ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Будущее-2024 • Труды конференции

М.Е.Степанцов

Клеточные автоматы как математические модели

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Степанцов М.Е. Клеточные автоматы как математические модели // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности: труды 7-й Международной конференции (15-17 февраля 2024 г., Москва). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2024. — С. 244-250. — https://keldysh.ru/future/2024/6-1.pdf https://doi.org/10.20948/future-2024-6-1

Размещено также ***видео выступления***

Клеточные автоматы как математические модели

М.Е. Степанцов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Аннотация. В работе обсуждается вопрос применения клеточных автоматов в качестве математических моделей, позволяющих находить решения задач, сформулированных в виде дифференциальных уравнений. Для класса задач, используемых при моделировании социально-экономической динамики, доказана сходимость решения, получаемого при помощи клеточного автомата к решению исходного дифференциального уравнения. Рассмотрен вопрос о применимости клеточных автоматов в таких задачах.

Ключевые слова: математическое моделирование, клеточные автоматы, сходимость

Cellular automata as mathematical models

M.E. Stepantsov

RAS Keldysh Institute of Applied Mathematics

Abstract. The paper considers using cellular automata as mathematical models to solve problems based on differential equations. The convergence of the solution obtained using a cellular automaton to the solution of the original differential equation has been proven for a class of problems used in socio-economic modeling. We discuss the applicability of cellular automata in such problems.

Keywords: mathematical modeling, cellular automata, convergence

Многие задачи социально-экономической динамики требуют для своего решения построения математических моделей и исследований на их основе. Методы этого моделирования имеют естественнонаучное происхождение и основаны на дифференциальном и интегральном исчислении, то есть используют для описания количественных характеристик процессов непрерывные величины, в то время как социальная и экономическая реальность обыкновенно носят существенно дискретный характер. При этом решение полученных дифференциальных уравнений зачастую требует применения численных методов, например, разностных схем. В результате при построении таких моделей дважды совершается переход между парадигмами: вначале дискретная реальность заменяется непрерывной математической моделью, а затем та подвергается обратной дискретизации при использовании численного метода. Оба перехода несут риск появления каких-либо несоответствий и снижают адекватность результирующей модели.

Таким образом, моделирование с применением дискретных моделей таких процессов может во многих случаях быть более уместным, чем использование классических непрерывных подходов.

Одним из возможных вариантов дискретного моделирования социально-экономической динамики является использование моделей класса клеточных автоматов.

Клеточный автомат представляет собой бесконечное множество одинаковых конечных автоматов, заданных в узлах однородной равномерной сетки в пространстве. Выходной алфавит этих автоматов совпадает с их множеством состояний, а входной представляет собой совокупность всех возможных состояний автоматов, сопоставленных соседним узлам.

В терминах клеточных автоматов узлы решетки принято называть *клетками*, а их множество – *полем клеточного автомата*. Состояния автомата называются состояниями клетки, а функция переходов – правилами клеточного автомата. Соседями данной клетки называются клетки, расположенные рядом с ней, причем здесь есть терминологический произвол – понятие «рядом» определяется для каждого конкретного клеточного автомата по-своему. Набор соседей и их расположение относительно данной клетки образуют окрестность клеточного автомата. Например, в случае ортогональной двумерной сетки мы можем назвать соседями четыре клетки, имеющие с данной общую сторону (окрестность фон Неймана), или добавить к ним еще четыре, лежащие по диагонали (окрестность Мура). Время в такой системе дискретно, шаг по времени постоянен.

При этом такие модели можно строить непосредственно на основе существенных свойств моделируемого явления, так чтобы их макродинамика соответствовала макродинамике существующих непрерывных моделей.

Применение клеточных автоматов для математического моделирования

Основоположником этого подхода и автором идеи клеточного автомата, безусловно, следует считать фон Неймана, который рассматривал более широкую проблематику: речь шла о моделировании самовоспроизводящихся систем, то есть, в том числе, и живых организмов. Планируя объединить в единую теорию принципы организации естественных и искусственных систем, он вначале намеревался построить непрерывную модель самовоспроизведения, основанную на дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих диссипативные процессы. Однако в итоге он перешел от «кинематической» модели воспроизведения к тому, что назвал «клеточной структурой», то есть, в современных терминах – к клеточному автомату.

В шестидесятые годы XX в. Холланд использовал клеточные автоматы для решения задач оптимизации, для чего создал программный имитатор дискретных моделей. Один из их будущих создателей машин клеточных автоматов, Тоффоли, начинал свои исследования клеточных автоматов, работая с этим имитатором.

Доказанные Ричардсоном, Пэттом и Аморозо вычислимость клеточных автоматов и возможность сведения любого клеточного автомата к универсальному, имеющему восемь состояний клетки и окрестность Мура, подводят теоретический фундамент под принципиальную возможность моделирования при помощи клеточных автоматов и проверки адекватности таких моделей.

