



В.Э. Войцехович

Математика будущего

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Войцехович В.Э. Математика будущего // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности: труды 4-й Международной конференции (4-5 февраля 2021 г., Москва). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2021. — С. 100-108. — <https://keldysh.ru/future/2021/8.pdf>
<https://doi.org/10.20948/future-2021-8>

Размещено также [видео выступления](#)

Математика будущего

В.Э. Войцехович

Тверской государственный университет

Аннотация. Математика вошла в кризис сложности. Главная причина – оперирование неизменными понятиями согласно закону тождества логики Аристотеля. Доказательства стали сверхдлинными, непроверяемыми. Преодоление кризиса возможно при переходе от неизменных понятий к «движущимся», при обобщении закона тождества. В современной математике появились предпосылки такого перехода – в качественной теории, теории вероятностей, теории алгоритмов, основаниях. Будущее математики – в освоении категорий как трансформирующихся понятий.

Ключевые слова: математика, кризис, покой, движение, философия движения, математика движения и развития

Mathematics of the future

V.E. Voytsekhovich

Tver state university

Abstract. Mathematics has entered a crisis of complexity. The main reason is the use of immutable concepts according to the law of identity of Aristotle's logic. The evidence has become super-long, unverifiable. Overcoming the crisis is possible in the transition from immutable concepts to "mobile" ones, in the generalization of the law of identity. In modern mathematics, there are prerequisites for such a transition – in qualitative theory, probability theory, algorithm theory, and foundations. The future of mathematics lies in the development of categories as transformative concepts.

Keywords: mathematics, crisis, immobility, movement, philosophy of movement, mathematics of movement and development

Математика – теория всех возможных форм.

С. Маклейн

Кризис

Математика давно стала ядром рационализма и языком научного познания. Но и современная наука, и рациональное мышление, и цивилизация, и культура сегодня в кризисе.

В чём проявляется кризис в математике?

1) Эта наука стала гигантской и потеряла целостность. За 2,5 тыс. лет накопился огромный объём знаний, который ВЕСЬ не знает никто. Специалисты соседних областей не понимают друг друга. Крупных исследовательских программ, подобных программе Д. Гильберта, за 120 лет не появилось.

2) Хотя математика целостна (по убеждению коллективного автора Н. Бурбаки), однако интегрировать её не удаётся. Попытки объединить эту науку, хотя бы в основаниях, ни к чему не привели. Г. Кантор, Б. Рассел, Д. Гильберт, Л. Брауэр, С. Маклейн разными способами пытались сделать свою науку единой, но это так и не удалось.

3) В предыдущие столетия математика опережала развитие естествознания. Сегодня математика потеряла роль лидера, поставщика структур, дающих формальное решение проблем в физике, биологии и других науках. Найдены десятки уравнений. Но не известно, как их решать.

4) Доказательства важных теорем достигли 1000 страниц. Кто их будет читать и, тем более, проверять? Специалистов высшего уровня единицы на планете. Например, Филдсовский комитет поручил трём группам математиков проверить доказательство важной теоремы А. Пуанкаре, представленное Г.Я. Перельманом в 2002-03 гг. После их положительных ответов как окончательного авторитета комитет попросил Л.Н. Громова проверить доказательство теоремы Пуанкаре. Громов 2 года молчал, а затем написал ДА. Комитет объявил о победе Перельмана. Как выглядит проверка доказательства? Как мнение высшего авторитета. Математика всё более похожа на религию, где святой отец (например, папа Римский) изрёк «божественную» истину и «верующие верят».

5) Проблема веры в компьютерные доказательства. Математическое сообщество раскололось – одни ЗА, другие ПРОТИВ. Известный учёный Громов пишет: со временем появятся компьютерные доказательства в тысячи страниц, но их никто не будет понимать. Признать ли такие доказательства? Для одной части математиков нужно «человеческое» доказательство, т.е. ЯСНОСТЬ. Другая часть верит в компьютер, в искусственный интеллект. Кто прав?

Вывод: математика находится в кризисе – кризисе сложности [1,5,6].

