЛЛА	73
3.3.1	<i>Многошаговые методы Адамса.....</i>	73
3.3.2	<i>Многошаговые методы Штермера и Коуэлла</i>	77
3.4	СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ	78
3.5	МНОГООБОРОТНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ	84
3.6	СОВМЕСТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ	87
3.7	ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ВЫХОДОМ НА ОГРАНИЧЕНИЕ	90
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	94
	ПРИЛОЖЕНИЕ А. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА	96
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА	98
	ПРИЛОЖЕНИЕ В. ФОРМУЛЫ ПЕРЕХОДА МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ КООРДИНАТАМИ И СКОРОСТЯМИ И ЭЛЕМЕНТАМИ ОРБИТЫ	102
	ЛИТЕРАТУРА	108
	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	113

ВВЕДЕНИЕ

В механике космического полета исследование характеристик как орбитального, так и углового движения космического аппарата (КА) обычно начинают с записи соответствующих уравнений движения и последующего выделения одного или нескольких главных членов среди всех сил (моментов), стоящих в правой части уравнений. Остальные слагаемые принято называть *возмущениями*. Идея такого стандартного разделения состоит в упрощении модели движения КА и получении аналитического *невозмущенного* решения, которое бы правильно передавало основные черты *возмущенного* движения. Последнее свойство справедливо ввиду малости (по порядку величины) возмущающих сил/моментов в сравнении с главными. Классическим примером невозмущенного орбитального движения является кеплерово решение задачи двух тел. За невозмущенное угловое движение зачастую принимают *свободное движение Эйлера-Пуансо* – вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в случае, когда результирующий внешний момент равен нулю.

Несмотря на очевидные преимущества невозмущенного решения, оно не подходит для высокоточного моделирования движения КА на длительных интервалах времени, когда усиливается влияние не учтенных прежде возмущающих эффектов. Таким образом, возникает необходимость включения этих эффектов в модель движения. Существует два возможных способа описания поправок, которые вносят возмущающие члены в динамику орбитального (углового) движения КА. Первый – аналитический – заключается в разложении правой части уравнений движения КА в *асимптотические ряды* по степеням некоторого малого параметра и разделении всех переменных на медленные и быстрые. Усреднение уравнений по быстрым переменным позволяет записать решение как сумму *вековой* и *периодической* компонент (если быстрых переменных две, выделяют *короткопериодическую* и *долгопериодическую* части), которые также имеют вид асимптотических рядов по степеням малого параметра. Такой подход, блестяще зарекомендовавший себя в классической небесной механике, лег в основу *общей теории возмущений*. Первое слово в названии показывает, что изучается не отдельная фазовая траектория, отвечающая конкретным начальным условиям, а поведение системы в целом.

В другом случае, когда нужно с высокой точностью вычислить траекторию с заданными начальными условиями, логично воспользоваться методами *частной теории возмущений*. Ее предметом является моделирование орбитального и углового движения КА путем приведения уравнений к наиболее предпочтительному в некотором смысле виду и их последующего численного интегрирования. В моделировании движения КА ключевым фактором, влияющим на результат исследования, является точность инте-

грирования. Ошибки могут быть вызваны двумя факторами: округлением числовых величин или неточной аппроксимацией правой части уравнений на шаге интегрирования. Локальные ошибки быстро нарастают в процессе интегрирования и приводят к заметному отклонению полученной фазовой траектории от истинной. Именно по этой причине на первый план в частной теории возмущений выходит проблема выбора формы записи уравнений движения и метода их численного интегрирования. Подобным вопросам и посвящено предлагаемое учебное пособие.

В первой и второй главах основное внимание уделяется выбору фазовых переменных для численного моделирования орбитального и углового движения КА. Продемонстрирована важность использования регулярного и стабилизированного вида уравнений движения. Показаны преимущества перехода к медленно меняющимся *оскулирующим элементам*.

В третьей главе представлены наиболее употребительные на практике методы численного интегрирования уравнений движения, как многошаговые, так и одношаговые. Рассматриваются способы интегрирования уравнений *с выходом на ограничение* – задача, часто встречающаяся в механике космического полета. Освещена проблема совместного интегрирования уравнений орбитального и углового движения КА. Даны рекомендации по эффективному интегрированию квазипериодических движений.

Приложения А и Б содержат результаты численных экспериментов по моделированию орбитального и углового движения околоземных спутников. В Приложении В приведена сводка формул для преобразований между классическими/равноденственными элементами орбиты и декартовыми координатами и скоростями.

Пособие написано в предположении, что читатель знаком с базовыми элементами небесной механики – задачей двух тел, ее решением, соответствующей терминологией. Помимо этого подразумевается владение основами математического анализа и теории дифференциальных уравнений.

Необходимо сразу обратить внимание, что везде далее будет рассматриваться орбитальное движение, близкое к эллиптическому, когда энергия кеплерова движения (*кеплерова энергия*) отрицательна на всем рассматриваемом интервале времени. Интересный и значительно меньше изученный вопрос численного моделирования *орбитально неустойчивых* движений – движения КА вблизи точек либрации в задаче трех тел, динамики явления баллистического захвата – остается за пределами данного пособия.

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА

1.1 УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА. ЗАДАЧИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ

Возмущенное орбитальное движение КА массой m в гравитационном поле небесного тела массы M описывается системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m}, \quad (1.1.1)$$

где $\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T$ – радиус-вектор КА в инерциальной декартовой системе координат, связанной с небесным телом, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{F}_{pert} – вектор суммарной возмущающей силы, G – универсальная гравитационная постоянная. Так как $M \gg m$, можно чуть упростить уравнения (1.1.1), заменив $G(M+m)$ на гравитационный параметр $\mu = GM$ небесного тела:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m}. \quad (1.1.2)$$

Количество слагаемых, включаемых в выражение для возмущающей силы \mathbf{F}_{pert} , зависит от требуемой точности моделирования движения. Наиболее полный набор возмущений включает в себя атмосферное сопротивление, влияние высших гармоник гравитационного потенциала Земли, давление солнечного излучения и излучения, отраженного от земной поверхности, лунно-солнечные и планетные возмущения, приливные эффекты, эффект Ярковского, релятивистские эффекты и поправки. В дальнейшем порядок величины возмущающей силы будем считать много меньшим в сравнении с центральным ньютоновским членом, что означает близость орбиты КА к кеплеровой.

При численном прогнозировании движения центра масс КА одним из источников ошибок является сама система дифференциальных уравнений движения. Отвечающий за центральное ньютоновское притяжение член в правых частях уравнений содержит особенность в притягивающем центре (при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$). Хотя в практических задачах траектории КА, проходящие в малой окрестности притягивающего центра, не могут быть реализованы в силу конечных размеров небесного тела, само наличие такой особенности дифференциальных уравнений движения оказывает значительное влияние на процесс их численного интегрирования. Для орбит, имеющих большой эксцентриситет, наличие особенности в начале координат обуславливает

неравномерное изменение правых частей уравнений: скорость изменения радиус-вектора резко возрастает при приближении к перигею орбиты и так же резко падает при удалении от него. В этом случае для поддержания постоянной локальной точности численного интегрирования необходимо непрерывно менять шаг интегрирования, что ведет к непроизводительным затратам машинного времени. К тому же увеличение объема вычислений сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления. Следуя одной из классических работ [1], процедуру, устраняющую особенности уравнений движения, называют *регуляризацией*.

Еще одной важной проблемой является *ляпуновская неустойчивость* уравнений движения: отклонение траектории от расчетной линейно растет со временем при сколь угодно малом отклонении в начальных условиях и в конце концов достигает любой наперед заданной величины. На практике это наблюдается, к примеру, в виде расхождения вдоль орбиты спутников с близкими, но не совпадающими значениями большой полуоси. Свойство неустойчивости усугубляет различные ошибки, сопровождающие процесс численного интегрирования уравнений. Любое преобразование, делающее уравнения движения устойчивыми в смысле Ляпунова, принято называть *стабилизацией*.

Ниже будут рассмотрены некоторые типичные методы регуляризации и стабилизации уравнений движения КА в форме (1.1.2) (*форме Коуэлла*). Обсудим также и особенности других форм записи уравнений движения – *формы Энке* и *формы вариаций элементов орбиты*. Результаты сравнения численной эффективности разных подходов приведены в Приложении А.

1.2 РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ И КООРДИНАТ: СГЛАЖИВАЮЩИЕ, ШПЕРЛИНГА-БЮРДЕ, КУСТААНХЕЙМО-ШТИФЕЛЯ

1.2.1 Сглаживающие преобразования

Простейший и наиболее популярный метод регуляризации уравнений орбитального движения в форме Коуэлла заключается в переходе к новой независимой переменной. При интегрировании вытянутых эллиптических орбит вместо обычного физического времени t может быть использована другая переменная s , связанная с t *временным преобразованием*

$$dt = f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) ds. \quad (1.2.1)$$

Это преобразование иногда еще называют *сглаживающим*, так как подбор соответствующего *масштабирующего множителя* f позволяет добиться так называемой *аналитической смены шага интегрирования*: постоянный по *фиктивному времени* s шаг ведет к сглаженному, почти равномерному изменению правой части уравнений. Масштабирующие множители могут быть самыми разнообразными функциями \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ в зависимости от состава

возмущающих факторов и типа орбит. На практике чаще всего применяют масштабирующий множитель вида $f = c_n r^n$, а нормировочную константу c_n выбирают так, чтобы значение фиктивного времени изменялось на 2π за один оборот по орбите. К примеру, для $n=0$ (фактически, в отсутствие регуляризации) $c_0 = \sqrt{a^3/\mu}$, где a – большая полуось, а фиктивное время в этом случае совпадает со средней аномалией. Для классического случая $n=1$ нормировочный коэффициент равен $c_1 = \sqrt{a/\mu}$, фиктивное время же эквивалентно эксцентрисческой аномалии. Преобразование $dt = c_1 r ds$ было впервые предложено¹ в работе К. Сундмана [2] и, как следствие, получило название *преобразования Сундмана*. Зарекомендовавшее себя на практике, преобразование Сундмана является, наверно, наиболее распространенным из всех сглаживающих преобразований в небесной механике. Главные его достоинства хорошо видны из рисунка 1.1, где показано расположение на орбите 12 точек (узлов интегрирования), равноотстоящих друг от друга по средней либо эксцентрисческой аномалии. В первом варианте наблюдается скученность точек вблизи апоцентра, в то время как в области перицентра точек практически нет. Второй вариант значительно лучше в этом смысле, хотя явление «перицентральной разреженности» устранено все-таки не до конца.

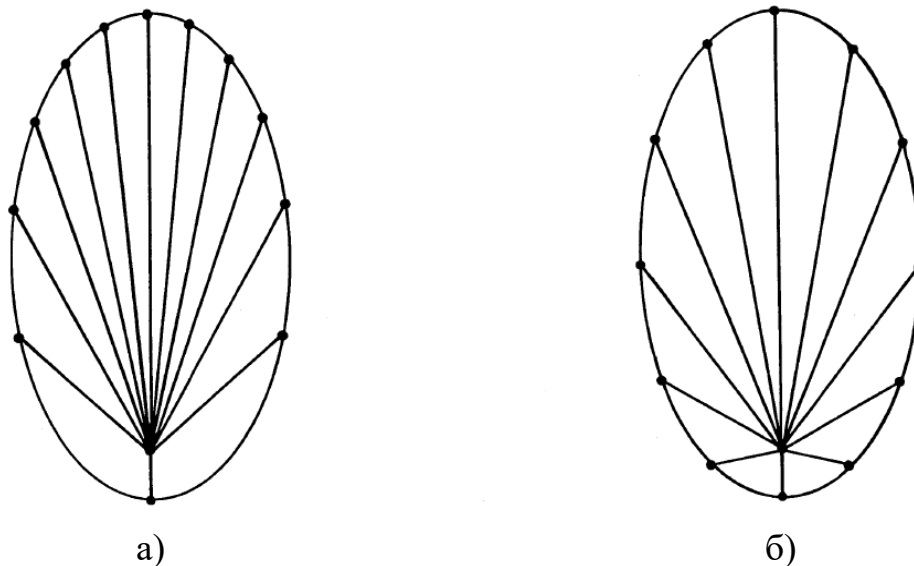


Рис. 1.1. Распределение 12 точек орбиты, равноотстоящих по а) средней аномалии и б) эксцентрисческой аномалии [3]

¹Вообще говоря, в своей статье Сундман предлагал эквивалентное преобразование $dt = r ds$, но мы под преобразованием Сундмана будем понимать его нормированный вид $dt = c_1 r ds$, впервые приведенный в монографии [6].

Другую крайность представляет собой сглаживающее преобразование с $n = 2$. Тогда нетрудно получить, что для нормировочного коэффициента справедлива формула $c_2 = [\mu a(1 - e^2)]^{-1/2}$, где e – эксцентриситет орбиты, а в роли фиктивного времени выступает истинная аномалия. Аналогичная рис. 1.1 картина расположения 12 равноотстоящих по истинной аномалии точек орбиты показана на рис. 1.2а. Заметна сильная разреженность около апоцентра эллипса. Выход из подобной ситуации дает метод сглаживания, предложенный П. Накози [4] и основанный на качественном наблюдении: для равномерного распределения узлов интегрирования вдоль орбиты, как вблизи ее перицентра, так и в районе апоцентра, фиктивное время должно соответствовать значению $1 < n < 2$. Естественно взять $n = 3/2$ и

$$c_{3/2} = \frac{2K(k)}{\pi\sqrt{\mu(1+e)}}, \quad (1.2.2)$$

где $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ – полный нормальный эллиптический интеграл

первого рода, $k^2 = \frac{2e}{1+e}$. Фиктивное время для этого преобразования было

названо Накози *промежуточной аномалией*, однако затем в [3] появилось и альтернативное, более специфицирующее и потому ставшее популярнее название: *эллиптическая аномалия*. Шаг интегрирования, равномерный по эллиптической аномалии, ведет к изображенному на рис. 1.2б положению узлов на орбите. Единственный недостаток использования эллиптической аномалии – необходимость вычисления значений функции $K(k)$ в (1.2.2).

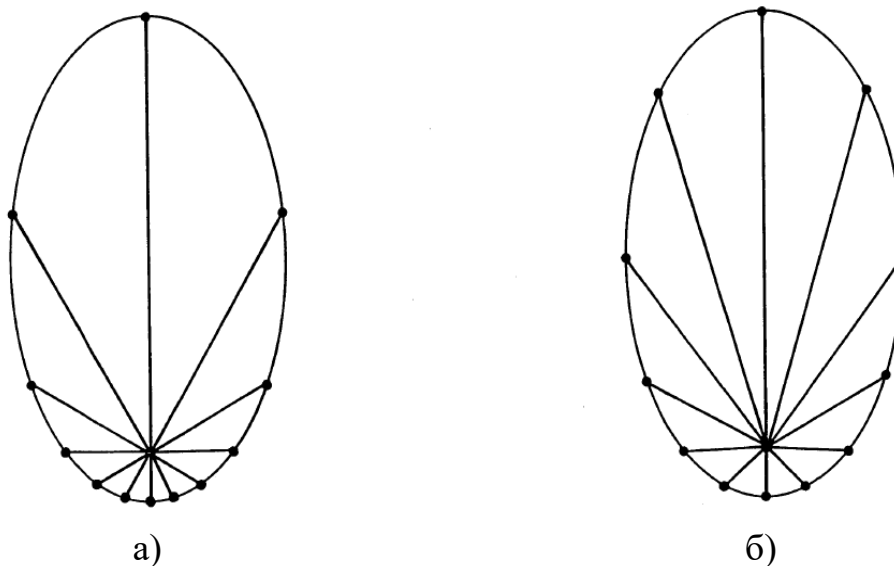


Рис. 1.2. Распределение 12 точек орбиты, равноотстоящих по а) истинной аномалии и б) эллиптической аномалии [3]

Подчеркнем, что называть фиктивное время, вводимое соотношением (1.2.1), одним из типов аномалий можно только в случае невозмущенного движения. При наличии возмущений эта эквивалентность, вообще говоря, нарушается, однако из данной ситуации часто выходят добавлением слова *обобщенная* к названию соответствующей аномалии.

Наконец, нельзя не упомянуть и про еще один вид масштабирующего множителя $f = v^{-1}$, где $v = |\dot{\mathbf{r}}|$ – величина скорости КА. Такой множитель соответствует выбору длины дуги орбиты в качестве фиктивного времени. Это значит, что численном интегрировании с постоянным по фиктивному времени шагом узлы на орбите КА будут равноотстоящими в буквальном смысле слова [5].

В результате применения сглаживающего преобразования типа (1.2.1) уравнения движения могут быть записаны в форме

$$\mathbf{r}'' = f^2 \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right) + f^{-1} f' \mathbf{r}' \quad (1.2.3)$$

или в виде системы уравнений первого порядка относительно \mathbf{r} и $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= f \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= f \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Здесь штрихом обозначается производная по фиктивному времени. Выход в конфигурационное (координатное) пространство на конкретный момент физического времени осуществляется путем дополнения уравнений (1.2.3) или (1.2.4) временным уравнением

$$t' = f \quad (1.2.5)$$

и совместного численного интегрирования (1.2.3) (или (1.2.4)) и (1.2.5).

Неизбежность присоединения к уравнениям движения КА временного уравнения заметно уменьшает регуляризирующий эффект сглаживающих преобразований: стоящая в его правой части функция – масштабирующий множитель – зачастую испытывает короткопериодические колебания, что ведет к необходимости уменьшения шага интегрирования для сохранения требуемого уровня точности. Решением этой проблемы может послужить введение так называемого *временного элемента* [6] – переменной, которая была бы явным образом связана с физическим временем, однако росла бы линейно по отношению к фиктивному времени (при наличии возмущений – почти линейно). Получим дифференциальное уравнение для временного элемента при использовании преобразования Сундмана. Для других типов сглаживающих преобразований вывод осуществляется аналогично.

Как было сказано выше, в преобразовании Сундмана роль фиктивного времени играет (обобщенная) эксцентрическая аномалия. Рассмотрим для

начала невозмущенное кеплерово движение и выделим величину, линейно меняющуюся по отношению к эксцентрической аномалии E . Перепишем уравнение Кеплера в виде

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} E - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} e \sin E, \quad (1.2.6)$$

где t_0 – время прохождения перицентра орбиты, соответствующее $E = 0$. В качестве временного элемента естественно взять величину

$$\tau = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} E. \quad (1.2.7)$$

Подставим (1.2.7) в (1.2.6) и учтем соотношение $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\mu a} e \sin E$:

$$t = \tau - \frac{a}{\mu} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.2.8)$$

Чтобы вывести дифференциальное уравнение для τ , продифференцируем обе части (1.2.8) по физическому времени t и оставим слева производную от временного элемента:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\mu} \frac{da}{dt} + \frac{a}{\mu} v^2 + \frac{a}{\mu} \mathbf{r} \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right). \quad (1.2.9)$$

Удобно перейти от большой полуоси a к кеплеровой энергии h , для чего воспользуемся известными соотношениями

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (1.2.10)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\mu}{(-2h)^2} \frac{dh}{dt}. \quad (1.2.11)$$

С учетом (1.2.10) и (1.2.11) уравнение (1.2.9) перепишется в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{(-2h)^2} \frac{dh}{dt} + \frac{1}{(-2h)} v^2 - \frac{1}{(-2h)} \frac{\mu}{r} + \frac{1}{(-2h)} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m}. \quad (1.2.12)$$

Заметим, что сумма первого, третьего и четвертого членов в правой части (1.2.12) равна $\frac{1}{(-2h)} \frac{\mu}{r}$. Заменяя dt на $\frac{r}{\sqrt{-2h}} ds$, имеем окончательно:

$$\tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \left[\mu + 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} h' + r \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} \right]. \quad (1.2.13)$$

Для определения h и h' можно воспользоваться (1.2.10) и вариационным уравнением для энергии в форме Гаусса

$$h' = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m}, \quad (1.2.14)$$

однако еще лучше добавить к уравнениям движения не только (1.2.13), но и (1.2.14), увеличив таким образом количество зависимых переменных до восьми. В этом случае соотношение (1.2.10) может быть использовано для контроля точности численного интегрирования [7], причем под контролем понимается не только управление шагом интегрирования, но и коррекция вектора состояния, удерживающая его на соответствующей интегральной поверхности уравнения (1.2.14). Такой механизм стабилизации уравнений движения был впервые предложен П. Накози в статье [8], о чем подробнее пойдет речь в следующей главе. Пока же отметим, что выделение в явном виде энергетических величин – кеплеровой энергии или большой полуоси – в качестве зависимых переменных ведет к устойчивости невозмущенной динамической системы по остальным зависимым переменным.

1.2.2 Преобразование Шперлинга-Бюрде

Перейдем теперь к рассмотрению регуляризирующих преобразований времени и координат, которые полностью избавляют уравнения движения от каких бы то ни было особенностей. Начнем с изящного *преобразования Шперлинга-Бюрде*, которые было названо в честь впервые предложивших его Х. Шперлинга [9] и К. Бюрде [10, 11]. Фактически это преобразование представляет собой объединение преобразования Сундмана с выделением кеплеровой энергии и вектора Лапласа в качестве зависимых переменных. Как и прежде, вместо времени t разумно ввести временной элемент τ .

Перепишем уравнения движения (1.2.3), подставив масштабирующий множитель преобразования Сундмана:

$$\mathbf{r}'' = \frac{a}{\mu} r^2 \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right) + \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\sqrt{\frac{a}{\mu}} r \right)' \frac{\mathbf{r}'}{r}. \quad (1.2.15)$$

Для преобразования второго слагаемого в правой части заметим, что

$$r' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \quad (1.2.16)$$

и

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\sqrt{\frac{a}{\mu}} \right)' = \sqrt{-2h} \frac{h'}{(-2h)^{3/2}} = \frac{h'}{(-2h)}. \quad (1.2.17)$$

С учетом соотношений (1.2.16), (1.2.17) уравнения (1.2.15) примут вид

$$\mathbf{r}'' = \frac{1}{(-2h)} \left[-\frac{\mu}{r} \mathbf{r} + r^2 \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + h' \mathbf{r}' \right]. \quad (1.2.18)$$

Поскольку по определению вектор Лапласа есть

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{\mu}{r} \mathbf{r} = 2h \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{\mu}{r} \mathbf{r}, \quad (1.2.19)$$

то, выражая из (1.2.19) последние члены и подставляя в (1.2.18), получим

$$\mathbf{r}'' + \mathbf{r} + \frac{\mathbf{A}}{(-2h)} = \frac{1}{(-2h)} \left[r^2 \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} + h' \mathbf{r}' \right]. \quad (1.2.20)$$

Теперь осталось только вывести дифференциальное уравнение для самого вектора Лапласа. Проще всего продифференцировать по s все три члена в правой части (1.2.19). Пользуясь соотношениями (1.2.10), (1.2.14), (1.2.16), а также уравнениями движения (1.1.2), имеем:

$$(2h \mathbf{r})' = 2h' \mathbf{r} + 2h \mathbf{r}' = 2 \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} \mathbf{r} - \frac{\mu}{a} \mathbf{r}', \quad (1.2.21)$$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}]' &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} r \left\{ v^2 \mathbf{v} + \left[\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right) \right] \mathbf{v} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right) \right\} = \\ &= \frac{\mu}{r} \mathbf{r}' - \frac{\mu}{a} \mathbf{r}' + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} \mathbf{r}' - \frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{m} \mathbf{F}_{pert}, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

$$\left(\frac{\mu}{r} \mathbf{r} \right)' = -\frac{\mu}{r^2} r' \mathbf{r} + \frac{\mu}{r} \mathbf{r}' = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r} + \frac{\mu}{r} \mathbf{r}'. \quad (1.2.23)$$

В итоге выражения (1.2.21), (1.2.22) и (1.2.23) приводят к окончательному виду дифференциального уравнения для вектора Лапласа

$$\mathbf{A}' = 2 \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} \mathbf{r}' - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{m} \mathbf{F}_{pert}. \quad (1.2.24)$$

Добавляя (1.2.24) к уже полученным уравнениям (1.2.20), (1.2.14), (1.2.13) и дополняя алгебраическим соотношением

$$t = \tau - \frac{1}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \quad (1.2.25)$$

(формула (1.2.25), очевидно, является эквивалентом соотношения (1.2.8)), получаем замкнутую, полностью регулярную систему дифференциальных уравнений 11-го порядка.

Главное достоинство преобразования Шперлинга-Бюрде заключается в том, что в невозмущенном движении система уравнений превращается в линейную, а значит, в устойчивую по Ляпунову. Более того, как отмечено в [6], уравнения движения (1.2.20), совпадающие в невозмущенной задаче с уравнениями гармонических колебаний постоянной частоты, проявляют устойчивое поведение и при наличии консервативных возмущений. Плата за хорошие численные свойства уравнений состоит в повышении порядка системы почти вдвое.

1.2.3 Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля

Еще одним преобразованием, приводящим уравнения движения КА к полностью регулярному виду, является широко известное *преобразование Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование)* [12, 6]. В отличие от выше рассмотренных способов регуляризации оно предусматривает как переход к фиктивному времени, так и замену координат трехмерного физического пространства на набор из четырех параметров (u_1, u_2, u_3, u_4) – координат в абстрактном четырехмерном параметрическом пространстве.

Главная идея, заложенная в KS-преобразовании, состоит в обобщении на трехмерный случай конформного отображения

$$x + iy = (u_1 + iu_2)^2 \quad (1.2.26)$$

плоскости (x, y) кеплеровой орбиты на плоскость (u_1, u_2) . Впервые такая интерпретация декартовых координат в качестве компонент комплексного числа была предложена Г. Леви-Чивитой в [1] для регуляризации плоской задачи двух тел. Рассмотрим подробно все свойства *преобразования Леви-Чивиты*, так как большая их часть наследуется в почти неизменной форме пространственным KS-преобразованием.

Перепишем соотношение (1.2.26) по отдельности для действительной и мнимой частей:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 \\ 2u_1u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2.27)$$

Ортогональную матрицу

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.28)$$

элементы которой линейны относительно компонент вектора $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$, называют *матрицей Леви-Чивиты*. Если ввести двумерный радиус-вектор $\mathbf{r} = (x \ y)^T$, то, используя (1.2.28), можно переписать (1.2.27) как

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (1.2.29)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой и дифференцированием следующие важные свойства преобразования Леви-Чивиты:

$$r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.2.30)$$

$$\mathbf{r}' = 2\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}', \quad (1.2.31)$$

$$\mathbf{L}'(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\mathbf{u}'), \quad (1.2.32)$$

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{L}^T(\mathbf{u})}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1.2.33)$$

Для того чтобы записать уравнения плоского движения в переменных Леви-Чивиты, воспользуемся уравнениями (1.2.18) в немного измененном виде

$$\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \mathbf{r}' + \frac{1}{(-2h)} \left[-\frac{\mu}{r} \mathbf{r} + r^2 \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} + h' \mathbf{r}' \right], \quad (1.2.34)$$

которые, разумеется, остаются справедливыми и для плоской задачи двух тел. После подстановки в них выражений (1.2.29), (1.2.30), (1.2.31) и учета соотношений (1.2.32) и (1.2.33) уравнения (1.2.34) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' + \frac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{L}(\mathbf{u}') \mathbf{u}' &= 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}' + \\ &+ \frac{1}{(-4h)} \left[-\frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{m} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}_{pert} + 2h' \mathbf{u}' \right]. \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

Заметим теперь, что

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{(-2h) \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}{2 r^2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{4h}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' - \frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1.2.36)$$

Если выразить последнее слагаемое в правой части (1.2.36) и подставить в (1.2.35), то, перегруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} + \frac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \left[\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{L}(\mathbf{u}') \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u}' \right] &= \\ &= -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} \frac{\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}_{pert}}{m} - \frac{h'}{2h} \mathbf{u}'. \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

Прямой проверкой несложно убедиться, что

$$\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{L}(\mathbf{u}') \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u}' = 0. \quad (1.2.38)$$

Таким образом, уравнения (1.2.37) заметно упрощаются. В конечном счете имеем:

$$\mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} \frac{\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}_{pert}}{m} - \frac{h'}{2h}\mathbf{u}'. \quad (1.2.39)$$

Другими словами, в плоской задаче двух тел при помощи преобразования Леви-Чивиты уравнения движения могут быть сведены к виду регулярных уравнений возмущенного гармонического осциллятора. Если возмущения отсутствуют, то решением уравнений являются гармонические колебания с постоянной частотой $1/2$.

В пространственном случае, к сожалению, не удастся обойтись тремя параметрами. Чтобы сохранить преобразование Леви-Чивиты, приходится ввести еще одну переменную и увеличить тем самым размерность параметрического пространства до четырех [6]. В результате преобразование Кустаанхеймо-Штифеля – аналог преобразования (1.2.27) – приобретает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ 2(u_1u_3 + u_2u_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (1.2.40)$$

Добавлением к вектору физических координат тождественно равной нулю четвертой компоненты можно свести (1.2.40) к удобной для последующих манипуляций форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad (1.2.41)$$

где $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T$. Здесь для ортогональной *KS-матрицы* $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ было введено такое же обозначение, что и прежде для матрицы Леви-Чивиты, с целью подчеркнуть близкую связь между этими двумя преобразованиями. Кроме того, для унифицированной записи всех уравнений и соотношений напрашивается введение расширенного (четырёхмерного) радиус-вектора $\mathbf{r} = (x \ y \ z \ 0)^T$. Так же как и в плоской задаче двух тел, непосредственной подстановкой легко убедиться в справедливости свойств (1.2.30), (1.2.32), (1.2.33). Если потребовать выполнения и свойства (1.2.31), то из равенства нулю четвертой компоненты вектора \mathbf{r}' (четвертая компонента вектора \mathbf{r} должна быть тождественно нулевой) следует, что

$$(u_4 \quad -u_3 \quad u_2 \quad -u_1)^T \cdot \mathbf{u}' \equiv 0. \quad (1.2.42)$$

Такое соотношение, называемое *билинейным*, играет ключевую роль в KS-преобразовании. Его интересная геометрическая интерпретация изложена в работах [6] и [13]. Здесь же подчеркнем только, что выполнение (1.2.42) влечет справедливость равенства (1.2.38) и в четырехмерном случае. Если билинейное соотношение выполнено в начальный момент времени, то оно сохраняется и в последующие моменты времени, то есть является первым интегралом системы (1.2.39).

