



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем звезд солнечного типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем звезд солнечного типа. Аналитический обзор избранных трудов. К 90-летию со дня рождения Алексея Валерьевича Забродина / В.Т.Жуков, Е.А.Забродина, М.С.Легкоступов, К.В.Мануковский, И.С.Меньшов, Л.А.Плинер, Л.Г.Страховская. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2023. 220 с.

<https://doi.org/10.20948/2023-z90>

<https://keldysh.ru/e-biblio/z90/>



*К 90-летию
со дня рождения
А.В. Забродина*

**Гравитационная неустойчивость
и образование планетных систем
звезд солнечного типа**

К 90-летию со дня рождения А.В. Забродина

**ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
И ОБРАЗОВАНИЕ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ
ЗВЕЗД СОЛНЕЧНОГО ТИПА**

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ

**ИПМ им. М.В. Келдыша
Москва – 2023**

УДК 519.6; 523-52
ББК 22.19; 22.253; 22.654
Г 75

Г75 Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем звезд солнечного типа. Аналитический обзор избранных трудов / В.Т. Жуков, Е.А. Забродина, М.С. Легкоступов, К.В. Мануковский, И.С. Меньшов, Л.А. Плинер, Л.Г. Страховская. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2023. — 220 с.
ISBN 978-5-98354-069-9

В аналитическом обзоре избранных трудов (далее – аналитический обзор или обзор) представлены результаты теоретических исследований по разработке модели образования планетных систем, включая и их спутники, для звезд солнечного типа – модели газопылевых колец. В основе этой модели лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (газопылевых колец) в протопланетных дисках звезд, а впоследствии и в протоспутниковых дисках. В аналитическом обзоре приведены результаты сравнения основных теорий и моделей образования планетных систем звезд солнечного типа с данными астрофизических наблюдений протопланетных дисков. Показано, что данные астрофизических наблюдений наиболее полное обоснование находят в модели газопылевых колец. В этой модели на стадии образования протопланетных колец дан теоретический прогноз по астрофизическим наблюдениям эволюции структур газопылевых колец для ряда протопланетных дисков звезд. Сформулированы предложения по дальнейшей разработке численных алгоритмов эволюции протопланетных дисков звезд солнечного типа, включающей все стадии эволюции, в том числе и образование протопланет.

Рецензент д.ф.-м.н. М.П.Галанин

Вступительное слово

Предлагаемый читателю аналитический обзор большой серии научных трудов посвящается памяти Алексея Валериевича Забродина в связи с приближающимся 14 декабря 2023 года девяностолетием со дня его рождения. Вся его творческая жизнь неразрывно связана с Институтом прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской Академии Наук, порог которого он впервые переступил в 1954 году в процессе студенческой практики. По окончании механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в 1956 году он работал в ИПМ до конца жизни в качестве научного сотрудника, ученого секретаря Института, заведующего отделом и заместителя директора. В 2000 году Алексей Валериевич был избран членом-корреспондентом Российской Академии Наук. В 2004 году он по совместительству стал заведовать кафедрой вычислительной механики механико-математического факультета МГУ. Преждевременная кончина 28 сентября 2008 года застала Алексея Валериевича в Абрау-Дюрсо под Новороссийском, где под его руководством проходила традиционная Всероссийская школа-конференция по разработке и теоретическим основам численных методов памяти К.И. Бабенко.

Вклад в науку, внесённый А.В. Забродиным и возглавляемыми им коллективами, составляют работы по созданию современной вычислительной газодинамики с ее актуальными приложениями к атомному проекту, задачам обтекания, необходимым в развитии аэрокосмической техники, к математическим моделям процессов в сферических и цилиндрических термоядерных мишенях, облучаемых высокоэнергетическими пучками тяжёлых ионов.

Забродиным А.В. предложены и разработаны вычислительные алгоритмы, адаптирующиеся к геометрическим конфигурациям, структуре и гладкости решений и сохраняющие групповые свойства исходной дифференциальной задачи. С использованием разработанных методов совместно с КБ им. П. О. Сухого проведено расчетное аэродинамическое сопровождение проектирования самолетов семейства Су-27; выполнены важные исследования по изучению процессов распространения по системе каналов сильных волн, их трансформации и воздействию на защитные преграды.

По инициативе и при участии А.В. Забродина проведены комплексные исследования по разработке многопроцессорных вычислительных систем и параллельным вычислительным технологиям.

На их основе разработаны, созданы и эксплуатируются в Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН и ИПМ высокопроизводительные вычислительные комплексы.

Не остался без внимания и общеинтересный круг вопросов, относящихся к происхождению и эволюции планетных систем и в первую очередь – солнечной системы, к которой принадлежит обитаемая нами планета Земля. Работам на эту тему, начиная с Канта и Лапласа, и в первую очередь математическим моделям относящихся сюда процессов, посвящен данный обзор. Основное внимание уделено модели образования планетных систем и спутников – модели газопылевых колец, образующихся из вращающегося вокруг центральной звезды протопланетного диска. Интерес к этой тематике в ИПМ был инициирован Тимуром Магометовичем Энеевым и впоследствии поддержан Эриком Михайловичем Галимовым, возглавлявшим в течение ряда лет соответствующие программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

С начала нового века работы по моделированию и расчетам планетных систем велись в коллективе авторов, возглавлявшимся А.В. Забродиним. Их содержание кратко сформулировано в заглавии обзора: образование планет обязано неустойчивости и разрушению протопланетного диска, вращающегося вокруг Солнца. Результаты этих работ публиковались главным образом в отчетах по программе Президиума РАН, препринтах ИПМ и реже – в научных журналах. В связи с этим составленный группой авторов аналитический обзор должен представить большой интерес, так как даст возможность ознакомиться с большим объемом результатов, собранных и прокомментированных в одном издании. Основной труд по написанию обзора выполнен М.С. Легкоступовым.

К.В. Брушлинский

Введение

Построение адекватной теории (модели) образования планетных систем звезд солнечного типа является важной и актуальной проблемой вплоть до настоящего времени. Решение этой проблемы может дать ценные сведения для разных научных направлений: от наук о Земле и прогнозов по дальнейшей эволюции Солнечной системы до космогонии планетных систем других звезд, например, один из многочисленных примеров - обитаемость экзопланет. Поэтому в мировой научной литературе были затрачены значительные усилия, чтобы разработать физические и математические модели образования планетных систем звезд солнечного типа.

В данном аналитическом обзоре рассматривается сложная и актуальная проблема эволюции протопланетного диска звезды солнечного типа: приведены результаты математического моделирования эволюции протопланетного диска, которые включают как численное моделирование, так и аналитические исследования с учетом влияния крупномасштабных гравитационных неустойчивостей; представлены результаты аналитического обзора современных астрофизических исследований и их сравнение с полученными результатами исследований.

Основной целью обзора является описание разработки адекватной модели образования планетных систем звезд солнечного типа, в основе которой лежит фундаментальный принцип гравитационной неустойчивости, приводящий к образованию протопланетных и протоспутниковых газопылевых колец и далее планет и их спутников.

В работах [1–14] были представлены результаты теоретических исследований по разработке новой модели образования планет, вращающихся вокруг звезды солнечного типа – модели протопланетных колец, которая является альтернативной моделью по отношению к общепризнанной модели (теории) аккумуляции планет из твердых тел и частиц (модели твердотельной аккумуляции) [15, 16]. В основе представленной модели лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (протопланетных колец) в протопланетном диске звезд [3, 14].

В работе [17] основополагающие принципы модели протопланетных колец были распространены на образование регулярных спутников планет. На основе этих принципов была предложена полная модель образования планетных систем, включая и их спутники, для звезд солнечного типа - модель газопылевых колец.

В настоящее время является общепризнанным, что космогония планетных систем была научно сформулирована И. Кантом и П.С. Лапласом, которые опубликовали свои гипотезы о происхождении Солнечной системы более 200 лет назад [18, 19]. За это время было предложено большое количество различных альтернативных

космогонических гипотез и теорий образования, как Солнечной планетной системы, так и планетных систем звезд солнечного типа. Необходимость в понимании и анализе полученных результатов привела к изданию ряда обзоров, в которых излагается история космогонии и подробно анализируются предлагаемые гипотезы [15, 16]. Приступая к изложению материала данного аналитического обзора, представляется целесообразным остановиться, прежде всего, на основных принципах развития космогонии планетных систем, как области науки, относящейся к естественным наукам.

Как известно [20], законы естественных наук, в том числе и законы космогонии планетных систем, описываются на языке математики. Математика является замкнутой в себе наукой и развивается независимо от внешних факторов путем теоретических исследований на основе принятых аксиом. В математике истинность теоремы отождествляется с доказуемостью её из непротиворечивой системы предпосылок (аксиом). Вопрос об адекватности математических моделей реальным объектам или явлениям всегда находится за пределами математики в области естественных наук. Но, в отличие от математики, естественные науки развиваются совершенно другим образом, а именно: путем взаимосопоставления экспериментальных исследований и теоретических исследований объектов или явлений природы на основе полученных результатов экспериментов (эксперимент \rightarrow теория \rightarrow теоретический прогноз \rightarrow эксперимент) [21]. Существенным обстоятельством является то, что критерием истины в естественных науках является опыт, эксперимент [21], а для космогонии планетных систем критерием истины являются результаты астрофизических наблюдений, а также результаты экспериментальных исследований с помощью космических аппаратов.

Экспериментальные исследования в области космогонии планетных систем имеют свои особенности [22]. В отличие от физики, в основе которой лежит эксперимент, связанный с произвольным изменением условий протекания явления, астрофизика основывается на наблюдениях, когда исследователь не имеет возможности влиять на ход физического процесса. При этом временной интервал, например, эволюции звезд и их планетных систем на много порядков превышает человеческую жизнь. Однако при изучении того или иного явления обычно имеется возможность наблюдать его на многих небесных объектах при различных условиях, в том числе и на разных стадиях его эволюции, так что в конечном счёте астрофизика может получать достоверные экспериментальные результаты.

Условия оптимального развития естественных наук были сформулированы нобелевским лауреатом П.Л. Капицей [21]: «Работа крупных ученых естествоиспытателей, внесших большой вклад в развитие современного естествознания, неизменно проходила в тесной связи теории и опыта. Поэтому для развития естественных наук на здоровой материалистической основе всякое теоретическое обобщение должно непременно проверяться на опыте. Гармоническое развитие теории и практики является абсолютно необходимым во всех областях естествознания». Насколько в этом плане исторически гармонично развивалась космогония планетных систем, и каковы результаты этой науки на современном этапе ее развития?

До середины XX века экспериментальные результаты в космогонии планетных систем в основном предоставлялись посредством астрономических наблюдений за Солнечной планетной системой. Только в 70-х годах XX века начались детальные исследования Солнечной системы с помощью космических аппаратов [23], хотя о необходимости точных наблюдений, например, за спутниками Юпитера, писал еще П.С. Лаплас 150 лет назад до начала этих исследований [19]. В конце XX века появились достоверные сообщения об открытии первой экзопланеты («горячий Юпитер») у звезды 51 в созвездии Пегаса [24]. С конца XX века начались астрофизические наблюдения за протопланетными дисками звезд [25].

За последние десятилетия методы астрофизических наблюдений получили существенное развитие. Одним из достижений является введение в строй в 2013 году радиоастрономического комплекса ALMA в чилийской пустыне Атакама. Этот комплекс работает в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах радиоволн и позволяет получать, например, изображения протопланетных дисков звезд с высокой степенью разрешения [26].

Таким образом, до середины XX века данные наблюдений за планетными системами в основном относились к Солнечной системе, сформировавшейся на момент наблюдения. Все теоретические обобщения и выводы на более ранние моменты времени эволюции Солнечной системы, которые исходили из этих результатов, не могли быть подтверждены астрономическими наблюдениями – их просто не существовало. Ситуация кардинальным образом изменилась в начале XXI века. По нашему мнению, к настоящему времени получены экспериментальные данные – астрофизические наблюдения за протопланетными дисками звезд, которые позволяют определить достоверность теоретических моделей образования планетных систем звезд солнечного типа.

В настоящее время в научной литературе нет установившихся названий структур планетных систем звезд в процессе их образования. Так, встречаются различные названия газопылевого протопланетного диска Солнца: например, «газопылевой околосолнечный диск», «солнечная туманность» (solar nebular) или «допланетное облако» и др. Поэтому для правильного понимания представленных исследований вводятся следующие определения для планетных систем звезд солнечного типа. Протозвездная туманность – это газопылевое межзвездное облако, в котором начинается гравитационный коллапс и формируется звезда. Газопылевое околозвездное облако (околозвездное облако) – это окружающее звезду облако, газопылевое вещество которого удерживается на своих орбитах гравитацией звезды. Газопылевой протопланетный диск звезды (протопланетный диск) – это сформировавшееся газопылевое околозвездное облако после отделения его от звезды. Газопылевые протопланетные кольца (протопланетные кольца) – это газопылевые кольца, на которые разделяется протопланетный диск в результате его гравитационной неустойчивости. Газопылевое протопланетное сгущение (протопланетное сгущение (облако)) – это газопылевое сгущение (протопланетная «туманность»), образовавшееся в результате эволюции протопланетного кольца, из которого в дальнейшем формируется протопланета и ее протоспутниковый диск. Протопланета – это газопылевое сгущение, которое в процессе самогравитационного сжатия превращается в планету. Газопылевой протоспутниковый диск (протоспутниковый диск) – это окружающее протопланету облако, частицы которого удерживаются на своих орбитах гравитацией протопланеты. Газопылевые протоспутниковые кольца (протоспутниковые кольца) – это газопылевые кольца, на которые разделяется протоспутниковый диск в результате его гравитационной неустойчивости и из которых в дальнейшем образуются регулярные спутники планеты.

Планеты, как правило, имеют спутники. Существуют два типа спутников планет: регулярные и нерегулярные [34]. Регулярные спутники обращаются по почти круговым орбитам, расположенным в экваториальной плоскости планеты, а движение спутника вокруг планеты происходит в направлении вращения планеты. Нерегулярные спутники находятся на более удаленных орбитах, сильно вытянутых и наклоненных к экваториальной плоскости планеты; направление их обращения вокруг планеты произвольное, чаще обратное вращению планеты.

В данном обзоре нет оснований подробно рассматривать все предлагавшиеся космогонические гипотезы и теории, так как к настоящему времени определены две основные теории (модели) образования планетных систем звезд солнечного типа [16, 12, 27]. Теория твердотельной аккумуляции - теория образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [15, 16] является общепризнанной.

Альтернативными моделями являются модели образования планетных систем из газопылевых сгустков путем образования протопланет [19, 27 – 32]. В настоящем обзоре мы будем следовать одной из таких моделей, а именно: модели газопылевых колец - модели образования планетных систем звезд солнечного типа, в основе которой лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (газопылевых колец). В этой модели в результате гравитационной неустойчивости протопланетного диска он распадается на систему газопылевых протопланетных колец, из которых в дальнейшем и образуются протопланеты и их протоспутниковые диски [27, 3, 5 - 10, 33]. На следующем этапе эволюции в результате гравитационной неустойчивости протоспутниковых дисков они распадаются на системы газопылевых протоспутниковых колец, из которых в дальнейшем образуются регулярные спутники планет [17].

При изложении материала аналитического обзора будем придерживаться следующей концепции: рассматриваются физические процессы модели газопылевых колец, которые определяют эволюцию как протозвездной (протосолнечной) туманности, так и протопланетной «туманности»; для проверки достоверности основных положений рассматриваемых моделей в качестве критерия истины используются экспериментальные данные, в том числе результаты астрофизических наблюдений последних лет [35 – 40]; изложение модели газопылевых колец проводится в сопоставлении с моделью твердотельной аккумуляции [15, 16].

Глава I. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции

Данная глава написана на основе работ [3, 4, 5]. В ней рассмотрены аналитическая и численная модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции. Получены аналитические решения для протопланетного диска Солнца и решения для протопланетных газопылевых колец протопланетного диска. Выполнены численные расчеты стационарных состояний протопланетных колец протопланетного диска и эволюции протопланетного кольца, находящегося в нестационарном состоянии. Приведены результаты аналитических и численных расчетов, их анализ и сравнение. Предложена модель образования планетной Солнечной системы.

Введение

Известно, что протопланетный диск Солнца играет определяющую роль при образовании Солнечной планетной системы.

Образование самого протопланетного диска Солнца непосредственно связано с образованием Солнца как звезды. Гипотезы образования Солнца и Солнечной системы можно разделить на две группы. Первая из них восходит к классическим гипотезам И. Канта и П.С. Лапласа о совместном образовании Солнца и его планетной системы из единой протосолнечной туманности. Вторая гипотеза предполагает отдельное образование Солнца и его протопланетного диска, из которого впоследствии сформировались планеты. В данных исследованиях авторы придерживаются гипотезы о совместном образовании Солнца и его планетной системы из единой протосолнечной туманности.

Настоящие исследования посвящены эволюции уже образовавшегося протопланетного диска Солнца на ее начальной стадии.

Строго говоря, эволюция протопланетного диска Солнца в ее полной и адекватной физическим процессам постановке должна решаться в рамках общей проблемы образования Солнечной системы. В этом случае эволюция протопланетного диска логически следует из определенной фазы эволюции Солнечной системы. В такой постановке задача является чрезвычайно сложной, и в настоящее время только намечаются пути ее решения. Решение этой задачи в полной постановке возможно методами численного моделирования на основе полных физически адекватных многомерных численных моделей образования Солнечной системы с использованием современных вычислительных систем. Актуальным является и направление -построение упрощенных аналитических и численных моделей для отдельных этапов сценария образования

Солнечной системы, способных правильно описать основные физические процессы на соответствующем этапе.

В настоящих исследованиях была использована приближенная аналитическая модель, впервые предложенная в работах [41, 42] при исследованиях атмосферы вращающегося коллапсара.

Численные расчеты проводились с использованием одномерных и двумерных методик и программных средств двумерного программного комплекса, разработанных в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН [43].

1. Общая постановка задачи

Процессы образования протопланетных дисков и соответствующих им планетных систем существенным образом зависят от процессов эволюции космической системы, в которой рассматриваются эти явления. Это относится и к образованию планетных тел в Солнечной системе. Например, известно, что в межзвездных облаках не образуются изолированные планетные тела, более того, в них не наблюдается рост частиц пыли более 10^{-5} - 10^{-4} см [44]. Предполагается, что в облаках межзвездного пространства существуют процессы, препятствующие росту пылевых частиц. В одной из гипотез таким процессом, который «стабилизирует» размер частиц, является столкновение облаков в межзвездном пространстве [44].

Таким образом, образование протопланетного диска Солнца нельзя рассматривать вне зависимости от процессов образования Солнца как звезды, т.е. от модели образования Солнечной системы.

1.1. Модель образования Солнечной системы

В общих чертах модель образования Солнечной системы была принята в следующем виде.

1. Солнце и его протопланетный диск образовались путем единого процесса гравитационного сжатия вращающейся протосолнечной газопылевой туманности (аналогично, как это было предсказано П.С. Лапласом) [45, 46].
2. Формирование Солнца как звезды произошло за промежуток времени, равный примерно $0,1 \cdot 10^6$ лет [46]. Солнце за этот период аккумулировало около 90 % своей массы. В это же время (одновременно с формированием Солнца) происходило образование протопланетного диска Солнца. На этой стадии Солнце окружено непрозрачной аккреционной оболочкой, которая поглощает интенсивное излучение молодого Солнца и переизлучает его в инфракрасном диапазоне.
3. Данные последних лет показывают, что коллапс межзвездной газопылевой туманности протекал таким образом, что, по крайней мере,

часть этой туманности не была полностью испарена и гомогенизирована [47]. На последующих этапах температура протопланетного диска Солнца падала и происходила конденсация первоначально высокотемпературного газа в той части, где ранее протекали процессы испарения.

4. Вторая стадия формирования Солнечной системы соответствует стадии Т Тельца до выхода Солнца на главную последовательность [46], [48, 49], [45]. К началу второй стадии вокруг Солнца может сохраниться лишь незначительная по массе прозрачная часть аккреционной оболочки. Более значительная ее часть находится вдали от звезды в виде тора, окружающего звезду и входящего в состав протопланетного диска. На второй стадии идет более медленное формирование протопланетного диска Солнца, и эта стадия по ее продолжительности оценивается примерно в $10^6 - 10^7$ лет [46, 48, 45].
5. Солнечный ветер возникает на второй стадии. По разным источникам информации продолжительность солнечного ветра несколько различается [47, 46, 48], но, вероятно, ее можно оценить равной примерно 10^6 лет.
6. Планетная система Земля-Луна образовалась из зоны протопланетного диска Солнца, находящейся на расстоянии около 1 а.е. от Солнца. Средние параметры среды этой зоны диска следующие: плотность - порядка 10^{-9} г/см³, температура – примерно 400°К [50].

2. Состав среды протопланетного диска Солнца

Для описания эволюции протопланетного диска Солнца весьма важен состав его среды.

По данным работ [45, 46] среда протопланетного диска Солнца на 98 % состоит из газа, в котором обилия по массе молекулярного водорода, гелия и всех остальных веществ составляют соответственно 0,71; 0,28; 0,01. На пылевые частицы приходится по массе от 0,5 до 1,5 %.

Важнейшим вопросом в эволюции протопланетного диска является поведение его пылевой компоненты, а именно: рост размеров частиц и возможность образования достаточно крупных тел, способных далее расти с помощью своего тяготения. Этот вопрос относится к числу наиболее сложных и не решенных до настоящего времени. По существу решение этого вопроса должно указать путь эволюции планетной системы Солнца. Если реализуется возможность независимого образования достаточно крупных твердых тел, дальнейший рост которых возможен за счет их тяготения, то это путь, который описывается моделью Шмидта-Сафронова [15], в противном случае может быть справедлива, например, капельная модель, предложенная Т.М. Энеевым и Н.Н. Козловым [30, 51, 52].

В межзвездных облаках размер частиц пыли не превышает $10^{-4} - 10^{-5}$ см [44], что обусловлено существованием процессов, которые

ограничивают рост размеров частиц. Существуют ли такие процессы в протопланетном диске? Ответ на этот вопрос остается открытым. Ряд авторов утверждает, что в протопланетном диске Солнца может происходить рост размеров частиц при столкновении между собой за счет их слипания [45, 15]. Предлагаемые возможные механизмы слипания частиц пыли: ван-дер-ваальсовы силы; разные типы «радиационного» спекания [45], эффект холодной сварки [15] и другие. Произойдет ли слипание или дробление частиц при столкновении зависит от их относительной скорости. По данным работ [46, 50] в протопланетном диске Солнца частицы достигают распределения по размерам, в котором имеются и мелкие частицы размером около 1 мкм, поддерживающие высокую непрозрачность вещества диска, и крупные около 1 см. Средний размер пылевых частиц составляет несколько десятков микрометров.

Так как в данных исследованиях изучалась эволюция протопланетного диска на ее начальном этапе, то было принято, что пылевые частицы однородно распределены по объему протопланетного диска, а их размер не сильно отличался от размера пылевых частиц в протосолнечной туманности на стадии зарождения в ней протопланетного диска.

Для описания поведения протопланетного диска необходимо знать уравнение состояния его среды.

2.1. Уравнение состояния среды протопланетного диска

Итак, допустим, что начальный состав среды протопланетного диска имеет распределение плотности пылевой компоненты, близкое к однородному, и содержание пыли по массе не превышает нескольких процентов. При этих условиях можно показать, что усредненные параметры данной среды с достаточной точностью описываются уравнением состояния идеального газа [53]. Так, по данным работы [46], если на пылевые частицы приходится по массе около 1,5 % вещества солнечного состава, то для такой среды молекулярный вес равен примерно 2,53, а показатель адиабаты - 1,43. Такое описание протопланетного облака в приближении идеального газа дает достаточно точную картину поведения его некоторых средних характеристик, а именно тех, которые локально определяются газовой компонентой, даже в том случае, когда пылевая компонента начинает конденсироваться и превращаться в твердые частицы.

3. Упрощенная модель протопланетного газопылевого диска Солнца

Рассмотрим Солнечную систему на стадии, когда уже образовалось Солнце, а газопылевое околозвездное облако отделилось от Солнца, образуя протопланетный диск. Будем считать, что в этот момент протопланетный диск однороден по составу и его вещество удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Примем также, что $M_d \ll M_s$, где M_d - масса протопланетного диска, а M_s - масса Солнца. В этом случае оправдано использование приближения Роша с центральным источником гравитационного поля [41, 42, 54]. Существенно, что при этом не учитывается излучение.

3.1. Аналитическое решение

Для принятой модели система уравнений гидростатического равновесия в цилиндрической системе координат (r, z) в аксиально-симметричном случае примет вид [54]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = r\Omega^2 - \frac{GM_s r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{GM_s z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.2)$$

где p , ρ - давление и плотность вещества; Ω - угловая скорость вращения; G - гравитационная постоянная; M_s - масса протосолнца. Будем считать, что вещество диска подчиняется политропному уравнению состояния:

$$p(\rho) = K\rho^\gamma, \quad (3.1.3)$$

где $K = const$.

В этом случае исходная система уравнений (3.1.1), (3.1.2) преобразуется к виду:

$$A \frac{\partial \rho^{\gamma-1}}{\partial r} = r\Omega^2 - \frac{GM_s r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.4)$$

$$A \frac{\partial \rho^{\gamma-1}}{\partial z} = -\frac{GM_s z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.5)$$

где $A = \frac{\gamma K}{(\gamma - 1)}$. Или в эквивалентной записи:

$$A \frac{\partial \rho^{\gamma-1}}{\partial r} = \frac{1}{2} \Omega^2 \frac{\partial r^2}{\partial r} + GM_s \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (3.1.6)$$

$$A \frac{\partial \rho^{\gamma-1}}{\partial z} = GM_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.1.7)$$

Рассмотрим законы вращения с угловой скоростью, зависящей только от цилиндрического радиуса r , т.е. вида $\Omega = \Omega(r)$.

Введем функцию $Y(r)$ такую, что

$$\frac{dY}{dr} = -r\Omega^2, \quad (3.1.8)$$

Тогда система уравнений (3.1.6), (3.1.7) сводится к одному уравнению:

$$A(\rho^{\gamma-1} - \rho_{ex}^{\gamma-1}) + (Y(r) - Y(r_{ex})) - GM_s \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(r_{ex}^2 + z_{ex}^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0, \quad (3.1.9)$$

где ρ_{ex} и $Y(r_{ex})$ - соответственно значения плотности и функции Y в некоторой точке с координатами (r_{ex}, z_{ex}) . Удобно принять в качестве (r_{ex}, z_{ex}) точку на экваторе с координатой $z_{ex} = 0$, в которой плотность вещества обращается в ноль, т.е. $\rho_{ex} = 0$. Вводя обозначения

$$G^*(r, z) = GM_s \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(r_{ex}^2 + z_{ex}^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad Y^*(r) = Y(r) - Y(r_{ex}),$$

получаем из уравнения (3.1.9):

$$A\rho^{\gamma-1} = G^*(r, z) - Y^*(r). \quad (3.1.10)$$

Выражение (3.1.10) служит основным уравнением как для нахождения распределения плотности вещества $\rho(r, z)$ при заданном законе вращения, так и для решения обратной задачи – определения закона вращения $\Omega(r)$, обеспечивающего желаемое распределение плотности вещества на экваторе при $z = 0$.

В работе [54] представленный аналитический подход применялся для описания конфигурации тороидальной атмосферы вращающегося коллапсара с законом вращения вида:

$$\Omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (3.1.11)$$

где ω_0 , r_0 - некоторые константы. Решение уравнения (3.1.10) для выражения (3.1.11) имеет следующие характерные особенности: профиль, вытянутый вдоль оси z ; максимум плотности в центральной части диска; большой градиент плотности при приближении к границе диска (см. [54]). Все это делает неприемлемым использование закона вращения вида (3.1.11) в задаче о протопланетном диске, для которого характерна малая толщина по сравнению с радиальными размерами.

3.2. Модели тонкого протопланетного диска

Определим параметры рассматриваемой задачи. Во всех численных расчетах, представленных ниже в данном разделе, параметр адиабаты принят $\gamma = 1,67$, что приводит лишь к незначительным количественным отличиям по сравнению с $\gamma \approx 1,43$, который указан в подразделе 2.1. Внешний размер диска на экваторе $r_{ex} = 4,52 \cdot 10^{14}$ см, что примерно соответствует радиусу орбиты Нептуна. Радиус внутренней границы протопланетного диска, на котором плотность также обращается в ноль, примем равным расстоянию до Меркурия: $r_{in} = 0,449 \cdot 10^{13}$ см. Величину M_s положим равной массе Солнца $1,989 \cdot 10^{33}$ г. Константа уравнения состояния K определяется оценочно из достаточно грубой предпосылки, что сжатие протосолнечной туманности произошло адиабатически:

$$K \approx 3,13 \cdot 10^{18} \frac{\text{см}^{3\gamma-1}}{\text{г}^{\gamma-1} \text{с}^2}.$$

Анализ получаемых решений в рассматриваемой упрощенной модели протопланетного диска показывает, что конфигурация диска существенным образом зависит от вида функции угловой скорости $\Omega(r)$. При изучении протопланетного диска Солнца, как правило, полагают, что дифференциальный закон вращения среды диска подчиняется закону Кеплера, см., например, [16]. В цилиндрической системе координат этот закон имеет вид:

$$\Omega^2 = \frac{GM_s}{r^3}. \quad (3.2.1)$$

В соответствии с уравнением (3.1.9) для закона Кеплера получаем распределение плотности вещества

$$\rho = \left\{ \rho_{ex}^{\gamma-1} + \frac{GM_s}{A} \left[\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r} \right] \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (3.2.2)$$

которое имеет смысл только при $\rho_{ex} > 0$, в противном случае $\rho \equiv 0$. Граничная кривая ($\rho = 0$) при этом описывается соотношением

$$\frac{1}{r_{\text{гp}}} - \frac{1}{(r_{\text{гp}}^2 + z_{\text{гp}}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{R_b} \quad (3.2.3)$$

или

$$z_{\text{гp}} = \pm r_{\text{гp}} \left[\frac{R_b^2}{(R_b - r_{\text{гp}})^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.4)$$

где $R_b = GM_S / (A\rho_{\text{ex}}^{\gamma-1})$. Из (3.2.3) следует, что граница диска $r_{\text{гp}}$ асимптотически приближается к R_b при стремлении $z_{\text{гp}}$ к бесконечности.

Характерное поведение плотности для этого случая представлено на рисунке 3.2.1, параметр $\rho_{\text{ex}} = 1,795 \cdot 10^{-16}$ г/см³, $R_b = 10^{14}$ см. В экваториальной плоскости диска плотность газа всюду постоянна $\rho = \rho_{\text{ex}}$, т.е. внешняя граница при $z = 0$ отсутствует. В случае $r < R_b$ плотность вещества падает с ростом координаты z вплоть до нуля при $z = z_{\text{гp}}$. Для $r > R_b$ согласно (3.2.3) граничного значения $z_{\text{гp}}$ не существует.

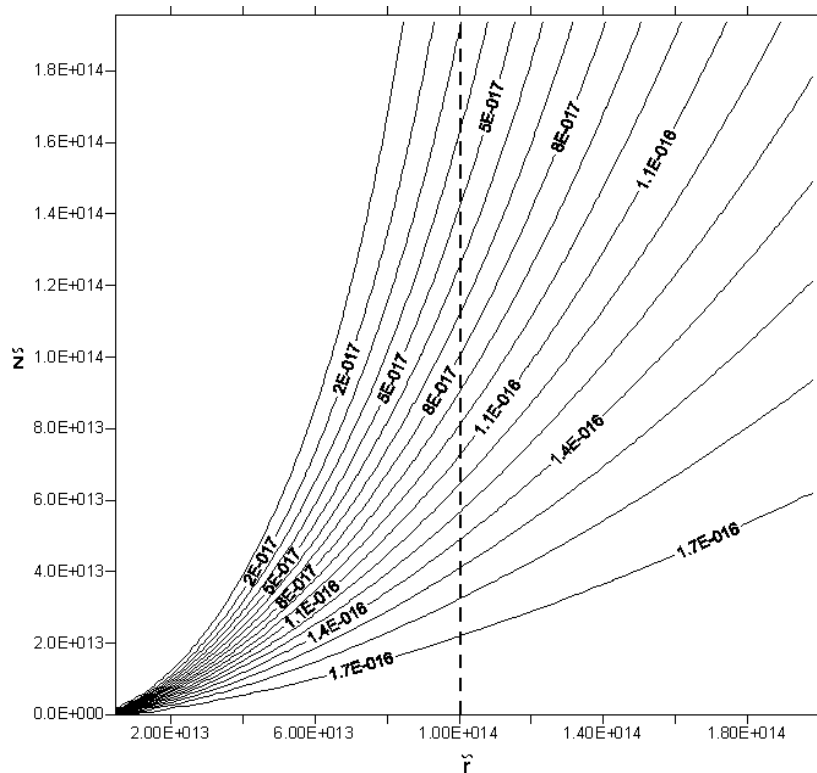


Рис. 3.2.1. Линии постоянной плотности в случае кеплеровского закона вращения (3.2.2) для значения граничной плотности $\rho_{\text{ex}} = 1,795 \cdot 10^{-16}$

г/см³, $[\rho] = \text{г/см}^3$, $[\tilde{r}, \tilde{z}] = \text{см}$ – цилиндрические координаты.

Таким образом, полученное для закона вращения Кеплера решение (3.2.2) слабо удовлетворяет требованиям рассматриваемой задачи. Тем не менее, в рамках данной аналитической модели возможны решения в виде «тонких» протопланетных дисков конечных размеров. Рассмотрим поведение уравнения (3.1.10) в экваториальной плоскости $z = 0$. Координата r изменяется в пределах $r_{in} \leq r \leq r_{ex}$, где $\rho(r_{in}) = \rho(r_{ex}) = 0$. Как видно из рисунка 3.2.2, плоские диски будут иметь место в случае, когда $Y^*(r) < G^*(r, 0)$ и при этом

$$\frac{G^*(r, 0) - Y^*(r)}{G^*(r, 0)} \ll 1.$$

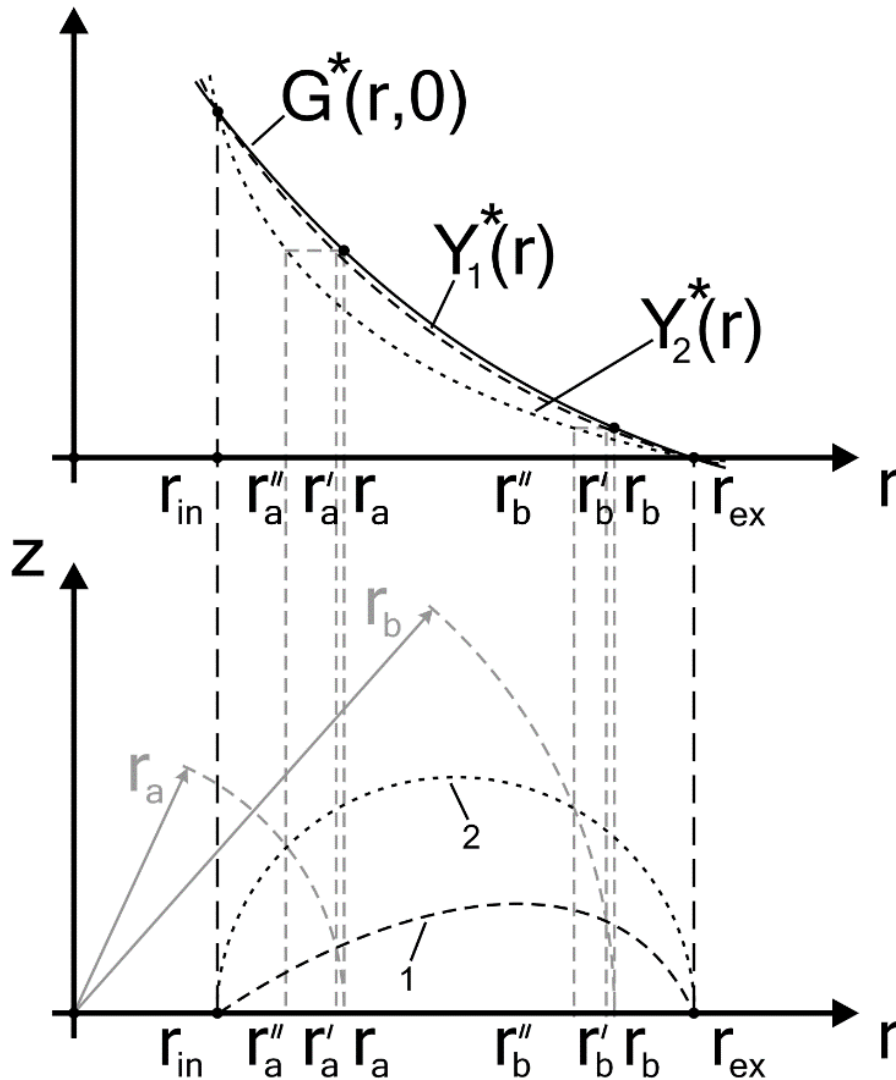


Рис. 3.2.2. Функции $G^*(r)$, $Y_1^*(r)$ и $Y_2^*(r)$ от расстояния r в экваториальной плоскости. Характер зависимости толщины диска от соотношения между функциями $G^*(r)$ и $Y^*(r)$.

На верхнем рисунке показаны два варианта функции Y^* и функция G^* при $z=0$. Из их сравнения можно определить положение границ (нижний рисунок). Рассмотрим для определенности кривую 1, граничную для функции Y_1^* . Возьмем некоторый радиус r_a , справедливо равенство $G^*(r_a, 0) = Y_1^*(r_a')$. Функция G^* зависит от сферического радиуса, значит, сохраняет постоянное значение во всех точках окружности с радиусом r_a . Граничная точка располагается на этой окружности в точке с цилиндрическим радиусом, при котором функция Y_1^* равняется $G^*(r_a, 0)$, т.е. r_a' . Из построения видно, что толщина диска на этом цилиндрическом радиусе будет больше, чем разность $r_a - r_a'$. Таким образом, второе условие – это условие малости толщины диска по сравнению с текущим значением цилиндрического радиуса.

Другими словами, аналитическое решение представляет собой «тонкий» протопланетный диск при условии, что закон вращения лишь незначительно отличается от кеплеровского в области $r_{in} \leq r \leq r_{ex}$.

3.2.1. Модель протопланетного диска для $\Omega^2 \sim 1/r^{3+\alpha}$

Для близкого к кеплеровскому закону вращения

$$\Omega^2 \sim \frac{1}{r^{3+\alpha}}, \quad (3.2.5)$$

при условии обращения в ноль решения в экваториальных точках $(r_{in}, 0)$ и $(r_{ex}, 0)$, распределение плотности вещества протопланетного диска принимает вид:

$$A\rho^{\gamma-1} = GM_S \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) + GM_S \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right). \quad (3.2.6)$$

При этом точное выражение для угловой скорости записывается в виде соотношения:

$$\Omega^2 = \frac{(1 + \alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in}) GM_S}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \frac{1}{r^{3+\alpha}}. \quad (3.2.7)$$

На рисунке 3.2.3 представлены изолинии плотности вещества протопланетного диска в плоскости пространственных переменных (r, z) (обозначенных как \tilde{r}, \tilde{z}) для двух различных значений параметра α .

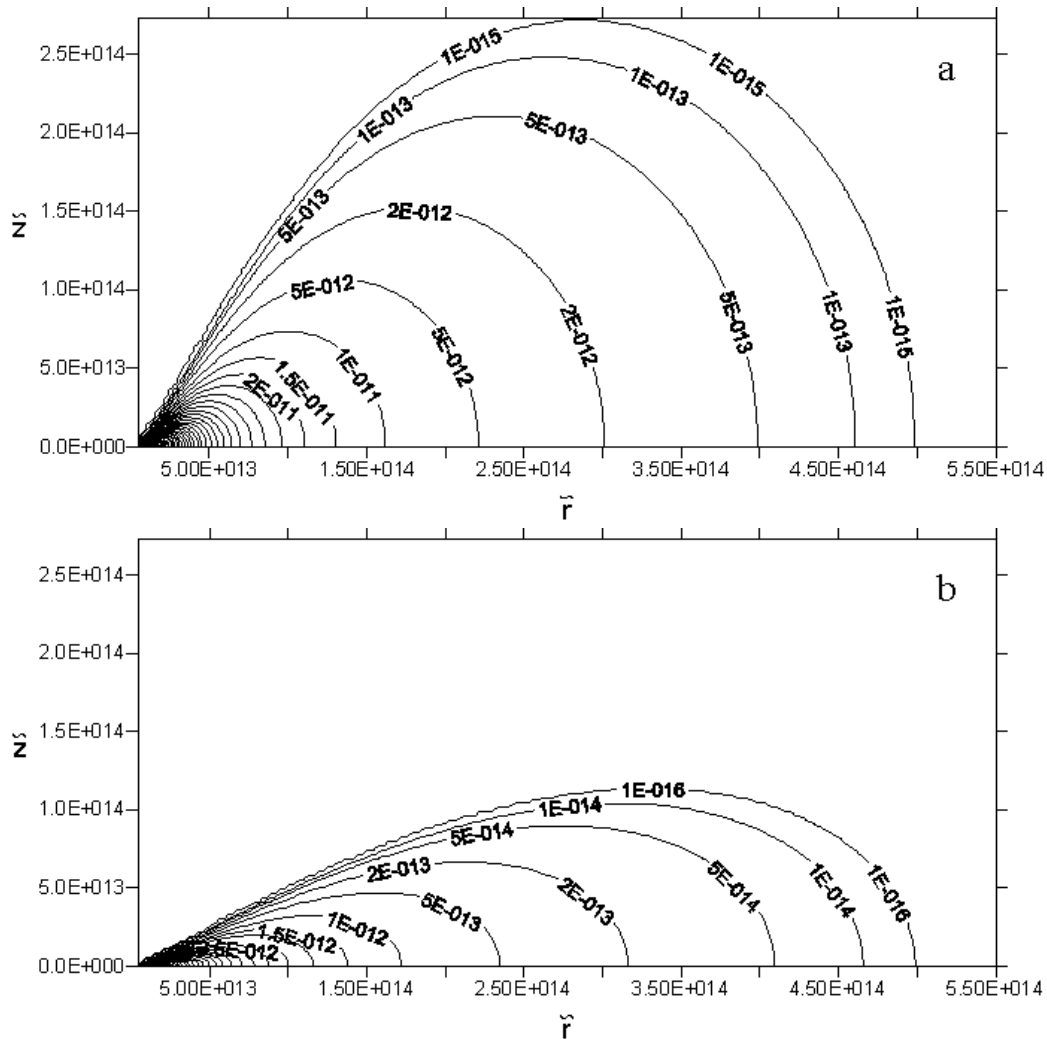


Рис. 3.2.3. Линии постоянной плотности в случае закона вращения (3.2.7) для разных значений α . Параметры моделей:
 (a) $\alpha = 0,3$, $M_d = 0,279M_S$; (b) $\alpha = 0,05$, $M_d = 0,013M_S$.

3.2.2. Модель протопланетного диска для $\Omega^2 = GM_S / r^3 + f(r)$

В модели протопланетного диска с законом вращения $\Omega^2 \sim 1/r^{3+\alpha}$ (раздел 3.2.1) максимальная плотность вещества находится вблизи внутреннего радиуса диска - r_{in} (см. рисунок 3.2.3). Это приводит к большим градиентам плотности в указанной области, что в ряде случаев создает значительные трудности при численных расчетах. Причина этой особенности заключается в том, что в рассматриваемом случае разность $G^*(r) - Y^*(r)$ (см. рисунок 3.2.2) имеет максимум в окрестности r_{in} , который и формирует экстремум в распределении плотности. Простой способ устранить эту особенность – использовать закон вращения вида

$$\Omega^2 = GM_S / r^3 + f(r), \quad (3.2.8)$$

который позволяет построить модель «тонкого» диска с нужным профилем плотности на экваторе. Выбор соответствующей функции $f(r)$ однозначно определяет форму зависимости $G^*(r) - Y^*(r)$ при значениях $r_{in} < r < r_{ex}$ и $z = 0$. По техническим соображениям удобнее решать обратную задачу: 1) задать зависимость $G^*(r) - Y^*(r)$, обеспечивающую нужное распределение плотности; 2) по формуле (3.1.8) определить закон вращения, отвечающий заданной функции $Y^*(r)$. Приведем в качестве примера две модели.

- С квадратичной зависимостью по радиусу $G^*(r) - Y^*(r)$ и максимумом плотности при значении $r = (r_{in} + r_{ex})/2$ (см. рисунок 3.2.4):

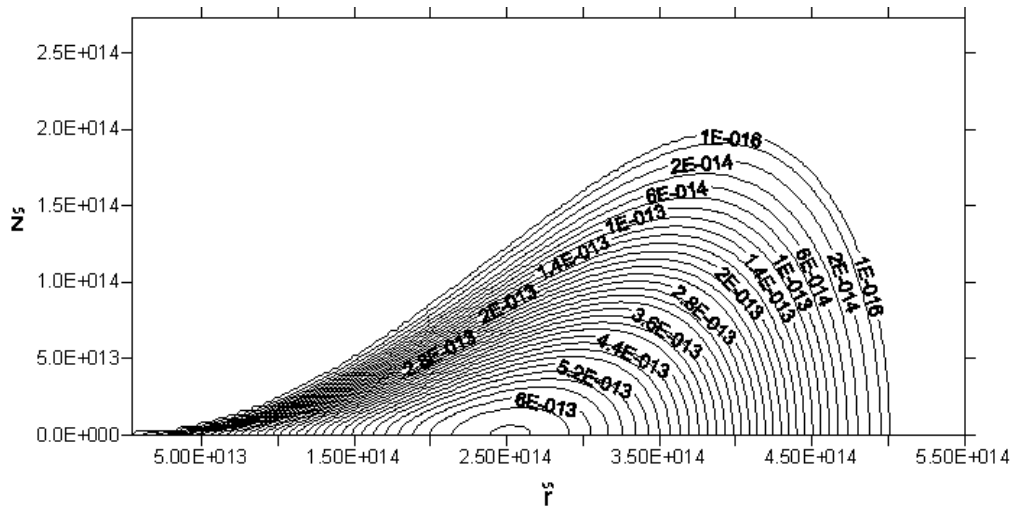


Рис. 3.2.4. Линии постоянной плотности в случае закона вращения (3.2.10).
 Параметры модели: $\beta = 0,8$, $M_d = 0,021M_s$.

$$A\rho^{\gamma-1} = GM_s \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r} \right) + \beta \frac{GM_s}{r_{ex}} \hat{r} \cdot (1 - \hat{r}), \quad (3.2.9)$$

$$\Omega^2 = \frac{GM_s}{r^3} + 2\beta \frac{GM_s}{r_{ex}(r_{ex} - r_{in}) \cdot r} \left(\frac{1}{2} - \hat{r} \right). \quad (3.2.10)$$

- С кубической зависимостью по радиусу $G^*(r) - Y^*(r)$ и максимумом плотности при значении $r = (2r_{in} + r_{ex})/3$ (см. рисунок 3.2.5):

$$A\rho^{\gamma-1} = GM_s \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r} \right) + \beta \frac{GM_s}{r_{ex}} \hat{r} \cdot (1 - \hat{r})^2, \quad (3.2.11)$$

$$\Omega^2 = \frac{GM_s}{r^3} + 3\beta \frac{GM_s}{r_{ex}(r_{ex}-r_{in}) \cdot r} (1-\hat{r}) \cdot \left(\frac{1}{3} - \hat{r}\right). \quad (3.2.12)$$

В выражениях (3.2.9) - (3.2.12) β - произвольная константа (в рассматриваемом приближении «тонких» дисков $\beta < 1$), $\hat{r} = \frac{(r - r_{in})}{(r_{ex} - r_{in})}$ - приведенный цилиндрический радиус. При этом значение β не должно приводить к отрицательным значениям в выражениях для Ω^2 (3.2.10, 3.2.12). Например, как можно легко показать, из формулы (3.2.10) следует, что β не должно превышать значения $\beta_{lim} = 1 - r_{in}/r_{ex}$.

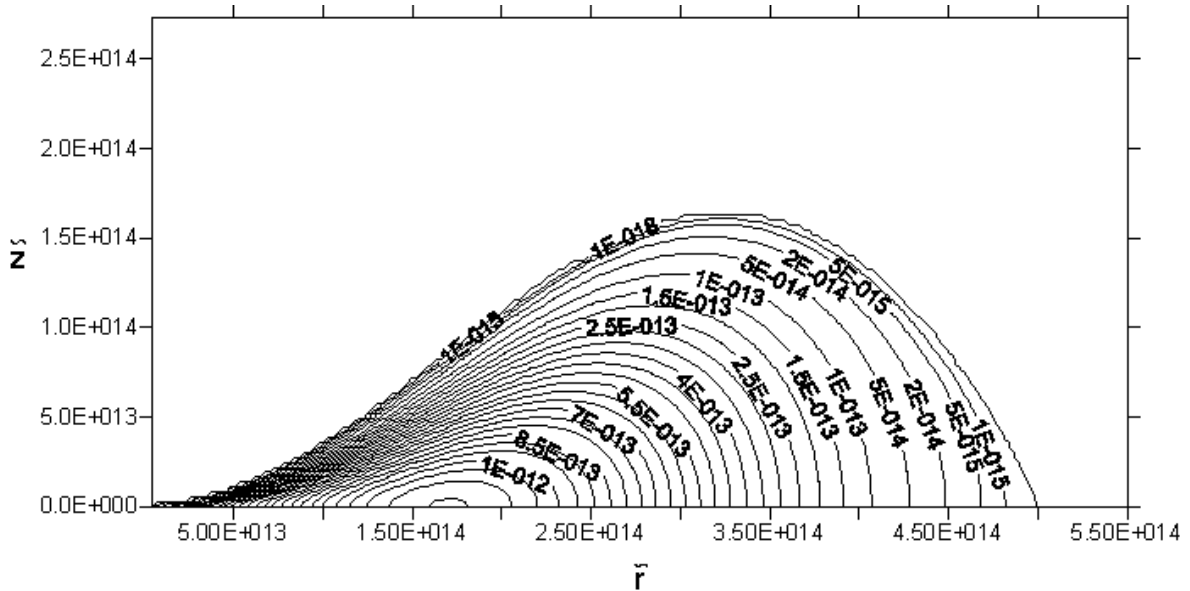


Рис. 3.2.5. Линии постоянной плотности в случае закона вращения (3.2.12).
 Параметры модели: $\beta = 2$, $M_d = 0,019M_s$, $[\rho] = \text{г/см}^3$, $[\tilde{r}, \tilde{z}] = \text{см}$.

3.2.3. Модель протопланетного диска с заданной формой границы

В рамках представленного аналитического решения оказывается возможным построить модель диска с предписанной формой границы. Действительно, из формулы (3.1.10) следует, что на границе диска функция $Y^*(r)$ должна удовлетворять условию

$$0 = GM_s \left(\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) - Y^*(r), \quad (3.2.13)$$

из которого непосредственно определяется $Y^*(r)$, если задана форма граничной поверхности диска, иными словами, зависимость $z(r)$ на

границе. Так, например, для диска с круглым сечением (плоскостью, проходящей через ось вращения, см. рисунок 3.2.2, пунктирная кривая 2) функция $z(r)$ имеет вид

$$(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r(r_{in} + r_{ex}) - r_{in}r_{ex}} \quad \text{или} \quad z^2 = (r - r_{in})(r_{ex} - r), \quad (3.2.14)$$

и, следовательно, для распределения плотности вещества и закона вращения мы получаем выражения:

$$A\rho^{\gamma-1} = GM_S \left(\frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)}} - \frac{1}{\sqrt{r(r_{in} + r_{ex}) - r_{in}r_{ex}}} \right), \quad (3.2.15)$$

$$\Omega^2 = \frac{GM_S(r_{in} + r_{ex})}{2r[r(r_{in} + r_{ex}) - r_{in}r_{ex}]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.2.16)$$

На рисунке 3.2.6 представлено распределение плотности вещества такого диска в плоскости пространственных переменных (r, z) .

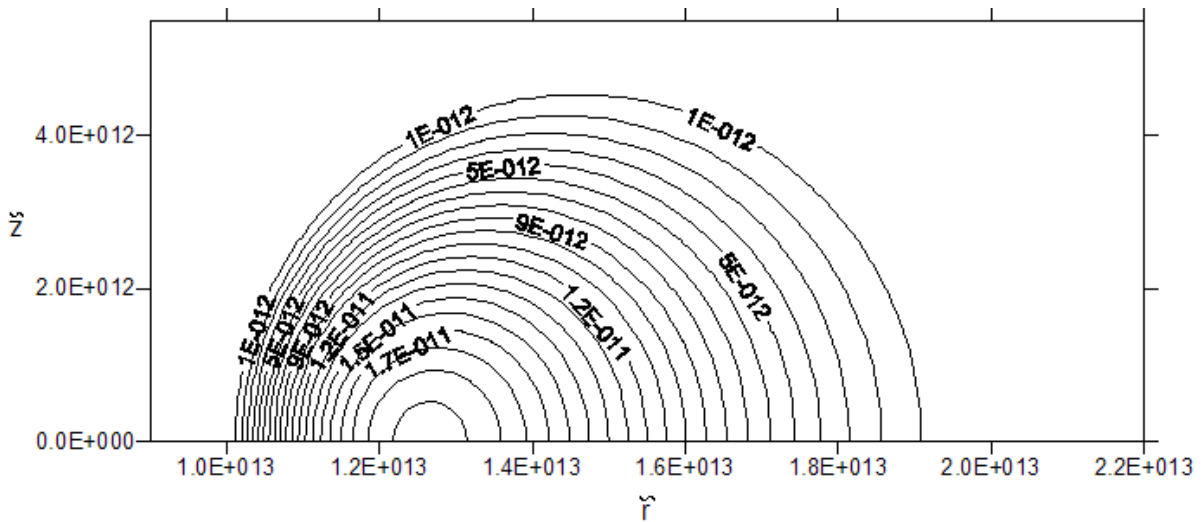


Рис. 3.2.6. Линии постоянной плотности в случае закона вращения (3.2.16).

Параметры модели: $r_{in} = 10^{13}$ см, $r_{ex} = 2 \cdot 10^{13}$ см, $M_d = 7,807M_{\oplus}$,

$[\rho] = \text{г/см}^3$, $[r, z] = \text{см}$, M_{\oplus} - масса Земли.

3.3. Устойчивость протопланетных дисков

Полученные в разделе 3.2 модели дисков представляют собой конфигурации, находящиеся в состоянии стационарного вращения. Однако, следует иметь в виду, что данные модели должны не только подчиняться условиям механического и теплового равновесия, но и быть устойчивыми. При выводе аналитического решения использовалось предположение, что скорость вещества является чисто вращательной. Устойчивость такой конфигурации определяется критерием Хейланда [55],

который в предельном случае гомоэнтропического диска, т.е. когда $\nabla S \equiv 0$ (S - энтропия вещества), сводится к одному простому неравенству

$$d(\Omega^2 r^4) / dr > 0. \quad (3.3.1)$$

Следовательно, в устойчивой модели удельный момент количества движения должен увеличиваться наружу. Это критерий Золберга, обобщающий хорошо известный для невязкой несжимаемой жидкости критерий Рэля [55].

Так, для модели протопланетного диска из раздела 3.2.1 критерий (3.3.1) приводит к условию

$$\alpha < 1. \quad (3.3.2)$$

Для диска, описываемого уравнениями (3.2.9) и (3.2.10), в тех случаях, когда $r_{ex}/r_{in} < 5/3$, из требования возрастания удельного момента вращения появляется дополнительное ограничение на параметр β

$$\beta < \frac{(r_{ex} - r_{in})^2}{r_{ex}(5r_{ex} - 3r_{in})} \quad (3.3.3)$$

Наконец, в модели протопланетного диска с заданной формой границы зависимость производной удельного момента вращения по радиусу имеет вид

$$dj^2 / dr \sim r^2 [r(r_{in} + r_{ex}) - 2r_{in}r_{ex}]. \quad (3.3.4)$$

Откуда непосредственно следует, что такая модель является заведомо динамически неустойчивой по отношению к осесимметричным движениям при любых r_{in} и r_{ex} , кроме случая $r_{in} = 0$.

3.4. Модель протопланетных колец

В том случае, если происходит фрагментация первоначального протопланетного диска, приводящая к образованию кольцевой структуры, аналитический подход, изложенный выше, также может служить достаточно удобной и простой аппроксимацией для описания отдельных колец новой сформировавшейся структуры. Будем исходить из простого предположения о том, что каждой планете Солнечной системы на указанной стадии соответствует компактное кольцо с характерным размером сечения, заметно уступающим радиусу орбиты. Определим параметры моделей, необходимые для описания современного набора планет Солнечной системы, т.е. четырех планет земной группы (Меркурий, Венера, Земля и Марс) и четырех планет-гигантов (Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун). При этом будем учитывать требование непересечения отдельных колец.

В таблице 3.4.1 приведены данные для трех различных моделей колец, отличающихся выбором закона вращения: $M1$ - модель с законом вращения, близким к кеплеровскому (3.2.6); $M2$ - модель с заданным

профилем плотности (с квадратичной зависимостью по радиусу) в экваториальной плоскости (3.2.9); $M3$ - модель с заданной формой граничной поверхности (3.2.15). Конкретные значения параметров модели (α для модели $M1$, β для модели $M2$) для планет-гигантов определялись из условия совпадения полной массы кольца с современным значением массы соответствующей планеты. Для планет земной группы предполагалось, что масса кольца должна превышать современную массу планеты, поскольку масса кольца совпадает с массой газа, заметно превосходящей массу пыли, которую более естественно в этом случае отождествить с массой планеты. Исходя из современного представления об отношении массовых концентраций пылевой и газовой компонент 1:50, получаем приблизительное соотношение $M_g \approx 50M_i$, где M_g - масса газа, M_i - масса соответствующей планеты. Те случаи, когда не удастся построить модель кольца с заданной массой газа, в таблице 3.4.1 отмечены символом (*).

	M/M_{\oplus}	R_{orb}/R_{\oplus}	$(r_{in} - r_{ex})/R_{\oplus}$	M_g/M_{\oplus}	$M1$ (M_d, α)	$M2$ (M_d, β)	$M3$ (M_d)
Меркурий	0,06	0,38	0,21 – 0,55	3,00	3,00 0,5673	3,00 0,3436	7,926
Венера	0,82	0,72	0,58 – 0,86	41,0	4,59* 4,00	4,24* 0,3256	0,32*
Земля	1,00	1,00	0,86 – 1,14	50,0	5,29* 8,0	3,14* 0,2456	0,1*
Марс	0,11	1,52	1,26 – 1,78	5,5	5,5 3,36	5,5 0,2206	0,52*
Юпитер	318,0	5,20	3,36 – 7,04	318,0	318,0 1,609	315,6* 0,5227	124,3*
Сатурн	95,0	9,54	7,37 – 11,71	95,0	95,0 1,682	95,0 0,2097	33,94*
Уран	14,6	19,22	14,38 – 24,06	14,6	14,6 0,293	14,6 0,0475	161,14
Нептун	17,2	30,06	25,34 – 34,78	17,2	17,2 0,757	17,2 0,0433	29,76

Таблица 3.4.1. Параметры модели протопланетных колец. $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{27}$ г - масса Земли, $R_{\oplus} = 1,496 \cdot 10^{13}$ см - радиус земной орбиты, M - масса планеты, R_{orb} - радиус орбиты, r_{in}, r_{ex} - внутренний и внешний радиусы диска соответственно, α, β - параметры моделей $M1$ и $M2$.

Для модели $M1$ это ограничение на массу возникает из следующего требования: размер кольца в направлении оси z не должен сильно превышать размера кольца в направлении оси r . Для модели $M2$ максимально возможная масса определяется предельным значением параметра β_{lim} (см. раздел 3.2.2), при превышении которого квадрат угловой скорости Ω^2 (3.2.10) становится отрицательным при некоторых значениях r . Ситуации, когда масса кольца оказывается недостаточной, т.е. $M_d < M_g$, можно избежать, если использовать более мягкое исходное соотношение между массовыми концентрациями газа и пыли, например, равное 1:10.

Следует отметить, что в модели $M1$ значение параметра α , как правило, имеет величину порядка 1. И, следовательно, соответствующий данному значению α закон вращения уже не совсем корректно называть близким к кеплеровскому. Законы вращения, взятые для отдельных колец, не ложатся на общую для всей совокупности колец кривую. Типичная зависимость угловой скорости от радиуса r приведена на рисунке 3.4.1 (в данном случае использовалась модель $M3$).

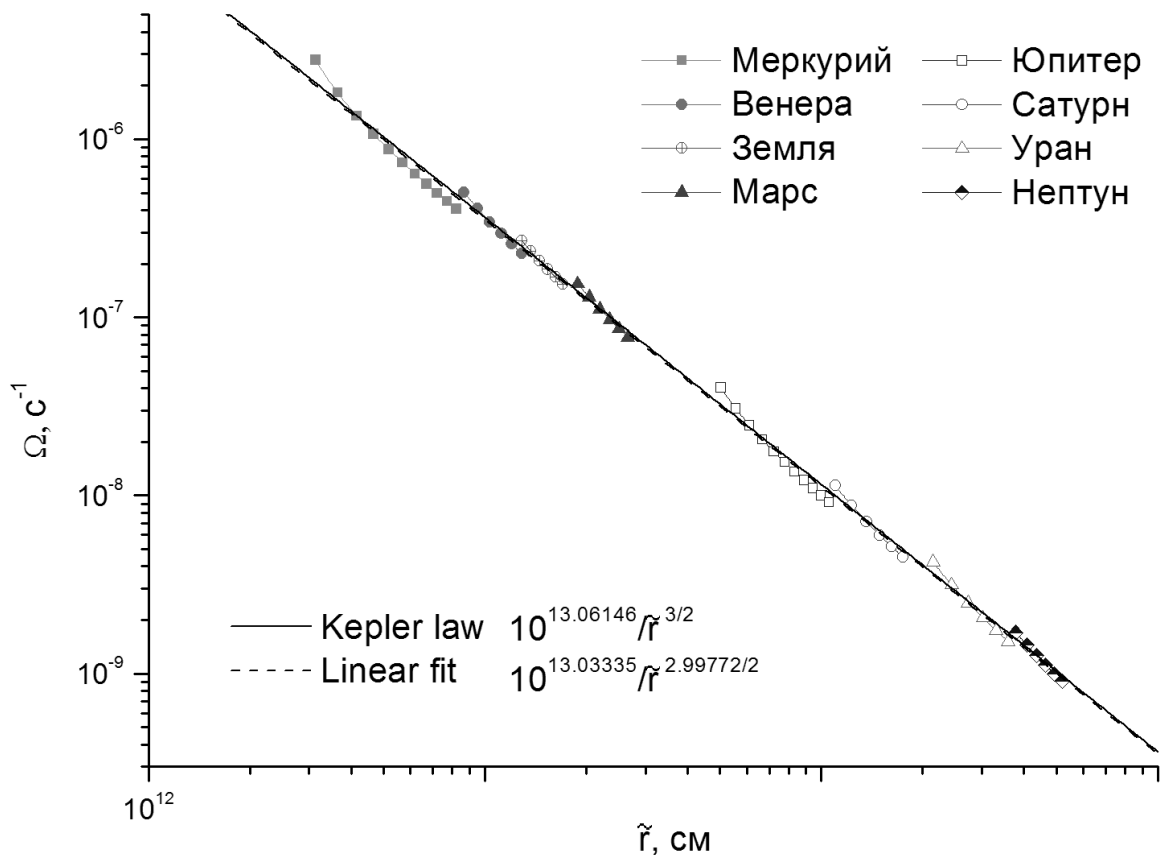


Рис. 3.4.1. Зависимость угловой скорости $\Omega(r)$ для последовательности протопланетных колец в модели $M3$. Linear fit – наилучшая аппроксимация прямой, Kepler law – кеплеровский закон вращения $\Omega^2 = GM_S / r^3$ для M_S , равной массе Солнца.

На рисунке 3.4.1 также показана наилучшая аппроксимация полученной зависимости $\Omega(r)$ прямой (в логарифмических координатах), которая, как видно, довольно точно совпадает с кеплеровским законом вращения. На рисунке 3.4.2 представлено распределение плотности газа для этой же модели.

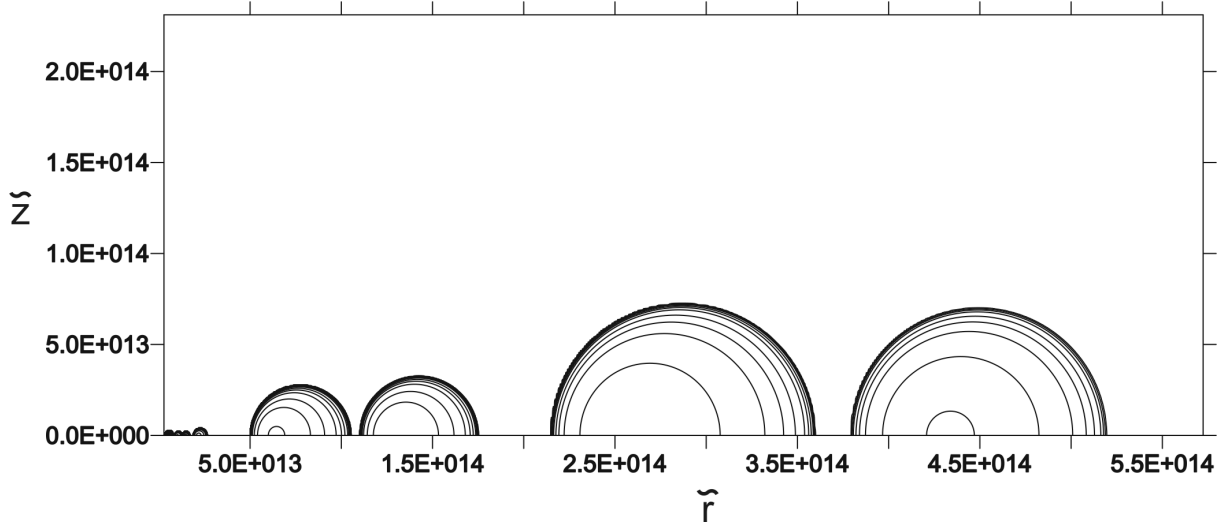


Рис. 3.4.2. Распределение плотности газа группы протопланетных колец в модели *M3* (последний столбец таблицы 3.4.1).

4. Численная двумерная модель протопланетного газопылевого диска

Описать с достаточной точностью эволюцию протопланетного диска Солнца можно только с помощью адекватных многомерных численных моделей. Построена численная двумерная газодинамическая модель, которая соответствует осесимметричному движению газовой среды в гравитационном поле. Эта модель может использоваться на начальной стадии эволюции протопланетного диска, когда пылевая компонента распределена относительно равномерно по объему диска.

4.1. Уравнения газовой динамики в форме законов сохранения с учетом собственного гравитационного поля газа

Описание газодинамических процессов в рассматриваемых задачах проводится в эйлеровом представлении. Уравнения газовой динамики в форме законов сохранения в декартовой системе координат записываются в виде:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.1.1)$$

закон сохранения импульса

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial z} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial z} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(p + \rho u_z^2)}{\partial z} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.1.4)$$

закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial[(e+p)u_x]}{\partial x} + \frac{\partial[(e+p)u_y]}{\partial y} + \frac{\partial[(e+p)u_z]}{\partial z} = \\ = \rho \left(u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

где x, y, z - декартовы координаты; t - время; u_x, u_y, u_z - составляющие вектора скорости \mathbf{U} : $|\mathbf{U}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$; $\rho = \rho(x, y, z, t)$ - плотность газа; $p = p(x, y, z, t)$ - давление газа; $e = \rho \left[\varepsilon + (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) / 2 \right]$ - энергия единицы объема газа; $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$ - внутренняя энергия единицы массы газа; $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ - гравитационный потенциал, который представлен в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = G \int_{V(t)} \frac{\rho(x_T, y_T, z_T)}{R_\varphi} dx_T dy_T dz_T, \quad (4.1.6)$$

где

$$R_\varphi = \sqrt{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 + (z - z_T)^2}, \quad (4.1.7)$$

x_T, y_T, z_T - текущие декартовы координаты, по которым ведется интегрирование в (4.1.6); $V(t)$ - объем газового облака; G - гравитационная постоянная.

Внутри газового облака в фиксированный момент времени гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi G \rho(x, y, z, t), \quad (4.1.8)$$

а вне газового облака - уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0. \quad (4.1.9)$$

Для описания газодинамических процессов в случае учета вращения более предпочтительной является цилиндрическая система координат.

4.2. Уравнения газовой динамики при осевой симметрии с учетом собственного гравитационного поля

Будем предполагать, что задача об эволюции протопланетного диска Солнца имеет осевую симметрию. В этом случае трехмерная задача сводится к двумерной, которая в цилиндрической системе координат x, r, θ описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial(\rho r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial r} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)r}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial r} = \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)r}{\partial r} = p + \rho w^2 + \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho w r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w r)}{\partial r} = -\rho v w \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial(e r)}{\partial t} + \frac{\partial[(e + p)u r]}{\partial x} + \frac{\partial[(e + p)v r]}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u r \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r \varphi)}{\partial r} + \varphi \frac{\partial(\rho r)}{\partial t} \quad (4.2.5)$$

Ось x направлена по оси вращения газового диска; u, v, w составляющие вектора скорости \mathbf{U} , соответственно, осевая, радиальная и линейная скорость вращения;

$$|\mathbf{U}|^2 = u^2 + v^2 + w^2; \quad (4.2.6)$$

$w = \omega \cdot r$, где ω - угловая частота вращения;

$\rho = \rho(x, r, t)$ - плотность газа; $p = p(x, r, t)$ - давление газа;

$e = \rho[\varepsilon + (u^2 + v^2 + w^2)/2]$ - энергия единицы объема газа;

$\varepsilon = \varepsilon(x, r, t)$ - внутренняя энергия единицы массы газа;

$\varphi = \varphi(x, r, t)$ - гравитационный потенциал представлен в виде:

$$\varphi(x, r, t) = G \int_{V(t)} \frac{\rho(x_T, r_T, t)}{R_\varphi} r_T dx_T dr_T d\theta_T, \quad (4.2.7)$$

где

$$R_\varphi = \sqrt{(x - x_T)^2 + (r \cdot \cos \theta - r_T \cdot \cos \theta_T)^2 + (r \cdot \sin \theta - r_T \cdot \sin \theta_T)^2}, \quad (4.2.8)$$

x_T, r_T, θ_T - текущие цилиндрические координаты, по которым ведется интегрирование в (4.2.7). В интеграле (4.2.7) в силу симметрии может быть выполнено интегрирование по координате θ_T .