От сложности к высшей простоте

Подобные кризисы были и в прошлом, особенно при завершении жизненного цикла цивилизации. Например, в конце древнегреческой цивилизации алгебра стала трудно понимаемой и сложной, т.к. имела геометрическую форму, и уравнения записывали словами. Диофант (III в.) начал вводить буквенную символику, сделав уравнения более сокращёнными и легче понимаемыми. Но подлинный скачок в алгебре произошёл после Средневековья – в конце XVI – начале XVII в., когда Ф. Виет и Р. Декарт создали буквенное исчисление.

Аналогичный скачок произошёл в конце XIX в. в теории инвариантов. П. Гордан доказал основную теорему этой теории. Доказательство заняло примерно 100 страниц преобразований. Однако через несколько лет Д. Гильберт представил доказательство на 2 страницах. Гордан возмутился: «Это теология, а не математика!» Он подразумевал, что настоящая математика – это уравнения и вычисления. Но сообщество математиков пошло по пути Гильберта, т.е. выдвижения принципиально нового понятия, нового метода, обобщающего и интегрирующего предыдущее знание. Гильберт пробил стену сложности и нашёл **высшую простоту**.

Подобные скачки качественного обобщения, интеграции происходили в самых разных науках – физике, химии, биологии, лингвистике.

От хаоса к циклам

В XXI-XXII вв. завершается **индустриально-технологическая, буржуазная цивилизация**. Она вошла в **стадию хаоса**. Отсюда кризис социума, перелом в развитии рационализма, науки, математики. Одни авторы предполагают возникновение посткапитализма, другие – постиндустриализма. На мой взгляд, произойдёт крутой поворот, появится более духовная цивилизация. По гипотезе Н.А. Бердяева (1917) – **Новое Средневековье**. Это соответствует циклической, **периодической схеме эволюции** западного социума, начиная с VI в. до РХ. Система ценностей периодически меняется на противоположную: внешняя – внутренняя – внешняя ... или телесная – духовная – телесная – ... Внешняя ориентация (космоцентризм философии, науки о природе, техника Древней Греции возникли и развивались 6 веков), затем внутренняя ориентация (господство религии в период Средневековья, продолжавшийся 12 веков), затем с XVII в. вновь внешняя ориентация (возрождение интереса к науке и технике, формирование капитализма Нового времени). Завершается в XXI-XXII вв. При каждом переходе меняется господствующее мировоззрение и характер познания, особенно науки.

С XVII по XXI вв. наука прошла стадии – классической – механистической науки, неклассической – квантово-релятивистской и постнеклассической – фрактальной.

3. Философия цифрового мира

От Парменида к Гераклиту

«Движенья нет», сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал. И стал перед ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить.

А.С. Пушкин

С конца XX в. наука вошла по В.С. Стёпину в стадию **постнеклассической науки**, называемой на Западе наукой о сложности. Главную её особенность назвал создатель синергетики **И. Пригожин**: наука движется от Парменида к Гераклиту. Что это значит? В VI в. до РХ в Греции шёл спор между Парменидом и Гераклитом. Первый утверждал «Бытие есть. Небытия нет». Второй: «Бытие есть. Небытие тоже есть».

Первый – Парменид. Второй – Гераклит. Столкнулись два учения – о едином неподвижном бытии и о множественном движении-бытии, содержащем в себе небытие как потенциальное бытие.

Через 3 столетия Аристотель поддержал Парменида, когда, создавая логику, ввёл 1-й закон – **закон тождества**. Смысл понятия должен сохраняться неизменным в процессе рассуждения. Логика тождества стала базисом всей науки.

В то же время Аристотель поддержал и Гераклита в учении о категориях и о потенциальном бытии. Гераклит создал диалектику как учение о всеобщем движении и развитии, в котором образы и понятия перетекают друг в друга. Гегель, продолжая Гераклита, создал собственный вариант диалектической онтологии и начал развивать диалектическую логику, в которой понятия движутся, трансформируются, как бы «плавают». Логика покоя столкнулась с логикой движения, в которой закон тождества нарушается.