Наиболее серьезным отличием KS-преобразования от преобразования Леви-Чивиты является его неоднозначность при переходе от координат \mathbf{r} к параметрам \mathbf{u} : любому вектору \mathbf{r} соответствует одномерное множество – *слой* – векторов \mathbf{u} в виде окружности с центром в начале координат [6]. Как следствие, преобразование начальных условий $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) \rightarrow (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0)$ имеет некоторую степень свободы, которой обычно распоряжаются следующим образом. Из (1.2.41) следует, что $x = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2$. Складывая почленно с (1.2.30), получим

$$u_1^2 + u_4^2 = \frac{1}{2}(x + r). \quad (1.2.43)$$

Можно положить в (1.2.43) $u_4 = 0$, и тогда

$$u_1 = \sqrt{\frac{x+r}{2}}, \quad u_2 = \frac{y}{2u_1}, \quad u_3 = \frac{z}{2u_1}. \quad (1.2.44)$$

Если $x < 0$, то, чтобы наверняка избежать проблемы малых знаменателей, рекомендуется взять $u_3 = 0$ и вместо (1.2.44) использовать соотношения

$$u_2 = \sqrt{\frac{r-x}{2}}, \quad u_1 = \frac{y}{2u_2}, \quad u_4 = \frac{z}{2u_2}. \quad (1.2.45)$$

Что касается параметрической скорости \mathbf{u}' , то при выбранном векторе \mathbf{u} она выражается однозначно из (1.2.31):

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{r}'}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}. \quad (1.2.46)$$

Нередко удобно вычислять начальное значение параметрической скорости \mathbf{u}'_0 не через \mathbf{r}'_0 , а через $\dot{\mathbf{r}}_0$. Тогда соотношение (1.2.46) записывается в виде

$$\mathbf{u}'_0 = \frac{\mathbf{L}^T(\mathbf{u}_0)\dot{\mathbf{r}}_0}{2\sqrt{-2h_0}}, \quad (1.2.47)$$

где в качестве аргумента KS-матрицы выступает вектор, рассчитанный по формулам (1.2.44) или (1.2.45). Несложно показать, что значение параметрической скорости, заданное согласно (1.2.46) или (1.2.47), удовлетворяет билинейному соотношению (1.2.42). Таким образом, использование уравнений движения (1.2.39) в пространственном случае является законным.

Теперь повторим в обратном порядке все выкладки, выполненные при выводе уравнений (1.2.39). Вектор \mathbf{u} уже считаем четырехкомпонентным. В результате нетрудно прийти к следующему выводу: KS-преобразование решения $\mathbf{u}(s)$ уравнений (1.2.39) удовлетворяет уравнениям (1.2.34). При этом сопоставление начальных условий осуществляется в случае прямого KS-преобразования по правилам (1.2.29) и (1.2.31), а в случае обратного – по правилам (1.2.44) (или (1.2.45)) и (1.2.46) (или (1.2.47)).

Для полноты изложения осталось привести соотношения для энергии и временного элемента, записанные через параметрические переменные:

$$h = -\frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}')}, \quad (1.2.48)$$

$$t = \tau - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{\sqrt{-2h}}. \quad (1.2.49)$$

Эти соотношения легко получаются из формул (1.2.36) и (1.2.25) с учетом свойства (1.2.31) KS-преобразования. Не менее просто модифицируются и соответствующие дифференциальные уравнения (1.2.14) и (1.2.13):

$$h' = 2\frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}_{pert}}{m}, \quad (1.2.50)$$

$$\tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \left[\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}_{pert}}{m} \right]. \quad (1.2.51)$$

Таким образом, порядок полной системы дифференциальных уравнений в *KS-переменных* равен десяти. Для контроля точности при интегрировании может использоваться билинейное соотношение (1.2.42) и выражение для энергии (1.2.48). Связь с физическим временем задается согласно (1.2.49).

При отсутствии возмущений KS-уравнения (1.2.39), (1.2.50) и (1.2.51), как и рассмотренные прежде уравнения в переменных Шперлинга-Бюрде, представляют собой устойчивые (по Ляпунову) уравнения гармонических колебаний постоянной частоты. Что же касается возмущенных уравнений движения, то для них неустойчивость сведена к минимуму (имеет порядок малого возмущающего параметра). Отметим, что оба этих типа уравнений свободны от особенностей в начале координат и потому применяются при интегрировании сильно вытянутых орбит.

1.3 МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ: КОНСЕРВАТИВНЫЙ И ДИССИПАТИВНЫЙ МЕТОДЫ, МЕТОД ТРАЕКТОРНОЙ КОРРЕКЦИИ

1.3.1 Принципы численной стабилизации

Любая процедура численной стабилизации уравнений движений КА – придание системе свойства ляпуновской устойчивости – основана так или иначе на исправлении ошибок численного интегрирования, приводящих к отклонению фазовой траектории от некоторой интегральной поверхности. В задаче двух тел эту роль обычно играет изоэнергетическая поверхность, стационарная в отсутствии возмущений и медленно изменяющаяся при их наличии. Чтобы отслеживать эволюционное изменение соответствующего интегрального параметра, его добавляют в качестве еще одной зависимой переменной к имеющемуся набору декартовых координат и скоростей КА или KS-параметров [6, 7]. Такой прием, сопровождающийся повышением порядка системы дифференциальных уравнений, упомянут в предыдущей главе как один из этапов регуляризирующих преобразований Шперлинга-Бюрде и Кустаанхеймо-Штифеля, которые за счет этого обладают также и стабилизирующими свойствами.

Процесс исправления ошибок интегрирования может осуществляться напрямую, в форме коррекции неточно вычисленной траектории системы, либо опосредованно, путем модификации самих уравнений движения КА, увеличивающей степень их устойчивости. Основоположником первого из подходов считается П. Накози, а со вторым традиционно связывается имя Й. Баумгарта. С двух его методов численной стабилизации и начнем наше рассмотрение.

1.3.2 Консервативный метод стабилизации

Консервативный метод стабилизации, предложенный Й. Баумгартом в работах [14, 15], получил свое название благодаря свойству сохранения каноничности изначально канонической системы. Суть его заключается в переходе к переменным *действие-угол* и новому гамильтониану, который по форме записи похож на гамильтониан гармонического осциллятора, то есть представляется в виде линейной комбинации переменных действия с постоянными коэффициентами (*частотами*). Значения частот полагаются тождественно равными их начальным значениям в течение всего процесса численного интегрирования. Если теперь этот гамильтониан переписать в исходных переменных, то соответствующие канонические уравнения уже будут устойчивыми. Впервые на стабилизирующий эффект использования переменных действие-угол указал Н. Сигрист [16].

Обратимся для начала к невозмущенной задаче двух тел. Выбросив из правой части уравнений орбитального движения КА (1.1.2) возмущающий член, перепишем их в каноническом виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, H – гамильтониан невозмущенной задачи двух тел:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}.\tag{1.3.2}$$

Как известно, система (1.3.1) полностью интегрируема. Согласно теореме Лиувилля-Арнольда [17], существует каноническое преобразование

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_k, \beta_k), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\alpha_k, \beta_k), \quad k = 1, 2, 3,\tag{1.3.3}$$

декартовых координат и скоростей КА в переменные действия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и угловые переменные $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, обладающее следующими свойствами:

- 1) переменные действия α_k являются первыми интегралами движения;
- 2) вектор-функции $\mathbf{r}(\alpha_k, \beta_k)$ и $\mathbf{v}(\alpha_k, \beta_k)$ являются 2π -периодическими по равномерно меняющимся во времени угловым переменным β_k ;
- 3) преобразованная функция Гамильтона зависит только от переменных действия.

Таким образом, каноническое преобразование (1.3.3) упрощает уравнения (1.3.1) до тривиального вида

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial H}{\partial \beta_k} = 0, \quad \dot{\beta}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = \omega_k, \quad k = 1, 2, 3.\tag{1.3.4}$$

Частоты ω_k , вообще говоря, зависят от постоянных значений переменных действия, которые в свою очередь вычисляются через начальные значения координат и скоростей КА.

Для невозмущенной задачи двух тел уравнения (1.3.4) могут быть еще более упрощены при учете двукратного вырождения кеплерова движения: если выразить гамильтониан (1.3.2) в переменных действие-угол, он будет зависеть лишь от одной переменной действия (обозначим ее для простоты за α). В результате две из трех частот системы зануляются. Единственная же ненулевая частота однозначно связана с кеплеровой энергией согласно известному соотношению

$$\omega(h) = \frac{(-2h)^{3/2}}{\mu}.\tag{1.3.5}$$

Зависимость значения энергии h – а значит, и частоты ω – от начальных условий приводит к ляпуновской неустойчивости движения относительно соответствующей угловой переменной. Линейное по времени возрастание ошибки Δh , вносимой в процессе численного интегрирования уравнений, трансформируется в квадратичный рост ошибки в координатах.

Для стабилизации кеплерова движения заменим функцию Гамильтона (1.3.2) на новую, типа гармонического осциллятора:

$$H^* = \hat{\omega} \alpha. \quad (1.3.6)$$

Постоянную $\hat{\omega} = \omega(H(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0))$ можно отождествить с величиной среднего движения для траектории, удовлетворяющей начальным условиям $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. На этой траектории система дифференциальных уравнений, порождаемая функцией Гамильтона (1.3.6), совпадает с исходной системой (1.3.1). В то же время она, очевидно, является устойчивой по Ляпунову. Отклонения в значении кеплеровой энергии от истинного уровня $h = H(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$, которые неизбежно возникают при численном интегрировании, не сказываются на искусственно зафиксированной частоте

$$\omega = \frac{\partial H^*}{\partial \alpha} = \frac{dH^*}{d\alpha} = \hat{\omega} = \text{const}, \quad (1.3.7)$$

вычисляемой единожды перед началом процесса интегрирования.

Чтобы получить стабилизированные уравнения движения в исходных переменных (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , воспользуемся цепочкой равенств

$$\frac{d\alpha}{dH} = \left(\frac{dH}{d\alpha} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \right)^{-1} = \frac{1}{\omega(H)}, \quad (1.3.8)$$

где частота $\omega(H)$, как функция координат и скоростей КА, определяется по формуле (1.3.5). С учетом (1.3.7) и (1.3.8) имеем:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{v}} = \hat{\omega} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{v}} = \hat{\omega} \frac{d\alpha}{dH} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\omega(h)}{\omega(H)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{h}{H} \right)^{3/2} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.3.9)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{r}} = -\hat{\omega} \frac{d\alpha}{dH} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\omega(h)}{\omega(H)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\left(\frac{h}{H} \right)^{3/2} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}.$$

Множитель

$$\lambda = \left(\frac{h}{H} \right)^{3/2}, \quad (1.3.10)$$

обращающийся в единицу на точном (аналитическом) решении, называют стабилизирующим.

Несмотря на уже достигнутую ляпуновскую устойчивость, уравнения (1.3.9) могут быть еще более улучшены введением фиктивного времени s согласно временному преобразованию

$$dt = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\lambda} ds. \quad (1.3.11)$$

В систему придется добавить дополнительное уравнение для физического времени, но теперь стабилизирующий множитель (1.3.10) входит только в него, не усложняя правых частей остальных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = f \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= -f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} f \mathbf{r}, \\ t' &= \frac{f}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Присутствующий в преобразовании (1.3.11) масштабирующий множитель $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, варианты выбора которого подробно обсуждались в предыдущей главе, оказывает попутный регуляризирующий эффект.

В случае наличия внешних возмущений величина кеплеровой энергии уже не является постоянной, и дифференциальное уравнение ее эволюции

$$h' = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} = f \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m} \quad (1.3.13)$$

должно быть включено в систему (1.3.12), обретающую после этого вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= f \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= f \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right), \\ t' &= f \left(\frac{H}{h} \right)^{3/2}, \\ h' &= f \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Если неконсервативные возмущения отсутствуют или малы в сравнении с консервативными, заметно эффективнее перейти от кеплеровой энергии к

полной, добавив в гамильтониан (1.3.2) консервативный потенциал $V(\mathbf{r})$. Уравнение эволюции величины полной энергии h_{tot} совпадает по форме с (1.3.13) при условии, что в правой части под \mathbf{F}_{pert} понимается суммарный вектор одних лишь неконсервативных возмущающих сил. Полная энергия в преобладании консервативных возмущений меняется гораздо медленнее кеплеровой. Поэтому и ошибка, вносимая при численном интегрировании уравнения для энергии, будет значительно меньше. Когда же возмущения чисто консервативны, это уравнение и вовсе откидывается, что позволяет сократить порядок системы на единицу¹. Для удобства приведем отдельно весь набор стабилизированных дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= f \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= f \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right), \\ t' &= f \left(\frac{H_{tot}}{h_{tot}} \right)^{3/2}, \quad H_{tot} = H + V, \\ h'_{tot} &= f \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m}. \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Отметим, что характерным примером практической задачи, в которой система (1.3.15) демонстрирует существенно лучшие численные свойства, нежели система (1.3.14), является моделирование движения КА на низкой околоземной орбите, где основное возмущение – консервативное: влияние второй зональной гармоники потенциала гравитационного поля Земли.

1.3.3 Диссипативный метод стабилизации

Другой – *диссипативный* – метод стабилизации, который Й. Баумгарт выдвинул в [17] и [18], подразумевает введение в правую часть уравнений движения некоторого «демпфирующего» члена, исчезающего для точного решения и в то же время устремляющего (асимптотически) к нулю любые вносимые при численном интегрировании ошибки в значении выбранного интегрального параметра. По привычной схеме продемонстрируем работу диссипативного метода сначала на невозмущенной задаче двух тел, затем рассмотрим случай наличия внешних возмущений.

Перепишем систему (1.3.1), добавив фиктивную возмущающую силу, пропорциональную скорости КА:

¹По тем же самым причинам переход от кеплеровой энергии к полной чаще всего бывает выгоден при выполнении регуляризирующих преобразований Шперлинга-Бюрде и Кустанхеймо-Штифеля.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} - c_d \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

Потребуем, чтобы решение такой модифицированной системы уравнений удовлетворяло дифференциальному соотношению

$$\frac{d}{dt}(H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - h) + \gamma(H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - h) = 0,\tag{1.3.17}$$

где параметр γ – некоторое положительное число. В этом случае фазовая траектория системы (1.3.16) будет экспоненциально быстро приближаться к поверхности с истинным значением кеплеровой энергии. Поскольку

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -c_d \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = -c_d v^2,\tag{1.3.18}$$

коэффициент демпфирования c_d выражается через декремент затухания γ и ошибку $\Delta H = H - h$ в виде

$$c_d = \gamma \frac{\Delta H}{v^2}.\tag{1.3.19}$$

Как и должно быть, фиктивная демпфирующая сила обращается в ноль на точном (аналитическом) решении.

Значение стабилизирующего параметра γ , вообще говоря, априори не известно и должно определяться из результатов численного эксперимента. Заметим лишь, что для околокруговых орбит в качестве γ рекомендуется брать среднее движение [20].

Соотношение (1.3.17) может быть записано относительно фиктивного времени:

$$\frac{d}{ds}(H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - h) + \gamma(H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - h) = 0.\tag{1.3.20}$$

Тогда, с учетом (1.3.18), получим похожее на (1.3.19) выражение

$$c_d = \frac{\gamma}{f} \frac{\Delta H}{v^2},\tag{1.3.21}$$

где f – масштабирующий множитель, а стабилизирующий параметр γ – безразмерный. Формулы (1.3.20) и (1.3.21) рационально использовать при интегрировании вытянутых орбит. Система уравнений движения в данном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= f \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= f \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\gamma}{f} \frac{\Delta H}{v^2} \mathbf{v} \right), \\ t' &= f.\end{aligned}\tag{1.3.22}$$

Тем самым стабилизирующий и регуляризирующий эффекты достигаются одновременно.

В присутствии внешних возмущений система (1.3.22) привычным уже образом дополняется энергетическим уравнением и приобретает форму

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= f \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= f \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\gamma}{f} \frac{\Delta H}{v^2} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right), \\ t' &= f, \\ h' &= f \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m}.\end{aligned}\tag{1.3.23}$$

Как пояснялось выше, если среди всех внешних возмущений преобладают консервативные, разумно перейти от кеплеровой энергии h к полной h_{tot} , добавив консервативный потенциал $V(\mathbf{r})$ в функцию Гамильтона. Второе и четвертое уравнения системы (1.3.23) заменяются при этом на

$$\mathbf{v}' = f \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\gamma}{f} \frac{\Delta H}{v^2} \mathbf{v} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \right)\tag{1.3.24}$$

и

$$h'_{tot} = f \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{pert}}{m}.\tag{1.3.25}$$

Стоит напомнить, что под \mathbf{F}_{pert} в (1.3.24) и (1.3.25) подразумеваются лишь неконсервативные возмущающие силы.

Различные численные эксперименты показывают, что интегрирование стабилизированной системы ведет к невозрастающему поведению ошибки в энергии, а ошибка в координатах растет не быстрее чем линейно.

1.3.4 Методы траекторной коррекции

Альтернативный подход к задаче стабилизации движения – коррекция вычисленной с ошибками фазовой траектории – традиционно связывается

с именем П. Накози, впервые предложившего эту идею в работе [8]. Когда в ходе численного интегрирования уравнений движения нарушаются одно или несколько интегральных соотношений типа (1.2.10), вектор состояния «укладывается» тем или иным образом на соответствующие интегральные поверхности. В оригинальном методе Накози коррекция осуществляется с помощью операции проецирования, поэтому его часто называют *методом проекций*.

Приведем все формулы метода проекций для численной стабилизации орбитального движения по кеплеровой либо полной энергии в задаче двух тел. Поскольку присутствие внешних возмущений не оказывает заметного влияния на выкладки, рассмотрим сразу возмущенный случай, считая, что уравнение эволюции энергии h (ниже под этим обозначением понимается кеплерова или полная энергия; вид всех выражений остается неизменным) присоединено к основной системе. Величина $\Delta H = H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - h$ вследствие потери точности при численном интегрировании в любой момент времени будет отличаться от нуля. Предположим, что на k -м шаге интегрирования

$$H(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) - h_k = \varepsilon_k. \quad (1.3.26)$$

Соотношение (1.3.26) можно интерпретировать как нелинейное уравнение относительно малых поправок к фазовым переменным. Другими словами,

$$H(\mathbf{r}_k + \Delta \mathbf{r}_k, \Delta \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k) - h_k = 0. \quad (1.3.27)$$

В линейном приближении (1.3.27) переписывается как

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{r}_k + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{v}_k + \varepsilon_k = 0. \quad (1.3.28)$$

Из условия проецирования вектора состояния на гиперповерхность $h = h_k$

$$\Delta \mathbf{r}_k^2 + \Delta \mathbf{v}_k^2 \rightarrow \min \quad (1.3.29)$$

получаем следующие формулы для нахождения малых поправок (фазовые переменные удобно предварительно привести к безразмерному виду):

$$\Delta \mathbf{r}_k = - \frac{\varepsilon_k}{\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}\right)^2} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.3.30)$$

$$\Delta \mathbf{v}_k = - \frac{\varepsilon_k}{\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}\right)^2} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}.$$

Выражения (1.3.30) составляют сущность классического метода проекций. Их итерационное применение, до выполнения равенства (1.3.27) с нужной

степенью точности, позволяет удерживать фазовую траекторию на истинной изоэнергетической поверхности¹.

Коррекция может производиться как на каждом шаге интегрирования, так и время от времени, при срабатывании некоторого сигнала. В качестве последнего чаще всего служит достижение определенного уровня ошибки ε_k в величине кеплеровой/полной энергии.

Другой способ устранения отклонений фазовой траектории от нужной изоэнергетической поверхности – *масштабирование* – предложен в статье [21] Т. Фукушимой. В отличие от подхода Накози, требующего разрешить уравнение (1.3.28) с оптимизационным условием (1.3.29), малые поправки к текущим положению и скорости $(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ теперь получаются из простого преобразования масштабирования $(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) \rightarrow (\kappa \mathbf{r}_k, \kappa \mathbf{v}_k)$. Для всех фазовых переменных скалярный множитель κ одинаков и очень близок к единице. Чтобы найти его, необходимо воспользоваться соотношением

$$\frac{(\kappa \mathbf{v}_k)^2}{2} - \frac{\mu}{\kappa r_k} = h_k, \quad (1.3.31)$$

где h_k – значение кеплеровой энергии, полученное путем интегрирования энергетического уравнения. Если переписать (1.3.31) в форме кубического уравнения

$$\varphi(\kappa) = \mathbf{v}_k^2 r_k \cdot \kappa^3 - 2h_k r_k \cdot \kappa - 2\mu = 0, \quad (1.3.32)$$

то легко видеть, что всегда существует как минимум один положительный корень. Фукушима также доказал единственность этого корня и обосновал вычислительную эффективность ньютоновского алгоритма

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i - \frac{\varphi(\kappa_i)}{\varphi'(\kappa_i)} = \frac{2\mathbf{v}_k^2 r_k \cdot \kappa_i^3 + 2\mu}{3\mathbf{v}_k^2 r_k \cdot \kappa_i^2 - 2h_k r_k} \quad (1.3.33)$$

для его поиска. Итерации стартуют с начального значения

$$\kappa_1 = \frac{2\mathbf{v}_k^2 r_k + 2\mu}{3\mathbf{v}_k^2 r_k - 2h_k r_k}, \quad (1.3.34)$$

соответствующего выбору $\kappa_0 = 1$. Численные эксперименты показали, что достаточно не более одной итерации, то есть $\kappa \approx \kappa_2$ или даже $\kappa \approx \kappa_1$.

Логично обобщить метод проекций и метод масштабирования, сделав масштабные коэффициенты κ_r и κ_v различными для радиус-вектора \mathbf{r} и вектора скорости \mathbf{v} КА. Подобное *двойное масштабирование* дает начало

¹Ввиду малых отклонений фазовой траектории от изоэнергетической поверхности хватает одной-двух итераций.

однопараметрическому семейству методов траекторной коррекции. Чтобы специфицировать конкретный метод энергетической стабилизации, нужно задать зависимость между κ_r и κ_v . К примеру, для упомянутого простого (одинарного) масштабирования Фукушимы $\kappa_r = \kappa_v = \kappa$. В случае же, если $\kappa_r \kappa_v^2 = 1$, имеем:

$$\kappa_r = \frac{H(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)}{h_k}, \quad \kappa_v = \left(\frac{h_k}{H(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)} \right)^{1/2}. \quad (1.3.35)$$

Метод энергетической траекторной коррекции (1.3.35) был опубликован в работе [22] китайскими исследователями Л. Лиу и К. Ляо еще в 1988 году и по сути представляет собой *масштабирование по большой полуоси*.

Отметим следующий важный факт: так как стабилизация выполняется по кеплеровой энергии, то исправляются значения только тех параметров, которые напрямую связаны с ней (большая полуось, орбитальный период, среднее движение). Наряду с этим корректировка фазовой траектории или введение в уравнения движения КА фиктивной возмущающей силы, как в рассмотренном ранее диссипативном методе, приводят к дополнительным численным ошибкам – хоть и не векового, а периодического характера – в других орбитальных элементах. Поэтому методы численной стабилизации по энергии имеет смысл применять лишь при моделировании движения на длительных интервалах времени, когда основная роль переходит именно к вековым ошибкам.

Для улучшения точностных характеристик процедуры энергетической траекторной коррекции вполне естественно использовать дополнительные интегральные соотношения, что в свою очередь подразумевает включение в набор зависимых переменных компонент вектора Лапласа и/или вектора орбитального углового момента. Все это – величины, являющиеся, наряду с кеплеровой энергией, интегралами невозмущенного движения КА. Задав форму записи интегральных соотношений и выбрав тип корректирующего преобразования (например, двойное масштабирование [23] либо вращение с простым масштабированием [24]), обычно не составляет труда найти его параметры. Аналогичным образом осуществляется траекторная коррекция и в KS-переменных [24, 25]. К сожалению, большое разнообразие методов и ограниченный объем пособия не позволяют выписать здесь отдельно все необходимые на практике формулы, и мы вынуждены отослать читателя к соответствующим оригинальным статьям.

1.4 ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ЭНКЕ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КА В ФОРМЕ ЭНКЕ

До сих пор, в предыдущих трех главах, речь шла о стандартной форме (1.1.2) уравнений орбитального движения КА (форме Коуэлла) и способах

преодоления различного рода затруднений, которые возникают в процессе численного интегрирования и объясняются ляпуновской неустойчивостью уравнений, а также наличием сингулярности при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ в их правых частях. Перейдем теперь к принципиально иной форме записи уравнений – *форме Энке*, хорошо подходящей для борьбы с ошибками округления. Сущность предложенной И. Энке идеи состоит в подборе *опорной (промежуточной) орбиты*, которая довольно продолжительное время оставалась бы близкой к реальной траектории КА [27]. Тогда вместо фазовых переменных можно ввести их малые отклонения от такой опорной орбиты. Порядок величины отклонений будет совпадать с порядком величины внешних возмущений в правой части. В результате дифференциальные уравнения для отклонений от опорной орбиты могут интегрироваться с гораздо меньшими ошибками округления.

Возьмем в качестве опорной оскулирующую орбиту $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(t)$, которая удовлетворяет тем же начальным условиям, что и реальная траектория, то есть $\bar{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{r}(t_0)$, $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t_0) \equiv \bar{\mathbf{v}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$. Отклонение орбиты КА от опорной $\delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \bar{\mathbf{r}}(t)$ определяется из численного интегрирования уравнений в вариациях¹

$$\frac{d^2\delta\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mu}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m} \quad (1.4.1)$$

с нулевыми начальными условиями. Заметим, однако, что интегрирование уравнений непосредственно в виде (1.4.1) будет не очень эффективным по той причине, что в правой части стоит разность двух близких по величине кеплеровских членов. В силу ошибок округления она будет вычисляться с низкой точностью. Поэтому потребуется предварительное преобразование этой разности с явным выделением малого множителя $\delta\mathbf{r}/r$. Возможность осуществить такого рода преобразование впервые продемонстрировал сам Энке [27], но его подход сопряжен с аппроксимацией функции усеченным рядом Тейлора. Приведем альтернативное преобразование системы (1.4.1) без использования каких бы то ни было рядов. Проблемную разность двух кеплеровских членов можно переписать как

$$-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mu}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{\bar{r}^3}\left(\left(1 - \zeta^3\right)\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}\right), \quad (1.4.2)$$

где $\zeta = \bar{r}/r$. Поскольку

$$(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = (r + \bar{r})(r - \bar{r}) = r^2(1 + \zeta)(1 - \zeta), \quad (1.4.3)$$

получаем для $D = 1 - \zeta^3$ эквивалентное выражение

¹Вектор \mathbf{r} в правой части системы вычисляется через $\delta\mathbf{r}$ и известный вектор $\bar{\mathbf{r}}$.

$$D = (1 - \zeta)(1 + \zeta + \zeta^2) = \frac{1 + \zeta + \zeta^2}{1 + \zeta} \frac{(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r}}{r^2}. \quad (1.4.4)$$

Реализованное с помощью тождества (1.4.3) выделение малого множителя $\delta \mathbf{r}/r$ избавляет от необходимости вычитать близкие друг к другу большие числа. В итоге с учетом (1.4.2) и (1.4.4) окончательно имеем:

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mu}{\bar{r}^3} (D \mathbf{r} - \delta \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{F}_{pert}}{m}. \quad (1.4.5)$$

При интегрировании (1.4.5) в тот момент, когда величина отклонения $|\delta \mathbf{r}|$ достигает некоторого заданного уровня (чаще всего – из диапазона 0.5-1% от \bar{r}), рекомендуется переопределять опорную кеплерову орбиту, заменяя ее оскулирующей на соответствующий момент времени.

Надо сказать, что классический метод Энке в декартовых координатах почти не употребляется на практике: известные проблемы нерегулярности и ляпуновской неустойчивости уравнений движения приводят к быстрому росту ошибок и вынуждают часто обновлять промежуточную орбиту, чем снижают эффективность метода. Тем не менее идея о переходе от величин к их отклонениям от напрямую вычисляемых опорных значений оказалась весьма плодотворной. Наиболее естественно и просто она реализуется для линейных стабилизированных уравнений движения КА в KS-переменных. Если за опорную траекторию принять невозмущенное решение

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{w}_1 \cos \frac{E}{2} + \mathbf{w}_2 \sin \frac{E}{2} \quad (1.4.6)$$

уравнения (1.2.39), где \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 – векторные константы, E – обобщенная эксцентрическая аномалия, то эволюция отклонения $\delta \mathbf{u}(E) = \mathbf{u}(E) - \bar{\mathbf{u}}(E)$ описывается похожим на (1.2.39) дифференциальным уравнением второго порядка [27, 28]

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{\delta \mathbf{u}}{4} = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} \frac{\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}_{pert}}{m} - \frac{h'}{2h} \mathbf{u}', \quad (1.4.7)$$

а правая часть энергетического уравнения (1.2.50) и вовсе остается той же самой:

$$\frac{d\delta h}{dE} = 2 \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}_{pert}}{m}. \quad (1.4.8)$$

Здесь δh обозначает отклонение по энергии от фиксированного опорного значения \bar{h} . Не намного сложнее преобразовать эволюционное уравнение для временного элемента τ :

$$\frac{d\delta\tau}{dE} = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \left[\mu(1 - \xi^3) + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}_{pert}}{m} \right] = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \times$$

$$\times \left[-\mu \left(1 + \frac{\xi^2}{1 + \xi} \right) \frac{\delta h}{\bar{h}} + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{F}_{pert}}{m} \right], \quad (1.4.9)$$

где $\delta\tau = \tau - \bar{\tau}$, $\bar{\tau} = t_0 + \frac{\mu}{(-2h)^{3/2}} E$, $\xi = \sqrt{h/\bar{h}}$. Отметим, что невозмущенное

решение (1.4.6) выражено явным образом через независимую переменную E , и потому с уравнением Кеплера иметь дело не приходится. Так же, как и в классическом методе Энке, возмущенные величины, стоящие в правых частях уравнений (1.4.7), (1.4.8) и (1.4.9), вычисляются через отклонения и известные опорные значения.