Внутри газового облака в фиксированный момент времени гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi(x, r, t) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(x, r, t), \quad (4.2.9)$$

а вне газового облака - уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi(x, r, t) = 0. \quad (4.2.10)$$

Для сложной фигуры типа протопланетного диска потенциал на границе диска заранее неизвестен и может меняться со временем. На каждом временном шаге он либо экстраполируется на границу из бесконечности, либо вычисляется приближенным интегрированием выражения (4.2.7).

4.3. Уравнения состояния газовой среды протопланетного диска

В большинстве случаев газопылевую среду протопланетного диска на начальной стадии образования планет можно считать идеальным газом, и использовать соответствующее уравнение состояния:

$$p = R\rho T / \mu, \quad (4.3.1)$$

где $R = 8,31 \cdot 10^7$ эрг·град⁻¹· моль⁻¹ - газовая постоянная; μ - молекулярный вес; p - давление; ρ - плотность, или

$$p = (\gamma - 1) \varepsilon \rho, \quad (4.3.2)$$

где γ - отношение C_p/C_v газовой среды; ε - внутренняя энергия единицы массы газа.

На начальной стадии образования планет температура газопылевого облака в среднем составляет $\sim 100^0\text{K}$. При таких температурах основной вклад в теплопроводность газопылевой среды дает конвекция. В этих условиях газодинамические процессы в облаке можно с достаточной точностью считать адиабатическими и связь между давлением и плотностью газопылевой среды в этом случае может быть описана формулой

$$p = K \rho^\gamma \quad (4.3.3)$$

где K - константа; γ - отношение C_p/C_v газопылевой среды.

Учет пылевой компоненты газопылевого диска приближенно можно осуществить с помощью двучленного уравнения состояния:

$$p = (\gamma - 1) \varepsilon \rho + (\rho - \rho_0) c_0^2, \quad (4.3.4)$$

где γ , ρ_0 , c_0 - постоянные.

4.4. Уравнения газовой динамики в безразмерных переменных

При проведении численных расчетов газодинамических задач были использованы безразмерные переменные. В качестве единиц для перехода к этим переменным были выбраны следующие единицы:

$$\begin{aligned} [x] = [r] = r_{0d}; & \quad [u] = [v] = [w] = (fm_0/r_{0d})^{1/2}; & [t] = r_{0d}^{3/2}/(fm_0)^{1/2}; \\ [\rho] = m_0/(4\pi r_{0d}^3); & [p] = fm_0^2/(4\pi r_{0d}^4); & [e] = fm_0^2/(4\pi r_{0d}^4); & (4.4.1) \\ [\varepsilon] = fm_0/r_{0d}; & [\omega] = (fm_0)^{1/2}/r_{0d}^{3/2}; & [T] = (fm_0^2/(4\pi r_{0d}^4 a_r))^{1/4}, \end{aligned}$$

где r_{0d} - начальный внешний радиус облака; m_0 - масса облака; $f = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{сек}^2)$ – гравитационная постоянная; $a_r = 4\sigma/c = 7,5657 \cdot 10^{-15} \text{ г}/(\text{см} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{град}^4)$ - постоянная плотности излучения (σ - постоянная Стефана-Больцмана, c - скорость света); $\omega = w/r$ - угловая частота вращения; T – температура.

Система уравнений (4.2.1)-(4.2.5) в безразмерных переменных сохраняет свой вид. Гравитационный потенциал сохраняет свой вид с точностью до константы:

$$\varphi(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V(t)} \frac{\rho(x_T, r_T, t)}{R_\varphi} r_T dx_T dr_T d\theta_T \quad (4.4.2)$$

и соответственно уравнение Пуассона преобразуется к виду:

$$\Delta\varphi(x, r, t) = -\rho(x, r, t) \quad (4.4.3)$$

Уравнение Лапласа остается без изменений. Уравнение Менделеева-Клапейрона принимает вид:

$$p = A\rho T, \quad (4.4.4)$$

$$\text{где} \quad A = R / \left[(4\pi)^{1/4} f^{3/4} a_r^{1/4} \mu m_0^{1/2} \right] \quad (4.4.5)$$

есть безразмерная константа, значение которой зависит от выбранного масштаба массы. (μ - молекулярный вес.)

4.5. Уравнения газовой динамики в форме законов сохранения для криволинейной системы координат

Используемая численная методика является вариантом известной методики для численного решения двумерных газодинамических течений в областях сложной формы с подвижными границами, разработанной С.К. Годуновым и А.В. Забродиним с соавторами [56]. Преимущества данного метода заключаются в том, что он позволяет выделить границы областей газа с разными физическими свойствами (например, контактные границы, ударные волны, ввести эйлерову границу и т.д.) и проследить за сложным движением этих границ.

По положению границ, рассматриваемых как топологический «четырёхугольник», в каждой выделенной области строится два семейства координатных линий, разбивающие область на криволинейные четырёхугольники – ячейки счетной сетки. Сетка изменяется во времени, подстраиваясь под характер движения границ. Поэтому ее конфигурация может быть достаточно сложной, а стороны ячеек существенно криволинейными.

Для построения конечно-разностного алгоритма запишем законы сохранения (4.2.1)-(4.2.5) в интегральной форме в локальных криволинейных координатах.

4.5.1. Локальная криволинейная система координат

Построим на момент времени t в произвольной точке плоскости (x, r) локальную систему координат $\xi = f_1(x, r), \eta = f_2(x, r)$.

Линии одного семейства координат ξ -линии задаются уравнением $\eta = \text{const}$, линии второго семейства η -линии задаются уравнением $\xi = \text{const}$.

Локальную систему координат можно определить заданием метрических параметров длины вдоль координатных линий первого и второго семейств и направляющих косинусов касательных к координатным линиям. Метрический параметр и направляющие косинусы с осями x и r для ξ -линий обозначим соответственно

$$\sqrt{g_{11}}, \alpha', \beta' \quad (4.5.1)$$

Метрический параметр и направляющие косинусы с осями x и r для η -линий обозначим соответственно

$$\sqrt{g_{22}}, \alpha'', \beta'' \quad (4.5.2)$$

Тогда α и β , соответственно косинус и синус угла между координатными линиями первого и второго семейств, через направляющие косинусы запишутся так:

$$\alpha = \alpha' \alpha'' + \beta' \beta'', \quad \beta = \alpha' \beta'' - \beta' \alpha'' \quad (4.5.3)$$

Якобиан перехода к криволинейным координатам есть $\frac{D(x, r)}{D(\xi, \eta)} = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \cdot \beta \equiv \sqrt{g}$, элемент объема $dx \cdot dy = \sqrt{g} \cdot d\xi \cdot d\eta$.

Вдоль каждой из координатных линий вектор скорости U разлагается на касательную и ортогональную к ней компоненты. Компоненту по касательной вдоль координатных линий $\eta = \text{const}$ обозначим как μ^k , а ортогональную к ним как ν^n . При этом

$$(\mu^k)^2 + (\nu^n)^2 = |U|^2. \quad (4.5.4)$$

Аналогично, вдоль координатных линий $\xi = \text{const}$ компонентами будут ν^k и μ^n , где

$$(\nu^k)^2 + (\mu^n)^2 = |U|^2 \quad (4.5.5)$$

Если выбрать локальный базис из векторов, касательных к координатным линиям в каждой точке, и разложить по ним произвольный вектор U , то его составляющими будут μ (по касательной к ξ -линии) и ν (по касательной к η -линии). Эти составляющие называются контравариантными компонентами. Они связаны с декартовыми компонентами u и v следующим образом:

$$\mu = (u\beta'' - v\alpha'') / \beta, \quad \nu = (v\alpha' - u\beta') / \beta. \quad (4.5.6)$$

Компоненты скорости μ^k, ν^n вдоль ξ -линий и ν^k, μ^n вдоль η -линий выражаются через контравариантные составляющие в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} \mu^k &= \mu + \alpha v & , & & v^n &= v\beta, \\ v^k &= v + \alpha \mu & , & & \mu^n &= \mu\beta. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Через декартовы компоненты скорости (u, v) введенные компоненты выражаются в виде следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} \mu^k &= u\alpha' + v\beta' & , & & v^n &= v\alpha' - u\beta' , \\ v^k &= u\alpha'' + v\beta'' & , & & \mu^n &= u\beta'' - v\alpha'' . \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

4.5.2. Интегральная система уравнений газовой динамики в локальной системе координат

В качестве исходной системы уравнений выберем систему дифференциальных уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах (4.2.1)-(4.2.5). Для построения интегральной системы уравнений в локальном базисе и выбранных компонентах скорости необходимо выполнить ряд преобразований этой системы. Последовательность таких действий подробно описана в [56], § 29 и 30.

Приведем окончательный вид системы интегральных уравнений газовой динамики в локальных криволинейных координатах. Интегрирование было выполнено по некоторому объёму V в пространстве x, r, t с поверхностью S . Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса о преобразовании объёмных интегралов в поверхностные и формулами, задающими переход к локальной криволинейной системе координат, получим следующую интегральную систему уравнений в переменных ξ, η, t :

$$\iint_S r \rho \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S r \rho v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S r \rho \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = 0, \quad (4.5.9)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S r \rho \mu^k \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S r \rho \mu^k v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S ((p - \rho\varphi)\beta + \rho \mu^k \mu^n) r \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \\ & - \iiint_V \rho r v \left[\mu K_{\eta=const} + v \left(K_{\xi=const} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) \right] \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt - \\ & - \iiint_V (p - \rho\varphi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{gr}}{\sqrt{g_{11}}} \right) d\xi d\eta dt = \iiint_V \left[\beta' \rho (\varphi + w^2) - \varphi \frac{\partial(\rho r)}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right] \sqrt{g} d\xi d\eta dt \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_S \rho r v^k \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S [(p - \rho\varphi)\beta + \rho v^k v^n] r \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S r \rho v^k \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt + \\
& + \iiint_V \rho r \mu \left[\mu \left(K_{\eta=const} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) + v K_{\xi=const} \right] \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt - \\
& - \iiint_V (p - \rho\varphi) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g} r}{\sqrt{g_{22}}} \right) d\xi d\eta dt = \iiint_V \left(\beta'' \rho (\varphi + w^2) - \varphi \frac{\partial(\rho r)}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) \sqrt{g} d\xi d\eta dt
\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_S r \rho w \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S r \rho w v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S r \rho w \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = \\
& = - \iiint_V \rho w v \sqrt{g} d\xi d\eta dt
\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_S r e \sqrt{g} d\xi d\eta - \iint_S r (e + p - \rho\varphi) v^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt + \iint_S r (e + p - \rho\varphi) \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt = \\
& = - \iiint_V \varphi \left[\sqrt{g_{22}} \frac{\partial(\rho r \mu^n)}{\partial \xi} + \sqrt{g_{11}} \frac{\partial(\rho r v^n)}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta dt
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

Здесь $K_{\xi=const}$, $K_{\eta=const}$ - кривизны координатных линий.

4.6. Система разностных уравнений газовой динамики с подвижными сетками в локальной системе координат

Разностные уравнения строятся на основе интегральных законов (4.5.9) – (4.5.13), записанных для отдельной ячейки сетки на интервале времени от t_0 до $t_0 + \tau$ с учетом движения сетки (подробный вывод см. [56] § 34).

По положению границ можно построить расчетную сетку и два семейства координатных линий на момент времени t_0 . Координатные линии разбивают всю расчетную область на совокупность криволинейных четырехугольников – ячейки расчетной сетки, стороны которых будем называть ребрами. Ребра ячейки можно трактовать как координатные линии локальной криволинейной системы координат.

Определив положение границ на момент времени $t_0 + \tau$, строим расчетную сетку и два семейства координатных линий на этом временном слое. Выберем две ячейки сетки с одинаковыми номерами на плоскостях t_0 и $t_0 + \tau$. Построим в пространстве x, r, t поверхность, проходящую через каждые два одноименных ребра этих ячеек. Протрем это с каждой парой одноименных ребер.

Построенный таким образом элементарный объем V представляет собой криволинейный шестигранник в пространстве x, r, t .

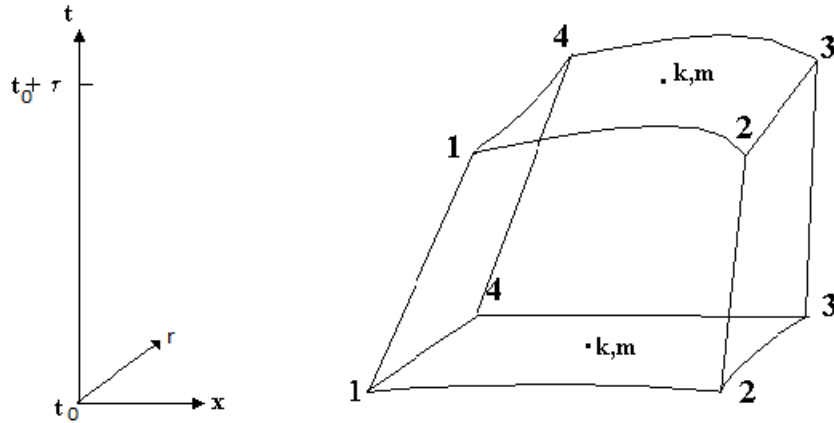


Рис. 4.6.1. Схема ячейки в пространстве - времени

Нижняя его грань относится к моменту t_0 , верхняя - к моменту $t_0 + \tau$. Кроме этих нижней и верхней граней существуют четыре боковых, каждая из которых есть участок криволинейной поверхности, опирающийся на дуги $\xi = const = \xi_0$ (или $\eta = const = \eta_0$) плоскости $t=t_0$ (ребра ячеек сетки нижнего основания) и соответственно дуги $\bar{\xi} = const$ (или $\bar{\eta} = const$) на плоскости $t=t_0 + \tau$ (ребра одноименной ячейки сетки на $t_0 + \tau$). Можно показать, что с точностью до малых более высокого порядка (по сравнению с τ) уравнения этих дуг будут (на каждой плоскости $t = const$) соответственно:

$$\xi = \xi_0 + \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} t, \quad \eta = \eta_0 + \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}} t, \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + \tau). \quad (4.6.1)$$

Величины μ^* , v^* по каждой из боковых граней имеют смысл контравариантных компонент скорости перемещения соответствующей дуги координатной линии от ее положения на момент t_0 до положения на момент $t_0 + \tau$.

Для построения конечно-разностных уравнений из интегральной записи (4.5.9)-(4.5.13) следует принять способ усреднения подинтегральных выражений. Принимается, что по каждой из граней верхнего и нижнего основания значения подинтегральных выражений постоянны и помечаются индексом «0». Аналогично, по каждой из боковых граней значения подинтегральных функций также принимаются усредненными и постоянными в течение всего временного шага τ . Они отмечаются индексом ребра сетки нижнего основания, на которое опирается боковая грань. Значения самих интегралов (после вынесения из под знака интеграла усредненных подинтегральных функций) имеют

следующий геометрический смысл. Для нижнего S_0 и верхнего S^0 оснований:

$$\iint_{S_0} r\sqrt{g}d\xi d\eta, \quad \iint_{S^0} r\sqrt{g}d\xi d\eta \quad (4.6.2)$$

- это объемы фигур, образованных вращением соответственно нижнего S_0 и верхнего S^0 оснований шестигранника вокруг оси x .

Для боковых граней эти интегралы записываются с использованием (4.6.1) в виде:

$$\iint_{S_{бок}} r\sqrt{g}d\xi d\eta = \iint_{S_{бок}} \frac{r\mu^* \sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}} d\eta dt, \quad \iint_{S_{бок}} r\sqrt{g}d\xi d\eta = \iint_{S_{бок}} \frac{rv^* \sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\xi dt \quad (4.6.3)$$

Выражения, содержащие интегрирование по времени, вычисляются по значениям на момент $t = t_0$, т.е.

$$\iint_{S_{бок}} f_1 r\sqrt{g_{11}} d\xi dt = \tau f_1(t_0) \int r\sqrt{g_{11}} d\xi, \quad (4.6.4)$$

$$\iint_{S_{бок}} f_2 r\sqrt{g_{22}} d\eta dt = \tau f_2(t_0) \int r\sqrt{g_{22}} d\eta. \quad (4.6.5)$$

Интегралы, стоящие в правых частях последних выражений, – это площади поверхности фигур, образованных вращением соответствующих ребер $\eta=const$, $\xi=const$ ячейки вокруг оси x .

Введем обозначения: $\bar{\bar{J}}_0$ - объем, представленный интегралом в (4.6.2) для верхнего основания S^0 , J_0 - объем для нижнего основания S_0 ; J_{12}, J_{43} - площади поверхности, образованной вращением соответственно ребер 12, 43 ($\eta=const$); J_{14}, J_{23} - площади фигур, полученных вращением ребер 14, 23 ($\xi=const$). Все величины на момент времени $t_0 + \tau$ помечаются двумя чертами сверху.

Опустив дополнительные пояснения и промежуточные выкладки, приведем окончательный вид системы разностных уравнений:

$$\frac{\bar{\bar{J}}_0 \bar{\bar{\rho}}_0 - J_0 \rho_0}{\tau} = \bar{A}_{12}^{(1)} \bar{J}_{12} - \bar{A}_{43}^{(1)} \bar{J}_{43} + \bar{A}_{14}^{(1)} \bar{J}_{14} - \bar{A}_{23}^{(1)} \bar{J}_{23}, \quad (4.6.6)$$

$$\frac{\bar{\bar{J}}_0 \bar{\bar{\rho}}_0 \bar{\bar{\mu}}_0^k - J_0 \rho_0 \mu_0^k}{\tau} = \bar{A}_{12}^{(2)} \bar{J}_{12} - \bar{A}_{43}^{(2)} \bar{J}_{43} + \bar{A}_{14}^{(2)} \bar{J}_{14} - \bar{A}_{23}^{(2)} \bar{J}_{23} - \bar{A}_0^{(2)} \bar{J}_0 \quad (4.6.7)$$

$$\frac{\bar{\bar{J}}_0 \bar{\bar{\rho}}_0 \bar{\bar{v}}_0^k - J_0 \rho_0 v_0^k}{\tau} = \bar{A}_{12}^{(3)} \bar{J}_{12} - \bar{A}_{43}^{(3)} \bar{J}_{43} + \bar{A}_{14}^{(3)} \bar{J}_{14} - \bar{A}_{23}^{(3)} \bar{J}_{23} - \bar{A}_0^{(3)} \bar{J}_0 \quad (4.6.8)$$

$$\frac{\bar{J}_0 \bar{\rho}_0 \bar{w}_0 \left(1 + \frac{\bar{v}_0}{\bar{r}_0} \right) - J_0 \rho_0 w_0}{\tau} = \bar{A}_{12}^{(6)} \bar{J}_{12} - \bar{A}_{43}^{(6)} \bar{J}_{43} + \bar{A}_{14}^{(6)} \bar{J}_{14} - \bar{A}_{23}^{(6)} \bar{J}_{23} \quad (4.6.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{J}_0 \bar{\rho}_0 \left(\bar{\varepsilon}_0 + \frac{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2 + \bar{w}_0^2}{2} \right) - J_0 \rho_0 \left(\varepsilon_0 + \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} \right)}{\tau} = \\ & = \left(\bar{A}_{12}^{(4)} + \bar{A}_{12}^{(5)} \right) \bar{J}_{12} - \left(\bar{A}_{43}^{(4)} + \bar{A}_{43}^{(5)} \right) \bar{J}_{43} + \left(\bar{A}_{14}^{(4)} + \bar{A}_{14}^{(5)} \right) \bar{J}_{14} - \left(\bar{A}_{23}^{(4)} + \bar{A}_{23}^{(5)} \right) \bar{J}_{23} \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Компоненты скорости $\bar{\mu}_0^k, \bar{v}_0^k$ пересчитываются в декартовы \bar{u}_0, \bar{v}_0 согласно формулам (4.5.8):

$$\bar{u}_0 = \frac{\bar{\mu}_0^k \beta'' - \bar{v}_0^k \beta'}{\beta}, \quad \bar{v}_0 = \frac{\bar{\mu}_0^k \alpha'' - \bar{v}_0^k \alpha'}{-\beta}.$$

Величины $\bar{A}_{ij}^{(k)}, \bar{A}_0^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) рассчитываются следующим образом:

$$\bar{A}_{12}^{(1)} = \bar{\rho}_{12} [\bar{v}^n - (\bar{v}^*)^n]_{12}, \quad \bar{A}_{23}^{(1)} = \bar{\rho}_{23} [\bar{\mu}^n - (\mu^*)^n]_{23}, \quad (4.6.11)$$

$$\bar{A}_{43}^{(1)} = \bar{\rho}_{43} [\bar{v}^n - (\bar{v}^*)^n]_{43}, \quad \bar{A}_{14}^{(1)} = \bar{\rho}_{14} [\bar{\mu}^n - (\mu^*)^n]_{14}, \quad (4.6.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{12}^{(2)} &= \bar{A}_{12}^{(1)} \bar{\mu}_{12}^k, \\ \bar{A}_{14}^{(2)} &= \bar{A}_{14}^{(1)} (\beta \bar{\mu}^n + \alpha \bar{v}^k)_{14} + \beta_{14} [(\bar{p}_{14} - p_0) - \bar{\rho}_{14} (\varphi_{14} - \varphi_0)], \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{43}^{(2)} &= \bar{A}_{43}^{(1)} \bar{\mu}_{43}^k, \\ \bar{A}_{23}^{(2)} &= \bar{A}_{23}^{(1)} (\beta \bar{\mu}^n + \alpha \bar{v}^k)_{23} + \beta_{23} [(\bar{p}_{23} - p_0) - \bar{\rho}_{23} (\varphi_{23} - \varphi_0)], \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_0^{(2)} &= -\bar{\rho}_0 \bar{v}_0 \left[(\bar{\mu}_0 - \mu_0^*) K_{\eta=const,0} + (\bar{v}_0 - v_0^*) \left(K_{\xi=const,0} + \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \eta} \right)_0 \right) \right] \beta_0 - \\ & \quad - \frac{1}{r_0} \rho_0 w_0^2 \beta'_0 \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_0^{(3)} = & \bar{\rho}_0 \bar{\mu}_0 \left[(\bar{\mu}_0 - \mu_0^*) \left(K_{\eta=const,0} - \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial[\eta, \xi]}{\partial \xi} \right)_0 \right) + (\bar{v}_0 - v_0^*) K_{\xi=const,0} \right] \beta_0 - \\ & - \frac{1}{r_0} \rho_0 w_0^2 \beta''_0 \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

$$\bar{A}_{12}^{(3)} = \bar{A}_{12}^{(1)} (\beta \bar{v}^n + \alpha \bar{\mu}^k)_{12} + \beta_{12} [(\bar{p}_{12} - p_0) - \bar{\rho}_{12} (\varphi_{12} - \varphi_0)], \quad (4.6.17)$$

$$\bar{A}_{14}^{(3)} = \bar{A}_{14}^{(1)} \bar{v}_{14}^k, \quad (4.6.18)$$

$$\bar{A}_{43}^{(3)} = \bar{A}_{43}^{(1)} (\beta \bar{v}^n + \alpha \bar{\mu}^k)_{43} + \beta_{43} [(\bar{p}_{43} - p_0) - \bar{\rho}_{43} (\varphi_{43} - \varphi_0)], \quad (4.6.19)$$

$$\bar{A}_{23}^{(3)} = \bar{A}_{23}^{(1)} \bar{v}_{23}^k, \quad (4.6.20)$$

$$\bar{A}_{12}^{(4)} = \bar{A}_{12}^{(1)} \left[\bar{\varepsilon} + \frac{(\bar{v}^n)^2 + (\bar{\mu}^k)^2}{2} \right]_{12} + \bar{v}_{12}^n [\bar{p}_{12} - \bar{\rho}_{12} (\varphi_{12} - \varphi_0)], \quad (4.6.21)$$

$$\bar{A}_{43}^{(4)} = \bar{A}_{43}^{(1)} \left[\bar{\varepsilon} + \frac{(\bar{v}^n)^2 + (\bar{\mu}^k)^2}{2} \right]_{43} + \bar{v}_{43}^n [\bar{p}_{43} - \bar{\rho}_{43} (\varphi_{43} - \varphi_0)], \quad (4.6.22)$$

$$\bar{A}_{23}^{(4)} = \bar{A}_{23}^{(1)} \left[\bar{\varepsilon} + \frac{(\bar{\mu}^n)^2 + (\bar{v}^k)^2}{2} \right]_{23} + \bar{\mu}_{23}^n [\bar{p}_{23} - \bar{\rho}_{23} (\varphi_{23} - \varphi_0)], \quad (4.6.23)$$

$$\bar{A}_{14}^{(4)} = \bar{A}_{14}^{(1)} \left[\bar{\varepsilon} + \frac{(\bar{\mu}^n)^2 + (\bar{v}^k)^2}{2} \right]_{14} + \bar{\mu}_{14}^n [\bar{p}_{14} - \bar{\rho}_{14} (\varphi_{14} - \varphi_0)], \quad (4.6.24)$$

$$\bar{A}_{12}^{(5)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{12}^{(1)} + |\bar{A}_{12}^{(1)}| \right) w_{0,-1}^2 / 2 + \left(\bar{A}_{12}^{(1)} - |\bar{A}_{12}^{(1)}| \right) w_0^2 / 2 \right], \quad (4.6.25)$$

$$\bar{A}_{43}^{(5)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{43}^{(1)} + |\bar{A}_{43}^{(1)}| \right) w_0^2 / 2 + \left(\bar{A}_{43}^{(1)} - |\bar{A}_{43}^{(1)}| \right) w_{0,1}^2 / 2 \right], \quad (4.6.26)$$

$$\bar{A}_{14}^{(5)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{14}^{(1)} + |\bar{A}_{14}^{(1)}| \right) w_{-1,0}^2 / 2 + \left(\bar{A}_{14}^{(1)} - |\bar{A}_{14}^{(1)}| \right) w_0^2 / 2 \right], \quad (4.6.27)$$

$$\bar{A}_{23}^{(5)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{23}^{(1)} + |\bar{A}_{23}^{(1)}| \right) w_0^2 / 2 + \left(\bar{A}_{23}^{(1)} - |\bar{A}_{23}^{(1)}| \right) w_{1,0}^2 / 2 \right], \quad (4.6.28)$$

$$\bar{A}_{12}^{(6)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{12}^{(1)} + |\bar{A}_{12}^{(1)}| \right) w_{0,-1} + \left(\bar{A}_{12}^{(1)} - |\bar{A}_{12}^{(1)}| \right) w_0 \right], \quad (4.6.29)$$

$$\bar{A}_{43}^{(6)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{43}^{(1)} + |\bar{A}_{43}^{(1)}| \right) w_0 + \left(\bar{A}_{43}^{(1)} - |\bar{A}_{43}^{(1)}| \right) w_{0,1} \right], \quad (4.6.30)$$

$$\bar{A}_{14}^{(6)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{14}^{(1)} + \left| \bar{A}_{14}^{(1)} \right| \right) w_{-1,0} + \left(\bar{A}_{14}^{(1)} - \left| \bar{A}_{14}^{(1)} \right| \right) w_0 \right], \quad (4.6.31)$$

$$\bar{A}_{23}^{(6)} = 0.5 \left[\left(\bar{A}_{23}^{(1)} + \left| \bar{A}_{23}^{(1)} \right| \right) w_0 + \left(\bar{A}_{23}^{(1)} - \left| \bar{A}_{23}^{(1)} \right| \right) w_{1,0} \right]. \quad (4.6.32)$$

В формулах для $\bar{A}_{ij}^{(5)}$, $\bar{A}_{ij}^{(6)}$ используются дополнительные обозначения:

$w_{0,-1}$ – значение компоненты скорости из соседней ячейки, прилегающей к ребру 12; $w_{0,1}$ – из соседней ячейки, прилегающей к ребру 43; соответственно, $w_{-1,0}$ – из ячейки, соседней к ребру 14, $w_{1,0}$ – из ячейки, соседней к ребру 23.

Система разностных уравнений (4.6.6)-(4.6.32) позволяет для каждой пространственной счетной ячейки вычислить по значениям $\rho_0, u_0, v_0, w_0, \varepsilon_0, \varphi_0$ на нижнем основании шестигранника и известным значениям величин на его боковых гранях значения $\rho_0, u_0, v_0, w_0, \varepsilon_0$ на верхнем основании пространственной счетной ячейки, т.е. на последующий момент времени $t_0 + \tau$. Найти значение гравитационного потенциала φ_0 возможно только после выполнения подобной процедуры по всем ячейкам обсчитываемого пространства задачи. После этого придем к исходному состоянию для выполнения следующего шага.

Таким образом, алгоритм решения задачи складывается из следующих этапов.

1. Определение положения границ счетной области на момент времени $t_0 + \tau$.

2. Построение сетки на момент $t_0 + \tau$, исходя из положения границ счетной области и используя определенный алгоритм расчета.

3. Определение величин на боковых гранях пространственной счетной ячейки (газодинамических величин и значений потенциала φ) по величинам, относящимся к моменту времени t_0 .

4. Решение системы разностных уравнений – определение $\rho, u, v, w, \varepsilon$ во всех счетных ячейках на момент $t_0 + \tau$. Здесь же определяется допустимый шаг τ для выполнения следующего перехода по времени. Шаг τ выбирается из условия устойчивости явной разностной схемы для уравнений газовой динамики.

5. Расчет гравитационного потенциала φ на момент $t_0 + \tau$. Попутно по всем счетным ячейкам вычисляются и запоминаются значения $\partial\varphi/\partial n$ – производные по нормали ко всем ребрам каждой счетной ячейки (используются при получении величин на боковых гранях).

Этим заканчивается расчет одного шага по времени.

4.7. Расчет величин на боковых гранях пространственного шестигранника

В разностных уравнениях системы (4.6.6)-(4.6.32) участвуют величины, относящиеся к боковым граням ячейки: $\left\{ \bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \left(\bar{\mu}^n, \bar{v}^k, (\mu^*)^n \right) \text{ или } \left(\bar{v}^n, \bar{\mu}^k, (v^*)^n \right), \varphi \right\}_{ij}$. Они отмечены индексом i,j ребра ячейки, на которую опирается соответствующая грань.

Зная значения газодинамических величин в ячейках по обе стороны ребра i,j на момент t_0 , можно рассчитать плоский распад разрыва (см. в [56], §7, §13). Для расчета распада разрыва скорости $(u,v)_0$ в соседних ячейках переразлагаются на нормальную и касательную составляющие к общему ребру i,j .

Для учета действия гравитации и центробежной силы к нормальной составляющей скорости в каждой из ячеек делается добавка $\tau \cdot \Delta_{i,j}$, где

$$\Delta_{i,j} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{i,j} + \left(\frac{w_0^2}{r_0} \right)_{i,j}^n - \text{сумма нормальных к ребру составляющих}$$

соответствующих сил (о вычислении $\partial \varphi / \partial n$ см. ниже). Как вариант, аналогичная добавка может быть сделана к скорости на контактном разрыве.

Сравнивая скорости разрывов, полученных в расчете распада, и нормальную скорость $(\mu^*)_{ij}^n$ (или $(v^*)_{ij}^n$) ребра i,j , отбираем значения $(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\varepsilon})_{ij}$ и $(\bar{\mu}^n, \bar{v}^k)_{ij}$ (для ребра $\zeta = const$) либо $(\bar{v}^n, \bar{\mu}^k)_{ij}$ (для ребра $\eta = const$). Полученные величины считаются постоянными на временном интервале $(t_0, t_0 + \tau)$.

Скорость ребра вычисляется по разности координат Δx , Δr середины ребра (i,j) соответственно на верхнем (время $t = t_0 + \tau$) и нижнем (время $t = t_0$) основаниях счетного шестигранника с использованием формул (4.5.6)-(4.5.8).

Потенциал $\varphi_{i,j}$ на боковой грани вычисляется по значениям φ_0 в ячейках нижнего основания по обе стороны ребра i,j линейной интерполяцией по расстояниям от центров ячеек до середины ребра i,j .

4.8. Расчет гравитационного потенциала

Заметим, что гравитационный потенциал обсчитываемого объекта может складываться из двух частей: $\varphi = \varphi_s + \varphi_d$. Первое слагаемое обусловлено гравитационным полем, создаваемым внешним источником. Второе слагаемое связано с собственным гравитационным полем обсчитываемого тела. В этом случае потенциал φ_d удовлетворяет уравнению Пуассона (4.4.3).

4.8.1. Разностный метод расчета гравитационного потенциала

Дискретизацию уравнения (4.4.3) проводим согласованно с дискретизацией уравнений газовой динамики. Переходя к интегральной записи этого уравнения для каждой ячейки S_{km} верхнего основания счетного шестигранника, ограниченной контуром ω , получаем

$$-\iint_{S_{km}} \rho r dx dr = \oint_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega, \quad (4.8.1)$$

где n - внешняя нормаль к ω . Для вычисления двойного интеграла, входящего в соотношение (4.8.1), воспользуемся согласованной с основными газодинамическими уравнениями аппроксимацией:

$$-\iint_{S_{km}} \rho r dx dr \cong -\bar{\rho} \bar{J},$$

где \bar{J} - объем ячейки S_{km} на слое $t_0 + \tau$ (см. (4.6.2)). Контурный интеграл $-\oint_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega$ разбиваем на сумму четырех интегралов по числу ребер ячейки:

$\Delta = \Delta_{12} + \Delta_{43} + \Delta_{14} + \Delta_{23}$ и будем аппроксимировать каждый из них отдельно.

Для аппроксимации криволинейного интеграла

$$\Delta_{ab} = -\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega, \quad (4.8.2)$$

где ab - одно из ребер ячейки, воспользуемся методом, являющимся вариантом известного интегроинтерполяционного метода. Метод основан на локальном полиномиальном приближении функции φ по ее значениям на некоторой совокупности узлов, близких к ребру ab , с последующим дифференцированием приближающего многочлена и подстановкой нормальной производной в интеграл.

Свяжем с каждым ребром ab регулярный 12-точечный шаблон расчетной сетки, его узлы $l=1, \dots, L_0$, $L_0=12$, φ_l - значения функции φ в узлах шаблона. Введем специальную локальную криволинейную систему координат (q, s) , связанную с ребром.

Функцию $\varphi(q, s)$ аппроксимируем в окрестности ребра ab многочленом

$$P(q, s) = \sum_{i=1}^{i_0} c_i \psi_i(q, s) \quad (4.8.3)$$

по базисной полиномиальной системе функций $\{\psi_i(q, s), i=1, 2, \dots, i_0\}$, здесь i_0 - число базисных функций (3, 6 или 12).

Коэффициенты c_i в (4.8.3) находим из условия наилучшего среднеквадратичного приближения на 12-точечном шаблоне:

$$\sum_{l=1}^{12} \delta_l (P(q_l, s_l) - \varphi_l)^2 = \min . \quad (4.8.4)$$

Здесь $\delta_l \geq 0$ - весовые множители, они выбираются по некоторым достаточно простым эмпирическим правилам в зависимости от расположения узлов в данном шаблоне.

Подставляя многочлен (4.8.3) в условие наилучшего приближения и приравнивая нулю производные по коэффициентам c_i , получаем для них систему линейных уравнений с некоторой матрицей A и правой частью f , зависящей от $\{\varphi_l\}$. Вычисляя матрицу A^{-1} , обратную к A , получаем для $\varphi(t, q, s)$ локальное приближение в виде

$$\varphi(t, q, s) = \sum_{l=1}^{12} \delta_l \varphi_l \left\{ \sum_{i=1}^{i_0} b_{il} \psi_i(q, s) \right\}, \quad (4.8.5)$$

где $b_{il} = \sum_{k=1}^{i_0} a_{ik} \psi_k(q_l, s_l)$.

В результате интеграл (4.8.2) для ребра ab записывается в виде линейной комбинации значений φ_l сеточной функции φ в узлах шаблона (см. рис. 4.8.1)

$$\Delta_{ab} = \sum_{l=1}^{12} D_l \varphi_l . \quad (4.8.6)$$

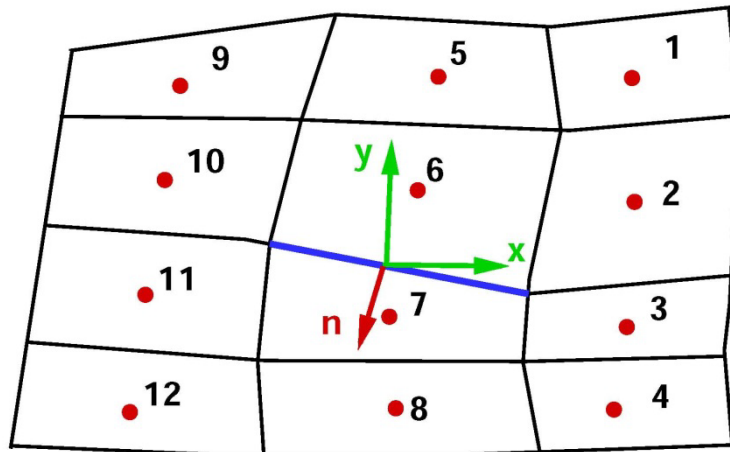


Рис. 4.8.1. 12-точечный шаблон ребра

Для каждой ячейки (k, m) после суммирования четырех криволинейных интегралов получаем дискретное уравнение

$$\sum_{G_{km}} \bar{D}_l \varphi_l = \bar{J} \bar{\rho}, \quad (4.8.7)$$

где 21-точечный шаблон $G_{km} = \{(x_l, y_l), l=1, \dots, 21\}$ получен объединением шаблонов четырех ребер ячейки (k, m) ; здесь l - номер узла шаблона G_{km} , \bar{D}_l - коэффициенты разностного уравнения (некоторые разностные

коэффициенты \bar{D}_l могут быть близки к нулю или нулевыми), а сумма берется по всем узлам объединенного шаблона, см. рис. 4.8.2.

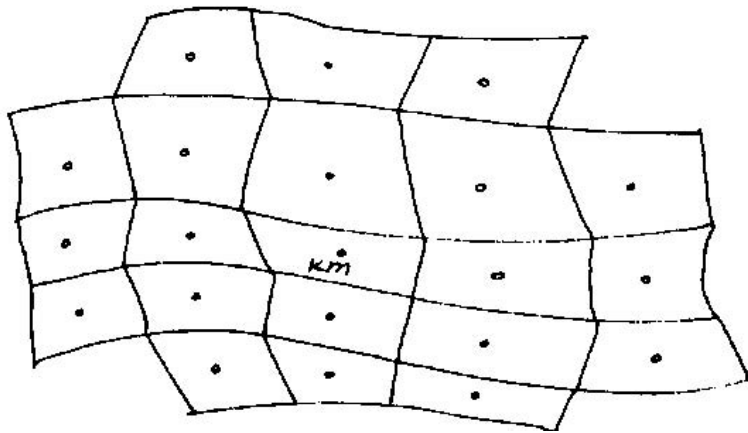


Рис. 4.8.2. 21-точечный шаблон ячейки

Задача свелась к нахождению решения φ разностного уравнения (4.8.7) на момент времени $t_0 + \alpha\tau$, $0,5 \leq \alpha \leq 1$, при известной плотности на слое $t_0 + \tau$.

Алгоритм нахождения решения φ уравнения (4.8.7) первоначально осуществлялся с помощью схемы ЛИ-М, также применяемой для решения уравнения теплопроводности. Пусть n - номер итерации, $\varphi^{(n)}$ - итерационное приближение, a_n - итерационные параметры. Алгоритм схемы ЛИ-М применительно к (4.8.7) имеет вид

$$\varphi^{(n)} = \frac{1}{a_n} \left\{ a_n \varphi^{(n-1)} + \left(\frac{\Delta(\varphi^{(n-1)})}{J} - \bar{\rho} \right) \right\},$$

$n=1,2,\dots,N$. Здесь $\Delta(\varphi^{(n-1)})$ - поток через границу ячейки, вычисляемый по значениям $\varphi^{(n-1)}$ с помощью формул вида (4.8.6). За начальное приближение $\varphi^{(0)}$ принимается значение φ на момент времени t_0 . Каждая итерация выполняется одновременно для всех точек расчетной области. Краевое условие на границе расчетной области задавалось экстраполяцией из бесконечности.

Результат итераций: $\bar{\varphi}_0 = \varphi^{(N)}$. Число итераций и параметры a_n находим по формулам

$$N = \frac{\pi}{4} \sqrt{r_{\max} \tau + 1} + 1, \quad a_n = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} - \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} \beta_n,$$

где β_n - корни многочлена Чебышева 1-го рода F_q степени q , наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$, с условием нормировки $F_q(0)=1$.

Число r_{\max} - оценку сверху максимального собственного значения разностного аналога оператора Лапласа находим по значениям D -коэффициентов с помощью теоремы Гершгорина о кругах спектра:

$$r_{\max} = \max_{(km)} \frac{1}{J_{km} G_{km}} \sum |\bar{D}_l|$$

В качестве оценки минимального собственного значения берем $r_{\min} = r_{\max}/M$, где M - число ячеек в расчетной области. Данный алгоритм можно использовать для решения нестационарного уравнения.

Решение разностного уравнения (4.8.7) – получение φ_0 по известной плотности ρ_0 завершает расчет шага. Полученные из окончательных значений потока $\Delta_{ab}^{(N)}$ величины $\partial\varphi/\partial n|_{ab}$ (см. (4.8.2)) будут использоваться при расчете распада разрыва на следующем счетном шаге.

В конечном счете, от итерационного алгоритма отказались ввиду проблем с постановкой краевого условия. Вместо итерационного алгоритма используется прямой расчет интеграла (4.1.6). Этот метод является вычислительно затратным, но более точным.

4.9. Численные расчеты с использованием 2D программного комплекса

При численном моделировании эволюции протопланетного диска Солнца рассматривается система Солнце-протопланетный диск на той стадии ее эволюции, когда имеет место осевая симметрия. Для рассмотрения данной задачи используется цилиндрическая система координат, начало координат которой помещается в центр Солнца. Гравитационный потенциал системы может быть записан как:

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_d, \quad (4.9.1)$$

где потенциал Солнца (φ_s) представляется в цилиндрической системе координат (x, r) в виде:

$$\varphi_s = G \frac{M_s}{\sqrt{x^2 + r^2}}, \quad (4.9.2)$$

где M_s - масса Солнца; G - гравитационная постоянная; φ_d - гравитационный потенциал протопланетного диска.

В этих расчетах не будет учитываться излучение, и тогда полностью применим метод расчета, описанный в подразделах 4.1 – 4.8.

4.9.1. Результаты численных расчетов стационарных состояний протопланетного диска в приближении Роша

В приближении Роша собственное гравитационное поле протопланетного диска мало по сравнению с гравитационным полем Солнца. Поэтому гравитационный потенциал имеет вид:

$$\varphi = \varphi_s . \quad (4.9.3)$$

Предлагаемый численный метод позволяет проводить тестовые расчеты стационарных состояний протопланетного диска, полученных аналитически (раздел 3 данной главы).

В качестве примера приведем расчет тороидального протопланетного кольца. Для расчета стационарного состояния данного типа кольца, использовались следующие начальные данные. Начальное распределение плотности кольца в цилиндрических координатах (r, z) описывается уравнением:

$$\frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{\omega_0^2 r_0^2}{4} \left(\exp\left(-\frac{2r_{ex}^2}{r_0^2}\right) - \exp\left(-\frac{2r^2}{r_0^2}\right) \right) + GM_s \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) \quad (4.9.4)$$

Начальная угловая скорость вращения представлена выражением:

$$\Omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (4.9.5)$$

где $M_s = 1,989 \cdot 10^{33}$ г; $K = 2,476 \cdot 10^{16} \frac{\text{см}^{3\gamma-1}}{\Gamma^{\gamma-1} \text{с}^2}$.

Определим остальные константы в соотношениях (4.9.4), (4.9.5). В соответствии с данными подраздела 2.1 полагаем $\gamma = 1,43$. Константа $r_{ex} = 4,52 \cdot 10^{14}$ см, что примерно соответствует расстоянию до планеты Нептун. Константы ω_0 и r_0 положим равными $\omega_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{14}$ см. Координаты границы кольца $(r_{гр}, z_{гр})$ находим из условия $\rho(r_{гр}, z_{гр}) = 0$. Отсюда же получаем, что внутренний радиус равен примерно $r_{in} = 3,81 \cdot 10^{14}$ см.

Граничное условие задается в соответствии с равновесным, стационарным состоянием кольца, находящегося в вакууме. В приводимых ниже расчетах на внешней границе задавалось условие нулевой скорости.

Все результаты приведены в системе единиц (4.4.1), где приняты следующие константы: $m_0 = 5,98 \cdot 10^{27}$ г; $r_{0d} = 4,52 \cdot 10^{14}$ см; $f = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\Gamma \cdot \text{с}^2)$. Таким образом, размерности величин, приведённых ниже, будут следующие: $[\rho] = 5,15 \cdot 10^{-18} \text{ г/см}^3$, $[t] = 4,81 \cdot 10^{11} \text{ с} \approx 15247 \text{ лет}$, $[\varepsilon] = 8,82 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{с}^2$, $[w] = 939,39 \text{ см/с}$, а задаваемые параметры: $K = 1033,42$; $\omega_0 = 962330,29$; $r_0 = 0,3319$; $GM_s = 332608,7$.

Расчетная область и сетка в ней приведены на рис. 4.9.1. На этом и последующих рисунках ось z представляет собой ось вращения, r – цилиндрический радиус. В силу симметрии кольца относительно плоскости $z=0$ левая половина $z<0$ не рассчитывается, а на оси r ставится граничное условие отражения.

Для построения расчетной сетки участок границы кольца вдоль оси r разбит на три отрезка точками $A(r=0,95)$, $B(r=0,885)$. Тогда дугу - границу кольца будем считать верхней границей топологического четырехугольника, средний отрезок AB оси r – нижней границей, а два других отрезка вдоль оси r – левой и правой границами соответственно. Сетку образуют криволинейные лучи, соединяющие точки нижней и верхней границ, и дуги, соединяющие точки левой и правой границ.

Фрагмент сетки вблизи оси r в увеличенном масштабе приведен на рис. 4.9.2. Верхняя и нижняя границы разделены на 150 счетных интервалов, левая и правая границы – на 100 интервалов.

Начальные распределения плотности, удельной внутренней энергии и линейной скорости вращения среды кольца представлены изолиниями соответственно на рис. 4.9.3, 4.9.4 и 4.9.5.

Как видно из рис. 4.9.3 - 4.9.5, конфигурация кольца в этой модели резко отличается от обычно рассматриваемых протопланетных дисков, для которых характерна малая толщина диска по сравнению с радиальными размерами, а последние перекрывают размеры Солнечной планетной системы. В рассматриваемом же случае радиальный размер составляет по порядку величины расстояние между Нептуном и его ближайшей планетой – Ураном, а толщина кольца превышает его радиальный размер.

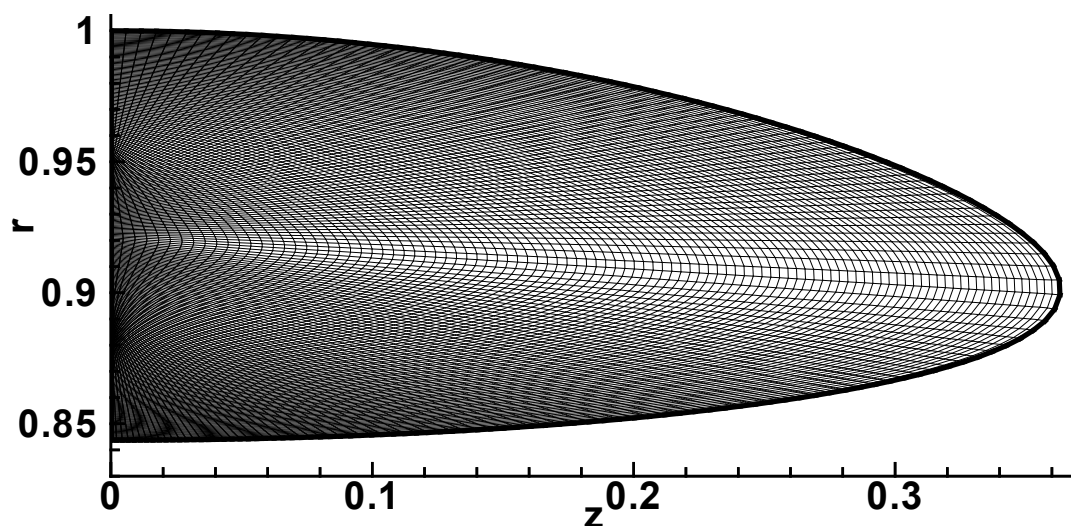


Рис. 4.9.1 Расчетная сетка.

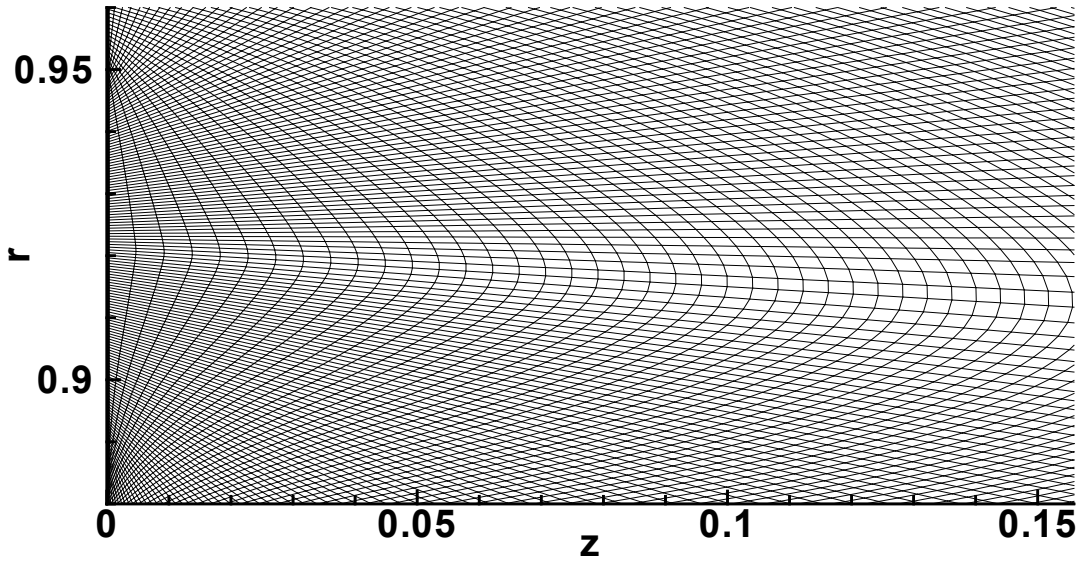


Рис. 4.9.2. Фрагмент расчетной сетки.

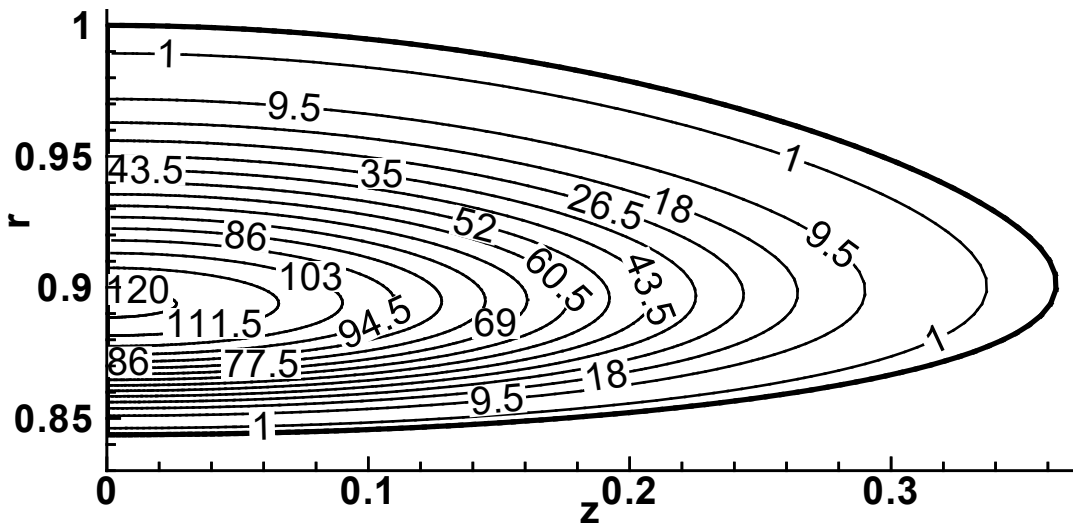


Рис. 4.9.3. Начальное распределение плотности.

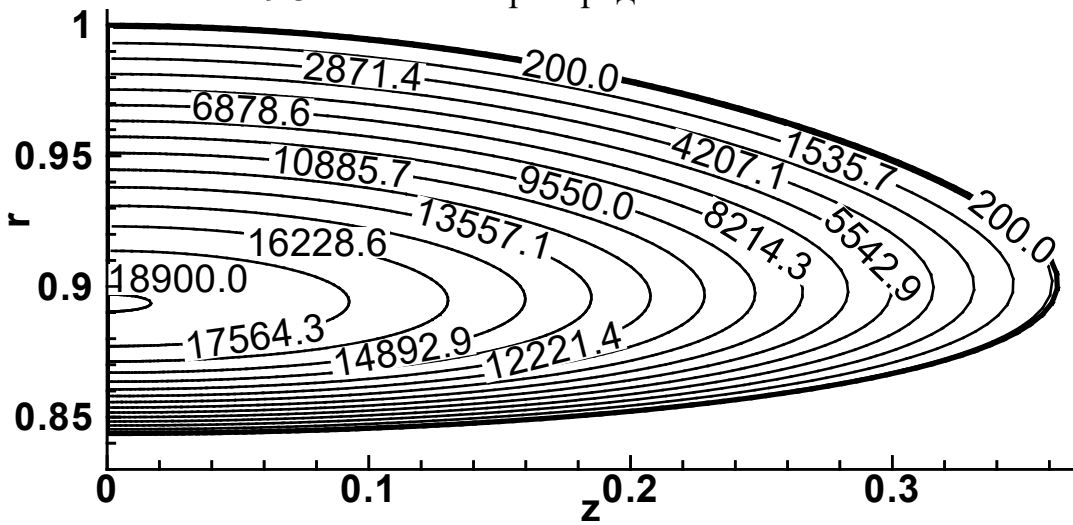


Рис. 4.9.4. Начальное распределение удельной внутренней энергии.

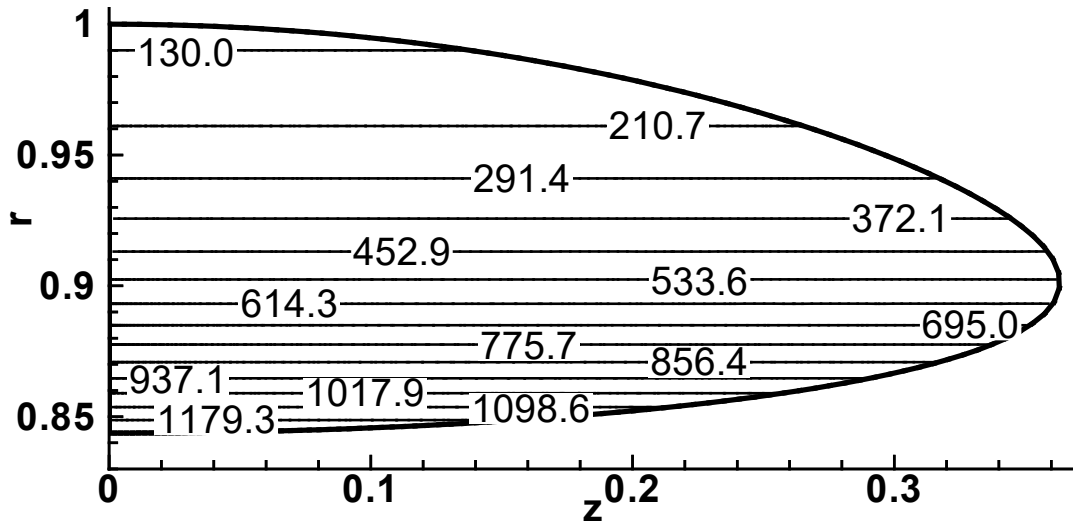


Рис. 4.9.5. Начальное распределение линейной скорости вращения.

Полученные начальные распределения параметров среды (рис. 4.9.3 – 4.9.5) описывают только одну зону протопланетного диска. В данном случае – это зона планеты Нептун, которая задается характерным для него расстоянием r_{ex} .

Расчеты проводились до времени $t=0,00146$. На рис. 4.9.6 – 4.9.8 показаны соответственно распределения плотности, удельной внутренней энергии и линейной скорости вращения на последний расчетный момент времени.

Сравнительный анализ рис. 4.9.3-4.9.5 и рис. 4.9.6-4.9.8 показывает, что на временах 0,00146 распределения плотности, удельной внутренней энергии и линейной скорости вращения в наиболее значимой области диска, где достигается наибольшая плотность (центральная область диска), изменяются не более, чем на 5% - 10%.

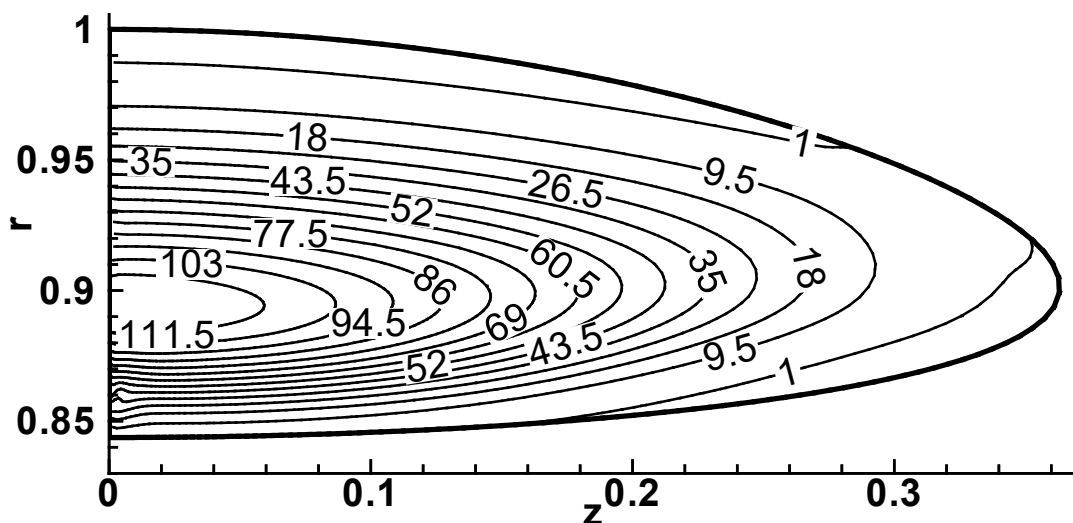


Рис. 4.9.6. Распределение плотности на момент времени $t = 0,00146$.

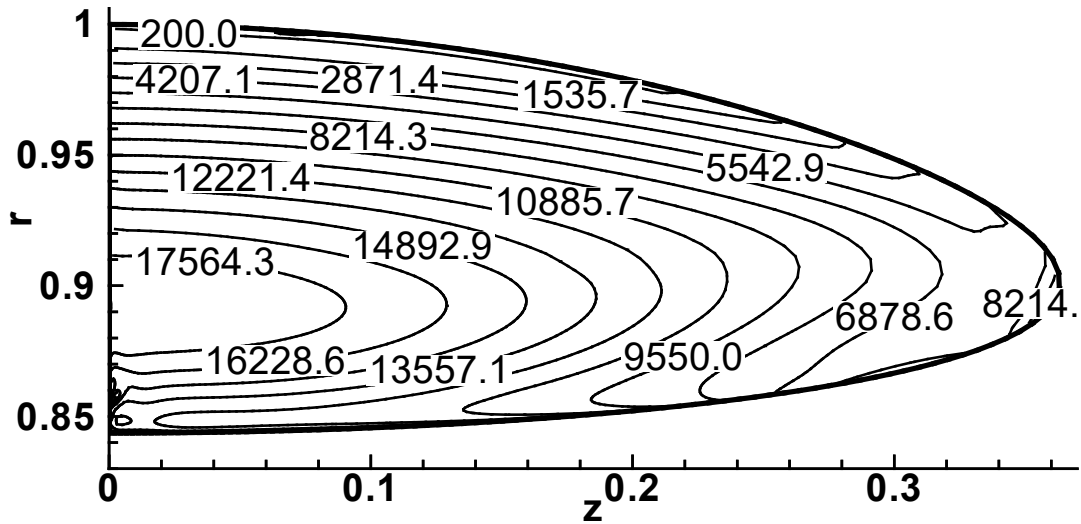


Рис. 4.9.7. Распределение удельной внутренней энергии на момент времени $t = 0,00146$.

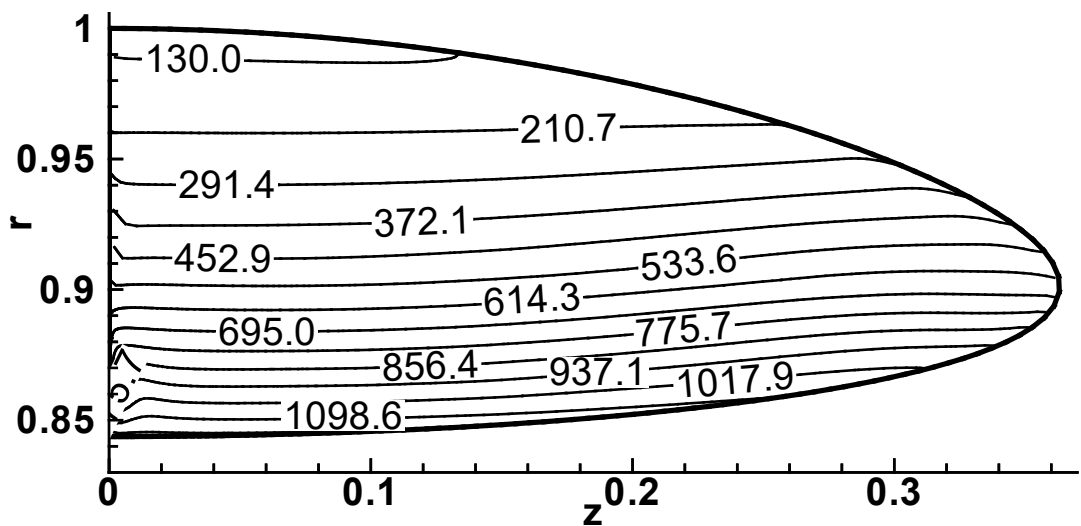


Рис. 4.9.8. Распределение линейной скорости вращения на момент времени $t = 0,00146$.

Распределения плотности вдоль оси r на начальный и конечный расчетные моменты времени приведены на рис. 4.9.9. Из этих графиков отчетливо видно, что изменение плотности на расчетных временах, действительно незначительно.

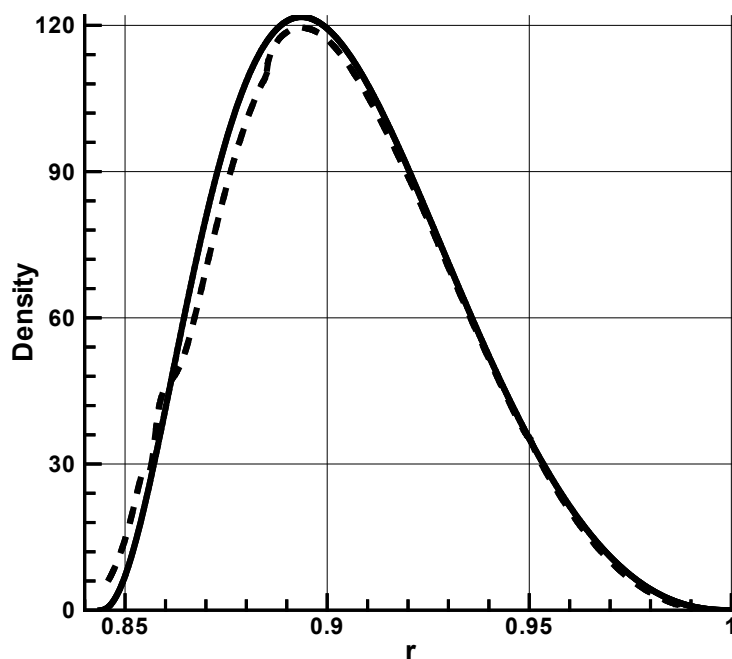


Рис.4.9.9. Распределение плотности вдоль оси r ,
 — $t = 0$, - - - $t = 0,00146$.

4.9.2. Результаты численного расчета нестационарного протопланетного кольца в приближении Роша

Для сравнения со стационарным состоянием были проведены расчеты для протопланетного кольца, распределение плотности которого отличалось от стационарного состояния. С этой целью было взято кольцо, размеры и форма которого совпадали со стационарным кольцом, а распределение плотности изменялось по линейному закону от центральной линии тела кольца к его границе. Масса кольца и его начальная угловая скорость в обоих случаях были одинаковы.

На рис. 4.9.10, 4.9.11, 4.9.12 показаны распределения плотности, удельной внутренней энергии и линейной скорости вращения на начальный момент времени, а на рис. 4.9.13, 4.9.14, 4.9.15 – на последний момент расчета $t = 0,0005$. Сравнительный анализ рис. 4.9.10, 4.9.11, 4.9.12 и рис. 4.9.13, 4.9.14, 4.9.15 показывает, что на временах 0,0005 распределения плотности, удельной внутренней энергии и линейной скорости вращения изменяются значительно во всей области кольца.

Распределения плотности вдоль оси r на начальный и конечный расчетные моменты времени приведены на рис. 4.9.16.

Из этого рисунка отчетливо видно, что плотность на расчетный момент времени даже в центральной части кольца изменилась примерно на 40%. Более детальный анализ эволюции кольца в данной задаче показывает, что начальное неравновесное состояние кольца стремится к равновесному состоянию (рис. 4.9.3, 4.9.4 и 4.9.5), а распределение

плотности по координате r – к своему равновесному распределению (рис. 4.9.9). Так как на данном этапе разработки численной модели не учитываются диссипативные эффекты при движении среды, то при движении конфигурации кольца к равновесной конфигурации происходит колебательный процесс около равновесного состояния кольца.

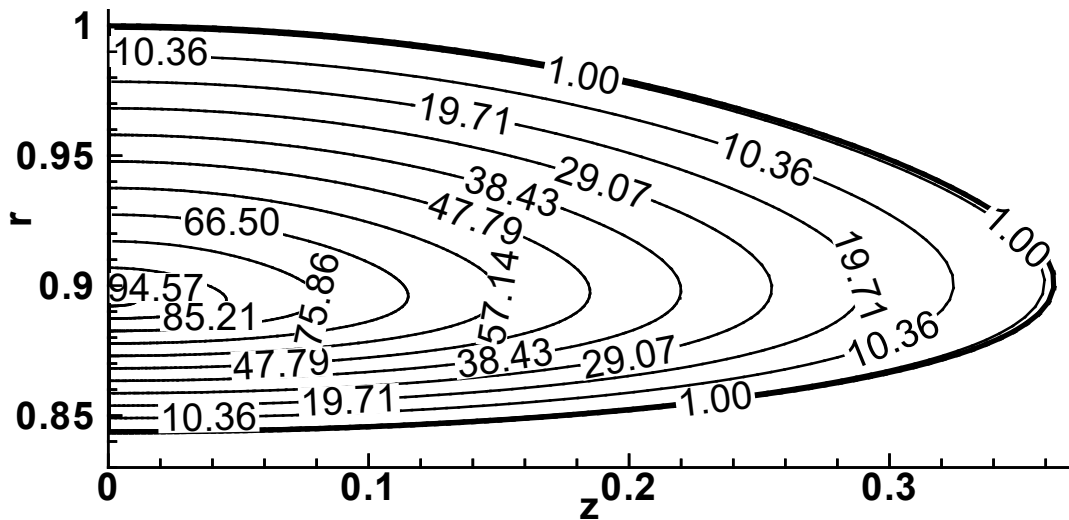


Рис. 4.9.10. Начальное распределение плотности.

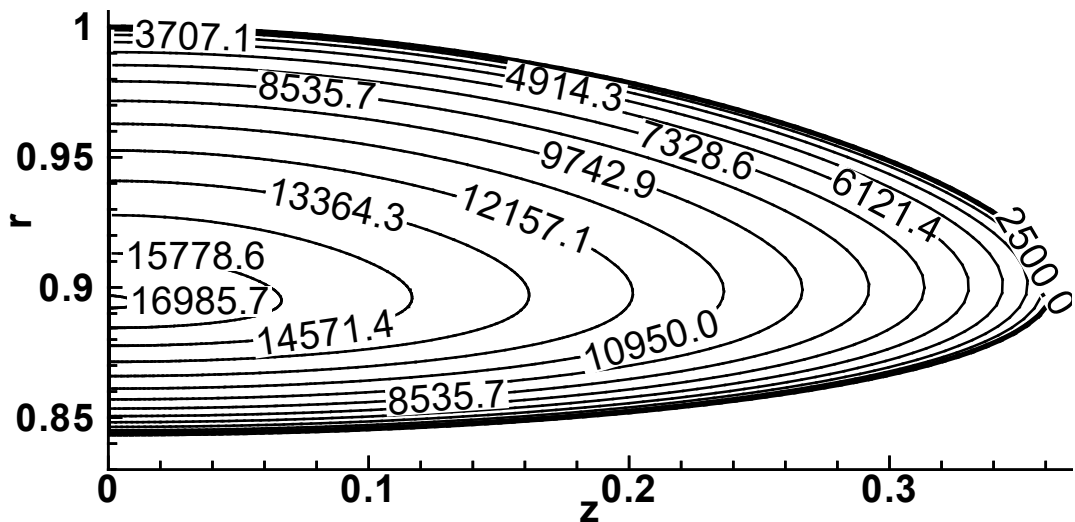


Рис. 4.9.11. Начальное распределение удельной внутренней энергии.