В XX в. И. Пригожин заявляет об исчерпанности пути Парменида и мышления неподвижными понятиями. Согласно теории самоорганизации в бытии (природе и обществе) всё движется, перетекает друг в друга. Так должно быть и в мышлении, тем более, в науке. Закон тождества Аристотеля пора обобщить.

Аристотель ввёл категории как всеобщие понятия (покой и движение, пространство и время, причина и следствие ...). В поисках главной категории он пришёл к **движению**. Аристотель согласился с Гераклитом: только из движения можно вывести остальные категории – покой, пространство и время, причину и следствие ... В основе бытия лежит движение, а покой – тоже движение, вырожденное.

Абсолютизация покоя

На свете счастья нет,
Но есть покой и воля.

А.С. Пушкин

Но это вывод гения. А большинство людей во всём стремится к покою – к неизменности традиций, семьи, образа жизни, религии, государства. Чем обусловлена эта подсознательная установка? По видимому главным требованием живой субстанции: **самосохранением**.

Жизнь любого биовида проходит в борьбе покоя и движения, поиске равновесия **между самосохранением и адаптацией**. Но локально на первом месте у индивида самосохранение.

Это привело к подсознательной абсолютизации покоя и мышлению покоя, т.е. памяти на основе неподвижных картинок (образов), иероглифов, знаков и оперированию символами. Мифы, религии, наука успешно развивались на символической базе тысячи лет. Однако в XX в. путь Парменида исчерпывается. В эволюции мышления возникает борьба: старое – новое, покой – движение.

Научное познание основано на рациональном мышлении, а его ядром издревле называют математику. Как наука она создана Пифагором и успешно развивалась столетиями на основе оперирования **неизменными понятиями**. Работа обычного математика стала напоминать открывание дверей или расшифровку неизвестного текста. Есть замок (задача), нужно подобрать ключ (выбрать из множества известных структур – топологических, алгебраических, аналитических – ту, которая решит задачу). Например, есть рукопись Войнича, нужно расшифровать её.

Трансформация мышления

Отсюда трудность трансформации мышления, а также современной цивилизации и культуры в понимании движения. Работает цепочка:

МЫШЛЕНИЕ → РАЦИОНАЛЬНОЕ МЫШЛЕНИЕ →
МАТЕМАТИКА (ядро рационального мышления).

На этом пути и возникла проблема **сложности**. Алгоритмы по расшифровке сообщений становятся всё более длинными, а время расшифровки старым методом (подбором ключей) превосходит не только возраст Метагалактики, но и все разумные пределы.

Возникает вопрос: можно ли проникнуть в комнату принципиально иным способом, чем подбором искомого ключа? Например, заставить гвоздь, вставленный в отверстие замка, трансформироваться или перетечь так, чтобы открыть замок. Или проникнуть в комнату через окно, через

3. Философия цифрового мира

стену, потолок или вывернуть вселенную и т.д. Все эти способы требуют изменения, трансформации и инструментов, и субъекта.

Так и происходит в жизни планеты: если биовид (или их класс, например, динозавры) заходит в тупик и препятствует эволюции биосферы, то такой класс биовидов уничтожается. Эволюция идёт иным путём: те биовиды, которые ранее не имели возможности развития, фактически были в тени – потенциальными, становятся актуальными. Например, после гибели динозавров млекопитающие стали господствующим классом биовидов.

Аналогично проходит эволюция социума в период Средневековья. Религиозная цивилизация забыла проблемы и достижения греков, поставила совершенно иные, религиозно-духовные задачи и развивала соответствующие науки (теологию, философию, логику, риторику).

Сегодня наступил период отказа от старого рационализма и поиска нового. По Пригожину – путь Гераклита.