Методика, предложенная Энке, успешно применяется в том числе для уменьшения ошибок округления по отдельным зависимым переменным. В частности, целесообразно осуществить переход к малым отклонениям при интегрировании больших параметров – медленно меняющихся (например, кеплеровой/полной энергии, компонент векторов Лапласа и орбитального углового момента) или быстро и монотонно возрастающих (типа времени, временного элемента, всевозможных аномалий и долгот).

Стоит особо подчеркнуть, что выбор опорной орбиты, вообще говоря, не ограничен только кеплеровыми эллипсами: основные возмущения тоже могут быть инкорпорированы в уравнения движения по опорной орбите, а значит, войдут в правую часть системы для отклонений как разность двух близких членов. Обычно принимается во внимание лишь вековое влияние гармоник J_2 (эффект сплюснутости Земли у полюсов) [30], однако были разработаны и аналитические методы построения опорных орбит с учетом совокупности вековых и периодических эффектов произвольного порядка. Это позволяет понизить частоту обновления промежуточной орбиты [31].

1.5 МЕТОД ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Естественное развитие уже знакомой идеи о включении интегральных параметров в расширенный набор зависимых переменных (в дополнение к декартовым координатам и скоростям или KS-переменным) заключается в отказе от использования всех остальных фазовых переменных и замене их первыми интегралами невозмущенного движения. Медленно меняющиеся при наличии возмущений, они идеально подходят для точного численного моделирования орбитальной динамики на больших интервалах времени. В последующем будем называть эти параметры *орбитальными элементами*, а уравнения их эволюции – *уравнениями в вариациях элементов*. Зачастую

в литературе метод вариации постоянных параметров (описание движения с помощью уравнений в вариациях) именуют *методом Эйлера-Лагранжа* в честь двух знаменитых математиков, впервые применивших на практике такой подход для расчета орбит небесных тел.

Из широкого разнообразия вариантов выбора орбитальных элементов, задающих оскулирующий эллипс, рассмотрим наиболее употребительные. Начнем с *классических орбитальных элементов* – набора $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$, где a – большая полуось орбиты, e – ее эксцентриситет, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра и M_0 – средняя аномалия на некоторую эпоху t_0 . Первые пять элементов задают размер и форму орбиты КА, а также ее положение относительно плоскости земного экватора (рис. 1.3, 1.4). Средняя аномалия $M = M_0 + \sqrt{\mu a^{-3}}(t - t_0)$ не имеет простой геометрической интерпретации, но связывает физическое время с эксцентрической аномалией E (и тем самым – с положением спутника на орбите) посредством уравнения Кеплера $M = E - e \sin E$.

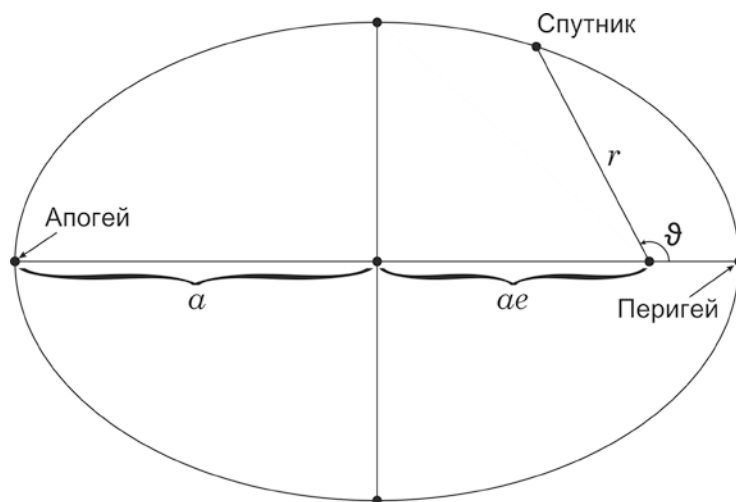


Рис. 1.3. Элементы, задающие размеры и форму орбиты

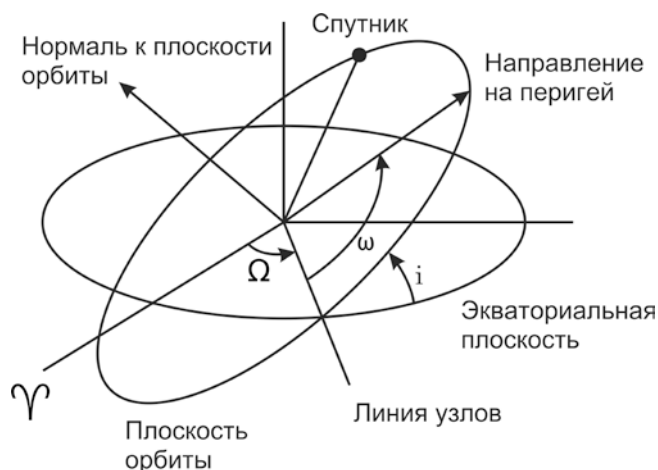


Рис. 1.4. Элементы, задающие положение орбиты в пространстве

Уравнения движения в вариациях классических элементов орбиты для случая потенциальных внешних возмущений были выведены Лагранжем в серии трудов по определению орбит комет и позднее переписаны в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dM_0}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a},
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

получившем название *планетных уравнений Лагранжа*. Здесь $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$ – среднее движение, а суммарный возмущающий потенциал R представлен как функция классических орбитальных элементов: $R = R(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$. Заметим, однако, что все потенциальные возмущения удобно выражаются через текущее значение средней аномалии M (см., например, *разложение Каулы* для гравитационного потенциала [32]). Следовательно, в уравнении для M_0 появится слагаемое, пропорциональное $dn/da \cdot (t - t_0)$. В процессе численного интегрирования на большом интервале времени это слагаемое вызовет нежелательное монотонное возрастание правой части уравнений, что заставит неуклонно уменьшать шаг интегрирования. Поэтому элемент M_0 в уравнениях (1.5.1) часто заменяют на среднюю аномалию M . Тогда суммарный возмущающий потенциал приобретает форму

$$\hat{R} = \hat{R}(a, e, i, \Omega, \omega, M) = R(a, e, i, \Omega, \omega, M - n(t - t_0)). \tag{1.5.2}$$

Частные производные от \hat{R} и R совпадают по всем элементам, кроме a :

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial M_0} \frac{dn}{da} (t - t_0) = \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\partial \hat{R}}{\partial M} \frac{dn}{da} (t - t_0). \tag{1.5.3}$$

С учетом (1.5.3) получаем дифференциальное уравнение для M :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{dM_0}{dt} + n + \frac{dn}{dt}(t-t_0) = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + n + \frac{dn}{da} \frac{da}{dt}(t-t_0) = \\ &= -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e} - \frac{2}{na} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial a} + \frac{dn}{da} \frac{\partial \hat{R}}{\partial M}(t-t_0) \right) + n + \frac{2}{na} \frac{dn}{da} \frac{\partial \hat{R}}{\partial M}(t-t_0) = \\ &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial \hat{R}}{\partial a}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Таким образом, альтернативный набор уравнений Лагранжа, включающий уравнение (1.5.4), запишется как

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \hat{R}}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \hat{R}}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \hat{R}}{\partial i}, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial \hat{R}}{\partial a}. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Важно учитывать, что, в отличие от M_0 и всех прочих элементов орбиты, средняя аномалия M является быстро меняющейся переменной, а значит, с точки зрения численного интегрирования использование системы (1.5.1) для моделирования орбитального движения КА на умеренных временных интервалах (до тысячи витков) предпочтительнее, нежели системы (1.5.5): максимальный из линейных по времени членов в правой части последнего уравнения (1.5.1) по порядку величины равен $n^2 J_2(t-t_0) \approx 10^{-3} n^2(t-t_0)$ и не успевает сравниться с n .

Для некоторых внешних возмущений потенциал отсутствует (скажем, если возмущающая сила явно зависит от скорости КА) или не выражается

в виде (1.5.2), и в целях большей общности требуется переформулировать уравнения Лагранжа, заменив производные возмущающего потенциала на компоненты возмущающего ускорения. Впервые полный набор уравнений был представлен Гауссом и, как правило, именуется *уравнениями Гаусса в вариациях*:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \left(e \sin \vartheta \cdot S + \frac{p}{r} \cdot T \right), \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \vartheta \cdot S + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \cdot T \right\}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{\sqrt{\mu p}} \cdot W, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{\sqrt{\mu p} \sin i} \cdot W, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos \vartheta}{e} \cdot S + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} \cdot T - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot W \right], \\ \frac{dM}{dt} &= n + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\left(\cos \vartheta - 2e \frac{r}{p} \right) \cdot S - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \cdot T \right]. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Здесь S – компонента возмущающего ускорения вдоль радиус-вектора \mathbf{r} , W – вдоль вектора орбитального углового момента, T – проекция на ось, перпендикулярную этим векторам и направленную по движению КА. Для удобства записи уравнений (1.5.6) также введены следующие стандартные обозначения: $p = a(1 - e^2)$ – фокальный параметр, ϑ – истинная аномалия, $u = \omega + \vartheta$ – аргумент широты. Чтобы не решать на каждом шаге уравнение Кеплера, можно перейти от средней аномалии к истинной. Эволюционное уравнение последней имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{\cos \vartheta}{e} \cdot S - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} \cdot T \right]. \quad (1.5.7)$$

Впрочем, выигрыш по быстродействию не гарантирован: на итерационное решение уравнения Кеплера методом Ньютона уходит немного времени, а правая часть уравнения для средней аномалии меняется на эллиптической орбите гораздо медленнее и монотоннее, чем в уравнении (1.5.7).

Область применимости уравнений Гаусса, расширенная по сравнению с уравнениями Лагранжа, остается тем не менее весьма ограниченной: при нулевых эксцентриситете и/или наклонении орбиты знаменатели в правых частях уравнений обращаются в ноль. Кроме того, на параболическом или

гиперболическом участке траектории КА (хоть мы и условились в данном пособии не рассматривать такой случай) теряется прежний смысл понятий большой полуоси и средней аномалии.

Чтобы получить универсальные уравнения движения КА в вариациях, не вырождающиеся для всех типов орбит, вместо классических элементов необходимо использовать *равноденственные элементы* [32, 33]

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2), \quad L = \vartheta + \omega + j\Omega = u + j\Omega, \\ e_x &= e \cos(\omega + j\Omega), \quad e_y = e \sin(\omega + j\Omega), \\ i_x &= \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2}\right)^j j \cos \Omega, \quad i_y = \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2}\right)^j \sin \Omega. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Быструю переменную L называют *истинной долготой в орбите* (нередко слова *в орбите* опускают), а зависящий от наклона параметр

$$j = \begin{cases} +1, & 0 \leq i \leq \pi/2, \\ -1, & \pi/2 < i \leq \pi \end{cases} \quad (1.5.9)$$

– *ретроградным фактором*. Обозначив $\phi = 1 + i_x^2 + i_y^2$, $\eta = i_x \sin L - i_y \cos L$, $\sigma = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$, можно записать уравнения движения в вариациях равноденственных элементов (1.5.8) в форме

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{2p}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot T, \\ \frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L \cdot S + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \cos L + \frac{e_x}{\sigma} \right] \cdot T - \frac{e_y \eta}{\sigma} \cdot W \right\}, \\ \frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L \cdot S + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sin L + \frac{e_y}{\sigma} \right] \cdot T + \frac{e_x \eta}{\sigma} \cdot W \right\}, \\ \frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \cos L}{2\sigma} \cdot W, \\ \frac{di_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \sin L}{2\sigma} \cdot W, \\ \frac{dL}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} \cdot W. \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Любопытно заметить, что ретроградный фактор (1.5.9) не входит в правые части уравнений. Его выбор осуществляется один раз при преобразовании начальных значений декартовых координат и скоростей или классических элементов орбиты в начальные значения равноденственных элементов. По окончании численного интегрирования обратное преобразование строится с тем же самым ретроградным фактором, что и был выбран ранее. Так как случай $i = \pi$ не встречается на практике, допустимо брать всегда $j = 1$.

По причине громоздкости записи сводка формул всех преобразований между классическими или равноденственными орбитальными элементами и декартовыми координатами и скоростями приведена в Приложении В.

Надо сказать, что уравнения (1.5.10), несмотря на все указанные выше достоинства с точки зрения численного интегрирования, имеют несколько довольно серьезных, хоть и исправимых, недостатков. Во-первых, правые части уравнений в вариациях гораздо сложнее, чем исходных уравнений в декартовых координатах, и содержат ряд тригонометрических функций от быстрой угловой переменной – истинной долготы. Их вычисление требует много времени и ведет к накоплению ошибок округления. Во-вторых, для вытянутых эллиптических орбит истинная долгота меняется немонотонно и вынуждает уменьшать шаг интегрирования, а значит, увеличивать число обращений к правой части. Перечислим простые, но действенные рецепты частичного или полного преодоления этих недостатков.

Поскольку все возмущающие силы выражаются через синус (косинус) быстрой угловой переменной и пять медленных орбитальных элементов, в качестве независимой переменной лучше использовать не время, а именно угловую переменную. В свою очередь взамен нее хорошо подойдет какая-нибудь явно связанная с временем функция, которая бы в невозмущенном движении была линейной по угловой переменной. Наиболее естественный выбор – оскулирующая (не нужно путать с обобщенной!) эксцентрическая аномалия E и уже знакомый нам временной элемент

$$\tau = t + \frac{e \sin E}{n} \equiv t + \sqrt{\frac{p^3 (e_x^2 + e_y^2)}{\mu (1 - e_x^2 - e_y^2)^3}} \sin E. \quad (1.5.11)$$

Все необходимые для новой системы уравнений в вариациях соотношения представлены в работе [35].

Уменьшить время расчета тригонометрических функций вдвое можно путем применения формул тангенса половинного угла

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{1 - \nu^2}{1 + \nu^2}, \quad \sin E = \frac{2\nu}{1 + \nu^2}, \quad \nu \equiv \operatorname{tg} \frac{E}{2} \leq 1, \\ \cos E &= \frac{\bar{\nu}^2 - 1}{1 + \bar{\nu}^2}, \quad \sin E = \frac{2\bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}^2}, \quad \bar{\nu} \equiv \frac{1}{\nu} = \operatorname{ctg} \frac{E}{2} < 1 \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

вместо вызова функций синуса и косинуса по отдельности (универсальная тригонометрическая подстановка). Кроме того, в случае если независимой переменной является эксцентрическая аномалия, выгодно интегрировать с постоянным шагом $2\pi/N$, где N – целое число. Тогда значения косинуса и синуса эксцентрической аномалии в узлах сетки на каждом витке равны их значениям в узлах первого витка $E_k = 0, 2\pi/N, \dots, 2\pi - 2\pi/N$, которые могут быть предвычислены единожды. Попутно минимизируются ошибки округления.

Цели уменьшения ошибок округления способствует также прием типа Энке, когда и медленные элементы орбиты, и быстрая угловая переменная (либо ее аналог – временной элемент) заменяются на малые отклонения от опорного решения. Для кеплеровой опорной орбиты величины медленных элементов постоянны и тождественно равны своим начальным значениям. Поэтому правые части эволюционных уравнений сохраняют внешний вид. Что касается временного элемента τ , в невозмущенной задаче Кеплера он растет линейно по эксцентрической аномалии:

$$\bar{\tau} = \tau_0 + \frac{\Delta E}{n_0} \equiv \tau_0 + \frac{E - E_0}{n_0}. \quad (1.5.13)$$

Следовательно, в правую часть уравнения для $\Delta\tau = \tau - \bar{\tau}$ следует добавить слагаемое $-1/n_0$.

Подчеркнем, что предложенный переход к эксцентрической аномалии в роли новой независимой переменной будет корректен лишь при $0 < e < 1$ (то есть для строго эллиптического движения). Избавиться от вырождения уравнений при $e = 0$ позволяет использование другой угловой переменной – эксцентрической долготы $F = E + \omega + j\Omega$. Она должна прийти на смену эксцентрической аномалии в выражениях (1.5.11)-(1.5.13) и правых частях эволюционных уравнений. Это легко осуществимо с помощью очевидных соотношений $e \cos E = e_x \cos F - e_y \sin F$, $e \sin E = e_x \sin F - e_y \cos F$. Формула для производной F по времени выводится через формулы для временных производных E , ω и Ω (либо через временные производные E , L и \mathcal{G}).

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА

2.1 СВЯЗАННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА

Переменные, с помощью которых описывается угловое движение КА, делятся на два класса – *кинематические* и *динамические*. Кинематические переменные задают положение жестко связанной с корпусом КА системы координат (ССК) в инерциальной системе координат (ИСК). Эволюционные уравнения для кинематических переменных, именуемые *кинематическими уравнениями*, содержат *динамические переменные*, которые зависят от приложенных к телу внешних моментов. Эволюционные уравнения для динамических переменных в свою очередь называют *динамическими*.

Ниже будут приведены некоторые типы кинематических и динамических уравнений, чаще всего используемые для численного моделирования углового движения КА. Из кинематических переменных рассмотрим *углы Эйлера* и *самолетные углы*, компоненты *кватерниона* и *матрицу направляющих косинусов*, столбцами которой являются проекции базисных векторов ССК на оси ИСК. Из динамических переменных стоит остановиться на проекциях вектора угловой скорости на оси ССК, компонентах вектора кинетического момента в ИСК, а также производных кинематических переменных. Что касается задач моделирования слабозмущенного углового движения, часто используются уравнения в *оскулирующих угловых элементах* или канонические уравнения движения, также приводимые ниже.

Для всех наборов переменных будут выписаны уравнения эволюции и перечислены основные особенности с точки зрения процедуры численного интегрирования. Результаты численных экспериментов для сравнения вычислительной эффективности использования разных переменных даются в Приложении Б. Отметим в справочных целях, что более полный обзор переменных приведен в широко известной монографии [36].

2.2 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА

2.2.1 Углы Эйлера и самолетные углы

Кинематические переменные, как было сказано выше, – это набор переменных, которые определяют компоненты базисных векторов ССК \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ в ИСК. Девять компонент базисных векторов формируют матрицу

$$\mathbf{A} \equiv (\mathbf{e}_\xi \quad \mathbf{e}_\eta \quad \mathbf{e}_\zeta),$$

называемую *матрицей направляющих косинусов*. Вектор, заданный в ССК, преобразуется в ИСК умножением на матрицу направляющих косинусов:

$$\mathbf{b}_{\text{ИСК}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_{\text{ССК}}.$$

Подробнее о свойствах матриц направляющих косинусов речь пойдет ниже, в соответствующем параграфе.

Как известно, произвольная ориентация твердого тела (каковым мы и считаем КА) представима в виде композиции трех *элементарных поворотов* – поворотов вокруг осей выбранной прямоугольной системы координат. Возьмем в качестве такой СК вращающуюся систему координат, оси которой исходно совпадают с осями ИСК. Произведем три поворота относительно осей вращающейся СК на углы α , β и γ (после каждого поворота оси меняют свое положение!) до совмещения ее осей с осями ССК. Для перевода любого вектора из ССК обратно в ИСК требуется совершить три обратных поворота. Значит, справедливо выражение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_i(-\alpha)\mathbf{A}_j(-\beta)\mathbf{A}_k(-\gamma),$$

где $\mathbf{A}_l(\mathcal{G})$ – матрица поворота относительно l -ой оси вращающейся СК на угол \mathcal{G} . Индексы i , j и k принимают значения от 1 до 3, однако $i \neq j$ и $j \neq k$. Выпишем явно матрицы поворота вокруг каждой из осей:

$$\mathbf{A}_1(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mathcal{G} & \sin \mathcal{G} \\ 0 & -\sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} \cos \mathcal{G} & 0 & -\sin \mathcal{G} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \mathcal{G} & 0 & \cos \mathcal{G} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} \cos \mathcal{G} & \sin \mathcal{G} & 0 \\ -\sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Всего существует 12 возможных комбинаций индексов i, j и k [36]. Они делятся на две категории: шесть комбинаций с $i = k$ и шесть – с $i \neq k$.

Наиболее популярная тройка индексов из первой категории – $(3, 1, 3)$, то есть $i = k = 3$, $j = 1$ [37]. Углы обозначаются как ψ , θ , φ и называются *углами Эйлера*. В частности, угол ψ именуют *углом прецессии*, θ – *углом нутации*, φ – *углом собственного вращения*. (см. рис. 2.1) Эти углы удоб-

ны в описании прецессионного движения осесимметричного КА. Матрица направляющих косинусов, соответствующая углам Эйлера, задается как

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3(-\psi)\mathbf{A}_1(-\theta)\mathbf{A}_3(-\varphi). \quad (2.2.1)$$

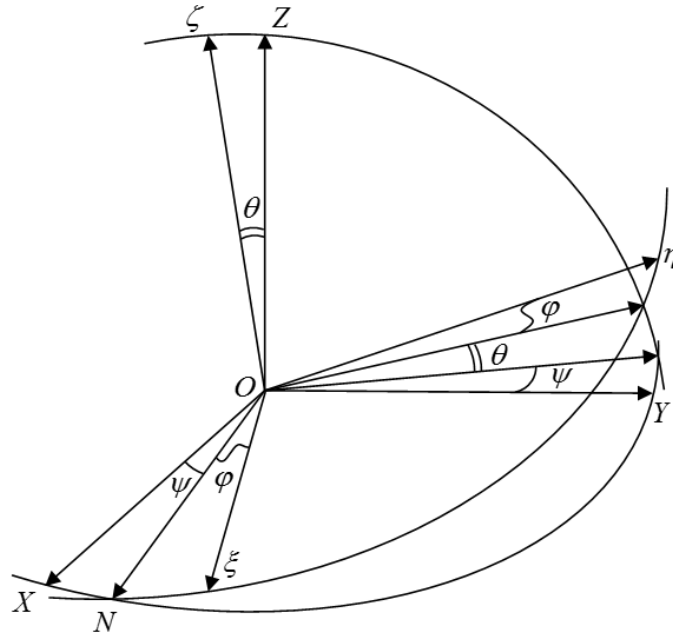


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация углов Эйлера

С помощью формулы (2.2.1) легко записать выражения для тройки базисных векторов ССК:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_\eta &= \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_\zeta &= \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Если известна матрица направляющих косинусов, значения углов Эйлера можно вычислить по формулам

$$\psi = \arctg\left(-\frac{(\mathbf{e}_\zeta)_X}{(\mathbf{e}_\zeta)_Y}\right) = \text{atan2}\left((\mathbf{e}_\zeta)_X, -(\mathbf{e}_\zeta)_Y\right),$$

$$\theta = \arccos((\mathbf{e}_\zeta)_Z),$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{(\mathbf{e}_\xi)_Z}{(\mathbf{e}_\eta)_Z}\right) = \text{atan2}((\mathbf{e}_\xi)_Z, (\mathbf{e}_\eta)_Z),$$

где предполагается, что θ изменяется в пределах от нуля до π . Имеющаяся во всех популярных языках программирования функция **atan2** корректно определяет квадрант угла.

Дифференцируя матрицу направляющих косинусов (2.2.1), можно получить выражение для вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_X \ \omega_Y \ \omega_Z)^T = \dot{\psi} \mathbf{e}_Z + \dot{\theta} \mathbf{e}_N + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\zeta,$$

где \mathbf{e}_Z – третий базисный вектор ИСК,

$$\mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{ИСК}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{ССК}}.$$

Компоненты вектора угловой скорости в ИСК запишутся как

$$\begin{aligned} \omega_X &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_Y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_Z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \end{aligned}$$

а для компонент $p \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_\xi$, $q \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_\eta$, $r \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_\zeta$ вектора угловой скорости в ССК имеем:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Разрешая систему (2.2.3) относительно производных по времени от углов, получим *кинематические уравнения Эйлера*

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\omega_F}{\sin \theta}, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - \omega_F \text{ctg} \theta, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

где $\omega_F = p \sin \varphi + q \cos \varphi$. Уравнения (2.2.4) вырождаются при $\theta = m\pi$, где m – целое число. Вырождение при втором повороте на угол $m\pi$ – общее свойство для всех комбинаций поворотов первой категории (то есть поворотов с $i = k$).

Самолетные углы – это типичный пример комбинации поворотов второй категории ($i \neq k$). Для них $i = 2$, $j = 3$, $k = 1$. Обозначим самолетные углы как α , β и γ , где α – угол тангажа, β – угол рыскания и γ – угол крена (рис. 2.2). Эта последовательность поворотов используется для описания малых колебаний КА относительно некоторого стабилизированного положения. Соответствующая матрица направляющих косинусов задается формулой

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2(-\alpha)\mathbf{A}_3(-\beta)\mathbf{A}_1(-\gamma).$$

Тройка базисных векторов ССК выражается в терминах самолетных углов α , β , γ как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_\eta &= \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_\zeta &= \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

И наоборот, если известна матрица направляющих косинусов, можно вычислить значения самолетных углов по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctg \left(-\frac{(\mathbf{e}_\xi)_Z}{(\mathbf{e}_\xi)_X} \right) = \text{atan2} \left(-(\mathbf{e}_\xi)_Z, (\mathbf{e}_\xi)_X \right), \\ \beta &= \arcsin \left((\mathbf{e}_\xi)_Y \right), \\ \gamma &= \arctg \left(-\frac{(\mathbf{e}_\zeta)_Y}{(\mathbf{e}_\eta)_Y} \right) = \text{atan2} \left(-(\mathbf{e}_\zeta)_Y, (\mathbf{e}_\eta)_Y \right), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где предполагается, что угол β изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$.

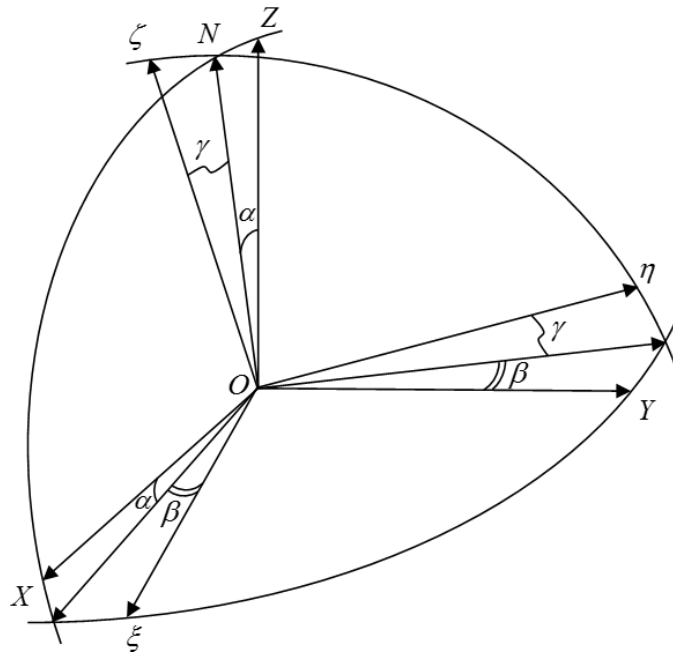


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация самолетных углов

Как и в случае углов Эйлера, легко выводятся выражения для компонент угловой скорости в ИСК

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta, \\ \omega_y &= \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \sin \beta, \\ \omega_z &= \dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta.\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

При проецировании вектора угловой скорости на оси ССК получим:

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctg\left(-\frac{(\mathbf{e}_\xi)_Z}{(\mathbf{e}_\xi)_X}\right) = \text{atan2}\left(-(\mathbf{e}_\xi)_Z, (\mathbf{e}_\xi)_X\right), \\ \beta &= \arcsin\left((\mathbf{e}_\xi)_Y\right), \\ \gamma &= \arctg\left(-\frac{(\mathbf{e}_\zeta)_Y}{(\mathbf{e}_\eta)_Y}\right) = \text{atan2}\left(-(\mathbf{e}_\zeta)_Y, (\mathbf{e}_\eta)_Y\right),\end{aligned}$$

Кинематические уравнения в терминах самолетных углов имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{\omega_G}{\cos \beta}, \\ \dot{\beta} &= q \sin \gamma + r \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= p - \omega_G \text{tg} \beta,\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

где $\omega_G = q \cos \gamma - r \sin \gamma$. Уравнения (2.2.8) вырождаются при $\beta = m\pi + \pi/2$, где m – целое число. Вырождение при втором повороте на угол $m\pi + \pi/2$ – общее свойство всех комбинаций поворотов второй категории.

2.2.2 Кватернион поворота (верзор)

Наиболее универсальным способом описания вращений КА считается *кватернионное описание*: для задания базисных векторов ССК в ИСК используется *единичный кватернион (верзор)*, компоненты которого – четыре действительных числа (q_0, q_1, q_2, q_3) , удовлетворяющих условию нормировки

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (2.2.9)$$

Компоненты верзора были введены Эйлером как один из способов записи матрицы направляющих косинусов, позволяющий обойтись без использования тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_\eta &= \begin{pmatrix} 2(q_1q_2 - q_0q_3) \\ q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\ 2(q_0q_1 + q_2q_3) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_\zeta &= \begin{pmatrix} 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Переход от элементов матрицы направляющих косинусов к компонентам кватерниона не единственный. Если $q_0 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\mathbf{e}_\xi)_X + (\mathbf{e}_\eta)_Y + (\mathbf{e}_\zeta)_Z}, \quad q_1 = \frac{(\mathbf{e}_\eta)_Z - (\mathbf{e}_\zeta)_Y}{4q_0}, \\ q_2 &= \frac{(\mathbf{e}_\zeta)_X - (\mathbf{e}_\xi)_Z}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{(\mathbf{e}_\xi)_Y - (\mathbf{e}_\eta)_X}{4q_0}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Здесь предполагается, что скалярная часть кватерниона q_0 положительна. Однако она может быть взята и отрицательной – выражение для матрицы направляющих косинусов все равно не изменится.