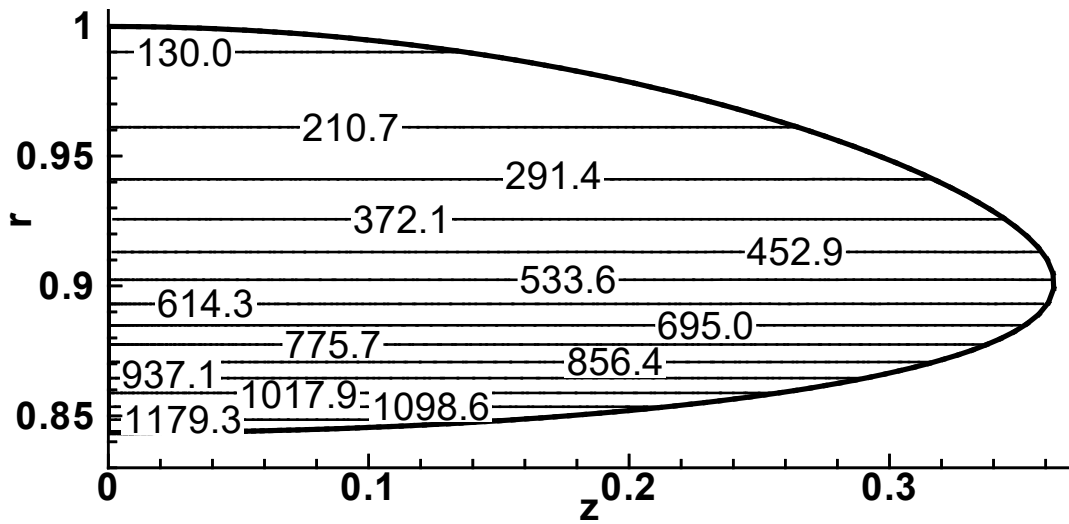


Рис. 4.9.12. Начальное распределение линейной скорости вращения.

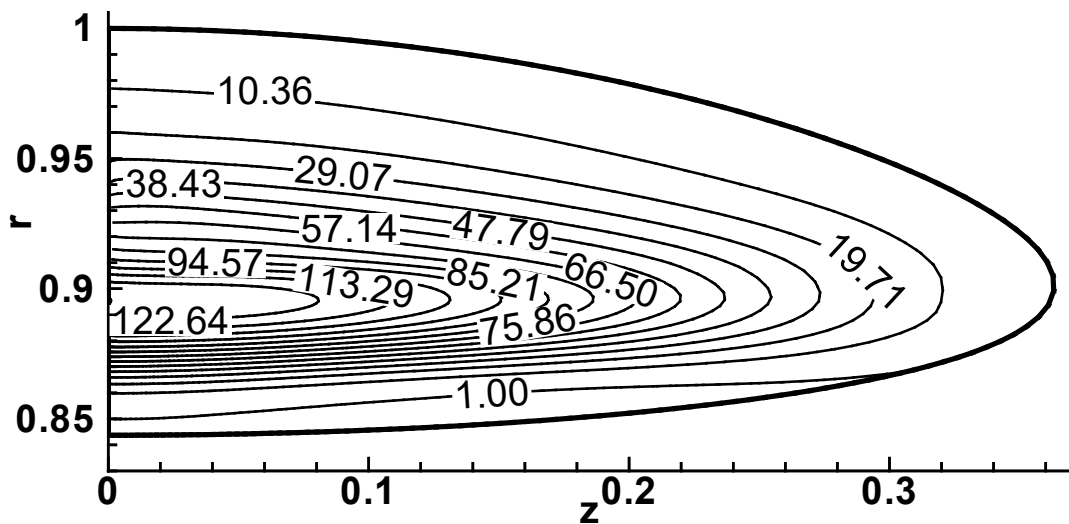


Рис. 4.9.13. Распределение плотности на момент времени $t = 0,0005$.

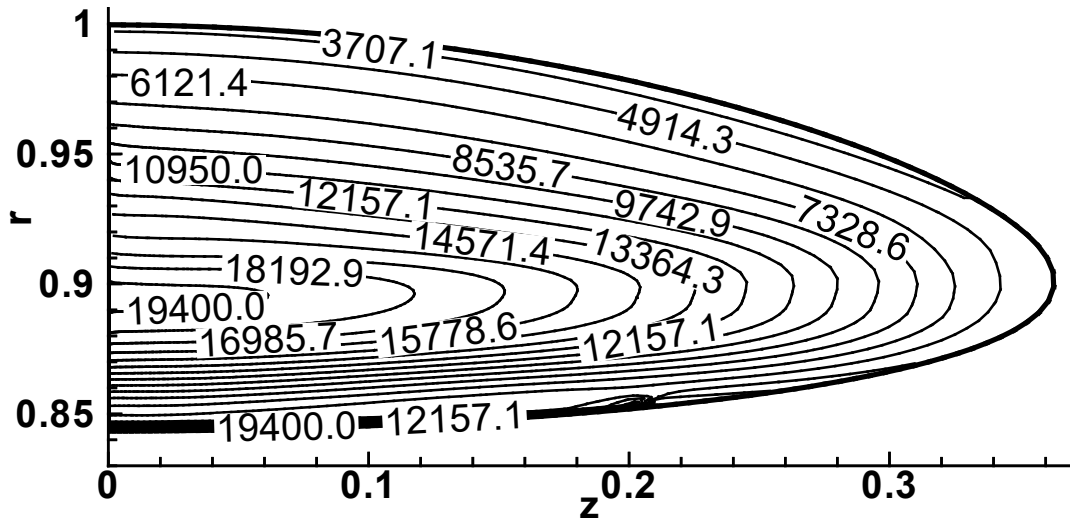


Рис. 4.9.14. Распределение удельной внутренней энергии на момент времени $t = 0,0005$.

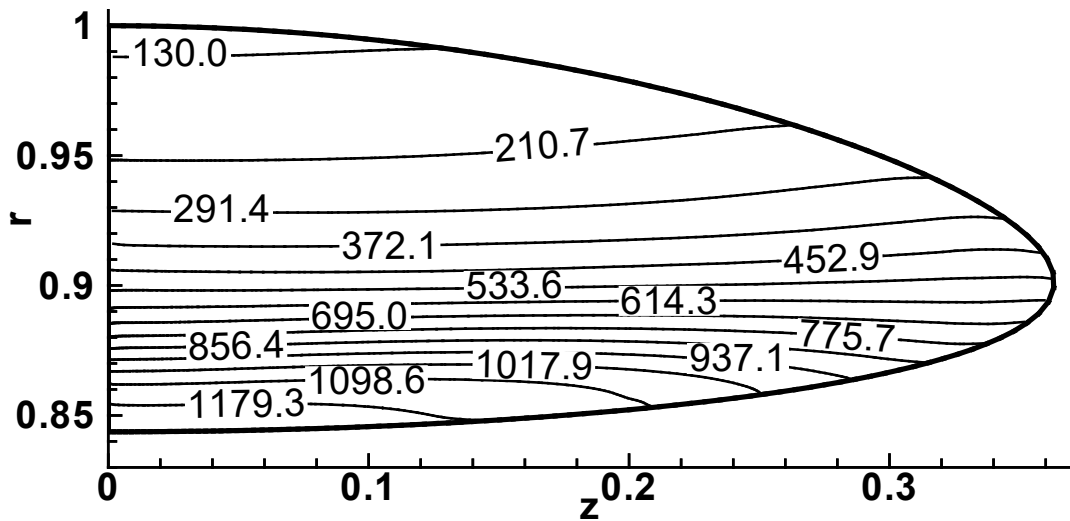


Рис. 4.9.15. Распределение линейной скорости вращения на момент времени $t = 0,0005$.

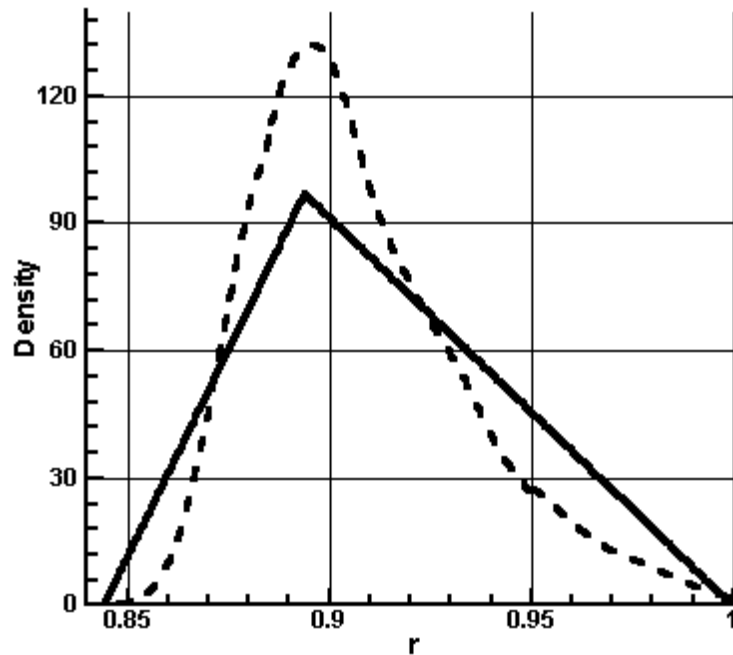


Рис. 4.9.16. Распределение плотности вдоль оси r ,
 — $t = 0$, - - - $t = 0.0005$

Этот процесс в данной численной модели является затухающим, что на наш взгляд обусловлено схемной вязкостью численного метода.

Время, за которое неравновесное протопланетное кольцо достигает своего состояния равновесия, составляет около 0,0005. Максимальное время расчета стационарного протопланетного кольца 0,0015 соответствует примерно 20 годам.

4.9.3. Устойчивость протопланетного кольца

В принципе численный метод расчета позволяет проследить зарождение и развитие неустойчивости в протопланетном кольце. Однако, эта задача также требует тщательной проверки на устойчивость используемого численного метода при решении данного типа задач. В расчетах стационарного протопланетного (тороидального) кольца на временах больших 0,0015 кольцо постепенно начинает размываться.

Для того чтобы понять причину этого явления, была выполнена оценка устойчивости аналитического решения тороидального кольца, которое заложено в качестве начальных данных при численных расчетах. С этой целью было проверено выполнение критерия Хейланда для закона

вращения вида $\Omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$, где ω_0 , r_0 - постоянные параметры.

Очевидно, что знаки производных dj^2/dr и dj/dr совпадают (j - удельный момент количества движения кольца). Тогда получаем условие

$$\frac{dj}{dr} = 2\omega_0 r \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) > 0,$$

которое справедливо в том и только том случае, когда выполняется неравенство $r < r_0$ (при любых значениях ω_0 и r_0). Следовательно, модель диска с параметрами $r_{in}=3,81 \cdot 10^{14}$ см и $r_{ex}=4,52 \cdot 10^{14}$ см при $r_0=1,5 \cdot 10^{14}$ см будет неустойчива по отношению к осесимметричным возмущениям. Критерий Хейланда не даёт возможности оценить время, на протяжении которого развивается неустойчивость, т.е. проследить динамику неустойчивости. Полученная оценка не исключает возможности неустойчивости используемой численной схемы при решении данной задачи. В данной работе приведена одна из наиболее сложных для численного расчета задач. Трудности расчета связаны с тем, что наблюдается высокий градиент параметров среды, особенно при подходе к внутренней границе кольца. Для того, чтобы строго доказать, насколько устойчива используемая численная схема при решении данного типа задач, необходимы дополнительные исследования. На данном этапе исследований можно утверждать, что протопланетное тороидальное кольцо, параметры которого приведены в этой работе и получены из аналитического решения, устойчиво на протяжении промежутка времени, равного примерно 0,0015, что соответствует 23 годам реального времени.

Следует отметить, что на этом этапе исследований была поставлена задача проследить эволюцию протопланетного диска в приближении Роша, когда собственное гравитационное поле диска мало по сравнению с гравитационным полем Солнца и им можно пренебречь. В этом случае исключаются эффекты гравитационной неустойчивости протопланетного диска, которые непосредственно связаны с собственным гравитационным полем диска. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска рассматривается в следующих главах аналитического обзора.

5. Анализ результатов исследований

Используемая аналитическая модель позволила в приближенной постановке (приближение Роша) получить замкнутое решение стационарного состояния протопланетного диска и проследить за распределением всех его характеристик: плотности, давления, линейной скорости вращения и температуры.

Как видно из результатов расчетов раздела 3, конфигурация протопланетного диска весьма чувствительна к зависимости угловой скорости вращения от цилиндрического радиуса (r). Следует отметить, что задавая массу диска (кольца) и функциональную зависимость $\Omega(r)$, можно получить как «плоские» протопланетные диски, так и тороидальные протопланетные кольца.

В рамках используемого приближения «плоские» протопланетные диски могут быть получены при законе вращения протопланетного диска, близкого к кеплеровскому. Строго кеплеровский закон приводит формально к протопланетному диску с бесконечным радиусом. Интересной особенностью диска с вращением, близким к кеплеровскому, является концентрация газа вблизи внутреннего радиуса. При таком распределении газовой среды пылевая компонента при ее движении к экваториальной плоскости одновременно будет смещаться к внутреннему радиусу диска.

В рассматриваемом приближении тороидальные кольца соответствуют «независимым» решениям, так как собственное гравитационное поле протопланетного диска не принимается в расчет. В этом случае протопланетный диск может быть построен из протопланетных (тороидальных) колец, которые соответствуют зонам планет Солнечной системы (подраздел 3.4). Обращает на себя внимание тот факт, что протопланетные кольца земной группы не могут быть построены, если их масса соответствует принятым концентрациям пылевой и газовой компонент протопланетного диска на начальной стадии его эволюции. Одно из возможных объяснений этого факта заключается в том, что на момент образования планетных колец земной группы газовая компонента из этой зоны была частично вынесена солнечным ветром.

Безусловно, полученные аналитические решения доказывают только возможность реализации протопланетных колец. К сожалению, истинный путь эволюции протопланетного диска нам пока неизвестен. Однако, существуют и другие работы, например, [57, 58], в которых приводятся данные о возможности образования подобного типа колец в протопланетном диске.

Неустойчивости диска могут иметь различную природу. В данной работе оценивалась только газодинамическая неустойчивость. Следует обратить внимание, что хотя некоторые конфигурации дисков и колец по проведенным оценкам являются устойчивыми, это не значит, что в трёхмерной постановке и при учете собственного гравитационного поля протопланетного диска эти конфигурации будут также устойчивы.

Разработанная численная модель позволяет проводить расчеты в осесимметричной постановке как стационарных состояний протопланетного диска, так и его эволюцию. Результаты проведенных численных расчетов в части исследований стационарных решений согласуются с основными результатами аналитических рассмотрений.

Детальное рассмотрение вопросов устойчивости протопланетного диска Солнца и протопланетных колец не входило в число основных задач на данном этапе исследований. Это, в частности, объясняется тем, что сама природа поставила грандиозный эксперимент - образование Солнечной системы, из которого непосредственно следует, что протопланетный диск

Солнца, а также протопланетные кольца, если они образуются, неустойчивы.

5.1. Модель образования планетной системы Солнца

В результате проведенных исследований (в том числе и не вошедших в материалы данной публикации) в рамках принятых основных представлений образования Солнечной системы предложена модель образования планетных тел – модель протопланетных колец, основные положения которой сводятся к следующим:

1. При коллапсе протосолнечной туманности образуется протопланетный диск Солнца. На начальной стадии эволюции диска, пока процессы концентрации его пылевой компоненты не привели к существенному изменению среды диска, состояние его газопылевой среды можно описывать уравнением состояния идеального газа.
2. В период перехода протопланетного диска в стадию формирования планетных тел в нем образуются крупномасштабные неоднородности в виде протопланетных колец, которые соответствуют зонам планет Солнечной системы.
3. За счет возникновения неустойчивости происходит фрагментация протопланетных колец. В результате этого процесса каждое кольцо распадается, в общем случае, на несколько газопылевых сгущений. В процессе гравитационного взаимодействия эти сгущения, соответствующие данному кольцу, сближаются, сталкиваются и образуют газопылевое протопланетное сгущение (протопланетную «туманность»), из которого в дальнейшем и образуется соответствующая протопланета и ее протоспутниковый диск. Эта стадия, по нашему мнению, хорошо описывается капельной моделью Энеева-Козлова.
4. Процесс образования планетного тела происходит внутри протопланеты путем передвижения ее пылевой компоненты под действием собственного гравитационного поля протопланеты в центральную ее часть, где и формируется тело планеты.
5. Газовая составляющая протопланетных облаков земной группы выносятся из них солнечным ветром, когда Солнце находится на стадии Т Тельца. Разрушение газовых оболочек, возможно, связано также с эффектом приливного воздействия Солнца.
6. В процессе образования планетной Солнечной системы часть газопылевого вещества протопланетного диска оказывается вне облаков протопланет и их спутников. В этих сгущениях также происходит концентрация вещества и образование твердых тел. Следует подчеркнуть, что основная масса пылевой компоненты находится в газопылевых облаках планет и их спутников. После того как произошло образование планетных и спутниковых тел, а также

твердых тел в малых сгущениях, происходит заключительная стадия формирования планетных тел – твердотельная аккумуляция, которая идет по законам, подробно исследованным О. Ю. Шмидтом, В. С. Сафроновым и его учениками.

В настоящее время общепринятой теорией образования планетной системы Солнца считается модель Шмидта-Сафронова (твердотельная аккумуляция). Наиболее труднообъяснимым и до конца не решенным моментом в этой теории является проблема роста размеров частиц пыли и превращение их в твердые тела таких размеров, при которых их дальнейший рост происходит путем гравитационного притяжения других частиц и тел. В рамках предлагаемой модели протопланетных колец этой проблемы не возникает, так как формирование планетных тел происходит внутри протопланеты под воздействием ее гравитационного поля. Другой отличительной чертой предлагаемой модели является то, что в ней классическая твердотельная аккумуляция имеет место на заключительной стадии формирования планетной системы, и за счет этого процесса происходит незначительный прирост массы планетных тел.

Модель Энеева-Козлова образования планетной Солнечной системы является альтернативной моделью по отношению к модели Шмидта-Сафронова. Отличие предлагаемой модели протопланетных колец от модели Энеева-Козлова заключается в том, что протопланетные облака (протопланетные «туманности») образуются не за счет слияния небольших газопылевых сгущений, образовавшихся в результате неустойчивости газопылевой среды протопланетного диска (облака), а за счет фрагментации крупномасштабных неустойчивых образований в виде тороидальных протопланетных колец на газопылевые сгущения. В дальнейшем из этих сгущений и образуется соответствующая протопланетная «туманность».

В рамках предлагаемой модели естественным образом может быть объяснено происхождение спутников планет. Основным положением при этом является то, что планета и ее спутники произошли из одного протопланетного кольца. Как видно, этот сценарий отличается от столкновительной (giant-impact) модели, выдвинутой американскими учеными (Melosh and Sonet, 1986), по которой Луна образовалась в результате столкновения с Землей космического тела планетарных размеров. Дальнейшее развитие предложенной модели дано в последующих главах аналитического обзора.

Заключение

Основные результаты главы I сводятся к следующим:

1. Получено аналитическое решение в приближении Роша для осесимметричной структуры стационарного протопланетного диска Солнца. Газопылевая среда диска описывается уравнением состояния

идеального газа, что соответствует начальной стадии эволюции протопланетного диска. Излучение не учитывается. Показано, что в этой модели конфигурация диска существенным образом зависит от распределения угловой скорости вращения среды диска как функции от цилиндрического радиуса. При угловой скорости вращения, близкой к кеплеровскому закону, могут быть получены плоские протопланетные диски. Построена модель протопланетных (тороидальных) колец, из которых может состоять протопланетный диск Солнца на одном из начальных этапов своей эволюции. В этом случае кольца соответствуют зонам планет Солнечной системы. Исследованы свойства полученных аналитических решений: конфигурации протопланетных дисков, распределения плотности, удельной внутренней энергии и линейной скорости вращения.

2. Разработана численная модель протопланетного диска, в основе которой лежит метод численного решения двумерных газодинамических течений в областях сложной формы с подвижными границами, разработанный С.К. Годуновым и А.В. Забродиним с соавторами. Для сравнения численного моделирования с аналитическим решением были выполнены численные расчеты стационарных состояний протопланетных колец. В качестве начальных данных в этих расчетах были использованы аналитические решения в приближении Роша. Проведен расчет эволюции нестационарного кольца с выходом его в состояние, близкое к стационарному.

3. Предложена модель образования планетной Солнечной системы.

Глава II. К вопросу об эволюции протопланетного диска Солнца

Данная глава написана на основе работ [6, 7, 8]. В ней рассмотрены приближенные численные модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции в двумерном и одномерном приближениях. На основе предложенных моделей выполнены численные расчеты эволюции протопланетного диска Солнца с учетом его собственного гравитационного поля. Приведены результаты расчетов и их анализ. Показано, что при учете собственного гравитационного поля диска в нем возникают нарастающие со временем кольцеобразные возмущения плотности, которые имеют характер волны возмущений, распространяющейся по диску, причем возмущения затрагивают не только плотность вещества, но и форму (геометрические размеры) диска.

Введение

Настоящие исследования являются продолжением работ, выполненных в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 25 и представленных в публикациях [59, 2, 60, 61, 62, 5].

Первый раздел главы посвящен двумерным расчетам эволюции протопланетного диска. Во втором разделе представлены более простые приближения, сводящиеся к одномерным расчетам и дающие возможность проследить за некоторыми характерными особенностями эволюции протопланетного диска, многократно сократив при этом время расчетов.

1. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца в двумерном приближении

В общем случае задача об эволюции протопланетного диска является трехмерной. В такой постановке реализация задачи даже на современных суперкомпьютерах требует весьма больших затрат машинного времени. В работе [3, 5] было показано, что возможно изучение некоторых аспектов эволюции протопланетного диска Солнца в двумерном приближении. В разделе 1 приводятся результаты численного моделирования эволюции протопланетного диска в осесимметричной постановке. В такой постановке задача становится двумерной.

1.1. Постановка задачи численного моделирования эволюции протопланетного диска Солнца в двумерном приближении

Начальное состояние осесимметричного протопланетного диска Солнца задавалось с помощью аналитического решения в приближении Роша [3, 5, 54]. Газовая среда диска подчинялась политропному уравнению состояния $p(\rho) = K\rho^\gamma$. Закон вращения среды протопланетного диска был

принят в форме, близкой к закону Кеплера $\left(\Omega^2 \approx \frac{GM_s}{r^3} \right)$. В этом случае

решение задачи в цилиндрической системе координат (r, z) имеет вид (см. глава I, подраздел 3.2, формулы (3.2.6), (3.2.7)):

$$\frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = GM_s \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) + GM_s \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right) \quad (1.1)$$

$$\Omega^2 \sim \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in})}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \frac{GM_s}{r^{3+\alpha}}, \quad (1.2)$$

где α - малый параметр.

Это решение описывает некоторое стационарное состояние диска. В данном разделе исследования проводились при следующих параметрах аналитического решения:

$$\gamma = 1,43;$$

$$G = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\Gamma \cdot \text{с}^2);$$

$$M_s = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г};$$

$$r_{in} = 0,449 \cdot 10^{13} \text{ см};$$

$$r_{ex} = 0,591 \cdot 10^{15} \text{ см};$$

$$K = 9,7446 \cdot 10^{13} \frac{\text{см}^{3\gamma-1}}{\Gamma^{\gamma-1} \text{с}^2} \cdot;$$

$$\alpha = 0,005;$$

полная масса протопланетного диска Солнца при $\alpha = 0,005$ составляет $M_d \approx 0,096 M_s$.

Оценки показывают, что в диске при заданных параметрах существует область гравитационной неустойчивости, которая обусловлена наличием собственного гравитационного поля. В соответствии с критерием Джинса критическая длина волны может быть вычислена по локальному значению плотности в соответствии с выражением

$$\lambda_J = c \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}, \quad (1.3)$$

в котором c обозначает скорость звука, а G - гравитационная постоянная. Из сравнения этой величины с характерным размером протопланетного диска r_d можно легко судить о подверженности протопланетного диска гравитационной неустойчивости в тех его областях, где выполняется условие $\lambda_J < r_d$, т.е. длина волны Джинса оказывается меньше характерного радиуса. Зависимость длины волны Джинса от радиуса диска при $\alpha = 0,005$ имеет вид, представленный на рис. 1.1.

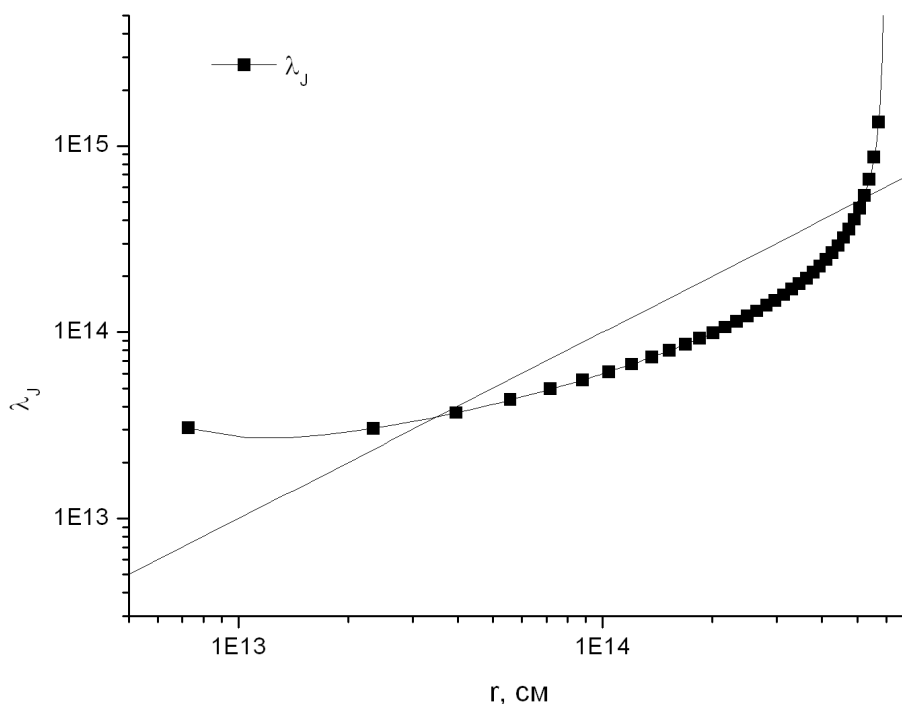


Рис. 1.1. Распределение длины волны Джинса для $\alpha = 0,005$.
(Прямая линия соответствует $\lambda = r$.)

1.2. Метод численного моделирования эволюции протопланетного диска

Описать с достаточной точностью эволюцию протопланетного диска Солнца можно только с помощью адекватных многомерных численных моделей. В данных исследованиях использовалась численная двумерная газодинамическая модель, предназначенная для расчетов осесимметричного движения газовой среды в гравитационном поле Солнца (см. глава I, раздел 4). Эта модель может применяться на начальной стадии эволюции протопланетного диска, когда пылевая компонента распределена относительно равномерно по объему диска.

1.2.1. Уравнения газовой динамики с учетом гравитационного поля среды при осевой симметрии задачи

Будем предполагать, что задача эволюции протопланетного диска Солнца имеет осевую симметрию. В этом случае трехмерная задача сводится к двумерной, которая в цилиндрической системе координат x, r, θ описывается следующими уравнениями [3, 5] (см. глава I, подраздел 4.2):

$$\frac{\partial(\rho r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial r} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial(\rho u r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)r}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial r} = \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial(\rho v r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)r}{\partial r} = p + \rho w^2 + \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial(\rho w r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w r)}{\partial r} = -\rho v w \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial(e r)}{\partial t} + \frac{\partial[(e + p)u r]}{\partial x} + \frac{\partial[(e + p)v r]}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u r \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r \varphi)}{\partial r} + \varphi \frac{\partial(\rho r)}{\partial t} \quad (1.8)$$

Ось x направлена по оси вращения газового диска; u, v, w - составляющие вектора скорости \mathbf{U} , соответственно, осевая, радиальная и линейная скорость вращения;

$$|\mathbf{U}|^2 = u^2 + v^2 + w^2; \quad (1.9)$$

$w = \omega \cdot r$, где ω - угловая частота вращения;

$\rho = \rho(x, r, t)$ - плотность газа; $p = p(x, r, t)$ - давление газа;

$e = \rho[\varepsilon + (u^2 + v^2 + w^2)/2]$ - энергия единицы объема газа;

$\varepsilon = \varepsilon(x, r, t)$ - внутренняя энергия единицы массы газа;

$\varphi = \varphi(x, r, t)$ - гравитационный потенциал.

Гравитационный потенциал обсчитываемого объекта складывается из двух частей: $\varphi = \varphi_S + \varphi_d$. Первое слагаемое обусловлено гравитационным полем, создаваемым внешним источником. В представленных расчетах внешним источником является Солнце, помещенное в начало координат:

$\varphi_S = \frac{GM_S}{\sqrt{x^2 + r^2}}$. Второе слагаемое связано с собственным гравитационным

полем протопланетного диска. В этом случае потенциал φ_d может быть представлен в виде:

$$\varphi_d(x, r, t) = G \int_{V(t)} \frac{\rho(x_T, r_T, t)}{R_\varphi} r_T dx_T dr_T d\theta_T, \quad (1.10)$$

где

$$R_\varphi = \sqrt{(x - x_T)^2 + (r \cdot \cos \theta - r_T \cdot \cos \theta_T)^2 + (r \cdot \sin \theta - r_T \cdot \sin \theta_T)^2} \quad (1.11)$$

x_T , r_T , θ_T - текущие цилиндрические координаты, по которым ведется интегрирование в (1.10). V - объём диска. В интеграле (1.10) в силу симметрии может быть выполнено интегрирование по координате θ_T .

Внутри газового диска в фиксированный момент времени гравитационный потенциал (1.10) удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi_d(x, r, t) \equiv \frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_d}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(x, r, t) \quad (1.12)$$

а вне газового диска - уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi_d(x, r, t) = 0. \quad (1.13)$$

Уравнения (1.4) – (1.13) для численных расчетов были записаны в безразмерных переменных.

1.2.2. Численная методика

Используемая численная методика является вариантом методики для численного решения двумерных газодинамических течений в областях сложной формы с подвижными границами, разработанной С.К. Годуновым и А.В. Збродиным с соавторами [56]. Методика достаточно подробно описана в главе I.

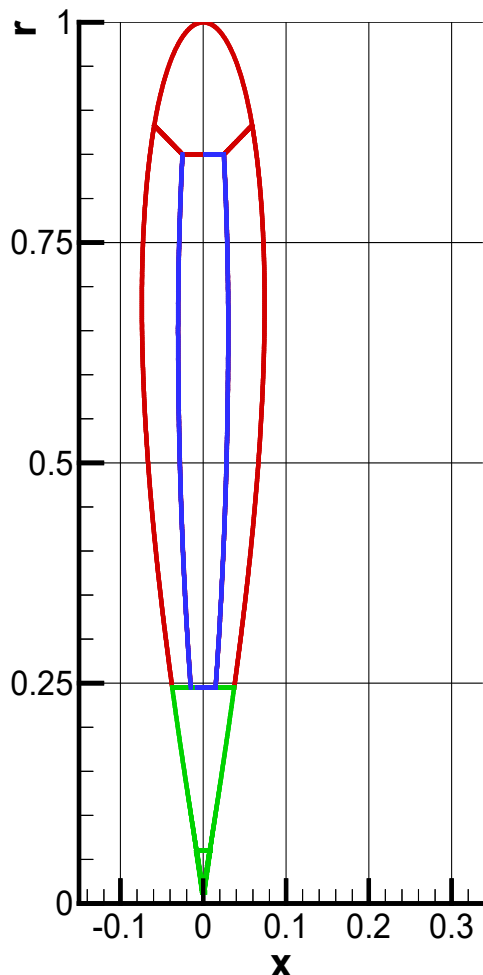


Рис. 1.2. Границы областей, $[x, r] = 0,591 \cdot 10^{15}$ см.

Расчетные сетки

Расчеты по численному моделированию эволюции протопланетного диска предъявляют очень высокие требования к структуре расчетной сетки и размерам ее ячеек. Это объясняется строением протопланетного диска и распределением в нем вещества.

Протопланетный диск имеет форму плоского тора, внутренняя часть которого сужается по направлению к центру [61]. Сильное гравитационное поле Солнца притягивает газопылевую среду протопланетного диска в центр, и за счет этого эффекта плотность среды достигает максимума у внутреннего края диска. Это создает очень значительные градиенты

плотности. Для того чтобы с достаточной точностью проследить динамику всех участков протопланетного диска, вся расчетная область была разбита на подобласти – ярусы. Такая структура сетки с выделенными границами ярусов позволяет достаточно аккуратно описывать динамику движения отдельных участков среды протопланетного диска.

На рис. 1.2 представлена расчетная область протопланетного диска, разбитая на ярусы неподвижными эйлеровыми границами. В расчетах были использованы несколько вариантов расчетных сеток, в том числе с разным количеством ячеек. Расчетная сетка с максимальным разбиением содержит 124800 ячеек.

Граничные условия

Естественным граничным условием для протопланетного диска является $p=0$. При его реализации встретились значительные трудности. Поэтому на данном этапе расчетов динамики распределения среды в протопланетном диске было предложено использовать граничное условие в виде жесткой стенки. Все результаты, представленные в данном разделе, были получены при этом граничном условии.

Тестовые расчеты

Для проверки и отладки разработанного программного комплекса были проведены тестовые расчеты следующих задач:

- задачи Эмдена [63];
- задач Лидова [64];
- задачи о вихре газа [65].

Эти расчеты показали, что результаты, полученные с помощью разработанного численного метода, достаточно хорошо согласуются с решениями вышеуказанных задач.

1.3. Результаты численного моделирования эволюции протопланетного диска Солнца в двумерном приближении

Разработанный алгоритм программного комплекса позволяет проводить расчеты как в приближении Роша, когда собственным гравитационным полем протопланетного диска пренебрегается, так и с его учетом. При учете гравитационного поля диска используется разностный метод расчета гравитационного потенциала, разработанный В. Т. Жуковым с соавторами [66] (см. глава I, подраздел 4.8), адаптированный к данной структуре сеток [3, 62].

Сравнение двух картин, описывающих состояния протопланетного диска как при действии только гравитационного поля Солнца, так и совместного действия поля Солнца и собственного гравитационного поля

диска, дает наглядное представление о влиянии последнего на эволюцию диска.

1.3.1. Результаты численного моделирования стационарного состояния протопланетного диска

Начальное состояние протопланетного диска, как уже отмечалось, задавалось с помощью аналитического решения в приближении Роша [3, 5]. На рис. 1.3 показано распределение плотности среды диска,

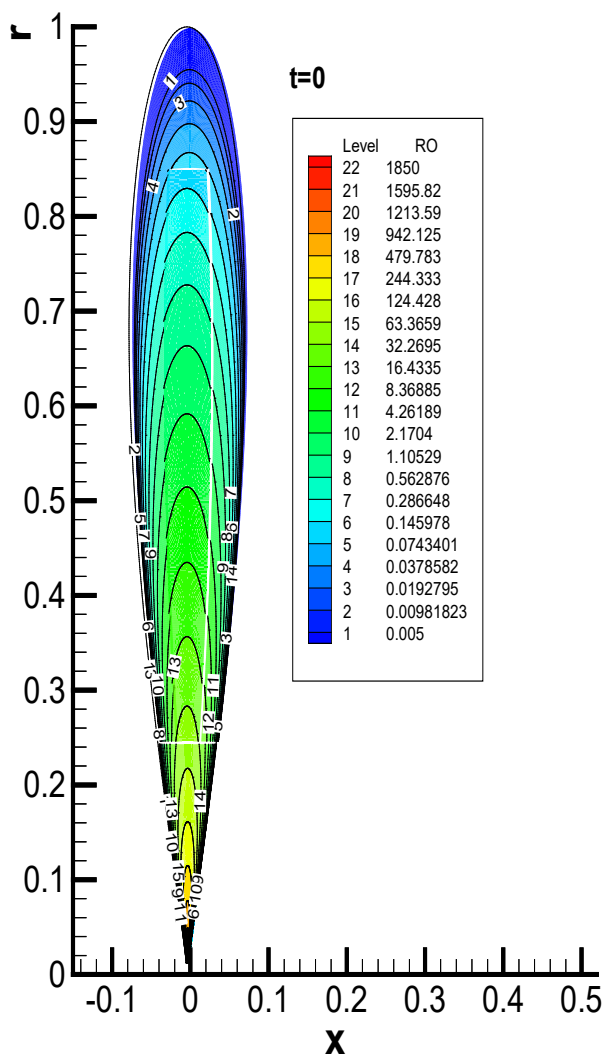


Рис.1.3. Изолинии плотности на начальном момент времени, $[\rho]=7,67 \cdot 10^{-13}$ г/см³.

диска необходимо «удерживать» длительное время.

Расчеты таких задач с показанным на рис. 1.4 распределением плотности крайне сложны. Стационарное состояние диска, заданное в начальных условиях, удалось «удержать», только значительно увеличив количество ячеек расчетной сетки.

описываемое формулой (1.1), задаваемое в качестве начальных данных для $\alpha = 0,005$. На рис. 1.4 дополнительно приведено начальное распределение плотности среды диска в зависимости от координаты r при $x = 0$. На этом же рисунке показано распределение плотности среды диска в зависимости от координаты x при $r = 0,02$; (т.е. сечение на рис 1.3, соответствующее максимуму плотности). Из представленных графиков видно, что в масштабе рисунка $\rho(r)$ кривая $\rho(x)$ выглядит как дельта-функция. При численном моделировании эволюции протопланетного диска стационарное состояние, задаваемое в качестве начальных данных, при «выключенном» собственном гравитационном поле

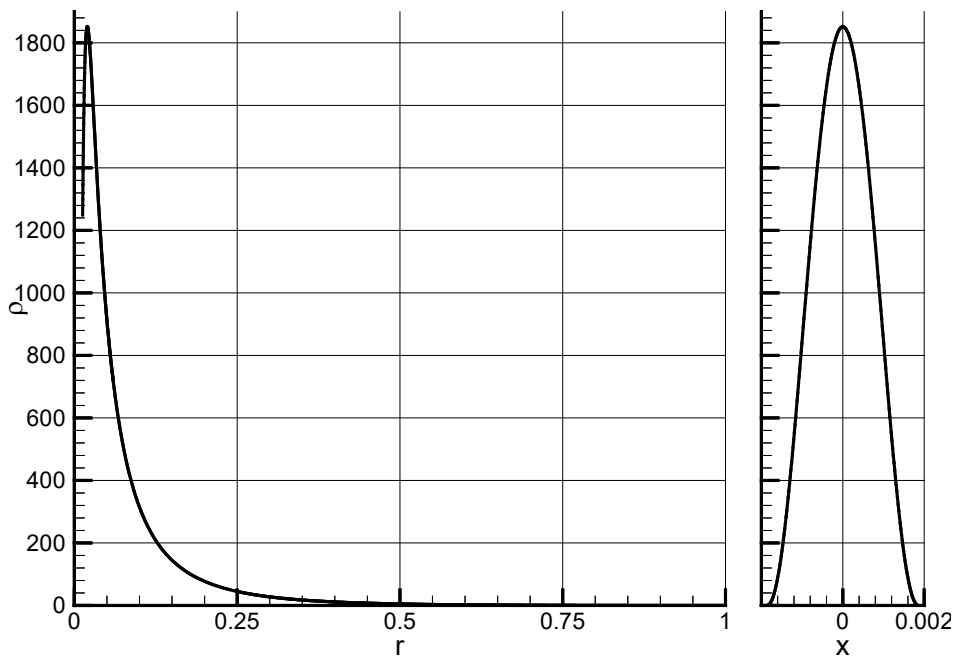


Рис. 1.4. Начальное распределение плотности вдоль осей.

1.3.2. Перестройка структуры протопланетного диска Солнца при «включении» его собственного гравитационного поля

Анализ результатов расчетов эволюции протопланетного диска с заданными начальными характеристиками показывает, что при «включении» собственного гравитационного поля диска происходит перестройка структуры диска с появлением кольцевых областей, в которых течения среды развиваются таким образом, что они приводят к увеличению плотности вещества в определенных сечениях этих областей. Несмотря на то, что собственное гравитационное поле протопланетного диска составляет 0,007 – 0,1 от гравитационного поля Солнца, влияние его на распределение вещества в диске не является малым. Наблюдаемый эффект виден даже при расчетах на грубой сетке на фоне изменяющегося во времени начального стационарного состояния диска.

Наиболее показательны картины линий тока среды в протопланетном диске в сравнении расчетов с включенным собственным гравитационным полем и без него.

На рис. 1.5 и 1.6 показаны линии тока среды без собственного гравитационного поля диска на грубой сетке (4800 ячеек) и на сетке с максимальным разбиением (124800 ячеек), соответственно. Следует отметить, что в этом случае скорости должны быть равны нулю, а наблюдаемые скорости есть погрешности численного расчета. Для проводимого нами анализа они служат лишь нулевой (реперной) точкой отсчета. Видно, что линии тока на рис. 1.5, 1.6 направлены вверх за исключением одной точки в районе $r = 0,3 - 0,4$.

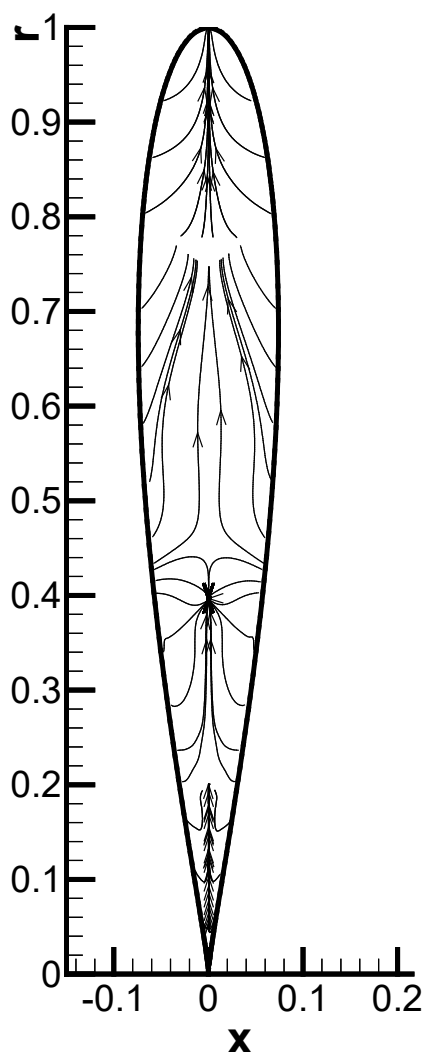


Рис. 1.5. Линии тока на момент $t=1,45$ на грубой сетке с 1 полем, $[t]=1,25 \cdot 10^9$ с = 39,5 лет.

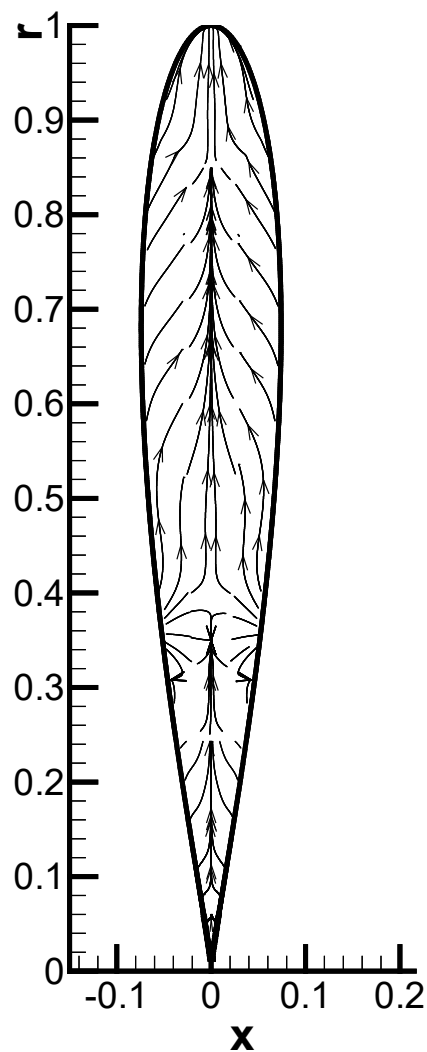


Рис. 1.6. Линии тока на момент $t=1,204$ на мелкой сетке с 1 полем.

Результаты расчетов с «включенным» собственным гравитационным полем диска для времени 1,45 (примерно 57 лет) представлены в виде линий тока на рис. 1.7 из расчета, проведенного на грубой сетке, а на рис. 1.8 - на сетке с максимальным разбиением. Из этих рисунков видно, что течение среды меняется кардинальным образом. На рис. 1.7, 1.8 можно выделить три области течений. В каждой из этих областей газ как бы стягивается к одному определенному сечению области. При этом течение в верхних частях этих областей, а именно, частях, расположенных выше этого сечения, меняется на противоположное по сравнению с картиной течения в отсутствии собственного гравитационного поля.

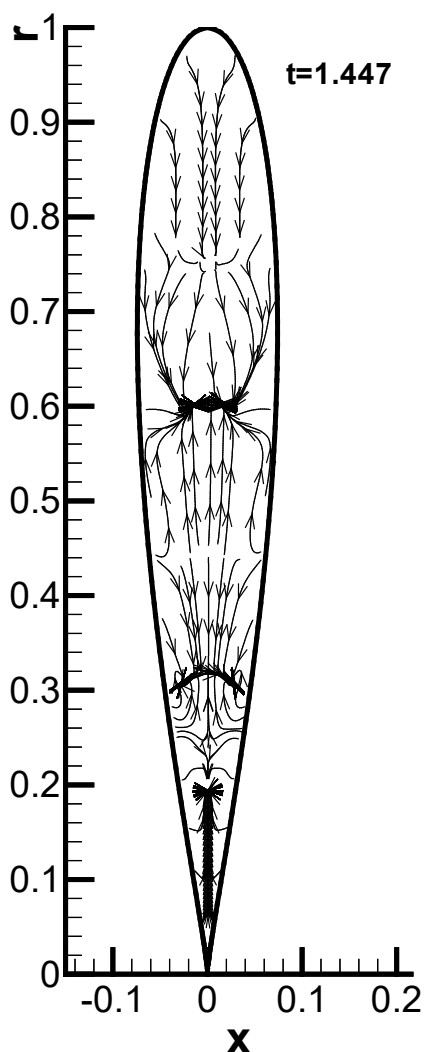


Рис. 1.7. Линии тока на момент $t=1,447$ на грубой сетке с 2 полями.

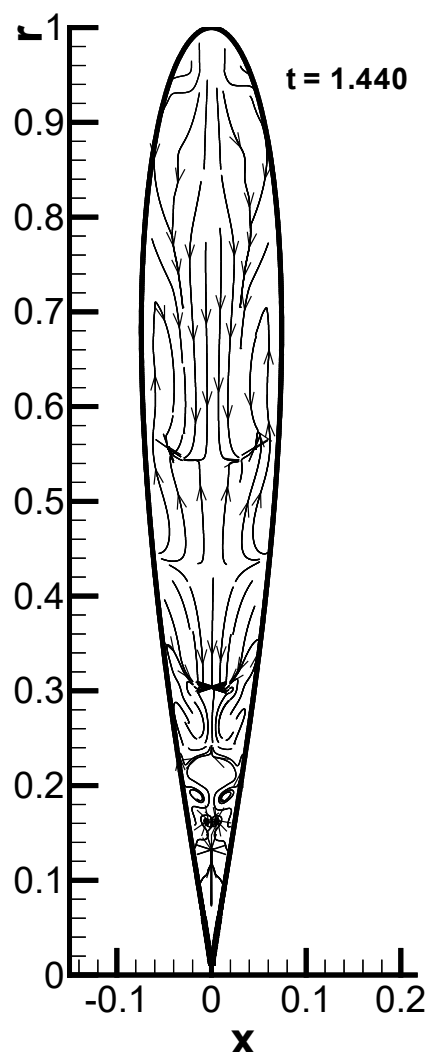


Рис. 1.8. Линии тока на момент $t=1,440$ на мелкой сетке с 2 полями.

Следует также отметить, что без собственного гравитационного поля диска скорости среды в диске в основном составляют 0,2 – 0,3 от скорости звука, в то время как с «включением» поля они возрастают примерно на порядок и в некоторых областях могут достигать сверхзвуковых скоростей. Точность данных расчетов позволяет очень уверенно фиксировать наблюдаемые эффекты.

В соответствии с изменением линий тока меняются и изолинии плотности в протопланетном диске. При «включении» собственного гравитационного поля в распределении плотности появляются характерные особенности. На изолиниях плотности становятся видны как бы «пережатия» - области синего цвета (рис. 1.9 - грубая сетка, рис. 1.10 - сетка с максимальным количеством ячеек), в то время как в отсутствии собственного гравитационного поля эти особенности не наблюдаются.

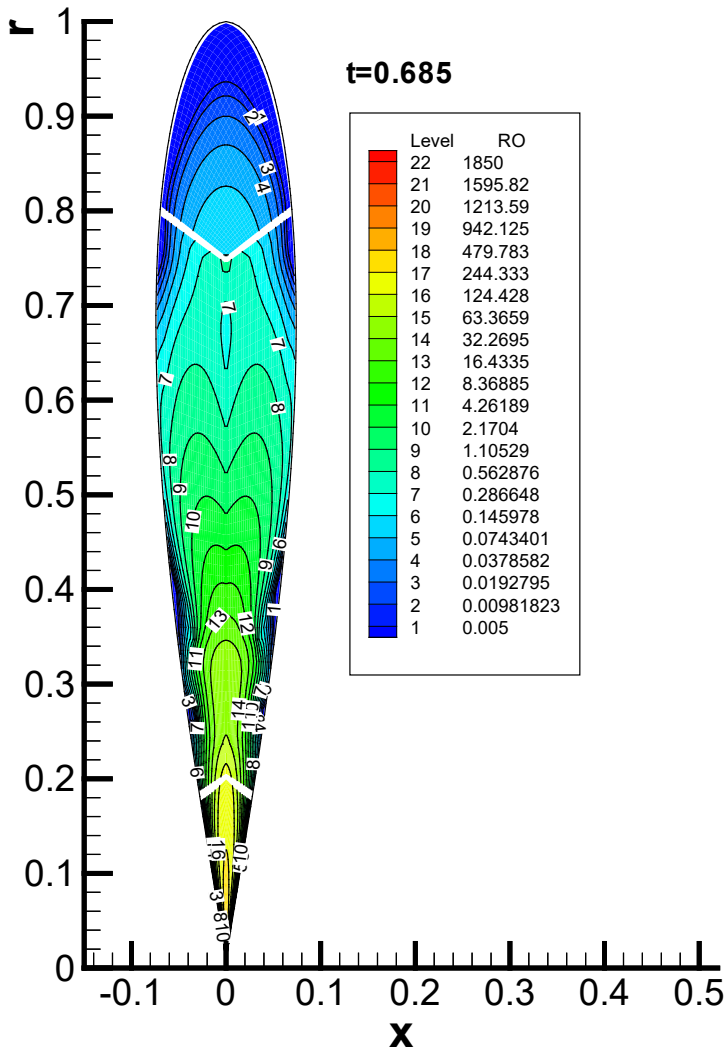


Рис. 1.9. Изолинии плотности на грубой сетке с 2 полями.

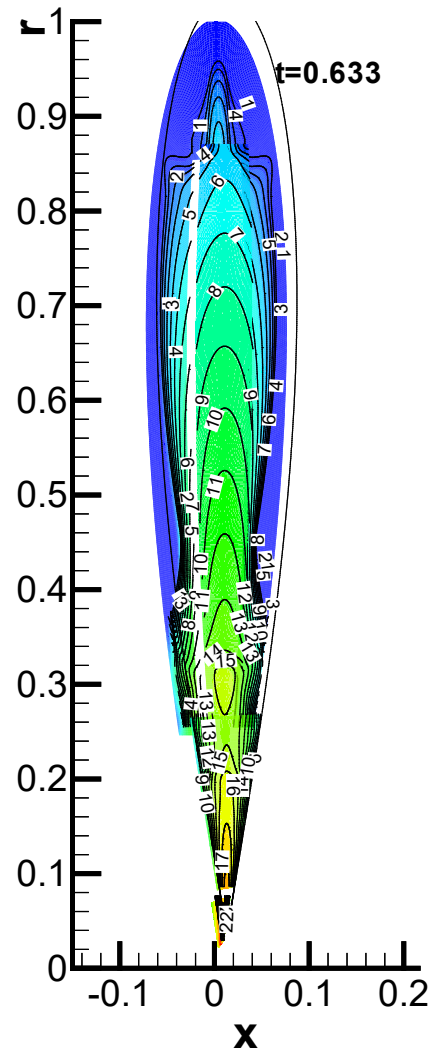


Рис. 1.10. Изолинии плотности на мелкой сетке с 2 полями.

Более детальный анализ изолиний плотности показывает, что в протопланетном диске при включении собственного гравитационного поля могут зарождаться неустойчивости в виде колец плотности (рис. 1.11 - грубая сетка, рис. 1.12 - сетка с максимальным количеством ячеек). На рисунках 1.11 и 1.12 отчетливо видны локальные максимумы и характерное «пережатие» изолиний плотности протопланетного диска. Естественно, что показанные на изолиниях кольца плотности точно коррелируют с локальными максимумами на зависимостях $\rho(x=0, r, t)$.

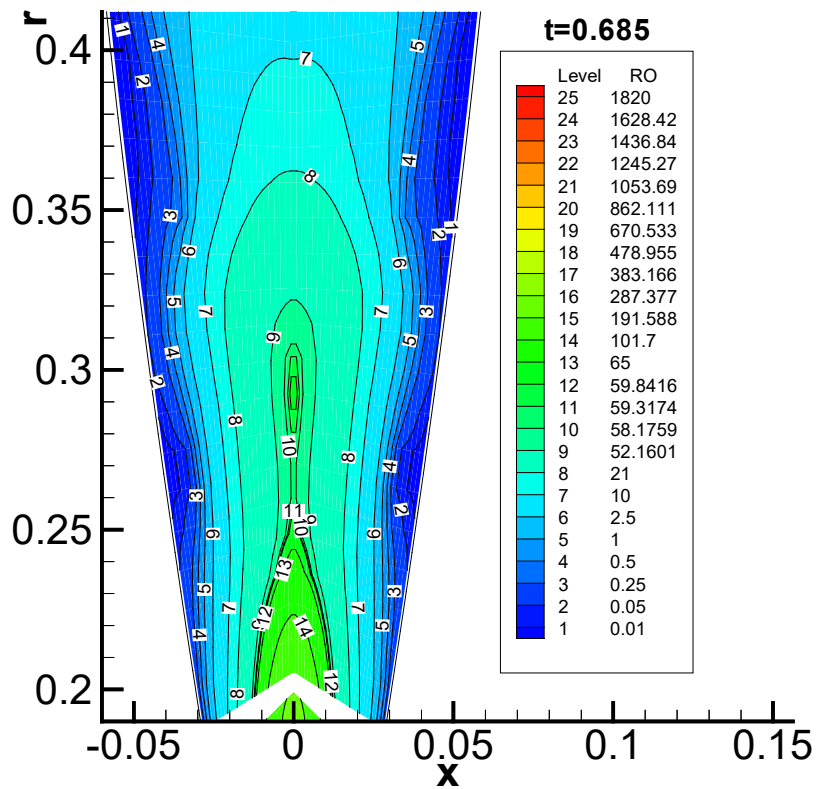


Рис. 1.11. Изолинии плотности на грубой сетке (фрагмент).

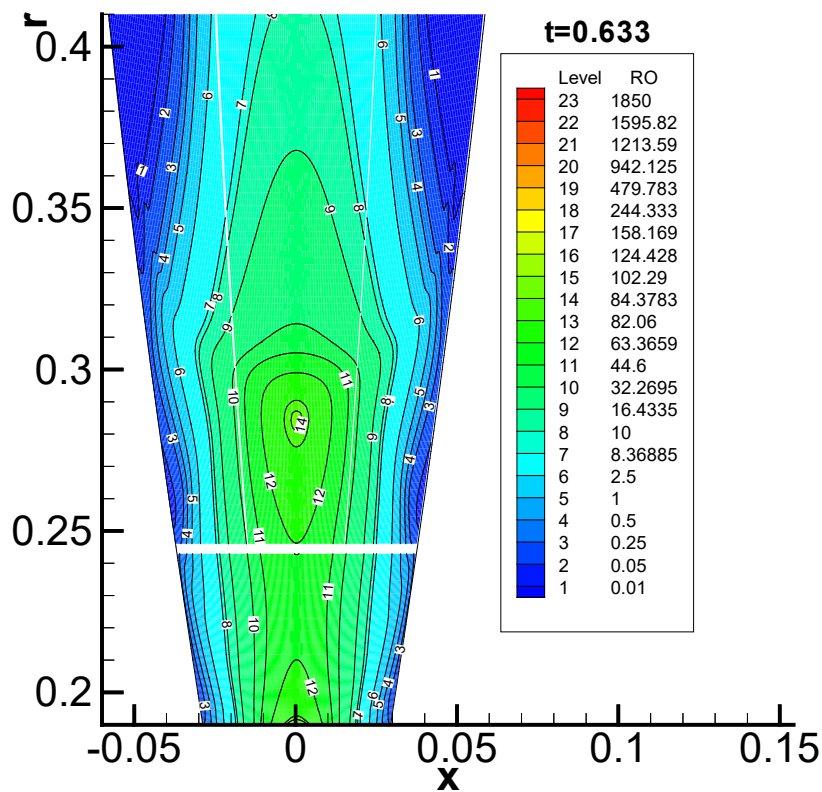


Рис. 1.12. Изолинии плотности на мелкой сетке (фрагмент).

2. Некоторые упрощенные численные модели эволюции протопланетного диска Солнца, сводящиеся к одномерным приближениям

Так как численное решение задачи эволюции протопланетного диска Солнца в 2D и 3D постановках наталкивается на значительные сложности, а также требует больших затрат машинного времени, то представляют интерес более простые численные модели, дающие возможность исследовать некоторые характерные особенности эволюции протопланетного диска.

2.1. Уравнения газовой динамики для описания движения среды в экваториальной плоскости протопланетного диска Солнца

Экваториальная плоскость ($z=x=0$) протопланетного диска является плоскостью симметрии, что позволяет свести уравнения газовой динамики при описании среды в этой плоскости к более простому виду.

Эйлеровы координаты

В экваториальной плоскости в силу симметрии в системе уравнений (1.4) – (1.8) (см. глава II, подраздел 1.2) имеют место соотношения $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $u = 0$. В этом случае эта система преобразуется в следующую:

$$\frac{\partial(\rho r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)r}{\partial r} = p + \rho w^2 + \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho w r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v w r)}{\partial r} = -\rho v w \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(e r)}{\partial t} + \frac{\partial[(e + p)v r]}{\partial r} = \frac{\partial(\rho v r \varphi)}{\partial r} + \varphi \frac{\partial(\rho r)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Ось x направлена по оси вращения газового диска; v , w - составляющие вектора скорости U , соответственно, радиальная и угловая;

$$|U|^2 = v^2 + w^2; \quad (2.5)$$

$\rho = \rho(r, t)$ - плотность газа; $p = p(r, t)$ - давление газа;

$e = \rho[\varepsilon + (v^2 + w^2)/2]$ - энергия единицы объема газа;

$\varepsilon = \varepsilon(r, t)$ - внутренняя энергия единицы массы газа.

Система уравнений (2.1) – (2.4) является одномерной.

Лагранжевы координаты

Система уравнений (2.1) – (2.4) для описания движения среды в экваториальной плоскости диска в лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = -r \frac{\partial(p+\eta)}{\partial m} + \frac{w^2}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad (\eta - \text{математическая вязкость}), \quad (2.6)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial m} (ru), \quad (2.8)$$

$$\frac{dr}{dt} = u, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -(p+\eta) \frac{\partial}{\partial m} (ru), \quad (2.10)$$

$$m = \rho r^2 / 2. \quad (2.11)$$

Гравитационный потенциал имеет вид:

$$\varphi = \varphi_S + \varphi_d,$$

где
$$\varphi_S = \frac{GM_S}{r},$$

$$\varphi_d = G \int_{V(t)} \frac{\rho(x_T, r_T, t)}{R_\varphi} r_T dx_T dr_T d\Theta_T,$$

$V(t)$ - объем газа, создающий гравитационное поле.

2.2. Движение среды в экваториальной плоскости

протопланетного диска Солнца в приближении Роша

Для задачи о протопланетном диске Солнца в приближении Роша будем использовать, как и выше, аналитическое решение (1.1), (1.2). Это решение в экваториальной плоскости диска в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\gamma \mathcal{K}}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = GM_S \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ex}} \right) + GM_S \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right), \quad (2.12)$$

$$\Omega^2 = \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in}) GM_S}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha} r^{3+\alpha}}, \quad (2.13)$$

где r – радиус в цилиндрической системе координат, $z = 0$. Уравнение состояния задается в виде $p = K \rho^\gamma$.

Численные одномерные расчеты показали, что методика, базирующаяся на методе Лагранжа [67], дает достаточно точные

результаты для рассматриваемых одномерных задач. Далее будут приводиться в основном результаты, полученные в расчетах с использованием уравнений (2.6) – (2.11).

Аналитическое решение (2.12), (2.13) есть стационарное решение. В этом случае численное решение на основе уравнений (2.6) – (2.11) с начальными данными (2.12), (2.13) должно приводить к решению, не зависящему от времени, при условии, что аналитическое решение является устойчивым (устойчивость решения данной аналитической задачи рассматривалась в работе [3]).

Численные расчеты с использованием решений (2.12) – (2.13) проводились для значений $\alpha = 0,002; 0,005; 0,01$. Соответственно масса диска M_d составляла $7,168 \cdot 10^{-3} M_S; 0,096 M_S; 0,667 M_S$; где M_S – масса Солнца.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.1 распределением плотности газа $\rho \equiv RO$ в зависимости от расстояния r на разные моменты времени для $\alpha = 0,01$ (без учета собственного гравитационного поля диска).

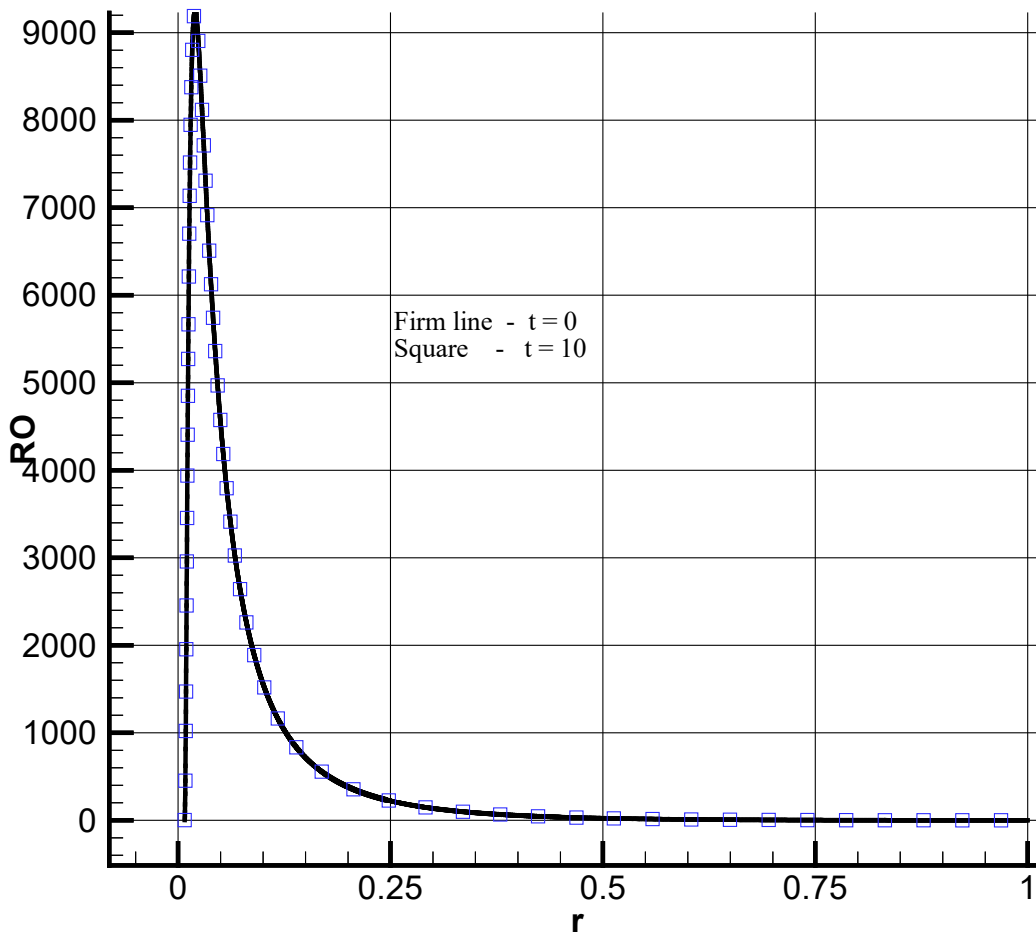


Рис. 2.1. Распределение плотности в экваториальной плоскости с 1 полем, $[r]=0,591 \cdot 10^{15}$ см, $[\rho]=7,67 \cdot 10^{-13}$ г/см³, $[t]=1,25 \cdot 10^9$ с = 39,5 лет.

Максимальные отклонения зависимостей $\rho(r,t)$ от начальной зависимости исходных данных $\rho(r, t = 0)$ на временах $t \leq 10$ не превышает десятых долей процента, т.е. решение аналитической задачи в постановке Роша и соответствующее численное решение действительно являются устойчивыми.

2.3. Численные расчеты с «включенным» собственным гравитационным полем диска

Численные расчеты движения среды диска в экваториальной плоскости с «включенным» его гравитационным полем являются приближенными, так как это движение зависит от течений во всем объеме диска. Тем не менее, такие расчеты могут дать представления о развитии возмущений в диске при наложении его собственного гравитационного поля.

Были проведены две серии численных расчетов. Одна серия проводилась с «включением» полного объемного гравитационного поля диска, которое рассчитано по его начальному состоянию и в дальнейшем не менялось во времени. Вторая серия проводилась с «включением» гравитационного поля, создаваемого только частью массы диска, находящейся в его экваториальной плоскости. В последнем случае была реализована возможность расчета гравитационного поля на каждом временном шаге численного расчета.

Для первой серии расчет полного гравитационного поля диска проводился по двумерной методике (раздел 1).

Расчет гравитационного поля диска в его экваториальной плоскости проводился путем вычисления интеграла (1.10) либо прямым методом, либо методом с использованием формул, предложенных Дубошиным Г.Н. [68].

2.3.1. Результаты численных расчетов

На рис. 2.2 приведены зависимости плотности от расстояния r в разные моменты времени для $\alpha = 0,01$. Этот расчет был проведен с «включенным» полным гравитационным полем диска, которое не менялось во времени.

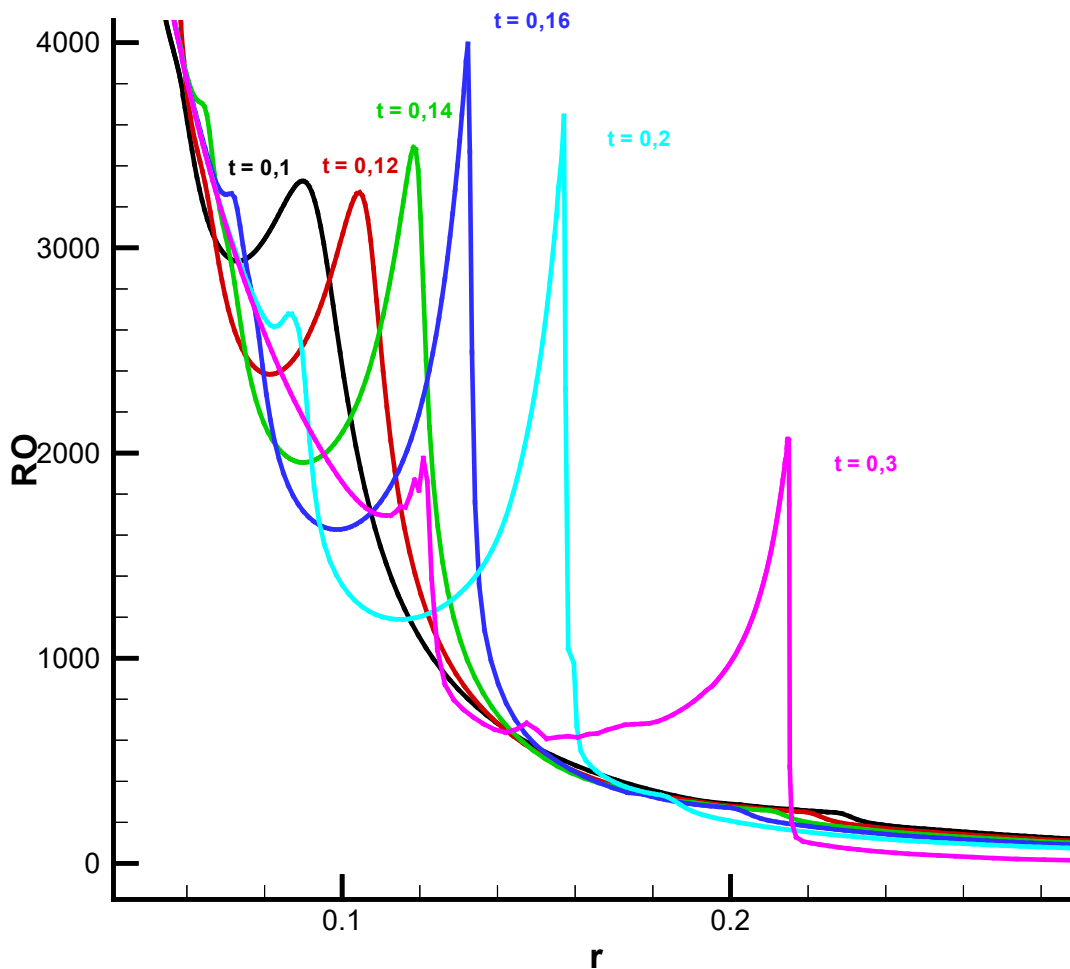


Рис. 2.2. Распределение плотности в экваториальной плоскости с 2 полями.