От философии к математике

В условиях перехода к мышлению движущимися понятиями **падает роль** покоящихся, неподвижных понятий и образов – знаков, **символов, неподвижных изображений.**

Возрастает роль метафор (интерпретаций), нечёткого мышления, видео, клипового переживания и тому подобных «живых» образов, движущихся знаков. Возрастает и роль философии как поставщика наиболее общих образов, понятий, учений. Например, Аристотель ввёл в философии систему категорий. Её развивали И. Кант и Г. Гегель. В 1945 г. С. Маклейн и С. Эйленберг создали теорию математических категорий, которая породила теорию топосов. Теория категорий стала наиболее общим основанием математики на настоящий момент. Получена как проекция философских понятий на область алгебраической топологии.

Аналогично ещё в XVII в. Г. Лейбниц создал собственное философское учение – монадологию, а затем спроектировал её на математику, ввёл символы d и \int и получил дифференциальное и интегральное исчисления, ставшее формальным аппаратом естествознания. Все учебники матанализа написаны по Лейбницу.

Предпосылки математики развития

Они уже появились в различных разделах математики, логики, информатики.

Качественная теория

С конца XIX в. развивалась качественная теория дифференциальных уравнений. Она стала удобным аппаратом для исследования нелинейных систем (гидродинамика, теория горения, радиофизика, нелинейная теория оболочек).

В связи с ними быстро развивалась топология и функциональный анализ. Отсюда видно, что в математике формировались аналоги диалектики Гегеля: понятия качества, бифуркации (качественного скачка), локального и глобального. В XX в. наметилась борьба между аналитическими методами и геометрическими, локальными и глобальными, вычислительными и как бы «интуитивными». Из-за проблемы сложности ведущие математики всё более отдают предпочтение геометрическим методам. Например, известный авторитет Громов мыслит геометрически.

Теория вероятностей

Вероятность как мера возможности наступления данного события свелась к оценке отношения между классами и к теории меры по А.Н. Колмогорову. Философски выражаясь, отношение 2 покоев порождает меру и как бы движение.

Альтернативой теории вероятностей стала теория возможностей, опирающаяся на теорию нечётких множеств и нечёткую логику [7]. Неопределённые понятия стали обобщением фиксированных понятий и сдвигом к движущимся образам и понятиям, отходом от закона тождества и началом его обобщения.

Ряд консервативных математиков не понимают смысла радикальных сдвигов в своей науке и жалуются на потерю определённости [4]. Да, происходит отход от прежних требований к строгости доказательств, их смягчение. Возрастание роли возможности и неопределённости приведёт и к пересмотру теории информации, т.к. современное понимание информации сводится к различению, т.е. такому распределению субстанции в пространстве-времени, которое уменьшает неопределённость при решении задачи. Благодаря различию и вводится единица информации бит (0, 1). Его тоже придётся обобщить.

Теория алгоритмов

Алгоритм есть конечная совокупность правил преобразования исходного объекта, описывающая порядок действий субъекта при решении задачи. Здесь исходный неподвижный объект за счёт преобразований движется к другому объекту как искомому решению. Сущность алгоритма сводится к цепочке трансформации исходного объекта (объектов) O_n так, чтобы получить конечный объект (решение) O_k :

$$O_n \rightarrow \dots \rightarrow O_k.$$

Типичный пример – доказательство Г. Перельманом гипотезы Пуанкаре. Споры («доказал – не доказал») здесь шли вокруг критериев строгости трансформаций промежуточных объектов.

А поскольку доказательства достигли нескольких сотен страниц, стали чрезвычайно сложными, то в будущем остаётся либо отдать доказательства ИИ (они, по выражению Громова, станут непроверяемыми и не осмысляемыми человеком [3]), либо сменить критерии доказательности,

3. Философия цифрового мира

сделать их интеллектуально наглядными и интуитивно ясными. Так, как было в Индии тысячи лет назад. На стене одного из храмов вырезана окружность, треугольники, делящие окружность, и надпись «СМОТРИ!». Вычислений нет. К рисунку сведено доказательство формулы площади круга

$$S = \pi R^2.$$

Вероятно, эволюция математики ведёт нас к, как бы, повторению высшей простоты древности на следующем витке цикла познания.