Если q_0 близко к нулю, формулы перехода (2.2.11) становятся неточными. В этом случае используется один из следующих вариантов перехода:

при $q_1 \neq 0$

$$q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\mathbf{e}_\xi)_X - (\mathbf{e}_\eta)_Y - (\mathbf{e}_\zeta)_Z}, \quad q_0 = \frac{(\mathbf{e}_\eta)_Z - (\mathbf{e}_\zeta)_Y}{4q_1},$$

$$q_2 = \frac{(\mathbf{e}_\xi)_Y + (\mathbf{e}_\eta)_X}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{(\mathbf{e}_\xi)_Z + (\mathbf{e}_\zeta)_X}{4q_1},$$

при $q_2 \neq 0$

$$q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\mathbf{e}_\xi)_X + (\mathbf{e}_\eta)_Y - (\mathbf{e}_\zeta)_Z}, \quad q_0 = \frac{(\mathbf{e}_\zeta)_X - (\mathbf{e}_\xi)_Z}{4q_2},$$

$$q_1 = \frac{(\mathbf{e}_\xi)_Y + (\mathbf{e}_\eta)_X}{4q_2}, \quad q_3 = \frac{(\mathbf{e}_\eta)_Z + (\mathbf{e}_\zeta)_Y}{4q_2},$$

при $q_3 \neq 0$

$$q_3 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\mathbf{e}_\xi)_X - (\mathbf{e}_\eta)_Y + (\mathbf{e}_\zeta)_Z}, \quad q_0 = \frac{(\mathbf{e}_\xi)_Y - (\mathbf{e}_\eta)_X}{4q_3},$$

$$q_1 = \frac{(\mathbf{e}_\xi)_Z + (\mathbf{e}_\zeta)_X}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{(\mathbf{e}_\eta)_Z + (\mathbf{e}_\zeta)_Y}{4q_3}.$$

Условие нормировки кватерниона (2.2.9) гарантирует, что хотя бы один из четырех рассмотренных переходов от матрицы направляющих косинусов к компонентам единичного кватерниона хорошо обусловлен.

В силу наличия связи (2.2.9) очевидно, что четыре компоненты верзора избыточны для описания ориентации КА. В самом деле, три угла Эйлера (ψ, θ, φ) полностью их определяют:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right),$$

$$q_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right),$$

$$q_2 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right),$$

$$q_3 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right).$$

Аналогичным образом можно задать компоненты вектора через три самолетных угла:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$q_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$q_3 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Обратный переход от компонент вектора к трем углам поворотов не является единственным. Для углов Эйлера можно, например, взять

$$\psi = \nu_+ + \nu_-, \quad \varphi = \nu_+ - \nu_-,$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{q_1^2 + q_2^2}{q_0^2 + q_3^2}} \right),$$

где

$$\nu_+ \equiv \frac{\psi + \varphi}{2} = \operatorname{arctg}(q_3/q_0) = \operatorname{atan2}(q_3, q_0),$$

$$\nu_- \equiv \frac{\psi - \varphi}{2} = \operatorname{arctg}(q_2/q_1) = \operatorname{atan2}(q_2, q_1),$$

а для самолетных углов – воспользоваться выражениями (2.2.6):

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2(q_1 q_3 - q_0 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right) = \operatorname{atan2}(-2(q_1 q_3 - q_0 q_2), q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2),$$

$$\beta = \arcsin(2(q_0 q_3 + q_1 q_2)),$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2(q_2 q_3 - q_0 q_1)}{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2} \right) = \operatorname{atan2}(-2(q_2 q_3 - q_0 q_1), q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2).$$

Компоненты вектора угловой скорости в ССК записываются через компоненты верзора и их производные в форме

$$\begin{aligned} p &= 2(-q_1\dot{q}_0 + q_0\dot{q}_1 + q_3\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_3), \\ q &= 2(-q_2\dot{q}_0 - q_3\dot{q}_1 + q_0\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_3), \\ r &= 2(-q_3\dot{q}_0 + q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 + q_0\dot{q}_3). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Кинематические уравнения для элементов единичного кватерниона имеют вид [38]

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(-q_1p - q_2q - q_3r), \quad \dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_0p - q_3q + q_2r), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_3p + q_0q - q_1r), \quad \dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_2p + q_1q + q_0r) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

или, по-другому,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q},$$

где

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T$. Кинематические уравнения (2.2.13) не вырождаются при любой ориентации КА. Из условия нормировки (2.2.9) следует тождество

$$q_0\dot{q}_0 + q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + q_3\dot{q}_3 = 0. \quad (2.2.14)$$

Его, так же как и само условие (2.2.9), обычно используют в процессе численного интегрирования уравнений (2.2.13) как один из инструментов траекторной коррекции.

2.2.3 Матрица направляющих косинусов

Наиболее простое и наглядное описание углового движения КА через элементы матрицы направляющих косинусов $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{e}_\xi \ \mathbf{e}_\eta \ \mathbf{e}_\zeta)$ тоже является универсальным (не вырождается ни при какой ориентации КА), однако

число переменных в этом случае равно девяти – значительно больше трех (углов Эйлера) или четырех (компонентов верзора). С практической точки зрения увеличение числа переменных означает повышение затрат машинного времени на интегрирование соответствующих уравнений эволюции.

Элементы матрицы направляющих косинусов удовлетворяют очевидному условию ортонормированности базисных векторов ССК

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (2.2.15)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а каждый из индексов i и j обозначает ξ , η или ζ . Условие (2.2.15) задает шесть связей. Значит, из девяти элементов матрицы остается только три независимых.

Матрица направляющих косинусов однозначно задается тремя углами Эйлера или тремя самолетными углами с помощью соотношений (2.2.2) и (2.2.5) соответственно. Формулы перехода от компонентов кватерниона и обратно уже приводились в предыдущем параграфе.

Кинематические уравнения для базисных векторов ССК, образующих матрицу направляющих косинусов, записываются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{e}}_j = \boldsymbol{\omega}_{\text{ИСК}} \times \mathbf{e}_j = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ССК}} \times \mathbf{e}_j.$$

Здесь j обозначает ξ , η или ζ . В результате несложных преобразований кинематические уравнения приобретают вид

$$\dot{\mathbf{e}}_\xi = r\mathbf{e}_\eta - q\mathbf{e}_\zeta,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\eta = p\mathbf{e}_\zeta - r\mathbf{e}_\xi,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\zeta = q\mathbf{e}_\xi - p\mathbf{e}_\eta.$$

Легко заметить, что эти уравнения автоматически согласуются с условием ортонормированности (2.2.15) в дифференциальной форме

$$\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j + \mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i = 0,$$

где, как и прежде, каждый из индексов i и j обозначает ξ , η или ζ .

2.3 ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА

2.3.1 Компоненты вектора кинетического момента в ИСК

Динамические переменные углового движения определяют эволюцию кинематических переменных во времени. Самое простое из динамических уравнений, которое иногда называют *основным уравнением вращательной динамики*, связывает ИСК-компоненты вектора кинетического момента

$$\mathbf{L} \equiv (L_x \ L_y \ L_z)^T$$

с суммарным внешним моментом \mathbf{M} и имеет максимально простой вид

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} = M_\xi \mathbf{e}_\xi + M_\eta \mathbf{e}_\eta + M_\zeta \mathbf{e}_\zeta.$$

Компоненты вектора угловой скорости в ССК могут быть выражены через ССК-компоненты $L_\xi \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_\xi$, $L_\eta \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_\eta$, $L_\zeta \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_\zeta$ в соответствии с формулами

$$p = \frac{L_\xi}{A} \equiv aL_\xi, \quad q = \frac{L_\eta}{B} \equiv bL_\eta, \quad r = \frac{L_\zeta}{C} \equiv cL_\zeta,$$

где a , b и c – величины, обратные главным моментам инерции A , B и C соответственно.

2.3.2 Компоненты вектора угловой скорости в ССК

Чтобы обойтись без дополнительных промежуточных вычислений, на практике в качестве динамических переменных обычно сразу используют компоненты p , q и r вектора угловой скорости в ССК [39]. Соответствующие динамические уравнения удобнее всего записываются в случае совпадения осей ССК с главными центральными осями инерции (начало ССК – центр масс) и носят название *динамических уравнений Эйлера*. Для КА с главными центральными моментами A , B и C они принимают вид

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi,$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta,$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta,$$

где $M_\xi \equiv \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_\xi$, $M_\eta \equiv \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_\eta$ и $M_\zeta \equiv \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_\zeta$ – проекции вектора суммарного внешнего момента на оси ССК. Из этих уравнений получаем

$$\dot{p} = W_\xi, \quad \dot{q} = W_\eta, \quad \dot{r} = W_\zeta, \quad (2.3.1)$$

где

$$W_\xi = -\tilde{\alpha}qr + aM_\xi, \quad W_\eta = -\tilde{\beta}pr + bM_\eta, \quad W_\zeta = -\tilde{\gamma}pq + cM_\zeta.$$

Здесь под $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ обозначены следующие инерционные параметры твердого тела:

$$\tilde{\alpha} \equiv \frac{C - B}{A}, \quad \tilde{\beta} \equiv \frac{A - C}{B}, \quad \tilde{\gamma} \equiv \frac{B - A}{C}.$$

Для определенности будем полагать, что $A \leq B \leq C$. Тогда $a \geq b \geq c$, $\tilde{\alpha} \geq 0$, $\tilde{\beta} \leq 0$ и $\tilde{\gamma} \geq 0$.

2.3.3 Производные кинематических переменных

Роль динамических переменных могут брать на себя производные кинематических переменных по времени, и тогда динамическими уравнениями являются дифференциальные уравнения второго порядка относительно кинематических переменных. К примеру, динамическими уравнениями для производных от углов Эйлера служат уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} &= \frac{W_F}{\sin \theta}, \\ \ddot{\theta} &= W_\xi \cos \varphi - W_\eta \sin \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta, \\ \ddot{\varphi} &= W_\zeta - W_F \operatorname{ctg} \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta,\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

где

$$W_F \equiv W_\xi \sin \varphi + W_\eta \cos \varphi + \dot{\theta}(\dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta).$$

Компоненты вектора угловой скорости p , q и r , содержащиеся в W_ξ , W_η и W_ζ , вычисляются с использованием соотношений (2.2.3). К сожалению, динамические уравнения (2.3.2), так же как и соответствующие кинематические уравнения, вырождаются при $\theta = m\pi$, где m – целое число.

Динамические уравнения для самолетных углов очень схожи по своей форме с уравнениями (2.3.2):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \frac{W_G}{\cos \beta}, \\ \ddot{\beta} &= W_\eta \sin \gamma + W_\zeta \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta, \\ \ddot{\gamma} &= W_\xi - W_G \operatorname{tg} \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

Здесь

$$W_G = W_\eta \sin \gamma + W_\zeta \cos \gamma - \dot{\beta}(\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta).$$

Компоненты вектора угловой скорости p , q и r , содержащиеся в W_ξ , W_η и W_ζ , вычисляются с использованием соотношений (2.2.7). Динамические уравнения (2.3.3) вырождаются при $\beta = m\pi + \pi/2$, где m – целое число.

Динамические уравнения второго порядка для компонент единичного кватерниона записываются как [40]

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_0 &= -\frac{\omega^2}{4}q_0 + \frac{1}{2}(-q_1W_\xi - q_2W_\eta - q_3W_\zeta), \\
\ddot{q}_1 &= -\frac{\omega^2}{4}q_1 + \frac{1}{2}(q_0W_\xi - q_3W_\eta + q_2W_\zeta), \\
\ddot{q}_2 &= -\frac{\omega^2}{4}q_2 + \frac{1}{2}(q_3W_\xi + q_0W_\eta - q_1W_\zeta), \\
\ddot{q}_3 &= -\frac{\omega^2}{4}q_3 + \frac{1}{2}(-q_2W_\xi + q_1W_\eta + q_0W_\zeta),
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

где $\omega^2 \equiv |\boldsymbol{\omega}|^2 = p^2 + q^2 + r^2$. Компоненты вектора угловой скорости p , q и r , содержащиеся в W_ξ , W_η и W_ζ , вычисляются из соотношений (2.2.12).

Заметим, что уравнения (2.3.4) имеют вид уравнений четырехмерного возмущенного гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega/2$, а возмущающее ускорение зависит от значений амплитуд и фазовых углов осциллятора.

И напоследок, выпишем динамические уравнения для элементов матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{e}}_\xi &= -(q^2 + r^2)\mathbf{e}_\xi + (pq - W_\zeta)\mathbf{e}_\eta + (pr + W_\eta)\mathbf{e}_\zeta, \\
\ddot{\mathbf{e}}_\eta &= (pq + W_\zeta)\mathbf{e}_\xi - (p^2 + r^2)\mathbf{e}_\eta + (qr - W_\xi)\mathbf{e}_\zeta, \\
\ddot{\mathbf{e}}_\zeta &= (pr - W_\eta)\mathbf{e}_\xi + (qr + W_\xi)\mathbf{e}_\eta - (p^2 + q^2)\mathbf{e}_\zeta.
\end{aligned}$$

Компоненты вектора угловой скорости p , q и r , содержащиеся в W_ξ , W_η и W_ζ , вычисляются из соотношений

$$\begin{aligned}
p &= \mathbf{e}_\eta \cdot \dot{\mathbf{e}}_\zeta = -\mathbf{e}_\zeta \cdot \dot{\mathbf{e}}_\eta, \\
q &= \mathbf{e}_\zeta \cdot \dot{\mathbf{e}}_\xi = -\mathbf{e}_\xi \cdot \dot{\mathbf{e}}_\zeta, \\
r &= \mathbf{e}_\xi \cdot \dot{\mathbf{e}}_\eta = -\mathbf{e}_\eta \cdot \dot{\mathbf{e}}_\xi.
\end{aligned}$$

2.4 УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА В ОСКУЛИРУЮЩИХ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Во многих задачах допустимо полагать действующие на КА моменты малыми, то есть считать, что кинетическая энергия углового движения КА много больше работы возмущающих моментов. В таком случае оно будет близким к свободному (невозмущенному) движению Эйлера-Пуансо: твер-

дое тело вращается вокруг неподвижного и постоянного по величине вектора кинетического момента. Наличие малых возмущений, однако, ведет к тому, что вектор кинетического момента меняется со временем, и поэтому удобно ввести переменные, которые характеризовали бы как направление, так и величину вектора кинетического момента. Оставаясь постоянными в невозмущенном движении, в возмущенном движении они, подобно орбитальным элементам, медленно эволюционировали бы. Можно назвать такие переменные *оскулирующими угловыми элементами*. После добавления к трем оскулирующим элементам трех кинематических переменных получим полный набор угловых переменных.

Из всех способов выбора оскулирующих элементов и кинематических переменных остановимся подробнее на *переменных Белецкого-Черноустья* [41] – наборе $L, \rho, \sigma, \psi, \theta, \varphi$. Здесь L – модуль вектора кинетического момента, углы ρ и σ задают его ориентацию относительно ИСК $OXYZ$ (рис. 2.3). Углы Эйлера ψ, θ, φ определяют ориентацию осей ССК относительно связанной с вектором кинетического момента КА системы координат $OL_1L_2L_3$: ось OL_3 сонаправлена с вектором кинетического момента, ось OL_2 перпендикулярна OL_3 и лежит в плоскости OXY , OL_1 дополняет систему координат до правой.

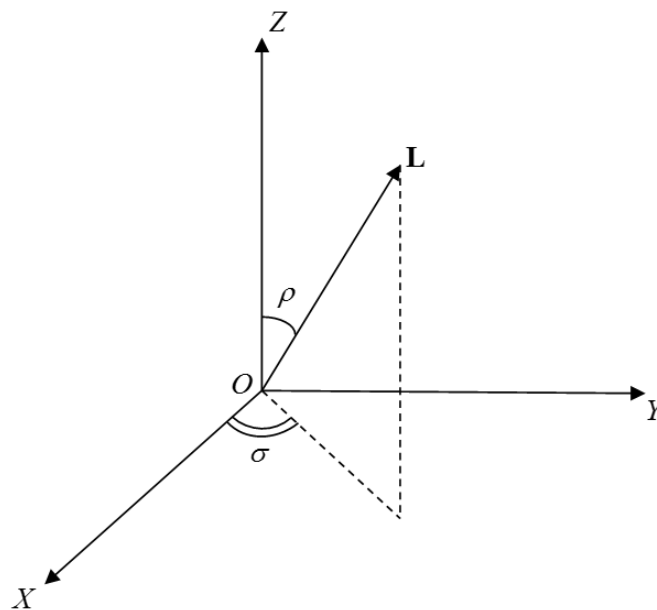


Рис. 2.3. Углы ориентации вектора кинетического момента

Для перехода из введенной СК в ИСК достаточно умножить вектор на матрицу направляющих косинусов

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}.$$

Движение КА относительно центра масс описывается системой уравнений [41]

$$\frac{dL}{dt} = M_3,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_1,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_2,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = L(a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi) - \frac{1}{L} M_1 \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_2 (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = L(a - b) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{L} (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = L(c - a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi) \cos \theta + \frac{1}{L \sin \theta} (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi),$$

где M_1 , M_2 и M_3 – проекции вектора суммарного возмущающего момента на оси $OL_1L_2L_3$.

Основное достоинство уравнений движения в переменных Белецкого-Черноуьско заключается в естественном разделении угловых переменных на медленные – оскулирующие элементы – и быстрые – углы Эйлера, что позволяет использовать удобные асимптотические методы и специальные методы численного интегрирования для простого и точного исследования как качественной, так и количественной картины углового движения.

2.5 КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЙЛЕРА И АНДУАЙЕ-ДЕПРИ

В завершение рассмотрим канонические уравнения в переменных Эйлера и Андуайе-Депри [42]. *Переменные Эйлера* представляют собой углы Эйлера ψ , θ , φ и соответствующие сопряженные переменные – *канонические импульсы* p_ψ , p_θ , p_φ . *Переменные Андуайе-Депри* (другое название – *специальные канонические переменные*) L , L_ζ , L_z , g , l , h вводятся так, как указано на рисунке 2.4. Плоскость Σ перпендикулярна вектору кинетического момента \mathbf{L} , L – его величина, L_ζ и L_z – проекции \mathbf{L} на оси $O\zeta$ и OZ , угол g – угол между линиями пересечения Σ с $O\xi\eta$ и OXY , угол l – угол между осью $O\xi$ и линией пересечения Σ с плоскостью $O\xi\eta$, угол h – угол между осью OX и линией пересечения Σ с плоскостью OXY .

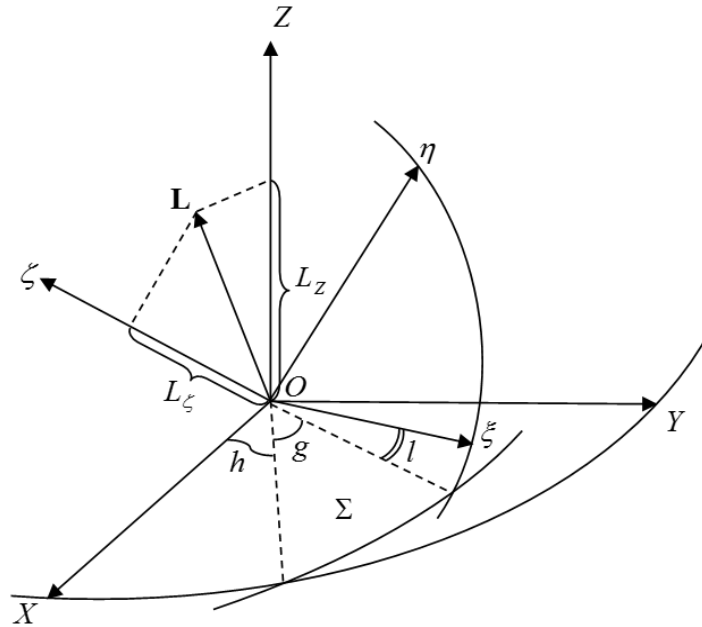


Рис. 2.4. Геометрическая интерпретация переменных Андуайе-Депри

Две другие проекции вектора кинетического момента на оси ССК выражаются через введенные переменные при помощи соотношений

$$L_\xi = \sqrt{L^2 - L_z^2} \sin l,$$

$$L_\eta = \sqrt{L^2 - L_z^2} \cos l.$$

Громоздкие выражения для элементов матрицы направляющих косинусов приведены в [42].

Уравнения углового движения КА, записанные как в переменных Эйлера, так и в переменных Андуайе-Депри, имеют одинаковый – канонический – вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

где H – функция Гамильтона. В наборе переменных Эйлера $\mathbf{q} = (\psi, \theta, \varphi)$, $\mathbf{p} = (p_\psi, p_\theta, p_\varphi)$. Для вращений во внешнем поле с потенциалом $U(\psi, \theta, \varphi)$ функция Гамильтона равна сумме U и кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \left[a(\kappa \sin \varphi + p_\theta \cos \varphi)^2 + b(\kappa \cos \varphi - p_\theta \sin \varphi)^2 + cp_\varphi^2 \right],$$

где

$$\kappa = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Если КА динамически симметричен, а потенциал не зависит от угла φ , то существует первый интеграл $p_\varphi = \text{const}$. Для переменных Андуайе-Депри $\mathbf{q} = (g, l, h)$, $\mathbf{p} = (L, L_\zeta, L_z)$. Потенциал U в общем случае зависит от всех переменных. Кинетическая энергия задается выражением

$$T = \frac{1}{2} \left[(L^2 - L_\zeta^2) (a \sin^2 l + b \cos^2 l) + c L_\zeta^2 \right].$$

При $U = 0$ (свободное движение Эйлера-Пуансо) $H = T(L, L_\zeta, l)$ и первые интегралы движения – энергия системы и те переменные, которые задают величину вектора кинетического момента и его направление в инерциальном пространстве:

$$H = c_1, \quad L = c_2,$$

$$L_z = c_3, \quad h = c_4.$$

Таким образом, в слабозмущенном движении переменные H, L, L_z и h становятся оскулирующими угловыми элементами.

Подобно уравнениям в переменных Белецкого-Черноуьско, уравнения движения в канонической форме (2.5.1) могут использоваться для численного моделирования слабозмущенного углового движения. Необходимо лишь отслеживать ситуацию, когда используемые в качестве обобщенных координат углы вырождаются.

2.6 ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА

2.6.1 Вырождение углов Эйлера и самолетных углов

Рассмотрим детально вскользь упомянутые выше основные особенности численного моделирования углового движения с помощью различных типов переменных. Начнем с углов Эйлера, которые хорошо подходят для описания слабозмущенного движения осесимметричного КА. Вращение КА в этом случае близко к регулярной прецессии: углы прецессии и нутации медленно колеблются вблизи начальных значений, а угол собственного вращения монотонно, почти линейно возрастает. Когда угол нутации θ достаточно мал (то есть когда оси \mathbf{e}_ζ и \mathbf{e}_z практически совпадают), интегрирование кинематических уравнений для углов Эйлера (2.2.4) сопряжено с рядом трудностей, иллюстрируемых выражением для угловой скорости прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}, \quad (2.6.1)$$

где φ – угол собственного вращения, p и q – проекция вектора угловой скорости на оси \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_η соответственно. Как уже говорилось, уравнение (2.6.1) вырождается при $\theta = m\pi$, где m – целое число. Вместе с тем стандартные методы численного интегрирования хорошо работают только для уравнений с гладкими правыми частями, которые могут удовлетворительно приближаться несколькими первыми членами тейлоровского ряда. При малых углах нутации это условие не выполняется, и потому интегрирование уравнения (2.6.1) приводит к быстрой потере точности и неустойчивости получаемых результатов. Даже если начальное значение угла нутации θ_0 не является малым, в процессе численного интегрирования уравнений движения возможны ситуации, при которых $|\theta| \approx 0$. В эти моменты ошибки интегрирования скачкообразно возрастают (см. Приложение Б). Низкая точность интегрирования способна радикально поменять режим движения КА (скажем, с либрационного режима переключиться на циркуляционный или наоборот).

Проблема вырождения и увеличения ошибок интегрирования уравнений движения при использовании углов Эйлера может быть решена путем выбора такой ИСК, относительно которой угол нутации θ будет далек от нуля для заранее известного типа углового движения. К примеру, в случае стабилизации КА собственным вращением надежно выбрать ось OZ ИСК перпендикулярной оси стабилизации.

Отметим, что в процессе численного интегрирования кинематических уравнений сбои вблизи вырожденной ориентации характерны, разумеется, не только для углов Эйлера, но и для любых последовательностей углов, в том числе самолетных. Вырождающиеся при $\beta = \pm\pi/2$, самолетные углы весьма удобны при моделировании малых угловых колебаний («качаний») КА относительно стабилизированного положения, когда все три угла едва отклоняются от нуля.

2.6.2 Нормализация и ортогонализация кватерниона

Недостатков использования углов Эйлера лишено универсальное кватернионное описание углового движения КА. В компонентах кватерниона не вырождаются ни соотношения (2.2.10) для элементов матрицы направляющих косинусов, ни кинематические уравнения (2.2.13). Как следствие, напрашивается простой вывод: для преодоления всех проблем численного интегрирования достаточно взять в качестве кинематических переменных компоненты кватерниона. Численные эксперименты, однако, показывают, что непосредственное интегрирование кинематических уравнений (2.2.13) ведет к быстро нарастающей ошибке (см. Приложение Б), объясняющейся

нарушением условия нормировки кватерниона (2.2.9). Во избежание такого сценария необходимо регулярно проводить нормализацию кватерниона – разновидность встречавшегося в главе про моделирование орбитального движения механизма траекторной коррекции. Фазовая траектория углового движения (точнее, ее проекция на четырехмерное пространство компонент кватерниона q_0, q_1, q_2, q_3) «укладывается» тем или иным способом на единичную сферу, задаваемую соотношением (2.2.9). В случае если функцию динамических переменных осуществляют производные от компонент кватернионов, можно использовать условие ортогональности (2.2.14). Интегральной поверхностью тогда является гиперплоскость $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$.

Процедура нормализации реализуется, например, простым масштабированием [40]

$$q_j \rightarrow \bar{q}_j \equiv \frac{q_j}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad j = 0, \dots, 3. \quad (2.6.2)$$

Ортогонализация заключается в вычитании из производных от компонент кватерниона неортогональной составляющей:

$$\dot{q}_j \rightarrow \dot{\bar{q}}_j \equiv \dot{q}_j - (\bar{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \bar{q}_j, \quad j = 0, \dots, 3. \quad (2.6.3)$$

Коррекция может производиться как на каждом шаге интегрирования, так и время от времени, по достижении заранее установленного уровня ошибки. Первый вариант предпочтительнее, поскольку операции нормализации и/или ортогонализации стабилизируют процесс интегрирования, не требуя при этом много вычислительных ресурсов.

2.6.3 Проблема выбора динамических переменных

Наконец, осталось разобраться с важным вопросом выбора динамических переменных. По аналогии с моделированием орбитального движения естественно предположить, что ошибка интегрирования в кинематических переменных растет на порядок быстрее, чем ошибка для компонент угловой скорости, наподобие ошибок в средней/истинной аномалии и среднем движении. Заметим, однако, что правые части уравнений эволюции любого набора динамических переменных содержат слагаемые, зависящие и от кинематических переменных. В итоге на длительных интервалах времени темп роста ошибок во всех динамических переменных должен сравняться с темпом роста ошибок в кинематических переменных, что сделает выбор динамических переменных пустой формальностью. Тем не менее для слабозамущенного движения численными экспериментами доказано, что на роль динамических переменных предпочтительней выбирать компоненты угловой скорости p, q, r в ССК, чем компоненты вектора кинетического момента или же производные кинематических переменных (см. Приложе-

ние Б). Действительно, в правых частях динамических уравнений (2.3.1), в отличие от прочих типов динамических уравнений, кинематические переменные используются лишь для проецирования малого внешнего момента на оси ССК и слабо влияют на точность интегрирования.

В случае моделирования почти равномерных вращений эффективным способом резко снизить ошибки интегрирования является прием типа Энке, когда компоненты угловой скорости заменяются на их малые отклонения от опорного решения – перманентного вращения. Приведем основные формулы, позволяющие осуществить такую замену. Как хорошо известно, свободное (невозмущенное) движение Эйлера-Пуансо представляет собой устойчивое перманентное вращение, если ось вращения – главная ось минимального/максимального момента инерции. Для определенности будем далее считать, что истинное угловое движение КА близко к перманентному вращению с угловой скоростью ω_0 вокруг оси максимального момента инерции $O\zeta$. Введем вспомогательную СК $O\xi'\eta'\zeta$ с матрицей направляющих косинусов

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{e}_{\xi'} \ \mathbf{e}_{\eta'} \ \mathbf{e}_{\zeta'}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_3(\omega_0 t) = \mathbf{A}_3(-\psi) \mathbf{A}_1(-\theta) \mathbf{A}_3(-\Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi \equiv \varphi - \omega_0 t$. Базисные вектора вспомогательной СК могут быть записаны через компоненты (p_0, p_1, p_2, p_3) нового единичного кватерниона как

$$\mathbf{e}_{\xi'} = \begin{pmatrix} p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \\ 2(p_0 p_3 + p_1 p_2) \\ 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{\eta'} = \begin{pmatrix} 2(p_1 p_2 - p_0 p_3) \\ p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \\ 2(p_0 p_1 + p_2 p_3) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{\zeta'} = \begin{pmatrix} 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) \\ 2(p_2 p_3 - p_0 p_1) \\ p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{pmatrix}.$$

Кинематические уравнения приобретают вид

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{1}{2}(-p_1 p' - p_2 q' - p_3 \Delta r), \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{1}{2}(p_0 p' - p_3 q' + p_2 \Delta r),$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{1}{2}(p_3 p' + p_0 q' - p_1 \Delta r), \quad \frac{dp_3}{dt} = \frac{1}{2}(-p_2 p' + p_1 q' + p_0 \Delta r),$$

где $p' = p \cos \omega_0 t - q \sin \omega_0 t$, $q' = p \sin \omega_0 t + q \cos \omega_0 t$ и $\Delta r = r - \omega_0$. Динамические уравнения остаются практически неизменными:

$$\frac{dp}{dt} = W_\xi, \quad \frac{dq}{dt} = W_\eta, \quad \frac{d\Delta r}{dt} = W_\zeta.$$

Значение r , необходимое при вычислении правых частей, рассчитывается как $r = \omega_0 + \Delta r$. Нормализация и/или ортогонализация кватерниона производится согласно прежним формулам (2.6.2) и (2.6.3).