Как видно из этого рисунка, величина возмущения плотности в протопланетном диске массой $0,667M_S$ ($\alpha = 0,01$) при наложении его собственного гравитационного поля может достигать нескольких десятков процентов от максимума начального распределения его плотности.

Расчеты, проведенные для дисков с массами $0,096M_S$ ($\alpha = 0,005$), $7,168 \cdot 10^{-3}M_S$ ($\alpha = 0,002$), показали, что величина наблюдаемых возмущений плотности при наложении собственного гравитационного поля диска резко убывает с уменьшением его массы. Максимальная величина возмущений плотности дисков для $\alpha = 0,01$; $0,005$; $0,002$ составляет соответственно 2500; 43; 0,9; а отношение максимальной величины возмущений к максимальной плотности диска есть соответственно 0,27; 0,022; 0,004.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что при всех значениях α , для которых проводился расчет ($\alpha = 0,002$; $\alpha = 0,005$ и $\alpha = 0,01$), в диске наблюдаются кольцеобразные возмущения плотности, которые со временем смещаются в сторону внешнего края диска. Однако величина этих возмущений быстро убывает с уменьшением массы диска, и при массе равной $7,168 \cdot 10^{-3}M_S$ возмущения очень малы.

Наряду с вышепредставленными расчетами была также проведена серия расчетов с «включением» лишь части гравитационного поля диска, находящегося в его экваториальной плоскости. В этом случае в экваториальной плоскости диска выделялся слой шириной 0,00048, который «создавал» гравитационное поле.

На рис. 2.3, 2.4, 2.5 представлены зависимости $\Delta\rho(r) \equiv \rho(r,t) - \rho(r,t=0)$ соответственно для $\alpha = 0,002$; $\alpha = 0,005$ и $\alpha = 0,01$ в разные моменты времени, где $\Delta\rho(r) = \rho(r,t) - \rho(r,t=0)$.

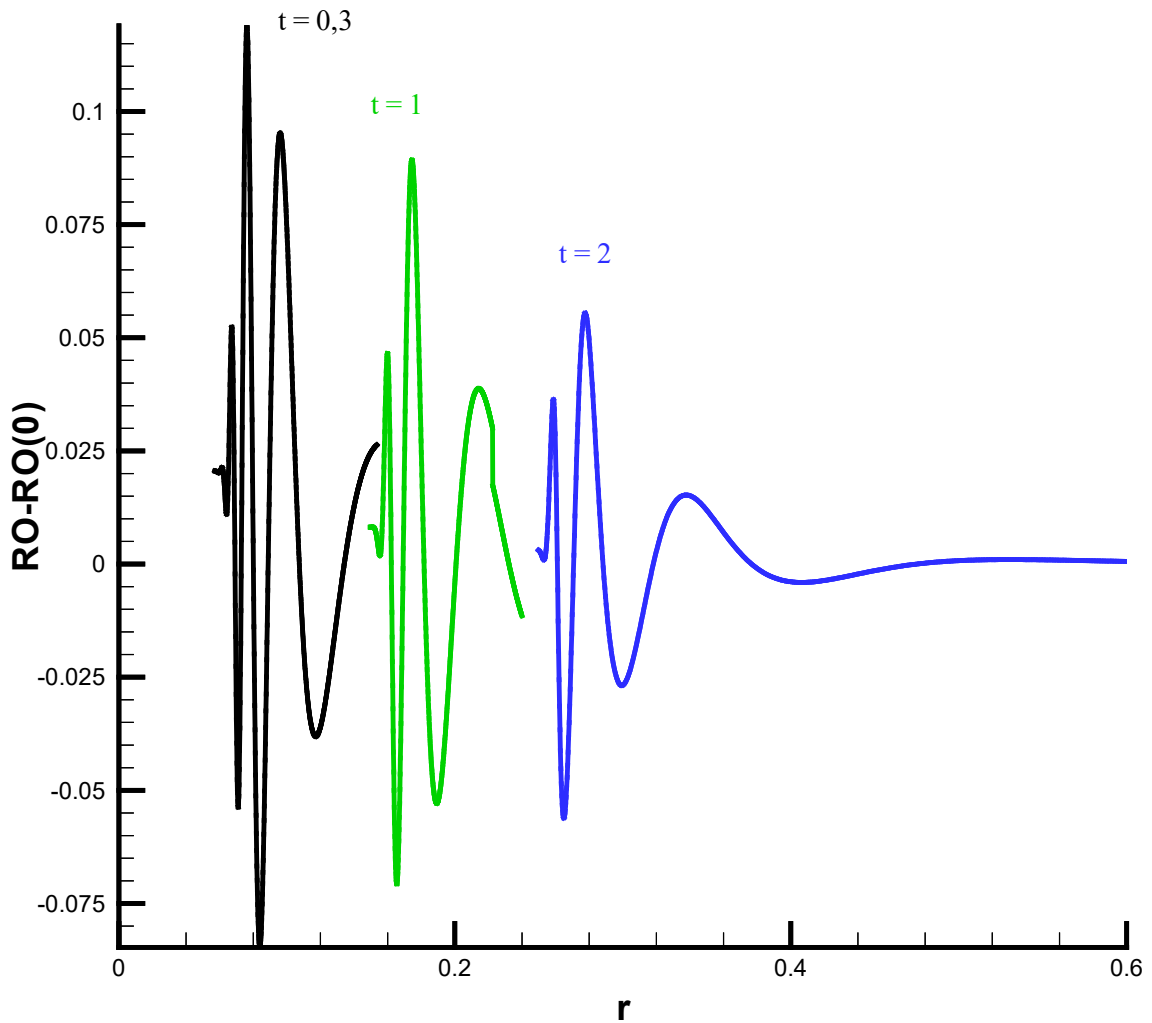


Рис. 2.3. Возмущения плотности в экваториальной плоскости, $\alpha = 0,002$.

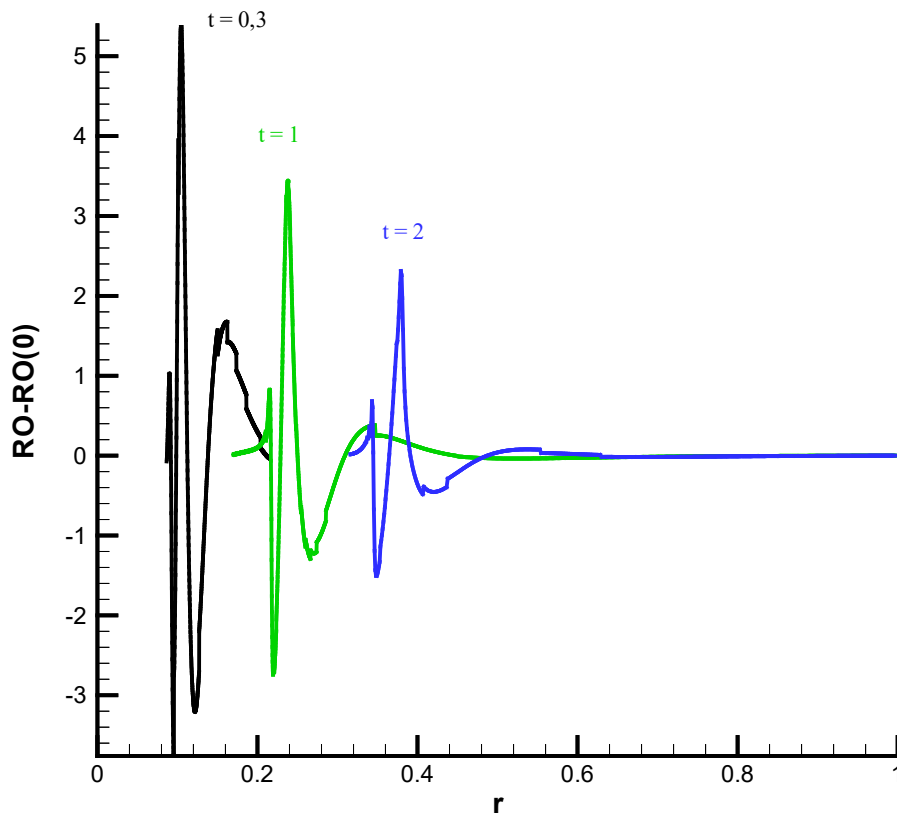


Рис. 2.4. Возмущения плотности в экваториальной плоскости, $\alpha = 0,005$.

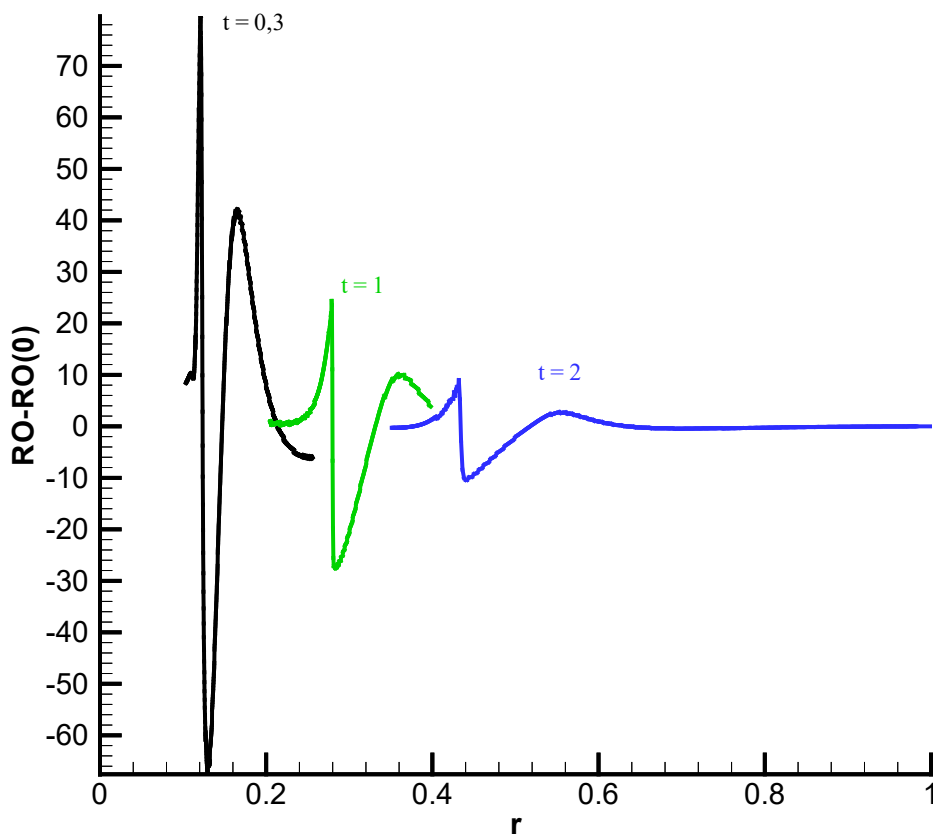


Рис. 2.5. Возмущения плотности в экваториальной плоскости, $\alpha = 0,01$.

Анализ результатов, полученных в серии одномерных расчетов, показывает, что кольцеобразные возмущения плотности наблюдаются как в случае «включения» полного гравитационного поля диска, так и в случае «включения» только малой части гравитационного поля диска, находящегося в его экваториальной плоскости. Однако в последнем случае величина возмущений становится значительно меньше, чем в случае «включения» полного гравитационного поля диска. Так в расчетах при $\alpha = 0,01$ максимальная величина возмущений для случаев «включения» полного гравитационного поля и только части гравитационного поля диска, находящегося в его экваториальной плоскости, составляет соответственно 2500 и 148. Наблюдаемые кольцеобразные возмущения плотности в одномерных расчетах подобны кольцеобразным возмущениям плотности в двумерных расчетах.

Заключение

В настоящей главе представлены результаты расчетов по численному моделированию эволюции протопланетного диска Солнца на ее начальной стадии. Предложены приближенные модели протопланетного диска в двумерном и одномерном приближениях. Численные расчеты в двумерной постановке, требующие больших вычислительных мощностей, осуществлялись на вычислительных системах Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

В проведенных численных экспериментах как в двумерной, так и в одномерной постановках наблюдалась перестройка структуры протопланетного диска Солнца с появлением кольцевых областей, в которых течения среды развиваются таким образом, что они приводят к концентрации вещества (увеличению плотности вещества) в определенных сечениях этих областей.

Одна из гипотез, которая может объяснить наблюдаемые эффекты при перестройке протопланетного диска Солнца, есть гравитационная неустойчивость диска, в результате которой могут образовываться кольцевые неустойчивости. Эта гипотеза не является новой. Возможности образования планетной системы Солнца в процессе развития кольцеобразных неустойчивостей посвящен ряд работ, например, [28, 29]. Приведенные результаты численного эксперимента наиболее близки к представлениям работы В.Л. Поляченко и А.М. Фридмана [29], в которой они предсказали возможность образования нарастающих со временем кольцеобразных возмущений плотности достаточно плоского диска в условиях его гравитационной неустойчивости. В отличие от работы [29] в представленных исследованиях характеристики диска были более близки к реальным. Численное моделирование эволюции протопланетного диска показало, что нарастающие со временем кольцеобразные возмущения плотности имеют характер волны возмущений, распространяющейся по

диску, причем возмущения затрагивают не только плотность вещества, но и форму (геометрические размеры) диска. Достаточно высокая точность численного эксперимента дает возможность проследить зарождающиеся неустойчивости, когда они еще практически не проявляются в изменениях плотности, но уже видны на линиях тока среды диска.

Глава III. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – аналитические решения.

Постановка задачи

Данная глава написана на основе работ [8, 9, 10]. В ней представлен краткий обзор результатов исследований по гравитационной неустойчивости сред. На основании анализа основных моделей образования Солнечной планетной системы предложена физико-математическая модель начальной стадии эволюции протопланетного диска Солнца.

Введение

Данная глава посвящена постановке задачи по исследованию гравитационной неустойчивости протопланетного диска на начальной стадии его эволюции. В этих исследованиях предполагается справедливой гипотеза, которая восходит к классическим идеям И. Канта и П.С. Лапласа [18, 19] о совместном образовании Солнца и его планетной системы в результате коллапса (сжатия) единой протосолнечной туманности.

В протопланетном диске Солнца могли существовать разного вида неустойчивости: ротационная неустойчивость [45]; конвективная неустойчивость [15, 3]; диссипативная неустойчивость, тепловая неустойчивость и другие [69]. В настоящем аналитическом обзоре исследуется гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца, которая обусловлена его собственным гравитационным полем.

Как известно [45, 46], межзвездная среда протопланетного диска содержала по массе не более 2% пыли, и ее с достаточной точностью можно представить, как однокомпонентный идеальный газ [46]. Для такой среды и были получены основные результаты в теории гравитационной неустойчивости.

В 1929 году вышла классическая работа Джинса [70] по гравитационной неустойчивости бесконечной по всем направлениям однородной и изотропной среды. Исходя из однородности и изотропии такой среды, Джинс сделал предположение, что гравитационная сила в любой точке этой среды равна нулю и система стационарна. Следует отметить, что предположения Джинса о равновесности и стационарности однородной бесконечной гравитирующей среды, в действительности, не являются корректными, так как такая среда обязана быть нестационарной [71]. Поэтому, строго говоря, задача о гравитационной устойчивости бесконечной гравитирующей среды должна решаться на нестационарном фоне [72], [73]. Тем не менее, основные качественные выводы, полученные Джинсом, и при точном рассмотрении устойчивости сжимающейся или

расширяющейся однородной среды оказываются справедливыми. В этом заключается парадокс Джинса. В наших дальнейших рассмотрении однородной гравитирующей среды мы будем следовать традиционному подходу Джинса.

Для «холодной» среды, давление в которой становится малым и им можно пренебречь, следуя Джинсу, можно получить дисперсионное уравнение в виде [79]:

$$\omega^2 = -\omega_J^2, \quad (1)$$

где

$e^{i\omega t}$ – зависимость возмущения среды от времени;

$\omega_J^2 = 4\pi G\rho_n$ – джинсовская частота (частота Джинса);

ρ_n – плотность невозмущенной однородной и изотропной среды;

G – гравитационная постоянная.

Из уравнения (1) следует, что рассмотренная гравитирующая среда является неустойчивой, поскольку один из корней $\omega = -i\omega_J$ соответствует нарастанию возмущений со временем. Причем в «холодной» среде могут возникать неустойчивые возмущения с любой длиной волны.

Допустим, что гравитирующая среда имеет конечную температуру. Тогда давлением в уравнениях пренебрегать нельзя, и дисперсионное уравнение будет иметь вид [79]:

$$\omega^2 = k^2 C_n^2 - \omega_J^2, \quad (2)$$

где

C_n – скорость звука в невозмущенной среде;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Как видно из уравнения (2), существует определенная длина волны λ_J , называемая критической длиной волны Джинса, которая разделяет устойчивые ($\lambda < \lambda_J$) и неустойчивые ($\lambda > \lambda_J$) возмущения. Эта длина волны определяется из условия $\omega^2 = 0$:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = C_n \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_n}}. \quad (3)$$

Дисперсионное уравнение для «холодной» среды (1) получается из уравнения (2) при $k \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$ (при переходе к возмущениям достаточно большого пространственного масштаба).

В 1955 году Чандрасекхар [74] обобщил задачу Джинса на случай бесконечной среды с однородным вращением и получил следующее дисперсионное уравнение для волн с волновыми векторами, перпендикулярными к оси вращения:

$$\omega^2 = (k^2 - k_J^2)C_n^2 + 4\Omega_n^2. \quad (4)$$

Отсюда следует, что гравитационная неустойчивость для возмущений, распространяющихся перпендикулярно оси вращения, наступает только при

$$\frac{\Omega^2}{\pi G \rho_n} < 1. \quad (5)$$

Бóльшие угловые скорости ($\frac{\Omega^2}{\pi G \rho_n} \geq 1$) подавляют возмущения, которые распространяются перпендикулярно оси вращения среды. Для возмущений, распространяющихся вдоль оси вращения, дисперсионное уравнение в этой задаче остается тем же самым, какое было получено Джинсом.

В 1958 году Бел и Шацман [75] обобщили задачу Джинса на среду с неоднородным вращением. Они получили дисперсионное уравнение для радиальных возмущений в локальном приближении ($\lambda \ll r$) в виде:

$$\omega^2 = k^2 C_n^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2, \quad (6)$$

где

$$\chi^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d(\Omega r^2)^2}{dr}, \quad (7)$$

χ - эпициклическая частота.

Дисперсионное уравнение (6) при $\Omega = const$ сводится к уравнению Chandrasekara, а при $\Omega = 0$ - к уравнению Джинса для невращающейся среды.

В 1960 году В.С. Сафронов получил дисперсионное уравнение для вращающихся плоских систем конечной толщины [76]. В аналитическом приближении [77] это уравнение было приведено к виду:

$$\omega^2 = k^2 C_n^2 - 4\pi G \rho_n \left(1 + \frac{2}{kh}\right)^{-1} + \chi^2, \quad (8)$$

где h – толщина диска.

В 1964 году Тоомре [78] при исследованиях устойчивости осесимметричных возмущений в бесконечно тонком диске ($\lambda \gg h$) вывел следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = k^2 C_n^2 - 2\pi G k \sigma_n + \chi^2, \quad (9)$$

где σ_n - поверхностная плотность бесконечно тонкого диска.

Легко видеть, что дисперсионное уравнение В.С. Сафронова при $\lambda \gg h$ переходит в уравнение (9), а при $\lambda \ll h$ - в уравнение Бела-Шацмана (6).

В 1972 году В.Л. Поляченко и А.М. Фридман предложили объяснение закона планетных расстояний, основанное на идее гравитационной

неустойчивости в достаточно тонком диске [29]; [79]. Приближенное дисперсионное уравнение, полученное ими в этой работе, имеет вид:

$$\omega^2 \cong k^2 C_n^2 - 2\pi G k \sigma_n + \chi^2 . \quad (10)$$

Видно, что это уравнение совпадает с дисперсионным уравнением Тоомре (9) для бесконечно тонкого диска.

С развитием методов численного моделирования появилась возможность проводить соответствующие расчеты, связанные с эволюцией протопланетного диска. Так, например, в 2002 году в работах В.Н. Снытникова с соавторами [57, 58] было показано, что в протопланетном диске могут возникать крупномасштабные радиальные возмущения, которые с течением времени распадаются на фрагменты.

В 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами была предложена аналитическая модель протопланетного диска в приближении Роша [45, 3, 5], в рамках которой можно исследовать как форму диска, так и распределение плотности среды в диске в зависимости от начальных условий, например, от массы диска (см. глава I настоящего обзора).

В 2010 году К.В. Брушлинским, В.Т. Жуковым, М.С. Легкоступовым, Л.А. Плинер, Е.А. Забродиной с соавторами были представлены результаты численных расчетов по возникновению крупномасштабных радиальных возмущений в протопланетном диске, инициированных собственным гравитационным полем диска [80, 6, 7, 81] (см. глава II настоящего обзора). В этих исследованиях также был открыт ранее неизвестный эффект: при возникновении в протопланетном диске радиальных возмущений плотности происходили характерные деформации толщины диска. Было сделано предположение, что этот эффект связан с начальной фазой разбиения диска на кольца, хотя для более строгого доказательства этого положения, необходимы дальнейшие численные расчеты. В указанных численных расчетах в качестве начальных условий была использована аналитическая модель протопланетного диска в приближении Роша [3].

1. Постановка задачи

В настоящее время общепринятой теорией образования планетной системы Солнца является теория Шмидта-Сафронова образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [15, 16]. В то же время проблема гравитационной устойчивости протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции остается крайне актуальной и сегодня. Если протопланетный диск гравитационно неустойчив на начальной стадии его эволюции, то это может привести к образованию протопланет, что существенно изменяет установившуюся картину наших представлений

об образовании как в целом планетной системы Солнца, так и спутников планет.

Ясно, что на какой-то стадии эволюции диска степень его гравитационной неустойчивости была весьма высокой: образовались не одна-две планеты, а восемь планет, пояс астероидов, пояс Койпера и др. Во многих существующих моделях протопланетного диска Солнца в той или иной мере используется принцип гравитационной неустойчивости диска или гравитационной неустойчивости некоторой его области.

В модели Шмидта-Сафронова гравитационная неустойчивость на начальной стадии протопланетного диска, т.е. фактически в газовой среде, исключается. Многие исследователи предполагают, что гравитационная неустойчивость в этой модели возникает на стадии формирования пылевого слоя в диске в результате падения пылевых частиц на его экваториальную (центральную) плоскость, что приводит к образованию пылевых сгущений. Пылевые сгущения имеют следующие средние значения массы и экваториального радиуса [16]:

$$m_o \approx \frac{\sigma_p^3}{\rho_*^2}, \quad a_o \approx \frac{\sigma_p}{2\rho_*}. \quad (11)$$

Для зоны Земли, если $\sigma_p \approx 10$ г/см², $\rho_* \approx 1,42 \cdot 10^{-7}$ г/см³, то имеет место:

$$m_o \approx 5 \cdot 10^{16} \text{ г}, \quad a_o \approx 4 \cdot 10^7 \text{ см}, \quad (12)$$

а критическая плотность в этих условиях составляет

$$\rho_{кр} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3. \quad (13)$$

На расстоянии Земли от Солнца пылевые сгущения превращаются в твердые тела на временах порядка 10^4 лет, а на расстоянии Юпитера - на временах порядка 10^6 лет. Образовавшиеся твердые тела продолжают расти за счет столкновений и на определенной стадии возникают зародыши планет – достаточно большие тела, способные в дальнейшем расти с помощью собственного гравитационного поля. Из зародыша или слияния нескольких зародышей образуется планета. Время роста, например, планеты Земля оценивается в этой модели примерно 10^8 лет.

Однако следует признать, что в рамках модели Шмидта-Сафронова все-таки трудно объяснить ряд явлений и фактов, имеющих место при образовании планет. Начнем перечисление сложных для объяснения явлений по ходу развертывания событий в рамках этой модели.

Как видно из оценки (12), длина волны возмущений при гравитационной неустойчивости в пылевом слое протопланетного диска в модели Шмидта-Сафронова составляет примерно $4 \cdot 10^7$ см. Следует отметить, что авторы других работ [45, 29, 28] рассматривают возмущения, приводящие к гравитационной неустойчивости, с длиной волны порядка расстояния между планетами (крупномасштабные неустойчивости).

Вообще говоря, в теории образования Солнечной планетной системы должны быть учтены вклады неустойчивостей всех масштабов. Для этого важно учитывать динамику образования протопланетного диска в том плане, что плотность диска постепенно возрастала, меняясь от плотности порядка протосолнечной туманности до максимального значения, а затем падала до значений, соответствующих конечной фазе образования диска.

В случае бесконечной однородной и изотропной среды ее неустойчивость описывается критерием Джинса (введение, формула (3)). Ограничения со стороны малых длин волн возмущений дается критической длиной волны Джинса. Со стороны больших длин волн ограничений нет. Это значит, что при сколь угодно малой плотности среды существует конечная критическая длина волны Джинса и неустойчивость наступает при $\lambda > \lambda_j$. Таким образом, в диапазоне всех возможных длин волн возмущений бесконечная однородная и изотропная среда при любых малых плотностях неустойчива.

Допустим, что однородная, изотропная среда конечна (оставляем в стороне вопросы стационарности такой среды, как это было сделано при рассмотрении парадокса Джинса). В этом случае со стороны больших длин волн возмущения ограничены размерами среды, и тогда длина волны неустойчивых возмущений подчинена неравенству $L_{cp} > \lambda > \lambda_j$, где L_{cp} – есть характерный размер среды. Подобная ситуация складывается и в протопланетном диске. При рассмотрении радиальных возмущений плотности диска их длина волны будет ограничена сверху только радиальными размерами диска. В рассматриваемых условиях эволюции диска, когда плотность в экваториальной плоскости нарастает с определенных минимальных значений, первыми могут возбуждаться и приводить к гравитационной неустойчивости возмущения с максимальной длиной волны, как это и соответствует критерию Джинса (введение, формула (3)). Более того, анализ показывает: если предполагается, что произошла гравитационная неустойчивость с длиной волны $\lambda_1 \ll L_{cp}$, то ранее при определенных возмущениях должна была произойти и гравитационная неустойчивость с большими длинами волн (λ_2) в интервале $\lambda_1 < \lambda_2 < L_{cp}$.

В работе [15] вводится критическая плотность в области достаточно малых длин волн: «...критическая плотность, необходимая для гравитационной неустойчивости, которая, как известно, зависит от λ ...». Действительно, исходя из критерия Джинса (см. глава III, введение, формула (3)), можно ввести такое определение. И, ориентируясь на возмущения длин волн порядка размеров планетезималей, могут быть получены соотношения (11) – (13).

Для последующих оценок введем несколько другое определение критической плотности протопланетного диска. Критическая плотность протопланетного диска $\rho_{н,кр}(r)$ - это минимальная плотность, при которой может возникнуть гравитационная неустойчивость при учете возмущений во всем диапазоне возможных длин волн.

В приближении идеального газа и, используя для оценки критической плотности диска критерий Джинса, получаем:

$$\rho_{н,кр} = C_n^2 \frac{\pi}{\lambda_J^2 G} = \gamma \frac{RT}{\mu} \frac{\pi}{G \lambda_J^2}, \quad (14)$$

где R – газовая постоянная;

T – температура газовой среды протопланетного диска, $^{\circ}\text{K}$;

μ – молекулярный вес газовой среды диска;

γ – отношение C_p/C_v газовой среды диска (показатель адиабаты).

Если среда протопланетного диска имеет распределение плотности пылевой компоненты близкое к однородному, и содержание пыли по массе не превышает нескольких процентов, то усредненные параметры такой среды с достаточной точностью описываются уравнением состояния идеального газа [16, 46, 50, 1]. Если на пылевые частицы приходится по массе около 1,5% вещества солнечного состава, то молекулярный вес для такой среды равен примерно 2,53, а показатель адиабаты – 1,43 [46, 50]. Согласно современным представлениям температура газовой среды, например, для зоны Земли в начальной стадии эволюции протопланетного диска составляла $T \sim 300^{\circ}\text{K}$, а плотность $\rho \sim 3 \cdot 10^{-9}$ г/см³ [16]. Усредняя данные по температурам для всех зон, получим среднюю температуру диска $T \approx 150^{\circ}\text{K}$. Возьмем критическую длину волны Джинса, равную половине диаметра протопланетного диска $\lambda_J \approx 2,9 \cdot 10^{14}$ см. При этом неустойчивые возмущения, которые будут приводить к гравитационной неустойчивости диска, будут лежать в интервале $\lambda_J \approx 2,9 \cdot 10^{14}$ см $< \lambda < L_{cp} \approx 5,8 \cdot 10^{14}$ см. Подставляя найденные значения параметров среды в выражение (14), получаем:

$$\rho_{н,кр} \approx 4 \cdot 10^{-12} \text{ г/см}^3. \quad (15)$$

Таким образом, критическая плотность, при которой может возникнуть гравитационная неустойчивость в диске, составляет $\rho_{н,кр} \sim 4 \cdot 10^{-12}$ г/см³, что на пять порядков меньше критической плотности (13), полученной в рамках модели [15, 16], и на три порядка меньше плотности газовой среды в зоне Земли ($\sim 3 \cdot 10^{-9}$ г/см³).

Следует подчеркнуть, что, исходя из этой оценки, еще нельзя сделать однозначного вывода о гравитационной неустойчивости протопланетного диска в начальной стадии его эволюции, так как оценка $\rho_{н,кр}$ есть оценка снизу – она не учитывает, например, вращение среды диска, которое в

определенной степени подавляет гравитационную неустойчивость [15, 74, 75]. Поэтому для окончательного ответа на вопрос о гравитационной устойчивости протопланетного диска в начальной стадии его эволюции необходимо провести более точные расчеты.

Одним из ключевых вопросов в эволюции протопланетного диска в модели [15, 16] является образование достаточно крупных тел (зародышей планет), способных продолжать расти с помощью собственного гравитационного поля. В научной литературе возможность такого объединения малых твердых тел неоднократно подвергалась сомнению. Так в работах [82, 51, 83] вопрос об образовании зародышей планет отнесен к числу наиболее неясных и уязвимых в планетной космогонии, настоятельно требующий своего разрешения.

Как показывают астрономические наблюдения, возникновение малых твердых тел далеко не всегда приводит к образованию достаточно крупных тел, которые далее могут расти с помощью собственного гравитационного поля. К таким системам относятся, например, пояс астероидов в планетной системе Солнца, кольца Сатурна, кольца Урана, кольца Нептуна и др.

Экспериментальные и теоретические исследования последних лет [34] показали, что вероятность слипания частиц, когда их размеры становятся много больше 10 см, стремится к нулю. Поэтому не следует ожидать, что объединение частиц при столкновениях может привести к образованию крупных тел размером порядка 1 – 10 м [84, 85]. В рамках модели твердотельной аккумуляции, вероятно, единственным путем образования планетезималей, из которых затем образуются планеты, является гравитационная неустойчивость пылевого слоя в экваториальной плоскости протопланетного диска. Хотя, судя по современным представлениям, и в этой части проблемы появились трудности: возникновение турбулентности в пылевом слое препятствует его уплотнению [34].

Наиболее сложным для объяснения вопросом в рамках модели [15, 16] является вопрос о планетных расстояниях – правило Тициуса-Боде. Так как процессы объединения образовавшихся твердых тел в протопланетном диске носят стохастический характер, то теория в рамках этой модели принципиально не может вычислить расстояния, на которых должны в протопланетном диске сформироваться планеты [16]. Если задано распределение вещества в протопланетном диске, то эта теория может лишь оценить количество формирующихся планет и их относительные расстояния.

В 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами была предложена альтернативная модель [2, 3, 5], в которой, в отличие от модели Шмидта-Сафронова, было введено существенное предположение – в ней «разрешена» крупномасштабная гравитационная неустойчивость на начальной стадии эволюции

протопланетного диска. Следует подчеркнуть, что процессы аккумуляции планетами твердых тел и частиц являются экспериментальным фактом. Не вызывает сомнений также падение пыли к экваториальной плоскости и рост частиц при определенных условиях в результате их столкновений. По этой причине эти процессы, естественно, должны присутствовать в любой альтернативной теории образования планет. В предложенной альтернативной модели параллельно идут следующие физические процессы: гравитационная неустойчивость с включением крупномасштабной неустойчивости, падение частиц на экваториальную плоскость и слипание частиц пыли при столкновении их друг с другом. Оказалось, что введенное предположение в большинстве случаев снимает выше указанные трудности при описании формирования планетной системы Солнца. Действительно, в предложенной модели на начальной стадии эволюции протопланетного диска (при определенном распределении плотности в его экваториальной плоскости в зависимости от радиуса) волна возмущения плотности, максимумы которой находятся в местах расположения планет, приводит к гравитационной неустойчивости, в результате которой возникают протопланетные газопылевые кольца, соответствующие зонам планет. Через определенное время протопланетные кольца в силу их неустойчивости распадаются на фрагменты (крупномасштабные газопылевые сгущения), из которых и образуются газопылевые протопланеты. Эволюция оставшегося вне протопланет и протоспутников газопылевого вещества и его взаимодействие с планетами описывается моделью Шмидта-Сафронова.

В рамках предложенной модели [2, 3, 5] проблемы зародышей планет вообще не возникает, так как формирование планетных тел происходит внутри протопланет. Под воздействием гравитационного поля протопланеты пылевые частицы падают в центр протопланеты, образуя тело формирующейся планеты.

Закон планетных расстояний в модели [2, 3, 5] обусловлен волной возмущения плотности, в результате воздействия которой образуются протопланетные кольца, соответствующие зонам планет, как это показано, например, в работе [29]. Численные расчеты [57, 58, 80, 6, 7, 81] подтверждают возможность образования крупномасштабных радиальных возмущений.

Для выбора модели образования планетной системы Солнца большой интерес представляют работы Э.М. Галимова по геохимическому составу планет [31, 32, 86]. Совершенно ясно, что геохимический состав планет будет существенным образом зависеть от модели образования планетной системы Солнца. В результате геохимических исследований Э.М. Галимов выдвинул гипотезу, что формирование планетных тел происходит из газопылевого сгущения (облака), и на примере системы Земля-Луна в его работах показано, что эта гипотеза наилучшим образом позволяет

объяснить известные геохимические факты и ограничения. В тоже время в рамках модели твердотельной аккумуляции планет, в том числе и в модели мегаимпакта образования Луны (образования Луны в результате столкновения космического тела планетарного размера с Землей) [87], возникают значительные трудности в объяснении ряда геохимических составов и изотопных систем [86]. В рамках данной работы нет возможности останавливаться на всех геохимических зависимостях системы Земля-Луна, эти результаты достаточно подробно изложены в работе [86]. В настоящем обзоре приведем лишь одно красивое доказательство образования железного ядра Земли, следуя Э.М. Галимову.

В протопланетном газопылевом сгущении, состав которого был близок к составу протосолнечной туманности, железо находилось в окисленном состоянии - FeO. Газовая среда представлена в основном водородом. В центральной части протопланетного сгущения за счет его сжатия в некоторый момент будут достигнуты температуры, достаточные для испарения FeO. Как известно, водород является эффективным восстановителем, и он связывается с кислородом, а железо выделяется в чистом виде. Далее, железо конденсируется в металлические частицы, которые под действием силы тяжести падают в центр протопланеты, образуя металлическое ядро из Fe. Ранее приемлемого механизма образования железного ядра Земли не было предложено.

В модели Э.М. Галимова не рассматриваются вопросы образования газопылевых сгущений, в остальном модель имеет много общего с моделью, предложенной А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами в работах [2, 3, 5].

В последнее время были опубликованы работы, например, [88], независимо подтверждающие выводы Э.М. Галимова, в которых он ставит под сомнение достоверность теории мегаимпакта образования Луны. На этот раз речь идет о присутствии следов воды на Луне. В кристаллической структуре образцов минералов, собранных с верхнего слоя лунного нагорья миссией «Аполлон», были обнаружены следы воды в виде гидроксила. Эти исследования указывают на то, что вода не покидала естественный спутник нашей планеты на протяжении всей его эволюции. Доктор Йокси Занг [88] считает, что этот факт трудно объяснить с позиций популярной в настоящее время теории формирования Луны (теории мегаимпакта).

Таким образом, из проведенного анализа следует, что в рамках модели, предложенной в работах [2, 3, 5], могут быть объяснены многие факты, относящиеся к различным областям знаний о планетной системе Солнца. Но, несмотря на это, для построения законченной модели необходимо провести исследования и определить, при каких условиях возникают крупномасштабные гравитационные неустойчивости в протопланетном диске на начальной стадии его эволюции.

Приступая к выбору физико-математической модели, сделаем несколько общих замечаний. Известно, что газовая среда конечных размеров, находящаяся в равновесном состоянии под действием только собственного гравитационного поля, имеет характерный размер $R \cong \lambda_J$ и является гравитационно устойчивой, например, [79].

В случае протопланетного диска ситуация развивается по другому сценарию. Протосолнечная туманность в результате гравитационной неустойчивости, которая достаточно корректно описывается моделью Джинса [70], начинает сжиматься (происходит коллапс протосолнечной туманности). В результате падения вещества в центр протосолнечной туманности образуется Солнце. Часть вещества протосолнечной туманности за счет своего значительного момента количества движения остается в околосолнечном пространстве, образуя протопланетный диск. Таким образом, основными силами, которые удерживают протопланетный диск в околосолнечном пространстве и определяют его геометрию, являются гравитационная сила Солнца и центробежная сила, а не собственное гравитационное поле диска. Но в квазистационарном состоянии диска гравитационная сила Солнца уравнивается центробежной силой, и в этом случае на первый план выходят более слабые физические процессы, которые определяются: давлением вещества, собственным гравитационным полем диска (самогравитацией диска) и др. Поэтому модель протопланетного диска Солнца должна включать в себя Солнце как внешний источник гравитационного поля, которое взаимодействует с вращающимся газопылевым диском, удерживая его в стационарном состоянии.

В результате коллапса средняя плотность среды протопланетного диска увеличивается по сравнению с плотностью межзвездного газа примерно на десять порядков. По этой причине в диске может возникнуть следующая после коллапса межзвездной среды гравитационная неустойчивость.

Таким образом, на начальной стадии эволюции протопланетный диск может быть гравитационно неустойчив, если λ_J его среды меньше его характерных размеров.

В полной постановке задача эволюции протопланетного диска является чрезвычайно сложной. Для нашей цели исследования – определения параметров протопланетного диска в начальной стадии его эволюции, при которых возможны радиальные возмущения, приводящие к гравитационной неустойчивости, можно существенно упростить задачу. В этом случае допустимо следующее приближение:

- 1) Среда диска является однокомпонентной и представляет собой идеальный газ.

2) Из всех физических процессов, которые наблюдаются в протопланетном диске, можно оставить только основные, которые отвечают за гравитационную устойчивость диска:

- газодинамические процессы,
- гравитационное поле Солнца,
- собственное гравитационное поле диска,
- вращение среды диска вокруг оси, проходящей через центр Солнца.

3) Для рассмотрения радиальных возмущений в диске задачу можно рассматривать в осесимметричной постановке.

В данном приближении система уравнений в цилиндрической системе координат x, r, θ имеет вид [3]:

$$\frac{\partial(\rho r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial r} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial(\rho u r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)r}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial r} = \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial(\rho v r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)r}{\partial r} = p + \rho w^2 + \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\rho w r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w r)}{\partial r} = -\rho v w, \quad (19)$$

$$\frac{\partial(e r)}{\partial t} + \frac{\partial[(e + p)u r]}{\partial x} + \frac{\partial[(e + p)v r]}{\partial r} = \frac{\partial(\rho u r \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r \varphi)}{\partial r} + \varphi \frac{\partial(\rho r)}{\partial t}. \quad (20)$$

Ось x направлена по оси вращения газопылевого диска; u, v, w - составляющие вектора скорости \mathbf{U} , соответственно, осевая, радиальная и угловая;

$$|\mathbf{U}|^2 = u^2 + v^2 + w^2; \quad (21)$$

$\rho = \rho(x, r, t)$ - плотность газа; $p = p(x, r, t)$ - давление газа;

$e = \rho[\varepsilon + (u^2 + v^2 + w^2)/2]$ - энергия единицы объема газа;

$\varepsilon = \varepsilon(x, r, t)$ - внутренняя энергия единицы массы газа;

$\varphi = \varphi(x, r, t)$ - гравитационный потенциал представлен в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_s + \varphi_d,$$

где φ_s - гравитационный потенциал внешнего источника (в нашем случае Солнца),

φ_d - собственный гравитационный потенциал протопланетного диска:

$$\varphi_d(x, r, t) = G \int_{V(t)} \frac{\rho(x_T, r_T, t)}{R_\varphi} r_T dx_T dr_T d\theta_T, \quad (22)$$

а

$$R_\varphi = \sqrt{(x - x_T)^2 + (r \cdot \cos \theta - r_T \cdot \cos \theta_T)^2 + (r \cdot \sin \theta - r_T \cdot \sin \theta_T)^2}, \quad (23)$$

x_T, r_T, θ_T - текущие цилиндрические координаты, по которым ведется интегрирование в (22). В интеграле (22) в силу симметрии может быть выполнено интегрирование по координате θ_T .

Внутри протопланетного диска в фиксированный момент времени гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi_d(x, r, t) \equiv \frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial x^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_d}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(x, r, t), \quad (24)$$

а вне диска - уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi_d(x, r, t) = 0. \quad (25)$$

Заключение

Данная глава посвящена проблеме гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца.

Во введении настоящей главы дан краткий аналитический обзор работ по исследованиям гравитационной неустойчивости гравитирующих сред, из которого следуют представленные далее выводы. На начальной стадии эволюции среду протопланетного диска с достаточной точностью можно представить, как однокомпонентный идеальный газ. Устойчивость таких гравитирующих сред, как правило, исследовалась с помощью дисперсионных уравнений [70], [74] – [78], [29]. Создание вычислительных систем большой производительности создало условия для проведения численного моделирования гравитационной неустойчивости сред [57, 58, 6, 7]. Устойчивость однородной невращающейся среды определяется, исходя из критической длины волны Джинса (критерий Джинса). Вращение среды повышает ее гравитационную устойчивость. В плане исследований гравитационной неустойчивости протопланетного диска несомненный интерес представляет работа [29], в которой показана возможность возникновения крупномасштабных неустойчивостей и на их основе приведено объяснение закона планетных расстояний. Результаты численного моделирования [57, 58, 6, 7] подтверждают результаты работы [29] о возможности возникновения крупномасштабных гравитационных неустойчивостей в протопланетных дисках. К настоящему моменту на основании имеющихся данных по гравитационной неустойчивости не представляется возможным сделать однозначный и обоснованный вывод о гравитационной устойчивости протопланетного диска (или о параметрах его гравитационной неустойчивости). Для более точного определения

гравитационной устойчивости протопланетного диска необходимо провести дальнейшие исследования.

В разделе «Постановка задачи» представлен аналитический обзор основных теорий образования планетной системы Солнца. В настоящее время общепринятой теорией образования планетной системы Солнца является теория твердотельной аккумуляции [15, 16]. Основопологающим постулатом этой теории является образование планетезималей в тонком пылевом слое (субдиске) [15, 16]. Многие исследователи полагают, что причиной образования планетезималей является мелкомасштабная гравитационная неустойчивость. Авторы настоящего обзора также придерживаются идеи гравитационной неустойчивости, но считают, что в ходе эволюции протопланетного диска должны учитываться не только мелкомасштабная гравитационная неустойчивость, но и крупномасштабные ее виды, которые могут реализоваться по мере увеличения плотности диска в его экваториальной плоскости. Зарождение гравитационной неустойчивости определяется критерием Джинса. Изначальная крупномасштабная гравитационная неустойчивость привела к образованию протосолнечной туманности, с которой и начался коллапс. Следует отметить, что, по-видимому, не было попыток объяснить коллапс протосолнечной туманности возникновением более мелких гравитационных возмущений, которые в своем развитии и привели к коллапсу, как это делается в исследованиях эволюции протопланетного диска для объяснения образования планет.

По мере формирования протопланетного диска его плотность увеличивалась. И по логике зарождения гравитационных неустойчивостей в первую очередь должны были возникнуть в диске крупномасштабные гравитационные неустойчивости. По мере дальнейшего увеличения плотности в диске могли возникнуть гравитационные неустойчивости и более мелкого масштаба.

Для дальнейшего исследования вопросов гравитационной неустойчивости протопланетного диска авторы остановились на физико-математической модели диска, впервые предложенной в работе [3].

Глава IV. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – аналитические решения. Дисперсионные уравнения

Данная глава написана на основе работ [3, 8, 9, 10]. В ней рассмотрена аналитическая модель описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции, предложенная в 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами. Получена двумерная система уравнений, которая описывает эволюцию протопланетного диска на ее начальной стадии. Проведена линеаризация уравнений протопланетного диска для его экваториальной плоскости. На основе линеаризованных уравнений получены приближенные дисперсионные уравнения для среды диска, находящейся в окрестности его экваториальной плоскости.

Введение

В настоящей главе представлен вывод дисперсионных уравнений на основе поставленной в предыдущей главе физико-математической задачи для протопланетного диска Солнца в начальной стадии его эволюции.

1. Аналитическая модель протопланетного диска в приближении Роша

В 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами была предложена аналитическая модель протопланетного диска Солнца в приближении Роша, в которой масса протопланетного диска (M_d) много меньше массы Солнца (M_S) [2, 3, 5]. Вывод основных уравнений этой модели дан в главе I. В данной же главе мы остановимся только на основных предпосылках модели, которые важны для понимания основных результатов проведенных исследований. Система уравнений (16) – (25) главы III значительно упрощается при следующих предположениях:

1) Рассматривается стационарное равновесное состояние газовой среды с центральным источником гравитационного поля.

2) Если $M_d \ll M_S$, то собственным гравитационным полем диска можно пренебречь.

3) Газовая среда протопланетного диска подчиняется политропному уравнению состояния $P(\rho) = K\rho^\gamma$, где K – константа, γ – показатель адиабаты.

4) Угловая скорость вращения газовой среды протопланетного диска есть функция только координаты r .

5) Угловая скорость вращения среды протопланетного диска близка к кеплеровскому закону вращения.

Предпосылки 1 – 3 не нуждаются в доказательствах. Предпосылка 4 имеет строгое обоснование, например, в работе [89]. Угловая скорость вращения среды протопланетного диска обычно берется в виде кеплеровского закона вращения, так как именно этому закону подчиняется частица, находящаяся в стационарном равновесном движении вокруг Солнца. Отсюда и следует предпосылка 5.

При введенных предположениях, как показано в работах [2, 3], система уравнений (16) – (25) главы III имеет аналитическое решение, которое в цилиндрической системе координат приводится к виду:

$$\frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} = GM_S \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) + GM_S \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right) \quad (1.1)$$

$$\Omega^2 = \frac{(1 + \alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in})}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \frac{GM_S}{r^{3+\alpha}}, \quad (1.2)$$

где Ω – угловая частота вращения среды диска.

Далее будут использованы следующие значения констант в уравнениях (1.1), (1.2).

показатель адиабаты: $\gamma = 1,43$ [46];

гравитационная постоянная: $G = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{с}^2)$;

масса Солнца: $M_S = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г}$ [90];

внутренний радиус протопланетного диска Солнца: $r_{in} = 0,449 \cdot 10^{13} \text{ см}$;

внешний радиус протопланетного диска Солнца: $r_{ex} = 0,591 \cdot 10^{15} \text{ см}$;

константа в уравнении состояния газовой среды:

$$K = 9,7446 \cdot 10^{13} \text{ см}^{3\gamma-1} / (\text{г}^{\gamma-1} \cdot \text{с}^2) \quad [60];$$

молекулярный вес газовой среды: $\mu = 2,53$ [46].

Константу K невозможно определить независимым путем. Если предположить, что коллапс протосолнечной туманности происходит в соответствии с политропным законом (что, безусловно, не соответствует действительности), то константа $K \cong 2,4761 \cdot 10^{16} \text{ см}^{3\gamma-1} / (\text{г}^{\gamma-1} \cdot \text{с}^2)$. Это значение дает слишком высокие температуры в протопланетном диске [60]. Если константу K определить исходя из современных представлений о характеристиках протопланетного диска, то она получается приближенно

равной $K = 9,7446 \cdot 10^{13} \text{ см}^{3\gamma-1} / (\Gamma^{\gamma-1} \cdot \text{с}^2)$ [60]. Это значение константы K и принято в дальнейших расчетах.

Так как в первом приближении параметры протопланетного диска будут описываться аналитической моделью в приближении Роша, то использование этой модели позволяет уйти от неопределенности в отношении параметров протопланетного диска. Используя уравнения (1.1), (1.2), можно получить важные для нашего исследования характеристики диска, в том числе зависимость характеристик от массы диска.

Для анализа гравитационной неустойчивости возьмем протопланетные диски трех масс [60]: $M_d \approx 7,168 \cdot 10^{-3} M_S$, $M_d \approx 0,096 M_S$, $M_d \approx 0,667 M_S$, где M_S - масса Солнца.

На рис. 1, 2, 3 представлены изолинии плотности ($[\rho] = 1 \text{ г/см}^3$) протопланетного диска в аналитической модели в приближении Роша соответственно для $\alpha = 0,002$ ($M_d \approx 7,168 \cdot 10^{-3} M_S$), $\alpha = 0,005$ ($M_d \approx 0,096 M_S$) и $\alpha = 0,01$ ($M_d \approx 0,667 M_S$) [60].

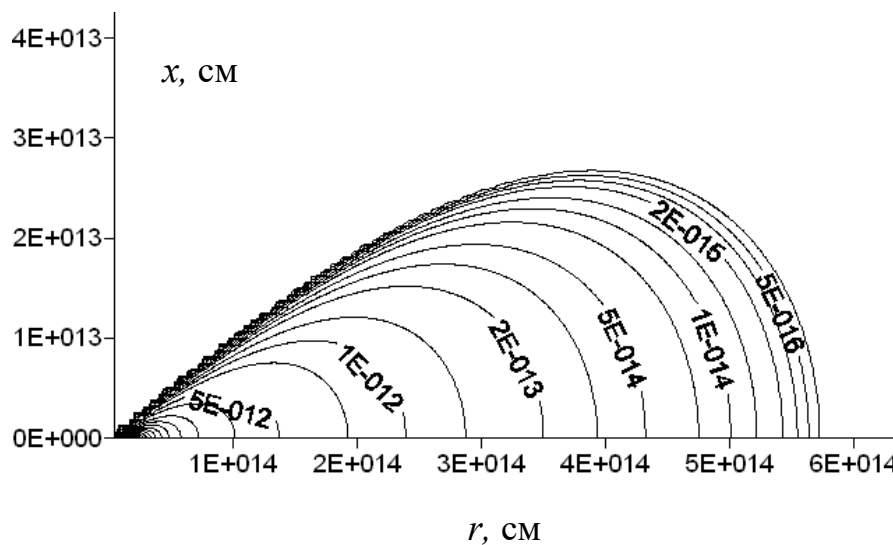


Рис. 1. Изолинии плотности протопланетного диска для $\alpha = 0,002$,
 $M_d \approx 7,168 \cdot 10^{-3} M_S$.

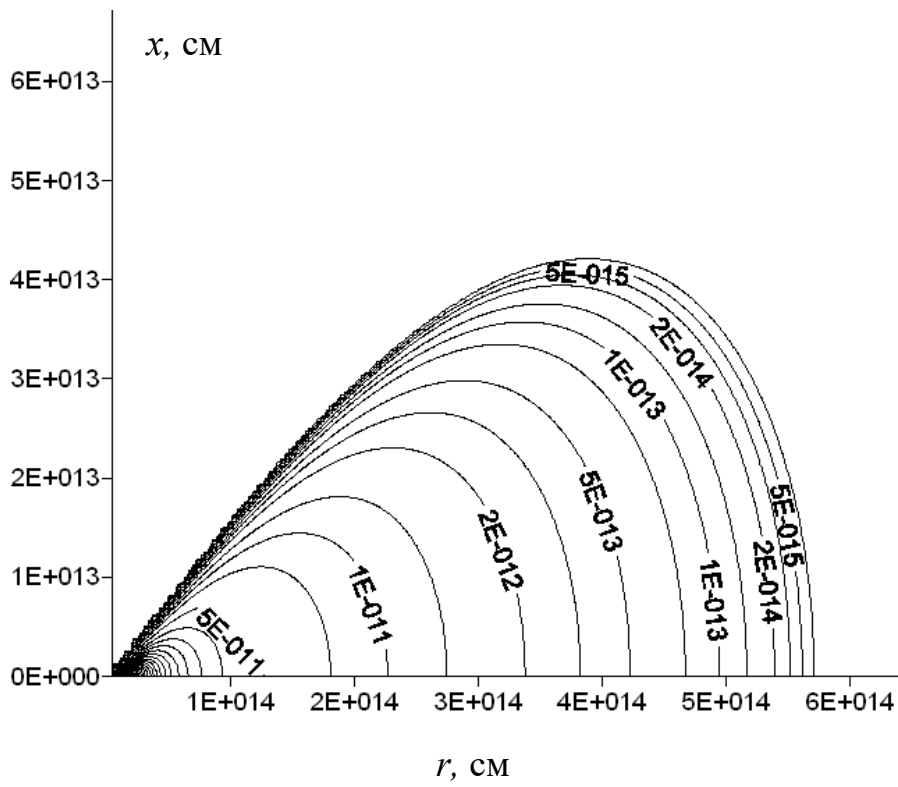


Рис. 2. Изолинии плотности протопланетного диска для $\alpha = 0,005$,
 $M_d \approx 0,096 M_s$.

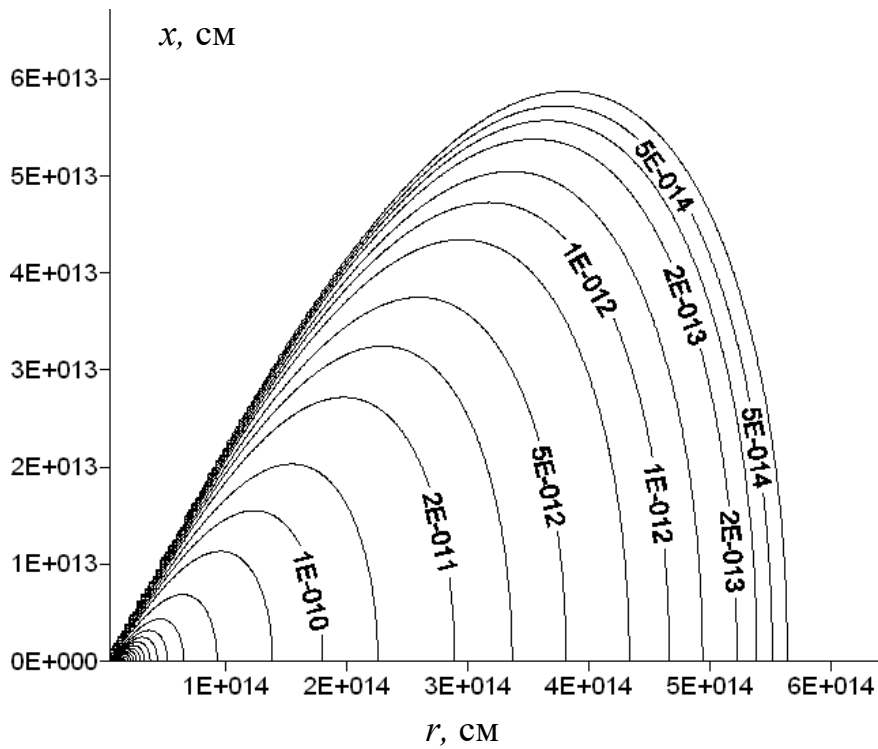


Рис. 3. Изолинии плотности протопланетного диска для $\alpha = 0,01$,
 $M_d \approx 0,667M_s$.

Из рис. 1, 2, 3 видно, что плотность достигает максимальной величины в экваториальной плоскости диска, но при стремлении к его границам она уменьшается и на самой границе становится равной нулю. Форма диска на этих графиках соответствует изолинии $\rho \approx 0$ г/см³.

Распределения плотности (RO) среды диска в его экваториальной плоскости в зависимости от приведенного радиуса (R) показаны на рис. 4 соответственно для $\alpha = 0,002$, $\alpha = 0,005$, $\alpha = 0,01$, где $RO = 4\pi r_{ex}^3 \rho / M_s$, $R = r/r_{ex}$ есть безразмерные переменные; $M_s/(4\pi r_{ex}^3) = 7,67 \cdot 10^{-13}$ г/см³.

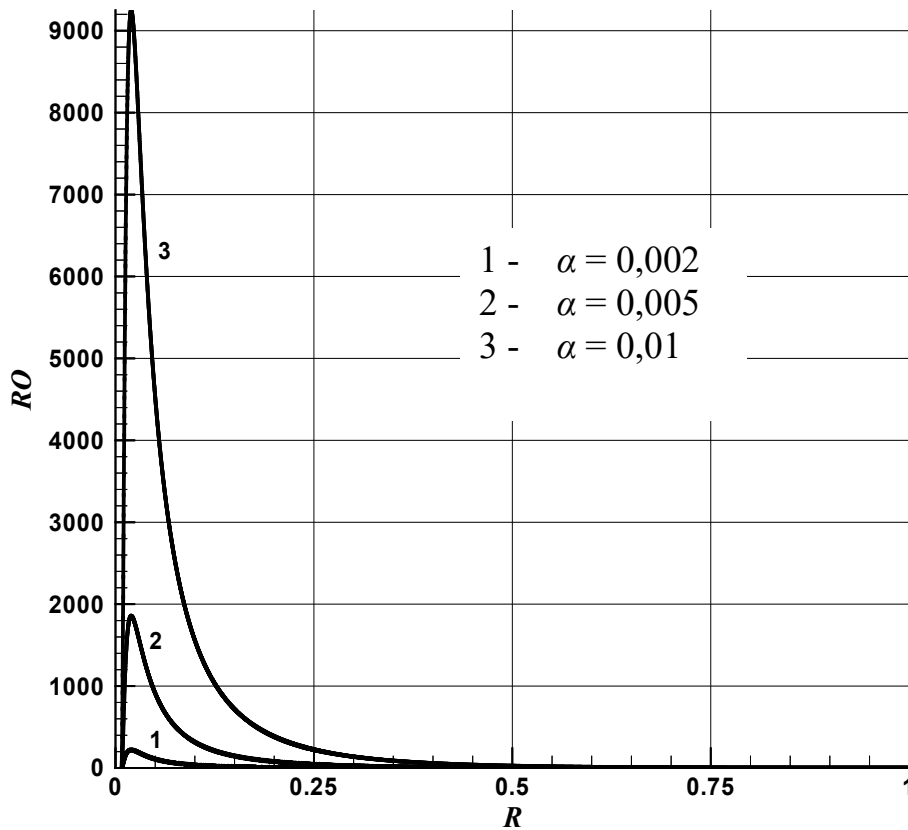


Рис. 4. Распределение плотности (RO) в зависимости от радиуса (R) в экваториальной плоскости протопланетного диска.

На рис. 5 показаны зависимости угловой скорости вращения ($OMEGA$) среды диска от приведенного радиуса (R) соответственно для $\alpha = 0,002$, $\alpha = 0,005$, $\alpha = 0,01$, где $OMEGA = r_{ex}^{3/2} \Omega / (GM_s)^{1/2}$, $R = r/r_{ex}$ есть безразмерные переменные. Так как параметр α мал, то в данном масштабе

все три кривые сливаются в одну линию, которая представляет собой закон Кеплера.

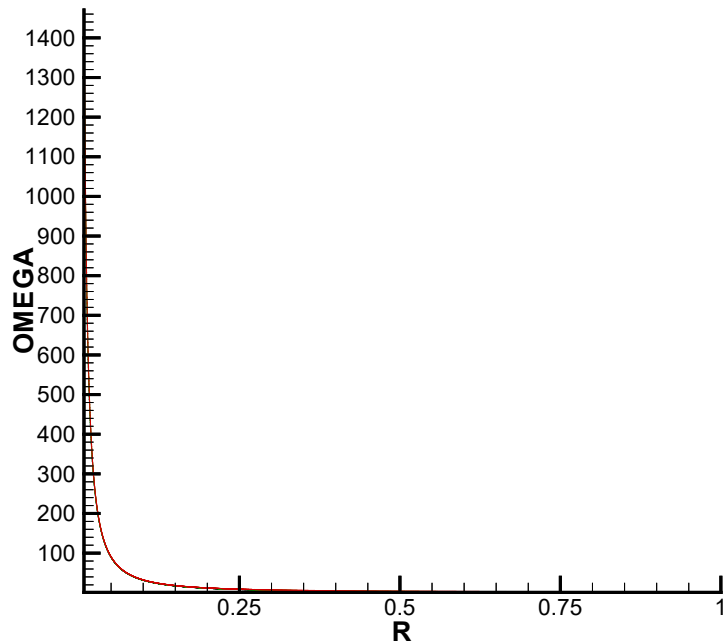


Рис. 5. Зависимость угловой частоты вращения (*OMEGA*) среды протопланетного диска в зависимости от радиуса (*R*).

Зависимости температуры (*T*) среды диска от радиуса (*r*) соответственно для $\alpha = 0,001$, $\alpha = 0,003$, $\alpha = 0,005$, $\alpha = 0,007$ представлены на рис. 6.

Из представленных рисунков видно, что плотность, давление и температура возрастают при увеличении массы диска.

Итак, в аналитической модели в приближении Роша получены все характеристики, необходимые для описания протопланетного диска Солнца.

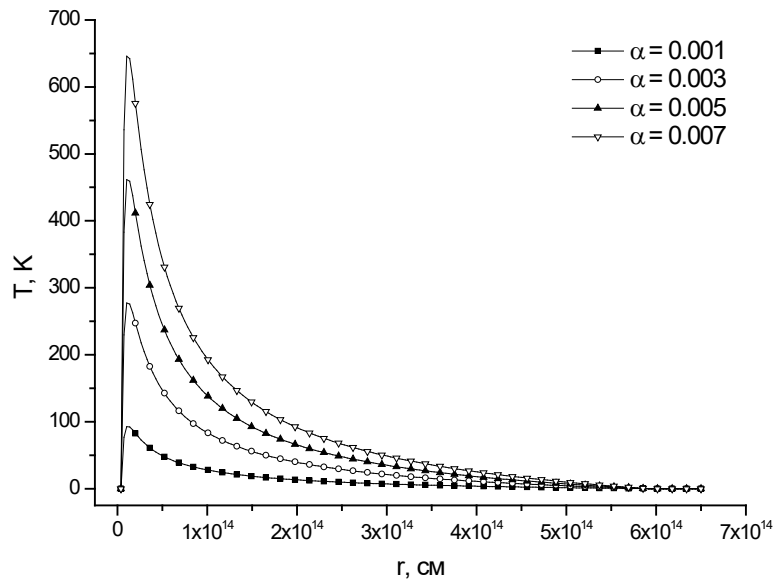


Рис. 6. Зависимости температуры среды (T) от радиуса (r) в экваториальной плоскости протопланетного диска.

При исследованиях диска на гравитационную неустойчивость целесообразно в первую очередь провести оценки по критерию Джинса (глава III, формула (3)). Действительно, если по критерию Джинса протопланетный диск устойчив, то на этом фактически можно и закончить исследования, так как последующие поправки только увеличивают его устойчивость.

Как известно [70], критерий Джинса получен для однородной среды. В отличие от этого случая протопланетный диск в аналитической модели, как видно из рис. 1, 2, 3, существенно неоднороден по плотности, и его максимальная плотность находится в экваториальной плоскости (см. рис. 1, 2, 3, 4). Поэтому возможная гравитационная неустойчивость должна развиваться из района экваториальной плоскости.

Для оценки гравитационной неустойчивости применим представленный в предыдущем главе критерий Джинса (3) локально в точках экваториальной плоскости. На рис. 7, 8, 9 представлены зависимости λ_j от радиуса. На этих же рисунках приведены прямые $\lambda = r$, которые соответствуют возможным длинам волн радиальных возмущений в диске, исходя из его радиальных размеров.

Таким образом, из сравнения этих двух зависимостей $\lambda_j(r)$ и $\lambda(r)$ можно легко сделать вывод о подверженности протопланетного диска гравитационной неустойчивости в тех его областях, где выполняется условие $\lambda_j < \lambda$, т.е. где критическая длина волны Джинса оказывается меньше радиуса.

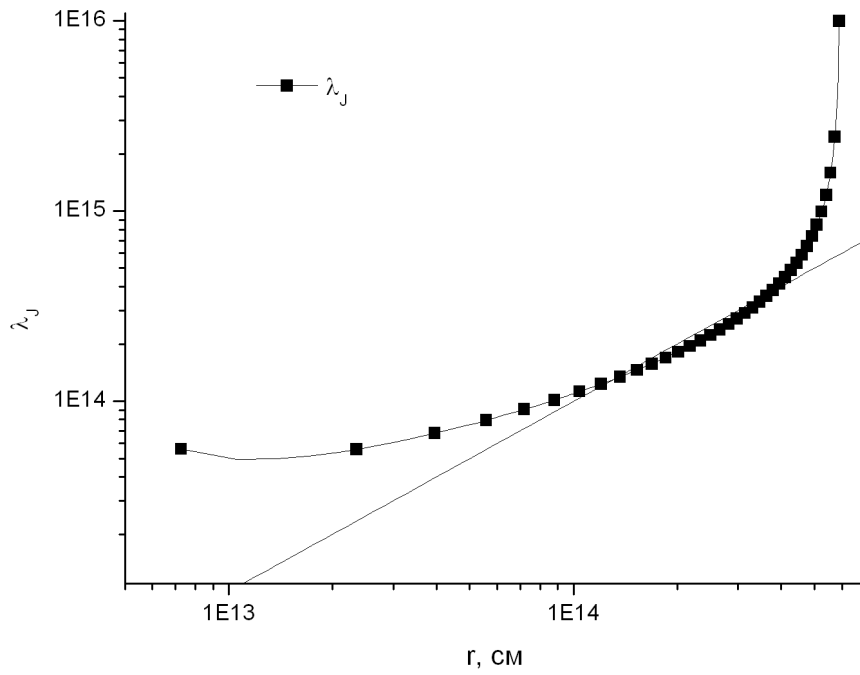


Рис. 7. Распределение критической длины волны Джинса для $\alpha = 0,002$,
 $M_d \approx 7,168 \cdot 10^{-3} M_S$.

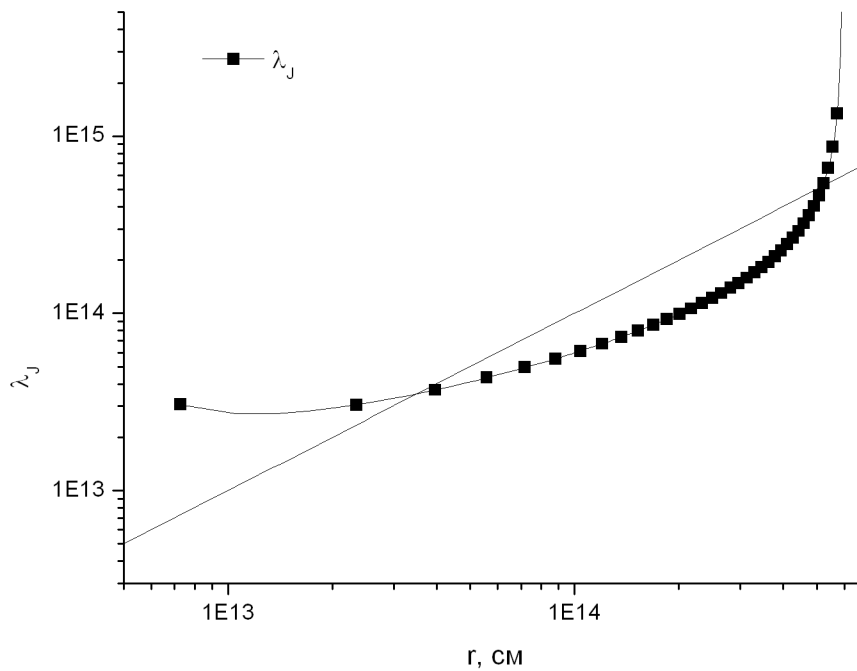


Рис. 8. Распределение критической длины волны Джинса для $\alpha = 0,005$,
 $M_d \approx 0,096 M_S$.