На основании этих теоретических результатов Тоффоли предложил использовать клеточные автоматов для математического моделирования непосредственно явлений окружающего мира, а не только общих его аспектов, таких, как конкуренция, эволюция и т. п, для чего модель должна сохранять информацию в процессе своей эволюции, то есть быть обратимой [1].

Беннет и Гринстейн, в свою очередь, рассмотрели вопросы, связанные с возможностью физического моделирования при помощи необратимых клеточных автоматов. В [2] было показано, что они могут быть применены для моделирования диссипативных и иных необратимых процессов.

Характерной особенностью клеточных автоматов является простота правил и однородность моделей, что позволяет многократно увеличивать скорость моделирования на компьютерах с высокой степенью параллельности процессоров, дающих возможность одновременно обновлять состояния миллионов клеток [3]. Это очень сильно убыстряет вычисления по сравнению с обычными компьютерами.

Большая работа в теоретических исследованиях и систематизации этих моделей была проделана Стивеном Волфрамом который является издателем журнала *Complex Systems*, целиком посвященного клеточным автоматам.

Следует указать, что, несмотря на широкое применение клеточных автоматов в математическом моделировании физических процессов, построить единый общий алгоритм создания моделей класса клеточных автоматов взамен дифференциальных и интегральных зависимостей, по-видимому, невозможно в силу существенного разнообразия физических моделей. Возможно лишь разработать подход к их использованию в отдельных областях.

Сходимость решения на основе клеточного автомата к решению обыкновенного дифференциального уравнения

При этом следует обратить внимание на то, что при моделировании социально-экономических явлений применяемый для этого математический аппарат уже не столь разнообразен, как в случае физических задач. Здесь используются дифференциальные уравнения первого порядка, зачастую – обыкновенные, в самых сложных случаях – содержащие интегральные члены. Это дает возможность применить общий подход к построению клеточно-автоматных моделей в качестве альтернативы как аналитическому решению дифференциальных уравнений, так и разностным схемам для этого класса задач.

Итак, наша задача состоит в том, чтобы в дискретной модели динамика среднего значения величины x по ансамблю клеток соответствовала решению уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Здесь t – независимая переменная, обычно, но не обязательно, представляющая собой время.

Построим стохастический клеточный автомата с произвольной окрестностью, правила которого задают переход клетки, находящейся в состоянии x^*, в состояние, соответствующее значению $x^* + \delta x^*$ при $f(x^*) > 0$ и $x^* - \delta x^*$ при $f(x^*) < 0$ (где δx^* – шаг изменения величины x при переходе к следующему состоянию клетки) с вероятностью p.

Представим вероятность такого перехода в виде $p = \alpha|f(x,t)|$ и найдем коэффициент α

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = |f(x,t)|$$

Поскольку шаг по времени в клеточном автомате принимается за 1, а динамика в течение шага не меняется, изменение величины x численно равно значению производной в момент шага

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}.$$

Усредняя изменения состояния клеток по всему полю клеточного автомата, получаем $\Delta x = p\delta x^*$. Откуда $\frac{dx}{dt} = p\delta x^*$, а $\frac{dx}{dt} = \alpha|f(x,t)|\delta x^*$ и $|f(x,t)| = \alpha|f(x,t)|\delta x^*$, так что $\alpha = \frac{1}{\delta x^*}$.

Итак, для замены простой дифференциальной зависимости требуется построить стохастический клеточный автомат, в котором вероятность перехода клетки в соседние состояния будет задаваться формулой:

$$p = \frac{1}{\delta x^*} |f(x,t)|$$

Теперь докажем, что решение, полученное при помощи такого клеточного автомата, на некотором интервале $t \in (t_1, t_2)$ сходится в среднем к решению, полученному при помощи явной разностной схемы Эйлера, если число состояний клеточного автомата устремить к бесконечности, при условии, что решение исходного дифференциального уравнения и его производная ограничены на указанном интервале.

Пусть для определенности m состояний клетки соответствуют m значениям $x^* \in [0:1]$ (переход к такому диапазону осуществляется заменой переменной $x' = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$). Тогда $\delta x^* = \frac{1}{m}$.

Рассмотрим явную разностную схему, один из шагов которой имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{h} = f(x_0, t_0)$$

При $h \to 0$ определяемое ей решение сходится к решению исходного дифференциального уравнения.

Положим без ограничения общности $f(x_0, t_0) > 0$.

$$x = x_0 + hf(x_0, t_0)$$

При этом в построенном выше клеточном автомате клетка i с вероятностью $p = mh\, f(\bar{x}_0, t_0)$ переходит из состояния x_0^* в состояние $x^* = x_0^* + \frac{1}{m}$, противоположное событие состоит в том, что она остается в состоянии x^*. Обозначим ξ_i случайную величину, равную изменению состояния клетки i.

$$\bar{x} = \overline{x_i^*} = \overline{x_{0i}^*} + \bar{\xi_i} = \overline{x_0} + \frac{p}{m} = x_0 + hf(x_0, t_0)$$

Как и следовало ожидать, величина, получаемая усреднением чисел, задающих состояние клеток, оказывается в точности равна решению, получаемому на основании разностной схемы, при этом само значение этой случайной величины необязательно совпадет с ним.