Важно отметить, что эффект снижения ошибок интегрирования после применения описанного выше приема связан не с характерным для метода Энке уменьшением ошибок округления, а с понижением главной частоты системы: изначально равная примерно $\omega_0/2$, она опускается в результате замены переменных до $\Delta\omega/2$, где $\Delta\omega = \max(p', q', \Delta r)$. Как следствие, на один-два порядка улучшается точность аппроксимации правых частей при использовании стандартных методов численного интегрирования.

ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для начала введем необходимые определения и обозначения, которые будут использоваться при описании каждого из методов численного интегрирования. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (3.1.1)$$

на отрезке времени $[t_0, t_f]$, где вектор-функции $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))^T$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, \mathbf{y}) \dots f_n(t, \mathbf{y}))^T$ имеют размерность n . Пусть задана некоторая сетка $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$. Приближенные значения искомой функции $\mathbf{y}(t)$ в узлах сетки $\{t_i\}_{i=0}^N$, найденные каким-нибудь из методом численного интегрирования, будем далее обозначать как $\mathbf{y}_i = (y_{i1} \dots y_{in})^T$, где первый индекс указывает на номер компоненты вектора, а второй – на номер узла сетки.

Под нормой вектора $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_n)^T$ будем понимать евклидову норму $\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ и обозначать $|\mathbf{y}|$. Такое же обозначение, применяемое к вещественному числу, означает его абсолютную величину (модуль).

Различают два основных класса методов интегрирования систем ОДУ вида (3.1.1) – *одношаговые* и *многошаговые*. В одношаговых методах для вычисления \mathbf{y}_i из всех приближенных значений функции $\mathbf{y}(t)$ используется только ее значение на предыдущем шаге \mathbf{y}_{i-1} . Многошаговые методы рассчитывают \mathbf{y}_i , используя несколько предыдущих значений $\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-2}, \dots$ искомой функции.

В настоящей главе приводятся наиболее известные методы численного интегрирования, одношаговые и многошаговые. Описываются задачи и методы численного интегрирования, специфичные для моделирования орбитального и/или углового движения КА – методы интегрирования квазипериодических движений, особенности и приемы совместного интегрирования орбитального и углового движения, задача выхода на ограничение в процессе интегрирования и *симплектические методы интегрирования* гамильтоновых систем. Не претендуя на полноту изложения, мы постараемся дать общее понимание проблемы численного интегрирования ОДУ.

3.2 ОДНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ

3.2.1 Методы Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты образуют главное семейство класса одношаговых методов интегрирования систем вида (3.1.1). Пусть s – целое число и $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^s, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s$ – некоторые действительные коэффициенты, а $h = t_i - t_{i-1}$ – длина текущего шага интегрирования. Процедура вычисления значения y_i по y_{i-1}

$$y_i = y_{i-1} + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s),$$

осуществляемая с использованием s промежуточных этапов (*стадий*)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{i-1}, y_{i-1}), \\ k_2 &= f(t_{i-1} + c_2 h, y_{i-1} + h a_{21} k_1), \\ k_3 &= f(t_{i-1} + c_3 h, y_{i-1} + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \\ &\dots \\ k_s &= f(t_{i-1} + c_s h, y_{i-1} + h(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})), \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

называется *s-стадийным явным методом Рунге-Кутты*. Если же в правой части любого из выражений (3.2.1) содержатся все $k_j, j = 1, \dots, s$, то метод Рунге-Кутты называется *неявным*. *Таблицей Бутчера* явного или неявного метода Рунге-Кутты именуют символическое представление коэффициентов метода в виде таблицы (табл. 3.1). Входящая в таблицу матрица коэффициентов $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^s$ называется *матрицей Бутчера*.

Таблица 3.1. Таблицы Бутчера а) явных и б) неявных методов Рунге-Кутты. Матрицы Бутчера явных методов имеют нижний треугольный вид

а)						б)					
0						c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	$a_{1,s-1}$	a_{1s}
c_2	a_{21}					c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	$a_{2,s-1}$	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}				c_3	a_{31}	a_{32}	\dots	$a_{3,s-1}$	a_{3s}
\dots	\dots	\dots				\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$		c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s		b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

Таблица Бутчера простого и популярного классического четырехстадийного явного метода Рунге-Кутты (RK4) представлена в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Таблица Бутчера классического метода Рунге-Кутты (RK4)

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Будем говорить, что метод Рунге-Кутты (3.2.1) имеет *порядок* p , если справедливо асимптотическое соотношение

$$|\mathbf{y}(t_{i-1} + h) - \mathbf{y}_i(h)| = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{y}(t_{i-1} + h)$ – точное решение (3.1.1) в точке $t_{i-1} + h \equiv t_i$, а $\mathbf{y}_i(h)$ – приближение этого решения, рассчитанное согласно методу.

Для не очень больших значений s коэффициенты явного метода Рунге-Кутты (3.2.1) можно отыскать следующим образом: разложить в ряд по степеням h функцию $\mathbf{e}(h) = \mathbf{y}(t_{i-1} + h) - \mathbf{y}_i(h)$ и приравнять затем к нулю все коэффициенты при степенях h^k , $k = 0, \dots, p - 1$. Допустим, для $p = s = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(h) = \mathbf{y}(t_{i-1} + h) - \mathbf{y}_i(h) = & h\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \right) - \\ & - h\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})(b_1 + b_2) - h^2 b_2 \left(c_2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \right) + O(h^3), \end{aligned}$$

откуда $b_1 + b_2 = 1$, $b_2 c_2 = 1/2$, $a_{21} = c_2$, и мы получаем целое семейство методов второго порядка. Однако уже в случае $p > 4$ такой подход оказывается трудоемким, в связи с чем были разработаны другие методы расчета. Подробнее этот вопрос обсуждается, например, в знаменитой монографии Хайрера, Нерсетта и Ваннера [43]. Там же можно найти таблицы коэффициентов наиболее часто встречающихся методов.

Величину $\mathbf{e}(h) = \mathbf{y}(t_{i-1} + h) - \mathbf{y}_i(h)$ именуют *локальной погрешностью* метода. На практике оценки погрешностей необходимы, с одной стороны, чтобы обеспечить длину шага, достаточно малую для достижения требуемой точности результатов, а с другой – чтобы сделать длину шага максимально большой во избежание бесполезной вычислительной работы. При

достаточной степени гладкости правой части системы уравнений получается записать строгую оценку $e(h)$ [43]. Практического интереса, однако, подобные оценки не представляют ввиду требования знания частных производных правой части вплоть до высоких порядков.

Простейший прием, который дает оценку локальной погрешности метода, носит название *правила Рунге* и заключается в сравнении двух приближений, вычисленных с различающейся в два раза длиной шага. С точностью до членов порядка h^{p+2} погрешность метода порядка p равна

$$\frac{|y_{i,h} - y_{i,h/2}|}{2^p - 1},$$

где $y_{i,h}$ и $y_{i,h/2}$ – приближенные значения решения, полученные с шагами длины h и $h/2$ соответственно.

3.2.2 Вложенные методы Рунге-Кутты

Другим способом вычислить локальную погрешность интегрирования является использование *вложенных методов Рунге-Кутты*. Идея основывается на расчете в точке $t_{i-1} + h \equiv t_i$ двух приближений y_i и \hat{y}_i к точному решению с помощью методов Рунге-Кутты смежных порядков. В качестве оценки локальной погрешности метода меньшего порядка может служить разность y_i и \hat{y}_i . Полученная оценка локальной погрешности помогает, в свою очередь, в управлении длиной шага интегрирования h .

Рассмотрим два s -стадийных метода Рунге-Кутты, первый из которых дает приближение решения y_i , а второй – \hat{y}_i . Пусть при этом оба метода используют значения функции $f(t, y)$ в одних и тех же точках, то есть все коэффициенты c_j и a_{jk} в обеих таблицах Бутчера совпадают. Таким образом, вкупе с (3.2.1), метод

$$y_i = y_{i-1} + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s)$$

дает решение порядка p , а метод

$$\hat{y}_i = y_{i-1} + h(\hat{b}_1 k_1 + \dots + \hat{b}_s k_s)$$

дает решение порядка \hat{p} , где $\hat{p} = p - 1$ или $\hat{p} = p + 1$. Для определенности будем считать, что на следующем шаге интегрирования в роли начального значения берется приближение y_i . Тогда такой вложенный метод обозначают как $p(\hat{p})$: на первое место выносят порядок приближения, используемого в дальнейшем процессе интегрирования, в скобки заключается порядок вспомогательного решения.

Разность $y_i - \hat{y}_i$ можно рассматривать как оценку локальной погрешности интегрирования. Пусть требуется, чтобы эта оценка покомпонентно удовлетворяла условиям

$$|y_{ji} - \hat{y}_{ji}| \leq \varepsilon_j \equiv \varepsilon_j^{abs} + \max(|y_{j,i-1}|, |y_{ji}|) \cdot \varepsilon_j^{rel}, \quad j=1, \dots, n,$$

где ε_j^{abs} и ε_j^{rel} – абсолютная и относительная точности по j -й компоненте. В качестве меры погрешности вложенного метода установим величину

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{ji} - \hat{y}_{ji}}{\varepsilon_j} \right)^2}.$$

Критерием оптимальности длины шага интегрирования h будем полагать близость величины E к единице. Так как $E = O(h^{q+1})$, где $q = \min(p, \hat{p})$, то естественно взять скорректированную длину шага \bar{h} равной

$$\bar{h} = h \cdot (1/E)^{1/(q+1)}. \quad (3.2.2)$$

Для того чтобы на следующем шаге интегрирования новое значение было принято с большей вероятностью, правая часть в формуле (3.2.2) умножается на *гарантированный множитель* F , меньший единицы (как правило, $F = 0.8$ или $F = 0.9$). Кроме того, нежелательно допускать слишком быстрое изменение h от шага к шагу. Поэтому часто используют формулу

$$\bar{h} = h \cdot \min \left(F_{\max}, \max \left(F_{\min}, F \cdot (1/E)^{1/(q+1)} \right) \right), \quad (3.2.3)$$

где F_{\max} и F_{\min} – максимальный и минимальный коэффициенты увеличения шага. Максимальный коэффициент увеличения шага F_{\max} рекомендуется выбирать между 1.5 и 5, если предыдущий шаг не был отклонен, либо полагать равным 1 в противном случае [43].

Итак, если $E \leq 1$, то решение для текущего шага принимается равным y_i и на следующем шаге вычисления продолжаются со значением \bar{h} , рассчитанным согласно (3.2.3). Если $E > 1$, то новое значение длины шага \bar{h} используется для пересчета уже на текущем шаге.

Если порядок приближения y_i меньше порядка \hat{y}_i , то $y_i - \hat{y}_i$ является оценкой локальной погрешности интегрирования и описанный только что алгоритм удерживает эту погрешность в заданных пределах. Однако было бы более естественным в качестве начального значения следующего шага выбирать приближение более высокой точности. В таком случае разность $y_i - \hat{y}_i$ уже не является оценкой локальной погрешности, хотя и используется по-прежнему для управления шагом интегрирования.

Из вложенных методов Рунге-Кутты выделим два популярных метода – Фельберга 4(5) и Дормана-Принса 5(4) (см. табл. 3.3 и 3.4). Важно отметить, что, хотя метод Дормана-Принса 5(4) содержит семь стадий, на каждом шаге производится шесть обращений к правой части системы уравнений. Дело в том, что последняя стадия, как видно из таблицы Бутчера для метода Дормана-Принса, рассчитывается в той же точке, что и первая стадия на следующем шаге. Этим свойством, называемым *First Same As Last* (FSAL), метод Фельберга 4(5) уже не обладает и на каждом шаге обращается к функции правой части все шесть раз. Более того, согласно [43], по сравнению с методом Фельберга 4(5) метод Дормана-Принса 5(4) показывает лучшие результаты с точки зрения глобальной погрешности, а также по общему количеству обращений к правой части системы. Интересно отметить, что разработчикам известного математического пакета MATLAB® эффективность метода Дормана-Принса 5(4) показалась настолько впечатляющей, что в конце 1990-х годов они внедрили его в систему вместо использовавшегося ранее метода Фельберга 4(5).

Таблица 3.3. Таблица Бутчера метода Фельберга 4(5)

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
y_i	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
\hat{y}_i	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

Таблица 3.4. Таблица Бутчера метода Дормана-Принса 5(4)

0							
3	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
y_i	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
\hat{y}_i	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

3.2.3 Метод Эверхарта

Разработанный Э. Эверхартом интегратор [44] является одношаговым методом интегрирования систем вида (3.1.1). Впервые он применялся для численного исследования орбит и показал свою высокую эффективность в задачах кометной динамики. Со временем алгоритм был обобщен для любых ОДУ первого и второго порядков [44, 45]. Тем не менее именно в задачах небесной механики алгоритм Эверхарта остается одним из наиболее популярных.

Интегратор Эверхарта основан на видоизмененных формулах неявных методов Рунге-Кутты. При этом метод обладает рядом преимуществ с точки зрения численного интегрирования:

- 1) алгоритм интегрирования универсален для любого порядка;
- 2) имеется простой критерий для выбора шага интегрирования;

3) предиктор решения в методе – достаточно точный, что позволяет обходиться всего двумя итерациями на шаге [47].

Приступим теперь непосредственно к описанию метода. Сначала введем новую независимую переменную $\tau = (t - t_0)/h$ и заменим левую часть (3.1.1) на полином по τ степени k :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}'_\tau/h = \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_1\tau + \mathbf{A}_2\tau^2 + \mathbf{A}_3\tau^3 + \dots + \mathbf{A}_k\tau^k. \quad (3.2.4)$$

Здесь $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0)$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ – некоторые векторы. Интегрируя уравнение (3.2.4) по переменной τ , получим

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + h \left(\mathbf{f}_0\tau + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau^2 + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\tau^3 + \dots + \frac{1}{k+1}\mathbf{A}_k\tau^{k+1} \right). \quad (3.2.5)$$

Полином (3.2.4) можно переписать в виде *интерполяционного многочлена Ньютона* на сетке $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$:

$$\Pi(\tau) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{a}_1\tau + \mathbf{a}_2\tau(\tau - \tau_1) + \dots + \mathbf{a}_k\tau(\tau - \tau_1)\dots(\tau - \tau_{k-1}). \quad (3.2.6)$$

Обозначим за $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ значения функции правой части системы на сетке $\{\tau_i\}_{i=1}^k$, то есть $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_0 + \tau_i h, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда, учитывая выражение для интерполяционного многочлена (3.2.6), имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_0 + \mathbf{a}_1\tau_1, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}_0 + \mathbf{a}_1\tau_2 + \mathbf{a}_2\tau_2(\tau_2 - \tau_1), \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}_0 + \mathbf{a}_1\tau_3 + \mathbf{a}_2\tau_3(\tau_3 - \tau_1) + \mathbf{a}_3\tau_3(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, векторы \mathbf{a}_i , носящие название *конечных разностей*, определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0)/\tau_1, \\ \mathbf{a}_2 &= ((\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_0)/\tau_2 - \mathbf{a}_1)/(\tau_2 - \tau_1), \\ \mathbf{a}_3 &= (((\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_0)/\tau_3 - \mathbf{a}_1)/(\tau_3 - \tau_1) - \mathbf{a}_2)/(\tau_3 - \tau_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Сравнение выражений (3.2.4) и (3.2.6) делает очевидным связь между векторами \mathbf{A}_i и \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{a}_1 + (-\tau_1)\mathbf{a}_2 + (\tau_1\tau_2)\mathbf{a}_3 + \dots + (-1)^{k-1}(\tau_1\dots\tau_{k-1})\mathbf{a}_k, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{a}_2 + (-\tau_1 - \tau_2)\mathbf{a}_3 + \dots, \\ &\dots \\ \mathbf{A}_k &= \mathbf{a}_k,\end{aligned}$$

или, вводя обозначения c_{ij} для коэффициентов перед \mathbf{a}_i ,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= c_{11}\mathbf{a}_1 + c_{21}\mathbf{a}_2 + \dots + c_{k1}\mathbf{a}_k, \\ \mathbf{A}_2 &= c_{22}\mathbf{a}_2 + \dots + c_{k2}\mathbf{a}_k, \\ &\dots \\ \mathbf{A}_k &= c_{kk}\mathbf{a}_k.\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

Обратный переход представим в аналогичном виде

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= d_{11}\mathbf{A}_1 + d_{21}\mathbf{A}_2 + \dots + d_{k1}\mathbf{A}_k, \\ \mathbf{a}_2 &= d_{22}\mathbf{A}_2 + d_{32}\mathbf{A}_3 + \dots + d_{k2}\mathbf{A}_k, \\ &\dots \\ \mathbf{a}_k &= d_{kk}\mathbf{A}_k.\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

Можно показать, что коэффициенты c_{ij} и d_{ij} задаются соотношениями

$$c_{ii} = d_{ii} = 1, \quad c_{i0} = d_{i0} = 0 \quad \text{для всех } i > 0,$$

$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} - \tau_{i-1}c_{i-1,j}, \quad d_{ij} = d_{i-1,j-1} - \tau_j d_{i-1,j} \quad \text{для всех } i > j > 0.$$

Отметим, что все векторы \mathbf{A}_i вычисляются по \mathbf{a}_i с помощью формул (3.2.8), а векторы \mathbf{a}_i по формулам (3.2.9) выражаются через значения правой части \mathbf{f}_i , которые, в свою очередь, зависят от значений \mathbf{y}_i , поскольку $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_0 + \tau_i h, \mathbf{y}_i)$. В итоге $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$, $i = 1, \dots, k$. Из (3.2.5) имеем:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \left(\mathbf{f}_0 \tau_1 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \tau_1^2 + \dots + \frac{1}{k+1} \mathbf{A}_k \tau_1^{k+1} \right) \equiv \Phi_1(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k),$$

...

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_0 + h \left(\mathbf{f}_0 \tau_k + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \tau_k^2 + \dots + \frac{1}{k+1} \mathbf{A}_k \tau_k^{k+1} \right) \equiv \Phi_k(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k).$$

Эти формулы по сути – неявные уравнения $\mathbf{y}_i = \Phi_i(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ относительно \mathbf{y}_i , $i = 1, \dots, k$. Они решаются итерационным методом. А именно, после того как задано первое приближение для векторов \mathbf{a}_i , итерации выполняются следующим образом: сначала определяем решение \mathbf{y}_1 и по первой формуле (3.2.7) рассчитываем уточненное значение \mathbf{a}_1 . Далее определяем \mathbf{y}_2 , по которому уточняем \mathbf{a}_2 , и так далее вплоть до \mathbf{y}_k .

Для получения векторов \mathbf{a}_i с хорошей степенью точности достаточно двух (очень редко – трех) итераций [47]. Как только все векторы \mathbf{a}_i определены, решение в момент времени $t_h = t_0 + h$ будет равно

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{y}_0 + h \left(\mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_2 + \dots + \frac{1}{k+1} \mathbf{A}_k \right). \quad (3.2.10)$$

В начале интегрирования, на первом шаге, в качестве \mathbf{a}_i можно выбирать нулевые значения.

На следующем шаге длиной \bar{h} начальные приближения $\bar{\mathbf{a}}_i$ для векторов \mathbf{a}_i вычисляется с учетом информации о векторах \mathbf{A}_i на текущем шаге. Новая независимая переменная будет равна $\bar{\tau} = (t - t_h) / \bar{h}$. Отсюда

$$\tau = r\bar{\tau} + 1,$$

где $r = \bar{h} / h$. Представим теперь функцию $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ в виде полинома по степеням $\bar{\tau}$ и приравняем его к полиному (3.2.6) по степеням τ :

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_1 \tau + \mathbf{A}_2 \tau^2 + \dots + \mathbf{A}_k \tau^k = \bar{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\tau} + \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\tau}^2 + \dots + \bar{\mathbf{A}}_k \bar{\tau}^k.$$

Подставив в полученное выражение $\tau = r\bar{\tau} + 1$, сопоставим коэффициенты при одинаковых степенях $\bar{\tau}$. Тем самым получим оценку правой части на следующем шаге

$$\bar{\mathbf{f}}_0 = e_{00} \mathbf{f}_0 + e_{10} \mathbf{A}_1 + \dots + e_{k0} \mathbf{A}_k,$$

а также оценку векторов $\bar{\mathbf{A}}_i$, которые находятся по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_1 &= r(e_{11} \mathbf{A}_1 + e_{21} \mathbf{A}_2 + \dots + e_{k1} \mathbf{A}_k), \\ \bar{\mathbf{A}}_2 &= r^2(e_{22} \mathbf{A}_2 + e_{32} \mathbf{A}_3 + \dots + e_{k2} \mathbf{A}_k), \\ &\dots \\ \bar{\mathbf{A}}_k &= r^k e_{kk} \mathbf{A}_k, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

где e_{ij} – числа арифметического треугольника, рассчитываемые по рекуррентным формулам

$$e_{ii} = e_{i0} = 1,$$

$$e_{ij} = e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \text{ для всех } i > j > 0.$$

Далее, соотношения (3.2.9) позволяют по найденным в (3.2.11) значениям $\bar{\mathbf{A}}_i$ рассчитать начальные приближения $\bar{\mathbf{a}}_i$, $i = 1, \dots, k$.

Стоит отметить, что значения узлов τ_1, \dots, τ_k – свободные параметры. Их можно выбирать как угодно, лишь бы они все были попарно различны. В общем случае интегратор Эверхарта имеет порядок $k + 1$, однако существуют такие узловые значения, с которыми точность решения повышается до порядка $2k$ либо $2k + 1$. К примеру, если узловые значения являются корнями уравнения

$$\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}(\tau^k (\tau - 1)^k) = 0,$$

(разбиение Гаусса-Лобатто [47]), то метод имеет порядок $2k$.

Опишем процесс выбора шага интегрирования. Контроль длины шага осуществляется по величине последнего члена в (3.2.10). Пусть абсолютная точность определения всех компонент решения задается вектором $\boldsymbol{\varepsilon}$. Потребуем, чтобы на следующем шаге выполнялось равенство

$$\frac{\bar{h}}{k+1} |\bar{\mathbf{A}}_k| = |\boldsymbol{\varepsilon}|.$$

Тогда, используя последнее соотношение в (3.2.11), получаем оценку

$$\bar{h} = hr \equiv h \left(\frac{k+1}{h} \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|}{|\mathbf{A}_k|} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (3.2.12)$$

Нужно отметить, что, скажем, для разбиения Гаусса-Лобатто такая оценка длины нового шага обладает некоторым недостатком: шаг по ней выбирается как для решения порядка k , и потому она, вообще говоря, не обеспечивает сохранение локальной точности.

Во избежание слишком больших (и слишком малых) локальных ошибок на величину r накладывают ограничение

$$\frac{1}{\sigma} < r^{k+1} < \sigma. \quad (3.2.13)$$

Для того чтобы величина последнего члена в формуле (3.2.10) всегда была ограничена в пределах одного порядка, значение σ должно быть меньше

$\sqrt{10}$. Это следует из того факта, что $\bar{h} \cdot |\bar{\mathbf{A}}_k| \sim r^{k+1}$. Выполнение обоих неравенств проверяется лишь в начале процесса интегрирования при выборе стартового шага: если условие (3.2.13) не выполняется, то интегрирование повторяется с новым шагом $\bar{h} = hr$, и так далее до его выполнения. Обычно для получения длины стартового шага требуется не более четырех итераций [47]. В дальнейшем в (3.2.13) проверяется одно только правое неравенство: если оно не выполняется, то коэффициент r принимает значение правого предела.

Начальное приближение для длины стартового шага можно получить из оценки (3.2.12) для $k = 1$

$$\bar{h} = \sqrt{2h \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|}{|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0|}}, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(t_0 + h, y_0 + h\mathbf{f}_0),$$

где h – малая величина.

3.3 МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ АДАМСА, МЕТОДЫ ШТЕРМЕРА И КОУЭЛЛА

3.3.1 Многошаговые методы Адамса

Перейдем теперь к рассмотрению многошаговых методов, которые, в отличие от одношаговых, используют несколько приближенных значений функции решения, вычисленных на предыдущих шагах. Надо сказать, что линейные многошаговые методы являются классическим математическим аппаратом численного решения уравнений движения естественных небесных тел и КА. Детальное изложение теории многошаговых методов можно найти, к примеру, в уже упоминавшейся монографии [43]. Первый параграф будет посвящен *многошаговым методам Адамса*, названным так в честь математика и астронома Дж. К. Адамса (1819-1892). Первые методы Адамса, созданные им для задач небесной механики, появились за полвека до одношаговых методов Рунге-Кутты.

Предположим, что для задачи Коши (3.1.1) нам известны первые $s + 1$ значений $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_s$ на равномерной сетке t_0, \dots, t_s с шагом длины h . Значения функции правой части системы в узлах сетки обозначим, как обычно, за $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k)$, $k = 0, 1, \dots, s$. Заменяем функцию $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ интерполяционным полиномом Ньютона

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1(t - t_0) + \dots + \boldsymbol{\alpha}_s(t - t_0) \dots (t - t_{s-1}),$$

принимая значения \mathbf{f}_k в узлах сетки. Векторы $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ определяются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0)/(t_1 - t_0), \\ \alpha_2 &= ((\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_0)/(t_2 - t_0) - \alpha_1)/(t_2 - t_1), \\ &\dots\end{aligned}$$

аналогичным (3.2.7). Интегрирование уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_0 + \alpha_1(t - t_0) + \dots + \alpha_s(t - t_0)\dots(t - t_{s-1}) \equiv \mathbf{p}(t)$$

по времени между моментами t_s и $t_{s+1} = t_s + h$ дает

$$\mathbf{y}_{s+1} = \mathbf{y}_s + \int_{t_s}^{t_{s+1}} \mathbf{p}(t) dt. \quad (3.3.1)$$

В отличие от метода Эверхарта все векторы α_i известны, и методы (3.3.1) оказываются явными. Например, в случае $s = 0$, когда метод вырождается в одношаговый, получаем формулу явного метода Эйлера

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \mathbf{f}_0,$$

а при $s = 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}_0 + \alpha_1(t - t_0)) dt = \mathbf{y}_1 + h \mathbf{f}_0 + \frac{\alpha_1}{2} \left((t_2 - t_0)^2 - (t_1 - t_0)^2 \right) = \\ &= \mathbf{y}_1 + h \left(\frac{3}{2} \mathbf{f}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{f}_0 \right).\end{aligned}$$

Заметим, что формулы (3.3.1) получаются при интегрировании интерполяционного многочлена $\mathbf{p}(t)$ вне интервала интерполяции. Однако, как известно, вне этого интервала интерполяционный многочлен обычно дает довольно плохое приближение, и поэтому Адамс предложил использовать для интерполяции также узел t_{s+1} и значение \mathbf{f}_{s+1} . Это делает метод неявным. В общем случае $(s+1)$ -шаговый метод Адамса представляется в виде

$$\mathbf{y}_{s+1} = \mathbf{y}_s + h \sum_{i=0}^s \beta_i \mathbf{f}_{i+1}, \quad (3.3.2)$$

где β_i – параметры метода. Явные методы с $\beta_s = 0$ именуются *методами Адамса-Башифорта*, а неявные методы с $\beta_s \neq 0$ получили название *методов Адамса-Мульттона*. Коэффициенты β_i вычисляются по формулам

$$\beta_{s-1-j} = \frac{(-1)^j}{j!(s-j-1)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{s-1} (u+i) du, \quad j = 0, 1, \dots, s-1$$

в случае явных методов и

$$\beta_{s-j} = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^s (u+i-1) du, \quad j = 0, 1, \dots, s$$

в случае неявных методов.

Формула (3.3.2) для явных методов может быть записана через *разности назад*

$$\nabla^0 \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i, \quad \nabla^{j+1} \mathbf{f}_i = \nabla^j \mathbf{f}_i - \nabla^j \mathbf{f}_{i-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.3.3)$$

следующим образом:

$$\mathbf{y}_{s+1} = \mathbf{y}_s + h \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_j \nabla^j \mathbf{f}_s.$$

Такая форма записи удобна тем, что коэффициенты γ_j не зависят от числа шагов s и легко рассчитываются по рекуррентной формуле

$$\gamma_m + \frac{1}{2} \gamma_{m-1} + \frac{1}{3} \gamma_{m-2} + \dots + \frac{1}{m+1} \gamma_0 = 1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \gamma_0 = 1.$$

В табл. 3.5 приведены первые несколько значений γ_j .