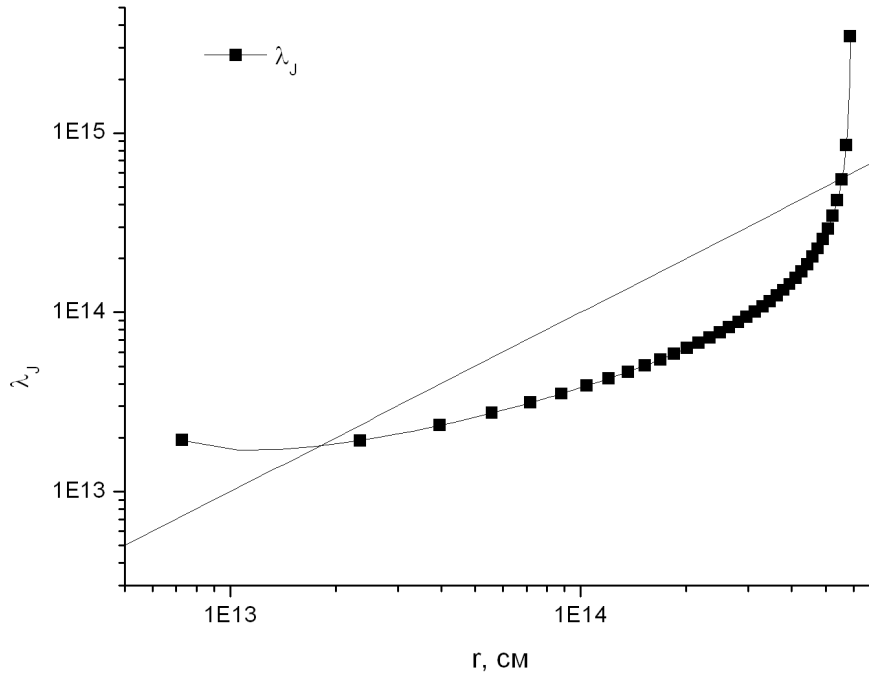


Рис. 9. Распределение критической длины волны Джинса для $\alpha = 0,01$,
 $M_d \approx 0,667M_S$.

Из графиков, приведенных на рис. 7, 8, 9, видна одна характерная особенность протопланетного диска: в диске существуют области, прилегающие к его границам, где критическая длина волны Джинса заведомо больше его характерных радиальных размеров, т.е. эти области сами по себе гравитационно устойчивы. Это легко понять. Возьмем критерий Джинса, представленный в виде:

$$\lambda_J^2 = c^2 \frac{\pi}{G\rho} . \quad (1.3)$$

Скорость звука можно записать, как:

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{K\rho^\gamma}{\rho} = \gamma K \rho^{\gamma-1} . \quad (1.4)$$

Отсюда находим:

$$\lambda_J^2 = c^2 \frac{\pi}{G\rho} = \frac{\gamma K \pi}{G\rho^{2-\gamma}} . \quad (1.5)$$

Из выражения (1.5) видно, что при приближении к границам диска (в этом случае $\rho \rightarrow 0$) $\lambda_J \rightarrow \infty$, т.е. существуют области, прилегающие к его границам, которые гравитационно устойчивы. С другой стороны, из графиков, приведенных на рис. 7, 8, 9, отчетливо видно, что для всех трех рассмотренных случаев существуют внутренние области, где $\lambda > \lambda_J$, т.е. эти области могут быть гравитационно неустойчивы. С ростом массы

протопланетного диска размеры гравитационно неустойчивых областей увеличиваются.

Таким образом, для изучения гравитационной устойчивости протопланетного диска необходимо продолжить исследования в более точной постановке.

2. Система уравнений для описания среды в экваториальной плоскости протопланетного диска

Поскольку гравитационная неустойчивость протопланетного диска зарождается в экваториальной плоскости, то целесообразно исследовать именно эту область диска.

Введем субстанциональную производную [56]:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} . \quad (2.1)$$

Тогда уравнения (16) - (20) главы III запишутся в более компактном виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\rho v}{r} , \quad (2.2)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \quad (2.3)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} , \quad (2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{vw}{r} , \quad (2.5)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho c^2 \frac{v}{r} = 0 , \quad (2.6)$$

$$p = (\gamma - 1)\epsilon\rho . \quad (2.7)$$

Экваториальная плоскость протопланетного диска соответствует $x = 0$. В этой плоскости в силу симметрии выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \quad u = 0. \quad (2.8)$$

Используя эти соотношения, преобразуем систему уравнений (2.2) – (2.6):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\rho v}{r} , \quad (2.9)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (2.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{vw}{r}, \quad (2.11)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho c^2 \frac{v}{r} = 0. \quad (2.12)$$

Как было сказано выше, вещество диска подчиняется политропному уравнению состояния $p(\rho) = K\rho^\gamma$. При сделанных предположениях уравнение (2.12) (закон сохранения энергии) и уравнение (2.9) (закон сохранения массы) совпадают. Таким образом, в нашем случае остаются три уравнения (2.9), (2.10), (2.11).

К этим уравнениям следует добавить уравнение Пуассона для среды в экваториальной плоскости протопланетного диска:

$$\Delta\varphi(x, r, t) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -4\pi G\rho(x, r, t). \quad (2.13)$$

Можно показать, что задача протопланетного диска в приближении Роша имеет стационарное решение, соответствующее равновесному состоянию вращающегося диска.

Примем следующие предпосылки, которые в какой-то мере аналогичны предпосылкам, сделанным Джинсом в случае однородной изотропной среды:

- Допустим, что существует стационарное равновесное состояние протопланетного диска и в том случае, когда учитывается собственное гравитационное поле диска.
- Допустим, что зависимость плотности вещества диска от радиуса в этом состоянии подобна соответствующим зависимостям задачи протопланетного диска в приближении Роша и в первом приближении соответствует этим зависимостям.

3. Линеаризация системы уравнений, описывающих среду в экваториальной плоскости протопланетного диска

Проведем линеаризацию уравнений (2.9) – (2.11), а также уравнения Пуассона (2.13) относительно выбранного нами стационарного равновесного состояния протопланетного диска.

Допустим, что в некоторый момент времени система, до этого находившаяся в равновесном состоянии, каким-либо способом выведена из этого состояния. Тогда в последующие моменты времени она будет

описываться функциями ρ , v , p , w , φ , которые могут быть представлены в виде:

$$\rho = \rho_n + \rho_\Delta, \quad v = v_\Delta, \quad p = p_n + p_\Delta, \quad \varphi = \varphi_n + \varphi_\Delta, \quad w = w_n + w_\Delta, \quad (3.1)$$

где индексом «н» обозначено начальное состояние, относительно которого происходит разложение.

Подставляя соотношения (3.1) в уравнения (2.9) – (2.11), (2.13) и используя выражение (2.1) для субстанциональной производной, получаем:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial r} + \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) + (\rho_n + \rho_\Delta) \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_\Delta}{r}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} - \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{\rho_\Delta}{\rho_n} \right) \left(\frac{\partial p_\Delta}{\partial r} + \frac{\partial p_n}{\partial r} \right) = \frac{2w_n w_\Delta}{r} + \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial (w_n + w_\Delta)}{\partial r} = -\frac{v_\Delta w_n}{r}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_\Delta. \quad (3.5)$$

В этих уравнениях сохранены члены, содержащие произведения вида $\rho_\Delta \frac{\partial v_\Delta}{\partial r}$, $v_\Delta \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r}$ и т.д., так как в зависимости от вида возмущений соответствующие производные от параметров возмущений по координате r могут быть не малы, например, возмущения прямоугольного профиля. В этом случае члены, содержащие указанные произведения, могут быть сравнимы с величинами первого порядка малости.

Сделаем некоторые замечания по поводу системы уравнений (16) – (20) главы III и системы (3.2) – (3.5). Система уравнений (16) – (20) главы III описывает общее состояние протопланетного диска, включая его основное состояние и возникающие в нем возмущения. Поэтому при численных расчетах, которые производятся с помощью этой системы уравнений, одна из основных задач заключается в том, чтобы численный метод мог «держаться» основного равновесного состояния диска [80, 6, 7]. Если этого не происходит, то в возмущенном состоянии численный метод неминуемо будет давать ошибки. Система уравнений (3.2) – (3.5), в отличие от системы (16) – (20) главы III, описывает только возмущения, которые происходят на фоне основного состояния среды диска. Основное состояние в этой системе уравнений не рассчитывается – оно задается с помощью физических характеристик основного состояния (p_n, ρ_n, w_n) , которые входят в эти уравнения как заданные функции от радиуса. Если оценки о равновесности основного состояния сделаны не корректно, как это было в случае исследований Джинса, то система уравнений этого

просто «не заметит». Это обстоятельство в какой-то мере объясняет «природу» парадокса Джинса. Описанная особенность системы уравнений (3.2) – (3.5) будет использована в наших дальнейших исследованиях.

4. Дисперсионные уравнения

Покажем, что из системы уравнений (3.2) – (3.5) путем несложных предельных переходов могут быть выведены основные дисперсионные уравнения, которые были получены в работах [70, 74, 75].

При предельном переходе от уравнений протопланетного диска к уравнениям однородной бесконечной среды следует из рассматриваемой системы исключить Солнце, а в уравнениях (3.2) – (3.5) производные $\frac{\partial \rho_n}{\partial r}$,

$\frac{\partial p_n}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2}$ положить равными нулю.

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = \frac{\partial p_n}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.1)$$

4.1. Бесконечная однородная изотропная среда

Допустим, что нам необходимо сделать предельный переход к бесконечной однородной и изотропной среде. Тогда, кроме исключения из системы Солнца и введения в уравнения (3.2) – (3.5) равенств (4.1), следует приравнять нулю угловую скорость вращения:

$$\Omega_n = 0. \quad (4.2)$$

Учитывая в уравнениях (3.2) – (3.5) равенства (4.1), (4.2) и сохраняя члены только первого порядка малости, получаем:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_\Delta}{r}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r}. \quad (4.4)$$

Данная задача отличается от классического рассмотрения Джинса только тем, что в ней исследование проводится в цилиндрических координатах и возмущения являются радиальными и осесимметричными вместо плоской волны.

Преобразуем уравнение (4.4) так, чтобы член в правой его части был равен $\nabla^2 \varphi_\Delta$. Для этого приведем уравнение (4.4) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\Delta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (\varphi_\Delta)}{\partial r} \right). \quad (4.5)$$

Запишем уравнение (4.3) как:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\Delta)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Подставляем выражение (4.6) в уравнение (4.5):

$$-\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) = \rho_n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\varphi_\Delta)}{\partial r} \right). \quad (4.7)$$

Уравнение Пуассона в данной постановке записывается как:

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_\Delta. \quad (4.8)$$

Подставляем соотношение (4.8) в уравнение (4.7):

$$-\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_n \rho_\Delta. \quad (4.9)$$

Проведем линеаризацию уравнения состояния $p = K\rho^\gamma$, чтобы получить зависимость $p_\Delta(\rho_\Delta)$:

$$p_n + p_\Delta = K\rho_n^\gamma \left(1 + \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}\right)^\gamma \approx K\rho_n^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}\right) \approx K\rho_n^\gamma + K\rho_n^\gamma \gamma \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}.$$

Отсюда

$$p_\Delta = K\rho_n^\gamma \gamma \frac{\rho_\Delta}{\rho_n} = K\rho_n^{\gamma-1} \gamma \rho_\Delta. \quad (4.10)$$

Находим скорость звука из соотношения:

$$C_n^2 = \frac{\gamma \cdot p_n}{\rho_n} = \frac{\gamma \cdot K \cdot \rho_n^\gamma}{\rho_n} = \gamma \cdot K \cdot \rho_n^{\gamma-1}. \quad (4.11)$$

С учетом этого выражения соотношение (4.10) запишется в виде:

$$p_\Delta = K\rho_n^{\gamma-1} \gamma \rho_\Delta = C_n^2 \rho_\Delta. \quad (4.12)$$

Используя выражение (4.12), проведем преобразование уравнения (4.9):

$$-\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} + \frac{C_n^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_n \rho_\Delta. \quad (4.13)$$

В рассматриваемой постановке будем искать решения, когда возмущения плотности являются радиальными. Найдем частное решение уравнения (4.13).

Допустим, что радиальная волна возмущения плотности описывается выражением:

$$\rho_\Delta = \rho_{\Delta,0} f(r) e^{i\omega t} e^{ikr}, \quad (4.14)$$

где

$\rho_{\Delta,0}$ - постоянная величина,

$f(r)$ - функция от радиуса, которая находится из условия, что дисперсионное уравнение является действительным выражением, т.е. не содержит мнимой части,

ω, k - константы.

В этих предположениях выражение (4.14) приводится к виду:

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,0} r^{-\frac{1}{2}} e^{i\omega t} e^{ikr} . \quad (4.15)$$

Подставляя выражение (4.15) в уравнение (4.13), находим дисперсионное уравнение (в локальном приближении $\Delta r \ll r_0$ [74, 75], где r_0 - это координата, в окрестности которой рассматривается дисперсионное уравнение, Δr - приращение координаты в окрестности r_0):

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n - \frac{C_n^2}{4r_0^2} . \quad (4.16)$$

В случае плоских возмущений дисперсионное уравнение (2), представленное в главе III не содержит третьего члена, который присутствует в правой части уравнения (4.16). Появление в нашем случае дополнительного члена в дисперсионном уравнении, вероятно, означает, что радиальные возмущения данного типа обладают большим диапазоном устойчивости.

Оценки показывают, что слагаемое $\frac{C_n^2}{4r_0^2}$ мало по сравнению с $C_n^2 k^2$, если $\frac{\lambda^2}{16\pi^2 r^2} \ll 1$, где λ - длина волны возмущений. В этом случае уравнение (4.16) совпадает с дисперсионным уравнением (2) главы III.

Формально в данной постановке можно устремить температуру невозмущенной среды к абсолютному нулю (приближение «холодного» газа). В этом пределе в уравнении (4.9) можно пренебречь членом, содержащим давление. Тогда получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = -4\pi G \rho_n = -\omega_J^2 , \quad (4.17)$$

которое описывает главную неустойчивость гравитирующей среды и полностью совпадает с дисперсионным уравнением, полученным Джинсом, где ω_J - джинсовская частота (частота Джинса).

4.2. Бесконечная однородная среда, вращающаяся как твердое тело

Перейдем к рассмотрению однородной бесконечной среды, которая вращается как твердое тело. В этом случае угловая частота вращения постоянна для любой частицы среды и не зависит от радиуса. Для начального невозмущенного состояния остаются в силе все предположения, которые были сделаны для бесконечной однородной и изотропной среды, кроме ее изотропности. В этой задаче $\omega_n \neq 0$, и линеаризованные уравнения могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_{\text{н}} \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_{\text{н}} v_{\Delta}}{r}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{\text{н}}} \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} = \frac{2w_{\text{н}} w_{\Delta}}{r} + \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} + v_{\Delta} \frac{\partial w_{\text{н}}}{\partial r} = -\frac{v_{\Delta} w_{\text{н}}}{r}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_{\Delta}. \quad (4.21)$$

Далее в этой системе уравнений проводим преобразования аналогичные тем, которые были проведены для случая бесконечной однородной и изотропной среды с целью преобразовать $\frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r}$ в $\nabla^2 \varphi_{\Delta}$. В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_{\text{н}} \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_{\text{н}} v_{\Delta}}{r}, \quad (4.22)$$

$$-\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{\text{н}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\rho_{\text{н}}} \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} \right) = \frac{2\rho_{\text{н}} w_{\text{н}}}{r} \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial r} + \frac{2\Omega_{\text{н}} \rho_{\text{н}}}{r} w_{\Delta} - 4\pi G \rho_{\text{н}} \rho_{\Delta}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} + v_{\Delta} \Omega_{\text{н}} = -\frac{v_{\Delta} w_{\text{н}}}{r}, \quad (4.24)$$

где

$$w_{\text{н}} = \Omega_{\text{н}} r. \quad (4.25)$$

Используя выражения (4.25) и (4.12), эту систему уравнений преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_{\text{н}} \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_{\text{н}} v_{\Delta}}{r}, \quad (4.26)$$

$$-\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} + \frac{C_{\text{н}}^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial r} \right) = \frac{2\rho_{\text{н}} \Omega_{\text{н}}}{r} w_{\Delta} + 2\rho_{\text{н}} \Omega_{\text{н}} \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial r} - 4\pi G \rho_{\text{н}} \rho_{\Delta}, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} = -2v_{\Delta} \Omega_{\text{н}}. \quad (4.28)$$

Возьмем возмущение плотности и линейной скорости вращения в виде, который позволяет получить дисперсионное уравнение в форме действительного выражения:

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,0} r^{\frac{1}{2}} e^{i\omega t} e^{ikr}, \quad (4.29)$$

$$w_{\Delta} = w_{\Delta,0} e^{i\omega t} e^{ikr}, \quad (4.30)$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений и исключая из нее скорость (v_{Δ}), получаем:

$$\rho_{\Delta} i\omega + w_{\Delta} \left(\rho_n \frac{\omega}{2\Omega_n} k - \frac{\rho_n}{r} \frac{i\omega}{2\Omega_n} \right) = 0, \quad (4.31)$$

$$-\rho_{\Delta} (i\omega)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} \right) = \frac{2\rho_n \Omega_n}{r} w_{\Delta} + 2\rho_n \Omega_n w_{\Delta} i k - 4\pi G \rho_n \rho_{\Delta}. \quad (4.32)$$

Исключая возмущение линейной скорости вращения (w_{Δ}) из этих двух уравнений, находим дисперсионное уравнение (в локальном приближении $\Delta r \ll r_o$):

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 + 4\Omega_n^2 - 4\pi G \rho_n - \frac{C_n^2}{4r_o^2}. \quad (4.33)$$

Дисперсионное уравнение (4.33) отличается от уравнения, полученного Чандрасекхаром [74], последним слагаемым в правой части. Последним членом в уравнении (4.33) можно пренебречь, если $\frac{\lambda^2}{16\pi^2 r^2} \ll 1$.

При температуре, стремящейся к абсолютному нулю (приближение «холодного» газа), дисперсионное уравнение переходит в уравнение

$$\omega^2 = 4\Omega_n^2 - 4\pi G \rho_n, \quad (4.34)$$

которое полностью совпадает с уравнением, полученным Чандрасекхаром.

В данной постановке полученные дисперсионные уравнения характеризуют возмущения, распространяющиеся перпендикулярно оси вращения среды. Нетрудно получить дисперсионное уравнение для плоских возмущений, которые распространяются параллельно оси вращения. В этом случае они совпадают с дисперсионными уравнениями Джинса (1), (2) главы III, которые были получены для бесконечной однородной изотропной среды.

Из дисперсионного уравнения (4.34) следует важный вывод: если

$$\frac{4\Omega_n^2}{4\pi G \rho_n} \equiv \frac{4\Omega_n^2}{\omega_J^2} > 1, \quad (4.35)$$

то радиальные возмущения, распространяющиеся перпендикулярно оси вращения среды, подавляются, и среда становится гравитационно устойчивой в этом направлении.

4.3. Бесконечная однородная среда при неоднородном вращении

Допустим, что закон вращения бесконечной однородной среды является дифференциальным. В этом случае система уравнений (3.2) – (3.5) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_{\Delta}}{r}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} = \frac{2w_n w_{\Delta}}{r} + \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} + v_{\Delta} \frac{\partial w_n}{\partial r} = -\frac{v_{\Delta} w_n}{r}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_{\Delta}, \quad (4.39)$$

где

$$w_n = \Omega_n(r) \cdot r$$

Используя метод преобразования для этой системы, описанный в предыдущих разделах, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_{\Delta}}{r}, \quad (4.40)$$

$$-\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} \right) = \frac{2\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} (w_n w_{\Delta}) - 4\pi G \rho_n \rho_{\Delta}, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} + v_{\Delta} \frac{\partial w_n}{\partial r} = -\frac{v_{\Delta} w_n}{r}. \quad (4.42)$$

Анализ этой системы уравнений показывает, что рассматриваемая среда в каждой точке пространства в зависимости от радиуса имеет определенную угловую скорость, отличную от других точек, и главная гравитационная неустойчивость включает при этом угловую скорость вращения и тоже зависит от радиуса. В этом случае, в отличие от однородного вращения среды, ω и k есть функции от радиуса и представление решения системы (4.40) – (4.42) на всех интервалах значений радиуса и времени в виде $e^{i\omega t} e^{ikr}$ с постоянными значениями ω и k , вообще говоря, не имеет места. Однако в некотором локальном приближении решение в виде $e^{i\omega t} e^{ikr}$ с постоянными значениями ω и k может существовать.

Будем искать решение системы (4.40) - (4.42) в виде:

$$\rho_{\Delta} = f(r) e^{i\omega t}, \quad (4.43)$$

$$v_{\Delta} = A(r) e^{i\omega t}, \quad (4.44)$$

$$w_{\Delta} = B(r) e^{i\omega t}, \quad (4.45)$$

где ω – константа.

Подставляя решение (4.43) в уравнение (4.40) и интегрируя его, получаем:

$$v_{\Delta}(r, t) = \frac{r_o v_{\Delta}(r_o, t)}{r} - \frac{i\omega}{\rho_n} \frac{1}{r} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx, \quad (4.46)$$

Рассматривая точку r_0 как начальную координату возмущения, можно положить $v_{\Delta}(r_0, t) = 0$, и тогда выражение (4.46) запишется в более простом виде:

$$v_{\Delta}(r, t) = -\frac{i\omega}{\rho_n} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r x \rho_{\Delta} dx, \quad (4.47)$$

Подставляя выражение (4.45) в уравнение (4.42), находим:

$$B(r) = -\frac{1}{i\omega} A(r) \left(r \frac{\partial \Omega_n}{\partial r} + 2\Omega_n \right), \quad (4.48)$$

Используя выражения (4.43), (4.47) и (4.48), преобразуем уравнение (4.41):

$$f(r) \left(\omega^2 + 4\pi G \rho_n - \chi^2 \right) + \frac{C_n^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(f(r))}{\partial r} \right) = + \frac{1}{r} \left(\int_{r_0}^r x f(x) dx \right) \frac{\partial \chi^2}{\partial r}, \quad (4.49)$$

где

$$\chi^2 = 4\Omega_n^2 + r \frac{d\Omega_n^2}{dr} - \text{есть квадрат эпициклической частоты.}$$

Можно показать, что существует частное решение уравнения (4.49):

$$f(r) = \rho_{\Delta,0} r^{-\frac{1}{2}} e^{ikr}, \quad (4.50)$$

которое приводит к действительному дисперсионному уравнению.

Подставляя выражение (4.50) в уравнение (4.49), получаем:

$$f(r) \left(\omega^2 - C_n^2 k^2 + 4\pi G \rho_n - \chi^2 + C_n^2 \frac{1}{4r^2} \right) = + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \left(\int_{r_0}^r x f(x) dx \right). \quad (4.51)$$

Если Ω_n есть постоянная частота вращения среды, то $\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = 0$, и уравнение (4.51) переходит в уравнение (4.33).

Проведем рассмотрение уравнения (4.51) в некотором локальном приближении в окрестности точки r_0 . Для этого представим квадрат эпициклической частоты в виде разложения в окрестности точки r_0 .

$$\chi^2 = \chi_0^2 + \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} (r - r_0)^2. \quad (4.52)$$

Допустим, что задается не волна возмущения, а локальное возмущение на отрезке $r_0 \leq r \leq r_1$.

В этом случае всегда можно выбрать интервал такой, что

$$\chi_0^2 \gg \left| \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_0} (r_1 - r_0) \quad (4.53)$$

и

$$(r_1 - r_o) \ll \frac{\chi_o^2}{\left| \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_o}} . \quad (4.54)$$

Следует подчеркнуть, что интервал $r_o \leq r \leq r_1$ не обязательно должен получиться малым – все зависит от изменения квадрата эпициклической частоты с расстоянием.

Тогда, если выполнено неравенство (4.53), то на интервале $[r_o, r_1]$

$$\chi^2 \approx \chi_o^2 . \quad (4.55)$$

Отсюда на интервале $[r_o, r_1]$

$$\left| \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_o} \approx 0 . \quad (4.56)$$

В данном локальном приближении уравнение (4.51) запишется в виде дисперсионного уравнения:

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2 - C_n^2 \frac{1}{4r_o^2} . \quad (4.57)$$

При температуре, стремящейся к абсолютному нулю (приближение «холодного» газа), это дисперсионное уравнение переходит в уравнение:

$$\omega^2 = \chi^2 - 4\pi G \rho_n . \quad (4.58)$$

В случае, когда угловая частота вращения есть постоянная величина, не зависящая от радиуса, дисперсионное уравнение (4.58) преобразуется в дисперсионное уравнение Чандрасекхара (4.34), а уравнение (4.57) переходит в дисперсионное уравнение, которое отличается от соответствующего дисперсионного уравнения Чандрасекхара последним членом.

В работе [75] при решении данной задачи было получено дисперсионное уравнение в окрестности точки r_o (локальное приближение), которое записанное в переменных, принятых в настоящей работе, имеет вид:

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \frac{2\Omega_n}{r} (\Omega_n r^2)' + \frac{C_n^2}{4r_o^2} , \quad (4.59)$$

где $\frac{2\Omega_n}{r} (\Omega_n r^2)' = \chi^2$ - есть квадрат эпициклической частоты.

Видно, что уравнение (4.59) отличается от уравнения (4.57) знаком последнего члена.

Эта же задача была рассмотрена в работе [77] и в ней было получено следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 \approx C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2 . \quad (4.60)$$

Это дисперсионное уравнение отличается от уравнений (4.59) и (4.57) отсутствием четвертого слагаемого в правой части.

Необходимо понять причину наблюдаемых расхождений. Исходная система уравнений для данного приближения, с которой проводятся исследования в работах [75], [77] и в настоящем исследовании, является одинаковой. Метод преобразования системы уравнений, который принят в работе [75], отличается от метода, используемого в работе [77], а последний совпадает с методом данной работы. Однако можно показать, что результаты преобразования системы на промежуточной стадии, когда система уравнений сводится к одному уравнению, в общем одинаковы. В работе [75] исходная система уравнений преобразована в следующее уравнение:

$$(\omega^2 + 4\pi G\rho_n - \chi^2) \frac{1}{r} \int_{r_0}^r xf(x)dx + C_n^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} = 0 . \quad (4.61)$$

Умножим это уравнение на r и продифференцируем:

$$\begin{aligned} (\omega^2 + 4\pi G\rho_n - 2\Omega_n (r \frac{\partial \Omega_n}{\partial r} + 2\Omega_n))rf(r) + C_n^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \int_{r_0}^r xf(x)dx = 0 \end{aligned} . \quad (4.62)$$

Разделив это уравнение на r , приходим к уравнению, полученному в работе [77] и в данных исследованиях:

$$(\omega^2 + 4\pi G\rho_n - \chi^2)f(r) + C_n^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) = \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r xf(x)dx . \quad (4.63)$$

Таким образом, результаты на этой стадии исследований, полученные в работах [75], [77] и в данных исследованиях совпадают.

Далее в работе [77] правой частью уравнения (4.63) пренебрегают, что далеко не всегда верно. Окончательное уравнение в работе [77] представлено в виде:

$$C_n^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + s(\omega^2 + 4\pi G\rho_n - \chi^2) = 0 , \quad (4.64)$$

где $s = \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}$.

Решение этого уравнения в случае ограниченного цилиндра авторы [77] дают в виде стоячей волны:

$$s = BJ_o(qr) \cdot \exp(i\omega t) . \quad (4.65)$$

Авторы же работы [75] точно преобразовывают уравнение (4.61) и получают уравнение:

$$\frac{d^2}{dr^2} F(r) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} F(r) + \frac{1}{C_n^2} (\omega^2 + 4\pi G \rho_n - \chi^2) F(r) = 0, \quad (4.66)$$

где

$$F(r) = \int_{r_0}^r x f(x) dx.$$

В дальнейшем в работе [75] рассматривается локальное приближение в окрестности точки r_0 .

Таким образом, анализ показывает, что вид дисперсионного уравнения зависит от выбранного приближения и от вида задаваемого возмущения.

4.4. Дисперсионное уравнение для среды

в экваториальной плоскости протопланетного диска

В случае протопланетного диска исследование системы уравнений (3.2) – (3.5) становится значительно более сложным. Во-первых, невозмущенная плотность в протопланетном диске изменяется в зависимости от радиуса. Во-вторых, в уравнении Пуассона вторая производная в экваториальной плоскости $\frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2}$ в общем случае не равна нулю.

Для проведения дальнейшего исследования системы уравнений (3.2) – (3.5) воспользуемся результатами работы [77], в которой показано, что для плоского вращающегося диска в дисперсионные уравнения должна быть внесена поправка, учитывающая конечную толщину диска. В этом случае в правую часть уравнения Пуассона (4.8) внесем поправку в виде коэффициента:

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_\Delta K_f, \quad (4.67)$$

где

$$K_f = \left(1 + \frac{2}{kh} \right)^{-1}, \quad (4.68)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число,

h – толщина диска.

Оценим введенный в уравнение (4.67) коэффициент K_f для рассматриваемых нами протопланетных дисков. Для диска массой $M_d \approx 0,667 M_s$ ($\alpha = 0,01$) и при длинах волн, которые соответствуют межпланетным расстояниям, $K_f \geq 0,7$, т.е. K_f близок к единице. С другой

стороны, как показано в подразделе 4.3, вид дисперсионного уравнения зависит от задаваемого возмущения. Можно задать для протопланетного диска возмущение такое, что $\frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2} = 0$ и получить для этого типа возмущений дисперсионное уравнение, которое будет соответствовать $K_f = 1$. В силу сделанных замечаний дальнейшие преобразования будем проводить с уравнением Пуассона (4.8), а при необходимости вводить в уравнения соответствующие коэффициенты.

Проведем преобразование уравнений (3.2) – (3.5). В настоящей работе рассматриваются крупномасштабные возмущения без резких изменений в зависимости от расстояний, возмущения типа синусоидальных возмущений. В этом случае можно показать, что члены, содержащие произведения $\rho_\Delta \frac{\partial v_\Delta}{\partial r}$, $v_\Delta \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r}$ и т.д., будут иметь второй порядок малости. В силу этого для упрощения задачи в системе уравнений (3.2) – (3.5) сохраним только члены первого порядка малости:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \left(\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) + \rho_\Delta \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} = - \frac{\rho_\Delta v_\Delta}{r}, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) \frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + \frac{\rho_\Delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_\Delta^2}{\rho_\Delta} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{\rho_\Delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\rho_\Delta} \left(\frac{\rho_\Delta}{\rho_\Delta} \right) \left(\frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) \right) = \frac{\rho_\Delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2w_\Delta w_\Delta) - 4\pi G \rho_\Delta \rho_\Delta, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial w_\Delta}{\partial r} = - \frac{v_\Delta w_\Delta}{r}. \quad (4.71)$$

Проведем дальнейшее преобразование этой системы уравнений. Уравнения (4.69), (4.71) можно записать соответственно в виде:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_\Delta v_\Delta) = 0, \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} = - \frac{\chi^2}{2\Omega_\Delta} v_\Delta. \quad (4.73)$$

Будем искать решения системы уравнений (4.69) - (4.71) в виде:

$$\rho_\Delta = f(r) e^{i\omega t}, \quad (4.74)$$

$$v_\Delta = A(r) e^{i\omega t}, \quad (4.75)$$

$$w_\Delta = B(r) e^{i\omega t}, \quad (4.76)$$

где ω – константа.

Следует сделать замечание, что в общем случае частота ω может не быть константой, а изменяться в зависимости от расстояния r .

Подставляем выражения (4.74) - (4.76) в уравнения (4.72) и (4.73):

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho_n r v_\Delta) = -i\omega r \rho_\Delta, \quad (4.77)$$

$$w_\Delta = -\frac{\chi^2}{2\Omega_n i\omega} v_\Delta. \quad (4.78)$$

Проинтегрируем уравнение (4.77) по координате:

$$v_\Delta(r) = \frac{r_o \cdot \rho_n(r_o) \cdot v_\Delta(r_o)}{r \cdot \rho_n(r)} - \frac{i\omega}{r \cdot \rho_n(r)} \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx, \quad (4.79)$$

где r_o – координата начала возмущения плотности.

В этом случае можно положить

$$v_\Delta(r_o) = 0.$$

Тогда выражение (4.79) принимает вид:

$$v_\Delta(r) = -\frac{i\omega}{r \cdot \rho_n(r)} \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx. \quad (4.80)$$

Подставляем выражение (4.80) в соотношение (4.78):

$$w_\Delta = \frac{\chi^2}{r \cdot \rho_n(r) 2\Omega_n} \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx. \quad (4.81)$$

Уравнение (4.69) может быть записано также как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_\Delta) = -\frac{1}{\rho_n} i\omega \rho_\Delta - \frac{1}{\rho_n} v_\Delta \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right). \quad (4.82)$$

Это уравнение потребуется для преобразования уравнения (4.70).

Приступаем к преобразованию уравнения (4.70). Используя выражения (4.78) и (4.82), преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r}(w_n w_\Delta) &= \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r}(2r\Omega_n w_\Delta) = \\ \rho_n \left(\chi^2 \frac{\rho_\Delta}{\rho_n} + \frac{1}{i\omega} v_\Delta \left(\chi^2 \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) - \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) \right) &= . \quad (4.83) \\ = \chi^2 \rho_\Delta + \frac{1}{i\omega} v_\Delta \left(\chi^2 \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) - \rho_n \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) & \end{aligned}$$

Используя выражения (4.74) - (4.76) и (4.83), преобразуем уравнение (4.70) к виду:

$$\begin{aligned}
& - (i\omega)^2 \rho_\Delta - i\omega v_\Delta \frac{\partial \rho_n}{\partial r} + \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) - \\
& - \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2 \rho_\Delta}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) = \quad . \quad (4.84) \\
& = \chi^2 \rho_\Delta + \frac{1}{i\omega} v_\Delta \left(\chi^2 \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) - \rho_n \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) - 4\pi G \rho_n \rho_\Delta
\end{aligned}$$

Подставляем в это уравнение выражение (4.80):

$$\begin{aligned}
& \omega^2 \rho_\Delta - \chi^2 \rho_\Delta + 4\pi G \rho_n \rho_\Delta + \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = \\
& = \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2 \rho_\Delta}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) + \omega^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \left(\frac{1}{r \cdot \rho_n(r)} \int_{r_0}^r x \rho_\Delta dx \right) - \\
& - \frac{1}{r \cdot \rho_n(r)} \left(\chi^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial r} - \rho_n \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) \int_{r_0}^r x \rho_\Delta dx \quad . \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что, полагая в этом уравнении $\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = 0$, приходим к уравнению (4.49), полученному по методу Бела и Шацмана [75]. Если в уравнении (4.85) принять $\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = 0$, то это уравнение переходит в уравнение (4.33), которое с точностью до последнего члена совпадает с уравнением, полученным Чандрасекхаром в работе [74]. И, наконец, если предположить, что $\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = 0$ и $\Omega_n = 0$, то уравнение (4.85) преобразуется в уравнение, впервые полученное Джинсом.

По существу, уравнение (4.85) есть дисперсионное уравнение. Приближенное решение этого уравнения наиболее просто может быть получено в локальном приближении в окрестности точки r_0 . В уравнении (4.85) χ и ρ_n есть функции от радиуса (r). Проведем разложение этих величин в окрестности точки r_0 .

$$\rho_n = \rho_{n,0} + \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \Big|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} (r - r_0)^2, \quad (4.86)$$

$$\chi^2 = \chi_0^2 + \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} (r - r_0)^2. \quad (4.87)$$

Допустим, что возмущение плотности задается на отрезке $r_0 \leq r \leq r_l$. Всегда можно выбрать интервал такой, что

$$\rho_{n,o} \gg \left| \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right|_{r=r_o} (r_1 - r_o) , \quad (4.88)$$

$$(r_1 - r_o) \ll \frac{\rho_{n,o}}{\left| \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right|_{r=r_o}} . \quad (4.89)$$

Тогда, если выполнено неравенство (4.88), то на интервале $[r_o, r_1]$

$$\rho_n \approx \rho_{n,o} . \quad (4.90)$$

Отсюда на этом интервале $[r_o, r_1]$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial r} \approx 0 . \quad (4.91)$$

Аналогичные соотношения могут быть написаны и для χ^2 .

Выбирая из двух интервалов по r , которые соответствуют величинам ρ_n и χ^2 , наименьший, будем иметь также на $\min [r_o, r_1]$:

$$\chi^2 \approx \chi_o^2 , \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial r} \approx 0 . \quad (4.93)$$

В данном локальном приближении правая часть уравнения (4.85) будет равна нулю. В левой части уравнения (4.85) ρ_n , χ^2 и C_n^2 берутся в точке r_o . Уравнение (4.85) в этом случае запишется в виде:

$$(\omega^2 - \chi^2(r_o) + 4\pi G \rho_n(r_o)) \rho_\Delta + \frac{C_n^2(r_o)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = 0 . \quad (4.94)$$

Существует частное решение уравнения (4.94) в виде:

$$\rho_\Delta = f(r) e^{i\omega t} = \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\omega t} , \quad (4.95)$$

где $\rho_{\Delta,o}$ - постоянная.

Действительно, подставим это решение в уравнение (4.94):

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \chi^2(r_o) + 4\pi G \rho_n(r_o)) \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\omega t} - C_n^2(r_o) k^2 \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\omega t} + \\ & + C_n^2(r_o) \frac{1}{4} r^{-2} \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

Отсюда получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 \approx C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2 - C_n^2 \frac{1}{4r_o^2} . \quad (4.97)$$

Как нетрудно видеть, это дисперсионное уравнение в своих главных членах согласуется при предельных переходах с соответствующими уравнениями работ Бела и Шацмана [75], Чандрасекхара [74], Джинса [70], Генкина и Сафронова [77].

Итак, решение системы уравнений (4.69) - (4.71) получено в виде:

$$\rho_\Delta = f(r)e^{i\omega t} , \quad (4.98)$$

$$v_\Delta(r) = -\frac{i\omega}{r \cdot \rho_n(r)} \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx , \quad (4.99)$$

$$w_\Delta = \frac{\chi^2}{r \cdot \rho_n(r) 2\Omega_n} \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx , \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} & \omega^2 \rho_\Delta - \chi^2 \rho_\Delta + 4\pi G \rho_n \rho_\Delta + \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2 \rho_\Delta}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) + \omega^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \left(\frac{1}{r \cdot \rho_n(r)} \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx \right) - \\ & - \frac{1}{r \cdot \rho_n(r)} \left(\chi^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial r} - \rho_n \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) \int_{r_o}^r x \rho_\Delta dx \end{aligned} \quad (4.101)$$

Уравнение (4.101) в локальном приближении ($\Delta r \ll r$) приводится к следующему уравнению:

$$\omega^2 \approx C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2 - C_n^2 \frac{1}{4r_o^2} , \quad (4.102)$$

где ω – постоянная.

Заключение

В настоящей главе получены приближенные дисперсионные уравнения для протопланетного диска на начальной стадии его эволюции, которые в своих предельных приближениях совпадают с результатами работ Джинса [70], Чандрасекхара [74], Бела и Шацмана [75], Сафронова [77, 76], Фридмана и Поляченко [29, 79].

Глава V. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – аналитические решения. Анализ дисперсионных уравнений

Данная глава написана на основе работ [3, 8, 9, 10]. В ней показано, что если вращение среды диска подчиняется закону Кеплера, то при массе диска $M_d \geq (0,15 - 0,2)M_S$ (M_S – масса Солнца) внутренние области диска становятся гравитационно неустойчивыми. При этом гравитационная неустойчивость в первую очередь начинает проявляться для больших длин волн возмущений среды диска.

Развита модель образования планетной системы Солнца, предложенная в 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами. Проведено сравнение этой модели с современными моделями: с моделью твердотельной аккумуляции, предложенной в работах О.Ю. Шмидта, В.С. Сафронова и его учеников; с моделью Э.М. Галимова с соавторами и с моделью Энеева-Козлова.

Показано, что модель, предложенная А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами, наилучшим образом объясняет большую совокупность экспериментальных фактов, относящихся к образованию как планетной системы Солнца, так и планетных систем других звезд.

Введение

В настоящей главе проведен анализ дисперсионного уравнения для протопланетного диска. Полученные результаты сопоставляются с результатами исследований других авторов.

1. Анализ дисперсионного уравнения для протопланетного диска

1. Полученные в главе IV дисперсионные уравнения (4.101), (4.102) позволяют найти условия, при которых возможна гравитационная неустойчивость в протопланетном диске. Действительно, оценки показывают, что для планетной системы Солнца слагаемое $\frac{C_n^2}{4r_o^2}$ в дисперсионном уравнении (4.102) мало по сравнению с $C_n^2 k^2$. В этом случае дисперсионное уравнение записывается как:

$$\omega^2 \approx C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2. \quad (1.1)$$

Из этого уравнения следует, что гравитационная неустойчивость в какой-то области протопланетного диска по отношению к возмущениям,

которые распространяются перпендикулярно оси вращения среды, наступает только при условии выполнения во всех точках этой области неравенства:

$$\frac{\chi^2(r)}{4\pi G \cdot \rho_n(r)} < 1, \quad (1.2)$$

где $\chi^2(r)$ и $\rho_n(r)$ относятся к экваториальной плоскости протопланетного диска.

Если вращение среды протопланетного диска подчиняется закону Кеплера, то неравенство (1.2) преобразуется в следующее:

$$\frac{\Omega_n^2(r)}{4\pi G \rho_n} \equiv \frac{\Omega_n^2(r)}{\omega_J^2(r)} < 1 \quad (1.3)$$

или

$$\frac{\Omega_n(r)}{\omega_J(r)} < 1. \quad (1.4)$$

Если же для всех точек экваториальной плоскости протопланетного диска выполнено неравенство

$$\frac{\Omega_n^2(r)}{\omega_J^2(r)} \geq 1, \quad (1.5)$$

то радиальные возмущения, распространяющиеся перпендикулярно оси вращения среды, подавляются, и среда становится гравитационно устойчивой.

Следует обратить внимание, что при однородном вращении среды числитель левой части соответствующего неравенства (4.35) главы IV больше в четыре раза числителя неравенства (1.5).

Строго говоря, дисперсионные уравнения (4.101), (4.102) главы IV и их следствия (1.2) - (1.5) получены для определенного равновесного, стационарного состояния протопланетного диска, характеристики которого нам неизвестны. В работах [2, 3] была предложена аналитическая модель протопланетного диска Солнца в приближении Роша. Покажем, что дисперсионные уравнения (4.101), (4.102) главы IV и их следствия в некотором приближении применимы к этой модели.

2. Аналитическая модель протопланетного диска [2, 3] получена в приближении, когда собственное гравитационное поле диска мало по сравнению с гравитационным полем Солнца. В работах [80, 6, 7, 81] показано, что введение в аналитическую модель собственного гравитационного поля диска может вносить значительные возмущения в систему, и первоначальное равновесное состояния диска перестает быть равновесным.

Строгий вывод дисперсионного уравнения в случае, когда за исходное состояние протопланетного диска принято приближение Роша, должен быть произведен на фоне нестационарного процесса, т.е. аналогично, как это имело место в задаче гравитационной неустойчивости бесконечной однородной и изотропной среды [61, 72, 73] (см. глава IV, раздел 3, замечание о парадоксе Джинса). Исследование эволюции протопланетного диска из состояния приближения Роша при «включении» собственного гравитационного поля диска [80, 6, 7, 81] показало, что переход из равновесного состояния протопланетного диска происходит не мгновенно. На каком-то начальном интервале времени можно считать, что параметры протопланетного диска близки к приближению Роша. На этом временном интервале и можно приближенно считать допустимым рассмотрение гравитационной неустойчивости протопланетного диска в приближении Роша с помощью дисперсионного уравнения (4.102) главы IV. При этом коэффициенты в дисперсионных уравнениях должны быть взяты из решения задачи в приближении Роша.

В аналитической модели [2, 3] невозмущенная плотность протопланетного диска в экваториальной плоскости в зависимости от радиуса имеет вид, показанный на рис. 4 главы IV. Для данной формы кривой $\rho_n(r)$ вид дисперсионного уравнения (4.101) главы IV изменяется в зависимости от координаты r . Так, в окрестности максимума плотности, а также при больших радиусах $r > 0,75$ производная $\frac{\partial \rho_n}{\partial r}$ становится малой и уравнение (4.101) главы IV упрощается:

$$\omega^2 \rho_\Delta - \chi^2 \rho_\Delta + 4\pi G \rho_n \rho_\Delta + \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_n^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) \approx \frac{1}{r} \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \int_{r_0}^r x \rho_\Delta dx . \quad (1.6)$$

Как было показано (глава IV, раздел 1, формула (1.2)) угловая скорость вращения среды протопланетного диска в рассматриваемой модели [2, 3, 5] представляется выражением, близким к закону Кеплера:

$$\Omega_n^2 = C_\Omega \frac{GM_S}{r^{3+\alpha}} , \quad (1.7)$$

где

$$C_\Omega = \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in})}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} . \quad (1.8)$$

Численные значения констант, которые приняты в данной работе, приведены в главе IV, разделе 1. Значения константы α не превышают $\alpha \leq 0,01$. В этом случае значение константы C_Ω равно:

$$C_\Omega = \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in})}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \leq 1,35109 .$$

Тогда

$$\chi^2 = 4\Omega_n^2 + 2\Omega_n r \frac{d\Omega_n}{dr} = (1-\alpha)\Omega_n^2 \geq 0,99 \cdot \Omega_n^2, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = (1-\alpha) \frac{\partial \Omega_n^2}{\partial r} = -(1-\alpha)(3+\alpha) \frac{\Omega_n^2}{r}. \quad (1.10)$$

Для того чтобы определить, при каких параметрах протопланетный диск в аналитической модели в приближении Роша является гравитационно устойчивым, построим зависимости коэффициента устойчивости $K_{уст} = \frac{4\pi G \rho_n}{\Omega_n^2}$ от приведенного радиуса ($R = r/r_{ex}$) в его экваториальной плоскости при фиксированных параметрах α , которым соответствует определенная масса диска M_d . Эти зависимости показаны на рис. 1 для $\alpha = 0,002$ ($M_d \approx 7,168 \cdot 10^{-3} M_S$), $\alpha = 0,005$ ($M_d \approx 0,096 M_S$), $\alpha = 0,00563$ ($M_d \approx 0,135 M_S$), $\alpha = 0,01$ ($M_d \approx 0,667 M_S$).

Участки экваториальной плоскости протопланетного диска, для которых коэффициент устойчивости $K_{уст}$ больше 1, гравитационно неустойчивы. Из приведенного рисунка видно, что гравитационная неустойчивость возникает при массе протопланетного диска $M_d > 0,135 M_S$ ($\alpha > 0,00563$). Сравнивая эти результаты с графиками рис. 7, 8, 9 главы IV, которые иллюстрируют, что гравитационная неустойчивость диска без учета его вращения проявляется при $M_d \geq 0,01 M_S$ ($\alpha \geq 0,002$), видим, что вращение диска значительно подавляет его гравитационную неустойчивость: граница гравитационной устойчивости диска по массе при учете его вращения повышается примерно на порядок. Для последующих рассмотрений проведем округление и с учетом точности расчетов примем, что гравитационная неустойчивость возникает при массе протопланетного диска $M_d \geq (0,15 - 0,2) M_S$.

По данным работ [16, 34] протопланетный диск в газовой фазе становится гравитационно неустойчивым, когда он достигает массы $M_d \approx (0,1 - 0,3) M_S$.

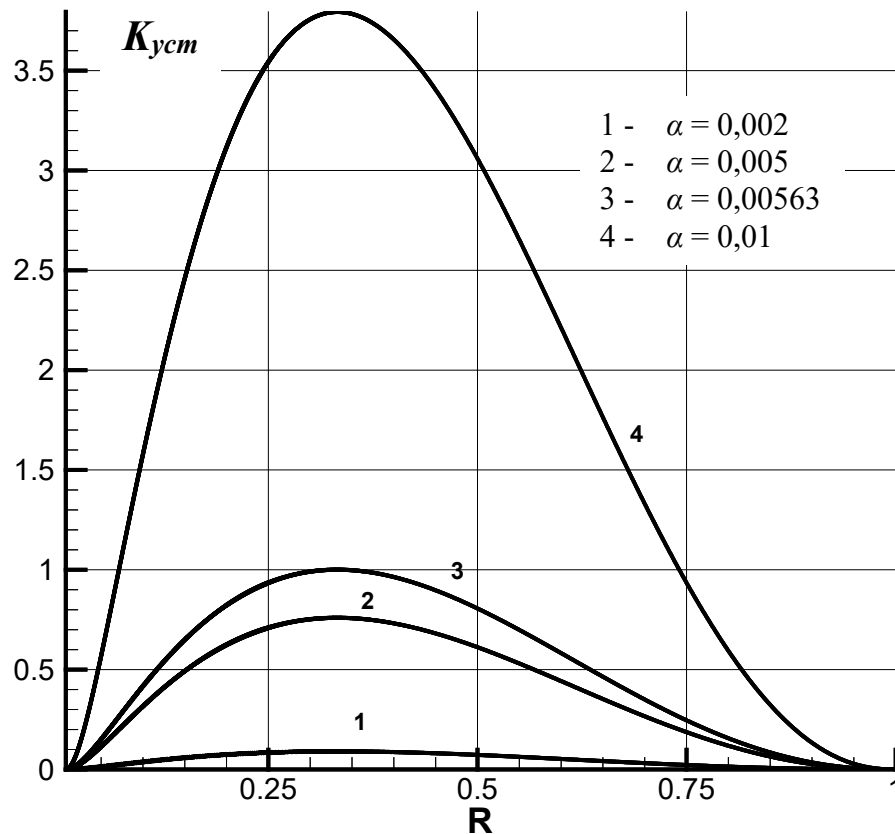


Рис. 1. Зависимости коэффициента устойчивости ($K_{уст}$) от приведенного радиуса (R) в экваториальной плоскости протопланетного диска.

Таким образом, полученные результаты о гравитационной неустойчивости протопланетного диска в зависимости от его массы находятся в согласии с данными работ этих авторов.

Относительно величины массы протопланетного диска среди исследователей нет единой точки зрения. В.С. Сафронов и его ученики считают, что масса диска не могла быть больше $0,15M_S$ [45, 16]. Ф. Хойл [91] и Е. Шацман [92] поддерживают эту точку зрения, считая, что масса диска была порядка $(0,01 - 0,1)M_S$. А.Г. Камерон [93, 94] и Б.Ю. Левин доказывают, что масса диска могла превышать массу Солнца. Оценки с использованием результатов работы В.Л. Поляченко и А.М. Фридмана [29] показывают, что масса протопланетного диска могла составлять примерно $0,36M_S$. По нашим оценкам масса протопланетного диска могла превышать массу, которая соответствует границе устойчивости протопланетного диска в начальной стадии его эволюции, т.е. $M_d > (0,15 - 0,2)M_S$.

3. Одна из первых работ, в которой исследуется возможность объяснения закона планетных расстояний на основе гравитационной

неустойчивости протопланетного диска, была выполнена В.Л. Поляченко и А.М. Фридманом. Представляет интерес сравнить результаты, полученные в данной главе, с результатами работы [29]. В.Л. Поляченко и А.М. Фридман проводили исследование в рамках приближения бесконечно тонкого диска. В литературе есть критические замечания, например, [16] относительно правомерности использования этого приближения для решения данной задачи. Действительно, бесконечно тонкий диск не является стационарной (равновесной) системой. Если бесконечно тонкий диск предоставить самому себе, то через определенное время он перейдет в состояние, в котором его форма будет подобна протопланетным дискам, представленным на рис. 1, 2, 3 главы IV. Строго говоря, задача о гравитационной неустойчивости протопланетного диска в приближении бесконечно тонкого диска должна была решаться, как и классическая задача Джинса, на нестационарном фоне. Но, тем не менее, выбранное авторами работы [29] приближение, с нашей точки зрения, допустимо для оценки решения рассматриваемой ими задачи.

Полученное В.Л. Поляченко и А.М. Фридманом дисперсионное уравнение (10) главы III отличается от полученного уравнения (1.1) в настоящей работе. И это естественно, так как в нашем случае рассматривается реальный для выбранной модели стационарный (равновесный) диск. Если в уравнение (1.1) ввести поправочный коэффициент Сафронова, то это уравнение в предельном случае бесконечно тонкого диска переходит в уравнение В.Л. Поляченко и А.М. Фридмана (10) главы III.

Следуя В.Л. Поляченко и А.М. Фридману, введем приближение газопылевого диска, когда $C_n \neq 0$ и приближение пылевого диска с $C_n = 0$.

а) *Газопылевой диск* ($C_n \neq 0$).

Определим из дисперсионного уравнения (1.1) значение k , которое соответствует минимуму функции $\omega^2 = \omega^2(k)$ (наибольшая гравитационная неустойчивость):

$$2kC_n^2 = 0 . \quad (1.11)$$

Из этого равенства находим k в точке минимума:

$$k = 0 . \quad (1.12)$$

Это соответствует бесконечно большим длинам волн.

Подставляя это значение k в дисперсионное уравнение (1.1) находим связь между стационарными параметрами системы на границе устойчивости ($\omega^2=0$):

$$-4\pi G\rho_{n,e} + \chi^2 = 0 ,$$

$$\rho_{n,z} = \frac{\chi^2}{4\pi G} . \quad (1.13)$$

Подставляя выражение (1.9) в выражение (1.13) получаем:

$$\rho_{n,z} = \frac{(1-\alpha)\Omega_n^2}{4\pi G} = (1-\alpha)C_\Omega \frac{M_S}{4\pi r^{3+\alpha}} , \quad (1.14)$$

где

$$C_\Omega = \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in})}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} .$$

Таким образом, получена зависимость плотности невозмущенного газопылевого диска в его экваториальной плоскости ($\rho_{n,z}$) от радиуса, которая соответствует границе гравитационной неустойчивости. При $\rho_n > \rho_{n,z}$ диск переходит в гравитационно неустойчивое состояние. Показано, что протопланетный газопылевой диск обладает наибольшей гравитационной неустойчивостью для возмущений с максимальной длиной волны.

б) *Пылевой диск* или предельный случай «холодной» газопылевой среды ($C_n = 0$).

В этом случае дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\omega^2 \approx -4\pi G \rho_n + \chi^2 . \quad (1.15)$$

Как нетрудно видеть, в этом случае выражение для плотности невозмущенного пылевого диска в его экваториальной плоскости от радиуса, соответствующее границе гравитационной неустойчивости, полностью совпадает с выражением (1.14).

В приближении бесконечно тонкого диска, как показано в работе [29], выражение для плотности стационарного состояния газопылевого диска, соответствующее границе гравитационной неустойчивости, в два раза превосходит аналогичное выражение для пылевого диска. Это обстоятельство связано с особенностью дисперсионного уравнения в приближении бесконечно тонкого диска.

Следует обратить внимание на различие дисперсионных уравнений для газопылевого диска (1.1) и пылевого диска (1.15). В случае газопылевого диска в области его гравитационной неустойчивости вблизи границы неустойчивости могут возникать только длинноволновые возмущения. Для пылевого диска во всей его области неустойчивости могут возникать возмущения любой длины волны. Это весьма важное обстоятельство для понимания возникновения процессов гравитационных неустойчивостей в протопланетном диске. Дело в том, что оба рассматриваемых предельных случая, которые описываются дисперсионными уравнениями (1.1) и (1.15), возможны в ходе эволюции протопланетного диска. В начальной стадии эволюции работает

дисперсионное уравнение (1.1). На стадии, когда произошла концентрация пылевых частиц в экваториальной плоскости диска (такой сценарий возможен при любой модели эволюции протопланетного диска), может оказаться справедливым дисперсионное уравнение (1.15). В этом случае могут возникнуть гравитационные возмущения любой длины волны, в том числе, и размеров планетезималей – все зависит от природы возмущений, которые возникают в протопланетном диске. Между этими предельными состояниями среда диска вблизи его экваториальной плоскости находится в промежуточном состоянии, где существенны как газовая компонента среды, так и пылевая, и которое можно приближенно описать следующим дисперсионным уравнением:

$$\omega^2 \approx C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_{n,sp} + \chi^2, \quad (1.16)$$

где $\rho_{n,sp}$ - средняя плотность среды диска, состоящей из двух фаз: газовой и пылевой.

4. Чтобы в протопланетном диске реализовалась гравитационная неустойчивость, необходимо воздействие возмущений на среду диска. Какими должны быть эти возмущения, чтобы в протопланетном диске образовались протопланеты? В.Л. Поляченко и А.М. Фридман, [29] предложили взять возмущенную (поверхностную) плотность диска в виде:

$$\sigma_1(r) = \sigma_{o,1}(r) \exp\left(ia \ln \frac{r-r_m}{c}\right), \quad (1.17)$$

где $\sigma_{o,1}(r)$ - медленно меняющаяся с радиусом амплитуда возмущенной (поверхностной) плотности;

$$\begin{aligned} a &= 2\pi / \ln 2, \\ r_m &= 0,4 \text{ а.е.}, \\ c &= 0,3 \text{ а.е.} \end{aligned} \quad (1.18)$$

В приближении бесконечно тонкого диска в работе [29] была вычислена амплитуда возмущенной (поверхностной) плотности в виде:

$$\sigma_{o,1}(r) = -\frac{a\eta_o}{2\pi G r^{1/2} (r-r_m)^{3/2}}, \quad (1.19)$$

где η_o - константа интегрирования.

Для протопланетного диска в нашем случае найдем частное решение возмущенной плотности в виде волны, подобной волне Поляченко-Фридмана. Для этого используем уравнение (4.94) главы IV. Допустим, что частное решение для возмущения имеет вид:

$$\rho_\Delta = f(r)e^{i\omega t}, \quad (1.20)$$

где ω – константа.

Подставляя это решение в уравнение (4.94) главы IV, получаем:

$$(\omega^2 - \chi(r_o)^2 + 4\pi G\rho_n(r_o))f(r) + \frac{C_n^2(r_o)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(f(r))}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.21)$$

Возьмем возмущение плотности в виде волны, подобной волне по Поляченко-Фридману:

$$f(r) = \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} (r - r_m)^\beta e^{ia \ln \frac{r-r_m}{c}}, \quad (1.22)$$

где $a = \frac{2\pi}{\ln 2}$,
 $r_m = 0,4$ а.е.,
 $c = 0,3$ а.е.

Дополнительно введена константа β для исключения комплексного выражения в дисперсионном уравнении. Можно показать, что в этом случае $\beta = \frac{1}{2}$.

Подставляя выражение (1.22) в уравнение (1.21), находим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \chi(r_o)^2 - 4\pi G\rho_n(r_o) + C_n^2(r_o) \frac{a^2}{(r - r_m)^2} + C_n^2(r_o) \left(\frac{1}{4(r_o - r_m)^2} - \frac{1}{4r_o^2} \right). \quad (1.23)$$

Можно показать, что для данного типа возмущения $\frac{a}{r - r_m}$ - есть волновое число [29]. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид, аналогичный другим типам возмущений за исключением четвертого члена в его правой части, который имеет характерные особенности именно для этого типа возмущения. Коэффициент перед экспонентой в выражении (1.22) отличается от соответствующего коэффициента (1.19), полученного в работе [29], в силу отличия рассматриваемых моделей. Анализ показывает, что возмущение в виде волны Поляченко-Фридмана (1.17), (1.19) соответствует закону Тициуса-Боде для всех межпланетных расстояний, кроме промежутка Меркурий-Венера. Это видно и из дисперсионного уравнения (1.23): в точке, соответствующей расположению Меркурия, волновое число и одно из слагаемых четвертого члена уравнения (1.23) обращаются в бесконечность. Чтобы устранить этот недостаток, проще всего взять длину волны возмущений, которая соответствует истинным межпланетным расстояниям, например, из работы [62], и работать с этой зависимостью.

Таким образом, показано, что если плотность среды в области экваториальной плоскости протопланетного диска превышает плотность невозмущенного газопылевого диска на границе его гравитационной

устойчивости (формула (1.14)), то эта область диска переходит в гравитационно неустойчивое состояние. Если возмущение плотности среды диска возникает в виде волны, подобной волне Поляченко-Фридмана, то в гравитационно неустойчивом диске образуются протопланетные кольца, которые соответствуют зонам планет (ранее протопланетные кольца были описаны в работах [2, 3, 5]). Причем этот процесс происходит вне зависимости от состава среды диска: диск может находиться на начальной стадии эволюции – тогда среда диска близка к газовой среде, или на промежуточной стадии – газопылевой диск, или среда диска состоит практически из пылевой компоненты.

Допустим, масса диска на начальной стадии его эволюции меньше критической ($M_d < (0,15 - 0,2)M_S$). Тогда протопланетный диск гравитационно устойчив. В ходе эволюции вследствие концентрации пыли в экваториальной плоскости средняя плотность среды в ней будет нарастать. После превышения критической плотности диск согласно уравнению (1.16) перейдет в гравитационно неустойчивое состояние. Так как наибольшей гравитационной неустойчивости диск подвержен при возмущениях с максимальной длиной волны, то далее ситуация будет развиваться аналогично случаю, когда протопланетный диск был гравитационно неустойчивым на начальной стадии его эволюции. Если возмущение плотности среды диска происходит в виде волны, подобной волне Фридмана-Поляченко, то в гравитационно неустойчивом диске будут образовываться протопланетные кольца, соответствующие зонам планет.

5. Весьма сложный вопрос связан с природой волны возмущения Фридмана-Поляченко. Эта волна возмущения охватывает весь протопланетный диск. Один из наиболее реальных сценариев возникновения этой волны связан с переходом аккреционного диска в состояние с резким уменьшением аккреционного потока на Солнце. По всей вероятности смена режима аккреционного потока вещества на Солнце ведет к возмущениям, которые в этом случае, естественно, захватывают весь протопланетный диск. В аналитической модели протопланетного диска [2, 3, 5] рассматривается стационарное состояние диска. Переход же аккреционного диска в состояние с резким уменьшением аккреционного потока явно не стационарен и может наряду с порождением волны возмущения привести к существенным изменениям зависимости плотности от расстояния, а также к возмущениям другого характера, например, ударным волнам.

Наряду с волной возмущения Поляченко-Фридмана не исключено возникновение и одиночного возмущения в гравитационно неустойчивом диске, природа которого может быть самой разнообразной. В этом случае возможно возникновение одного протопланетного кольца.

2. Развитие и обоснование модели образования планетной системы Солнца

1. Модель образования планетной системы Солнца, альтернативная существующим моделям, была предложена в работах [2, 3, 5]. Полученные в данной работе результаты, а также результаты современных исследований планетных систем других звезд позволяют уточнить и развить предложенную модель и более строго обосновать ее.

В основе модели лежит гипотеза о совместном образовании Солнца и его планетной системы из единой протосолнечной туманности, впервые предложенная Кантом и Лапласом [18, 19].

Современные наблюдения молодых звезд солнечного типа и их газопылевых дисков подтвердили эту гипотезу, в том числе и предположение о том, что планеты образуются из газопылевого диска [95 – 101, 34]. Высокая разрешающая способность современных методов наблюдения за звездами позволила установить закон вращения некоторых газопылевых дисков, который оказался близким к кеплеровскому [34].

По современным представлениям при формировании звезды околозвездное облако является аккреционным диском, поток вещества из которого на звезду в максимуме может достигать величин $\dot{M}_d \sim (10^{-5} - 10^{-6}) M_S / \text{год}$ [102]. После того, как звезда практически сформировалась (стадия Т Тельца) аккреция вещества на звезду резко уменьшается до $\dot{M}_d \sim (10^{-8} - 10^{-9}) M_S / \text{год}$ [99]. Эта остаточная аккреция обусловлена вязкостью диска и его дифференциальным вращением [34]. Наше исследование относится именно к этой стадии околозвездного газопылевого облака, которое и было названо протопланетным диском. В приближении, которое было выбрано в данном исследовании, были сохранены только основные физические процессы, которые ответственны за гравитационную устойчивость диска: вязкость и турбулентность среды не учитывались, хотя величина C_n может рассматриваться и как средняя скорость турбулентных движений среды диска.

Как было показано (раздел 1), гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца наступает при $M_d \geq (0,15 - 0,2) M_S$. Астрономические наблюдения газопылевых околозвездных дисков для звезд с массой порядка Солнца на стадии Т Тельца обычно приводят к оценке массы диска, составляющей $M_d \sim (0,01 - 0,2) M_S$, где M_S - масса Солнца [103], хотя максимальная масса аккреционного диска может достигать $M_d \sim (0,1 - 0,5) M_S$ [104]. Но следует отметить, что наблюдаются и звезды с массой порядка Солнца, у которых протопланетный диск (стадия Т Тельца) составляет $M_d \sim 0,6 M_*$, где M_* - масса звезды [105]. Следует также обратить внимание, что в процессе

эволюции околозвездный диск достигает максимального значения и, переходя в стадию Т Тельца, постепенно теряет свою массу [99]. Не исключено, что крупномасштабная гравитационная неустойчивость может проявляться на более ранней стадии аккреционного диска, когда его масса значительно больше, чем на поздней стадии Т Тельца, а основные аккреционные процессы в диске, связанные с аккрецией его вещества на Солнце, уже закончились. Последнее имеет место в районе резкого спада темпа аккреции диска [99], fig. 8.

Суммируя эти результаты с данными о возможных массах протопланетного диска Солнца, опубликованными в работах [45, 93, 94], можно сделать заключение, что протопланетный диск Солнца, весьма вероятно, был гравитационно неустойчивым уже на начальной стадии его эволюции, когда пылевая составляющая еще была равномерно распределена по его объему.

Но тем не менее, допустим, что диск на начальной стадии его эволюции все-таки был гравитационно устойчив, тогда при достижении критической плотности вследствие концентрации пылевой компоненты в экваториальной плоскости диск переходит в гравитационно неустойчивое состояние. При этом, как было показано в разделе 1, возникают в первую очередь крупномасштабные неустойчивости. При возбуждении волны возмущений типа Фридмана-Поляченко в протопланетном диске, находящемся в состоянии гравитационной неустойчивости, в нем зарождаются протопланетные кольца, и этот сценарий относится к гравитационной неустойчивости, возникающей как в начальной стадии эволюции диска, так и в стадии концентрации пылевой составляющей в экваториальной плоскости.

Но если это имело место, то образовавшиеся в результате гравитационной неустойчивости протопланеты должны были иметь состав, во всяком случае, в начальной фазе своего образования, близкий к солнечному составу. Действительно, одна из планет Солнечной системы - Юпитер сохранила до настоящего времени состав, близкий к солнечному: обогащение Юпитера тяжелым компонентом (льды и горные породы) по отношению к протосолнечному содержанию составляет 1,7 – 8 [106]. Сатурн имеет более значительное обогащение тяжелым компонентом, а именно: 9 – 19 [106]. Уран и Нептун на 5 – 15 % состоят из водорода и гелия, в то время как оболочки Юпитера и Сатурна состоят из водорода (по числу атомов) на 85% [34].

Эти факты, с одной стороны, свидетельствуют в пользу гипотезы о крупномасштабной гравитационной неустойчивости и об образовании протопланет в протопланетном диске. С другой стороны, возникает вопрос: почему Уран и Нептун потеряли основную часть газовой компоненты, а планеты земной группы практически потеряли ее полностью?

В модели твердотельной аккумуляции [15, 16] предполагается существование двух стадий образования планет внешней Солнечной системы. Опишем ее в общих чертах на примере Юпитера. На первой стадии формируется твердотельный зародыш (ядро) Юпитера массой около 10 масс Земли путем твердотельной аккумуляции (к настоящему времени еще нет единой точки зрения о величине массы ядра Юпитера [34]; некоторые исследователи полагают, что ядро вообще отсутствует). На второй стадии происходит аккреция газовой компоненты на образовавшийся твердотельный зародыш. Проанализируем этот сценарий образования Юпитера с несколько другой стороны. В основе предложенного механизма лежит гравитационное взаимодействие. Как известно, гравитационное взаимодействие является дальнедействующим взаимодействием, и, если в результате предложенного сценария получена крупномасштабная неоднородность в виде Юпитера, то изначально в зоне Юпитера должна была существовать крупномасштабная гравитационная неустойчивость, связанная с массами пылевой и газовой компонент. В этом случае, казалось бы, более естественным является сценарий с одновременным вовлечением в процесс гравитирующих масс пылевой и газовой компонент. Не является ли сценарий образования Юпитера из двух стадий несколько искусственным приемом? Дисперсионные уравнения (4.101) главы IV и (1.1), (1.16) данной главы, полученные в настоящем исследовании, как раз и описывают возникновение крупномасштабных неоднородностей с одновременным вовлечением в процесс масс пылевой и газовой компонент среды диска.

Современные методы исследований позволяют наблюдать планеты у других звезд (экзопланеты) и измерять некоторые их характеристики. Первые экзопланеты были обнаружены в конце 1980-х годов [34]. Как показывают исследования, среди планетных систем других звезд достаточно часто наблюдаются планеты типа Юпитера и «горячих юпитеров». «Горячий юпитер» - это класс планет, относящийся к газовым гигантам с массой больше или порядка массы Юпитера. В отличие от Юпитера, который находится на расстоянии 5 а.е. от Солнца, типичный «горячий юпитер» находится на расстоянии порядка 0,05 а.е. от звезды, то есть на порядок ближе, чем Меркурий от Солнца и на два порядка ближе, чем Юпитер. Таким образом, феномен Юпитера, который наиболее убедительно свидетельствует в пользу предлагаемой модели [2, 3, 5], не является исключением и достаточно широко распространен в других планетных системах.

Существуют гипотезы (одна из версий выдвинута учеными из Северо-Западного университета США), что «горячий юпитер» зарождается на значительном расстоянии от звезды, а затем перемещается за счет гравитационных возмущений на такое, весьма близкое расстояние от звезды. У нас другая гипотеза. Известно [16, 100, 34], что в результате

коллапса протосолнечной туманности при ее определенной массе и моменте количества движения может образоваться двойная звезда. Представим себе, что масса и момент количества движения протосолнечной туманности будет постепенно уменьшаться, тогда при определенных массе и моменте количества движения двойная звезда не сможет образоваться. Тогда близко от этой критической точки сможет образоваться «несостоявшаяся» звезда - «горячий юпитер». В этом случае «горячий юпитер» образуется в непосредственной близости от звезды, как это и имеет место в реальности. Но в этих условиях никаких других вариантов, как образование «горячего юпитера» в близлежащей от звезды зоне коллапсирующей протосолнечной туманности путем крупномасштабной гравитационной неустойчивости просто не существует – слишком высокие температуры для твердотельной аккумуляции.