При этом совпадение будет тем точнее, чем больше величина m. Однако при $m \to \infty$ может быть нарушено естественное условие $p \leq 1$.

Поэтому нужно воспользоваться тем, что переход к решению исходного дифференциального уравнения осуществляется при $h \to 0$. Если устремить m к бесконечности при условии $mh = const < max\, f(x,t)$, то мы получим предельный переход от решения, получаемого при помощи клеточного автомата, к решению исходного дифференциального уравнения.

Следует указать, что данное утверждение имеет лишь теоретический смысл, а именно – обоснование того, что решение дифференциальных уравнений путем замены их клеточными автоматами является следующим шагом на пути дискретизации переменных по сравнению с разностными схемами.

В вопросе же сходимости решения, полученного при помощи клеточного автомата к решению дифференциального уравнения имеет место более сильное утверждение. Поскольку мы уже имеем, что величина $\overline{x_i^*}$, описывающая решение задачи при $m \to \infty$ и $h \to 0$, сходится в среднем к решению дифференциального уравнения, рассмотрим дисперсию этой величины.

$$D(\overline{x_i^*}) = D\left(\overline{x_{0i}^*} + \overline{\xi_i}\right) = D(\overline{\xi_i})$$

Пусть количество клеток на поле клеточного автомата равно n.Тогда

$$\overline{\xi_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$D(\overline{\xi_i}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{p(1-p)}{m^2} = \frac{1}{n}\frac{p(1-p)}{m^2}$$

Вспомним, что $p = mh\, f(\bar{x}_0, t_0)$

$$D(\overline{x_i^*}) = \frac{h\, f(x_0, y_0)(1 - mh\, f(x_0, y_0))}{nm}$$

Таким образом, $D(\overline{x_i^*}) \to 0$ при $n \to \infty$, при этом нет необходимости, чтобы $m \to \infty$, а дальнейшая необходимость положить, что $h \to 0$, не ухудшает эту сходимость. То есть, решение, полученное при помощи клеточного автомата, сходится по вероятности к решению исходного дифференциального уравнения без необходимости увеличивать количество состояний клетки.

Точно такой же подход был использован автором ранее в частном примере, находящемся за пределами области применимости доказанных утверждений, а именно: для рассмотрения решеточного HPP-газа с переменной температурой рассматривались клетки, соответствующие частицам, движущимся всего с двумя значениями скоростей, соответствующих минимальной и максимальной из рассматриваемого в задаче диапазона температур [4].

Применимость предложенного подхода

Здесь может возникнуть законный вопрос: в чем смысл применения клеточных автоматов для нахождения решения дифференциального уравнения, если, как видно из доказанного, в рамках заявленных требований такое решение может быть получено и при помощи разностной схемы? Дело в том, что модель на основе клеточного автомата позволяет не только получить решение, соответствующее макродинамике исходного дифференциального уравнения, но и ввести в задачу дополнительные факторы (вариацию параметров, локальные взаимодействия, пространственное распределение и т.п.), которые сложно или невозможно учесть в рамках классического подхода, включающего использование дифференциальных уравнений и разностных схем.

Автор успешно использовал клеточно-автоматный подход для такого расширения области применимости исходных дифференциальных моделей при исследовании движения неорганизованной группы людей [5], системы «власть-общество» [6], предложенной А.П. Михайловым [7], бинарного информационного противоборства [8] и динамики численности профессиональной группы [9].

Следует также отметить, что клеточно-автоматные модели могут значительно снизить характерное время вычислений при использовании специализированных компьютеров с высокой степенью параллельности [3].

Литература

1. *Fredkin E., Toffoli T.* Conservative Logic // Int. J. Theor. Phys. 1982, 21, 249-253.
2. Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process // IBM J. Res. Devel. 1961, 5, 183-191
3. *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. – М.: Мир, 1991. – 280 с.
4. *Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Клеточные автоматы для расчета некоторых газодинамических процессов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996, 36(5), 137-145.
5. *Степанцов М.Е.* Математическая модель направленного движения группы людей // Математическое моделирование. 2004, 16(3), 43-49.
6. *Степанцов М.Е.* Моделирование системы «власть-общество-экономика» с элементами коррупции на основе клеточных автоматов // Математическое моделирование. 2017, 29(9), 101-109.
7. *Михайлов А.П.* Математическое моделирование власти в иерархических структурах // Математическое моделирование. 1994, 6(6), 108-138.
8. *Степанцов М.Е.* Модель информационного противоборства на основе клеточного автомата // Математическое моделирование. 2020, 32(7), 47-58.
9. *Малинецкий Г.Г., Равлюк С.Г., Степанцов М.Е.* Моделирование и прогнозирование динамики возрастной структуры учителей // Социология: методология, методы, математические модели, 2006, №23, 169-194.