Таблица 3.5. Параметры явных методов Адамса

j	0	1	2	3	4	5	6	7
γ_j	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{5257}{17280}$

Неявные же методы описываются формулой

$$\mathbf{y}_{s+1} = \mathbf{y}_s + h \sum_{j=0}^s \bar{\gamma}_j \nabla^j \mathbf{f}_{s+1}, \quad (3.3.4)$$

где параметры $\bar{\gamma}_j$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\bar{\gamma}_m + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{m-1} + \frac{1}{3} \bar{\gamma}_{m-2} + \dots + \frac{1}{m+1} \bar{\gamma}_0 = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \bar{\gamma}_0 = 1.$$

Первые несколько значений параметров $\bar{\gamma}_j$ приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6. Параметры неявных методов Адамса

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{\gamma}_j$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-1}{24}$	$\frac{-19}{720}$	$\frac{-3}{160}$	$\frac{-863}{60480}$	$\frac{-275}{24192}$

Неявная схема интегрирования подразумевает итерационное решение системы нелинейных уравнений (3.3.4) относительно \mathbf{y}_{s+1} . Для этого чаще всего применяется классический метод Ньютона либо метод простых итераций

$$\mathbf{y}_{s+1}^{(k)} = \mathbf{y}_s + h \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i \mathbf{f}_i + h \beta_s \mathbf{f}(t_{s+1}, \mathbf{y}_{s+1}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.3.5)$$

где за $\mathbf{y}_{s+1}^{(0)}$ обозначено начальное приближение для \mathbf{y}_{s+1} . Если шаг достаточно мал, при $k \rightarrow \infty$ итерации сходятся к решению (3.3.2). На практике в качестве $\mathbf{y}_{s+1}^{(0)}$ используют значение \mathbf{y}_{s+1} , полученное по какой-нибудь из явных формул (стадия предсказания – *предиктор*), затем выполняют одну или несколько итераций формулы (3.3.5) (стадия коррекции – *корректор*). В условных знаках P – предиктор, E – оценка правой части, C – корректор любой метод типа предиктор-корректор¹ может быть записан как $P(EC)^k$ или $P(EC)^k E$, в зависимости от того, на каком \mathbf{y}_{s+1} – предсказанном или скорректированном – производится оценка правой части, передаваемая на следующий шаг. Число k показывает количество повторений стадии коррекции.

Серьезный недостаток многошаговых методов – необходимость предварительного вычисления $s + 1$ *стартовых значений* решения в стартовых узлах t_0, \dots, t_s . Обычно для этого используют некоторый *самостартующий метод* (например, из семейства одношаговых методов Рунге-Кутты). Другой способ получить стартовые значения заключается в последовательном применении многошаговых методов: начинаем с метода Эйлера (по одной точке), затем берем какой-либо метод второго порядка (по двум точкам) и т.д. Это позволяет использовать общие формулы расчета шага, справедливые для любого порядка решения, и упрощает реализацию метода. Однако следует помнить, что плата за такое удобство – низкая точность решений в первых нескольких узлах.

¹Схема предиктор-корректор может применяться не только для многошаговых, но и для одношаговых методов. В качестве предиктора по-прежнему служит какой-то явный, а в качестве корректора – неявный методы.

Для многошаговых методов, как и для одношаговых, введены понятия локальной погрешности и порядка метода. *Локальной погрешностью многошагового метода* называется величина

$$\mathbf{e}(h) = \mathbf{y}(t_{s+1}) - \mathbf{y}_{s+1},$$

где $\mathbf{y}(t_{s+1})$ – точное решение задачи (3.1.1), а \mathbf{y}_{s+1} – численное решение, полученное при точных стартовых значениях $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, s$. Говорят, что многошаговый метод (3.3.2) имеет *порядок* p , если его локальная погрешность равна $O(h^{p+1})$ для всех систем ОДУ $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ с достаточно гладкой правой частью. В общем случае методы Адамса-Башфорта имеют порядок $p = s + 1$, а методы Адамса-Мульттона – $p = s + 2$ [43]. Запомнить эти соотношения очень просто: порядок метода Адамса равен количеству узлов, по которым рассчитывается решение. Это правило справедливо как для явных методов, так и для неявных.

На практике оценка локальной погрешности используемого многошагового метода определяется как разность полученного с его помощью решения и решения другого метода того же порядка. Как только такая оценка ε_c рассчитана, она может быть использована для контроля длины шага согласно формуле

$$\bar{h} = h \left(\varepsilon / |\varepsilon_c| \right)^{1/(p+1)},$$

где \bar{h} и h – новое и старое значения длины шага, а ε – допустимая величина локальной погрешности, p – порядок метода. Контроль длины шага в многошаговых методах сложнее, чем в одношаговых, так как выбор новой длины шага предполагает перевычисление как решений, так и правых частей уравнений на новой равномерной сетке. Для этого можно воспользоваться, например, интерполяционными многочленами [48].

3.3.2 Многошаговые методы Штермера и Коуэлла

В небесной механике прекрасно зарекомендовали себя многошаговые *методы Штермера и Коуэлла* [43]. В отличие от всех уже рассмотренных нами методов, они позволяют интегрировать уравнения второго порядка

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0), \quad \dot{\mathbf{y}}_0 = \dot{\mathbf{y}}(t_0), \quad (3.3.6)$$

не сводя их к уравнениям первого порядка. Поскольку дифференциальные уравнения небесной механики имеют вид (3.3.6), неудивительно, что первые попытки разработать специальные методы для таких уравнений были сделаны астрономами. *Явным k -шаговым методом Штермера* называется метод

$$\mathbf{y}_{k+1} - 2\mathbf{y}_k + \mathbf{y}_{k-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j \nabla^j \mathbf{f}_k, \quad (3.3.7)$$

где $\nabla^j \mathbf{f}_k$ – разности назад, определяемые по формулам (3.3.3). *Неявным k -шаговым методом Коуэлла* именуют метод

$$\mathbf{y}_{k+1} - 2\mathbf{y}_k + \mathbf{y}_{k-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \bar{\sigma}_j \nabla^j \mathbf{f}_{k+1}. \quad (3.3.8)$$

Коэффициенты для методов Штермера и Коуэлла рассчитываются по следующим формулам:

$$\sigma_m = (-1)^m \int_0^1 (1-s)(C_{-s}^m + C_s^m) ds,$$

$$\bar{\sigma}_m = (-1)^m \int_{-1}^0 (-s)(C_{-s}^m + C_{s+2}^m) ds.$$

Их значения, вплоть до $k = 6$, можно найти в табл. 3.7.

Таблица 3.7. Коэффициенты σ_j и $\bar{\sigma}_j$ для методов Штермера и Коуэлла

j	0	1	2	3	4	5	6
σ_j	1	0	1/12	1/12	19/240	3/40	863/12096
$\bar{\sigma}_j$	1	-1	1/12	0	-1/240	-1/240	-221/60480

Метод (3.3.7) при $k = 5$ использовал К. Штермер (1907) в своей работе о северном сиянии применительно к ОДУ второго порядка, описывающему движение заряженных частиц в магнитном поле Земли [49], а метод (3.3.8) при $k = 6$ применялся в знаменитом исследовании движения кометы Галлея, выполненном Ф. Коуэллом и А. Кроммелином (1910) [50].

3.4 СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В этой главе будут даны общее описание и свойства *симплектических методов*, получивших в последнее время широкое распространение в астеродинимике. Эти методы, созданные специально для численного интегрирования гамильтоновых систем уравнений, обладают рядом преимуществ перед стандартными методами интегрирования. Чтобы разобраться в том,

как устроены симплектические методы и в чем конкретно состоят их преимущества, напомним сначала базовые факты о гамильтоновых системах.

Пусть \mathbf{q} и \mathbf{p} – n -мерные векторы обобщенных координат и обобщенных импульсов соответственно, подчиняющиеся гамильтоновой системе

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \equiv \mathbf{H}_p(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \equiv -\mathbf{H}_q(\mathbf{p}, \mathbf{q}),\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

где $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ – функция нужной степени гладкости, называемая *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* системы.

Функцию $\mathbf{I}(\mathbf{y})$ именуют *первым интегралом* системы $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, если $\mathbf{I}'(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0$ для всех \mathbf{y} . Здесь под $\mathbf{I}'(\mathbf{y})$ понимается матрица с элементами $\partial I_i / \partial y_j$, где индексы i и j нумеруют компоненты векторов \mathbf{I} и \mathbf{y} . Из определения первого интеграла следует, что для каждого решения $\mathbf{y}(t)$ системы $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ функция $\mathbf{I}(\mathbf{y}(t))$ постоянна. Нетрудно заметить, что для гамильтоновой системы (3.4.1) функция Гамильтона $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ является первым интегралом и поэтому сохраняется при движении системы. Отметим, что в соответствии с теоремой Лиувилля о сохранении фазового объема объем произвольной области фазового пространства также сохраняется в процессе эволюции гамильтоновой системы во времени.

Рассмотрим в $2n$ -мерном фазовом пространстве (\mathbf{p}, \mathbf{q}) параллелограмм P , натянутый на векторы ξ и η :

$$P = \{u\xi + v\eta \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}, \quad \xi = (\xi^p \quad \xi^q)^T, \quad \eta = (\eta^p \quad \eta^q)^T.$$

Векторы $\xi^p, \xi^q, \eta^p, \eta^q$ принадлежат соответствующим n -мерным подпространствам. Введем понятие суммы ориентированных площадей проекций параллелограмма P на координатные плоскости (p_i, q_i) :

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (\xi_i^p \eta_i^q - \eta_i^p \xi_i^q).\tag{3.4.2}$$

Это отображение представляет собой билинейную форму на фазовом пространстве, носящую название *симплектической формы*. Выражение (3.4.2) можно переписать в матричном виде

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^T \mathbf{J} \eta,$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix},$$

\mathbf{I} – единичная матрица размерности $n \times n$.

Линейное преобразование $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ называется *симплектическим*, если $\omega(f(\xi), f(\eta)) = \omega(\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{2n}$. В терминах матрицы преобразования \mathbf{A} имеем:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{A} = \mathbf{J}.$$

Симплектическое преобразование пространства сохраняет его симплектическую форму, то есть сумму ориентированных площадей проекций P на координатные плоскости (p_i, q_i) .

Распространим понятие симплектичности и на нелинейные отображений. Дифференцируемое отображение $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, где $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ – открытое множество, именуется *симплектическим*, если дифференциал dg (линейное преобразование, матрица которого совпадает с матрицей Якоби \mathbf{g}' отображения g) является симплектическим преобразованием:

$$\omega(dg(\xi), dg(\eta)) = \omega(\xi, \eta) \text{ для всех } \xi, \eta \in U$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{g}'(\mathbf{p}, \mathbf{q})^T \mathbf{J} \mathbf{g}'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{J}. \quad (3.4.3)$$

Выражение (3.4.3) используется на практике для проверки симплектичности того или иного отображения.

В то время как в случае линейного симплектического преобразования сохраняется величина (3.4.2) для любого параллелограмма в фазовом пространстве, нелинейное симплектическое отображение сохраняет величину

$$\Omega(M) = \iint_K \omega \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u, v) \right) du dv \quad (3.4.4)$$

для произвольного двумерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^{2n}$, где K – компактное множество из \mathbb{R}^2 , Ψ – непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, такая что $M = \Psi(K)$. В самом деле, любое многообразие M представимо как объединение бесконечного числа малых параллелограммов. Тогда $\Omega(M)$ имеет смысл суммы площадей проекций многообразия на координатные плоскости (p_i, q_i) .

Перейдем теперь к центральному результату – *теореме Пуанкаре*, согласно которой поток φ_t гамильтоновой системы (3.4.1) с дважды непрерывно дифференцируемой на $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ функцией Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ для любого t является симплектическим преобразованием всюду, где определен. Напомним, что потоком φ_t гамильтоновой системы называется отображение $\varphi_t(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0))$, где $\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ и $\mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ – решения системы с начальными условиями $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$. Верно и обратное: если поток системы φ_t симплектичен на $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, то система является гамильтоновой (по крайней мере, локально; для выпуклого множества U – глобально).

Обычные методы численного интегрирования в силу конечности шага не сохраняют ни гамильтониан системы, ни сумму площадей проекций на координатные плоскости, ни фазовый объем. Увеличению точности получаемых решений способствовало бы использование методов интегрирования, которые наследуют большинство свойств сохранения гамильтоновых систем. Тем самым придается устойчивость каноническим уравнениям без какого-либо изменения их внешнего вида или же перехода к другим переменным.

Дадим определение методам численного интегрирования ОДУ, на которые переносится служащее критерием каноничности свойство симплектичности потока. Одношаговый метод интегрирования $\mathbf{y}_i = \Phi_h(\mathbf{y}_{i-1})$ системы $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ называют *симплектическим*, если, примененный для решения гамильтоновой системы, дискретный поток $\mathbf{y} \rightarrow \Phi_h(\mathbf{y})$ является (для шагов достаточно малой длины h) симплектическим преобразованием. Симплектичность дискретного нелинейного потока Φ_h можно проверять по ее определению (3.4.3).

Рассмотрим несколько примеров симплектических методов для решения гамильтоновых систем с гамильтонианом $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Метод первого порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i-1} - h \mathbf{H}_q(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{i-1}), \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{q}_{i-1} + h \mathbf{H}_p(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{i-1}) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

является симплектическим. Действительно, продифференцировав левую и правую части (3.4.5) по переменным $(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1})$, получим равенство

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} + h \mathbf{H}_{qp}^T & 0 \\ -h \mathbf{H}_{pp} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)}{\partial(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -h \mathbf{H}_{qq} \\ 0 & \mathbf{I} + h \mathbf{H}_{qp} \end{pmatrix},$$

где матрицы \mathbf{H}_{qp} , \mathbf{H}_{pp} и \mathbf{H}_{qq} вторых частных производных гамильтониана вычисляются в точке $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{i-1})$. Непосредственной проверкой можно доказать, что якобиан дискретного потока

$$\frac{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)}{\partial(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1})}$$

удовлетворяет определению симплектичности

$$\left(\frac{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)}{\partial(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1})} \right)^T \mathbf{J} \left(\frac{\partial(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)}{\partial(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1})} \right) = \mathbf{J}.$$

Аналогично можно показать, что метод

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i-1} - h \mathbf{H}_q(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_i), \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{q}_{i-1} + h \mathbf{H}_p(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_i) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

также является симплектическим. Методы (3.4.5), (3.4.6) называются *симплектическими методами Эйлера* (первого порядка). В общем случае они неявные, но превращаются в явные для гамильтониана с разделяющимися переменными $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q})$.

Среди симплектических методов второго порядка наиболее известные – *методы Штермера-Верле*, являющиеся композицией двух приведенных выше симплектических методов Эйлера с шагом $h/2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{i-1/2} &= \mathbf{p}_{i-1} - \frac{h}{2} \mathbf{H}_q(\mathbf{p}_{i-1/2}, \mathbf{q}_{i-1}), \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{q}_{i-1} + \frac{h}{2} \left(\mathbf{H}_p(\mathbf{p}_{i-1/2}, \mathbf{q}_{i-1}) + \mathbf{H}_p(\mathbf{p}_{i-1/2}, \mathbf{q}_i) \right), \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i-1/2} - \frac{h}{2} \mathbf{H}_q(\mathbf{p}_{i-1/2}, \mathbf{q}_i) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{i-1/2} &= \mathbf{q}_{i-1} + \frac{h}{2} \mathbf{H}_p(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1/2}), \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i-1} - \frac{h}{2} \left(\mathbf{H}_q(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1/2}) + \mathbf{H}_q(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{i-1/2}) \right), \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{q}_{i-1/2} + \frac{h}{2} \mathbf{H}_p(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{i-1/2}). \end{aligned}$$

Опять-таки, в общем случае методы Штермера-Верле неявные, однако для гамильтониана с разделяющимися переменными становятся явными.

Выпишем без вывода признак симплектичности для всех неявных методов Рунге-Кутты более высокого порядка. Пусть дан s -стадийный неявный метод Рунге-Кутты

$$\mathbf{k}_j = \mathbf{f} \left(t_{j-1} + c_j h, \mathbf{y}_{i-1} + h \sum_{k=1}^s a_{jk} \mathbf{k}_k \right), \quad j = 1, \dots, s, \tag{3.4.7}$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{i-1} + h \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{k}_j.$$

Если для всех $i, j = 1, \dots, s$ коэффициенты метода удовлетворяют условиям $b_j a_{jk} + b_k a_{kj} = b_j b_k$, то метод (3.4.7) является симплектическим. Множество схем интегрирования можно найти в обзоре [51]. Здесь же приведем лишь несколько примеров. Под p стандартно понимается порядок метода. Таблицы Бутчера методов $s = 1, p = 2, s = 2, p = 4$ и $s = 3, p = 6$ представлены в таблицах 3.8-3.10 соответственно. В последнем случае можно выбирать

из двух вариантов $\bar{c}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$ или $\bar{c}_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Таблица 3.8. Таблица Бутчера симплектического одностадийного метода Рунге-Кутты второго порядка (*неявный метод средней точки*)

1/2	1/2
	1

Таблица 3.9. Таблица Бутчера симплектического двухстадийного метода Рунге-Кутты четвертого порядка

$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Таблица 3.10. Таблица Бутчера симплектического трехстадийного метода Рунге-Кутты шестого порядка

$\frac{1}{2} + \bar{c}_1$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} + \frac{2\bar{c}_1}{3}$	$\frac{5}{36} + \frac{\bar{c}_1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} - \frac{5\bar{c}_1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} + \frac{5\bar{c}_1}{12}$
$\frac{1}{2} - \bar{c}_1$	$\frac{5}{36} - \frac{\bar{c}_1}{3}$	$\frac{2}{9} - \frac{2\bar{c}_1}{3}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

В заключение отметим, что симплектические методы сами по себе являются гамильтоновыми системами и потому сохраняют величину (3.4.4), фазовый объем, свой собственный гамильтониан и прочие геометрические инварианты гамильтоновых систем. Таким образом, гамильтонова система соответствующая любому симплектическому методу, в некоторой степени приближает исходную (интегрируемую) гамильтонову систему с ее структурой фазового пространства. Известно, скажем, что гамильтониан метода \bar{H} связан с функцией Гамильтона H исходной системы простым соотношением $\bar{H} = H + O(h^p)$, где p – порядок метода интегрирования. Следует заметить, что гамильтониан \bar{H} зависит от шага h ; поэтому использование методов с адаптивным шагом может привести к неограниченному изменению \bar{H} . В этом случае рекомендуется использовать методы с постоянным шагом.

3.5 МНОГООБОРОТНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В задачах небесной механики и астродинамики часто встречаются периодические (или, скорее, квазипериодические) траектории, в том числе – с быстро осциллирующими компонентами. Стандартные методы интегрирования соответствующих систем ОДУ могут оказаться весьма ресурсозатратными. Для решения проблемы было разработано несколько специальных интеграторов. Среди них находятся так называемые *многооборотные методы* (*multi-revolution methods*). Первая модификация многооборотного метода была предложена Г.П. Таратыновой в классической работе [52] по определению орбиты низко летящего спутника. Лежащая в основе подобных методов идея заключается в расчете изменений элементов орбиты КА

за один оборот для их предсказания на много оборотов вперед. Предполагается при этом, что все внешние возмущения, действующие на спутник в течении витка, являются вековыми или долгопериодическими¹.

Схемы различных типов многооборотных методов базируются как на одношаговых методах Рунге-Кутты [52–54], так и на многошаговых методах [55–61]. Ниже будут представлены только алгоритмы из первого класса.

Пусть поток $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ автономной системы ОДУ $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ для некоторой точки \mathbf{y}_0 является (квази)периодическим отображением с периодом T . Будем далее предполагать, что $\varphi_{t+T}(\mathbf{y}) - \varphi_t(\mathbf{y})$ мало для всех \mathbf{y} из некоторой окрестности точки \mathbf{y}_0 . В таком случае *отображение Пуанкаре* $P : \mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t+T)$ будет близко к тождественному и может быть записано как

$$P(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}),$$

где \mathbf{F} – достаточно гладкая функция, $0 \leq \varepsilon \ll 1$ – введенный искусственно малый параметр, характеризующий степень близости отображения к тождественному. Повторенное N раз отображение Пуанкаре обозначим P^N . Многооборотные методы Рунге-Кутты (MRRK) аппроксимируют значение $P^N(\mathbf{y}_0)$ суммой \mathbf{y}_0 и некой линейной комбинации значений функции $\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}) \equiv P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}$ в подходящим образом выбранных точках

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{y}_0 + N \sum_{k=1}^s a_{jk} (P(\mathbf{Y}_k) - \mathbf{Y}_k) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon N \sum_{k=1}^s a_{jk} \mathbf{F}(\mathbf{Y}_k), \quad j = 1, \dots, s.$$

Таким образом,

$$P^N(\mathbf{y}_0) \approx \mathbf{y}_N = \mathbf{y}_0 + N \sum_{j=1}^s b_j (P(\mathbf{Y}_j) - \mathbf{Y}_j) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon N \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{F}(\mathbf{Y}_j),$$

где a_{jk} и b_j – действительные коэффициенты. Для явных методов MRRK, когда $a_{jk} = 0$ при $k \geq j$, вычисление точек \mathbf{Y}_j проходит последовательно.

На каждом шаге явного s -стадийного метода требуется расчет s отображений Пуанкаре $P(\mathbf{y}_i)$, $i = 1, \dots, s$ с помощью произвольного метода численного интегрирования. Поскольку для стандартных методов нужно рассчитать N отображений Пуанкаре, очевидно, что необходимым условием эффективности явных методов MRRK служит неравенство $N > s$.

¹Впоследствии многооборотные методы были адаптированы и к короткопериодическим возмущениям (см., например, [56]), но для простоты изложения такие адаптации рассматриваться здесь не будут.

Заметим, что в качестве длины шага методов MRRK может быть принята величина $h = \varepsilon N$, по степеням которой раскладывается правая часть формулы для \mathbf{y}_N . Тогда естественно говорить, что многооборотный метод имеет порядок p , если $\mathbf{y}_N - P^N(\mathbf{y}_0) = O(h^{p+1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Порядок явных методов MRRK, так же как и стандартных явных методов Рунге-Кутты, не может превышать числа стадий.

Коэффициенты a_{jk} и b_j , вообще говоря, зависят от глубины прогноза N . Как и для обычных одношаговых методов, их удобно сгруппировать в таблицу Бутчера. В табл. 3.11 приведена таблица Бутчера многооборотного метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Добавленные в соответствии с соотношениями $c_j = a_{j1} + \dots + a_{js}$ коэффициенты c_j становятся нужны при неавтономности системы ОДУ.

Таблица 3.11. Таблица Бутчера многооборотного метода Рунге-Кутты четвертого порядка

0				
$\frac{N-1}{2N}$	$\frac{N-1}{2N}$			
$\frac{N-1}{2N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N-3}{2N}$		
$\frac{N-1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{2(N-2)}{N(N+1)}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N(N+1)}$	
	$\frac{N+1}{6(N-1)}$	$\frac{N-2}{3(N-1)}$	$\frac{N-2}{3(N-1)}$	$\frac{N+1}{6(N-1)}$

Рассмотрим для примера систему уравнений возмущенного орбитального движения КА

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_K(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{pert}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (3.5.1)$$

где m – масса КА, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ – вектор положения КА, \mathbf{F}_K – кеплерова (центральная) сила притяжения, \mathbf{F}_{pert} – возмущающие силы, малые по сравнению с \mathbf{F}_K . Если $\mathbf{F}_{pert} = 0$, то среди решений уравнений (3.5.1) есть замкнутые эллиптические орбиты. Возьмем одну из таких орбит с периодом T и

начальным условием $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$. Соответствующее ей отображение Пуанкаре $P: \mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t+T)$ близко к тождественному в некоторой окрестности \mathbf{r}_0 . При наличии возмущений, однако, период движения становится переменной величиной, что затрудняет применение многооборотных методов. Для преодоления этой трудности рекомендуется брать в качестве независимой какую-либо из угловых переменных, период по которым всегда равен 2π . Альтернативный подход – определить отображение Пуанкаре как отображение последовательных пересечений фазовой траекторией КА некоторой гиперповерхности $S(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$, *трансверсальной* (т.е. не касательной) к траектории. Для орбиты с ненулевым наклоном на роль гиперповерхности подойдет экваториальная плоскость ($z = 0$). Отображение Пуанкаре переводит точку \mathbf{y}_0 пересечения орбиты и экваториальной плоскости в точку $P(\mathbf{y}_0)$ следующего пересечения после совершения одного оборота вокруг Земли. Степень близости отображения к тождественному характеризуется коэффициентом J_2 второй зональной гармоники геопотенциала – главного возмущающего фактора: $\varepsilon = J_2 \approx 10^{-3}$.

Отметим, что для многооборотных методов Рунге-Кутты также существуют условия симплектичности, которые можно найти, например, в статье [53]. Там же приведены *условия порядка* – требования на коэффициенты метода для достижения нужного порядка точности.

3.6 СОВМЕСТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Обычно уравнения орбитального движения КА и его углового движения разделяются, что позволяет интегрировать их по отдельности. В некоторых случаях, однако, два типа движения оказываются связанными. При этом возможны три различных ситуации. Во-первых, орбитальное движение может зависеть от углового, в то время как угловое не зависит от орбитального. Действительно, ориентация КА определяет силу атмосферного торможения и силу светового давления, а следовательно, и траекторию его центра масс. И наоборот, независимое орбитальное движение КА влияет на угловое, когда управление угловым движением КА осуществляется в зависимости от положения КА в магнитном и/или гравитационном поле и моментов сил атмосферного торможения и светового давления. Пусть и весьма редко, но встречается и случай полностью взаимозависимых орбитального и углового движений. Таким образом, непростая задача совместного интегрирования разных по своим свойствам типов уравнений типична для астродинамики и заслуживает тщательного исследования.

Возникающий в первую очередь вопрос – какой стратегии выбора шага интегрирования придерживаться? Переменные углового движения эволюционируют, как правило, намного быстрее орбитальных переменных, и

для достижения одинаковой точности нужна гораздо меньшая длина шага. Но использование мелкой сетки приводит к неоправданным – с точки зрения интегрирования орбитального движения – вычислительным затратам.

Для того чтобы разрешить возникшую проблему, можно ввести в рассмотрение два интегратора: один для расчета орбитального движения КА, другой – для расчета углового. При этом их связь осуществляется посредством периодического обновления в каждом интеграторе сил/моментов по мере поступления от другого интегратора нового значения вектора состояния. Такой процесс реализуется, к примеру, следующим образом. Сначала на одном шаге орбитального движения КА интегрируется угловое движение. Необходимые значения орбитальных переменных рассчитываются в приближении невозмущенной или упрощенно возмущенной задачи двух тел. Затем интегратор орбиты, используя каким-либо образом полученный закон эволюции углового движения, выполняет шаг интегрирования, и вся процедура повторяется на следующем шаге.

Описанный процесс интегрирования может привести к существенным ошибкам в вычислении орбиты КА, если орбитальный шаг намного длиннее шага для угловых переменных, а закон управления ориентацией очень чувствителен к неточностям знания положения и скорости КА. Усугубить ситуацию способна большая *парусность* (отношение площадь-масса) КА. Заметно повысить точность интегрирования помогает применение хорошо знакомого нам метода Энке [62]. При расчете опорной траектории учитываются лишь не зависящие от ориентации возмущающие силы гравитационной природы. Остальные же возмущения – сопротивление атмосферы и сила светового давления – включаются в уравнения коррекции (уравнения для отклонений от опорной траектории), интегрирующиеся одновременно с уравнениями углового движения¹. Эффективность метода связана с простотой правой части уравнений коррекции: из большого числа гравитационных «дифференциальных» членов достаточно оставить только главный, кеплеров. По достижении величиной отклонений некоторого фиксированного предельного значения опорная траектория должна быть пересчитана.

Расширенная система уравнений для отклонений от опорной траектории и угловых переменных часто является *жесткой*: требование устойчивости метода интегрирования вынуждает чрезмерно сокращать шаг. Такое поведение системы наблюдается в режиме стабилизации КА вращением, а также при быстром демпфировании вращений КА или, напротив, быстрой его раскрутке.

В задачах интегрирования жестких систем ОДУ неявные методы дают гораздо лучшие результаты, нежели явные [63]. Из неявных одношаговых

¹Возмущающие силы, зависящие от ориентации КА, тоже могут быть включены в правую часть при расчете опорной траектории. В этом случае их значения вычисляются для некой заданной ориентации, а в уравнениях коррекции появляется соответствующее «дифференциальное» слагаемое.

методов Рунге-Кутты отметим *методы Радо IA* и *Лобатто IIIA*, имеющие соответственно пятый и шестой порядок (см. табл. 3.12 и 3.13). Когда требуемая точность интегрирования не слишком велика, прекрасно работают *методы Розенброка*, описание которых можно найти, скажем, в [63].

Таблица 3.12. Таблица Бутчера метода Радо IA пятого порядка

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1-\sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1+\sqrt{6}}{18}$
$\frac{6-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{6+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$

Таблица 3.13. Таблица Бутчера метода Лобатто IIIA шестого порядка

0	0	0	0	0
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{120}$
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25+13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{120}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

Среди линейных многошаговых методов наиболее эффективными являются *формулы дифференцирования назад (ФДН)*

$$\sum_{j=1}^s \frac{1}{j} \nabla^j \mathbf{y}_s = h \mathbf{f}_s \equiv h \mathbf{f}(t_s, \mathbf{y}_s),$$

где $\nabla^j \mathbf{y}_s$ – разности назад, определяемые по формулам (3.3.3). Например, при $s = 4$

$$\frac{25}{12} \mathbf{y}_4 - 4 \mathbf{y}_3 + 3 \mathbf{y}_2 - \frac{4}{3} \mathbf{y}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{y}_0 = h \mathbf{f}_4.$$

Имеет смысл использовать лишь методы с $s \leq 6$, поскольку все остальные ФДН неустойчивы [43]. Порядок таких методов $p = s$.

Для интегрирования углового движения КА, стабилизированного собственным вращением, хорошо подходят многооборотные методы. Выбрав в вышеописанной процедуре совместного интегрирования орбитального и углового движения один из многооборотных методов в качестве интегратора углового движения, можно сократить объем излишних вычислительных затрат. Если многооборотный метод основан на методе Рунге-Кутты, то за N естественно взять отношение $h/T \gg 1$, где h – длина шага орбитального интегратора, априори заданная кратной периоду T собственного вращения. Примеры применения многошаговых многооборотных методов к уравнениям с быстро осциллирующими компонентами приведены в [56–58].

3.7 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ВЫХОДОМ НА ОГРАНИЧЕНИЕ

В задачах моделирования управляемого движения КА нередко возникает необходимость интегрирования уравнений движения только до некоторого момента времени, известного заранее или определяемого условием достижения заданного положения КА в пространстве. Затем интегрирование прекращается либо продолжается, но, возможно, с измененной правой частью. Это бывает обусловлено обстоятельствами двух типов: изменением внешних факторов (отделение ступени ракеты-носителя, отделение КА от разгонного блока, вход/выход КА из тени Земли, вход/выход КА из зон видимости наземных станций) или же сменой режима управления (выдача импульса, начало/окончание маневра переориентации). Отметим, что правая часть системы при продолжении интегрирования может, вообще говоря, остаться прежней, если цель прерывания интегрирования заключалась всего-навсего в извлечении вектора состояния на заданный момент времени.