Итак, в результате гравитационной неустойчивости в протопланетном диске образовались протопланетные кольца. Как показано в работах [2, 3, 5], в аналитической модели протопланетного диска в приближении Роша существуют аналитические решения протопланетных колец в двумерном (осесимметричном) приближении. В этом приближении протопланетные кольца могут быть устойчивы. В трехмерном приближении ситуация изменяется.

2. Протопланетное кольцо, возникшее в результате гравитационной неустойчивости, не может быть устойчивым в трехмерном измерении. Действительно, размеры протопланетного кольца в азимутальном направлении превосходят λ_j , которое определено для соответствующей зоны протопланетного диска. Так как протопланетное кольцо при своем образовании сжимается за счет собственного гравитационного поля, то азимутальная критическая длина волны становится еще меньше, и протопланетное кольцо распадается на фрагменты. Данное описание поведения газопылевого кольца в протопланетном диске не является новым. Так, при рассмотрении возникновения планетезималей В. С. Сафронов также обращается к гравитационной неустойчивости протопланетного диска, приводящей к образованию кольцевой структуры, которая в дальнейшем распадается на локальные пылевые сгущения [15, 16]. В.Н. Снытников с соавторами в работах по численному моделированию процессов, возникающих в протопланетном диске [57, 58], также наблюдали образование кольцевых структур, в последующем распадающихся на фрагменты.

Фрагменты, образовавшиеся в результате распада протопланетного кольца, представляют собой крупномасштабные газопылевые сгущения в зоне соответствующей планеты, которые, взаимодействуя между собой и сталкиваясь, и приводят к образованию протопланеты. Для описания взаимодействия крупномасштабных газопылевых сгущений, на наш

взгляд, целесообразно обратиться к модели формирования планетных систем Энеева-Козлова [107, 51, 30, 52], предложенной в 1977 году.

В модели Энеева-Козлова так же, как и в модели твердотельной аккумуляции (К. Эджворт [108], Л.Э. Гуревич и А.И. Лебединский [109]), предполагается образование планетезималей. Но в отличие от модели твердотельной аккумуляции Энеев Т.М и Козлов И.И. предположили, что планетезимали являются не твердыми телами, «а более или менее разреженными газопылевыми сгущениями», вещество которых занимает объем сферы Хилла. Таким образом, протопланетный диск представлен в виде совокупности газопылевых сгущений, соответствующих по составу протопланетному диску. Газопылевые сгущения движутся почти по круговым орбитам и, сталкиваясь между собой по закону абсолютно неупругого удара, объединяются, образуя новое сгущение. Такой процесс приводит к образованию протопланет.

В этой модели нам представляется весьма интересным следующий полученный результат: кольцевое сжатие вещества протопланетного диска, масса которого «пренебрежимо мала по сравнению с массой центрального тела (Солнца)» [51, 30, 52]. Эволюция каждой из кольцевых областей завершается образованием газопылевой протопланеты. В нашей терминологии кольцевое сжатие вещества – это протопланетные кольца. Другими словами протопланетный диск в модели Энеева-Козлова оказался гравитационно неустойчивым к возмущениям с длиной волны, приближенно равной расстоянию между планетами. Этот результат согласуется с результатами исследований, излагаемыми в данной работе.

В предлагаемой нами модели [2, 3, 5] протопланетные кольца, в отличие от модели Энеева-Козлова, зарождаются непосредственно из среды диска вследствие его гравитационной крупномасштабной неустойчивости. Фрагментируя, протопланетные кольца образуют газопылевые сгущения, характерные размеры которых на несколько порядков превосходят характерные размеры планетезималей. В модели Энеева-Козлова нет ограничений на исходные размеры газопылевых сгущений. Поэтому дальнейшее рассмотрение эволюции крупномасштабных газопылевых сгущений возможно в рамках модели Энеева-Козлова. Основным результатом такого рассмотрения известен – это образование протопланет.

Еще одна проблема, с которой пришлось столкнуться исследователям, занимающимся изучением образования планет, — это обнаруженное при наблюдениях за экзопланетами достаточно короткое время жизни протопланетных дисков. Оказалось, что протопланетные диски живут не более 10 миллионов лет. По данным работы [110] среднее время жизни изученных газопылевых дисков составляло 3 – 6 млн лет. Тогда как в стандартном варианте по Сафронову В.С.: «...Земля росла в течение $\sim 10^8$ лет...» [15, стр. 176]. В работе [15] также приводятся данные, что зародыш

Сатурна, способный захватывать газ путем аккреции, мог вырасти за 500 – 800 млн лет. «Поэтому газ в этой зоне должен был сохраняться около 10^9 лет.»

В предлагаемой модели образования планетной системы Солнца [2, 3, 5] планеты образуются за счет гравитационной неустойчивости среды диска, и время образования планет в этом случае будет значительно меньше, чем в модели твердотельной аккумуляции. В качестве примера приведем данные о времени образования планет в модели Энеева-Козлова по результатам работы В.П. Мясникова и В.И. Титаренко [111]. В этой работе проведено численное моделирование эволюции газопылевого сгущения (протопланеты), имеющего массу, эквивалентную массе Земли с концентрацией примесей изотопов короткоживущего ^{26}Al . Показано, что конденсация протопланеты с приведенными параметрами начинается через 3,3 млн. лет.

3. Образовавшаяся протопланета под действием своего гравитационного поля начинает сжиматься, а пылевые частицы - двигаться к ее центру и, концентрируясь там, образуют для планет земной группы их тела, а для планет внешней Солнечной системы их ядра.

Во всех предложенных моделях образования планетной системы Солнца возникает проблема исчезновения из системы газовой компоненты. Общепринятая точка зрения заключается в том, что газовая компонента выносится из системы солнечным ветром, интенсивность которого достигает максимума на стадии Т Тельца [45, 29]. При образовании протопланет земной группы их газовая оболочка разрушается интенсивным солнечным излучением и выносится за пределы планет земной группы [45]. Юпитеру практически полностью удалось удержать газовую компоненту, Сатурну – в меньшей степени, а Уран и Нептун большую часть своей газовой компоненты потеряли.

4. При образовании протопланет не все вещество протопланетного диска было захвачено этим процессом. Гравитационная неустойчивость и поведение пылевых частиц в газе – это в общем независимые процессы, которые идут параллельно, но могут и влиять друг на друга. В части вещества, которая осталась вне протопланетных колец и далее вне протопланет, пылевые частицы, сталкиваясь между собой, растут и оседают в экваториальной плоскости диска. Динамика и рост этих частиц описываются теорией твердотельной аккумуляции [15, 16]. Следует обратить внимание, что рост плотности пылевой компоненты в районе экваториальной плоскости может создать условия, когда пылевая компонента по плотности преобладает над газовой компонентой, как это и предполагал Сафронов В. С. [15]. Тогда начинает работать дисперсионное уравнение (1.15), полученное в разделе 1, настоящей главы. Согласно

этому уравнению гравитационной неустойчивостью могут обладать и возмущения с короткой длиной волны, и вся теория твердотельной аккумуляции начинает работать для среды, оставшейся вне планет. Образовавшиеся твердые тела начинают взаимодействовать с планетами, и возникает картина, которую мы и наблюдаем: падают на планеты и их спутники метеориты, метеоры, болиды, астероиды, а последние «грозят» уничтожить жизнь на планете Земля.

К сожалению, мы не можем увидеть прошлое: как происходило (или не происходило) образование протопланетных колец. Единственная надежда экспериментального подтверждения – это наблюдение образования протопланетных колец в протопланетном диске другой звезды.

Заключение

Настоящая глава посвящена актуальной проблеме гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Внимание исследователей приковано к этой проблеме еще со времен Канта и Лапласа. И это естественно, так как от решения этой проблемы зависит наше понимание реального пути образования планетной системы Солнца.

В настоящее время общепринятой теорией образования планетной системы Солнца является теория твердотельной аккумуляции [15, 16, 112, 113]. Основопологающим постулатом этой теории, по мнению некоторых исследователей [15, 16], является мелкомасштабная гравитационная неустойчивость в тонком пылевом слое (субдиске). Авторы настоящего обзора также придерживаются идеи гравитационной неустойчивости, но считают, что в ходе эволюции протопланетного диска должна учитываться не только мелкомасштабная гравитационная неустойчивость, но и крупномасштабные ее виды, которые могут реализоваться по мере увеличения плотности диска в его экваториальной плоскости. Логика зарождения гравитационной неустойчивости определяется критерием Джинса. Изначальная крупномасштабная гравитационная неустойчивость привела к образованию протосолнечной туманности, с которой начался коллапс этой части межзвездного вещества. По-нашему мнению, не было попыток объяснить коллапс протосолнечной туманности возникновением более мелких гравитационных возмущений, которые в своем развитии и привели к коллапсу, как это делается в исследованиях эволюции протопланетного диска. По мере формирования протопланетного диска его плотность увеличивалась. И по логике зарождения гравитационных неустойчивостей в первую очередь должны были возникнуть в диске крупномасштабные гравитационные неустойчивости. По мере дальнейшего увеличения плотности в диске возникают гравитационные неустойчивости и более мелкого масштаба.

Исследования, изложенные в рамках этой главы, позволили получить приближенные дисперсионные уравнения для протопланетного диска, которые в предельных своих приближениях совпадают с результатами работ Джинса [70], Чандрасакхара [74], Бела и Шацмана [75], Сафронова [76, 77], Фридмана и Поляченко [29, 79]. Из полученных дисперсионных уравнений (4.101) главы IV и (1.1), (1.16) настоящей главы следует:

1. Вращение протопланетного диска стабилизирует его гравитационную устойчивость в начальной стадии его эволюции настолько, что только при массе, превышающей $(0,15 - 0,2)M_S$ диск переходит в гравитационно неустойчивое состояние. Приводятся данные, которые позволяют заключить, что диск массой, большей $(0,15 - 0,2)M_S$, с большой вероятностью мог существовать.

2. Если диск в начальной стадии его эволюции был гравитационно устойчив, то за счет концентрации пылевой компоненты в экваториальной плоскости и при достижении в ней определенной плотности диск перейдет в гравитационно неустойчивое состояние. При этом дисперсионное уравнение (1.16) в этом состоянии будет подобно уравнению для начальной стадии эволюции диска (1.1).

3. Для обоих случаев, приведенных выше, показано, что в этих состояниях протопланетных дисков могут возникать гравитационные неустойчивости с длиной волны порядка расстояния между планетами, которые приводят к образованию протопланетных колец, а затем протопланет.

4. Когда вещество диска, находящееся вне протопланетных колец, а в дальнейшем и вне протопланет, переходит в состояние, в котором плотность пылевой компоненты много больше плотности газовой, начинает работать дисперсионное уравнение (1.15) (раздел 1). В соответствии с этим уравнением гравитационная неустойчивость пылевой компоненты может проявляться в широком диапазоне длин волн. Таким образом, в образовавшемся остаточном пылевом слое продолжает работать теория твердотельной аккумуляции.

В этой главе также показано, что после фрагментирования протопланетного кольца описание взаимодействий и поведения газопылевых крупномасштабных сгущений возможно проводить с помощью модели формирования планетных систем Энеева-Козлова [51, 30].

В главе V приведены многочисленные факты, которые подтверждают достоверность предлагаемой модели [2, 3, 5].

Глава VI. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – численное моделирование

Данная глава написана на основе работ [11, 12, 13]. В этой главе с целью изучения физических процессов, которые происходят при образовании планетной системы Солнца, исследовалась гравитационная неустойчивость однородной изотропной бесконечной гравитирующей газовой среды. Рассмотрены аналитические и численные решения уравнений движения такой среды в двух приближениях: «холодного» газа и газа при конечной температуре. Получены действительные решения, описывающие поведение как волновых возмущений плотности однородной среды, так и одиночных возмущений. Волны гравитационной неустойчивости, амплитуда которых растет экспоненциально, а максимумы и минимумы этой волны, как и ее узловые точки, сохраняют свое положение в пространстве, следуют основным закономерностям модели Джинса. Авторы интерпретируют эти волновые неустойчивости как аналог протопланетных колец, которые могут образовываться в протопланетных дисках. Согласно результатам численных расчетов реакция однородной гравитирующей среды на одиночные начальные возмущения ее плотности существенно отличается от закономерностей модели Джинса. Неустойчивость одиночных начальных возмущений распространяется и на область $\lambda < \lambda_J$, хотя в этом случае нарастание плотности возмущений существенно меньше, чем при $\lambda > \lambda_J$. Наблюдалось подавление звука гравитационными неустойчивостями в области $\lambda > \lambda_J$. Оценки показывают, что без учета вращения среды протопланетного диска Солнца его критическая плотность при возникновении крупномасштабной гравитационной неустойчивости примерно на четыре порядка меньше критической плотности, полученной в рамках теории образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц.

Введение

Данная глава посвящена вопросу гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца, решение которого позволяет построить адекватную модель образования планетной системы Солнца. В первом приближении исследовалась гравитационная неустойчивость однородной изотропной бесконечной гравитирующей газовой среды. Исследования, представленные в этой главе, являются продолжением исследований, которые описаны в работах [1 – 3, 5 – 10], и включают в себя разработку соответствующих алгоритмов для решения поставленных задач.

В настоящее время общепринятой теорией образования планетной системы Солнца является теория Шмидта-Сафронова [15, 16] – теория

образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц. В то же время, в рамках этой теории при объяснении ряда явлений, как было отмечено в главе III, раздел 1, встречаются значительные трудности.

В настоящей главе отметим следующее.

Как известно, планеты Солнечной системы по своим физическим характеристикам делятся на две группы: внутренние планеты – планеты земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс) и внешние планеты – газовые гиганты (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун). В модели твердотельной аккумуляции [15, 16] предполагается существование двух стадий образования внешних планет Солнечной системы. На первой стадии формируется твердотельный зародыш (ядро) планеты путем твердотельной аккумуляции. На второй стадии происходит аккреция газовой компоненты на образовавшийся твердотельный зародыш.

Существует другая, на наш взгляд, более реалистическая гипотеза образования внешних планет Солнечной системы, в которой предполагается, что каждая планета сформировалась из соответствующей протопланеты. Наибольшую доказательную силу эта гипотеза имеет для Юпитера и Сатурна [10].

В результате исследований возможностей по преодолению недостатков теории Шмидта-Сафронова появились и другие модели образования Солнечной системы. Модели [29, 79, 107, 30, 52, 31, 32, 86] - альтернативные по отношению к модели твердотельной аккумуляции, как правило, исходят из образования протопланет с последующим превращением их в соответствующие планеты.

В модели твердотельной аккумуляции [15, 16] гравитационная неустойчивость на начальной стадии эволюции протопланетного диска, т.е. фактически в газовой среде, исключается. Предполагается, что гравитационная неустойчивость в этой модели может возникнуть только на стадии формирования пылевого слоя в диске и привести к появлению планетезималей с характерными размерами, например, для зоны Земли примерно $4 \cdot 10^7$ см [16]. Хотя предположение о роли гравитационной неустойчивости в зарождении планетезималей были сделаны еще в 1969 году В. С. Сафроновым [15], этот вопрос до настоящего времени еще до конца не решен.

В модели Фридмана-Поляченко [29, 79] на основе оценок принимается, что протопланетный диск Солнца был гравитационно неустойчивым и на начальной стадии его эволюции. В этих условиях в протопланетном диске образуются «нарастающие со временем кольцеобразные возмущения плотности» (протопланетные кольца), которые «располагаются в нем согласно закону Тициуса-Бодде» [79]. Отсюда следует, что длина волны кольцеобразных гравитационных неустойчивостей соответствует расстоянию между планетами, а характерный радиальный размер - ширина кольцеобразных газопылевых

сгущений соответствует зонам планет. Например, ширина кольцеобразного газопылевого сгущения в области Земли составляет примерно $6 \cdot 10^{12}$ см. В дальнейшем в этой модели из протопланетных колец образуются протопланеты.

В модели Энеева-Козлова [107, 30, 52, 31], как и в модели твердотельной аккумуляции, предполагается образование планетезималей. Но в отличие от модели твердотельной аккумуляции Т.М. Энеев и И.И. Козлов предположили, что планетезимали являются не твердыми телами, «а более или менее разреженными газопылевыми сгущениями». В этой модели представляется весьма интересным следующий полученный результат: в протопланетном диске, масса которого «пренебрежимо мала по сравнению с массой центрального тела (Солнца)» происходит кольцевое сжатие вещества [30, 52, 31]. Эволюция каждой из кольцевых областей завершается образованием газопылевой протопланеты. В нашей терминологии кольцевое сжатие вещества – это протопланетные кольца. Другими словами протопланетный диск в модели Энеева-Козлова оказался гравитационно неустойчивым к возмущениям с длиной волны, приближенно равной расстоянию между планетами.

Следует подчеркнуть, что в основе практически всех моделей образования Солнечной планетной системы лежит фундаментальный принцип гравитирующей среды – при определенных условиях гравитирующая среда становится гравитационно неустойчивой. Отличие же моделей заключается только в пространственных размерах, на которых начинает развиваться гравитационная неустойчивость. Однако это обстоятельство приводит к существенным различиям в образовании Солнечной планетной системы.

В модели, представленной в работах [2, 3, 5, 8 – 10], показано, что протопланетный диск в начальной стадии его эволюции мог быть гравитационно неустойчивым по отношению к крупномасштабным возмущениям. Это приводит к образованию протопланетных (тороидальных) колец и далее протопланет. В рамках этой модели также показано, что для протопланетного диска Солнца в осесимметричном приближении существуют аналитические решения в виде протопланетных (тороидальных) колец, которые соответствуют зонам планет [3, 5]. Согласно модели [2, 3, 5, 8 – 10] крупномасштабные гравитационные неустойчивости могут возникать и в пылевом слое, если по какой-то причине они не смогли возникнуть на начальной стадии эволюции протопланетного диска.

Таким образом, путь образования Солнечной планетной системы существенно зависит от размера зарождающихся гравитационных неустойчивостей. Отсюда следует вывод: чтобы построить адекватную модель образования Солнечной планетной системы, следует ответить на

вопрос - могла ли реализоваться крупномасштабная гравитационная неустойчивость в протопланетном диске Солнца?

Учитывая основополагающее значение этого вопроса для построения модели, целесообразно более подробно рассмотреть возникновение и развитие гравитационной неустойчивости в гравитирующей среде. Основные принципы гравитационной неустойчивости существенно не меняются от размеров и геометрии гравитирующей среды. Поэтому на данном этапе проведем рассмотрение наиболее простой гравитирующей системы. Такой системой является бесконечная по всем направлениям однородная и изотропная среда, которая была исследована на устойчивость еще в классической работе Джинса [70]. Исходя из однородности и изотропии такой среды, Джинс сделал предположение, что гравитационная сила в любой точке этой среды равна нулю и система стационарна. Следует отметить, что эти предположения Джинса в действительности не являются корректными, так как однородная бесконечная гравитирующая среда обязана быть нестационарной [71]. Поэтому, строго говоря, задача о гравитационной неустойчивости бесконечной гравитирующей среды должна решаться на нестационарном фоне [72, 73]. Тем не менее, основные качественные выводы, полученные Джинсом, и при точном рассмотрении неустойчивости сжимающейся или расширяющейся однородной среды оказываются справедливыми. По этой причине в наших рассмотрениях однородной гравитирующей среды мы будем следовать традиционному подходу Джинса.

1. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной среды, аналитические решения

Система уравнений газодинамики с учетом гравитации записывается в виде ([114 – 116, 79]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\operatorname{grad} p + \rho \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}[(p + e) \mathbf{U}] = \rho \mathbf{U} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad p = p(\rho, \varepsilon), \quad (2)$$

для газовой среды имеет место уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = -4\pi G \rho, \quad (3)$$

где $\rho(\mathbf{r}, t)$ – плотность газовой среды; $p(\mathbf{r}, t)$ – давление газовой среды; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ – вектор скорости; $p = p(\rho, \varepsilon)$ – уравнение состояния газовой среды; $e = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U})$ – энергия единицы объема; $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ – внутренняя

энергия единицы массы; $\varphi(\mathbf{r}, t)$ – гравитационный потенциал; G – гравитационная постоянная.

Допустим, что газовая среда однородна и равновесна в начальном состоянии. Тогда, как известно [79], система уравнений (1) – (3) для возмущенного состояния путем линеаризации может быть сведена к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = \text{div}(\text{grad} p_{\Delta}) + \omega_J^2 \rho_{\Delta}, \quad (4)$$

где $\omega_J^2 = 4\pi G \rho_o$ – есть частота Джинса; ρ_o – плотность начального состояния среды; $\rho_{\Delta}, p_{\Delta}$ – амплитуда возмущений плотности и давления соответственно.

Допустим, что однородная изотропная бесконечная газовая среда является «холодной» ($T \rightarrow 0^0\text{K}$). Тогда давлением среды можно пренебречь и уравнение (4) преобразуется в уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = \omega_J^2 \rho_{\Delta}. \quad (5)$$

Одним из частных решений этого уравнения является решение:

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,o}(\mathbf{r}) \cdot \exp(\omega_J t), \quad (6)$$

где $\rho_{\Delta,o}(\mathbf{r})$ – начальное возмущение плотности среды.

Решение (6) описывает главную неустойчивость гравитирующей среды, которая была впервые введена Джинсом.

Допустим, что однородная изотропная бесконечная газовая среда находится при конечной температуре ($T \neq 0^0\text{K}$). В дальнейшем для большей наглядности и простоты представления результатов будет рассмотрено поведение однородной среды при плоских начальных возмущениях ее плотности. Для этого вместо вектора Γ введем координату x , в направлении которой будет изменяться плотность начального возмущения. Тогда уравнение (4) преобразуется в уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_{\Delta}}{\partial x^2} + \omega_J^2 \rho_{\Delta}. \quad (7)$$

Как известно [16, 46, 50, 1, 11, 12], на начальной стадии эволюции протопланетного диска его среда с достаточной точностью может быть представлена как однокомпонентный идеальный газ. Тогда в приближении идеального газа уравнение (7) преобразовывается к виду:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = C_o^2 \frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial x^2} + \omega_J^2 \rho_{\Delta}, \quad (8)$$

где $C_o = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{o,S} \right)^{\frac{1}{2}}$ – скорость звука в невозмущенной газовой среде.

Для последующих вычислений введем безразмерные переменные: $\rho_{\Delta, безр} = \rho_{\Delta} / \rho_o$, $t_{безр} = \omega_J t$, $\omega_{безр} = \omega / \omega_J$. Бесконечная однородная среда не имеет характерного параметра длины конечной величины. Так как в итоге нас будет интересовать протопланетный диск Солнца, то без потери общности рассмотрения можно ввести параметр длины обезразмеривания, равный r_{ex} – внешнему радиусу протопланетного диска Солнца. При этих условиях имеем: $x_{безр} = x / r_{ex}$, $\lambda_{безр} = \lambda / r_{ex}$, $C_o^2 / (\omega_J^2 r_{ex}^2)$ – безразмерная константа. С учетом введенных безразмерных переменных уравнение (8) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta, безр}}{\partial t_{безр}^2} = \frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2} \frac{\partial^2 \rho_{\Delta, безр}}{\partial x_{безр}^2} + \rho_{\Delta, безр} \quad (9)$$

Далее индекс «безр» в обозначениях переменных, как правило, будет опускаться.

Будем искать решения уравнения (9) в виде синусоидальной волны, задавая начальное возмущение плотности ($t = 0$) на отрезке $0 \leq x \leq 1$ бесконечного однородного пространства в виде волны с числом максимумов, равным числу планет Солнечной системы (восемь планет и Пояс Астероидов). Такое задание начального возмущения позволит в дальнейшем провести допустимые сравнения с некоторыми параметрами Солнечной планетной системы. Можно показать, что при таких начальных условиях уравнение (9) имеет следующие действительные частные решения [11].

Волна гравитационной неустойчивости:

$$\rho_{\Delta} = C_1 \cdot \exp(\omega t) [\cos((2\pi x / \lambda) + C_2)], \quad (10)$$

где $\lambda = 1/9$; $C_2 = \pi$; $\omega^2 = -(\lambda^2_J / \lambda^2) + 1$ – дисперсионное уравнение; $\lambda_J = 2\pi (C_o / (\omega_J r_{ex}))$ – безразмерная критическая длина волны Джинса. Если $\lambda > \lambda_J$, то $\omega^2 > 0$. Если $\lambda = \lambda_J$, то $\omega^2 = 0$. Если $\lambda < \lambda_J$, то $\omega^2 < 0$, и действительного частного решения не существует.

Стационарная волна:

$$\rho_{\Delta} = C_1 \cdot [\cos((2\pi x / \lambda) + C_2)], \quad (11)$$

где $\lambda = 1/9$, $C_2 = \pi$, $\lambda = \lambda_J$.

Стойкая волна:

$$\rho_{\Delta}(x, t) = C_1 \cdot \cos \omega t \cdot \cos((2\pi x / \lambda) + C_2), \quad (12)$$

где $\lambda = 1/9$; $C_2 = \pi$; $\omega^2 = (\lambda_J^2/\lambda^2) - 1$ - дисперсионное уравнение. Если $\lambda < \lambda_J$, то $\omega^2 > 0$. Если $\lambda = \lambda_J$, то $\omega^2 = 0$. Если $\lambda > \lambda_J$, то $\omega^2 < 0$, и действительного частного решения не существует.

Бегущая волна – «тяжелый» звук:

$$\rho_\Delta = C_1 \cdot \cos(\omega t + (2\pi x/\lambda) + C_2), \quad (13)$$

где $\lambda = 1/9$; $C_2 = \pi$; $\omega^2 = (\lambda_J^2/\lambda^2) - 1$ - дисперсионное уравнение. Если $\lambda < \lambda_J$, то $\omega^2 > 0$. Если $\lambda = \lambda_J$, то $\omega^2 = 0$. Если $\lambda > \lambda_J$, то $\omega^2 < 0$, и действительного частного решения не существует.

Таким образом, гравитационная неустойчивость в виде волнового процесса в однородной изотропной среде возможна только при $\lambda > \lambda_J$, как это и следует из модели Джинса. При этом критическая длина волны Джинса (λ_J) разделяет диапазоны устойчивых ($\lambda < \lambda_J$) и неустойчивых ($\lambda > \lambda_J$) возмущений изотропной среды.

2. Численный метод решения уравнений однородной изотропной гравитирующей среды

Опуская индексы у переменных, преобразуем уравнение (9) к виду:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho, \quad (14)$$

где $C^2 = C_o^2 / (\omega_J^2 r_{ex}^2)$.

Для проведения численных расчетов область по оси x разбиваем на счетные интервалы точками с целыми индексами. Функция ρ определена в центре интервала (x_i, x_{i+1}) и обозначена индексом $i+1/2$. Переход от слоя n к слою $n+1$ с постоянным шагом по времени τ выполняется по стандартной разностной схеме:

$$\rho_{i+1/2}^{n+1} = 2\rho_{i+1/2}^n - \rho_{i+1/2}^{n-1} + \frac{C^2 \tau^2}{x_{i+1} - x_i} \left[\frac{\rho_{i+3/2}^n - \rho_{i+1/2}^n}{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}} - \frac{\rho_{i+1/2}^n - \rho_{i-1/2}^n}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \right] + \tau^2 \rho_{i+1/2}^n. \quad (15)$$

Для каждого расчетного случая, вводя начальные и граничные условия, записанные в конечных разностях, получаем разностную схему, по которой и проводились расчеты.

3. Результаты численных расчетов гравитационной неустойчивости однородной изотропной «холодной» среды

Движение однородной изотропной бесконечной «холодной» ($T \rightarrow 0^0\text{K}$) газовой среды описывается уравнением (5). Численные расчеты этого уравнения в безразмерных переменных на отрезке $0 \leq x \leq 1$ при различных начальных условиях проводились по методике раздела 2.

Исследовалось движение однородной среды при начальном плоском возмущении плотности прямоугольной формы. Такое возмущение, в отличие от волнового возмущения, является локализованным в пространстве по оси x , и далее будет называться - одиночным возмущением. В этих расчетах возрастание возмущений плотности со временем происходит по экспоненциальному закону $\sim \exp(\omega t)$, где $\omega = 1$, вне зависимости от пространственного размера начального возмущения. Расхождение численного и аналитического решений в этих расчетах не превышает 0,025%. В случае $T \rightarrow 0^0\text{K}$ начальная прямоугольная форма возмущения плотности при нарастании его амплитуды со временем сохраняется. Если изменить форму одиночного начального возмущения, то «размытия» возмущения по оси x также не происходит, и нарастание плотности со временем в каждой точке этого возмущения также будет пропорционально $\sim \exp(\omega t)$, где $\omega = 1$.

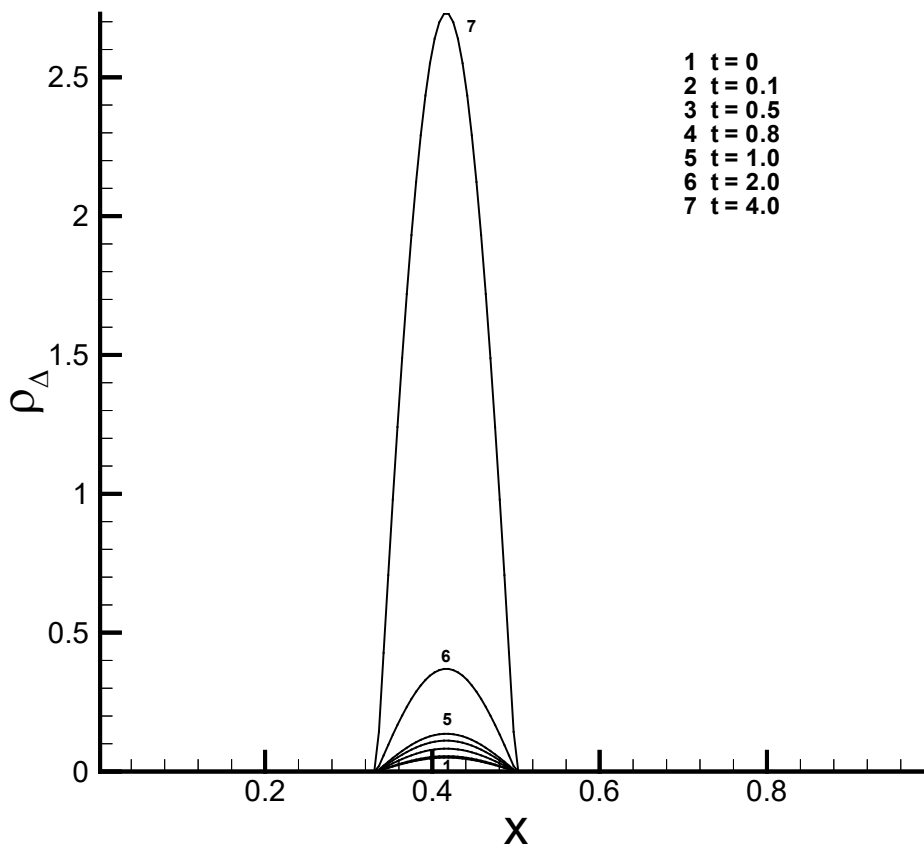


Рис. 1. Гравитационная неустойчивость, синусоидальная полуволна, $T \rightarrow 0^0\text{K}$.

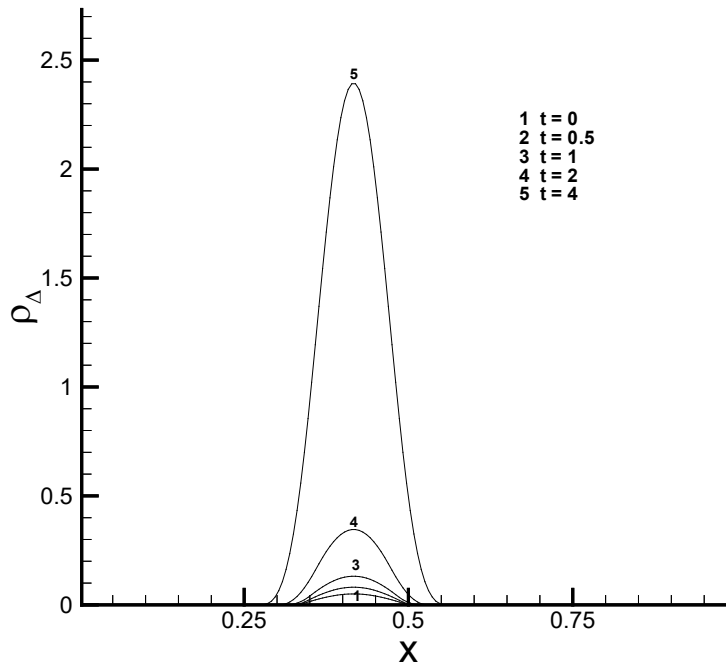


Рис. 2. Гравитационная неустойчивость, синусоидальная полуволна,
 $T \neq 0^0\text{K}$, $\lambda > \lambda_J$.

Для примера на рис. 1 форма начального возмущения плотности представляет собой положительную синусоидальную полуволну в виде $\rho_{\Delta}(t=0) = 0,05 \cdot \cos(6\pi \cdot x - \pi/2)$, заданную на отрезке $1/3 \leq x \leq 0,5$, вне которого $\rho_{\Delta}(t=0) = 0$. Задаются начальное условие $\left. \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega \cdot \rho_{\Delta}(t=0)$ и краевые условия $\rho_{\Delta}(x=0, t) = 0$, $\rho_{\Delta}(x=1, t) = 0$. Расхождение между численным и аналитическим решениями в этих расчетах не превышает 0,025%.

Были проведены расчеты движения среды при начальном возмущении ее плотности в виде синусоидальной волны. Начальное волновое возмущение задавалось с числом максимумов на отрезке $0 \leq x \leq 1$, равным числу планет Солнечной системы (восемь планет и Пояс Астероидов). Численные расчеты показали, что в результате неустойчивости образуется волна гравитационной неустойчивости. При этом длина волны начального возмущения может быть произвольной. Такие волны в однородной среде по своей природе подобны волнам гравитационной неустойчивости в протопланетном диске [29, 79], из которых образуются протопланетные кольца.

Результаты этого раздела в более подробном виде представлены в препринте [11].

4. Результаты численных расчетов гравитационной неустойчивости однородной изотропной среды при конечной температуре

Были также проведены численные расчеты уравнения (9) для одиночных начальных возмущений плотности однородной среды при конечной температуре ($T \neq 0^0\text{K}$) по методике раздела 2. Из результатов расчетов при начальном возмущении среды прямоугольной формы ($\lambda \approx 2L = 1/3$, где L – размер одиночного возмущения, и $\lambda > \lambda_J$) следует, что, в отличие от случая $T \rightarrow 0^0\text{K}$, при конечной температуре ($T \neq 0^0\text{K}$) на фоне возрастания начального возмущения, вызванного гравитационной неустойчивостью, происходит распространение возмущений плотности в окружающую среду и распространение волн разрежения внутрь области начального возмущения. До момента времени, пока волны разрежения, идущие с противоположных концов начального возмущения, не встретятся, амплитуда начального возмущения плотности нарастает по закону $\sim \exp(\omega t)$, где $\omega = 1$. После взаимодействия волн разрежения закон нарастания амплитуды возмущения меняется. Это можно объяснить тем, что ω в экспоненциальном законе начинает уменьшаться со временем. Численные расчеты показали, что, в отличие от «холодной» среды, нарастание плотности возмущения для разных его точек происходит по различным законам.

Были проведены численные расчеты поведения начального возмущения плотности прямоугольной формы при $\lambda < \lambda_J$. Анализ результатов расчетов показывает, что гравитационная неустойчивость в этих условиях возникает не только в диапазоне $\lambda > \lambda_J$, но и в диапазоне $\lambda < \lambda_J$. Сценарий развития гравитационной неустойчивости в этих областях один и тот же, и он описан при рассмотрении случая $\lambda > \lambda_J$.

Поведение однородной изотропной среды при начальном возмущении плотности в виде положительной синусоидальной полуволны, которая описывается формулой

$$\rho_{\Delta}(t = 0) = 0,05 \cdot \cos(6\pi \cdot x - \pi/2) \quad (16)$$

на отрезке $1/3 \leq x \leq 0,5$, вне которого $\rho_{\Delta}(t = 0) = 0$, для случая $\lambda > \lambda_J$ показано на рис. 2. Для решения задачи Коши заданы также начальное условие

$$\left. \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega \cdot \rho_{\Delta}(t = 0) \text{ и краевые условия } \rho_{\Delta}(x = 0, t) = 0, \rho_{\Delta}(x = 1, t) = 0.$$

Из представленных на рис. 2 графиков следует, что в среде при заданных начальных и краевых условиях возникает гравитационная неустойчивость. При этом кривые возмущения плотности по обе стороны от максимума в зависимости от расстояния на всех временах являются строго монотонными. В такой же постановке выполнен расчет при нулевой температуре среды, представленный на рис. 1. Сравнение рис. 2 с рис. 1

демонстрирует, что, начиная с некоторого момента времени, рост амплитуды возмущения при конечной температуре идет медленнее, чем в случае с «холодной» средой.

Были проведены численные расчеты для случаев $\lambda = \lambda_J$ и $\lambda < \lambda_J$. Начальное возмущение плотности также задавалось по формуле (16) на отрезке $1/3 \leq x \leq 0,5$, вне которого $\rho_\Delta(t=0) = 0$. Заданы также начальное условие $\left. \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ и краевые условия $\rho_\Delta(x=0, t) = 0$, $\rho_\Delta(x=1, t) = 0$.

Расчеты показывают (рис. 3), что характер кривых $\rho_\Delta(x, t = const)$ при $\lambda = \lambda_J$ существенно меняется по сравнению со случаем $\lambda > \lambda_J$. На некотором отрезке времени кривые плотности по обе стороны от центральной точки в зависимости от расстояния имеют немонотонный характер. При больших временах амплитуда возмущения нарастает, а кривые постепенно сглаживаются. На момент времени $t = 10$ амплитуда возмущения примерно в 6 раз меньше, чем в диапазоне $\lambda > \lambda_J$. Изменения начального возмущения плотности (формула (16)) при $\lambda < \lambda_J$ в зависимости от расстояния для разных моментов времени представлены на рис. 4.

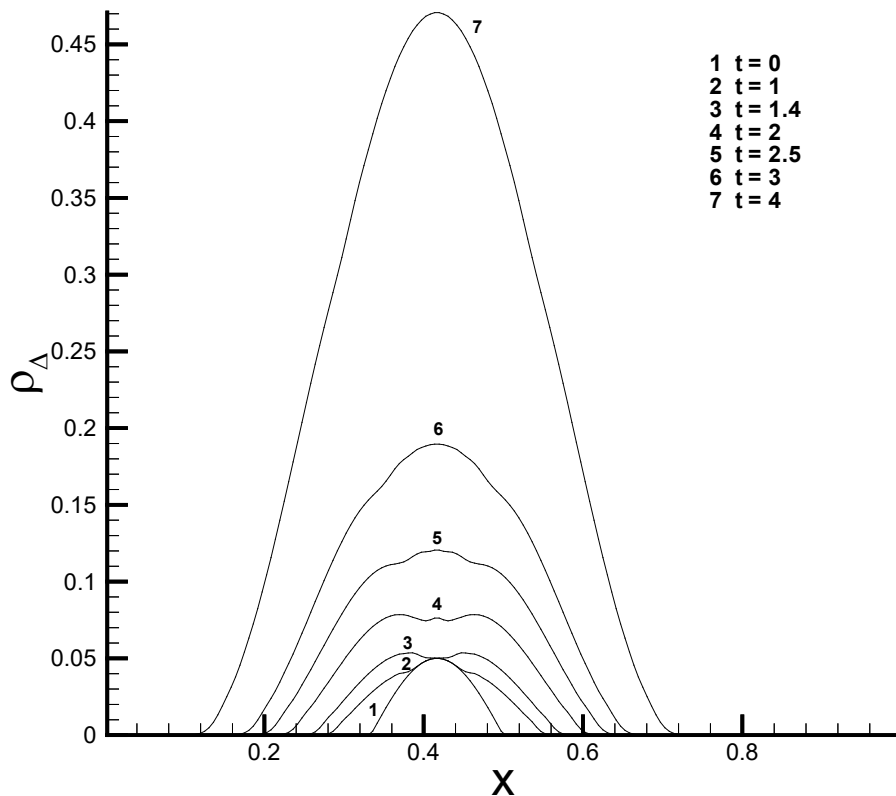


Рис. 3. Гравитационная неустойчивость, синусоидальная полуволна, $\lambda = \lambda_J$.

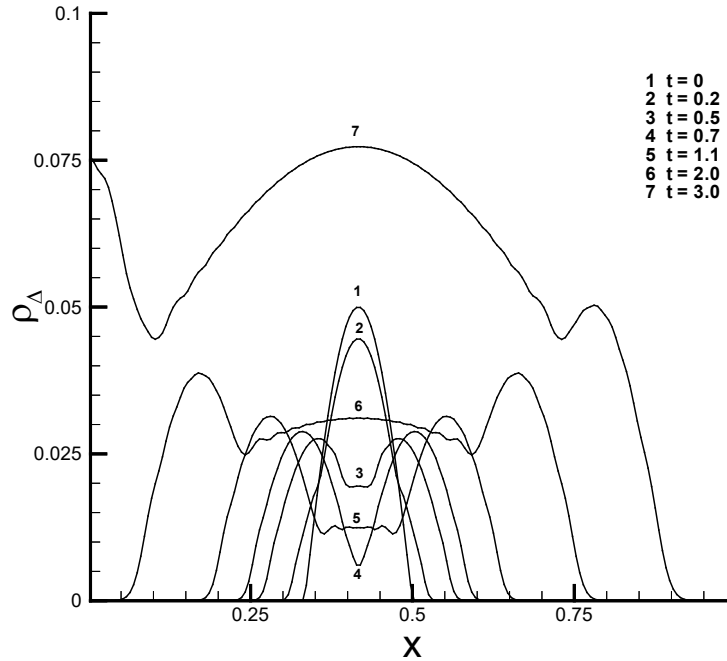


Рис. 4. Гравитационная неустойчивость, синусоидальная полуволна, $\lambda < \lambda_J$.

Поведение возмущения плотности в случае $\lambda < \lambda_J$, как это видно из рис. 4, отличается от ситуации как при $\lambda > \lambda_J$, так и при $\lambda = \lambda_J$. На начальном этапе, примерно к моменту времени $t = 0,5$ начальное возмущение распадается на два возмущения, которые начинают распространяться в противоположных направлениях. Это качественно совпадает с решением телеграфного уравнения [11, 117]. Однако с определенного момента времени ($t > 1$) амплитуда в центре начинает возрастать. Это можно объяснить тем, что в уравнении (9) вторая

производная $\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial x^2}$ становится малой и преобладающим в правой части этого уравнения оказывается второй член. В этом случае главным членом в решении является выражение вида (10) с экспоненциальным множителем по времени. Таким образом, амплитуда возмущения плотности начинает возрастать, и ко времени $t \approx 2,5$ ее значение превосходит амплитуду начального возмущения.

Далее приведем результаты расчетов движения однородной среды, когда начальные возмущения задаются в виде синусоидальной волны. На рис. 5 показана гравитационная неустойчивость среды, которая наблюдается, когда начальное возмущение плотности представляет собой синусоидальную волну в виде

$$\rho_\Delta = 0,01 \cdot \cos(18\pi x + \pi), \quad (17)$$

заданную на отрезке $0 \leq x \leq 1$, для случая $\lambda > \lambda_J$. Заданы также начальное

условие $\left. \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega \cdot \rho_\Delta(t=0)$ и краевые условия $\left. \frac{\partial \rho_\Delta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$,

$\left. \frac{\partial \rho_{\Delta}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$. Волна начального возмущения задается с девятью максимумами по числу планет Солнечной системы, расположенными на расстоянии, равном ширине протопланетного диска, т.е. на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

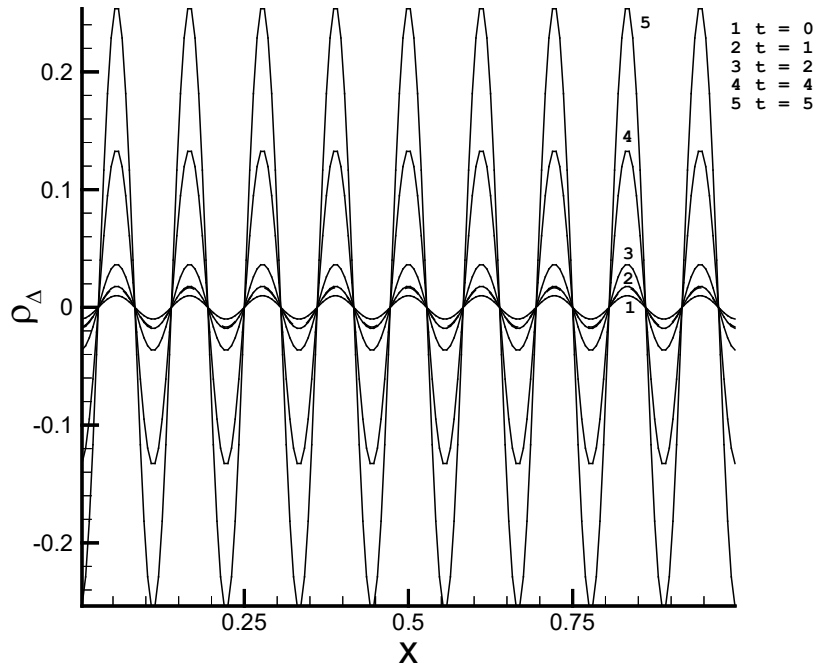


Рис. 5. Гравитационная неустойчивость однородной среды в виде волны при $\lambda > \lambda_J$, $T \neq 0^{\circ}\text{K}$.

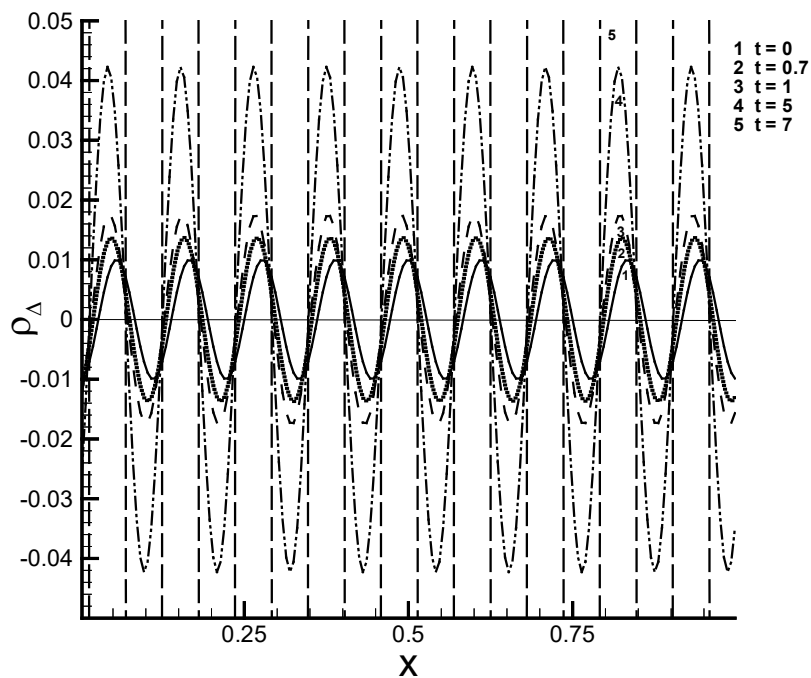


Рис. 6. Волны гравитационной неустойчивости ($\lambda > \lambda_J$) при начальных и краевых условиях, соответствующих бегущей волне, $T \neq 0^{\circ}\text{K}$.

Как видно из рис. 5, неустойчивость среды в этом случае возникает в виде волны гравитационной неустойчивости. Нарастание амплитуды волны соответствует экспоненциальному закону. Если длина волны λ приближается к критической длине волны Джинса λ_J , то амплитуда волны гравитационной неустойчивости резко падает. При $\lambda = \lambda_J$ амплитуда волны начального возмущения плотности с течением времени остается неизменной, а фазовая скорость равна нулю. Эту волну в отличие от других типов волн можно назвать стационарной волной. В случае $\lambda < \lambda_J$ при начальных и граничных условиях, соответствующих случаю $\lambda > \lambda_J$, в однородной среде образуется стоячая волна. В диапазоне $\lambda \leq \lambda_J$ однородная среда гравитационно устойчива.

В приведенных выше исследованиях (разделы 1, 3, 4) были получены волновые возмущения плотности однородной гравитирующей среды с нулевой фазовой скоростью. Представляло интерес исследовать на основе уравнения (9) поведение волновых возмущений в виде бегущей волны (13). Для численных расчетов были использованы следующие начальные и краевые условия. Начальное возмущение плотности осталось без изменений и имело вид (17). Начальное условие – производная по времени

задавалась в виде $\left. \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} \right|_{t=0} = -0,01 \cdot \omega \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \pi\right)$. Краевые условия задавались в соответствии с (13):

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial x}(x=0, t) = 0,01 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin(\omega t), \quad \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial x}(x=1, t) = 0,01 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin(\omega t), \quad (18)$$

или

$$\rho_{\Delta}(x=0, t) = 0,01 \cdot \cos(\omega t + \pi), \quad \rho_{\Delta}(x=1, t) = 0,01 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} + \pi\right). \quad (19)$$

Наилучшим вариантом краевых условий, который давал высокую точность в расчетах, являлся видоизмененный вариант (19) – периодический вариант:

$$\rho_{\Delta}(t, x = x_{-1/2}) = \rho_{\Delta}(t, x = x_{N-1/2}), \quad \rho_{\Delta}(t, x = x_{1/2}) = \rho_{\Delta}(t, x = x_{N+1/2}). \quad (20)$$

В результате расчетов было получено численное решение уравнения (9) в виде бегущей волны для $\lambda < \lambda_J$, которое описывает «тяжелый» звук в гравитирующей газовой среде. Это численное решение на момент времени $t=10$ совпадает с аналитическим решением по фазе в пределах 1%.

Существуют ли в области $\lambda > \lambda_J$ волны гравитационной неустойчивости в виде бегущей волны? Для решения этого вопроса были проведены численные расчеты в области $\lambda > \lambda_J$ с начальными и краевыми условиями, соответствующими бегущей волне. На рис. 6 приведены результаты этих расчетов. Видно, что в начальные моменты времени ($t \leq 1$), когда только начинает развиваться гравитационная неустойчивость, волна возмущения плотности начинает двигаться. Но при возрастании

амплитуды волнового возмущения движение волны прекращается, и фазовая скорость волны гравитационной неустойчивости становится равной нулю. Итак, в диапазоне $\lambda > \lambda_J$ независимо от начальных и граничных условий возникает волна гравитационной неустойчивости с фазовой скоростью, равной нулю.

5. Радиальное возмущение в виде волны, максимумы которой совпадают с положением планет Солнечной системы

В работе [29] было предложено начальное возмущение плотности для возникновения гравитационной неустойчивости в протопланетном диске Солнца в виде волны, максимумы которой совпадают с положением планет Солнечной системы (правило Тициуса – Боде):

$$\sigma_1 = -\frac{a\eta_0}{2\pi Gr^{1/2}(r-r_0)^{3/2}} e^{ia \ln \frac{r-r_0}{c}}, \quad (21)$$

где $a = \frac{2\pi}{\ln 2}$, G – гравитационная постоянная, η_0 – константа, $r_0 = 0,4$ а.е., $c = 0,3$ а.е.

Представляет интерес использовать данный вид возмущения для исследования условий возникновения гравитационной неустойчивости в случае однородной среды в цилиндрической системе координат. Для этого возьмем действительную часть (21) в виде:

$$\sigma_1 = \frac{C}{r^{1/2}(r-r_0)^{3/2}} \cos\left(a \ln \frac{r-r_0}{c}\right). \quad (22)$$

В наших безразмерных переменных получаем:

$$\rho_{\Delta, безр} = \frac{C_\phi}{r_{безр}^{1/2}(r_{безр} - 0,010125)^{3/2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\ln 2} \ln \frac{r_{безр} - 0,010125}{0,0075938}\right), \quad (23)$$

где C_ϕ – безразмерная константа. Далее в выражении (23) опускаем индексы «безр».

На графике, построенном по формуле (23) с $C_\phi = 9,9451e-7$, на участке между Венерой ($r \approx 0,0177$) и Меркурием ($r \approx 0,0098$) наблюдаются осцилляции, сгущающиеся к Меркурию (рис. 7), которые не имеют физического смысла.

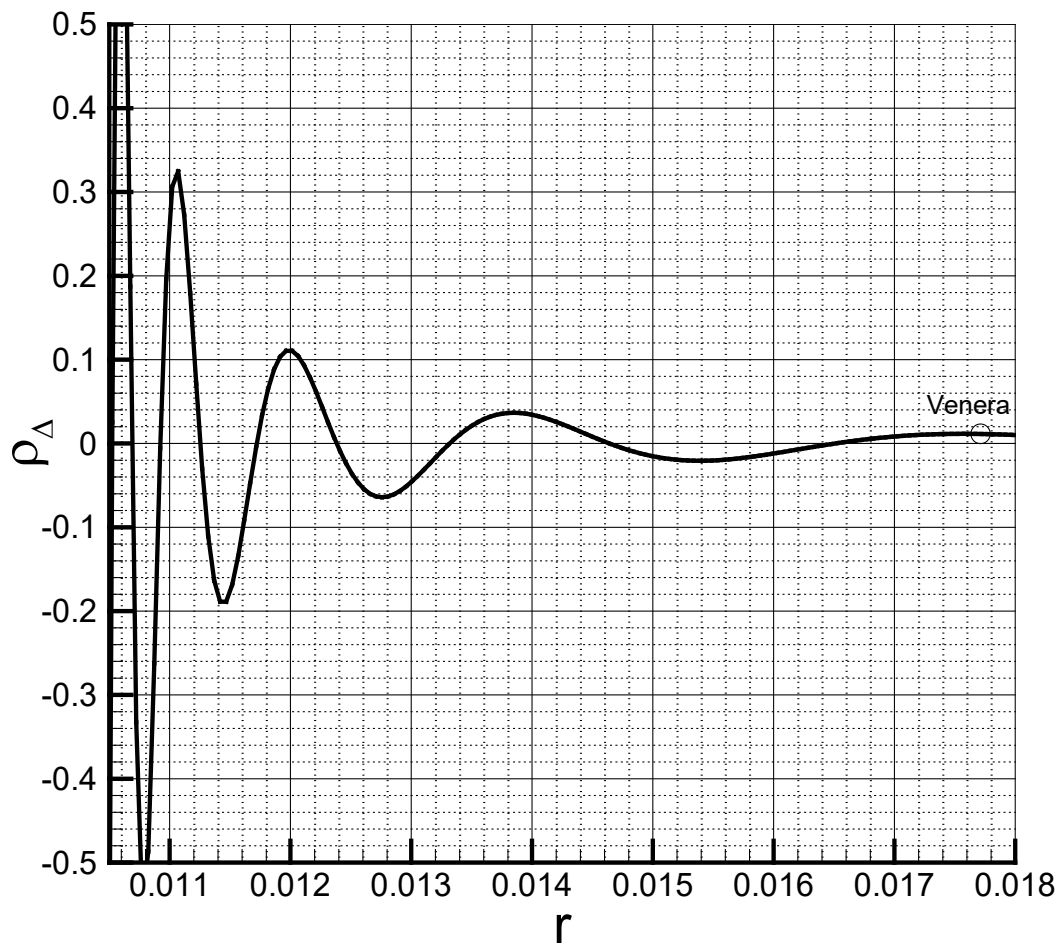


Рис. 7. Поведение начального возмущения плотности (формула (23)) на расстояниях, меньших расстояния до Венеры.

Поэтому для наших расчетов этот участок кривой был аппроксимирован косинусоидой с максимумом, соответствующим положению Меркурия (кривая красного цвета на рис. 8).

Таким образом, начальное возмущение плотности было представлено в следующем виде:

на начальном отрезке $[0,00759729; 0,00981387]$

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,0} \cdot \cos(708,6576287478 \cdot r - 0,671488535925), \quad (24)$$

на отрезке $[0,00981387; 0,0146403]$

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,0} \cdot \cos(325,4571861178 \cdot r + 3,089190792), \quad (25)$$

на отрезке $[0,0146403; 1]$

$$\rho_{\Delta} = \frac{C_{\phi}}{r^{1/2} (r - 0,010125)^{3/2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\ln 2} \ln \frac{r - 0,010125}{0,0075938}\right). \quad (26)$$

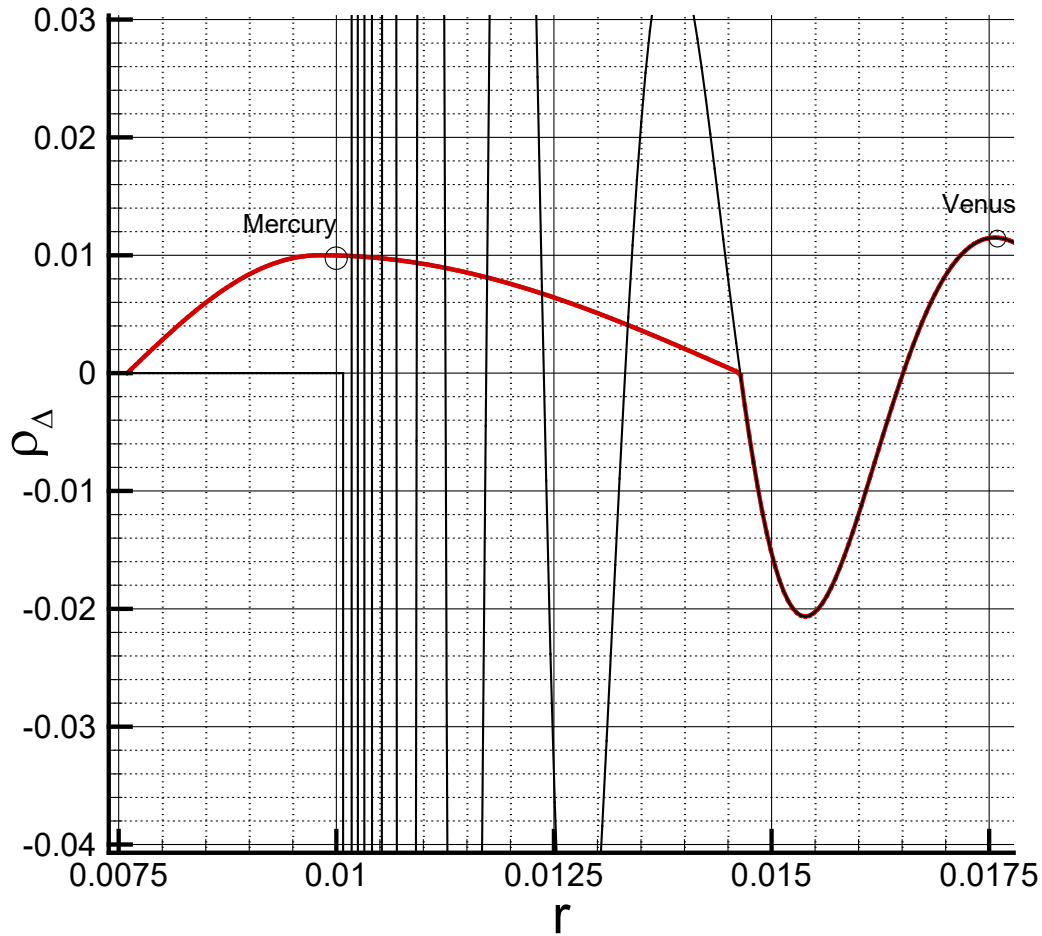


Рис. 8. Начальное возмущение плотности на участке Меркурий – Венера

Для расчетов определяем константу $\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2}$ в уравнении (9) для случая гравитационной неустойчивости однородной среды при ее начальном возмущении в виде (24), (25), (26).

В предположении, что остается верным выражение для критической длины волны Джинса

$$\lambda_J = C_o \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_o}}, \quad (27)$$

проведа обезразмеривание

$$\lambda_{J,безр} = \frac{\lambda_J}{r_{ex}} = \frac{1}{r_{ex}} C_o \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_o}}, \quad (28)$$

находим

$$\lambda_{J,безр}^2 r_{ex}^2 G\rho_o \frac{1}{\pi} = C_o^2, \quad (29)$$

где $\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2}$ - безразмерная константа, (30)

$$\omega_J^2 = 4\pi G \rho_o. \quad (31)$$

Окончательно получаем:

$$\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2} = \frac{\lambda_{J,безр}^2 r_{ex}^2 G \rho_o \frac{1}{\pi}}{4\pi G \rho_o r_{ex}^2} = \frac{\lambda_{J,безр}^2}{4\pi^2}. \quad (32)$$

Задавая начальное возмущение в виде (24), (25), (26), мы получаем волну с изменяющейся длиной волны в зависимости от расстояния (длина волны есть приближенно расстояние между планетами). В рассматриваемом случае длина волны изменяется в пределах от

$$\lambda_{безр} \approx \frac{r_{венера}}{r_{ex}} - \frac{r_{меркурий}}{r_{ex}} = 0,00790499 \quad (33)$$

до $\lambda_{безр} \approx \frac{r_{плут}}{r_{ex}} - \frac{r_{непт}}{r_{ex}} = 0,2392551.$

(34)

Область неустойчивости для всех длин волн данного начального возмущения соответствует неравенству

$$\lambda_{безр} > \lambda_{J,безр}. \quad (35)$$

Тогда для $\lambda_{J,безр}$ получаем

$$\frac{r_{плут}}{r_{ex}} - \frac{r_{непт}}{r_{ex}} > \frac{r_{венера}}{r_{ex}} - \frac{r_{меркурий}}{r_{ex}} > \lambda_{J,безр} \approx 0,005,$$

а из выражения (32) имеем

$$\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2} = \lambda_{J,безр}^2 \frac{1}{4\pi^2} = 6,33257 \cdot 10^{-7} = 0,000000633257.$$

С этой константой были проведены численные расчеты уравнения (9), и результаты расчетов в виде графиков $\rho_\Delta(r)$ в фиксированные моменты времени представлены на рис. 9. Из этого рисунка отчетливо виден рост амплитуды начального возмущения, т.е. наблюдается гравитационная неустойчивость в виде радиальных колец, положение которых соответствует положению планет Солнечной системы.

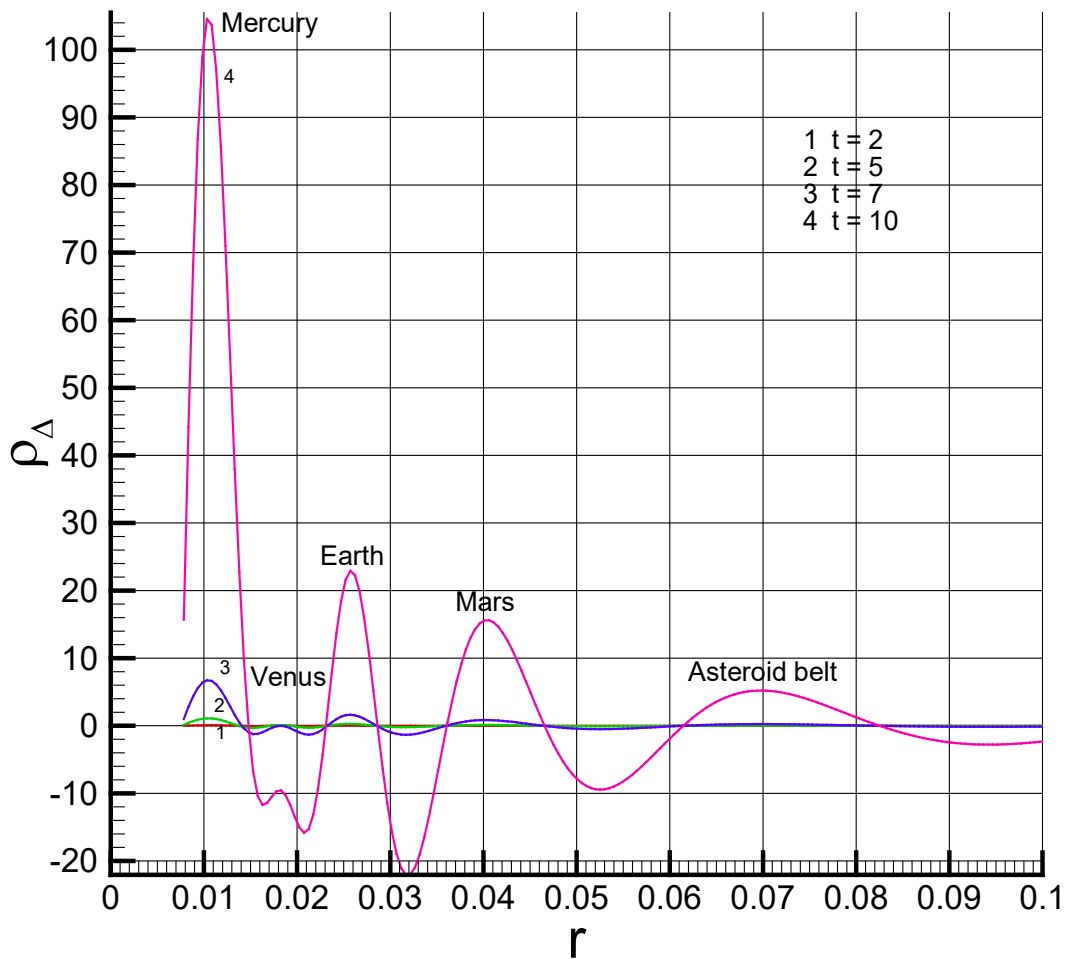


Рис. 9. Гравитационная неустойчивость однородной среды, инициированная начальным возмущением плотности в виде (23).

Расчет поведения начального возмущения плотности в области

$$\lambda_{\text{безр}} < \lambda_{J, \text{безр}} \left(\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2} = 0,00633257 \right) \text{ показывает, что амплитуды}$$

возмущения плотности остаются «постоянными», т.е. в этой области наблюдается гравитационная устойчивость.

6. Анализ и обсуждение результатов исследований

1. Результаты численных расчетов находятся в согласии с основными представлениями о гравитационной неустойчивости «холодной» ($T \rightarrow 0^0\text{K}$) однородной изотропной бесконечной газовой среды. Эта среда гравитационно неустойчива к любым видам возмущений ее плотности, причем как к возмущениям в виде волн, так и к одиночным начальным возмущениям. Зарождение гравитационных неустойчивостей в такой среде не зависит ни от длины волны при волновых возмущениях, ни от пространственных размеров одиночных начальных возмущений.

Характерный пространственный размер и форма возмущения остаются постоянными во времени. Нарастание возмущения плотности в каждой его точке происходит во времени по экспоненциальному закону:

$$\sim \exp(\omega_J t), \text{ где } \omega_J = \sqrt{4\pi G \rho_0}.$$

Перечисленные особенности поведения гравитационных неустойчивостей объясняются тем, что температура, препятствующая образованию гравитационных неустойчивостей, в этом случае стремится к нулю.

В протопланетном диске могут возникать ситуации, когда пылевая компонента преобладает над газовой. В этом случае среда ведет себя подобно «холодному» газу [29, 79]. Таким образом, результаты, полученные при исследованиях «холодной» однородной изотропной среды, подтверждают возможность образования из пылевой компоненты твердых тел различных размеров, включая и малые.

2. В отличие от «холодной» среды, однородная изотропная бесконечная газовая среда при конечной температуре ($T \neq 0^0\text{K}$) может быть гравитационно устойчива к определенным видам возмущения ее плотности. Так, при волновых (гармонических) начальных возмущениях плотности газовая среда следует закономерностям модели Джинса. При $\lambda < \lambda_J$ среда гравитационно устойчива. При $\lambda > \lambda_J$ в среде возникают волны гравитационной неустойчивости (раздел 1, формула (10)). Эти волны по своей природе подобны нарастающим со временем кольцеобразным возмущениям плотности протопланетного диска Солнца (протопланетным кольцам).

По результатам проведенных численных расчетов реакция однородной гравитирующей среды ($T \neq 0^0\text{K}$) на одиночные начальные возмущения ее плотности существенно отличается от закономерностей модели Джинса. Гравитационная неустойчивость одиночных возмущений распространяется и на область $\lambda < \lambda_J$, хотя в этом случае нарастание возмущений плотности существенно меньше, чем при $\lambda > \lambda_J$. Это можно объяснить тем, что теория Джинса исходит из начальных возмущений плотности среды в виде гармонической волны, простирающейся на всю однородную среду. При одиночных начальных возмущениях плотности задача о движении среды существенно отличается от задачи в постановке Джинса. По существу это другая краевая задача, решение которой не совпадает с решением Джинса, что и приводит к результатам, представленным в данной работе.

Следующими особенностями однородной среды при конечной температуре, наряду с нарастанием плотности начального одиночного возмущения, являются увеличение характерного пространственного размера самого возмущения, а также изменение его формы. Эти факты объясняются влиянием температуры, которая противодействует возникновению гравитационной неустойчивости.

3. В настоящей главе изучалось прохождение звуковых колебаний плотности через однородную гравитирующую среду при конечной температуре в диапазоне волн как $\lambda < \lambda_J$, так и $\lambda > \lambda_J$. Показано, что в диапазоне волн $\lambda < \lambda_J$ могут образовываться стоячие волны (12), а также распространяться волны в виде бегущей волны при соответствующих начальных и краевых условиях. Бегущая волна реализуется в виде волны «тяжелого» звука (13). Отличительной особенностью волны «тяжелого» звука является уменьшение фазовой скорости этой волны при увеличении λ . При $\lambda = \lambda_J$ фазовая скорость волны «тяжелого» звука становится равной нулю, и волна вырождается в стационарную волну (11). Стоячая волна в представленных исследованиях является стоячей волной «тяжелого» звука. При заданных λ и λ_J частота стоячей волны «тяжелого» звука равна частоте бегущей волны «тяжелого» звука. При достижении λ значения λ_J стоячая волна также вырождается в стационарную волну. В диапазоне длин волн $\lambda > \lambda_J$ волны в виде стоячей и бегущей волн «тяжелого» звука существовать не могут. В этой области при возмущении среды возникает волна гравитационной неустойчивости (10). Причем фазовая скорость установившейся волны гравитационной неустойчивости равна нулю и не зависит при численных расчетах от граничных и начальных условий. Этот интересный факт объясняется гравитационным подавлением звука возникающими массами газа гравитационных неустойчивостей.