Возможно, интуитивные «человеческие» доказательства в будущем будут дополнены компьютерными, выполненными сильным ИИ. Человек освоит мышление движения, а ИИ будет дополнять человеческое доказательство с помощью мышления покоя. Тогда человеческое доказательство будет в одну страницу, а компьютерное в десять тысяч страниц.

Методы обоснования

В логике известно 2 главных метода обоснования тезиса (доказательства теоремы): аксиоматический и генетический. В современной математике проявились многие недостатки аксиоматического метода, поэтому сообщество учёных всё более фокусируется на генетическом (в том числе, алгоритмическом) методе.

Основания

Проблема обоснования математики началась с Н.И. Лобачевского, открывшего первую неевклидову геометрию. К. Гаусс, Б. Риман, Э. Бельтрами, А. Пуанкаре, Г. Кантор, Г. Фреге, Б. Рассел подготовили почву для выдвижения в начале XX в. ведущих программ обоснования – логицизма, формализма и интуиционизма. Если первые 2 были опровергнуты теоремами К. Гёделя, то программа Л. Брауэра (1907) осталась неопровергнутой, но и не принятой частью научного сообщества. Сущность её сводится к понятиям свобода, становление, выбор и другим, вводящим в математику образы субъекта, интуитивного озарения, творения... [2]. Это не случайно: на голландца оказали значительное влияние буддизм и даосизм, отсюда понимание математики как свободного искусства. Однако замысел Брауэра остался невоплощённым из-за господства в сознании учёных формально-доказательного понимания своей науки. Творчество (как область хаоса, нелогичного взаимопревращения понятий) не было признано математикой. Логика подавила её и привела к современному кризису. В то же время появление в интуиционизме особого творящего субъекта стало важным признаком будущего пересмотра сущности этой науки. Если до Брауэра математику сводили к доказательству, то субъектность и движение приводят к признанию метафоры

МАТЕМАТИКА = ТВОРЕНИЕ + ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Итоги

Как в математике, так и науке в целом происходит сдвиг от оперирования неподвижными понятиями, линейной картины мира к оперированию обобщённо-нечёткими понятиями и нелинейному, сложностному «ФИЛЬМУ» мира, в котором образы движутся, плавают, живут. А научное осознание реальности – не статический образ, а непрерывная смена картин подобно кадрам в фильме. Это живая, развивающаяся мыслеформа. Вместо научной картины мира необходимо ввести **«научный фильм мира»**.

Наука сближается с искусством. Жёсткое дискретное однозначное мышление сливается с мягким, непрерывным художественно-эмоциональным переживанием-мышлением.

Происходит сближение **философии, математики, науки.** Всеобщие философские образы и категории трансформируются в конкретно-научные понятия. Духовность проникает даже в математику. Лейбниц писал «Музыка – это математика духа», а согласно метафоре логика Дж. Спенсера-Брауна «Математика – это своеобразная медитация, или психоделия».

Подобный процесс многократно повторялся в истории познания: в начале философы, писатели, поэты выдвигают фантастические образы, строят воображаемые миры, затем (иногда через тысячи лет) учёные переоткрывают то же самое, давно забытое на своём языке и вводят сходные (гомоморфные) идеи и структуры в свои науки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-511-00028).

Литература

1. *Аришинов В.И.* Синергетика как феномен постнеклассической науки. – М.: ИФ РАН, 1999. – 203 с.
2. *Гейтинг А.* Интуиционизм. – М., 1965. – 200 с.
3. *Громов Л.Н.* Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль. – МЦНО, 2017. URL: https://docplayer.ru/81675481-M-gromov-kolco-tayn-vsennaya-matematika-mysl.html#show_full_text
4. *Клайн М.* Математика. Утрата определённости. – М.: Мир, 1984. – 446 с.
5. *Малинецкий Г.Г.* Будущее в зеркале науки // Контуры цифровой реальности: Гуманитарно-технологическая революция и выбор будущего. – М.: ЛЕНАНД, 2018. С.19-44.
6. *Морен Э.* О сложности. – М.: ИФ РАН. 2019. – 272 с.
7. *Zadeh L.* Fuzzy Sets as Bases for a Theory of Possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1:3 – 28, 1978.