Способность адаптировать процедуру численного интегрирования для задачи *интегрирования с выходом на ограничение* востребована при часто встречавшемся в первом разделе пособия переходе от физического времени к другой независимой переменной – фиктивному времени, когда встает вопрос выхода в фазовое пространство точно в определенный момент физического времени. Не менее важен выход на ограничение и при построении отображения Пуанкаре в многооборотных методах интегрирования.

Будем говорить, что интегрирование прерывается в момент наступления *события*. Наличие событий на рассматриваемом промежутке времени характеризуется специальной *функцией событий*, принимающей в моменты наступления событий нулевое значение¹. Пусть дана задача Коши

$$\dot{\mathbf{y}}_L = \mathbf{f}_L(t, \mathbf{y}_L), \quad \mathbf{y}_L(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (3.7.1)$$

Функцию событий обозначим через $g(t, \mathbf{y})$. В момент t' наступления первого события, когда $g(t', \mathbf{y}_L(t')) = 0$, интегрирование системы (3.7.1) прерывается и перезагружается с новым набором дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}}_R = \mathbf{f}_R(t, \mathbf{y}_R). \quad (3.7.2)$$

Начальное условие $\mathbf{y}_R(t')$ для новой системы (3.7.2) связано с $\mathbf{y}_L(t')$ некоторым известным образом (к примеру, $\mathbf{y}_R(t') = \mathbf{y}_L(t')$ для непрерывных процессов). Если вплоть до конечного момента времени $t = t_f$ не наступят других событий, то общее решение $\mathbf{y}(t)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ состоит из двух кусков: совпадает с $\mathbf{y}_L(t)$ на отрезке $[t_0, t']$ и с $\mathbf{y}_R(t)$ – на $[t', t_f]$.

Проанализируем вопрос корректности задачи интегрирования с выходом на ограничение. Будем полагать, что правые части \mathbf{f}_L и \mathbf{f}_R уравнений (3.7.1) и (3.7.2) определены для какого-либо $\varepsilon > 0$ на отрезках $[t_0, t' + \varepsilon]$ и $[t' - \varepsilon, t_f]$ соответственно и к тому же достаточно гладки. Малое изменение начального условия \mathbf{y}_0 в момент $t = t_0$ приводит к малому изменению $\delta \mathbf{y}_L(t)$ функции $\mathbf{y}_L(t)$, а значит, изменяется и момент t' наступления события. Обозначим это изменение как $\delta t'$. Раскладывая левую часть равенства (в предположении нужной степени гладкости функции событий)

$$g(t' + \delta t', \mathbf{y}_L(t' + \delta t') + \delta \mathbf{y}_L(t' + \delta t')) = 0$$

около точки $(t', \mathbf{y}_L(t'))$, получаем с точностью до членов первого порядка

$$\frac{\partial g}{\partial t} \delta t' + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{d\mathbf{y}_L}{dt} \delta t' + \delta \mathbf{y}_L(t') \right) = 0,$$

¹Наступление события может быть интерпретировано как пересечение траектории системы с *гиперповерхностью событий* в $(n+1)$ -мерном расширенном фазовом пространстве, задаваемой как поверхность нулевого уровня функции событий. Наиболее стандартными примерами функций событий могут служить $t - T$ (наступление момента времени T) и z (пересечение траектории КА с экваториальной плоскостью).

где все производные оцениваются в точке $(t', \mathbf{y}_L(t'))$. Поскольку

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}_L}{dt} = \dot{g},$$

имеем:

$$\delta t' = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(t', \mathbf{y}_L(t')) \frac{\delta \mathbf{y}_L(t')}{\dot{g}(t', \mathbf{y}_L(t'))}.$$

Изменение $\delta t'$ будет малым, если $\dot{g}(t', \mathbf{y}_L(t')) \neq 0$. В таком случае начальное условие для системы (3.7.2) и соответствующее решение $\mathbf{y}_R(t)$ также изменятся мало, что и означает корректность задачи. Следовательно, корректность обеспечивается, если траектория системы в расширенном фазовом пространстве пересекает гиперповерхность $g(t, \mathbf{y}) = 0$ трансверсально (не по касательной). То же самое верно, когда на промежутке $[t_0, t_f]$ находятся сразу несколько изолированных друг от друга событий, которые относятся к одной или нескольким функциям событий [64].

Существует множество методов локализации событий. Обычно в ходе интегрирования отслеживают изменение знака функции событий, а именно, если для последовательных моментов t_{i-1} и $t_i = t_{i-1} + h$ выполнено

$$g(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \cdot g(t_i, \mathbf{y}_i) \leq 0,$$

где \mathbf{y}_{i-1} и \mathbf{y}_i – приближения решения $\mathbf{y}_L(t)$ в точках t_{i-1} и t_i , то событие находится где-то на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$. Если длина шага h велика (в сравнении с временем между наступлением смежных событий), то на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$ могут оказаться два события; интегратор не обнаружит изменение знака функции событий и пропустит оба события. Возможный подход для решения этой проблемы был предложен в статье [65]: так как функция событий гладкая, дифференциальное уравнение ее эволюции можно добавить к исходной системе и следить за знаком не только самой функции, но и ее производной. Смена знака производной – даже при отсутствии смены знака функции – указывает на вероятный пропуск события, и поэтому, для надежности, вычисления рекомендуется повторить с более мелким шагом. Процесс измельчения шага заканчивается одним из трех вариантов: идентификация события (т.е. обнаружена смена знака функции событий), пропадание смены знака производной либо же достижение минимальной разрешенной длины шага.

После обнаружения события на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$ его требуется локализовать. При использовании многошаговых методов Адамса или ФДН-методов, аппроксимирующих решение во внутренних точках между узла-

ми сетки полиномом $s+1$ -ой степени, локализация особенно проста: нужно найти корень уравнения

$$g(t', \mathbf{y}_L(t')) = 0$$

из отрезка $[t_{i-1}, t_i]$, причем приближенные значения для $\mathbf{y}_L(t')$ берутся из оценки аппроксимирующего полинома в точке t' . С одношаговыми методами Рунге-Кутты локализовать событие сложнее. Самый прямолинейный способ – подбирать $t_{i-1+\sigma} = t_{i-1} + \sigma h$ итеративно, определяя $\mathbf{y}_{i-1+\sigma}$ методом Эйлера, пока $g(t_{i-1+\sigma}, \mathbf{y}_{i-1+\sigma}) \approx 0$ с заданной точностью [66]. Из более продвинутых способов выделим *непрерывные методы Рунге-Кутты* [67], где весовые коэффициенты b_j представляются в виде полиномов по степеням σ . Это позволяет построить интерполяцию решения между узлами сетки. Порядок интерполянта чаще всего меньше порядка порождающего метода (то есть метода, получающегося при подстановке $\sigma = 1$). Процедура локализации аналогична той, что описана выше для многошаговых методов.

Далее, когда событие успешно локализовано, процесс интегрирования должен быть перезапущен с правой частью \mathbf{f}_R . Здесь многошаговые методы с их известной проблемой старта уступают в эффективности самостартирующим методам Рунге-Кутты, которые способны выполнить шаг размера $(1-\sigma)h$ от $(t_{i-1+\sigma}, \mathbf{y}_{i-1+\sigma})$ до (t_i, \mathbf{y}_i) и продолжить интегрирование, как бы не обращая внимания на случившееся событие.

Иногда интегратор ошибочно сообщает несколько раз об одном и том же событии, что в лучшем случае приведет к лишним затратам ресурсов, а в худшем – к застопориванию интегрирования. Чтобы избежать этой проблемы, наступление события не отслеживается в начальной точке, а также внутри первого шага интегрирования обновленной системы (3.7.2). Могут игнорироваться и события, находящиеся в пределах заданного минимального расстояния от начальной точки.

Если все вышеуказанные предположения, касающиеся функций \mathbf{f}_L , \mathbf{f}_R и g , выполнены, а метод интегрирования имеет порядок p , то и решение задачи численного интегрирования при периодически случающихся событиях сходится к точному решению с порядком p [64].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, выделим встретившиеся в пособии общие принципы и закономерности численного моделирования движения КА.

- 1) Не существует универсального метода численного интегрирования и идеальной формы записи уравнений орбитального и углового движения КА. Эффективность каждого метода зависит от длины интервала интегрирования, вида движения (типа орбиты, режима ориентации) и набора включаемых в рассмотрение возмущающих факторов. Тем не менее, поскольку большая часть методов численного интегрирования так или иначе требует полиномиальной аппроксимации правой части ОДУ, преимуществом будут обладать формы записи уравнений с почти постоянной или монотонно меняющейся правой частью.
- 2) Рекомендуется всегда приводить уравнения орбитального и углового движения к регулярному виду, когда правая часть не вырождается ни при каких значениях фазовых переменных. К примеру, в качестве зависимых переменных для орбитального движения идеально подходят равноденственные элементы орбиты, а роль независимой переменной вместо физического времени может выполнить эксцентрическая долгота. Быструю угловую переменную в таком случае хорошо заменить временным элементом.
- 3) По возможности нужно сводить к минимуму количество вычислений тригонометрических функций, приводящих к быстрому возрастанию ошибок округления. В этом смысле в качестве кинематических переменных углового движения компоненты кватерниона выглядят предпочтительнее углов Эйлера. К тому же они никогда не вырождаются.
- 4) Ошибки интегрирования переменных действия и их аналогов (большой полуоси, компонент вектора угловой скорости в ССК) растут на порядок медленнее ошибок в быстрых угловых переменных (средней аномалии, углах Эйлера). Как следствие, важное значение имеет стабилизация движения по переменным действия, достигающаяся как с помощью введения специальных процедур (методы Баумгарта, методы траекторной коррекции), так и выбором особых методов интегрирования (симплектические методы интегрирования).
- 5) Очень часто оказывается полезен прием Энке – переход от самих фазовых переменных к малым отклонениям от их значений на опорной фазовой траектории. Это помогает уменьшить ошибки округления, а иногда и ошибки аппроксимации правой части уравнений.
- 6) Показатель эффективности численного моделирования движения КА в присутствии большого числа возмущающих факторов – количество

обращений к правой части уравнений. Машинное время, затрачиваемое на вычисления, с хорошей точностью пропорционально этой характеристике. Отсюда можно заключить, что в плане быстродействия одношаговые методы интегрирования способны быть наравне с многошаговыми, только если они позволяют делать более широкие шаги интегрирования. Кроме того, на практике одношаговые методы часто необходимо оснащать процедурой интерполяции решения между шагами сетки.

- 7) Неявные методы, как одношаговые, так и многошаговые, устойчивее явных и потому должны использоваться для интегрирования жестких систем и систем, в которых частоты колебаний по разным компонентам сильно различны.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА

Как правило, под эффективностью метода численного моделирования движения понимается достижение заданного уровня точности нахождения фазовой траектории системы с как можно меньшими затратами машинного времени. Применительно к моделированию орбитального движения КА с большим числом учитываемых возмущающих факторов такое определение эффективности практически эквивалентно минимальности количества обращений к правой части системы уравнений: именно на расчет суммарной возмущающей силы затрачивается до 90-95% вычислительных ресурсов. Так как количество обращений к правой части пропорционально числу шагов интегратора, в качестве характеристики эффективности методов будем приводить графики зависимости точности интегрирования от числа шагов. Удобство этой характеристики заключается, кроме того, в безотносительности к возможностям конкретного компьютера.

Воспользуемся результатами некоторых численных экспериментов из статьи [68]. В частности, рассмотрим задачи моделирования орбитального движения КА на низкой орбите высотой 300 км и на геостационарной орбите. В первом случае интегрирование проходит на интервале двух недель (222 полных оборота), а во втором – сорока лет. Методом интегрирования служил метод Эверхарта 15-го порядка с разбиением Гаусса-Радо. Из различных форм записи уравнений движения исследовались:

- а) непреобразованные уравнения в форме Коуэлла (\mathbf{r});
- б) уравнения Шперлинга-Бюрде (\mathbf{sb});
- в) уравнения Кустаанхеймо-Штифеля (\mathbf{u});
- г) уравнения с диссипативной стабилизацией (\mathbf{st});
- д) уравнения в форме Энке в декартовых координатах ($\delta\mathbf{r}$) и переменных Кустаанхеймо-Штифеля ($\delta\mathbf{u}$);
- е) уравнения в вариациях элементов орбиты в модификации Роя [69], где зависимые переменные – это компоненты векторов орбитального углового момента и Лапласа, а также истинная долгота (\mathbf{ry}).

Зависимости точности интегрирования каждого набора уравнений от числа шагов для двух типов орбит приведены на рисунках А.1 и А.2. Пунктиром показаны уровни ошибок, соответствующие величине большой полуоси орбиты и одной угловой секунде относительно наблюдателя на Земле. Как видно из графиков, впечатляющую степень эффективности обеспечивает использование KS-переменных (\mathbf{u} , $\delta\mathbf{u}$) и орбитальных элементов (\mathbf{ry}).

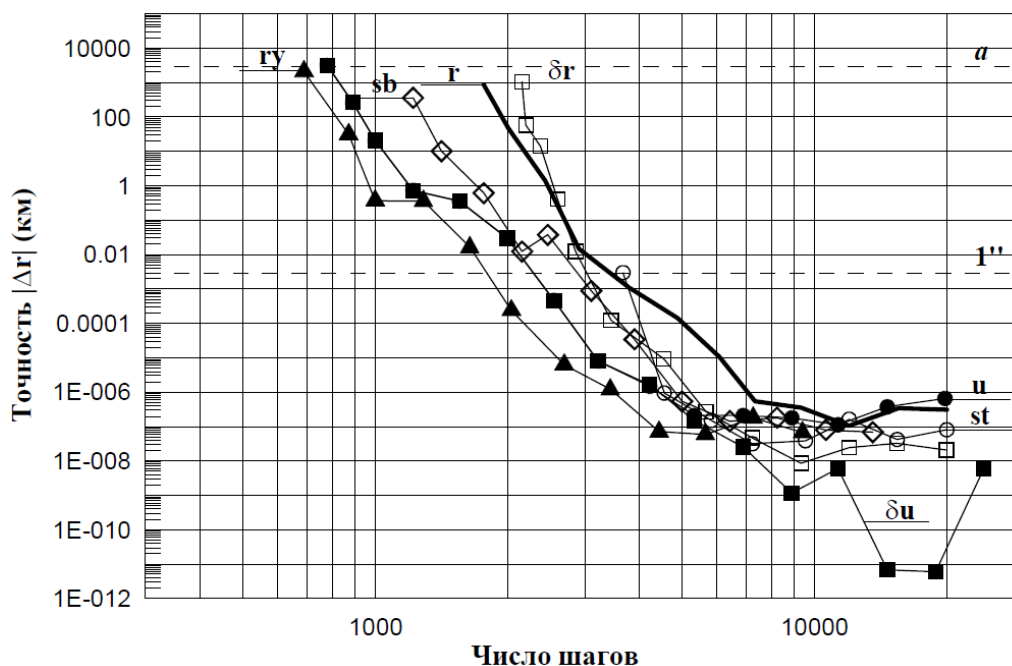


Рис. А.1. Сравнение эффективности методов численного моделирования орбитального движения КА на низкой орбите высотой 300 км [68]

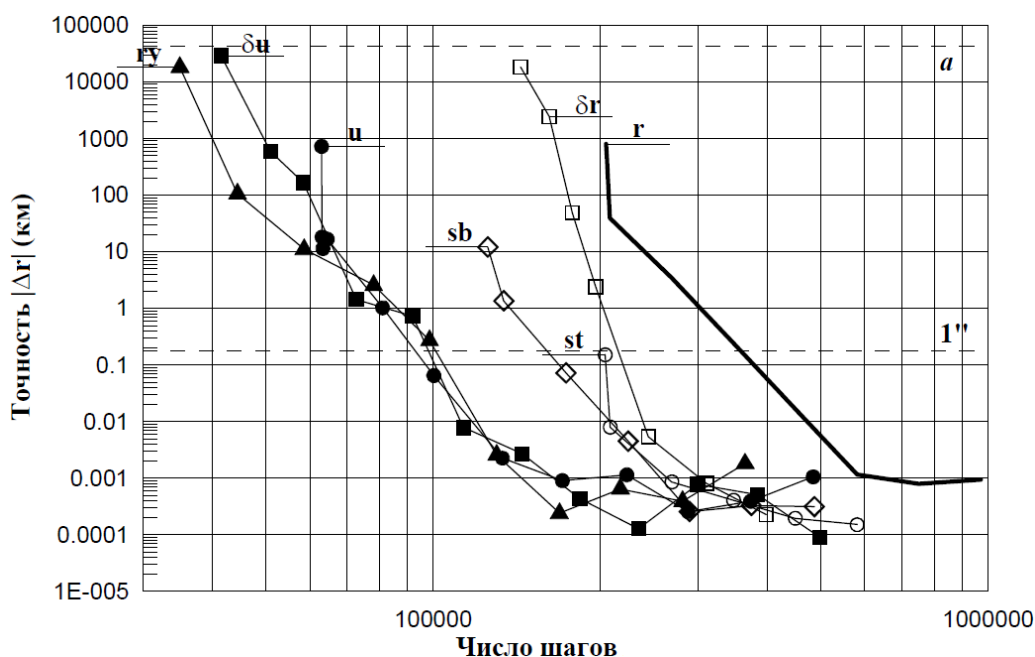


Рис. А.2. Сравнение эффективности методов численного моделирования орбитального движения КА на геостационарной орбите [68]

Заметим, что для высокоточного интегрирования применение подхода Энке к уравнениям в KS-переменных позволяет повысить уровень максимальной точности на 1-2 порядка за счет уменьшения ошибок округления. Также бросается в глаза существенно *большая* эффективность методов регуляризации и стабилизации при интегрировании на длительных интервалах времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА

Продемонстрируем результаты сравнительного анализа изложенных в пособии методов численного моделирования углового движения КА. Воспользуемся для этого данными, полученными в численных экспериментах из работы [40].

Рассмотрим для начала случай, когда использование углов Эйлера для задания ориентации твердого тела ведет к вырождению и большим ошибкам интегрирования. Проведем моделирование свободного вращения (т.е. вращения в отсутствие внешних моментов) чуть приплюснутого сфероида с небольшим – около $0.1''$ – отклонением мгновенной оси вращения от оси максимального главного момента инерции (C -оси). Такое движение в грубом приближении моделирует вращение Земли. Пусть требуется интегрированием определить углы ориентации тела относительно некоторой ИСК с осью OZ , направленной близко к C -оси в начальный момент времени. В случае, если связать с Землей неподходящую для интегрирования систему координат с осью $O\zeta$, совпадающей с C -осью (см. рис. 2.1), то в процессе численного интегрирования по причине деления на малую величину $\sin\theta$ в кинематическом уравнении (2.6.1) появятся большие ошибки. Даже если угол нутации в начальный момент времени θ_0 не будет равен точно нулю, в процессе движения он может к нулю вплотную приблизиться. Проведем численное интегрирование уравнений вращательного движения тела классическим методом Рунге-Кутты RK4 с постоянным шагом, равным $1/1024$ от номинального периода вращения $2\pi/r$ (заметим, что проекция r угловой скорости на C -ось – первый интеграл). На рис. Б.1 приведены графики зависимости угла нутации от времени, полученные аналитически при различных его начальных значениях, а на рис. Б.2 представлены ошибки численного интегрирования уравнений (2.2.4), (2.3.1). В роли ошибки используется логарифм от корня из суммы квадратов невязок базисных векторов ССК

$$\log_{10}(|\Delta\mathbf{R}|) \equiv \log_{10}\left(\sqrt{|\Delta\mathbf{e}_\xi|^2 + |\Delta\mathbf{e}_\eta|^2 + |\Delta\mathbf{e}_\zeta|^2}\right),$$

рассчитываемых из сравнения с известным аналитическим решением. Рис. Б.2 показывает, что для меньших θ_0 ошибка интегрирования больше. При достаточно малых θ_0 она ведет себя как ступенчатая функция: возрастает скачкообразно в моменты, когда ось $O\zeta$ подходит близко к оси OZ (угол нутации в этом случае становится близок к нулю).

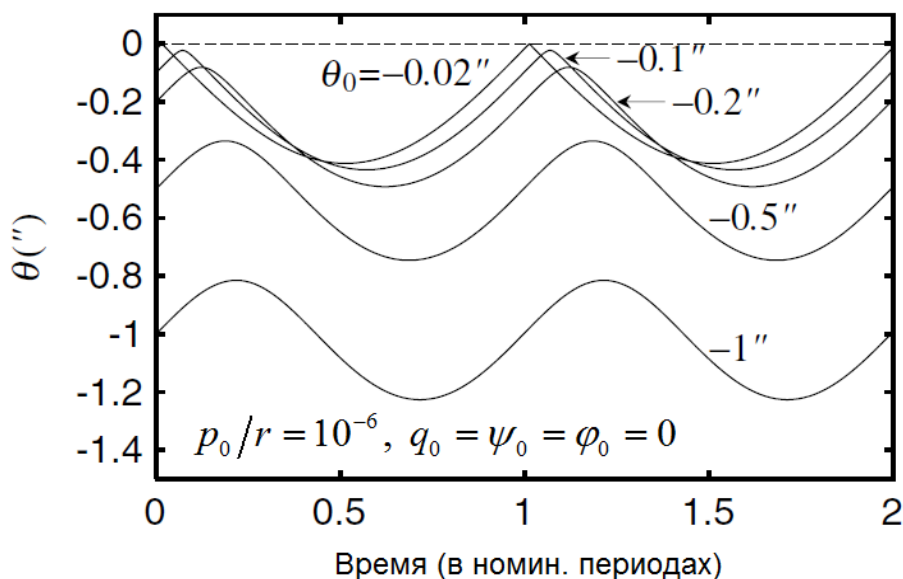


Рис. Б.1. Изменение угла нутации в процессе вращения при различных начальных значениях угла нутации [40]

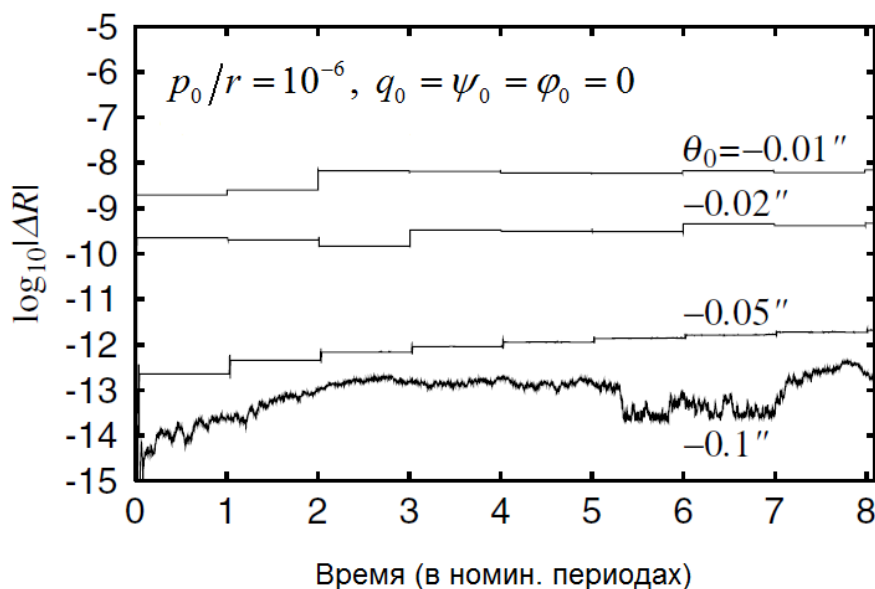


Рис. Б.2. Ошибка численного интегрирования уравнений в углах Эйлера при различных начальных значениях угла нутации [40]

Теперь проведем моделирование свободного вращения Земли, выбрав начальное отклонение оси $O\zeta$ относительно оси OZ равным $\theta_0 = -23.5^\circ$, т.е. вдалеке от вырождения. Наряду с углами Эйлера проведем интегрирование кинематических уравнений (2.2.13) в компонентах кватерниона, без процедуры нормализации и с нормализацией (2.6.2) на каждом шаге интегрирования. В качестве метода интегрирования выберем РЕСЕ-модификацию неявного метода Адамса 10-го порядка с постоянным шагом, равным $1/32$ от номинального периода вращения. На рис. Б.3 представлены ошибки интегрирования уравнений движения в трех упомянутых случаях. Вид-

но, что без процедуры нормализации кватерниона ошибка нарастает очень быстро. Однако, что любопытно, и с нормализацией, которая осуществляется после стадий предсказания и коррекции (модификация РМЕСМЕ, где М означает нормализацию), численное интегрирование оказывается менее эффективным, нежели интегрирование уравнений в углах Эйлера: в почти регулярном вращении последние изменяются почти линейно, в отличие от гармонически колеблющихся компонент кватерниона. Поднять эффективность здесь может помочь описанный в п. 2.6.3 прием типа Энке.

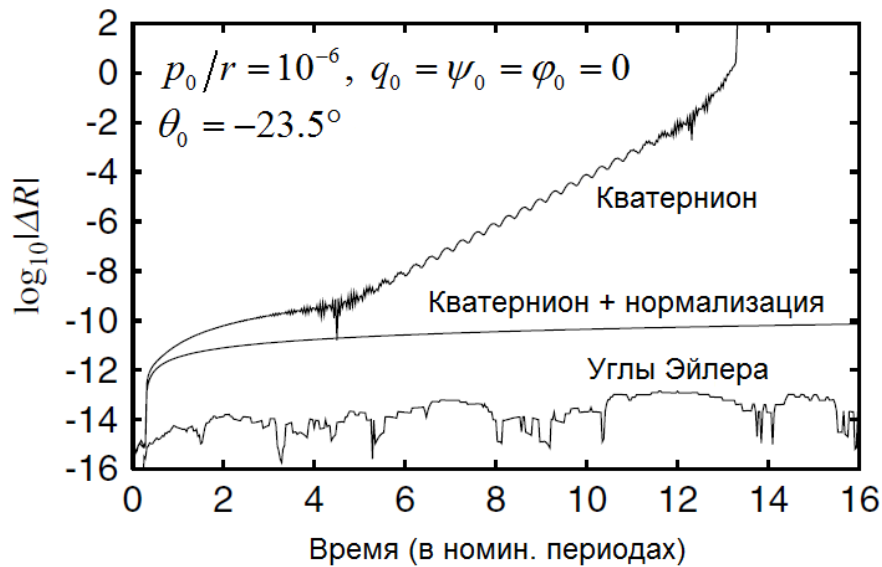


Рис. Б.3. Ошибка численного интегрирования уравнений в углах Эйлера, а также в кватернионах без нормализации и с нормализацией [40]

Покажем теперь, как меняются со временем ошибки численного интегрирования при использовании различных наборов переменных для моделирования произвольного углового движения. В табл. Б.1 приведены комбинации кинематических и динамических переменных, причем каждой из них соответствует определенный код. Буквой М, как и прежде, обозначена пошаговая нормализация кватерниона (2.6.2). На рис. Б.4 представлен ряд графиков роста ошибки интегрирования уравнений возмущенного углового движения трехосного астероида Ида при использовании переменных из табл. Б.1 [40]. Численный эксперимент показывает, что на небольших интервалах времени указанные в табл. Б.1 наборы переменных расположены по величине ошибки интегрирования в таком порядке: М3А < М3С ~ 3С < 2А < 4А < М3В ~ 3В < 1А < 1В < 1С. Однако на более длительных интервалах времени этот порядок значительно изменяется: М3А ~ 2А < 4А < 1А < М3С ~ 3С < М3В ~ 3В < 1С ~ 1В. Причина заключается в том, что в модификациях, использующих ССК-компоненты вектора угловой скорости в качестве динамических переменных, ошибка растет линейно со временем, а при другом выборе динамических переменных — квадратично. Отметим, кроме того, заметное превосходство самолетных углов над эйлеровыми.