4. В настоящее время, вероятно, преждевременно говорить о завершенности построения модели образования планетной системы Солнца. Наряду с теориями образования планетной системы, такими как: образование планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [16]; образование протопланет путем столкновения и объединения газопылевых сгущений [30]; образование планет путем возникновения волны возмущения на масштабах всего диска, приводящей к формированию протопланетных колец (и впоследствии самих планет) вследствие крупномасштабной гравитационной неустойчивости диска [2, 3, 5, 8 – 10], существуют и гипотезы образования некоторых планет Солнечной системы, например Юпитера, в виде отдельной протопланеты [34]. Поэтому для рассмотрения возможных сценариев образования планет Солнечной системы необходимо знать условия зарождения гравитационных неустойчивостей разного типа и их динамику. Результаты таких исследований для однородной изотропной среды представлены в данной работе. В этих исследованиях следует обратить внимание на следующий результат: показано, что неустойчивость одиночных начальных возмущений распространяется и на область $\lambda < \lambda_J$. Таким образом, расширяются границы возможного образования одиночных гравитационных неустойчивостей в однородной среде. Если такое явление

имеет место и в протопланетном диске, то это может существенно повысить вероятность образования одиночного протопланетного кольца и, как следствие, привести к образованию из этого кольца отдельной протопланеты.

5. Проведены численные расчеты однородной изотропной газовой среды при начальном ее возмущении в виде волны, максимумы которой совпадают с положением планет Солнечной системы. Показано, что в этом случае при $\lambda_{безр} > \lambda_{J,безр}$ возникает гравитационная неустойчивость в виде радиальных колец, соответствующих планетам Солнечной системы.

6. В работе [8] была введена критическая плотность протопланетного диска как минимальная плотность, при которой может возникнуть гравитационная неустойчивость при учете возмущений во всем диапазоне возможных длин волн. Это определение будем считать справедливым и для однородной газовой среды. Если среда протопланетного диска имеет распределение плотности пылевой компоненты, близкое к однородному, и содержание пыли по массе не превышает нескольких процентов, то усредненные параметры такой среды с достаточной точностью описываются уравнением состояния идеального газа [16, 50, 1]. В наших исследованиях однородная газовая среда также является идеальным газом. Тогда конфигурация волновых начальных возмущений плотности среды, которая была исследована в настоящей работе, позволяет оценить критическую плотность протопланетного диска Солнца без учета стабилизирующего влияния на его гравитационную устойчивость вращательного движения диска. Действительно, гравитационная неустойчивость однородной изотропной газовой среды изучалась при таких волновых начальных возмущениях плотности, когда на расстоянии, равном ширине протопланетного диска, укладывалось девять длин волн, что соответствовало числу планет Солнечной системы, включая Пояс Астероидов. Так как в однородной среде волна гравитационной неустойчивости наблюдается в виде гармонической волны, то эта оценка может дать только усредненное значение критической плотности протопланетного диска Солнца, что и в таком приближении представляет несомненный интерес. Оценку критической плотности ($\rho_{o,кр}$) проведем, используя выражение для критической длины волны Джинса, из которого следует [8]:

$$\rho_{o,кр} = \pi\gamma RT / \mu G \lambda_J^2, \quad (36)$$

где R – газовая постоянная, эрг·град⁻¹·моль⁻¹; T – температура газовой среды протопланетного диска, °К; μ – молекулярный вес газовой среды

диска, г/моль; γ – отношение C_p/C_v газовой среды диска (показатель адиабаты); G – гравитационная постоянная, $\text{см}^3/(\text{г}\cdot\text{сек}^2)$.

Если на пылевые частицы приходится по массе около 1,5% вещества солнечного состава, то молекулярный вес для такой среды равен примерно 2,53 г/моль, а показатель адиабаты – 1,43 [50]. Согласно современным представлениям температура газовой среды, например, для зоны Земли в начальной стадии эволюции протопланетного диска составляла $T \sim 300^0\text{К}$, а плотность $\sim 3 \cdot 10^{-9}$ г/см³ [16]. Усредняя данные по температурам для всех зон, получим среднюю температуру диска в его экваториальной плоскости $T \approx 150^0\text{К}$. В наших расчетах укладывалось девять длин волн (по числу планет Солнечной системы с учетом пояса Астероидов) на расстоянии, равном ширине протопланетного диска. Отсюда следует: $\lambda = \lambda/r_{ex} = 1/9$. Для оценки критической плотности полагаем:

$$\lambda > \lambda_J, \lambda_J \approx r_{ex}/9 \approx 6,57 \cdot 10^{13} \text{ см.} \quad (37)$$

$T \approx 150^0\text{К}$, $\gamma = 1,43$, $\mu = 2,53$ г/моль, $G = 6,673 \cdot 10^{-8}$ $\text{см}^3/(\text{г}\cdot\text{сек}^2)$, $r_{ex} = 0,591 \cdot 10^{15}$ см, $R = 8,31434 \cdot 10^7$ эрг·град⁻¹·моль⁻¹.

Подставляя значения переменных и параметров в формулу (36), находим критическую плотность:

$$\rho_{o,кр} \approx 7,7 \cdot 10^{-11} \text{ г/см}^3. \quad (38)$$

Данное значение критической плотности примерно на порядок больше приведенного в работе [8]. Это объясняется тем, что в настоящей оценке значение λ_J приблизительно в 4 раза меньше значения λ_J , взятого в работе [8] равным полуширине протопланетного диска Солнца.

Принципиально важное значение имеет сопоставление критической плотности диска, полученной в рамках модели крупномасштабных неустойчивостей [2, 3, 5], с результатами теории образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [16, 15]. Критическая плотность (38), при которой возникает крупномасштабная гравитационная неустойчивость, примерно на четыре порядка меньше критической плотности ($\rho_{кр} \approx 3 \cdot 10^{-7}$ г/см³), полученной в рамках теории [16, 15], и на два порядка меньше плотности ($\sim 3 \cdot 10^{-9}$ г/см³) газовой среды в зоне Земли [16].

Таким образом, представленная оценка критической плотности дает основание утверждать, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца необходимо принимать во внимание возможное развитие крупномасштабных неустойчивостей, как неустойчивостей, которые зарождаются при наименьшей критической плотности из всех возможных. При этом длина волны крупномасштабных неустойчивостей может быть сопоставима с расстоянием между планетами.

Заключение

Настоящая глава посвящена гравитационной неустойчивости бесконечной однородной изотропной газовой среды. Изучались с помощью численного моделирования как гравитационные неустойчивости в виде волн, так и одиночные гравитационные неустойчивости.

Волны гравитационной неустойчивости в этой среде описываются теорией Джинса [70]. Образование такого типа гравитационных неустойчивостей в однородной изотропной среде дает основание предполагать, что подобные структуры могут появляться и в гравитирующих средах более сложной конфигурации. Действительно, например, в протопланетных дисках предсказано появление протопланетных колец [45, 28, 29, 3, 8 – 10], которые можно трактовать как результат гравитационной неустойчивости в виде волны в протопланетном диске [29, 79].

В исследованиях динамики одиночных начальных возмущений плотности было установлено, что возникающие в однородной среде при конечной температуре одиночные неустойчивости не представляется возможным описать в рамках модели Джинса [70], так как область неустойчивых начальных возмущений распространяется и на область $\lambda < \lambda_J$. Характерные пространственные размеры одиночных возмущений плотности в «холодной» однородной среде не изменяются во времени, а в среде при конечной температуре увеличиваются со временем.

В этой главе изучалось прохождение звуковых колебаний плотности через однородную гравитирующую среду при конечной температуре. Установлено подавление звука гравитационными неустойчивостями в области $\lambda > \lambda_J$.

Проведены численные расчеты гравитационной неустойчивости однородной изотропной газовой среды при начальном ее возмущении в виде радиальной волны, максимумы которой совпадают с положением планет Солнечной системы.

По результатам расчетов проведена оценка критической плотности протопланетного диска Солнца. В рассмотренном приближении (без учета вращения) показано, что критическая плотность (23) протопланетного диска Солнца, при которой возникает крупномасштабная гравитационная неустойчивость, примерно на четыре порядка меньше критической плотности ($\rho_{кр} \approx 3 \cdot 10^{-7}$ г/см³), полученной в рамках теории [16, 15].

В ходе данных исследований также проводилась отработка методов численного моделирования с тем, чтобы использовать их в гравитирующих средах более сложной конфигурации.

Глава VII. К вопросу о модели образования планетных систем звезд солнечного типа

Данная глава написана на основе работ [14, 33, 129]. В ней представлена модель протопланетных колец - модель образования планетных систем звезд солнечного типа, в основе которой лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (протопланетных газопылевых колец) в протопланетных дисках звезд. Приведены результаты сравнения основных теорий и моделей образования планетных систем звезд солнечного типа с данными астрофизических наблюдений протопланетных дисков. Показано, что данные астрофизических наблюдений подтверждают справедливость модели протопланетных колец. В модели протопланетных колец дан теоретический прогноз по астрофизическим наблюдениям эволюции структур газопылевых колец ряда протопланетных дисков звезд. Сформулированы предложения по дальнейшей разработке численных алгоритмов эволюции протопланетных дисков звезд солнечного типа, включающей все стадии эволюции, в том числе и образование протопланет.

Введение

Данная глава посвящена проблеме образования планетных систем звезд солнечного типа.

К настоящему времени теория твердотельной аккумуляции - теория образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [15, 16] является общепризнанной. Альтернативными моделями являются модели образования планетных систем из газопылевых сгущений путем образования протопланет [19, 27 – 32]. В настоящей главе мы будем следовать одной из таких моделей, а именно: модели протопланетных колец - модели образования планетных систем звезд солнечного типа, в основе которой лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (протопланетных газопылевых колец) в протопланетном диске, предложенной в работах [27, 3, 5 – 10, 33].

1. Основные положения модели протопланетных колец - модели образования планетных систем звезд солнечного типа

Впервые основные положения модели протопланетных колец были сформулированы в 2006 г. в работе [3] (см. глава I, подраздел 5.1). В то время была до конца не ясна причина образования протопланетных колец. В настоящее время эта модель может быть представлена в полном объеме:

1. В модели протопланетных колец предполагается, что звезда солнечного типа и ее планетная система образовались из вращающейся протозвездной газопылевой туманности в результате единого динамического процесса ее сжатия – коллапса, аналогично, как это было предсказано Кантом [18] и Лапласом [19]. Этот процесс можно условно разделить на две последовательные стадии: образование звезды с формирующимся околозвездным газопылевым облаком и образование протопланетного газопылевого диска с последующим образованием планет.

Рассмотрим эволюцию протозвездной газопылевой туманности на примере протосолнечной туманности.

2. Протосолнечная туманность в начальном ее состоянии представляла собой вращающееся газопылевое облако с плотностью $\sim 10^{18}\text{--}10^{19}$ г/см³; температурой ~ 10 °К; массой, приблизительно равной массе Солнца [100, 118, 49, 48]. Среда протосолнечной туманности на $\sim 98\%$ по массе состояла из молекулярного водорода ($\sim 70\%$) и гелия ($\sim 28\%$). Массовая доля пыли составляла $\sim 1\%$ [100, 118, 49, 48].

Облако протосолнечной туманности удерживалось в равновесии собственной гравитацией. Известно, что в таком состоянии изолированное облако гравитационно устойчиво [79].

Каким образом облако перешло в гравитационно неустойчивое состояние? Мы придерживаемся общепринятой точки зрения, заключающейся в том, что произошло внешнее воздействие (возмущение), которое перевело протосолнечную туманность в состояние гравитационной неустойчивости и привело ее к последующему коллапсу. Возможны несколько явлений, которые могли привести к таким внешним возмущениям: вспышка сверхновой [119]; сжатие протосолнечной туманности при ее прохождении через спиральный рукав [34]; образование массивной звезды вблизи протосолнечной туманности [120].

Это была первая гравитационная неустойчивость среды при образовании Солнечной планетной системы.

3. Формирование Солнца как звезды произошло за промежуток времени, равный примерно 10^6 лет [46]. Солнце за этот период (первая стадия) аккумулировало около 90% своей массы. В это же время (одновременно с формированием Солнца) происходило образование околозвездного облака, которое являлось аккреционным, т.е. существовал поток газопылевой среды из облака на Солнце. На этой стадии в основном произошло не только перераспределение массы между околозвездным облаком и Солнцем, но и перераспределение между этими объектами момента количества движения. При выходе Солнца на главную последовательность оказалось, что масса протосолнечной туманности примерно на 99% сосредоточена на Солнце, а момент количества движения примерно на 98% связан с протопланетным диском.

Наиболее приемлемым механизмом, ответственным за перераспределение момента количества движения между Солнцем и протопланетным диском, является турбулентная вязкость [121, 122].

4. Вторая стадия формирования Солнечной системы соответствует стадии Т Тельца до выхода Солнца на главную последовательность [46, 45, 49, 48]. К началу второй стадии аккреционный поток резко уменьшается, и околосолнечное газопылевое облако отделяется от Солнца, образуя протопланетный газопылевой диск. Этот процесс объясняется тем, что среда протосолнечной туманности изначально вращается. При падении слоя вещества диска на Солнце в силу сохранения его момента количества движения скорость вращения этого слоя возрастает. Когда центробежная сила этого слоя сравнивается с силой притяжения Солнца, слой вещества диска останавливается. К моменту отделения околосолнечного облака от Солнца вокруг него может сохраниться лишь незначительная по массе прозрачная часть аккреционной оболочки. Более значительная часть околосолнечного облака в виде тора находится за пределами прозрачной части аккреционной оболочки и представляет собой протопланетный диск, окружающий звезду. На второй стадии идет более медленное формирование протопланетного диска, и эта стадия по ее продолжительности оценивается примерно в $10^6 - 10^7$ лет [46, 48, 45].

На начальной стадии эволюции протопланетного диска, пока процессы концентрации его пылевой компоненты не привели к существенному изменению среды диска, состояние его газопылевой среды можно с достаточной точностью описывать уравнением состояния идеального газа [16, 8 – 10].

5. Плотность протопланетного диска, образующегося в результате коллапса, резко возрастает по сравнению с плотностью протосолнечной туманности. Например, планетная система Земля–Луна образовалась из зоны протопланетного диска Солнца, находящейся на расстоянии около 1 а.е. от Солнца. Средние параметры среды этой зоны диска следующие: плотность $\sim 3 \cdot 10^{-9}$ г/см³, температура ~ 300 °К [16]. Видно, что в результате сжатия протосолнечной туманности плотность протопланетного диска увеличилась примерно на десять порядков по сравнению с плотностью протосолнечной туманности. Именно столь значительное увеличение плотности протопланетного диска привело его в состояние гравитационной неустойчивости [14, 8 – 10].

6. В результате коллапса протосолнечной туманности вокруг Солнца образовался протопланетный диск в состоянии гравитационной неустойчивости. Это вторая гравитационная неустойчивость среды при коллапсе протосолнечной туманности. Для того чтобы в среде диска начала развиваться гравитационная неустойчивость, необходимы соответствующие возмущения среды диска [29, 79, 12]. Такие возмущения могут зарождаться, например, при резком уменьшении аккреционного

потока из диска на Солнце. В этом случае возмущения будут иметь вид концентрических (радиальных) возмущений, и в результате гравитационной неустойчивости среды диска из них образуются протопланетные газопылевые кольца, которые и соответствуют зонам планет Солнечной системы [27].

7. Протопланетное газопылевое кольцо при трехмерном рассмотрении, как правило, гравитационно неустойчиво и фрагментирует, в общем случае, на несколько газопылевых сгущений, которые, взаимодействуя между собой, сталкиваясь и объединяясь, и приводят к образованию протопланеты и ее спутников (спутника) [27, 10].

8. Процесс образования планетного тела происходит внутри протопланеты путем перемещения ее среды под действием собственного гравитационного поля протопланеты в центральную ее часть, где и формируется тело планеты.

9. Газовая составляющая протопланет земной группы выносятся из них солнечным ветром, когда Солнце находится на стадии Т Тельца. По разным источникам информации продолжительность солнечного ветра несколько различается [34, 46, 48], но, вероятно, ее можно оценить равной примерно 10^6 лет.

10. В процессе образования Солнечной планетной системы основная масса газопылевого вещества протопланетного диска аккумулируется в протопланетах и их спутниках. Однако часть этого вещества оказывается вне этой системы. Поведение вещества, которое оказалось вне протопланет и их спутников, происходит согласно законам теории (модели) твердотельной аккумуляции, разработанной и подробно исследованной О.Ю. Шмидтом, В.С. Сафроновым и их учениками [15, 16].

Данные положения модели протопланетных колец представляют собой физическую модель образования планетных систем звезд солнечного типа, построенную на основании исследований [27, 3, 5 – 10, 33], включающих также и численные расчеты на основе приближенных математических моделей начального этапа эволюции протопланетного диска [12, 3, 5 – 7].

Так как обоснование модели протопланетных колец дано в работах [27, 3, 5 – 10, 33], то в настоящей главе мы ограничимся только кратким описанием наиболее важных аспектов, подтверждающих достоверность этой модели.

Сопоставление модели протопланетных колец с моделью твердотельной аккумуляции планет [15, 16] показывает, что в модели твердотельной аккумуляции планет для объяснения образования планетезималей также было предложено использовать принцип гравитационной неустойчивости среды протопланетного диска. Основное расхождение моделей при использовании этого принципа заключается только в размерах длины волны гравитационной неустойчивости среды

диска. Длина волны в модели твердотельной аккумуляции составляет примерно $4 \cdot 10^7$ см, а в модели протопланетных колец - примерно $6 \cdot 10^{12}$ см. В модели твердотельной аккумуляции гравитационная неустойчивость на начальной стадии эволюции протопланетного диска, т.е. фактически в газовой среде, исключается [15, 16].

В процессе коллапса (сжатия) протопланетной туманности, произошедшего в результате ее первоначальной гравитационной неустойчивости, плотность ее среды возрастает. В этом случае, по логике гравитационной неустойчивости по Джинсу, критическая длина волны потенциальной гравитационной неустойчивости среды туманности уменьшается, начиная от $\sim 1,6 \cdot 10^{17}$ см. Очевидно, что в протопланетном диске Солнца критическая длина волны Джинса достигает размеров, сопоставимых с межпланетными расстояниями, значительно раньше, чем начинается процесс образования планетезималей, который соответствует критической длине волны Джинса на пять порядков меньше межпланетных расстояний. Это фактически было показано в работах [8 – 10, 12].

Таким образом, протопланетные газопылевые кольца возникают значительно раньше, чем зарождаются планетезимали. Отсюда следует, если протопланеты образуются из протопланетных колец, то твердотельная аккумуляция не имеет отношения к образованию планет. Но отсюда не следует, что принципы твердотельной аккумуляции неверны (не имеют отношения к процессам, происходящим в Солнечной планетной системе). Эти принципы верны, но они начинают работать значительно позднее – по-видимому, после образования протопланетных колец и протопланет.

Несомненный интерес представляет модель Энеева–Козлова [30]. В этой модели также не используется крупномасштабная гравитационная неустойчивость в ее явном виде, но в численных расчетах она математически возникает в виде протопланетных колец, состоящих из газопылевых сгущений [52]. Анализ показывает, что модель протопланетных колец на этапе после фрагментации колец имеет много общего с моделью Энеева–Козлова и их идеей образования протопланет [30, 52].

Достигнутый уровень разработки модели протопланетных колец позволяет в настоящее время провести сравнение теоретических выводов модели с результатами астрофизических наблюдений, а также дать теоретический прогноз по астрофизическим наблюдениям протопланетных дисков.

2. Краткий аналитический обзор избранных работ по астрофизическим наблюдениям протопланетных дисков звезд солнечного типа

Результаты астрофизических наблюдений за молодыми звездами солнечного типа подтверждают достоверность основополагающей гипотезы о совместном образовании звезды солнечного типа и ее планетной системы из единой протозвездной (протосолнечной) газопылевой туманности, а также достоверность следующих важных гипотез [123, 100, 124, 118, 34]:

- процесс планетообразования начинался в протопланетном газопылевом диске;
- закон вращения протопланетных газопылевых дисков близок к закону Кеплера.

Астрофизические исследования последних лет привели к неожиданному открытию газопылевых колец в протопланетных дисках звезд [35 – 40], которые были предсказаны при разработке модели протопланетных колец [3, 4, 5, 8 – 10, 11, 12, 13]. Изображения протопланетных дисков при астрофизических наблюдениях были получены с высокой степенью разрешения. Таким образом, появилась реальная возможность экспериментальной проверки достоверности теоретических моделей образования планетных систем как Солнца, так и других звезд солнечного типа.

Рассмотрим результаты астрофизических исследований с точки зрения двух основных моделей образования планетных систем: модели твердотельной аккумуляции [15, 16] и модели протопланетных колец [27].

Протопланетные диски на полученных изображениях представляют собой яркие кольцевые газопылевые структуры, разделенные темными промежутками, в которых плотность газопылевого вещества существенно снижена [35, 38 – 40].

Как известно [27]), в классической теории твердотельной аккумуляции [15, 16] отсутствует явление, наблюдаемое в астрофизических исследованиях в виде кольцевых газопылевых структур в протопланетных дисках звезд солнечного типа.

В модели протопланетных колец [27] газопылевые кольцевые структуры в протопланетных дисках, предсказанные в работах [3, 4, 5, 8 – 10, 11, 12, 13], были названы протопланетными кольцами [3]. Возникают они в рамках этой модели естественно и красиво в результате гравитационной неустойчивости протопланетного диска. Более того, в работе [10] в 2014 году было высказано предположение, что такие структуры могут быть открыты в протопланетных дисках звезд: «К сожалению, мы не можем увидеть прошлое: как происходило (или не происходило) образование протопланетных колец. Единственная надежда

экспериментального подтверждения – это наблюдение образования протопланетных колец в протопланетном диске другой звезды».

Проанализируем более детально возможную связь «ярких» колец, которые наблюдаются в протопланетных дисках звезд в астрофизических исследованиях, с протопланетными кольцами модели [27].

В работах [8 – 10, 14] было показано, что с высокой степенью вероятности протопланетный диск Солнца в начальной стадии своей эволюции был гравитационно неустойчивым по отношению к крупномасштабным возмущениям с длиной волны, сравнимой с расстоянием между планетами. Так как наблюдаемые в астрофизических исследованиях яркие кольца состоят из пылевых частиц и газа, то в рассматриваемой модели [27] естественно предположить, что эти кольца являются протопланетными газопылевыми кольцами, образовавшимися в результате гравитационной неустойчивости протопланетного диска звезды солнечного типа. В процессе гравитационной неустойчивости газопылевая среда перемещается из пространства диска, соответствующего темным промежуткам, в яркие кольца, создавая структуру ярких газопылевых колец с темными промежутками между ними. Таким образом, в этом процессе плотность газопылевой среды в ярких кольцах возрастает, а в темных промежутках между ними падает [12, 13].

Для дальнейшего сопоставления модели протопланетных колец с результатами астрофизических исследований необходимо привести более подробные данные о протопланетных газопылевых кольцах и их эволюции в рамках этой модели.

Протопланетные кольца возникают в гравитационно неустойчивой среде протопланетного диска в результате возмущения, вызванного предположительно достаточно резким уменьшением аккреционного потока газопылевого вещества из протопланетного диска на звезду [27, 10]. В начальные моменты проявления гравитационной неустойчивости в среде диска возникает радиальная стоячая волна плотности [12, 8 – 10]. По мере развития гравитационной неустойчивости газопылевая среда диска из областей с пониженной плотностью перемещается в области с повышенной плотностью. Следует подчеркнуть, что при этом процессе перемещаются не только пылевые частицы, но и газовая компонента среды. При дальнейшем развитии гравитационной неустойчивости области диска с повышенной плотностью среды образуют газопылевые кольца, а в промежутках между ними плотность газопылевой среды продолжает уменьшаться. В процессе эволюции протопланетные кольца сжимаются, а затем в силу их гравитационной неустойчивости [10] фрагментируют (разбиваются) на газопылевые сгущения.

Таким образом, можно выделить две стадии в эволюции протопланетных колец: первая – это стадия зарождения и развития протопланетных колец, на которой протопланетные кольца имеют осевую

симметрию; вторая – это стадия фрагментации протопланетных колец (распада колец на газопылевые сгущения), на которой протопланетные кольца имеют существенно неосесимметричную геометрию (knotty rings).

Протопланетные кольца в заключительной фазе первой стадии своей эволюции (перед фрагментацией колец на газопылевые сгущения) представляют собой осесимметричные тороидальные газопылевые кольца, плотность среды в которых возрастает от поверхности кольца к его центральной линии [3, 4, 5, 6, 7]. В промежутках между кольцами плотность газопылевой среды может достигать предельно низких значений.

На второй стадии эволюции протопланетное кольцо может состоять из отдельных газопылевых сгущений, которые взаимодействуя между собой, сталкиваясь и объединяясь, и приводят к образованию протопланеты и ее спутников (спутника).

Таким образом, в модели протопланетных колец протопланеты формируются из протопланетных колец. Поэтому на первой стадии эволюции протопланетных колец (перед фрагментацией колец на газопылевые сгущения) между ними не может быть никаких протопланет (планет).

Так как стадии эволюции, в которых находятся наблюдаемые околозвездные облака (протопланетные диски звезд), отличаются друг от друга, то, в принципе, есть возможность наблюдать протопланетные диски различных звезд на разных стадиях их эволюции: на стадии зарождения протопланетных колец, на стадии сжатия протопланетных колец, на стадии фрагментации протопланетных колец и, наконец, на стадии формирования протопланеты.

Для проверки достоверности модели протопланетных колец [27] при проведении астрофизических наблюдений требуется получение достаточно подробных данных о фрагментации протопланетных колец на газопылевые сгущения и дальнейшем образовании из них протопланет. Это объясняется тем, что не очевиден факт образования протопланеты после распада протопланетного кольца на газопылевые сгущения. Вероятно, первыми работами, в которых теоретически был получен результат образования протопланеты из кольца газопылевых сгущений, являются работы Т. М. Энеева и Н. Н. Козлова [107, 51, 30, 52]. В работе А.М. Кривцова и Е.М. Галимова с соавторами [125] также было показано, что протопланетное кольцо при превышении пороговой концентрации частиц распадается на фрагменты (кластеры) с последующим образованием одного или двух пылевых объектов.

Протопланетное кольцо не является независимым образованием. В системе протопланетных колец оно гравитационно взаимодействует со всеми кольцами. Фрагментация протопланетного кольца и дальнейшая его эволюция зависят как от гравитационной устойчивости самого кольца, так

и от воздействий на него со стороны других колец. Показателен пример из Солнечной планетной системы. Известно, что между орбитами Марса и Юпитера расположен пояс астероидов. С точки зрения модели протопланетных колец пояс астероидов – это протопланетное кольцо, из которого не смогла образоваться протопланета. Одна из возможных причин такой эволюции кольца – влияние Юпитера. Таким образом, вероятно, не существует строгой определенности (или очередности) при образовании протопланет из протопланетных колец: все определяется сложным гравитационным взаимодействием в системе (структуре) протопланетных колец.

Перейдем к рассмотрению результатов астрофизических исследований протопланетных дисков звезд.

Основные результаты астрофизических наблюдений, представленные в работах [35, 38 – 40], в общем виде могут быть сведены к следующим:

- все исследованные протопланетные диски имели структуру ярких колец с темными промежутками между ними;

- в ярких кольцах плотность пылевой компоненты повышена, в темных промежутках плотность пылевой компоненты снижена, а в отдельных случаях практически отсутствует;

- ширина ярких колец и темных промежутков между ними различается у разных дисков и изменяется в широком диапазоне от единиц а.е. до десятков а.е.;

- структура ярких колец протопланетных дисков меняется от осесимметричных до фрагментированных на отдельные газопылевые сгущения;

- в работе [38] целенаправленный поиск массивных протопланет во внешних промежутках между яркими кольцами дал отрицательный результат;

- в работе [35] обнаружен компактный источник излучения в середине второго промежутка (кольцевого зазора), который идентифицируется с нахождением в этом месте протопланеты с массой, равной 0,6 массы Юпитера.

В рассмотренных работах высказывается точка зрения, что наблюдаемые структуры в виде ярких газопылевых колец с темными промежутками между ними являются закономерными явлениями в эволюции протопланетных дисков звезд.

Результаты исследований, как правило, анализируются в представлениях теории твердотельной аккумуляции [15, 16]. Так как наблюдаемые явления в рамках этой теории объяснить не представляется возможным, то предлагаются различные дополнительные гипотезы (механизмы) для объяснения этих результатов, но при этом авторы остаются в рамках представлений теории твердотельной аккумуляции. Предпринимаются попытки объяснить наблюдаемые структуры, используя

не полную модель твердотельной аккумуляции, а лишь отдельные ее положения. Следует отметить, что модель твердотельной аккумуляции создавалась многими учеными в рамках определенных предпосылок и является хорошо аргументированной при сделанных предположениях. В случаях, когда используется только одна из предпосылок этой модели для объяснения наблюдаемых явлений, то, как правило, это только запутывает общую картину явления. Так, например, темные промежутки между кольцами интерпретируют как пространство, которое образовавшаяся протопланета «очистила» от пыли в процессе своего формирования. В данном случае сразу возникает один из вопросов: в силу каких законов пространство протопланетного диска так резко оказалось разделенным на зоны, в одних из которых протопланеты уже образовались, а в соседних (в газопылевых кольцах) процесс образования находится только в самой начальной стадии эволюции протопланетного диска? Ответ не известен.

В основе же модели протопланетных колец лежит фундаментальный принцип гравитационной неустойчивости (в работах [3, 4, 5, 8 – 10, 11, 12, 13] этот принцип используется в форме Джинса [70]). В результате действия этого принципа, с одной стороны, на начальном этапе эволюции протосолнечной туманности происходит ее коллапс (сжатие) с образованием звезды, а, с другой стороны, на этапе эволюции протопланетного диска наблюдается в некотором смысле противоположное явление – распад протопланетного диска на протопланетные кольца, из которых в дальнейшем образуются протопланеты.

В плане анализа результатов астрофизических наблюдений на предмет проверки достоверности моделей (гипотез) образования планетных систем звезд солнечного типа обращает на себя внимание работа Carlos Carrasco-González и др. [38]. В этой работе авторы выдвинули предположение, что темные промежутки между газопылевыми кольцами возникают не в результате образования в пространстве между кольцами протопланет, как это обычно предполагают, а существуют альтернативные механизмы образования «темных и светлых концентрических колец» в протопланетных дисках звезд. Авторы не указывают, какие именно альтернативные механизмы они имеют в виду (вероятно, работы [3, 4, 5, 8 – 10] им были не известны). Далее по предлагаемому авторами сценарию происходит образование протопланет непосредственно из «ярких плотных колец» диска звезды. При этом сценарии результаты астрофизических наблюдений протопланетного диска звезды HL Tau интерпретируются авторами, как начальная фаза образования протопланет из «ярких плотных колец». Как нетрудно видеть, предлагаемый авторами работы [38] сценарий образования планетных систем звезд солнечного типа в своих основных чертах совпадает с

эволюцией протопланетного диска в рамках модели протопланетных колец.

Результаты сравнения астрофизических наблюдений [35, 38 – 40] и теоретических работ [3, 4, 5, 8 – 10, 11, 12, 13, 27] дают основания полагать, что наблюдаемая структура протопланетных дисков в виде ярких колец с темными промежутками между ними подтверждает основные положения модели протопланетных колец [27].

В рамках этой модели результаты астрофизических наблюдений, представленные в работах [35, 38 – 40], можно классифицировать в следующей последовательности по отношению к эволюции структуры протопланетных колец:

- структура протопланетных колец диска звезды TW Нуа в астрофизических наблюдениях работы [39] соответствует первой стадии эволюции протопланетных колец (это стадия эволюции перед фрагментацией протопланетных колец); в этом случае в темных промежутках между кольцами не следует ожидать присутствия протопланет;

- структура протопланетных колец диска звезды HL Тау в астрофизических наблюдениях работы [38] соответствует начальной фазе второй стадии эволюции протопланетных колец: зафиксирован разрыв первого протопланетного кольца с образованием одного газопылевого сгущения; в этом случае в темных промежутках между кольцами также не следует ожидать присутствия протопланет;

- структура протопланетных колец диска звезды HD 169142 в астрофизических наблюдениях работы [35] соответствует второй стадии эволюции протопланетных колец (стадии фрагментации протопланетных колец): зафиксирована фрагментация яркого газопылевого протопланетного кольца на два газопылевых сгущения; в этом случае следует ожидать, что в темных промежутках между яркими кольцами могут быть обнаружены протопланеты, которые образовались из ранее находившихся в этих местах протопланетных колец [33];

- структура протопланетных колец диска AS 209 звезды Ophiuchus в астрофизических наблюдениях работы [40], вероятно, соответствует более раннему периоду второй стадии эволюции, по сравнению со структурой, наблюдаемой в работе [35]; в этом случае, по-видимому, следует ожидать обнаружения асимметрии в некоторых газопылевых кольцах диска AS 209 при более детальных исследованиях и, возможно, открытия протопланет в темных промежутках;

- при сравнении результатов работ [38] и [39] обращает на себя внимание, что протопланетный диск TW Нуа на порядок старше диска HL Тау. Отсюда следовало ожидать, что наблюдаемая структура ярких колец с темными промежутками между ними в диске TW Нуа будет находиться на более поздней стадии эволюции, чем в диске HL Тау. В действительности

наблюдается противоположная картина: структура ярких колец с темными промежутками между ними в диске TW Нуа соответствует более ранней стадии эволюции, чем в диске HL Тау. Протопланетные кольца в диске TW Нуа, вероятно, начинают только зарождаться, поэтому контраст между яркими и темными кольцами выражен незначительно. Так как плотность среды диска TW Нуа возрастает с уменьшением радиуса, то гравитационная неустойчивость во внутренних кольцах наступает раньше, и они формируются с опережением по времени. Более глубокий первый промежуток перед первым ярким кольцом диска TW Нуа в модели протопланетных колец, вероятно, обусловлен именно этим обстоятельством. Вопрос: почему гравитационная неустойчивость в диске TW Нуа реализовалась значительно позднее, чем в диске HL Тау, на данный момент остается открытым.

В работе [10] было высказано предположение, что гравитационная неустойчивость протопланетного диска и образование протопланетных колец могут возникнуть и на стадии активного аккреционного процесса. Астрофизические наблюдения протопланетных дисков звезд [38] подтверждают справедливость этого предположения.

3. Математическое моделирование эволюции протопланетного диска звезд солнечного типа в модели протопланетных колец

Следует остановиться на вопросе о проведении математического моделирования физических процессов в рамках модели протопланетных колец. С позиций этой модели проводить математическое моделирование взаимодействия планета-диск, как это было сделано, например, в работе [40], не имеет смысла: в модели протопланетных колец известен механизм образования газопылевых колец – это гравитационная неустойчивость протопланетного диска [27]). В модели протопланетных колец целесообразно проводить математическое моделирование образования структуры гравитационно неустойчивых протопланетных колец и дальнейшей их эволюции (фрагментации протопланетных колец, образования протопланет), включая и математическое моделирование взаимодействий протопланета (протопланеты) - система гравитационно неустойчивых протопланетных колец.

Так, например, в работах [3, 5 – 7] (см. глава I) было проведено исследование протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции. Для этой цели была разработана численная модель [3] на основе метода численного решения двумерных газодинамических течений в областях сложной формы с подвижными границами, разработанного С.К. Годуновым и А.В. Забродиним с соавторами. Уравнение состояния среды диска в этих расчетах представляло собой уравнение идеального газа, в

котором пылевая компонента учитывалась только в виде изменения молекулярного веса газа, что допустимо на этом этапе эволюции диска.

Для проведения численного моделирования эволюции протопланетного диска, включающей как начальную стадию зарождения гравитационной неустойчивости в протопланетном диске, так и возникновение протопланетных колец, их развитие, фрагментацию колец и образование протопланет, необходима численная трехмерная модель эволюции протопланетного диска с двухфазным уравнением состояния, адекватно описывающим пылевую компоненту среды диска.

4. Результаты трёхмерного численного моделирования эволюции протопланетного диска

Численная 3D модель эволюции протопланетного диска описывается нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрических координатах r, φ, z . Учитывается влияние гравитационного потенциала звезды Φ_s , собственного гравитационного потенциала диска Φ_d , излучения Q_{rad} и вязкости диска σ .

Вычисления проводились в безразмерных переменных (4.4.1), переход к ним описан в [126]. В качестве основных масштабных единиц выбраны масса звезды и характерный пространственный размер задачи. В приведенных расчетах использовались масштабные единицы для солнечной системы: $m_0 = 1,989 \cdot 10^{33}$ г, $r_{0d} = 4,52 \cdot 10^{14}$ см, диапазон температур был $50^\circ K - 150^\circ K$.

При выборе начального состояния важно, чтобы конфигурация диска была стационарной. Известны аналитические равновесные конфигурации идеального политропного газа, не учитывающие самогравитацию.

Реализовано два способа численного моделирования стационарного состояния гравитирующего диска:

- первый способ – численное решение стационарной системы уравнений по заданной плотности гравитирующего диска, см. [126],
- второй способ - итерационный алгоритм решения системы нелинейных уравнений, описанный в [128], аналогичный методу «согласованного поля» [55]. Здесь n – номер итерации.

Плотность, масса и гравитационный потенциал стационарного состояния увеличивались в несколько раз по сравнению с конфигурацией, не учитывающей гравитацию диска. Вычислялся параметр Тоомре Q_T , определяющий гравитационную устойчивость стационарного состояния.

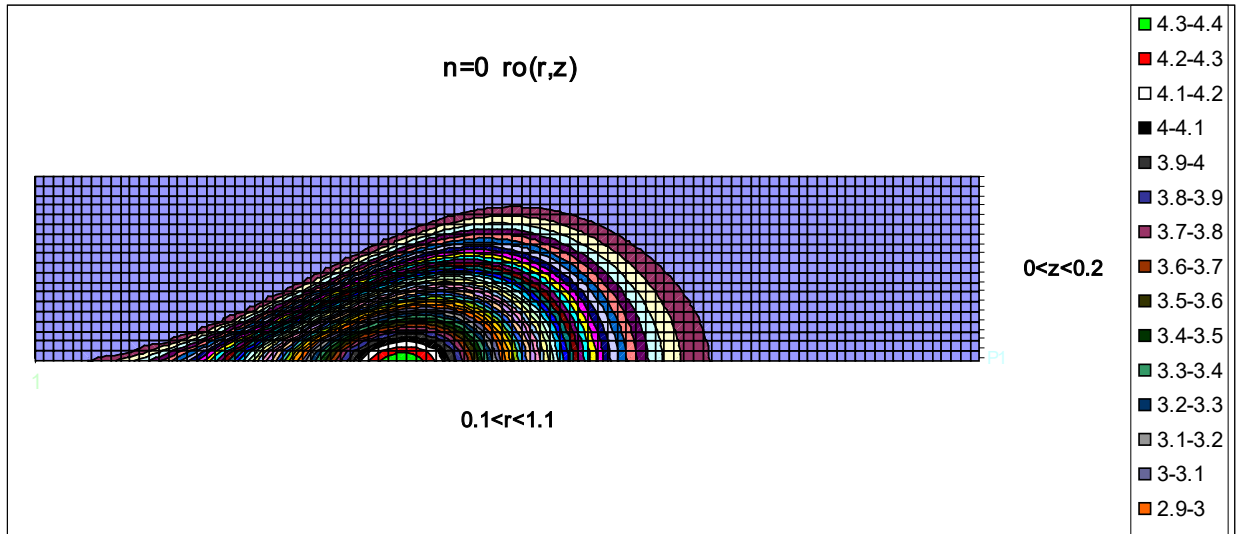


Рис. 7.1. Устойчивая стационарная конфигурация газового диска без самогравитации, $T = 130^\circ$, $M_d = 0,047$, $Q_T > 3,63$

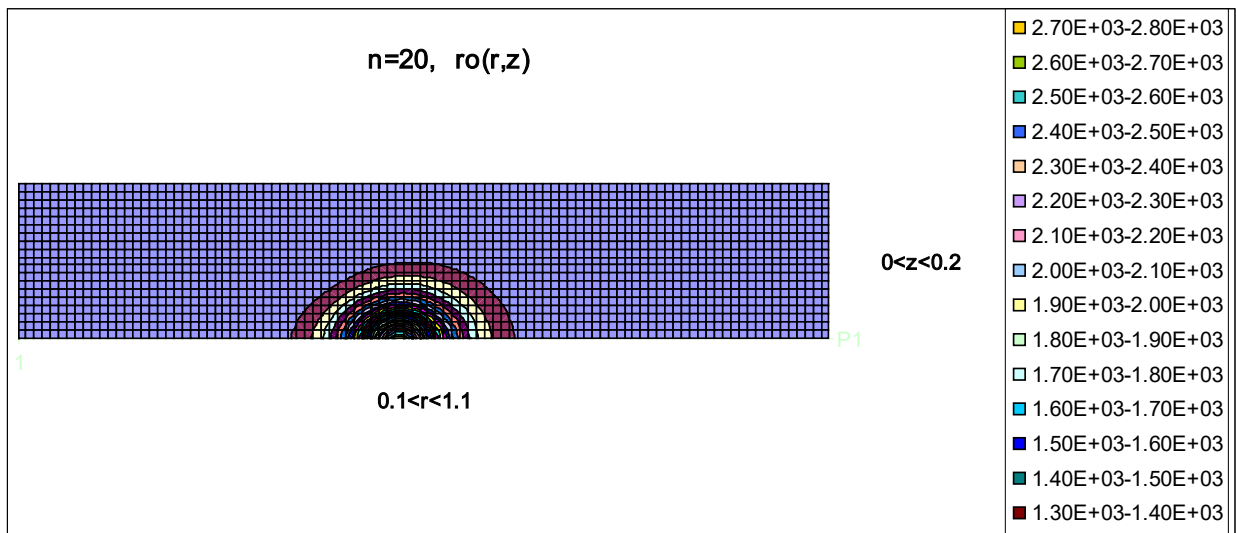


Рис. 7.2. Неустойчивая стационарная конфигурация гравитирующего газового диска, $T = 130^\circ$, $M_d = 7,43$, $Q_T < 0,12$

Изучалось влияние излучения и вязкости газа на конфигурацию диска [127]. Включение излучения и вязкости понижает внутреннюю энергию диска, то есть температуру, что приводит к росту плотности и гравитационного потенциала диска. А это условие необходимо для фрагментации диска.

На рисунке 7.3 представлены графики плотности вдоль радиуса в центральном сечении. Кривая 1 – это начальное распределение, кривая 2 – это результат расчета только с потенциалом звезды Φ_s , кривая 3 – это результат расчета с Φ_s и собственным потенциалом диска Φ_d , кривая 4 –

это результат расчета с Φ_s , Φ_d , и Q_{rad} , кривая 5 – это результат расчета с Φ_s , Q_{rad} , и σ (Sigma).

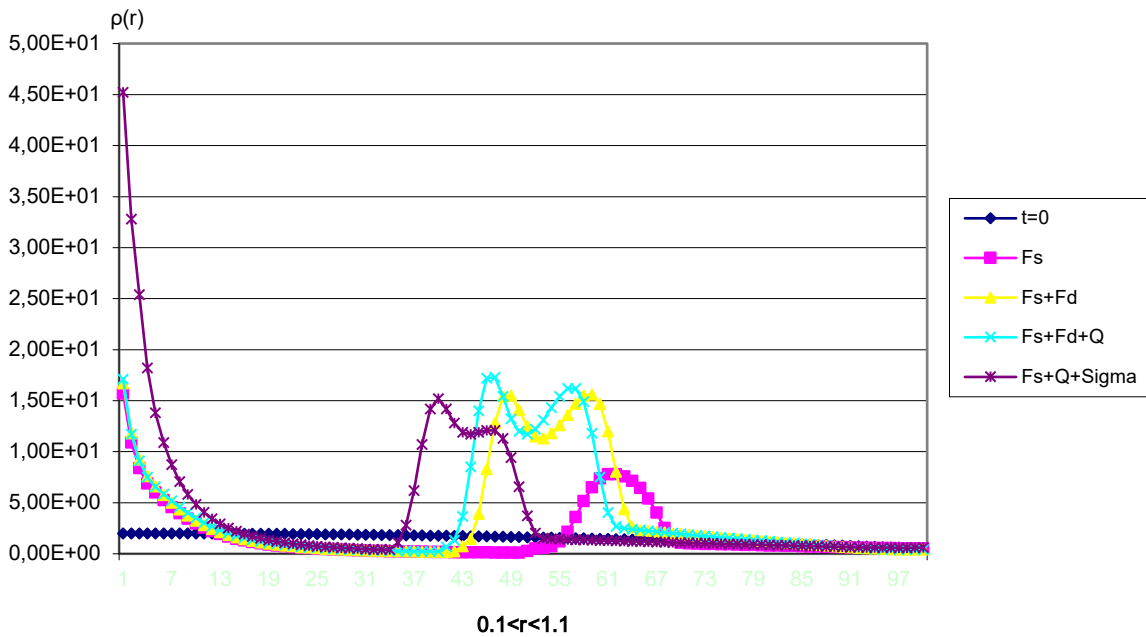


Рис. 7.3. Значения плотности $\rho(r, 0, 0)$, $t = 1$

Проведено численное моделирование и сравнение гидродинамической и гравитационной неустойчивости протопланетного диска [161,162]. Сравнивались конфигурации аккреционного (без гравитации) диска и протопланетного гравитирующего диска.

Моделировалась динамика малых возмущений во вращательном сдвиговом потоке. Развитие начальных азимутальных возмущений скорости вращения приводит к образованию спиральных рукавов плотности, а самогравитация увеличивает ее локальные максимумы, создает гравитационную неустойчивость и фрагментацию диска.

На начальном этапе картины течения газа в протопланетном диске близки течениям в аккреционных дисках и сохраняются приблизительно до безразмерного времени $t = 2$. Но вследствие внешней аккреции и свободных граничных условий, а также под действием самогравитации происходит рост массы диска, что увеличивает гравитационный потенциал диска. Самосогласованный рост массы и потенциала приводит к гравитационной неустойчивости $Q_T(r) < 1$, коллапсу и фрагментации диска.

На рис. 7.4 а) – г) приведены начальные распределения в аккреционном и протопланетном дисках.

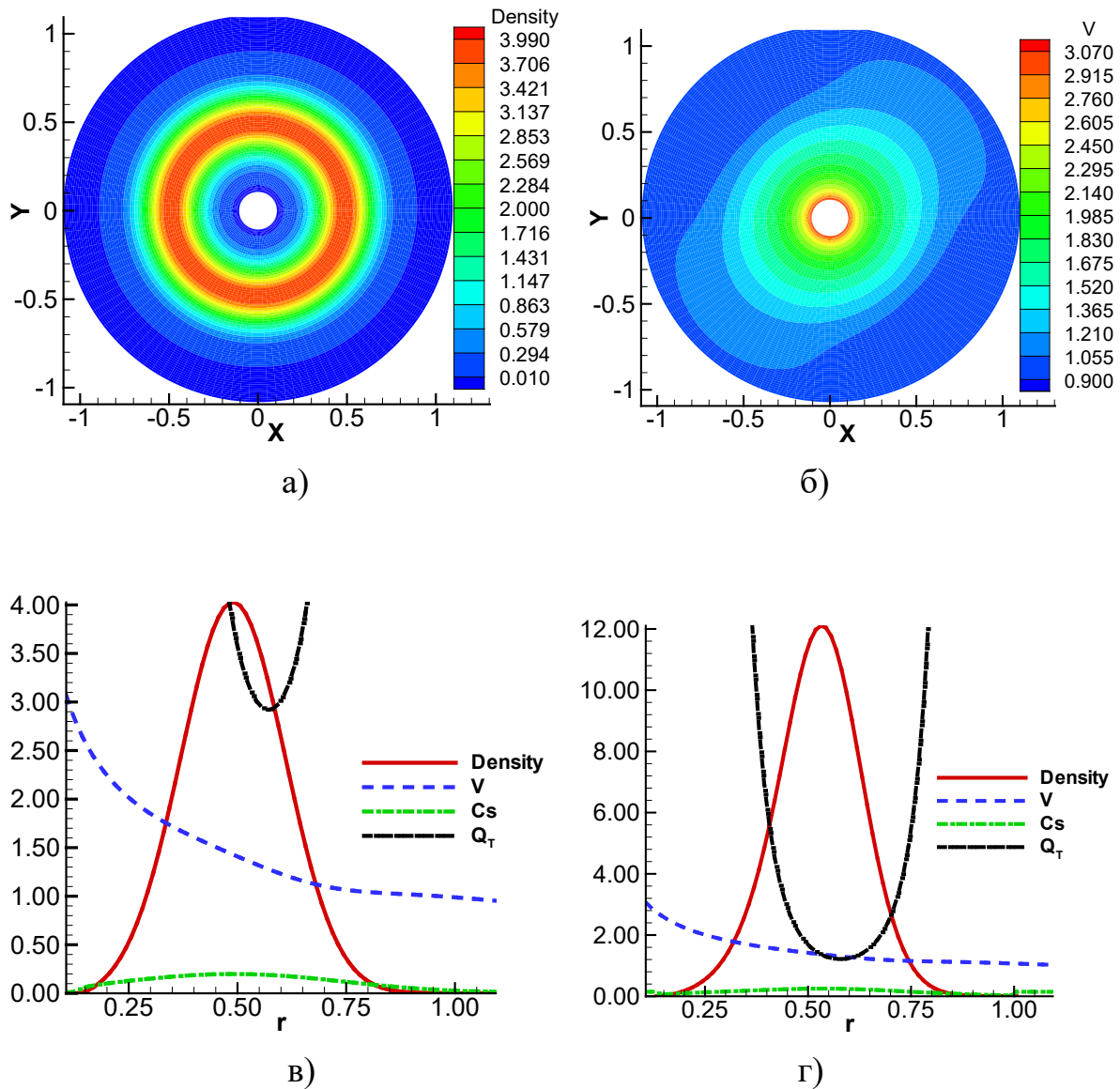


Рис. 7.4. а) начальное распределение плотности $\rho(r, \varphi, 0)$ и
 б) скорости вращения $v(r, \varphi, 0)$;
 в) начальное распределение по радиусу плотности $\rho(r, 0, 0)$,
 скорости $v(r, 0, 0)$, скорости звука $C_s(r, 0, 0)$ и параметра
 гравитационной устойчивости Тоомре $Q_T(r, 0, 0)$ в аккреционном
 диске;
 г) те же распределения в протопланетном диске.

На рисунке 7.5 представлена плотность $\rho(r, \varphi, 0)$ на момент времени $t=8$. В аккреционном диске масса уменьшилась в четыре раза, видны спиральные рукава плотности с раздвоением на концах и отрыв массы, в протопланетном диске масса выросла в 60 раз и произошла фрагментация диска.

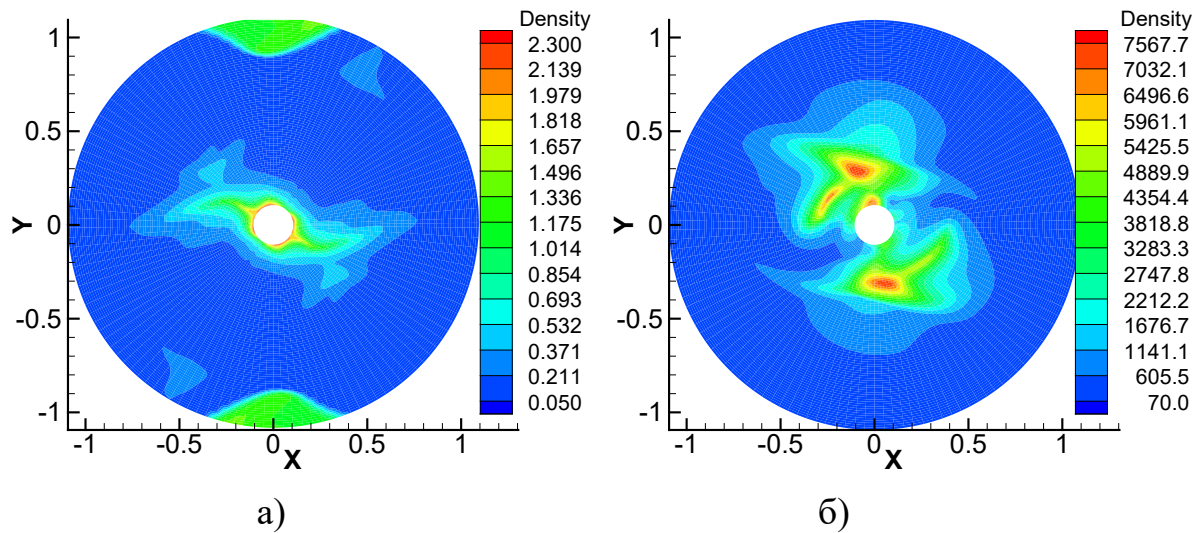


Рис. 7.5. а) аккреционный диск: $M_d = 0,024$, $\rho_{\max} = 2,3$;
 б) протопланетный диск: $M_d = 57,9$, $\rho_{\max} = 7568$

Полученные результаты представляют интерес для теории образования протопланетных систем.

Заключение

Как ранее было отмечено в данной главе, со времен И. Канта [18] и П.С. Лапласа [19] было предложено большое количество гипотез и теорий образования планетных систем солнечного типа. Однако, следует признать, что гипотеза Лапласа оказалась наиболее достоверной. Сам Лаплас критически относился к предложенной им гипотезе: «... но я представляю её с сомнением, которое должно вызывать всё, что не является результатом наблюдения и вычисления». В течение более 100 лет гипотеза Лапласа была популярна. В начале XX века эта гипотеза потеряла свое былое значение. Одним из основных недостатков ее был признан тот факт, что на тот момент гипотеза была не в состоянии объяснить распределение массы и момента количества движения между Солнцем и планетами. В связи с представленными результатами исследований имеет смысл восстановить в памяти, что кольцевые структуры («концентрические кольца из паров») в протопланетных дисках, из которых образуются планеты, впервые были предложены именно Лапласом, исходя из анализа характеристик движения планет Солнечной системы [19]. Лаплас в своей гипотезе не использовал принцип гравитационной неустойчивости протопланетного диска. Он предполагал, что работает только закон сохранения момента количества движения слоев газопылевого вещества протопланетного диска в сочетании с центробежной силой и притяжением звезды, которые и обеспечивают расслоение протопланетного диска на кольца. Как показывает анализ, этих

предположений недостаточно, и с этой стороны гипотеза Лапласа также подвергалась многочисленной критике [22]. Основные стадии дальнейшей эволюции колец Лапласа с образованием протопланет подтверждаются в модели протопланетных колец [27].

В данной главе представлены:

- основные положения модели образования планетных систем звезд – модели протопланетных колец, в основе которой лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (протопланетных газопылевых колец) в протопланетном диске;

- результаты сравнения данных астрофизических наблюдений [35, 38 – 40] с моделью протопланетных колец (теоретические работы [3, 4, 5, 8 – 10, 11, 12, 13, 27]) и другими моделями, которые дают основания полагать, что наблюдаемые структуры протопланетных дисков в виде ярких колец с темными промежутками между ними подтверждают правильность основных положений модели протопланетных колец [27];

- теоретический прогноз по астрофизическим наблюдениям эволюции структур газопылевых колец ряда протопланетных дисков звезд в модели протопланетных колец.

- предложения по дальнейшей разработке численных алгоритмов эволюции протопланетных дисков звезд солнечного типа, включающей все стадии эволюции, в том числе и образование протопланет.

Глава VIII. Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем звезд солнечного типа

Данная глава написана на основе работ [17, 27, 33]. В ней основополагающие принципы модели протопланетных колец – модели образования планетных систем звезд, в основе которой лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (протопланетных колец), распространены на образование регулярных спутников планет. На основе этих принципов предложена полная модель образования планетных систем, включая и их спутники, для звезд солнечного типа (модель газопылевых колец).

Введение

Данная глава посвящена проблеме образования планетных систем звезд солнечного типа, включая и происхождение спутников планет. В работах [1–14] была представлена разработка новой модели образования планетных систем звезд солнечного типа – модели протопланетных колец, альтернативной общепризнанной теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц (модели твердотельной аккумуляции) [15, 16]. В основе представленной модели лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей (протопланетных колец) в протопланетном диске звезд [3, 14]. В настоящей главе основополагающие принципы модели протопланетных колец распространены на образование регулярных спутников планет. На основе этих принципов предложена полная модель образования планетных систем, включая и их спутники, для звезд солнечного типа (модель газопылевых колец).

1. Образование планет в планетных системах звезд солнечного типа в модели протопланетных колец

Рассмотрим эволюцию протозвездной туманности в модели протопланетных колец на примере протосолнечной туманности [27, 129]. В этой модели предполагается, что звезда солнечного типа и ее планетная система образовались из вращающейся газопылевой протозвездной туманности в результате единого динамического процесса ее сжатия – коллапса, аналогично тому, как это было предсказано Кантом [18] и Лапласом [19]. Эта гипотеза подтверждена современными наблюдениями за образованием молодых звезд и их протопланетных дисков [100, 34, 123, 118–124]. В вопросе о причине коллапса мы придерживаемся общепринятой точки зрения, заключающейся в том, что произошло внешнее воздействие (возмущение), которое перевело протосолнечную

туманность в состояние гравитационной неустойчивости и привело ее к последующему коллапсу. Формирование Солнца как звезды произошло за промежуток времени, равный примерно 10^6 лет [46]. В это же время (одновременно с формированием Солнца) происходило образование газопылевого околосолнечного облака, которое являлось аккреционным. К началу выхода Солнца на главную последовательность аккреционный поток резко уменьшился, и околосолнечное облако отделилось от Солнца, образуя газопылевую протопланетный диск [46, 45, 49, 48].

В результате астрофизических наблюдений за молодыми звездами солнечного типа была доказана достоверность как основополагающей гипотезы о совместном образовании звезды солнечного типа и ее планетной системы из единой газопылевой протозвездной (протосолнечной) туманности, так и достоверность следующих важных гипотез [100, 34, 123, 118, 124]:

- процесс планетообразования начинался в газопылевом протопланетном диске;
- закон вращения газопылевых протопланетных дисков близок к закону Кеплера.

В процессе коллапса протосолнечной туманности, произошедшего в результате первоначальной гравитационной неустойчивости ее среды, плотность туманности постоянно возрастала. В этом случае, по логике гравитационной неустойчивости по Джинсу [70], критическая длина волны потенциальной гравитационной неустойчивости среды туманности уменьшалась, начиная от величины $\sim 1,6 \cdot 10^{17}$ см, которая соответствовала начальному размеру протосолнечной туманности. На определенной стадии эволюции протосолнечной туманности гравитационная неустойчивость ее среды должна была проявиться, так как критическая длина волны Джинса становится меньше размеров туманности.

В работах [8 – 10, 14] было показано, что с высокой степенью вероятности протопланетный диск Солнца в начальной стадии своей эволюции был гравитационно неустойчивым по отношению к крупномасштабным возмущениям с длиной волны, сравнимой с расстоянием между планетами. В результате данной гравитационной неустойчивости в диске образовались газопылевые протопланетные кольца, которые и соответствовали зонам планет Солнечной системы [29, 33, 129].

Астрофизические исследования последних лет привели к неожиданному открытию газопылевых колец в протопланетных дисках звезд [35 – 40], которые были предсказаны при разработке модели протопланетных колец [3 – 5, 8 – 13]. Изображения протопланетных дисков при астрофизических наблюдениях были получены с высокой степенью разрешения. Таким образом, впервые со времен Лапласа

появилась реальная возможность экспериментальной проверки достоверности теоретических моделей образования планетных систем как Солнца, так и других звезд солнечного типа.

Как известно [27, 129], в классической теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц [15, 16] отсутствует явление, наблюдаемое в астрофизических исследованиях в виде газопылевых кольцевых структур в протопланетных дисках звезд солнечного типа. В модели твердотельной аккумуляции гравитационная неустойчивость на начальной стадии эволюции протопланетного диска, т.е. фактически в газовой среде, исключается [15, 16].

В модели протопланетных колец газопылевые кольца в протопланетном диске возникают естественным путем в результате его гравитационной неустойчивости. Образовавшееся газопылевое протопланетное кольцо, как правило, гравитационно неустойчиво и фрагментирует, в общем случае, на несколько газопылевых сгущений, которые, взаимодействуя между собой, сталкиваясь и объединяясь, и приводят к образованию протопланетного сгущения (протопланетной «туманности») [10, 27, 129]. В дальнейшем в результате эволюции протопланетной «туманности» из нее образуются протопланета и ее протоспутниковый диск.

Анализ работ по астрофизическим наблюдениям [33, 129] показывает, что представленный сценарий образования планетных систем звезд солнечного типа наилучшим образом описывает результаты астрофизических наблюдений [35 – 40].

Итак, на стадии эволюции газопылевого протопланетного кольца образовалось протопланетное сгущение (протопланетная «туманность»), из которого впоследствии и образуются протопланета и ее протоспутниковый диск.

2. Образование спутников планет в планетных системах звезд солнечного типа

Многочисленные исследования [15, 16, 34] показывают, что некоторые планеты и их спутниковые системы в Солнечной системе подобны планетной системе Солнца. Это особенно хорошо видно на примере Юпитера [34]. Так как системы регулярных спутников планет очень напоминают уменьшенную планетную систему Солнца, то это дает основание говорить о сходстве процессов их образования [15, 16, 34].

2.1. Образование регулярных спутников планет в модели газопылевых колец

Как известно [46, 49, 48], при образовании планетной системы Солнца происходит последовательное сжатие газопылевой среды протосолнечной туманности, которое начинается с ее коллапса.

Рассмотрение физических процессов в модели протопланетных колец показывает, что в результате образования в диске протопланетных колец плотность среды в них возрастает. Дальнейшее сжатие среды колец происходит в процессе их самогравитации. Фрагментация протопланетного кольца на отдельные сгущения и последующее их объединение в одно сгущение также приводит к увеличению плотности среды по сравнению с протопланетным диском в его начальном состоянии [35, 38, 39, 40]. В результате этого процесса образуется газопылевое протопланетное сгущение (облако). В предлагаемой модели газопылевых колец эволюция протопланетного сгущения (облака) происходит подобно эволюции протосолнечной туманности: под действием самогравитации протопланетного сгущения образуется протопланета и ее аккреционный газопылевой протоспутниковый диск. В этом случае протопланетное сгущение (облако) можно рассматривать по аналогии с протосолнечной туманностью как протопланетную «туманность».

За счет сжатия вещества протоспутникового диска он становится гравитационно неустойчивым и подобно протопланетному диску разделяется на газопылевые протоспутниковые кольца. Протоспутниковое кольцо может быть гравитационно неустойчивым. В этом случае механизм образования спутников подобен механизму образования планет [27, 129]: протоспутниковое кольцо фрагментирует, в общем случае, на несколько газопылевых сгущений, которые, взаимодействуя между собой, сталкиваясь и объединяясь, и приводят к образованию регулярного спутника планеты.

2.2. Образование спутников планет в модели твердотельной аккумуляции и в других моделях

В классической теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц (модели твердотельной аккумуляции) [15, 16] нет необходимости вводить газопылевой протоспутниковый диск. Формирование спутников планет в этой модели происходит в процессе эволюции газопылевого протопланетного диска, ключевым моментом которого является образование в диске роя твердых тел [15, 16]. Планета образуется из этого роя твердых тел путем их твердотельной аккумуляции. Когда планета приобрела по крайней мере половину своей массы, происходит формирование вращающегося вокруг планеты протоспутникового роя твердых тел путем гравитационного захвата тел из протопланетного диска.

Одновременно с этим в протоспутниковом рое устанавливается поток тел в направлении планеты. Спутники планеты образуются из протоспутникового роя твердых тел, которые остались на орбите вокруг планеты, путем их твердотельной аккумуляции [15, 16].

Следует отметить, что в настоящее время наиболее принятыми научным сообществом являются модели образования регулярных спутников в аккреционном газопылевом (или пылевом) протоспутниковом диске на поздней стадии формирования планеты [34]. В работах [130, 131] предполагается, что аккреционный поток вещества через протоспутниковый диск на планету определяется темпом аккреции из окружающей зоны протопланетного диска Солнца в сферу Хилла планеты. Альтернативный подход [132 – 134] предполагает, что на стадии формирования спутников аккреция вещества из протопланетного диска Солнца на протоспутниковый диск закончилась. После этого протоспутниковый диск эволюционирует как самостоятельный, изолированный вязкий диск.

В этих моделях [130 – 134] протоспутниковый диск рассматривается как гравитационно устойчивый, а образование спутников в диске происходит путем твердотельной аккумуляции из твердых тел и пыли, в том числе и аккрецируемых из протопланетного диска Солнца.

Из других существующих моделей образования протоспутниковых дисков остановимся на следующих.

Модель, предложенная в работах [135, 136], предполагает, что планета (Юпитер, Сатурн), имеющая большой объем и достаточно высокую температуру, начинает остывать и сжиматься. В процессе сжатия внешние экваториальные слои планеты, имеющие наибольший угловой момент, начинают отделяться от планеты, образуя газопылевой протоспутниковый диск. Критические оценки этой модели связаны с большой массой протоспутникового диска [130, 131].

Модель коаккреции [137] предполагает гравитационный захват планетой планетезималей из протопланетного диска Солнца и образование протоспутникового диска планеты путем соударений планетезималей и более мелких тел внутри ее сферы Хилла. В этой модели также рассматривается возможность гравитационного захвата в протопланетном диске Солнца нескольких тел размерами до нескольких десятков километров, которые послужили зародышами. На них затем происходила аккреция пыли и мелких планетезималей, приведшая к образованию спутников [137, 138].

Следует отметить, что процесс коаккреции, вероятно, был основным механизмом образования нерегулярных спутников, которые имеют большие значения наклона орбит и эксцентриситетов [34, 131].

Модель мегаимпакта – это соударение планеты с телом планетарного масштаба [87]. Данная модель наиболее разработана для образования

Луны, хотя и в этом случае она встречается со значительными трудностями [47, 139, 140], которые многократно возрастают при попытке применения этой модели для объяснения образования спутников Юпитера и Сатурна [34].

Рассмотрение существующих моделей планетных систем показывает, что в настоящее время нет общепринятой модели образования спутников планет. В то же время общепризнанно, что процесс образования планетных систем звезд и их спутников является единым эволюционным процессом и для его описания необходимо построение единой самосогласованной теории [15, 16, 34]. В настоящее время такой теории не существует, и разработка ее в рамках теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц (модели твердотельной аккумуляции) [15, 16] встречает значительные трудности [16].

2.3. Экспериментальные данные по образованию планетных систем звезд солнечного типа и их трактовка с позиций различных теоретических моделей

1. Для выбора модели образования планетной системы Солнца большой интерес представляют работы Э.М. Галимова по геохимическому составу планет [47, 140, 31, 32, 86]. Совершенно ясно, что геохимический состав планет и их спутников будет существенным образом зависеть от модели образования планетной системы Солнца. В результате геохимических исследований Э.М. Галимов выдвинул гипотезу, что формирование планеты и ее спутников происходит из одного газопылевого облака (сгущения), и на примере системы Земля - Луна в его работах показано, что эта гипотеза наилучшим образом позволяет объяснить известные геохимические факты и ограничения. В то же время в рамках модели твердотельной аккумуляции планет, в том числе и в модели мегаимпакта образования Луны [87], возникают значительные трудности в объяснении ряда геохимических составов и изотопных систем [86]. В рамках данной работы нет возможности останавливаться на всех геохимических зависимостях системы Земля-Луна, эти результаты достаточно подробно изложены в работе [86].

Результаты геохимических исследований Э.М. Галимова [47, 140, 32, 86] наилучшим образом согласуются с моделью газопылевых колец, так как в этой модели образование планеты и ее спутников (спутника) действительно происходит из единого газопылевого протопланетного сгущения (облака) – протопланетной «туманности».

2. В июле 2019 года была опубликована работа [141], в которой представлены результаты впервые проведенного наблюдения за газопылевым околопланетным (протоспутниковым) диском планеты PDS

70с, вращающейся вокруг звезды PDS 70. Звезда PDS 70 – это карликовая звезда, масса которой составляет примерно три четверти массы Солнца. Планета PDS 70с по массе в 5-10 раз больше Юпитера и расположена от звезды примерно на расстоянии, равном расстоянию Нептуна от Солнца.

Авторы работы [141] наблюдали излучение в видимой части спектра, известное как H- α излучение, которое испускается, когда водород из околопланетного диска падает на планету и становится ионизированным. Это дает основание предполагать, что наблюдаемый околопланетный (протоспутниковый) диск является аккреционным газопылевым диском. Авторы предполагают, что спутники Юпитера образовались из аналогичного протоспутникового диска. Они также полагают, что прямое наблюдение за планетами с околопланетными (протоспутниковыми) дисками позволит проверить теории формирования планет.

Таким образом, астрофизические наблюдения за планетами других звезд солнечного типа [141] подтверждают правильность предположения о существовании этапа в эволюции протопланетного диска, на котором происходит образование протопланеты и окружающего ее аккреционного газопылевого протоспутникового диска.

Не исключено, что в недалеком будущем могут появиться сообщения об астрофизических наблюдениях газопылевых колец в протоспутниковом диске планеты, как это произошло с газопылевыми протопланетными кольцами, которые наблюдали в протопланетных дисках [35 – 40].

3. Наиболее убедительным свидетельством об образовании газопылевых протоспутниковых колец в протоспутниковом диске, из которых и сформировались регулярные спутники, на наш взгляд, являются кольца внешних планет Солнечной системы (планет-гигантов), из них наиболее известны кольца Сатурна.

В настоящее время кольцам Сатурна посвящено большое количество исследований. Особенно большой вклад в астрофизическое изучение колец внесла автоматическая межпланетная станция «Cassini–Huygens» (проект NASA, Европейского космического агентства и Итальянского космического агентства, 1997 – 2017 годы [142, 143]). По данным проекта «Cassini» [144, 145], на настоящий момент времени кольца Сатурна представляют собой плоские концентрические кольца, лежащие в плоскости экватора планеты. Кольца разделены промежутками на семь основных колец D, C, B, A, F, G, E, которые, в свою очередь, также делятся на более мелкие кольца. Кольца расположены на расстоянии от 67000 км до 480000 км от центра Сатурна и в основном состоят из водяного льда с количеством примесей в диапазоне от 0,1% до 10% в виде силикатов и органики.

Результаты, которые были получены при реализации проекта «Cassini», в ряде исследований [146, 147] были интерпретированы как доказательство того, что возраст колец Сатурна составляет 10 – 100 млн

лет. Это намного меньше возраста самого Сатурна, который оценивается в пределах 4,5 миллиардов лет. В то же время другие исследователи полагают, что такие выводы на основании полученных результатов делать преждевременно, так как на основе этих же результатов возможны и противоположные выводы: кольца могут быть ровесниками Сатурна [148].

В модели газопылевых колец, которая представлена в настоящем обзоре, естественной точкой зрения является гипотеза, в соответствии с которой кольца планет-гигантов произошли одновременно с образованием планеты как газопылевые протоспутниковые кольца в результате единого динамического процесса сжатия протопланетного сгущения (протопланетной «туманности») и последующей гравитационной неустойчивости образовавшегося протоспутникового диска. Из газопылевых протоспутниковых колец, расположенных за пределами Роша, образовались регулярные спутники планет-гигантов, а из газопылевых протоспутниковых колец, расположенных в пределах Роша, спутники, как правило, не смогли образоваться, и эти кольца эволюционировали в наблюдаемые в настоящее время кольца планет-гигантов.

Основной причиной, в результате которой кольца планет-гигантов сохранились до настоящего времени, является, по-видимому, приливное воздействие планеты, так как кольца находятся на расстоянии от планеты в пределах Роша.

Итак, представленные экспериментальные данные по образованию планетных систем звезд солнечного типа, включая и наблюдаемые газопылевые кольца в протопланетных дисках, могут в полной мере найти свое объяснение только в модели газопылевых колец.

3. Гипотеза Лапласа

Со времен Канта [18] и Лапласа [19] было предложено большое количество гипотез и теорий образования планетных систем солнечного типа [15, 16]. Как показали современные исследования [100, 34, 123, 118, 124], гипотеза Лапласа оказалась наиболее достоверной. Сам Лаплас критически относился к предложенной им гипотезе: « ... но я представляю её с сомнением, которое должно вызывать всё, что не является результатом наблюдения и вычисления». В течение более 100 лет гипотеза Лапласа была популярна. В начале XX века эта гипотеза потеряла свое былое значение. Одним из основных недостатков ее был признан тот факт, что гипотеза была не в состоянии объяснить распределение массы и момента количества движения между Солнцем и планетами [22]. В связи с представленными результатами исследований следует обратить внимание, что кольцевые структуры («концентрические кольца из паров») в протопланетных дисках, из которых образуются планеты, впервые были предложены именно Лапласом, исходя из анализа характеристик движения

планет Солнечной системы [19]. В его гипотезе также представлена вся эволюция колец с образованием протопланетных сгущений и формированием протопланет и их протоспутниковых дисков, которая в общих чертах совпадает с моделью газопылевых колец. И, наконец, образование колец в протоспутниковых дисках, из которых впоследствии образуются спутники, тоже нашло отражение в гипотезе Лапласа. По Лапласу, кольца в протопланетном и протоспутниковом диске возникают в результате вращательной неустойчивости дисков, когда центробежная сила наиболее удаленного от оси вращения слоя диска превышает силу притяжения соответственно Солнца или планеты, что должно приводить к отделению этого слоя от диска и образованию кольца. Это предположение Лапласа также подвергалось многочисленной критике. Основанием для серьезных сомнений в его правильности послужило то, что протопланетный диск («атмосфера Солнца») не мог достаточно быстро вращаться, чтобы сбросить кольцо [22].

Принципиальным отличием модели газопылевых колец от гипотезы Лапласа является совершенно другой механизм образования газопылевых колец, предложенный в модели, который основан на принципе гравитационной неустойчивости. Это кардинально меняет физику явления, но интересно, что общая идея Лапласа – зарождение колец и их эволюция в процессе образования планетной системы Солнца – сохраняется и в модели газопылевых колец.

4. К вопросу о разработке общей теории образования планетных систем и их спутников для звезд солнечного типа

В полной и строгой постановке проблема образования планетных систем звезд солнечного типа, по-видимому, является одной из самых сложных в естественных науках [15].

Как известно [34] (главы I, III, VI обзора), в настоящее время общепринятой теорией образования планет Солнечной системы является теория аккумуляции планет из твердых тел и частиц (модель твердотельной аккумуляции) [15, 16]. Естественно, что в первую очередь следует проанализировать возможность построения единой самосогласованной теории образования планетной системы Солнца на основе этой теории [15, 16].

В работах [82, 30, 149, 83, 8, 12] (главы I, III, VI обзора) было показано, что в рамках модели твердотельной аккумуляции при объяснении ряда явлений встречаются значительные трудности. В настоящей главе подведем итоги критических замечаний.

Так, одним из ключевых вопросов в эволюции протопланетного диска в модели твердотельной аккумуляции [15, 16] является образование

достаточно крупных тел (зародышей планет), способных продолжать расти с помощью собственного гравитационного поля. В научной литературе возможность такого объединения малых твердых тел неоднократно подвергалась сомнению [82, 30, 83]. Академик Энеев Т.М. с соавторами пишет в работе [149]: «...модель роста протопланет за счет соударений твердых тел несостоятельна. Энергия удара при падении тела на поверхность астероида обычно так велика, что разрушается не только само упавшее тело, но и часть астероида. Поэтому говорить здесь об увеличении размеров не приходится.».

Экспериментальные и теоретические исследования последних лет [34] показали, что вероятность слипания частиц, когда их размеры становятся много больше 10 см, стремится к нулю. Поэтому не следует ожидать, что объединение частиц при столкновениях может привести к образованию крупных тел размером порядка 1 – 10 м [84, 85]. Вероятно, в рамках модели твердотельной аккумуляции единственным путем образования планетезималей, из которых затем образуются планеты, является гравитационная неустойчивость пылевого слоя, расположенного в экваториальной плоскости протопланетного диска. Хотя, судя по современным представлениям, и в этой части проблемы появились трудности: возникновение турбулентности в пылевом слое препятствует его уплотнению [34].

С другой стороны, в работах [10, 129] было высказано утверждение, что полная физическая модель образования Солнечной планетной системы должна включать в себя как физические процессы модели протопланетных колец, так и физические процессы, на основе которых построена теория аккумуляции планет из твердых тел и частиц.

4.1. Результаты наблюдений за планетными системами звезд солнечного типа, которые определяют основные положения теоретических моделей образования планет

Для того чтобы оценить, какие физические процессы должны быть включены в первую очередь в физическую модель, обратимся к следующим экспериментальным фактам по образованию планетной системы Солнца и рассмотрим их с точки зрения как модели твердотельной аккумуляции, так и модели газопылевых колец.

1. Коллапс протосолнечной туманности – эта гипотеза подтверждена современными астрофизическими наблюдениями за образованием молодых звезд и их протопланетных дисков [100, 34, 123, 118, 124].

В теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц рассмотрение формирования планет начинается с момента уже сформировавшегося протопланетного диска [15, 16].

В модели газопылевых колец существенное значение имеет начальный этап эволюции протосолнечной туманности: гравитационная неустойчивость протосолнечной туманности, последующий ее коллапс (сжатие) с образованием протопланетного диска с соответствующими характеристиками, что создает условия для последующей гравитационной неустойчивости в протопланетном диске [27, 129].

2. В начале XXI века были открыты газопылевые кольца в протопланетных дисках звезд. На изображениях при астрофизических исследованиях они представляют собой яркие кольцевые газопылевые структуры, разделенные темными промежутками, в которых плотность газопылевого вещества существенно понижена [35, 38, 39, 40].

Как известно [27, 129], в классической теории твердотельной аккумуляции [15, 16] отсутствует явление, наблюдаемое в астрофизических исследованиях в протопланетных дисках звезд солнечного типа в виде кольцевых газопылевых структур.

В процессе разработки модели газопылевых колец [27, 129] газопылевые кольца, наблюдаемые в астрофизических исследованиях в протопланетных дисках [35, 38, 39, 40], были предсказаны в работах [3 – 5, 8 – 13] и названы протопланетными кольцами [3]. Возникают они в рамках этой модели естественно и красиво в результате гравитационной неустойчивости протопланетного диска [129].

3. Гипотеза о существовании аккреционного газопылевого околопланетного (протоспутникового) диска на определенном этапе эволюции протопланетного диска подтверждена астрофизическими наблюдениями [141].

В классической теории твердотельной аккумуляции [15, 16] нет необходимости вводить газопылевой протоспутниковый диск: в этой модели предполагается существование вращающегося вокруг планеты протоспутникового роя твердых тел, который образовался путем гравитационного захвата тел из протопланетного диска (см. подраздел 2.2). Спутники планеты образуются из этого протоспутникового роя твердых тел путем твердотельной аккумуляции. В работе [137] предпринята попытка сформировать газопылевой протоспутниковый диск путем коаккреции из твердых тел и планетезималей на орбите планеты. Однако такая модель вызывает серьезные возражения, так как вводит существенные инволюционные процессы в общий эволюционный процесс модели (трудно представить образование газовой компоненты в виде водорода при коаккреции из твердых тел).

В модели газопылевых колец, как это было рассмотрено в подразделе 2.1 настоящей главы, протопланета и ее аккреционный газопылевой протоспутниковый диск образуются в процессе эволюции протопланетного кольца из протопланетного сгущения (протопланетной

«туманности») подобно протопланетному диску Солнца, не нарушая логику модели.

4. В астрофизических наблюдениях за экзопланетами обнаружено достаточно короткое время жизни протопланетных дисков. Оказалось, что протопланетные диски живут не более 10 миллионов лет. По данным работы [110], среднее время жизни изученных газопылевых дисков составляло 3 – 6 миллионов лет. Отсюда следует, что экзопланеты должны сформироваться в пределах времени жизни газопылевого диска, т.е. в пределах нескольких миллионов лет.

Теория аккумуляции планет из твердых тел и частиц в стандартном варианте по Сафронову В.С. приводит к выводу, что «...Земля росла в течение $\sim 10^8$ лет...» [15]. В работе [15] также представлены данные, что зародыш Сатурна, способный захватывать газ путем аккреции, мог вырасти за 500 – 800 млн лет. «Поэтому газ в этой зоне должен был сохраняться около 10^9 лет» Далее, стандартная оценка для Урана и Нептуна дает «неприемлемо большое время аккумуляции для этих планет $\sim 10^{11}$ лет» [16].

Таким образом, теоретические данные о времени образования планет Солнечной системы, полученные в рамках модели твердотельной аккумуляции, существенно превосходят результаты, полученные в ходе астрофизических наблюдений.

В предлагаемой модели газопылевых колец планеты образуются в результате гравитационной неустойчивости среды диска, и время образования планет в этом случае будет значительно меньше, чем в модели твердотельной аккумуляции. В работах [10, 129] было показано, что модель Энеева–Козлова во многих аспектах близка к модели протопланетных колец (модели газопылевых колец), а на временах эволюции с момента распада протопланетного кольца на газопылевые сгущения эти модели практически совпадают. Используя это сходство моделей, в качестве примера приведем данные о времени образования планет в модели Энеева–Козлова по результатам работы В.П. Мясникова и В.И. Титаренко [111]. В этой работе проведено численное моделирование эволюции газопылевого сгущения (протопланеты), имеющего массу, эквивалентную массе Земли с концентрацией примесей изотопов короткоживущего ^{26}Al . Показано, что конденсация протопланеты с приведенными параметрами начинается через 3,3 млн лет. Как видно, эти данные согласуются с результатами астрофизических наблюдений.

5. Как известно [15, 34], планеты Солнечной системы делятся на две группы: планеты земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс) и планеты внешней области Солнечной системы (планеты–гиганты: Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун). Рассмотрим образование планет в этих группах в моделях твердотельной аккумуляции и газопылевых колец.

В модели твердотельной аккумуляции [15, 16] предполагается два сценария образования планет. Первый сценарий, состоящий из одной стадии, разработан для планет земной группы и представляет собой образование планет путем твердотельной аккумуляции твердых тел и частиц. Второй сценарий предполагает существование двух стадий образования планет для внешней области Солнечной системы. Опишем этот процесс в общих чертах на примере Юпитера [15, 16]. На первой стадии формируется твердотельный зародыш (ядро) Юпитера массой около 10 масс Земли путем твердотельной аккумуляции. На второй стадии происходит аккреция газовой компоненты на образовавшийся твердотельный зародыш.

В модели газопылевых колец [27, 129] предполагается единственный сценарий образования планет для обеих групп планет Солнечной системы. Планеты образуются в результате эволюции протопланетных колец, как это описано в разделе 1 настоящей главы.

6. Экспериментальным фактом является четко выраженная упорядоченность планетной системы Солнца и высокая степень взаимосогласованной устойчивости характеристик движения планет Солнечной системы, что позволило зародиться и эволюционировать разумной жизни на планете Земля [34, 150)]. Орбиты планет не пересекаются и расположены не случайным образом: средние радиусы их орбит подчиняются правилу Тициуса–Боде.

Общепринятое положение о происхождении планетной системы Солнца, которое подтверждено современными астрофизическими наблюдениями, заключается в том, что планетная система эволюционировала в наблюдаемое упорядоченное и устойчивое состояние из первоначально хаотически взаимодействующих частиц пыли и газа в протопланетном диске Солнца. Естественно, что предлагаемые модели образования планетной системы Солнца должны объяснить, как произошел этот переход.

В рамках теории образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [15, 16] трудно объяснить феномен этого перехода. Прежде всего, это связано с тем, что основные физические процессы образования планет (столкновения частиц пыли, пылевых сгущений, твердых тел и их объединение) в модели твердотельной аккумуляции являются стохастическими. Поэтому характеристики образовавшихся планет, в том числе и параметры их орбит, являются случайными величинами. Вот как описывает эту ситуацию А.В. Витязев с соавторами в монографии [16]: «...никакое уточнение и усложнение теории в будущем не позволит чисто теоретически вычислить расстояния, на которых должны сформироваться планеты. Теория (и численные расчеты) при заданном распределении вещества (поверхностной плотности) может дать лишь оценку числа формирующихся планет и относительных расстояний».

Основной гипотезой в модели твердотельной аккумуляции планет является образование достаточно крупных тел (зародышей планет), способных продолжать расти с помощью собственного гравитационного поля [15, 16]. Но эта гипотеза не гарантирует образования упорядоченной и устойчивой планетной системы. Так, например, Wetherill [151] провел моделирование процесса объединения 500 достаточно крупных тел (10^{24} – 10^{25} г) в зоне планет земной группы. Он пришел к выводу, что растущие Земля и Венера имели значительный шанс столкнуться с двумя–тремя телами лунных размеров или даже с телом, имевшим массу, близкую к массе Меркурия или Марса.

В представлениях модели твердотельной аккумуляции естественной выглядит и модель мегаимпакта – соударения планеты с телом планетарного масштаба, разработанная для образования спутников планет [87].

Следует подчеркнуть, что любое столкновение планетарных тел могло привести к прекращению развития разумной жизни на планете Земля или, в лучшем случае, к ее существенной деградации.

Итак, в модели твердотельной аккумуляции предполагается, что процесс образования планет в протопланетном диске идет путем последовательного процесса взаимодействия пыли и твердых частиц друг с другом и их объединения в тела более крупных размеров, и так постепенно до возникновения зародышей планет, а через них – и к образованию планет.

Принципиально иной механизм образования планетных систем звезд солнечного типа предложен в модели газопылевых колец [27, 129]. В этой модели существенно, что образование звезд, протопланетных дисков и далее протопланет идет путем первоначального единого динамического процесса сжатия (коллапса) газопылевого вещества, заключенного в протозвездной (протосолнечной) туманности, что общепризнано. Как известно [27, 129], этот процесс запускается с помощью гравитационной неустойчивости среды туманности. На следующем этапе газопылевой протопланетный диск, находясь на стадии начальной эволюции, в результате крупномасштабной гравитационной неустойчивости разделяется на газопылевые протопланетные кольца [27, 129], из которых впоследствии образуются протопланеты и их протоспутниковые диски (см. разделы 1, 2).

В модели газопылевых колец гравитационная неустойчивость среды играет ведущую роль в инициировании крупномасштабных процессов самогравитации, а именно: коллапс протозвездной (протосолнечной) туманности инициирован гравитационной неустойчивостью среды туманности [27, 129]; образование газопылевых протопланетных колец инициировано гравитационной неустойчивостью среды протопланетного диска [27, 129]; образование газопылевых протоспутниковых колец

инициировано гравитационной неустойчивостью среды протоспутникового диска (см. подраздел 2.1). Следует отметить, что перечисленные процессы связаны с перемещением и сжатием больших масс газопылевого вещества соответственно: в пределах протозвездной (протосолнечной) туманности; в пределах протопланетного диска и в пределах протоспутникового диска. Естественно, что физические процессы (столкновения частиц пыли, пылевых сгущений, твердых тел и их объединение), на основе которых строится модель твердотельной аккумуляции, идут параллельно в рассматриваемых средах, но на данных этапах не играют существенной роли в силу их незначительной величины по сравнению с физическими процессами, вызванными гравитационной неустойчивостью больших масс среды протопланетного диска.

Численное моделирование крупномасштабной гравитационной неустойчивости для среды в плоском случае было проведено в работе [12], где достаточно полно описаны особенности этого явления.

Так как в модели газопылевых колец планеты образуются из протопланетных колец в результате их эволюции (см. раздел 1), то и орбиты планет формируются посредством протопланетных колец, структура которых гравитационно сбалансирована. Таким образом планеты как бы «расставляются» на безопасных от столкновений расстояниях. В целом этот сценарий (в сочетании с приливными взаимодействиями и другими гравитационными воздействиями) и обеспечивает четко выраженную упорядоченность планетной системы Солнца и высокую степень взаимосогласованной устойчивости характеристик движения планет Солнечной системы, что позволило зародиться и эволюционировать разумной жизни на планете Земля.

Таким образом, представленные экспериментальные данные по образованию Солнечной системы находят полное объяснение только в рамках модели газопылевых колец. Отсюда следует, что при построении единой самосогласованной теории образования планетной системы Солнца необходимо учитывать крупномасштабную гравитационную неустойчивость при эволюции протосолнечной туманности на всех этапах, где она проявляется.

4.2. Главный пояс астероидов

Для построения единой самосогласованной теории образования планетной системы Солнца весьма важную информацию, по нашему мнению, может дать анализ образования главного пояса астероидов, расположенного между планетами Марс и Юпитер.

Приведем данные наблюдений за главным поясом астероидов [34, 152, 153, 154]. По некоторым оценкам, в Солнечной системе может существовать не менее миллиона астероидов с размерами выше 1 км и общей массой порядка $5 \cdot 10^{24}$ г. Главный пояс астероидов содержит

большую часть астероидов Солнечной системы (примерно 99,8%), и к настоящему времени в нем открыто более 6000 астероидов. Примерно половина массы пояса астероидов приходится на 4 крупнейших объекта: Церера, Паллада, Веста и Юнона, их средние диаметры соответственно составляют: 1003 км, 608 км, 538 км, 247 км. Но большинство астероидов главного пояса имеют размеры значительно меньше, вплоть до нескольких десятков метров, а расстояние между ними оценивается в среднем в два миллиона километров. Церера является крупнейшим и наиболее массивным телом в главном поясе астероидов, по размерам превосходящим многие крупные спутники планет-гигантов. В отличие от других тел главного пояса астероидов Церера имеет форму сфероида. В 2006 году астероид Церера официально переведен в статус карликовой планеты. Главный пояс астероидов имеет форму тора. Большие полуоси орбит астероидов заключены в пределах 2,06 – 4,09 а.е., средняя полуось – 2,7 а.е. Орбитальная скорость движения астероидов – около 20 км/с, периоды обращения – от 3 до 9 лет.

Главный пояс астероидов имеет сложную пространственную структуру: «щели Кирквуда», семейства, группы, струйные потоки [34, 152, 154]. «Щели Кирквуда» – это пустые области в поясе, где астероиды почти полностью отсутствуют. Примерно 1/3 объектов в поясе входит в семейства, в которые их объединяют по сходству характеристик орбит: эксцентриситет, орбитальный наклон и другие. Когда все пять параметров орбит близки, астероиды относят к одному струйному потоку.

Астероиды главного пояса по составу разделяются в основном на три типа: С (углеродистые), S (силикатные) и М (металлические). С–тип богат на углерод, доминирует над внешними территориями пояса и вмещает более 75% наблюдаемых объектов. По поверхностному составу этот тип астероидов соотносится с углеродистыми медно-хондритовыми метеоритами, а спектры его демонстрируют древнюю Солнечную систему. S–тип (их примерно 15%) чаще встречается во внутренней части пояса при удаленности в 2,5 а.е. от Солнца. Обычно он представлен силикатами и некоторыми металлами. Астероиды М–типа представляют около 10% от общего количества и наполнены железо-никелевыми и силикатными соединениями. Существует предположение, что определенная их часть могла появиться из металлических ядер дифференцированных астероидов. Есть также редкая разновидность V–типа (базальтовые).

Существуют различные гипотезы образования главного пояса астероидов. Одна из первых гипотез принадлежит Ольберсу (1803 год). Он полагал, что пояс астероидов образовался в результате разрушения крупной планеты, расположенной между Марсом и Юпитером. Действительно, согласно правилу Тициуса–Боде в этом месте должна была находиться планета. Однако более поздние исследования опровергли гипотезу Ольберса [152, 154]. Аргументами против являются:

практическая невозможность формирования крупного объекта типа планеты в области главного пояса астероидов, где этот объект испытывает сильное гравитационное воздействие Юпитера; очень большое количество энергии необходимо, чтобы разрушить целую планету; существующий состав астероидов невозможно объяснить их происхождением, как осколков одной планеты.

С точки зрения теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц [15, 16] астероиды – это "строительный" материал для планеты, образование которой было прервано из-за возмущающего действия Юпитера. В результате этого воздействия характерные скорости соударения тел в поясе астероидов достигли 5 км/с, а скорости убегания с поверхности астероидов по крайней мере в 10 раз меньше: для самого крупного, Цереры, она составляет 0,5 км/с. Отметим, что обычно в зоне образования планеты хаотическая скорость тел примерно равна скорости убегания с крупнейшего тела зоны или зародыша планеты [15], что и позволяет планетезималям объединяться при неупругих столкновениях. В работе [15] также указывается, что десятикратный "разогрев" пояса астероидов не только делает невозможным аккреционное объединение астероидов при взаимных соударениях, но и приводит к их интенсивному столкновительному разрушению.

В рамках модели газопылевых колец предполагается, что протопланетный диск Солнца был гравитационно неустойчив, что вызвало в нем зарождение газопылевых протопланетных колец [27, 129] (см. раздел 1). На месте расположения главного пояса астероидов также образовалось газопылевое протопланетное кольцо (протопланетное кольцо главного пояса астероидов). Однако обычный ход эволюции этого протопланетного кольца (см. раздел 1) был нарушен сильными гравитационными воздействиями формирующегося Юпитера, и протопланета не смогла образоваться. В силу указанных причин эволюция протопланетного кольца главного пояса астероидов, в отличие от других протопланетных колец Солнечной системы, пошла совершенно по другому пути – по пути, который описывается теорией аккумуляции планет из твердых тел и частиц. Таким образом, в этом случае отличие модели твердотельной аккумуляции от модели газопылевых колец заключается в том, что в модели твердотельной аккумуляции зарождение главного пояса происходило в соответствующей газопылевой зоне протопланетного диска, а в модели газопылевых колец – в газопылевом протопланетном кольце. Дальнейшая эволюция главного пояса в обеих моделях, по-видимому, в общих чертах совпадает.

При анализе результатов наблюдений за главным поясом астероидов обращает на себя внимание слишком малая общая масса астероидов, равная в настоящее время примерно 4% массы Луны. Численное моделирование показало, что начальная масса главного пояса могла быть

сопоставима с массой Земли [155]. Последующие исследования позволили восстановить эволюцию главного пояса астероидов. После формирования астероидов большая их часть была выброшена из главного пояса в результате гравитационного воздействия Юпитера. Существенную роль в этом процессе сыграл орбитальный резонанс, который проявляется, когда период обращения астероидов находится в простом целочисленном соотношении с орбитальным периодом Юпитера. В этом случае происходит регулярное сближение астероидов с планетой-гигантом, что вызывает дестабилизацию орбит астероидов в результате увеличения эксцентриситета. Как следствие, орбита теряет устойчивость, что в конечном итоге приводит к выбросу астероидов из области резонанса [156]. Так возникли «щели Кирквуда».

Итак, в результате гравитационного воздействия Юпитера большинство планетезималей пояса оказались раздробленными на фрагменты, большая часть из которых была выброшена из главного пояса астероидов, чем и объясняется его низкая плотность и малая масса. Часть астероидов была выброшена за пределы Солнечной системы, другая часть перешла на вытянутые орбиты, по которым они, попадая во внутреннюю область Солнечной системы, сталкивались с планетами земной группы. Последний феномен получил название интенсивной метеоритной бомбардировки планет земной группы и произошел он примерно 3,9 млрд лет назад [34, 152].

В работе [157] было проведено новое исследование древней лунной породы, доставленной на Землю астронавтами «Аполлона-16» в 1972 году. В пяти образцах, извлеченных из скал, были найдены участки, отвечающие за древнюю «бомбардировку». 30 таких участков были проанализированы с помощью сканирующей электронной микроскопии и электронного микроанализа. Оказалось, что по составу они очень напоминают углеродосодержащие метеориты с хондритовой структурой, которые, в свою очередь, происходят от одного определенного типа астероидов – это астероиды типа С главного пояса. Авторы делают вывод, что именно астероиды ответственны за доставку вещества на Луну в то далекое время. В работе [157] не рассматривался вопрос о причинах возникновения интенсивной метеоритной бомбардировки, на который в настоящее время нет однозначного ответа. Например, существует модель «Ницца» [158], в которой предполагается, что планеты-гиганты Солнечной системы сначала сформировались относительно близко друг к другу, а потом в результате гравитационных взаимодействий мигрировали на современные орбиты. Считается, что эти передвижения произвели значительные гравитационные воздействия на объекты Солнечной системы. Они могли привести к возникновению облака Оорта — далекого скопления комет – и дестабилизировать астероиды главного пояса. Следует отметить, что миграция планет-гигантов в соответствии с моделью «Ницца» не находит

объяснения в модели газопылевых колец, так как в этой модели орбиты планет гравитационно сбалансированы еще на стадии образования протопланетных колец.

Из изложенного выше следует, что эволюция главного пояса астероидов достаточно хорошо описывается в модели твердотельной аккумуляции. Этот вывод становится понятным, если принять во внимание, что эта модель разрабатывалась в том числе и на основе физико–химических исследований метеоритов [15, 16, 159].

Таким образом, в модели газопылевых колец физические процессы модели твердотельной аккумуляции начинают проявляться, когда в основном заканчиваются процессы, инициированные крупномасштабной гравитационной неустойчивостью, т.е. после образования планет, спутников или же в случаях, когда процесс образования планеты или спутника был прерван (главный пояс астероидов, кольца планет–гигантов).

4.3. Нерегулярные спутники планет

В отличие от регулярных спутников орбиты нерегулярных спутников сильно вытянуты, наклонены к экваториальной плоскости планеты и находятся на более удаленных расстояниях от планеты. Так, самый дальний регулярный спутник Юпитера обращается на среднем расстоянии примерно 1,9 млн км от планеты, а известные нерегулярные спутники движутся на среднем расстоянии до 31 млн км, что сравнимо с размером сферы Хилла Юпитера [34, 131]. В основном нерегулярные спутники обращаются вокруг своей планеты в направлении, обратном ее вращению. Как правило, нерегулярные спутники собраны в группы, в которых присутствует крупный спутник и более мелкие. Например, в группах спутников Юпитера содержится до 17 мелких спутников, которые продолжают двигаться по сходным орбитам [34, 131]. Наблюдаемые характеристики нерегулярных спутников не представляется возможным описать в представлениях моделей, разработанных для регулярных спутников. Для образования нерегулярных спутников предложены модели захвата планетами–гигантами планетезималей, твердых тел и астероидов из околопланетного пространства, движущихся по гелиоцентрическим орбитам и пересекающих сферу Хилла планеты [34, 131]. При этом группы спутников образуются в результате разрушения захваченного твердого объекта при столкновении его со спутником планеты.

Таким образом, образование нерегулярных спутников укладывается в представления модели твердотельной аккумуляции.

4.4. Модель газопылевых колец как основа построения общей теории образования планетных систем звезд солнечного типа

Проведенный анализ показывает, что единая самосогласованная теория образования планетно–спутниковой системы Солнца может быть построена только на совместных принципах как модели протопланетных колец, так и модели твердотельной аккумуляции. Физическая модель должна включать в себя физические процессы обеих моделей. Однако вклад этих физических процессов в эволюцию протосолнечной туманности на разных ее стадиях существенно различается.

Рассмотрим поэтапно в рамках модели газопылевых колец эволюцию протосолнечной туманности и основные физические процессы, ответственные за эволюцию на этих этапах.

Начальная плотность среды протосолнечной туманности приблизительно составляет $10^{-18} - 10^{-19}$ г/см³, с массовой долей пыли порядка 1% и размером частиц пыли $10^{-5} - 10^{-4}$ см [100, 118, 49, 48]. Объединение и слипание частиц пыли на начальной фазе коллапса ничтожно мало.

На стадии коллапса протосолнечной туманности, инициированного гравитационной неустойчивостью ее газопылевой среды, доминирует процесс самогравитационного сжатия туманности.

На начальной стадии эволюции протопланетного диска плотность его среды возрастает по сравнению с начальной плотностью протосолнечной туманности и изменяется в зависимости от радиуса диска в пределах примерно от 10^{-8} г/см³ до $3 \cdot 10^{-11}$ г/см³ [16, 34, 130]. Пылевая компонента среды диска по массе составляет $\sim 1\%$. Размер пылинок по данным современных исследований, включая и результаты современных наблюдений за протопланетными дисками других звезд [34], находится в пределах 0,1 – 1 см, что значительно превышает размер пылевых частиц в протосолнечной туманности.

На этой стадии эволюции в газопылевой среде протопланетного диска за счет возрастания плотности возникает крупномасштабная гравитационная неустойчивость, в результате которой в диске образуются газопылевые протопланетные кольца на расстояниях, соответствующих орбитам планет [27, 129]. Между орбитами Марса и Юпитера образуется протопланетное кольцо главного пояса астероидов. В промежутках между кольцами газопылевая среда практически отсутствует.

Протопланетные кольца в газопылевой среде протопланетного диска зарождаются в зонах диска, на которые он разделяется в результате гравитационной неустойчивости. Образование колец происходит путем самогравитационного сжатия вещества в возникших зонах диска [6, 12].

По астрофизическим наблюдениям, размеры твердых частиц в протопланетных кольцах в начальной фазе их эволюции могут достигать

сантиметровых размеров [35, 38, 39, 40].

Процесс самогравитационного сжатия вещества в возникших зонах диска существенно преобладает над процессами твердотельной аккумуляции. В то же время столкновения частиц пыли, пылевых сгущений, твердых частиц и их объединение происходит на этом этапе более интенсивно.

Как правило, протопланетное кольцо эволюционирует с образованием протопланетной «туманности» (см. раздел 1). Однако протопланетное кольцо не является независимым образованием, так как в системе протопланетных колец оно гравитационно взаимодействует со всеми кольцами. Фрагментация протопланетного кольца и дальнейшая его эволюция зависят как от гравитационной устойчивости самого кольца, так и от воздействий на него со стороны других колец и зарождающихся в них протопланет. В силу этого разные кольца в образовавшейся структуре колец обладают существенно отличающимися эволюционными характеристиками, что подтвердили современные астрофизические исследования кольцевых структур протопланетных дисков звезд солнечного типа [35, 38, 39, 40]. Существует предположение, что формирование планеты Юпитер происходило значительно раньше некоторых других планет и существенно опережало эволюцию протопланетного кольца главного пояса астероидов [16]. По-видимому, гравитационное воздействие растущего Юпитера было основной причиной, которая для протопланетного кольца главного пояса астероидов нарушила обычную его эволюцию с образованием протопланеты (см. подраздел 4.2). В этих условиях, в отличие от других протопланетных колец Солнечной системы, протопланетное кольцо главного пояса астероидов стало эволюционировать в соответствии с теорией аккумуляции планет из твердых тел и частиц [15, 16]. Такой ход эволюции кольца в окружении формирующихся планет, которые оказывали на него гравитационные воздействия, привел к образованию не планеты, а пояса астероидов. Хотя следует отметить, что в составе главного пояса астероидов образовалась и карликовая планета Церера.

Остальные протопланетные кольца Солнечной системы эволюционировали с образованием протопланетных «туманностей» (см. раздел 1). На этом этапе эволюции протопланетных колец ведущую роль играли физические процессы фрагментации колец на газопылевые сгущения и последующего их объединения в протопланетную «туманность».

Эволюция протопланетной «туманности» происходит подобно эволюции протосолнечной туманности. Под действием самогравитации из протопланетной «туманности» образуется протопланета и ее аккреционный газопылевой протоспутниковый диск (см. подраздел 2.1). На этом этапе преобладают процессы самогравитационного сжатия среды

протопланетной «туманности», а образовавшиеся в этой среде в результате твердотельной аккумуляции твердые частицы и более крупные твердые образования включаются в общий процесс сжатия с образованием протопланеты и далее планеты. На определенном этапе сжатия протопланетной «туманности» в результате совместного действия самогравитации и закона сохранения момента количества движения образуется газопылевой протоспутниковый диск планеты.

Эволюция протоспутникового диска планеты происходит подобно эволюции протопланетного диска. На определенном этапе эволюции в результате гравитационной неустойчивости среды протоспутникового диска происходит образование газопылевых протоспутниковых колец. Эволюция протоспутниковых колец, орбиты которых находятся за пределами Роша, заканчивается образованием регулярных спутников (см. подраздел 2.1). Протоспутниковые кольца, расположенные в пределах Роша, испытывают сильное гравитационное воздействие планеты – приливное воздействие, которое препятствует образованию спутника. Эволюция этих газопылевых колец, как правило, развивается по сценарию модели твердотельной аккумуляции. Подобные кольца планет–гигантов эволюционировали в наблюдаемые в настоящее время кольца этих планет.

Образование нерегулярных спутников, в отличие от регулярных, следует теории аккумуляции планет из твердых тел и частиц.

Таким образом, на основе модели газопылевых колец с включением также принципов модели твердотельной аккумуляции построена общая физическая модель планетных систем звезд солнечного типа, которая описывает образование как планет, так и их спутников.

5. Хаос и самоорганизация при образовании Солнечной системы

Во многих работах [34, 150, 160] утверждается, что Солнечная система в настоящее время имеет высокую степень упорядоченности. С этим нельзя не согласиться. По–видимому, не случайно Резерфорд предложенную им модель атома назвал планетарной моделью, в которой электроны вращаются вокруг ядра подобно планетам Солнечной системы. Каким образом произошла высокая самоорганизация Солнечной системы, которая эволюционировала из первоначально хаотического состояния?

М.Я. Маров, рассматривая самоорганизацию Солнечной системы в рамках традиционных моделей, приходит к выводу, что самоорганизация была обеспечена гравитацией и приливными взаимодействиями [34, 160].

В модели газопылевых колец, которая предложена в данной работе, можно детально проследить за эволюцией Солнечной системы и ее самоорганизацией. Эволюция Солнечной системы есть эволюция протосолнечной туманности, которая рассмотрена в разделах 1 и 2

настоящей главы. Остановимся на основных моментах самоорганизации протосолнечной туманности в рамках предложенной модели. Безусловно, основную роль в самоорганизации Солнечной системы на всех этапах ее эволюции играет закон всемирного тяготения в сочетании с законом сохранения ее момента количества движения. Вместе с тем в процессе образования Солнечной системы отчетливо просматриваются в зависимости от времени несколько основных циклов самоорганизации, каждый из которых был инициирован крупномасштабной гравитационной неустойчивостью среды определенного пространства протосолнечной туманности.

Первый цикл самоорганизации начался с коллапса (стремительного сжатия) протосолнечной туманности и, как известно [27, 129], был инициирован гравитационной неустойчивостью ее среды. Закончился первый цикл самоорганизации образованием Солнца и протопланетного диска (см. раздел 1).

Второй цикл самоорганизации был инициирован крупномасштабной гравитационной неустойчивостью среды протопланетного диска и привел к разделению диска на протопланетные кольца, из которых образовались протопланеты и их протоспутниковые диски. Следует подчеркнуть, что, формируя протопланетные кольца, природа как бы «расставляет» будущие планеты на безопасных от столкновений расстояниях, обеспечивая тем самым устойчивость планетной системы.

Третий цикл самоорганизации был инициирован крупномасштабными гравитационными неустойчивостями сред протоспутниковых дисков и закончился образованием регулярных спутников планет и колец планет-гигантов Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна. Как видно, каждый цикл самоорганизации приводил Солнечную систему к более высокому уровню упорядоченности (порядка).

Каждый из рассмотренных циклов самоорганизации Солнечной системы имеет сложную структуру и требует отдельного рассмотрения, которое выходит за рамки данной работы.

Между циклами самоорганизации должны находиться точки бифуркации. К одной из первых работ, в которой исследовалась эта область самоорганизации в протопланетном диске, по-видимому, можно отнести работу [12].

Как известно [3, 27, 129], при построении математической модели образования Солнечной системы на каждом цикле самоорганизации должны учитываться особенности физической модели и соответственно включаться все физические процессы, значимые для данной области цикла.

В самоорганизации Солнечной системы в модели газопылевых колец обращает на себя внимание эффективность, с которой вещество протопланетного диска аккумулируется в планеты и спутники. Вероятно,

невозможно представить более совершенный и эффективный способ образования планет и спутников, чем механизм с использованием принципа крупномасштабной гравитационной неустойчивости.

Заключение

В настоящей главе предложена модель газопылевых колец, в основе которой лежит зарождение и развитие крупномасштабных гравитационных неустойчивостей, что приводит к образованию газопылевых протопланетных колец в протопланетном диске и газопылевых протоспутниковых колец в протоспутниковых дисках в звездах солнечного типа. В этой модели в результате эволюции из газопылевых протопланетных колец формируются протопланетные сгущения (протопланетные «туманности»), из которых впоследствии образуются протопланеты и их протоспутниковые диски. Протоспутниковые диски в результате их гравитационной неустойчивости разделяются на газопылевые протоспутниковые кольца, из которых происходят регулярные спутники планеты.

Показано, что в представленной модели находят свое естественное объяснение такие наблюдаемые явления и факты в Солнечной системе, как подобие спутниковых систем планет–гигантов и планетной системы Солнца; высокая степень упорядоченности Солнечной системы; долговременная устойчивость планетной системы Солнца, что способствовало зарождению и эволюции разумной жизни на планете Земля; кольца планет–гигантов; образование главного пояса астероидов.

На основе модели газопылевых колец предложена физическая модель единой самосогласованной теории образования планетной системы Солнца, которая объединяет как физические процессы модели газопылевых колец, так и модели твердотельной аккумуляции.

Рассмотрены некоторые вопросы хаоса и самоорганизации при образовании Солнечной системы.

Заключение аналитического обзора

В представленном аналитическом обзоре на основе результатов теоретических исследований, анализа экспериментальных данных и их сопоставления с результатами теоретических исследований предложена альтернативная модель образования планетных систем и их спутников для звезд солнечного типа – модель газопылевых колец.

Основные положения модели газопылевых колец в ее первоначальном варианте, как модели протопланетных колец, были впервые опубликованы в 2006 г., в работе [3] (глава I обзора).

Для выяснения причин образования протопланетных колец в протопланетных дисках звезд солнечного типа были проведены дальнейшие исследования, результаты которых были опубликованы: в 2011 – 2013 годах в работах [6, 7, 81] (глава II обзора); в 2014 г. в работах [8, 9, 10] (главы III, IV, V обзора); в 2018 г., в работе [14] (глава VIII обзора). Результаты проведенных исследований позволяют утверждать, что с высокой степенью вероятности протопланетный диск Солнца в начальной стадии своей эволюции был гравитационно неустойчивым по отношению к крупномасштабным возмущениям с длиной волны, сравнимой с расстоянием между планетами.

В 2014 г., в работе [10] (глава V настоящего обзора) было высказано предположение, что протопланетные кольца могут быть обнаружены экспериментальным путем в ходе проведения астрофизических исследований протопланетных дисков других звезд. Действительно, газопылевые структуры в протопланетных дисках звезд, предсказанные в виде газопылевых протопланетных колец в работах [3, 6, 7, 81, 8, 9, 10, 14], были обнаружены в ходе астрофизических исследований (глава VII обзора).

Для изучения зарождения и эволюции гравитационных неустойчивостей в гравитирующих средах были проведены исследования, результаты которых были опубликованы: в 2016 и 2018 г., в работах [11 – 13] (глава VI обзора). В этих исследованиях были установлены условия зарождения гравитационных неустойчивостей и характерные особенности их эволюции.

Аналитический обзор, проведенный в 2019 и 2020 г. в работах [33, 129] (глава VII обзора), показал, что наблюдаемые структуры газопылевых колец в протопланетных дисках звезд подтверждают достоверность модели протопланетных колец.

В 2021 г. в работе [17] (глава VIII обзора) основополагающие принципы модели протопланетных колец были распространены на образование регулярных спутников планет, и была предложена модель газопылевых колец - полная модель образования планетных систем, включая и их регулярные спутники, для звезд солнечного типа.

В работах [3, 10, 17] (главы I, V и VIII обзора) была высказана точка зрения, что для полного описания процессов, происходящих в Солнечной

системе, недостаточно только принципов модели газопылевых колец, необходимо включение в основные положения также и принципов модели твердотельной аккумуляции. Основные физические положения такой самосогласованной модели на основе модели газопылевых колец предложены в 2021 г., в работе [17] (глава VIII обзора).

В аналитическом обзоре показано, что в представленной модели находят свое естественное объяснение многие наблюдаемые явления и факты в Солнечной системе, например: подобие спутниковых систем планет–гигантов и планетной системы Солнца; высокая степень упорядоченности Солнечной системы; долговременная устойчивость планетной системы Солнца, что способствовало зарождению и эволюции разумной жизни на планете Земля; кольца планет–гигантов; образование главного пояса астероидов и др.

Результаты научных исследований, которые вошли в настоящий аналитический обзор, были в основном получены в рамках выполнения Программ фундаментальных исследований Президиума РАН, научным руководителем которых являлся академик Э.М. Галимов. Эти результаты неоднократно обсуждались на отчетных конференциях в Институте геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН, на других конференциях, в том числе и на международных.

Литература

1. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Механизм аккумуляции планетарных тел. Программа № 25 фундаментальных исследований Президиума РАН. М.: 2004. Инв. № 8-2-04.
2. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца на начальной ее стадии. Программа № 25 фундаментальных исследований Президиума РАН. М.: 2006. Инв. № 8-3-06.
3. Забродин А.В., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Мануковский К.В., Плинер Л.А. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 70. 44 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-70>.
4. Zabrodin A.V., Zabrodina E.A., Legkostupov M.S., Manukovskii K.V. and Pliner L.A. Some Models for the Protoplanetary Disk of the Sun at the Initial Stage of its Evolution // Problems of Biosphere Origin and Evolution. V. 1 (Editor E.M. Galimov). New York: Nova Science Publishers, Inc. 2013. P. 405.
5. Забродин А.В., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Мануковский К.В., Плинер Л.А. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. (Под ред. Э.М. Галимова). М.: Либроком, 2008. С. 297 – 316.
6. Brushlinskii K.V., Pliner L.A., Zabrodina E.A., Menshov I.S., Zhukov V.T., Dolgoleva G.V., Legkostupov M.S. Gravitational instability in the Proto planet disk // III International conference BIOSPHERE ORIGIN AND EVOLUTION / Abstracts. – Rithymno, Crete, Greece, October 16 – 20. 2011. P. 31 – 33.
7. Брушлинский К.В., Долголева Г.В., Жуков В.Т., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Меньшов И.С., Плинер Л.А. К вопросу об эволюции протопланетного диска Солнца // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. Научный сборник под ред. академика Э.М. Галимова. М.: Красанд. 2013. С. 33 – 46.
8. Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть I. Постановка задачи // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 34. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-34>
9. Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть II. Дисперсионные уравнения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 35. 33 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-35>
10. Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть III. К развитию и обоснованию

модели // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 36. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-36>

11. Долголева Г.В., Легкоступов М.С., Плинер Л.А. Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска в одномерном приближении. Часть I. Однородная изотропная среда // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 49. 44 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-49>

12. Долголева Г.В., Легкоступов М.С., Плинер Л.А. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 130 – 148.

13. Dolgoleva G.V., Legkostupov M.S., Pliner L.A. On the issue of the Solar protoplanetary disk // Mathematical models and computer simulations. 2018. V. 10. № 5. P. 616 – 628.

14. Menshov I.S., Zhukov V.T., Legkostupov M.S., Pliner L.A., Dolgoleva G.V., Zabrodina E.A. On the problem of the gravitational instability of the protoplanetary disk of the Sun // 81st annual meeting of the Meteoritical Society // Abstracts. – July 22 – 27, 2018, Moscow, Russia; Meteoritics and Planetary Science. 2018. V. 53. Is. S1. P. 6017.

15. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

16. Витязев А.В., Печерникова Г.В., Сафронов В.С. Планеты земной группы: Происхождение и ранняя эволюция. М.: Наука. 1990. 296 с.

17. Легкоступов М.С. Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем солнечного типа // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 15. 32 с. URL: <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-15>

18. Кант И. Всеобщая естественная история и теория неба. // Сочинения в шести томах. – М.: Мысль. 1963. Т. 1. 543 с.

19. Лаплас П. С. Изложение системы мира. – Л.: Наука. 1982. 376 с.

20. Янов Ю.И. Математика, метаматематика и истина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 77. 32 с.

21. Капица П.Л. Эксперимент. Теория. Практика. – М.: Наука. 1974. 288 с.

22. Струве О.В., Зебергс В. Астрономия 20 века. – М.: Мир. 1968. 551 с.

23. Джевит Д., Клейна Я., Шеппард С. Самые странные спутники в Солнечной системе // В мире науки. 2006. №11. С. 23 – 29.

24. Martins J.H.C. et al. Evidence for a spectroscopic direct detection of reflected light from 51 Peg b. // Astronomy & Astrophysics. 2015. V. 576. A134.

25. Roques F., Scholl H., Sicardy B., Smith B.A. Is there a planet around β Pictoris? Perturbations of a planet on a circumstellar dust disk: 1. The numerical model // *Icarus*. 1994. V. 108. № 1. P. 37 – 58.
26. Wooten A., Tompson A.R.R. The Atakama Large Millimeter/Submillimeter Array // *Proceedings of the IEEE*. 2009. V. 97. Issue 8. P. 1463 – 1471.
27. Легкоступов М.С. К вопросу о модели образования планетных систем звезд // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2018. № 229. 31 с.
28. Ebert R. *Habilitationschrift*. Un. f. Frankfurt-am-Main. 1964.
29. Поляченко В.Л., Фридман А.М. О законе планетных расстояний. // *Астр. ж.* 1972. Т. 49. № 1. С. 157 – 164.
30. Энеев Т.М., Козлов Н.Н. Модель аккумуляционного процесса формирования планетных систем. // *Астр. вест.* 1981. Т. XV. № 3. С. 131 – 140.
31. Галимов Э.М., Кривцов А.М., Забродин А.В., Легкоступов М.С., Энеев Т.М., Сидоров Ю.И. Динамическая модель образования системы Земля-Луна // *Геохимия*. 2005. № 11. С. 1139 – 1150.
32. Галимов Э.М. Образование Земли и Луны из общего супрапланетного газопылевого сгущения // *Геохимия*. 2011. № 6. С. 563 – 580.
33. Легкоступов М.С. К вопросу об астрофизических исследованиях протопланетных дисков звезд // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2019. № 6. 19 с.
34. Кусков О.Л., Дорофеева В.А., Кронрод В.А., Макалкин А.Б. Системы Юпитера и Сатурна: Формирование, состав и внутреннее строение крупных спутников. М.: ЛКИ. 2009. 576 с.
35. Osorio M., Anglada G., Carrasco–González C., et al. Imaging the inner and outer gaps of the pre–transitional disk of HD 169142 at 7 mm // *Astrophys. J. Lett*. 2014. V. 791. L36.
36. Brogan C.L., et al.: (ALMA Partnership), The 2014 ALMA long baseline campaign: first results from high angular resolution observations toward the HL Tau region // *Astrophys. J. Lett*. 2015. V. 808. L3.
37. Dong R., Zhu Z., and Whitney B. Observational signatures of planets in protoplanetary disks. I. Gaps opened by single and multiple young planets in disks // *The astrophysical journal letters*. 2015. V. 809. № 1.
38. Carrasco–González C., Henning T., Chandler C.J., et al. The VLA view of the HL TAU disk: disk mass, grain evolution, and early planet Formation // *The astrophysical journal letters*. 2016. V. 821. № 1. L16.
39. Andrews S.M., Wilner D.J., Zhu Z., Birnstiel T., Carpenter J.M., Pérez L. M., Bai X.–N., Öberg K. I., Hughes M., Isella A. Ringed substructure and a gap

at 1 au in the nearest protoplanetary disk // *Astrophys. J. Lett.* 2016. V. 820. L40.

40. Fedele D., Tazzari M., Booth R., et al. ALMA continuum observations of the protoplanetary disk AS 209 // *A&A.* 2018. V. 610. A24.

41. Имшенник В.С., Мануковский К.В. Двумерная гидростатически равновесная атмосфера нейтронной звезды с заданным дифференциальным вращением // *Письма в Астрон. Журн.* 2000. Т. 26. № 12. С. 917 - 926.

42. Имшенник В.С., Мануковский К.В. Гидродинамическая модель асимметричного взрыва коллапсирующих сверхновых с быстрым вращением и в присутствии тороидальной атмосферы // *Письма в Астрон. Журн.* 2004. Т. 30. № 12. С. 883 - 896.

43. Метод 2D численного расчета газодинамических потоков в подвижных сетках. ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, М. 1989.

44. Гринберг М. Межзвездная пыль. М.: Мир. 1979.

45. Происхождение солнечной системы // Сборник статей под редакцией Г.Ривса. М.: Мир. 1976.

46. Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы.* 1995. Т.29. № 2. С.99.

47. Галимов Э.М. Проблема происхождения Луны // Сб. «Основные направления геохимии», отв. ред. Э.М.Галимов. М.: Наука. 1995.

48. Larson R.B. The evolution of spherical protostars with masses $0,25M_{\odot}$ to $10M_{\odot}$. // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1972. V. 157. Issue 2. P. 121 – 145.

49. Larson R.B. The collaps of rotating cloud // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1972 V. 156. P. 437 - 458.

50. Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы.* 1996. Т. 30. № 6. С. 496.

51. Энеев Т.М., Козлов Н.Н. Модель аккумуляционного процесса формирования планетных систем // *Астрономический вестник.* 1981. Т. XV. № 2. С. 80 -94.

52. Энеев Т.М. Кольцевое сжатие вещества в капельной модели протопланетного облака // *Астрономический вестник.* 1993. Т. XXVII. № 5. С. 3 - 25.

53. Механизм аккумуляции планетарных тел. Итоговый отчет ИПМ им. М.В. Келдыша по программе фундаментальных исследований № 25, подпрограмма № 1, п. 1.1.2. М. 2004. Инв. № 8-2-04.
54. Мануковский К.В. Гидродинамические процессы в тороидальной атмосфере вращающегося коллапсара.: дис. к. ф.-м. н. // М. 2005.
55. Тассуль Ж.-Л. (Tassoul J.-L.) Теория вращающихся звезд. М.: Мир. 1982.
56. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.М., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука. 1976.
57. Снытников В.Н., Пармон В.Н., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Никитин С.А., Снытников А.В. Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 3. С.72.
58. Snytnikov V.N., Dudnikova G.I., Gleaves J.T., Nikitin S.A., Parmon V.N., Stoyanovsky V.O., Vshivkov V.A., Yablonsky G.S., Zakharenko V.S. Space chemical reactor of protoplanetary disk // Adv. Space Res. 2002. V. 30. No. 6. P. 1461 – 1467.
59. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца на начальной ее стадии. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша по Программе фундаментальных исследований № 25 РАН «Проблема зарождения биосферы Земли и ее эволюции», подпрограмма № 1, пункт 1.1.2, М. 2005. Инв. № 8-3-05.
60. Влияние начальных условий на характеристики и эволюцию протопланетного диска. Отчет по Программе фундаментальных исследований № 18 РАН «Проблема зарождения биосферы Земли и ее эволюции», подпрограмма № 1, пункт 1.1.2. М. 2007. Инв. № 8-4-07.
61. Некоторые приближенные модели для численного решения задачи об эволюции протопланетного диска Солнца. Отчет по Программе фундаментальных исследований № 18 РАН «Проблема зарождения биосферы Земли и ее эволюции», подпрограмма № 1, пункт 1.1.2. М., 2008. Инв. № 8-6-08.
62. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца. Отчет по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 15 «Происхождение биосферы и эволюция гео-биологических систем», подпрограмма № 1. М. 2009. Инв. № 8-1-09.
63. Крат В.А. Фигуры равновесия небесных тел. ГТТИ. М., 1950.

64. Лидов М.Л. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения // ДАН СССР. 1954. Т. 97. № 3. С. 409.
65. Men'shov I., Nakamura Y. Instability of isolated compressible entropy-stratified vortices // *Physics of Fluids*. 2005. V. 17. P. 1 - 15.
66. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // *Математическое моделирование*. 2010. 22:10. С.127 - 158.
67. Долголева Г.В. Методы расчета движения двухтемпературного излучающего газа // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 2/13/. С. 29 - 33.
68. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. Физматгиз. М. 1961. С. 113 - 120.
69. Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: «Наука». 1994.
70. Jeans J. H. *Astronomy and cosmogony*. Cambridge. 1929.
71. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. М.: «Наука». 1967.
72. Лифшиц Е.М. // *ЖЭТФ*. 1946. Т. 16. С. 587.
73. Vonnor W. B. // *Appl. Math*. 1967. V. 8. P. 263.
74. Chandrasekhar S. The gravitational instability of an infinite homogeneous medium when Coriolis acceleration is acting // *Vistas in Astronomy*. 1958. V. 1. P. 344.
75. Bel N., Schatzman E. On the gravitational instability of a medium in nonuniform rotation // *Rev. Mod. Phys*. 1958. V. 30. P. 1015 – 1023.
76. Сафронов В.С. О гравитационной неустойчивости в плоских вращающихся системах с осевой симметрией // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 53 – 56.
77. Генкин И.Л., Сафронов В.С. Неустойчивость вращающихся гравитирующих систем с радиальными возмущениями // *Астр. ж.* 1975. Т. 52. Вып. 2. С. 306 – 315.
78. Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // *Ap. J.* 1964. V. 139. P. 1217 – 1238.
79. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: «Наука». 1976.
80. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца. Программа фундаментальных исследований Президиума РАН № 24 «Происхождение биосферы и

эволюция гео-биологических систем», подпрограмма № 1. М. 2010. Инв. № 8-2-10.

81. Брушлинский К.В., Плинер Л.А., Забродина Е.А., Меньшов И.С., Жуков В.Т., Долголева Г.В., Легкоступов М.С. К вопросу неустойчивости протопланетного диска // XIX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко. 10 - 16 сентября 2012 г., п. Абрау-Дюрсо (г. Новороссийск). Россия.

82. Gold T. Problems requiring solution. Origin of solar system. R. Jastrow, A. Cameron. (Eds.). Acad. Press. N. Y. – London. 1963. P. 171.

83. Ларин В.Н. Гипотеза изначально гидридной Земли. М.: «Недра». 1980.

84. Sekiya M., Takeda H. Were planetesimals formed by dust accretion in the solar nebula? // Earth Planets Space. 2003. V. 55. P. 263 – 269.

85. Chiang E.I. Dust in Protoplanetary Disks // Astrophysics of Dust. ASP Conference Series. 2004. V. 309. Proceed. Conf. 26 – 30 May.

86. Галимов Э.М. Анализ изотопных систем (Hf-W, Rb-Sr, J-Pu-Xe, U-Pb) применительно к проблеме формирования планет на примере системы Земля-Луна // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. Научный сборник под ред. академика Э.М. Галимова. М.: «Красанд». 2013. С. 47 – 59.

87. Hartmann W.K., Davis D.R. Satellite-sized planet-esimals and lunar Origin // Icarus. 1975. V. 24. P. 504 – 515.

88. Hejiu Hui, Anne H. Peslier, Youxue Zhang, Clive R. Neal. Water in lunar anorthosites and evidence for a wet early Moon // Nature Geoscience. 2013. V. 6. P. 177 – 180.

89. Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., Чечеткин В.М. Стационарные дисковые структуры около гравитирующих компактных объектов // Астр. ж. 1996. Т. 73. № 3. С. 407 - 418.

90. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией академика И.К. Кикоина. М.: «Атомиздат». 1976.

91. Hoyle F. // Highlights of Astronomy. 1971. V. 2. P. 195.

92. Schatzman E. // Highlights of Astronomy. 1971. V. 2. P. 197.

93. Cameron A.G.W. // Icarus. 1962. V. 1. P. 13.

94. Cameron A.G.W. Accumulation processes in primitive Solar nebular // Icarus. 1973. V. 18. P. 407.

95. Motoyama K., Yoshida T. High accretion rate during class 0 phase due to external trigger // MN Roy. Astron. Soc. 2003. V. 344. P. 461 – 467.

96. Belloche A., Hennebelle P., Andre P. Strongly induced collapse in the Class 0 protostar NGC 1333 IRAS 4A // *Astronomy and Astrophysics*. 2006. V. 453. Issue 1. P. 145 – 154.
97. Beckwith S.V.W., Sargent A.I. Circumstellar disks and the search for Neighbouring planetary systems // *Nature*. 1996. V. 383. P. 139 – 144.
98. Cieza L. A., Kessler-Silacci J. E., Jaffe D. T. et al. Evidence for J- and H-Band Excess in Classical T Tauri Stars and the Implications for Disk Structure and Estimated Ages // *Astrophys. J.* 2005. V. 635. Issue 1. P. 422 – 441.
99. Hueso R., Guillot T. Evolution of protoplanetary disks: constraints from DM Tauri and GM Aurigae // *Astron. Astrophys.* 2005. V. 442. P. 703 – 725.
100. Сурдин В.Г. Рождение звезд. М.: «URSS». 2001. 264 с.
101. Дорофеева В.А., Макалкин А.Б. Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. УРСС. 2004.
102. Eisner J.A., Hillenbrand L.A., Carpenter J.M., Wolf S. Constraining the Evolutionary Stage of Class I Protostars: Multiwavelength Observations and Modeling // *Astrophys. J.* 2005. V. 635. Issue 1. P. 396 – 421.
103. Eisner J.A., Carpenter J.M. Massive Protoplanetary Disks in the Trapezium Region // *Astrophys. J.* 2006. V. 641. Issue 2. P. 1162 – 1171.
104. White R.J., Greene T.P., Doppmann G.W. et al. Stellar properties of embedded protostars // *Protostars and Planets V* / Eds B. Reipurth, D. Jewitt, K.Keil. Tucson: Univ. of Arizona Press. 2007. 951 p. P. 117 – 132.
105. Thommes E.W., Lissauer J.J. Planet migration // *Astrophysics of life*, 16. Edited by Mario Livio, Neill Reid and William Sparks. Cambridge University Press. 2005. P. 50.
106. Lodders K. Solar system abundances and condensation temperatures of Elements // *Astrophys. J.* 2003. V. 591. P. 1220 - 1247.
107. Козлов Н.Н., Энеев Т.М. Численное моделирование процесса образования планет из протопланетного диска // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 1977. № 134.
108. Edgeworth K.E. The origin and evolution of the Solar system // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1949. V. 109. P. 600 - 609.
109. Гуревич Л.Э., Лебединский А.И. Об образовании планет // *Изв. АН СССР. Сер. физич.* 1950. Т. 14. С. 765 - 775.
110. Haisch K. E., Lada E. A., Lada C. J. Disk frequencies and lifetimes in young clusters // *Astrophys. J.* 2001. V. 553. P. L153 – L156.

111. Мясников В.П., Титаренко В.И. Эволюция самогравитирующих сгустков газопылевой туманности, участвующих в аккумуляции планетных тел // *Астр. вест.* 1989. Т. XXIII. № 1. С. 14 – 26.
112. Wetherill G.W. Formation of the terrestrial planet // *Annu. Rew. Astron. Astrophys.* 1980. V. 18. P. 77 - 113.
113. Chambers J.E. Planetary accretion in the inner Solar system // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2004. V. 223. P. 241 - 252.
114. Бонд Дж., Уотсон К., Уэлч Дж. Физическая теория газовой динамики. - М.: Мир. 1968. 556 с.
115. Баум Ф.А., Каплан С.А., Станюкович К.П. Введение в космическую газодинамику. - М.: Издательство физ.-мат. литературы. 1958. 424 с.
116. Горбацкий В.Г. Космическая газодинамика. - М.: Наука. 1977. 360 с.
117. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа. 1970. 712 с.
118. Reipurth B., Jewitt D., Keil K. (eds). *Protostars and planets V.* – Tucson: Univ. Arisona Press. 2007. 951 p.
119. Марочник Л.С., Мухин Л.М. Галактический «пояс жизни» // *Прошлое и будущее Вселенной.* – М.: Наука. 1986. С. 151 – 160.
120. Blitz L. Star forming molecular clouds towards the galactic anticentre // *Giant molecular clouds in the Galaxy.* / Eds. P. M. Solomon, M. G. Edmunds. – Oxford: Pergamon Press. 1980. P. 211 – 229.
121. Шакура Н.И. Дискковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе // *Астрон. ж.* 1972. Т. 49. С. 921 – 929.
122. Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // *Astron. Astrophys.* 1973. V. 24. P. 337 – 353.
123. Beckwith S.V.W., Sargent A.I., Chini R.S., Gusten R. A survey for circumstellar disks around young stellar object // *Astron. J.* 1990. V. 99. P. 924 – 945.
124. Calvet N., D’Alessio P., Hartmann L. and et al. Evidence for a Developing Gap in a 10 Myr Old Protoplanetary Disk // *Astrophys. J.* 2002. V. 568. P. 1008 – 1016.
125. Murachev A.S., Tsvetkov D.V., Galimov E.M., Krivtsov A.M. Numerical Simulation of Circumsolar Ring Evolution // *Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures.* 2018. V. 87. P. 251 – 262.
126. Страховская Л.Г. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2012. № 80. 24 с.

127. Страховская Л.Г. Численная модель вязкого газового диска // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 108. 16 с.
128. Страховская Л.Г. О стационарных состояниях гравитирующего газового диска // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 6. С. 46 – 60.
129. Легкоступов М.С. К вопросу о модели образования планетных систем звезд солнечного типа // Математическое моделирование. 2020. Т. 32. № 3. С. 81 – 101.
130. Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Рускол Е.Л. Моделирование аккреционного протоспутникового диска Юпитера: оценка основных параметров // Астрон. вестн. 1999. Т. 33. № 6. С. 518 – 526.
131. Canup R.M., Ward W.R. Formation of the Galilean satellites: Condition of accretion // *Astronom. J.* 2002. V. 124. P. 3404 – 3423.
132. Coradini A., Federico C., Forni O., Magni G. Origin and thermal evolution of icy satellites // *Surv. Geophys.* 1995. V. 16. P. 533 – 591.
133. Mousis O., Gautier D. Constraints on the presence of volatiles in Ganymede and Callisto from an evolutionary turbulent model of the Jovian subnebula // *Planet. Space Sci.* 2004. V. 52. P. 361 – 370.
134. Alibert Y., Mousis O. Formation of Titan in Saturn's subnebula: constraints from Huygens probe measurements // *Astronomy and Astrophysics.* 2007. V. 465. № 3. P. 1051 – 1060.
135. Pollack J.B., Reynolds R.T. Implications of Jupiter's early contraction history for the composition of the Galilean satellites // *Icarus.* 1974. V. 21. P. 248 – 253.
136. Korycansky D.G., Pollack J.B., Bodenheimer P. Numerical models of giant planet formation with rotation // *Icarus.* 1991. V. 92. P. 234 – 251.
137. Рускол Е.Л. Происхождение спутников Юпитера и Сатурна в аккреционных дисках // Астрон. вестн. 2006. Т. 40. № 6. С. 499 – 504.
138. Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Модели протоспутникового диска Сатурна: условия образования Титана // Астрон. вестн. 2006. Т. 40. № 6. С. 483 – 498.
139. Боярчук А.А., Рускол Е.Л., Сафронов В.С., Фридман А.М. Происхождение Луны: спутниковый рой или мегаимпакт? // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 4. С. 481 – 484.
140. Галимов Э.М. О происхождении вещества Луны // *Геохимия.* 2004. № 7. С. 691 – 706.

141. Isella A., Benisty M., Teague R., Bae J., Keppler M., Facchini S., Pérez L. Detection of Continuum Submillimeter Emission Associated with Candidate Protoplanets // *Astrophys. J. Lett.* 2019. V. 879. № 2. L25.
142. Siddiqi A.A. *Beyond Earth: A Chronicle of Deep Space Exploration, 1958 – 2016.* National Aeronautics and Space Administration, Office of Communications, NASA History Division. 2018.
143. Harland D.M. *Mission to Saturn: Cassini and the Huygens probe.* Springer Science & Business Media. 2002.
144. Nicholson P.D., et al. A close look at Saturn's rings with Cassini VIMS // *Icarus.* 2008. V. 193. № 1. P. 182 – 212.
145. Порко К. «Кассини» у Сатурна // *В мире науки.* 2017. № 12. С. 118 – 127.
146. O'Donoghue J., Moore L., Connerney J., Melin H., Stallard T.S., Miller S., Baines K.Y. Observations of the chemical and thermal response of 'ring rain' on Saturn's ionosphere // *Icarus.* 2019. V. 322. P. 251 – 260.
147. Iess L., Militzer B., Kaspi Y., Nicholson P., Durante D., Racioppa P., Anabtawi A., Galanti E., Hubbard W., Mariani M. J., Tortora P., Wahl S., Zannoni M. Measurement and implications of Saturn's gravity field and ring mass // *Science.* 2019. V. 364. № 6445.
148. Cuzzi J.N., Estrada P.R. Compositional evolution of Saturn's rings due to meteoroid bombardment // *Icarus.* 1998. V. 132. № 1. P. 1 – 35.
149. Энеев Т.М, Козлов Н.Н., Кугушев Е.И., Чечеватов Д.А. О возможном механизме образования естественных спутниковых систем // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2006. № 72. 20 с.
150. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша. Модели образования планетной системы Солнца в свете зарождения в ней разумной жизни. Программа № 28 фундаментальных исследований Президиума РАН. М. 2014. Инв. № 8-12-14.
151. Wetherill G.W. Occurrence of Giant Impacts during the growth of the terrestrial planets // *Science.* 1985. V. 228. P. 877 – 879.
152. Прокофьева В.В., Таращук В.П., Горькавый Н.Н. Спутники астероидов // *Успехи физических наук.* 1995. Т. 165. № 6. С. 661 – 689.
153. Горькавый Н.Н. Образование Луны и двойных астероидов // *Изв. Крымской Астрофиз. Обс.* 2007. Т. 103. № 2. С. 143 – 155.
154. Симоненко А.Н. *Астероиды.* М.: Наука. 1985. 208 с.
155. Petit J.M., Morbidelli A., Chambers J. The Primordial Excitation and Clearing of the Asteroid Belt // *Icarus.* 2001. V. 153. № 2. P. 338 – 347.

156. Fernie J. D. The American Kepler // *American scientist*. 1999. V. 87. № 5. P. 398 – 401.
157. Joy K.H., Zolensky M.E., Nagashima K., Huss G.R., Ross D.K., McKay D.S., Kring D.A. Direct Detection of Projectile Relics from the End of the Lunar Basin–Forming Epoch // *Science*. 2012. V. 336. Issue 6087. P. 1426 – 1429.
158. Batygin K., Brown M.E. Early dynamical evolution of the Solar System: Pinning down the initial conditions of the Nice model // *The Astrophysical Journal*. 2010. V. 716. № 2. P. 1323 – 1331.
159. Urey H.C. Diamonds, Meteorites, and the Origin of the Solar System // *The Astrophysical Journal*. 1956. V. 124. P. 623.
160. Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2014. 648 с.
161. Страховская Л.Г. О трехмерном численном моделировании гидродинамической и гравитационной неустойчивости протопланетного диска // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32. № 10. С. 105–118.
162. Страховская Л.Г., Жуков В.Т. Численное моделирование гидродинамической и гравитационной неустойчивости протопланетного диска // Программа Президиума РАН «Эволюция органического мира. Роль и влияние планетарных процессов». ГЕОХИ. Отчетная конференция 2019 г. Февраль 2020 г.

Оглавление

Вступительное слово.....	3
Введение.....	5
Глава I. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции.....	10
Глава II. К вопросу об эволюции протопланетного диска Солнца.....	60
Глава III. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – аналитические решения. Постановка задачи	81
Глава IV. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – аналитические решения. Дисперсионные уравнения.....	95
Глава V. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – аналитические решения. Анализ дисперсионных уравнений.....	122
Глава VI. Гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца – численное моделирование.....	140
Глава VII. К вопросу о модели образования планетных систем звезд солнечного типа	164
Глава VIII. Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем звезд солнечного типа	182
Заключение аналитического обзора.....	206
Литература	208