Таблица Б.1. Наборы переменных для интегрирования углового движения

Код	Число переменных	Набор переменных
1A	6	$\psi, \theta, \varphi, p, q, r$
2A	6	$\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$
M3A	7	$q_0, q_1, q_2, q_3, p, q, r$
4A	12	$\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta, p, q, r$
1B	6	$\psi, \theta, \varphi, L_x, L_y, L_z$
3B	7	$q_0, q_1, q_2, q_3, L_x, L_y, L_z$
M3B	7	$q_0, q_1, q_2, q_3, L_x, L_y, L_z$
1C	6	$\psi, \theta, \varphi, d\psi/dt, d\theta/dt, d\varphi/dt$
3C	8	$q_0, q_1, q_2, q_3, dq_0/dt, dq_1/dt, dq_2/dt, dq_3/dt$
M3C	8	$q_0, q_1, q_2, q_3, dq_0/dt, dq_1/dt, dq_2/dt, dq_3/dt$

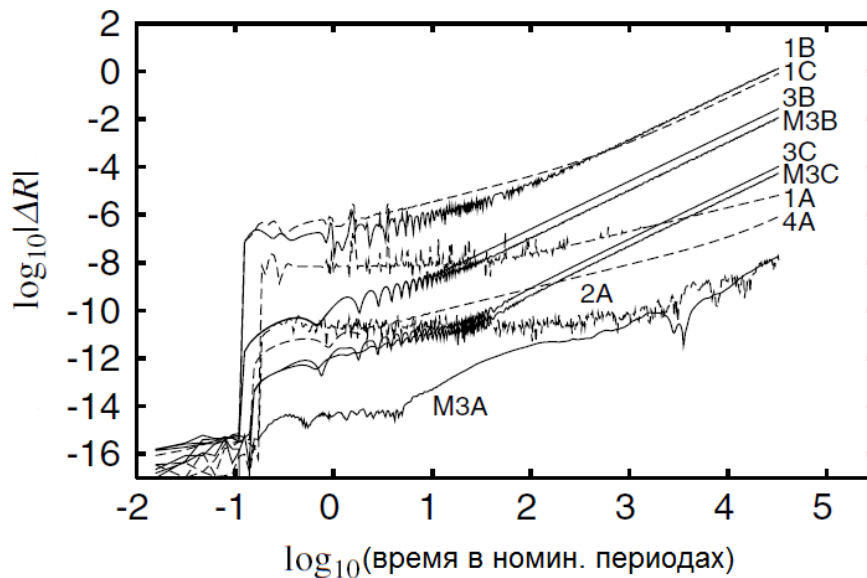


Рис. Б.4. Ошибки интегрирования уравнений углового движения астероида Ида, записанных через различные наборы переменных [40]

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ФОРМУЛЫ ПЕРЕХОДА МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ КООРДИНАТАМИ И СКОРОСТЯМИ И ЭЛЕМЕНТАМИ ОРБИТЫ

Для перехода от декартовых координат и скоростей (\mathbf{r}, \mathbf{v}) к классическим орбитальным элементам $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ предварительно вычислим кеплерову энергию

$$h = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (\text{B.1})$$

и орбитальный угловой момент

$$\mathbf{w} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (\text{B.2})$$

По ним находятся фокальный параметр и эксцентриситет:

$$p = \frac{\mathbf{w}^2}{\mu}, \quad (\text{B.3})$$

$$e = \sqrt{1 + 2h \frac{\mathbf{w}^2}{\mu^2}}. \quad (\text{B.4})$$

Большая полуось эллиптической орбиты ($h < 0$) задается как

$$a = -\frac{\mu}{2h}. \quad (\text{B.5})$$

Поскольку в геоэквиаториальной геоцентрической ИСК

$$\mathbf{w} \equiv \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} w \equiv \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} w, \quad (\text{B.6})$$

где $w = |\mathbf{w}|$, то для орбиты, отличной от экваториальной,

$$i = \arccos \left(\frac{w_z}{w} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\Omega = \arctg \left(-\frac{w_x}{w_y} \right) = \text{atan2} (w_x, -w_y). \quad (\text{B.8})$$

В последней формуле арктангенс вычисляется с помощью функции **atan2**, реализованной в основных языках программирования (FORTRAN, C/C++,

Java, Python, MATLAB, Mathematica). Она корректно определяет квадрант угловой переменной.

Чтобы рассчитать значение аргумента перицентра, нужно сначала получить истинную аномалию

$$\mathcal{G} = \text{atan2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{w}, 1 - \frac{r}{p} \right). \quad (\text{B.9})$$

и лишь затем имеем (с точностью до 2π):

$$\omega = \text{atan2} \left(z, \frac{(\mathbf{w} \times \mathbf{r})_z}{w} \right) - \mathcal{G} = \text{atan2} \left(z, \frac{yw_x - xw_y}{w} \right) - \mathcal{G}. \quad (\text{B.10})$$

Выражение для эксцентрической аномалии похоже на (B.9):

$$E = \text{atan2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mu a}}, 1 - \frac{r}{a} \right). \quad (\text{B.11})$$

По эксцентрической аномалии определяется средняя аномалия и ее значение на начальную эпоху t_0 :

$$M = E - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mu a}}, \quad (\text{B.12})$$

$$M_0 = M - n(t - t_0). \quad (\text{B.13})$$

Здесь $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$ привычно обозначает среднее движение.

Первый этап обратного преобразования от классических орбитальных элементов к декартовым координатам и скоростям заключается в решении уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \equiv M_0 + n(t - t_0). \quad (\text{B.14})$$

Наиболее простым и эффективным способом считается метод Ньютона

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n}, \quad E_0 = M + e \sin M, \quad (\text{B.15})$$

обеспечивающий сходимость к решению за две-три итерации. Геоцентрические положение и скорость КА находятся из соотношений

$$\mathbf{r} = a \left[\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} (\cos E - e) + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \sqrt{1 - e^2} \sin E \right], \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\sqrt{\mu/a}}{1 - e \cos E} \left[- \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \sin E + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \sqrt{1 - e^2} \cos E \right], \quad (\text{B.17})$$

где

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \cos i \sin \Omega \sin \omega \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos i \cos \Omega \sin \omega \\ \sin i \sin \omega \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \cos i \sin \Omega \cos \omega \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos i \cos \Omega \cos \omega \\ \sin i \cos \omega \end{pmatrix}.$$

Заметим между прочим, что, вместе с вектором, введенным в (В.6), векторы (В.18) образуют матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

связывающую две геоцентрических ИСК: перифокальную¹ и геоэкваториальную.

Приведем теперь формулы, описывающие переход между декартовыми координатами и скоростями и равноденственными элементами

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2), \quad L = \mathcal{G} + \omega + j\Omega = u + j\Omega, \\ e_x &= e \cos(\omega + j\Omega), \quad e_y = e \sin(\omega + j\Omega), \\ i_x &= \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2} \right)^j j \cos \Omega, \quad i_y = \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2} \right)^j \sin \Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

где j – ретроградный фактор:

$$j = \begin{cases} +1, & 0 \leq i \leq \pi/2, \\ -1, & \pi/2 < i \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

¹Перифокальной называют инерциальную систему координат, первая и третья оси которой направлены в перицентр и вдоль вектора орбитального углового момента соответственно, а вторая лежит в плоскости орбиты, дополняя систему до правой.

Фокальный параметр вычисляется из соотношения (В.3) с использованием вектора орбитального углового момента (В.2). Столь же просто находятся элементы i_x и i_y :

$$i_x = -\frac{j w_y}{w + j w_z}, \quad (\text{В.22})$$

$$i_y = \frac{w_x}{w + j w_z}. \quad (\text{В.23})$$

Здесь $j = \text{sgn}(w_z)$. При $w_z = 0$ полагаем для определенности $j = 1$.

Для определения значений элементов e_x и e_y нам понадобится вектор Лапласа

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{\mu}{r} \mathbf{r} = \left(\mathbf{v}^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}, \quad (\text{В.24})$$

и еще два вектора, \mathbf{f} и \mathbf{g} , введенные покомпонентно согласно формулам

$$\begin{aligned} f_x &= w - \frac{w_x^2}{w + j w_z}, \\ f_y &= -\frac{j w_x w_y}{w + j w_z}, \\ f_z &= -j w_x \end{aligned} \quad (\text{В.25})$$

и

$$\begin{aligned} g_x &= j f_y, \\ g_y &= j \left[w - \frac{w_y^2}{w + j w_z} \right], \\ g_z &= -w_y. \end{aligned} \quad (\text{В.26})$$

Тогда

$$e_x = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}}{w \mu}, \quad (\text{В.27})$$

$$e_y = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}}{w \mu}. \quad (\text{В.28})$$

Истинная долгота задается выражением

$$L = \text{atan2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}). \quad (\text{B.29})$$

Если необходимо, можно вычислить большую полуось орбиты

$$a = \frac{p}{1 - e_x^2 - e_y^2}, \quad (\text{B.30})$$

эксцентрическую долготу

$$F = \text{atan2}\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mu a}}, 1 - \frac{r}{a}\right) + \text{atan2}(e_y, e_x) \quad (\text{B.31})$$

и среднюю долготу

$$\lambda \equiv M + \omega + j\Omega = F + e_y \cos F - e_x \sin F. \quad (\text{B.32})$$

Последнее соотношение служит для равноденственных элементов орбиты аналогом уравнения Кеплера.

Перейдем к обратному преобразованию от равноденственных элементов к декартовым координатам и скоростям. Оно начинается расчетом уже знакомых нам векторов \mathbf{f} и \mathbf{g} :

$$\mathbf{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{pmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 \\ 2j i_x i_y \\ -2j i_y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{g} = \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{pmatrix} 2i_x i_y \\ j(1 - i_x^2 + i_y^2) \\ 2j i_x \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

Геоцентрические положение и скорость КА находятся по формулам

$$\mathbf{r} = \frac{\sqrt{p/\mu}(\mathbf{f} \cos L + \mathbf{g} \sin L)}{1 + e_x \cos L + e_y \sin L}, \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{v} = \frac{e_x + \cos L}{p} \mathbf{g} - \frac{e_y + \sin L}{p} \mathbf{f}. \quad (\text{B.36})$$

Отметим, что нормированные векторы

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{w}, \quad \hat{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}}{w}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{w} \quad (\text{B.37})$$

образуют базис *равноденственной системы координат*, выполняющей по отношению к равноденственным элементам орбиты ту же роль, что пери-

фокальная СК – по отношению к классическим элементам: первые две оси определяют главную плоскость – плоскость орбиты КА, угол направления в которой отсчитывается от первой оси в сторону второй. Положение третьей оси (нормали к главной плоскости) описывается в пространстве двумя углами-элементами. Еще один, линейный, орбитальный элемент характеризует размер оскулирующего кеплерова эллипса, и наконец, последние два элемента задают его форму и ориентацию в главной плоскости.

Зачастую состояние КА в начальный и/или конечный момент времени требуется задать в форме классических элементов орбиты, даже если сама процедура численного интегрирования уравнений орбитального движения проводится в равноденственных элементах. Тогда не обойтись без формул перехода между классическими и равноденственными элементами. Чтобы осуществить прямое преобразование, достаточно воспользоваться определением равноденственных элементов (В.20). Для обратного же преобразования применяют, помимо (В.30), следующий набор выражений:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \quad (\text{В.38})$$

$$i = \frac{\pi}{2}(1 - j) + 2j \operatorname{arctg}\left(\sqrt{i_x^2 + i_y^2}\right), \quad (\text{В.39})$$

$$\Omega = \operatorname{atan2}(i_y, j i_x), \quad (\text{В.40})$$

$$\omega = \operatorname{atan2}(e_y, e_x) - j\Omega, \quad (\text{В.41})$$

$$g = L - \omega - j\Omega, \quad (\text{В.42})$$

$$E = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{g}{2}\right), \quad (\text{В.43})$$

$$M = E - e \sin E. \quad (\text{В.44})$$

Значение средней аномалии M_0 на начальную эпоху t_0 можно вычислить по формуле (В.13).

Напомним еще раз, что для простоты возможно считать ретроградный фактор j тождественно равным единице. Все вышеприведенные формулы остаются при этом верны – достаточно лишь подставить $j = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levi-Civita, T. Sur la Régularisation du Problème des Trois Corps // Acta Math. 1920. Vol. 42. P. 99–144.
2. Sundman, K.F. Mémoire sur le Problème des Trois Corps // Acta Math. 1912. Vol. 36. P. 105–179.
3. Janin, G., Bond, V.R. The Elliptic Anomaly, NASA Technical Memorandum 58228. 1980. 15 p.
4. Nacozy, P. The Intermediate Anomaly // Celest. Mech. 1977. Vol. 16, No. 3. P. 309–313.
5. Brumberg, E.V. Length of Arc as Independent Argument for Highly Eccentric Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1992. Vol. 53, No. 4. P. 323–328.
6. Stiefel, E., Scheifele, G. Linear and Regular Celestial Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1971. 301 p.
7. Szebehely, V., Bettis, D.G. Recent Developments of Integrating the Gravitational Problem of N Bodies // Astrophys. Space Sci. 1971. Vol. 13, No. 2. P. 365–376.
8. Nacozy, P. The Use of Integrals in Numerical Integration of N-Body Problem // Astrophys. Space Sci. 1971. Vol. 14, No. 1. P. 40–51.
9. Sperling, H. Computation of Keplerian Conic Sections // Am. Rocket Soc. J. 1961. Vol. 31, No. 5. P. 660–661.
10. Burdet, C.A. Regularization of the Two Body Problem // Zeitschrift für Angew. Math. und Phys. 1967. Vol. 18, No. 3. P. 434–438.
11. Burdet, C.A. Theory of Kepler Motion: The General Perturbed Two Body Problem // Zeitschrift für Angew. Math. und Phys. 1968. Vol. 19, No. 2. P. 345–368.
12. Kustaanheimo, P., Stiefel, E. Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Regularization // J. für die Reine und Angew. Math. 1965. Vol. 218. P. 204–219.
13. Yoshida, H. A New Derivation of the Kustaanheimo-Stiefel Variables // Celest. Mech. 1982. Vol. 28, No. 1-2. P. 239–242.
14. Baumgarte, J., Stiefel, E. Stabilization by Manipulation of the Hamiltonian // Celest. Mech. 1974. Vol. 10, No. 1. P. 71–85.
15. Baumgarte, J., Stiefel, E. Stabilization of Differential Equations by Introduction of a Modified Hamiltonian // Mech. Res. Commun. 1974. Vol. 1, No. 1. P. 49–50.

16. Sigrist, N. Restricted Liapunov Stability and Stabilization of Ordinary Differential Equations // *J. Appl. Math. Phys.* 1974. Vol. 25. P. 37–46.
17. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Изд. 5-е, стереотип. М.: УРСС, 2003. 416 с.
18. Baumgarte, J. Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion // *Celest. Mech.* 1972. Vol. 5, No. 4. P. 490–501.
19. Baumgarte, J. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems // *Comput. Methods Appl. Math. Eng.* 1972. Vol. 1, No. 1. P. 1–16.
20. Avdyushev, V.A. Numerical Stabilization of Orbital Motion // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2003. Vol. 87, No. 4. P. 383–409.
21. Fukushima, T. Efficient Orbit Integration by Scaling for Kepler Energy Consistency // *Astron. J.* 2003. Vol. 126, No. 2. P. 1097–1111.
22. Liu, L., Liao, X. On Several Problems in the Numerical Integration of Celestial Orbits // *Chinese Astron. Astrophys.* 1988. Vol. 12, No. 1. P. 26–33.
23. Fukushima, T. Efficient Orbit Integration by Dual Scaling for Consistency of Kepler Energy and Laplace Integral // *Astron. J.* 2003. Vol. 126, No. 5. P. 2567–2573.
24. Fukushima, T. Efficient Orbit Integration by Scaling and Rotation for Consistency of Kepler Energy, Laplace Integral, and Angular Momentum Direction // *Astron. J.* 2003. Vol. 126, No. 6. P. 3138–3142.
25. Fukushima, T. Efficient Integration of Highly Eccentric Orbits by Scaling Methods Applied to Kustaanheimo-Stiefel Regularization // *Astron. J.* 2004. Vol. 128, No. 6. P. 3114–3122.
26. Fukushima, T. Efficient Integration of Highly Eccentric Orbits by Quadruple Scaling for Kustaanheimo-Stiefel Regularization // *Astron. J.* 2004. Vol. 128, No. 6. P. 3108–3113.
27. Encke, J.F. Über eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen // *Astron. Nachrichten.* 1852. Vol. 33. P. 377–398.
28. Vigo-Aguiar, J., Ferrandiz, J.M., Simos, T.E. Encke Methods Adapted to Regularizing Variables // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2000. Vol. 15, No. 25. P. 3993–4010.
29. Bordovitsyna, T.V., Avdyushev, V.A., Chernitsov, A.M. New Trends in Numerical Simulation of the Motion of Small Bodies of the Solar System // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2001. Vol. 80, No. 4. P. 227–247.
30. Kyner, W.T., Bennett, M.M. Modified Encke Special Perturbation Method // *Astron. J.* 1966. Vol. 71, No. 7. P. 579–582.

31. Born, G.H. An Encke-type Special Perturbation Method // *Celest. Mech.* 1970. Vol. 2, No. 1. P. 103–113.
32. Kaula, W.M. *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, 1966. 124 p.
33. Arsenault, J.L., Ford, K.C., Koskela, P.E. Orbit Determination Using Analytic Partial Derivatives of Perturbed Motion // *AIAA J.* 1970. Vol. 8, No. 1. P. 4–12.
34. Broucke, R.A., Cefola, P.J. On the Equinoctial Orbit Elements // *Celest. Mech.* 1972. Vol. 5, No. 3. P. 303–310.
35. Fukushima, T. Further Simplification of the Manifold Correction Methods for Orbit Integration // *Astron. J.* 2004. Vol. 128, No. 3. P. 1446–1454.
36. Hughes, P.C. *Spacecraft Attitude Dynamics*. Dover Publications, 2004. 592 p.
37. Wertz, J.R. *Spacecraft Attitude determination and control*. Dordrecht/Boston, London: Acad. press, 1990. 863 p.
38. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. М: Наука, 1973. 320 с.
39. Айзерман М.А. *Классическая механика*. М.: Наука, 1980. 368 с.
40. Fukushima, T. Simple, Regular, and Efficient Numerical Integration of Rotational Motion // *Astron. J.* 2008. Vol. 135, No. 6. P. 2298–2322.
41. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Московского университета, 1975. 308 с.
42. Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твёрдого тела*. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика,” 2001. 384 с.
43. Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. New York: Springer, Springer Series in Computational Mathematics, 2nd revised ed., 1993. 528 p.
44. Everhart, E. A New Method for Integrating Orbits // *Bull. Am. Astron. Soc.* 1973. Vol. 5. P. 389.
45. Everhart, E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // *Celest. Mech.* 1974. Vol. 10. P. 35–55.
46. Everhart, E. An Efficient Integrator that Uses Gauss-Radau Spacings // *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*. Proceedings of the 83rd Colloquium of the International Astronomical Union, Held in Rome, Italy, 11–15 June 1984. Astrophysics and Space Science Library, Vol. 115 / ed. Valsecchi, G.B., Carusi, A. Springer Netherlands, 1985. P. 185–202.

47. Авдюшев В.А. Численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (курс лекций). Томск, 2009. 52 с.
48. Платонов А.К., Власова З.П., Степаньянц В.А. Многоточечный метод интегрирования с переменным шагом для обыкновенных дифференциальных уравнений // Препринт ИПМ АН СССР. 1976. Т. 72. 18 с.
49. Stoermer, C. Sur les trajectoires des corpuscules électrisés // Arch. des Sci. Phys. Nat. 1907. Vol. 24. P. 5–18, 113–156, 221–247.
50. Cowell, P.H., Crommelin, A.C.D. Investigation of the motion of Halley's comet from 1759 to 1910. Edinburg: Neill & Co., 1910. 84 p.
51. Oevel, W., Sofroniou, M. Symplectic Runge-Kutta schemes, II: Classification of symmetric methods. 1998. 47 p.
52. Таратынова Г.П. Методы численного интегрирования для решения уравнений в конечных разностях и их применение к расчетам орбит искусственных спутников Земли // Сб. "Искусственные спутники Земли." 1960. Т. 4. С. 56–81.
53. Calvo, M. et al. Approximate compositions of a near identity map by multi-revolution Runge-Kutta methods // Numer. Math. 2004. Vol. 97, No. 4. P. 635–666.
54. Calvo, M., Montijano, J.I., Rández, L. On explicit multi-revolution Runge-Kutta schemes // Adv. Comput. Math. 2007. Vol. 26, No. 1-3. P. 105–120.
55. Graf, O.F. Multirevolution Methods for Orbit Integration // Proceedings of the Conference on the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, 19-20 October 1972, The University of Texas at Austin. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 362. Springer Berlin Heidelberg, 1974. Vol. 362. P. 471–490.
56. Graf, O.F., Bettis, D.G. Modified multirevolution integration methods for satellite orbit computation // Celest. Mech. 1975. Vol. 11, No. 4. P. 443–448.
57. Mace, D., Thomas, L.H. An extrapolation formula for stepping the calculation of the orbit of an artificial satellite several revolutions ahead at a time // Astron. J. 1960. Vol. 65, No. 5. P. 300–303.
58. Petzold, L.R. An efficient numerical method for highly oscillatory ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1981. Vol. 18, No. 3. P. 455–479.
59. Gear, C.W., Gallivan, K.A. Automatic methods for highly oscillatory ordinary differential equations // Numerical Analysis. Proceedings of the 9th Biennial Conference Held at Dundee, Scotland, June 23–26, 1981. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 912. Springer Berlin Heidelberg, 1982.

- Vol. 912. P. 115–124.
60. Gear, C.W. Automatic detection and treatment of oscillatory and/or stiff ordinary differential equations // Numerical Integration of Differential Equations and Large Linear Systems. Proceedings of two Workshops Held at the University of Bielefeld Spring 1980. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 968. Springer Berlin Heidelberg, 1982. P. 190–206.
 61. Марин С.Ф., Сазонов В.В. Численное интегрирование дифференциальных уравнений небесной механики двухцикловым методом // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1993. Т. 59. 14 с.
 62. Woodburn, J., Tanygin, S. Efficient Numerical Integration of Coupled Orbit and Attitude Trajectories Using an Encke Type Correction Algorithm // AAS 01-428. 2001. 12 p.
 63. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
 64. Shampine, L.F., Thompson, S. Event location for ordinary differential equations // Comput. Math. with Appl. 2000. Vol. 39, No. 5-6. P. 43–54.
 65. Carver, M.B. Efficient Integration over Discontinuities in Ordinary Differential Equation Simulations // Math. Comput. Simul. 1978. Vol. 20, No. 3. P. 190–196.
 66. Mannshardt, R. One-step methods of any order for ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides // Numer. Math. 1978. Vol. 31, No. 2. P. 131–152.
 67. Zennaro, M. Natural Continuous Extensions of Runge-Kutta Methods // Math. Comput. 1986. Vol. 46, No. 173. P. 119–133.
 68. Авдюшев В.А. Методы теории специальных возмущений в небесной механике II. Сравнительный анализ численной эффективности // Известия высших учебных заведений. Физика. 2007. Т. 50, № 1. С. 78–86.
 69. Рой А. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**
аналитическая смена шага интегрирования 8
- Б**
билинейное соотношение 18, 19
- В**
вектор Лапласа 13, 14, 29, 32, 96, 105
верзор (единичный кватернион) 46-50, 52, 60
вложенные методы Рунге-Кутты – см. *методы Рунге-Кутты*
временное преобразование 8, 23
временное уравнение 11
временной элемент 11-13, 19, 31, 32, 38, 39, 94
- Г**
гамильтониан – см. *функция Гамильтона*
гамильтоновы системы 62, 78-81, 84
гарантированный множитель 66
- Д**
динамические переменные – см. *переменные углового движения*
динамические уравнения Эйлера 40, 50-53, 60, 61
- Ж**
жесткие системы уравнений 88, 95
- И**
инерциальная система координат – см. *системы координат*
интегрирование с выходом на ограничение 6, 62, 90, 91
интерполяционный полином Ньютона 69, 73
истинная долгота (в орбите) 37, 38, 96
- К**
KS-матрица 17, 19
KS-переменные 19, 29, 31, 32, 96, 97
KS-преобразование – см. *преобразование Кустаанхеймо-Штифеля*
канонические системы – см. *гамильтоновы системы*
канонические угловые переменные – см. *переменные Эйлера*
канонические уравнения 20, 40, 55, 81
канонический вид (уравнений) 20, 56
каноническое преобразование 21
кватернионное описание углового движения 46, 58
кеплерова энергия 6, 12, 13, 21-29, 32, 102
кинематические переменные – см. *переменные углового движения*
кинематические уравнения 40, 43, 45, 49, 50, 52, 57, 58, 60, 98, 99
классические орбитальные элементы – см. *орбитальные элементы*
классический метод Рунге-Кутты – см. *методы Рунге-Кутты*
компоненты
– вектора кинетического момента 40, 50, 59
– вектора угловой скорости 43, 45, 49, 51-53, 59, 60, 94, 100
– кватерниона 40, 46-50, 52, 58-60, 93, 99, 100
конечные разности 69
корректор 76

Л

локальная погрешность 64-66, 77
 ляпуновская неустойчивость 8, 22, 30, 31
 ляпуновская устойчивость 20, 23

М

масштабирование
 – двойное 28, 29
 – одинарное (простое) 28, 29, 59
 – по большой полуоси 29
 масштабирующий множитель 8, 9, 11, 13, 23, 25
 матрица Бутчера 63
 матрица Леви-Чивиты 15, 17
 матрица направляющих косинусов 40-44, 46, 47, 49, 50, 53, 54, 56, 58, 60
 метод Лобатто ША 89
 метод проекций Накози 27
 метод Радо IA 89
 методы Рунге-Кутты
 – вложенные 65-67
 – Дормана-Принса 5(4) 66
 – классический 64, 98
 – непрерывные 93
 – неявные 63, 68, 82, 83, 88
 – Фельберга 4(5) 67
 – явные 63, 85, 86
 методы Розенброка 89
 методы стабилизации
 – диссипативный Баумгарта 20, 24, 29, 96
 – консервативный Баумгарта 20
 – траекторной коррекции 20, 26, 29, 49, 59, 94
 метод Эверхарта 68, 72, 74, 96
 метод Эйлера-Лагранжа (вариации параметров) 33
 метод Энке 29, 31, 32, 39, 60, 61, 88, 94, 96, 97, 100
 многооборотные методы интегрирования 84-87, 90

многошаговые методы

- Адамса 73-76, 92, 99
- Адамса-Башфорта 74, 77
- Адамса-Мультона 74, 77
- Коуэлла 73, 77, 78
- неявные 73-76
- Штермера 73, 77, 78
- явные 73-75

Н

непрерывные методы Рунге-Кутты
 – см. *методы Рунге-Кутты*
 неустойчивость по Ляпунову – см. *ляпуновская неустойчивость*

О

обобщенная аномалия 11, 31, 38
 обобщенные (канонические) импульсы 79
 обобщенные координаты 57, 79
 опорная (промежуточная) орбита 30-32, 39, 88, 94
 орбитальные элементы
 – классические 6, 33, 34, 38, 102, 103, 107
 – равноденственные 6, 37, 38, 94, 104, 106, 107
 оскулирующие элементы 6, 40, 54, 55, 57
 отображение Пуанкаре – см. *Пуанкаре отображение*

П

первый интеграл 18, 21, 32, 57, 79, 98
 переменные Андуайе-Депри 55-57
 переменные Белецкого-Черноусько 54, 55, 57
 переменные действие-угол 20, 21, 94
 переменные углового движения
 – динамические 40, 50-52, 59, 100

– кинематические 40, 50, 52, 54, 58-60, 94, 100
 переменные Эйлера 55, 56
 планетные уравнения Лагранжа 34-36
 порядок (метода интегрирования) 64-66, 68, 72, 76, 77, 81-84, 86, 87, 89, 90, 93, 96, 99
 поток гамильтоновой системы 81, 82
 правило Рунге 65
 предиктор 69, 76
 преобразование Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование) 15, 17-19
 преобразование Леви-Чивиты 15-18
 преобразование Сундмана 9, 11, 13
 преобразование Шперлинга-Бюрде 8, 13, 15, 20
 прием Энке – см. *метод Энке*
 промежуточная аномалия – см. *эллиптическая аномалия*
 Пуанкаре отображение 85-87, 90
 Пуанкаре теорема 81

Р

равноденственные орбитальные элементы – см. *орбитальные элементы*
 разбиение Гаусса-Лобатто 72
 разбиение Гаусса-Радо 96
 разложение Каулы 34
 разности назад 75, 78, 90
 регуляризация 7-9, 15, 97
 ретроградный фактор 37, 38, 104, 107

С

самолетные углы 40, 44, 45, 48, 50, 52, 57, 58, 100
 самостартующий метод 76, 93
 связанная система координат – см. *системы координат*

сглаживающее преобразование – см. *временное преобразование*
 симплектическая форма 79, 80
 симплектические методы интегрирования 62, 78, 79, 81-84, 94
 – неявный средней точки 83
 – Рунге-Кутты четвертого порядка 83
 – Рунге-Кутты шестого порядка 84
 – Штермера-Верле 82
 – Эйлера 82
 симплектическое отображение 80
 симплектическое преобразование 80, 81
 системы координат
 – инерциальная (ИСК) 7, 40, 41, 43, 45, 46, 50, 54, 58, 98, 102, 104
 – связанная (ССК) 40-46, 49-51, 56, 59, 60, 94, 98, 100
 – равноденственная 106

событие 91-93

специальные канонические переменные – см. *переменные Андуйе-Депри*

стабилизация 7, 8, 13, 20, 22, 24, 26, 29, 94, 96, 97

стабилизирующий множитель 23

стабилизирующий параметр 25

стадия (метода интегрирования) 63, 67, 76, 86, 100

стартовые значения (многошагового метода) 76, 77

Т

таблица Бутчера 63-65, 67, 68, 83, 84, 86, 89

теорема Пуанкаре – см. *Пуанкаре теорема*

У

углы

– крена 44

- нутации 41, 57, 58, 98, 99
- прецессии 41, 57
- рыскания 44
- собственного вращения 41, 57, 58
- тангажа 44
- углы самолетные – см. *самолетные углы*
- углы Эйлера 40-42, 45, 47, 48, 50, 52, 54, 55, 57, 58, 94, 98-100
- уравнения Гаусса в вариациях 36
- уравнения Лагранжа – см. *планетные уравнения Лагранжа*
- условие нормировки кватерниона 46, 47, 49, 59
- условия порядка (методов Рунге-Кутты) 87
- устойчивость по Ляпунову – см. *ляпуновская устойчивость*

Ф

- фиктивное время 8-11, 15, 23, 25, 29, 90
- формулы дифференцирования назад (ФДН) 89, 90, 92
- формы записи уравнений
 - вариации элементов орбиты 8, 32-34, 37, 38, 96
 - Коуэлла 8, 29, 96
 - Энке 8, 29, 30, 96
- функция Гамильтона 20-22, 24, 26, 56, 79, 81-84
- функция событий 91-92

Э

- Эйлера-Пуансо свободное (невозмущенное) движение 5, 53, 57, 60
- эксцентрическая долгота 39, 94, 106
- элементарные повороты 41
- элементы орбиты – см. *орбитальные элементы*
- эллиптическая аномалия 10
- Энке метод – см. *метод Энке*

Для заметок

Учебное пособие

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОРБИТАЛЬНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Авторы: ИВАНОВ Данил Сергеевич
ТРОФИМОВ Сергей Павлович
ШИРОБОКОВ Максим Геннадьевич

Под редакцией: ОВЧИННИКОВА Михаила Юрьевича